

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

INTEGRALES SINGULIERES  
ET FONCTIONS DIFFERENTIABLES  
DE PLUSIEURS VARIABLES

Par

Elias STEIN

Octobre 1966 - Mars 1967, chapitres I à VI

Notes recueillies par : Messieurs BACHVAN et SOMEN

Mathématiques  
(Service des Publications)  
Faculté des Sciences.

91-ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

INTEGRALES SINGULIÈRES  
ET FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES  
DE PLUSIEURS VARIABLES

Par

Elias STEIN

Octobre 1966 - Mars 1967, chapitres I à VI

Notes recueillies par : Messieurs BACHVAN et SOMEN

Mathématiques  
(Service des Publications)  
Faculté des Sciences

91-ORSAY (France)

Le manuscrit a été dactylographié par Mademoiselle BOULANGER.

Premier tirage (ch. I-IV) : juin 1967.

Second tirage (ch. I-VI) : décembre 1967.

Les exemplaires peuvent-être commandés au Secrétariat de Mathématiques.

Les modalités de parution de la fin du cours seront annoncées dans le Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay 1967-1968.

Chapitre zéro.Table des matières.Recueil de notations.1.- Table des matières.

PAGES	PREMIERE PARTIE : OCTOBRE 1966--JANVIER 1967.
	Ch.I <u>Quelques outils importants de la théorie des fonctions d'une variable réelle.</u>
I.1	§. 1 La fonction maximale.
I.8	§. 2 Partage d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ en cubes.
I.13	§. 3 Un théorème d'interpolation pour les $L^p$ .
I.18	Bibliographie du chapitre I.
	Ch.II <u>Intégrales singulières.</u>
II.1	§. 1 Quelques résultats classiques.
II.3	§. 2 Coeur du sujet : une large classe de noyaux.
II.14	§. 3 Les noyaux de CALDERON-ZYGMUND.
II.24	§. 4 Extension du premier théorème (2.1).
II.26	Bibliographie du chapitre II.
	Ch.III <u>Transformation de RIESZ, intégrale de POISSON pour un demi-espace, harmoniques sphériques.</u>
III.1	§. 1 Cas $n = 1$ . Transformation de HILBERT.
III.2	§. 2 Cas $n \geq 2$ . Les transformations de RIESZ.
III.5	§. 3 L'intégrale de POISSON pour un demi-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ .
III.14	§. 4 Comparaison entre un ensemble de transformées de RIESZ d'une fonction et un système conjugué de fonctions harmoniques.

PAGES	
III.16	§. 5 Intervention des harmoniques sphériques.
III.24	Bibliographie du chapitre III.
	Ch.IV <u>La théorie de LITTLEWOOD-PALEY. Les multiplicateurs de <math>L^p</math>.</u>
IV.1	§. 0
IV.2	§. 1
IV.20	§. 2 Les multiplicateurs de $L^p$ .
IV.27	§. 3 Emploi du système de RADEMACHER.
IV.31	§. 4 Un autre type de multiplicateurs de $L^p$ .
IV.46	Bibliographie du chapitre IV.
SECONDE PARTIE : FEVRIER-MARS 1967	
	Ch.V <u>Potentiels de MARCEL RIESZ et potentiels de BESSEL. Espaces vectoriels de fonctions caractérisées par des propriétés de leurs intégrales de POISSON.</u>
V.1	§. 1 Potentiels de MARCEL RIESZ.
V.6	§. 2 Espaces de SOBOLEV.
V.11	§. 3 Noyaux béséliens.
V.17	§. 4 Propriétés fondamentales des $\mathcal{L}_\alpha^p$ .
V.22	§. 5 Les espaces $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$ . Cas des espaces $\Lambda_{\alpha}$ .
V.27	§. 6 Etude des espaces $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ .
V.34	§. 7 Relations entre potentiels de BESSEL et espaces $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$ .
V.38	§. 8 Relations entre espaces $\mathcal{L}_\alpha^p$ et $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$ .
V.42	Bibliographie du chapitre V.

PAGES	Ch.VI <u>Prolongement à <math>\mathbb{R}^n</math> d'une fonction différentiable définie sur un fermé de <math>\mathbb{R}^n</math>. Prolongement à <math>\mathbb{R}^{n+1}</math> d'une fonction différentiable définie au-dessus du graphe d'une application lipschitzienne <math>\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}</math>.</u>
VI.1	§. 0
VI.2	§. 1 Découpage d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ en cubes.
VI.10	§. 2 Le théorème de prolongement de WHITNEY : cas élémentaire.
VI.16	§. 3 Le théorème de prolongement de WHITNEY : cas général.
VI.23	§. 4 <u>Prolongement à <math>\mathbb{R}^{n+1}</math> d'une fonction dérivable définie au-dessus du graphe d'une fonction lipschitzienne <math>\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}</math>.</u>
VI.27	Figures du n° 4.2.
VI.41	Bibliographie du chapitre VI.
	TROISIEME PARTIE : AVRIL-MAI 1967 : <u>à paraître.</u>

2.- Recueil de notations.

PAGES	
I.2	$M_f$ : <u>fonction maximale de</u> $f$ .
	$E_{g,\alpha}$ : <u>ensemble des points où</u> $g$ <u>est</u> $> \alpha$ .
	$ E $ : <u>mesure de l'ensemble</u> $E$ .
	$n$ : dimension de $\mathbb{R}^n$ .
I.6	$\blacksquare$ : signale la fin (ou l'abandon !) d'une démonstration.
I.13	$L^p + L^q$ : ensemble des $f_p + f_q$ ( $f_p \in L^p$ , $f_q \in L^q$ ).
II.1	$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ , $L^p(\mathbb{R}^n)$ , $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
	$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ : les mesures de $\mathbb{R}^n$ de masse totale finie.
II.2	TRANSFORMÉE de FOURIER : sera notée $\mathcal{F}f$ ou $f^\wedge$ ; <u>normalisée par</u> $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(2\pi i(x y)) dx$ (où $(\dots \dots)$ est le produit scalaire). L'absence du signe - devant $2\pi i$ entraîne un décalage avec certaines références du ch.III.
II.3	$ x $ : <u>norme euclidienne du vecteur</u> $x \in \mathbb{R}^n$ .
II.14	$\Omega$ : expression faisant partie d'un noyau de CALDERON-ZYGMUND.
II.15	$\sum$ : sphère unité de $\mathbb{R}^n$ . $x^\sharp$ : point de $\sum$ ; parfois point associé à $x$ par $x^\sharp = \frac{x}{ x }$ .
II.16	$T_\epsilon$ ( $\epsilon > 0$ ) : voir théorème II.3.2.
II.22	(et aussi page III.2) v.p. : "valeur principale".
II.24	$L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{K})$ , $\mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ : voir II.4.1.2 et II.4.1.5.
II.25	$L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2))$ : voir II.4.1.6.
III.2	v.p. : se reporter page II.22 $\Omega_j(x) = c_n x_j /  x $ ( $j = 1, \dots, n$ ) où

PAGES

- $c_n = \Gamma(\frac{n+1}{2}) / \pi^{\frac{n+1}{2}}$ .
- III.3  $K_j(x) = \Omega_j(x) / |x|^n$ .  
 $R_j$  :  $j^{\text{ème}}$  transformation de MARCEL RIESZ.
- III.5  $R^n$  considéré comme hyperplan de  $R^{n+1}$ .  
 $R_{n+1}^+$  : demi-espace positif associé à l'hyperplan  $R^n$  de  $R^{n+1}$ .
- III.6  $\Delta$  : laplacien (selon le contexte relatif aux  $n$  variables  $x_j$ , ou relatif aux  $n+1$  variables  $x_j$  et  $y$  ( $j = 1, \dots, n$ )).  
 $P_y(x)$  : noyau de POISSON pour le demi-espace  $R_{n+1}^+$  de  $R^{n+1}$  ; est calculé pages III.6-7.
- III.3 I.P.f : "intégrale de POISSON" pour le demi-espace  $R_{n+1}^+$  de  $f$  définie sur l'hyperplan  $R^n$ .
- III.17  $S_{n-1}$  : sphère unité de  $R^n$ .  
 $\mathcal{H}_k$  : voir III.5.2.
- III.19  $\mathcal{J}_{k,n}$  : voir III.5.6.
- IV.2  $\text{grad } u$  : gradient (même remarque que pour  $\Delta$  ci-dessus (page III.6)).  
 $g(f)$ ,  $g(f,x) = g(f)(x)$  : voir définition IV.1.1.
- IV.11  $g_1(f,x)$ ,  $g_k(f,x)$  : voir IV.1.6.1 et 1.6.3.
- IV.12  $g_\lambda^*(f,x)$ ,  $S(f,x)$ ,  $\Gamma(x_0)$  : voir définition IV.1.7.1.
- IV.16  $M_r(f)$  : voir définition IV.1.7.3.4.
- IV.20  $m$ ,  $T_m$ ,  $\mathbb{M}_p$  : voir définition IV.2.1.
- IV.27  $r_p$  :  $p^{\text{ème}}$  fonction du système orthonormé de RADEMACHER.
- IV.28  $T \otimes I$  : voir IV.3.2.
- IV.32  $\rho_m$ ,  $S_{\rho_m}$ ,  $S_\rho$  : voir théorème IV.4.1.
- V.1  $\Delta$  : ici laplacien à  $n$  variables.  
 $\mathcal{J}_\alpha$ ,  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  : voir formules (2) et (3) de V.1.1.  
 $\mathcal{Y}_\alpha = 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$ .



- PAGES  $\mathcal{P}_\alpha$  : voir formules (3) et (4) de V.1.3.
- V.6  $\mathcal{D}$  : les fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts.
- V.7  $L_k^p(\mathbb{R}^n)$  : espace de SOBOLEV.
- V.12  $G_\alpha$  : noyau de BESSEL.
- V.14  $\mathcal{J}_\alpha$  : convolution par  $G$ .
- V.15  $\mathcal{L}_\alpha^p = \mathcal{J}_\alpha(L^p)$ .
- V.17  $\omega_p(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_{L^p(x)}$  "L<sup>p</sup>-module de continuité de  $f$ ".
- V.22  $\Lambda_\alpha^{p,q}, \Lambda_\alpha$  : voir définition V.5.1.
- VI.2  $F$  : un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ( $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ ).
- $\Omega$  : l'ouvert complémentaire de  $F$ .
- $(Q_m)$  : les cubes d'un découpage de  $\Omega$ .
- $c_1, c_2$  : voir énoncé V.1.1.
- VI.3  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_m$  : voir V.1.1.
- VI.6  $Q^\varepsilon$  : cube déduit du cube  $Q$  par l'homothétie de centre le centre de  $Q$  et de rapport  $1 + \varepsilon$ .
- VI.7  $N^*$  : voir corollaire VI.1.7.
- VI.8  $\delta$  : fonction dérivable dans  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ , à peu près proportionnelle à la distance à  $F$ .
- VI.9  $\psi, \psi_m$  : voir VI.1.8.4.
- VI.10  $\mathcal{B}_1(F)$  : voir définition VI.2.1.  $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n) =$  les fonctions bornées et lipschitziennes sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $$M_f = \sup_{x,y \in F; x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}.$$
- VI.11  $\mathcal{E}_1 : \mathcal{B}_1(F) \rightarrow \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$  prolongement de WHITNEY.
- $\Phi, \Phi_m$  : voir VI.2.3.1.
- VI.16  $\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$  : voir définition VI.3.1.

## PAGES

- VI.17  $\mathcal{B}_k(F)$  : voir définition VI.3.3.  
 $\vec{F} = (f^{(\alpha)})_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}$  : voir définition VI.3.3.  
 $P_j(b,c), R_j(b,c)$  : voir définition VI.3.3.
- VI.18  $\mathcal{E}_k : \mathcal{B}_k(F) \longrightarrow \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$  prolongement de WHITNEY.
- VI.23  $\omega$  : ouvert au-dessus du graphe d'une fonction lipschitzienne.  
 $L_k^p(\omega)$  : espace de SOBOLEV relatif à  $\omega$ .  
 $\mathcal{E}$  : prolongement de CALDERON.
- VI.24  $s = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d$  : voir VI.4.1.  
 $\varphi$  : fonction lipschitzienne  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ .  
 $M_\varphi = M$  : constante de LIPSCHITZ de  $\varphi$ .  
 $G_\varphi =$  graphe de  $\varphi =$  frontière de  $\omega$ .  
 $\Gamma$  : cône des  $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $|y| \geq M|x|$ .  
 $\Gamma^+, \Gamma^-, \Gamma(s), \Gamma^+(s), \Gamma^-(s)$  : voir VI.4.1.
- VI.25  $\delta^*$  : voir lemme VI.4.2.2  
 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{x,y,\lambda} = (x, y + \lambda \delta^*(x,y))$ .
- VI.28  $\psi$  : fonction auxilliaire  $[1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$  (voir lemme VI.4.3.2).
- VI.29  $\gamma_p$  : contour orienté reproduit dans la figure page VI.27
- VI.32  $\omega'$  : ouvert contenant  $\bar{\omega}$ .

voir figure  
page VI.27

## Chapitre I

### Quelques outils importants de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Les idées fondamentales des méthodes de variable réelle que nous utiliserons ont pour source la théorie de la différentiation et en particulier le théorème de différentiation de l'intégrale. Avec notre point de vue moderne, nous pouvons ici isoler trois idées.

a) Une "fonction maximale" donnant lieu à une inégalité "de type faible" fondamentale.

b) Pour prouver cette propriété de la fonction maximale, un lemme de recouvrement "du type de VITALI".

c) En conséquence, une inégalité pour  $L^p$ .

La méthode de démonstration de c) sera généralisée (voir quatrième théorème : 3.3) sous la forme d'un théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ.

Le schéma de la preuve du premier théorème donne un aperçu de toutes ces méthodes.

#### 1.- La fonction maximale.

1.1 Définition de la fonction maximale. Soit  $f$  une fonction réelle, mesurable,

définie sur  $\mathbb{R}^n$ . On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

La "fonction maximale" de  $f$  est  $Mf$ .

1.2 Notations.— Etant donnée une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on note

$$E_{g,\alpha} = \text{ensemble des } x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } g(x) > \alpha.$$

Si  $f$  est prise comme dans la définition ci-dessus, alors  $Mf$  désignera toujours sa fonction maximale.

Si  $E$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ ,  $|E|$  désignera sa mesure.

La lettre  $n$  sera réservée à la dimension d'un espace  $\mathbb{R}^n$  où on se place.

1.3 Premier théorème.— Soit  $f$  une fonction réelle mesurable définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

i) Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors sa fonction maximale  $Mf$  est presque partout finie.

ii) Pour tout  $\alpha > 0$ , on a

$$|E_{Mf,\alpha}| \leq \frac{A}{\alpha} \int |f| dx$$

où  $A$  ne dépend que de la dimension  $n$  ( $A = 5^n$  convient).

iii) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 < p < \infty$ , alors

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $p$  et de la dimension  $n$ .

iv) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1.4 Remarque.— Prenant  $n=1$  et  $f(x) = 1$  pour  $0 < x < 1$ , on voit que

iii) serait faux avec  $p = 1$ .

1.5 Preuve du premier théorème.— D'après les définitions de  $M_f$  et de  $E_{M_f, \alpha}$ , pour tout  $x \in E_{M_f, \alpha}$ , il existe une boule de centre  $x$ , notée  $B_x$  telle que

$$(1) \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha |B_x|.$$

Or d'une part (1) donne  $|B_x| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$  pour tout  $x \in E_{M_f, \alpha}$ , et d'autre part quand  $x$  parcourt cet ensemble, il est recouvert par les  $B_x$ . Donc d'après le lemme ci-dessous (1.6), de cette famille de boules on peut extraire une suite,

notée  $(B_{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  : boules deux à deux disjointes, telles que

$$(2) \sum_{k \in \mathbb{N}} |B_{(k)}| \geq C |E_{M_f, \alpha}|$$

(où  $C = 5^{-n}$  convient). Appliquant (1) puis (2) à chacune des boules  $B_{(k)}$ , qui sont deux à deux disjointes, il vient

$$\int_{\cup B_{(k)}} |f(x)| dx \geq \alpha \sum |B_{(k)}| \geq \alpha C |E_{M_f, \alpha}|$$

Comme le premier membre est majoré par  $\|f\|_1$ , on obtient en prenant

$A = \frac{1}{C}$  les assertions ii), puis i) du théorème.

Preuve de iii).—  $A_\infty = 1$  convient pour  $p = \infty$ ; supposons désormais  $1 < p < \infty$ .

Notons  $g$  la fonction (qui dépend de  $f$  et du nombre  $\alpha > 0$ ) définie par

$$(3) \quad g(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{si } |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ \text{zéro} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, successivement

$$Mf \leq \frac{c}{2} + Mg,$$

$$E_{Mf, \alpha} \leq c E_{Mg, \frac{\alpha}{2}},$$

$$(4) \quad |E_{Mf, \alpha}| \leq |E_{Mg, \frac{\alpha}{2}}| \leq \frac{2A}{\alpha} \|g\|_1.$$

En effet, on peut appliquer la conclusion ii) à  $g$  qui appartient à  $L^1$  par construction (3) d'après l'hypothèse  $f \in L^p$  ( $1 < p < \infty$ ).

Observons que si  $h$  est une fonction mesurable finie dans  $\mathbb{R}^n$ , en notant pour tout  $\beta > 0$

$$\lambda_h(\beta) = \text{mesure de } E_{h, \beta} = |E_{h, \beta}|$$

la fonction  $\lambda_h$  est décroissante, et que pour tout exposant  $q > 0$  on a

$$\int |h(x)|^q dx = - \int_0^\infty \beta^q d(\lambda_h(\beta)) = q \int_0^\infty \beta^{q-1} \lambda_h(\beta) d\beta$$

(intégrales de STIELTJES) par intégration par parties du second membre.

En particulier (voir (2) et (4))

$$\begin{aligned} (\|Mf\|_p)^p &= \int |Mf|^p dx = p \int \alpha^{p-1} |E_{Mf, \alpha}| d\alpha \leq \\ &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left( \frac{2A}{\alpha} \int_{E_{|f|, \frac{\alpha}{2}}} |f(x)| dx \right) d\alpha \end{aligned}$$

qui vaut, intégrant d'abord par rapport à  $\alpha$ ,

$$2Ap \int |f(x)| \left( \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha \right) dx.$$

Or par hypothèse  $p - 2 > -1$ , donc c'est aussi

$$\frac{2Ap}{p-1} \int |f| |2f|^{p-1} dx ;$$

ceci prouve iii) (avec, toutes réductions faites,

$$(A_p)^p = \frac{2^p 5^{-n}}{p-1} \quad (p \text{ fini})$$

et  $A_\infty = 1$  ).

Pour prouver iv), on se ramène au cas  $p=1$  en multipliant  $f$  par une fonction égale à 1 sur une boule ouverte contenant le point à étudier, et à zéro ailleurs.

Notons pour tout  $r > 0$ ,  $f_r$  la fonction

$$(5) \quad f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy.$$

On sait que si  $f \in L^1$ , alors quand  $r \rightarrow 0$ ,  $f_r$  tend vers  $f$  en norme

$L^1$ .

Il reste donc seulement à établir que

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x)$$

existe pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Notons pour tout  $g \in L^1$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(6) \quad \Omega g(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} g_r(x) - \liminf_{r \rightarrow 0} g_r(x)$$

où  $g_r$  est défini comme  $f_r$ .

A) Si  $g$  est continue à support compact, alors  $g_r \rightarrow g$  simplement, donc  $\Omega g$  est identiquement nulle.

B) Si  $g$  est sommable positive, alors d'après ii)

$$|E_{2Mg, \epsilon}| \leq \frac{2A}{\epsilon} \|g\|_1 \quad (\epsilon > 0).$$

A fortiori d'après les définitions (1.1) de  $Mg$  et (6) de  $\Omega g$

$$|E_{\Omega g, \epsilon}| \leq \frac{2A}{\epsilon} \|g\|_1.$$

C) Décomposons  $f \in L^1$  en

$$f = \Upsilon + g^+ - g^-$$

où  $\Upsilon$  est continue à support compact. La définition (6) pour  $\Omega f$ , puis A) pour

$g = \Upsilon$  donnent

$$\Omega f \leq \Omega \Upsilon + \Omega(g^+) + \Omega(g^-) = \Omega(g^+) + \Omega(g^-)$$

d'où, d'après B) appliqué à  $g^+$  et  $g^-$

$$|E_{\Omega f, 2\epsilon}| \leq \frac{2A}{\epsilon} (\|g^+\|_1 + \|g^-\|_1) = \frac{2A}{\epsilon} \|g\|_1.$$

Comme, dans la décomposition de  $f$ , on peut choisir  $\Upsilon$  de manière que  $\|g\|_1$  soit petit, on voit bien que  $\Omega f$  est nulle presque partout.

1.6 Comparé aux versions raffinées du théorème de recouvrement de VITALI, le résultat suivant semble très partiel. C'est néanmoins un outil rapide pour obtenir des résultats fonctionnels intéressants (th. 1.3).

Lemme.— Soit  $E$  un ensemble mesurable  $\subset \mathbb{R}^n$ , recouvert par une famille de boules  $B_j$  ( $j \in J \neq \emptyset$ ) telles que

$$\sup_{j \in J} |B_j| < \infty$$

(autrement dit  $\sup_{j \in J} (\text{diamètre de } B_j) < \infty$ ).



Alors de cette famille on peut extraire une suite (finie ou infinie) de boules  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) deux à deux disjointes, telles que

$$(1) \quad \sum_k |B_k| \geq C |E|$$

(où  $C$  ne dépend que de la dimension  $n$  ;  $C = 5^{-n}$  convient).

1.7 Preuve.- 1<sup>o</sup> Choix des  $B_k$  : On choisit d'abord  $B_1$  tel que diamètre de  $B_1 \geq \frac{1}{2} \sup_{j \in J} (\text{diamètre de } B_j)$ .

Supposons définies  $B_1, \dots, B_k$ . Alors ou bien il existe une boule  $B_{j_0}$  telle que

$$B_{j_0} \cap B_p = \emptyset \quad \text{pour } p = 1, \dots, k, \quad \text{et}$$

$$\text{diam } B_{j_0} \geq \frac{1}{2} \sup (\text{diamètre des boules } B_j \text{ telles que } B_j \cap (\bigcup_1^k B_p) = \emptyset)$$

ou bien il n'en existe pas.

Dans le premier cas, on peut adopter  $B_{k+1} = B_{j_0}$ . Dans le second cas, on s'arrête. Soit  $(B_1, B_2, \dots)$  la suite finie ou infinie de boules ainsi sélectionnées par récurrence. Elles sont disjointes deux à deux. Que  $|E|$  soit fini ou non, si  $\sum |B_k| = +\infty$ , on peut dire que (1) du lemme est réalisé.

2<sup>o</sup> Preuve dans le cas où  $\sum_k |B_k| < \infty$ .

Notons  $B_k^*$  la boule de même centre que  $B_k$  et de rayon cinq fois plus grand.

J'affirme que  $E \subset \bigcup_k B_k^*$ .

Il suffit de voir que pour tout  $j \in J$  on a  $B_j \subset \bigcup_k B_k^*$ .

Soit donc  $B_j$  une boule de la famille initiale. S'il existe un entier  $k$

tel que  $B_j \subset B_k$ , alors  $B_j \subset B_k^*$ .

Supposons donc que pour tout entier  $k$ , on a  $B_j \not\subset B_k$ .

Comme les  $B_k$  sont deux à deux disjointes et que  $\sum_k |B_k| < \infty$ , il existe un plus grand indice entier, noté  $k(j)$ , tel que

$$\text{diamètre de } B_{k(j)} \geq \frac{1}{2} \text{ diamètre de } B_j.$$

Donc, diamètre de  $B_{(k(j)+m)}$   $< \frac{1}{2}$  diamètre de  $B_j$  pour tout entier  $m \geq 1$ .

Il en résulte qu'il existe un entier  $r \in \{1, \dots, k(j)\}$  tel que

$$B_r \cap B_j \neq \emptyset.$$

En effet, l'hypothèse contraire et la récurrence dans le choix des  $B_k$  montrent qu'on aurait alors dû adopter

$$B_{(k(j)+1)} = B_j$$

alors que nous nous trouvons dans le cas où pour tout  $k$  on a  $B_j \not\subset B_k$ .

Prenant  $r(j)$  le plus petit  $r \in \{1, \dots, k(j)\}$  tel que  $B_r \cap B_j \neq \emptyset$ , on a alors  $B_j \subset B_{r(j)}^*$  (d'après la condition sur le diamètre de  $B_{r(j)}$ ), comme voulu.

Enfin, d'après  $E \subset \bigcup_k B_k^*$ , et  $|B_k^*| = 5^n |B_k|$ , on a

$$|E| \leq \left| \bigcup_k B_k^* \right| \leq 5^n \sum_k |B_k|.$$

## 2.- Partage d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ en cubes.

L'énoncé suivant est dû à WHITNEY. Nous le plaçons ici surtout pour des

raisons pédagogiques. Comme son usage n'est pas ici indispensable, nous le prouverons dans la seconde partie du cours <sup>ch.VI, § 1</sup>. C'est un théorème sur la structure géométrique d'un ouvert arbitraire de  $\mathbb{R}^n$  qui ne recourt pas à la théorie de la mesure. Son contenu peut être ainsi interprété.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut dire qu'un ouvert arbitraire peut être découpé en cubes, dont les diamètres et les distances à la frontière de l'ouvert sont du même ordre de grandeur. Déjà pour  $n = 1$ , cette décomposition diffère beaucoup de celle d'un ouvert en ces composantes connexes.

2.1 Second théorème.— Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Alors son complémentaire  $\Omega$  est réunion d'une suite de cubes  $Q_k$ , à côtés parallèles aux axes de coordonnées, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et dont les diamètres sont à peu près proportionnels à leurs distances à  $F$  :

$$i) \quad \Omega = \bigcup_{k \geq 1} Q_k.$$

$$ii) \quad Q_j \cap Q_k = \emptyset \quad \text{pour } j \neq k.$$

iii) Il existe deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  ne dépendant que de la dimension  $n$ , telles que pour chaque cube  $Q_k$

$$c_1 (\text{diamètre de } Q_k) \leq \text{distance de } Q_k \text{ à } F \leq c_2 (\text{diamètre de } Q_k).$$

2.2 Troisième théorème.—

Soient  $f$  sommable positive sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha$  une constante  $> 0$ .

Alors il existe une décomposition  $(P, Q)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$i) \quad \mathbb{R}^n = P \cup Q, \quad P \cap Q = \emptyset.$$

$$ii) \quad f(x) \leq \alpha \text{ presque partout sur } P.$$

iii)  $Q = \bigcup_{k \geq 1} Q_k$  : réunion de cubes d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, avec pour chaque  $Q_k$

$$(1) \quad \alpha < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x) dx \leq 2^n \alpha.$$

Ce théorème, dû à CALDERON et ZYGMUND, jouera un rôle fondamental dans le traitement des intégrales singulières au chapitre II.

2.3 Preuve du troisième théorème. - Couvrons  $\mathbb{R}^n$  par une suite de cubes "égaux"

$(Q_m^{(j)})_{m \in \mathbb{N}}$ , l'ensemble des sommets étant l'ensemble des points dont les  $n$  coordonnées sont des multiples entiers de  $2^{-j}$ , où  $j$  est un entier  $\geq 0$  ou  $\leq 0$ , mais assez petit pour que, quel que soit le cube  $Q_m^{(j)}$  on ait

$$\frac{1}{|Q_m^{(j)}|} \int_{Q_m^{(j)}} f dx \leq \alpha$$

(c'est possible, car le dénominateur vaut  $2^{-nj}$ ).

Soit  $Q'$  un de ces cubes. On le partage en  $2^n$  cubes "égaux" (dont les arêtes ont pour longueur  $2^{-j-1}$  et sont parallèles aux axes). Soit  $Q''$  un de ces nouveaux cubes.

Premier cas :  $\frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} f dx \leq \alpha.$

Second cas :  $\frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} f \, dx > \alpha.$

Dans ce second cas, on ne poursuivra pas la décomposition de  $Q'$ , qui figurera, convenablement numéroté, parmi les  $Q_k$  de l'énoncé ; on a alors les inégalités 2.3 (1) pour ce cube car

$$\alpha < \frac{1}{|Q''|} \int_{Q''} f \, dx \leq \frac{1}{2^{-n}|Q'|} \int_{Q'} f \, dx \leq 2^n \alpha.$$

Dans le premier cas, on poursuivra pour  $Q''$  le processus de décomposition en  $2^n$  cubes égaux.

On prend pour  $Q$  la réunion des cubes qui sont dans le second cas.

J'affirme enfin que, presque partout sur  $P = \bigcup Q$ , on a  $f(x) \leq \alpha$ .

En effet, pour presque tout  $x \in P$ , on a, d'après un théorème de LEBESGUE

(variante de 1.3 iv))

$$f(x) = \lim \frac{1}{|Q^{***}|} \int_{Q^{***}} f(y) \, dy$$

(où la limite est prise selon les  $Q^{***}$  qui contiennent  $x$  et dont le diamètre tend vers zéro quand se poursuit le processus de découpage). Or, pour chacun de ces cubes  $Q^{***}$ , on est dans le premier cas.

2.4 Corollaire du théorème 2.2.— Avec les notations du théorème 2.2, il existe deux constantes  $A, B$  ne dépendant que de la dimension  $n$ , telles que, pour un choix convenable de  $P, Q$  et des cubes  $Q_k$  on ait 2.2 i), 2.2 ii), 2.2 iii) avec

$$(1) \quad |Q| \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1$$

et pour chaque  $Q_k$ , moins précisément que 2.2 (1) :

$$(2) \quad \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \, dx \leq B \alpha$$

( $A = 1$  et  $B = 2^n$  conviennent).

2.5 En effet, dans la démonstration 2.3, on a pris pour les  $Q_k$  des cubes

"qui vérifient le second cas", c'est-à-dire

$$|Q_k| < \frac{1}{\alpha} \int_{Q_k} f \, dx$$

et on a (1) avec  $A = 1$  puisque  $Q = \bigcup_k Q_k$ .

Et l'inégalité (1) dans 2.2 iii) donne 2.4 (2) avec  $B = 2^n$ .

2.6 On peut retrouver 2.4 (avec une évaluation moins efficace des constantes

$A$  et  $B$ ) si on choisit  $P, Q$  et les  $Q_k$  en s'inspirant du premier théorème

(1.3) et du théorème de WHITNEY (2.1).

Prenons ici  $Q = E_{Mf, \alpha}$  et  $P = \bar{Q}$ .

Par définition de  $Q$ ,  $P$  est l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant l'inégalité au sens large  $Mf(x) \leq \alpha$ . Or la définition 1.1 fait apparaître  $Mf$  comme sup de fonctions continues :  $Mf$  est semi-continue inférieurement, donc  $P$  est fermé.

D'après 1.3 iv) (dans le premier théorème) et la définition 1.1 de la fonction maximale  $Mf$ , on a pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) \, dy \leq Mf(x),$$

d'où 2.2 ii) avec notre choix de  $P$  ici.

L'inégalité 2.4 (1) dans le corollaire a lieu (avec seulement  $A = 5^n$ ) d'après notre choix de  $Q$  et 1.3 ii).

Comme ici  $P$  est fermé, on peut choisir (en posant  $P = F$ ) les cubes  $Q_k$  comme dans le théorème de WHITNEY 2.1. Soit alors  $Q_k$  un tel cube. Il existe  $p_k \in P$  tel que

$$d(p_k, Q_k) = d(P, Q_k).$$

Soit  $B_k$  la plus petite boule de centre  $p_k$  contenant  $Q_k$ . Posons

$$\gamma_k = \frac{|B_k|}{|Q_k|}.$$

On a d'après successivement  $p_k \in P$  et notre choix de  $P$ , puis la définition de  $Mf$ , enfin la définition de  $\gamma_k$  :

$$\alpha \geq Mf(p_k) \geq \frac{1}{|B_k|} \int f \, dx = \frac{1}{\gamma_k |Q_k|} \int_{Q_k} f \, dx.$$

La géométrie élémentaire et les dernières inégalités du théorème 2.1 montrent qu'il existe une constante  $B$ , ne dépendant que de la dimension  $n$ , telle que pour tout entier  $k$  on ait  $\gamma_k \leq B$ , d'où 2.4 (2).

### 3.- Un théorème d'interpolation pour les $L^p$ .

3.1 Notation.-  $L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrivant  $f_p + f_q$  avec  $f_p \in L^p$ ,  $f_q \in L^q$ .

3.2 Remarque.- Si les trois exposants  $p, q, r$  vérifient  $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$  alors  $L^q \subset L^p + L^r$ .

Il suffit pour l'établir de décomposer une fonction positive  $f \in L^q$  en  $f = (f - \inf(f, 1)) + \inf(f, 1)$ .

3.3 Dans le théorème suivant, cas particulier d'un théorème de MARCINKIEWICZ, l'important n'est pas l'espace fonctionnel où est défini  $T$ , mais les types de majorations et la manière de les prouver. Dans la démonstration de  $\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$  (premier théorème) est déjà intervenue l'idée principale : décomposer  $f$  en deux termes selon leurs "grandeurs", puis appliquer à chaque terme des propriétés connues de  $T$ .

Quatrième théorème.— Soit  $T$  une application de  $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$  dans l'espace des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que

i) Pour tous  $f, g \in L^1 + L^2$  on a

$$|T(f + g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

ii) Il existe  $A_1$  tel que pour tout  $\alpha > 0$ , tout  $f \in L^1$ , on ait

$$|E_{|Tf|, \alpha}| \leq \frac{A_1}{\alpha} \|f\|_1.$$

iii) Il existe  $A_2$  tel que pour tout  $\alpha > 0$ , tout  $f \in L^2$ , on ait

$$|E_{|Tf|, \alpha}| \leq \left( \frac{A_2}{\alpha} \|f\|_2 \right)^2.$$

(Sur ces deux hypothèses ii) et iii), voir la fin du chapitre).

Conclusion.— Si  $1 < p < 2$ , alors  $T$  est une application continue de  $L^p$



dans  $L^p$ , et il existe une constante  $A_p$  (ne dépendant que de  $p$ , des deux constantes  $A_1, A_2$  introduites ci-dessus, et de la dimension  $n$ ) telle que pour tout  $f \in L^p$  on ait

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

3.4 Preuve.— Soit  $f \in L^p$  ( $1 < p < 2$ ). Posons pour tout  $\gamma > 0$

$$(1) \quad \left[ \begin{array}{l} f = f^\gamma + f_\gamma \quad (\gamma \text{ n'est pas un exposant}) \\ \text{où } f^\gamma(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \gamma \\ \text{zéro} & \text{si } |f(x)| < \gamma \end{cases} \\ \text{donc } f_\gamma(x) = \begin{cases} \text{zéro} & \text{si } |f(x)| \geq \gamma \\ f(x) & \text{si } |f(x)| < \gamma \end{cases} \end{array} \right.$$

On a évidemment  $f^\gamma \in L^1$ ,  $f_\gamma \in L^2$ .

(Plus précisément, d'après  $1 - p < 0$ , on a

$$\int |f^\gamma| dx = \int |f^\gamma|^p |f^\gamma|^{1-p} dx \leq \gamma^{1-p} \int |f^\gamma|^p dx \leq \gamma^{1-p} (\|f\|_p)^p,$$

et de même, d'après  $2 - p > 0$

$$\int |f_\gamma|^2 dx \leq \gamma^{2-p} \int |f_\gamma|^p dx \leq \gamma^{2-p} (\|f\|_p)^p.$$

Dans les notations (1) prenons  $\gamma = \alpha$  (ensuite nous ferons varier  $\alpha$ ).

L'hypothèse i) donne (à un ensemble négligeable près) !

$$E_{|Tf|, \alpha} \subset \left( E_{|Tf|, \frac{\alpha}{2}} \right) \cup \left( E_{|Tf|, \frac{\alpha}{2}} \right)$$

d'où

$$(2) \quad \left[ \begin{array}{l} |E_{|Tf|, \alpha}| \leq |E_{|Tf|, \frac{\alpha}{2}}| + |E_{|Tf|, \frac{\alpha}{2}}| \leq \\ \leq \frac{2A_1}{\alpha} \int |f|^\alpha dx + \left(\frac{2A_2}{\alpha}\right)^2 \int |f|^\alpha dx \leq \\ \leq \frac{2A_1}{\alpha} \int_{E_{|f|, \alpha}} |f| dx + \left(\frac{2A_2}{\alpha}\right)^2 \int_{|f(x)| \leq \alpha} |f|^2 dx. \end{array} \right.$$

(La seconde ligne résulte des hypothèses ii) et iii) et la troisième de (1)).

Notons le premier membre de ces inégalités (2)

$$\lambda(\alpha) = |E_{|Tf|, \alpha}|;$$

c'est une fonction décroissante de  $\alpha$ . Or

$$\int |Tf|^p dx = - \int_0^\infty \alpha^p d(\lambda(\alpha)) = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha$$

comme on l'a vu déjà en 1.5 (preuve de iii)), d'où d'après (2)

$$\begin{aligned} \int |Tf|^p dx &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha \leq \\ & 2p A_1 \int \left( \int_{E_{|f|, \alpha}} \alpha^{p-2} |f(x)| dx \right) d\alpha + p(2A_2)^2 \int \left( \int_{|f(x)| \leq \alpha} \alpha^{p-3} |f(x)|^2 dx \right) d\alpha = \\ &= 2p A_1 \int \left( \int_0^\alpha |f(x)|^{p-2} d\alpha \right) |f(x)| dx + p(2A_2)^2 \int \left( \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-3} d\alpha \right) |f(x)|^2 dx = \\ &= \frac{2p}{p-1} A_1 \int |f|^{p-1} |f| dx + \frac{4p}{p-2} (A_2)^2 \int |f|^{p-2} |f|^2 dx. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité, annoncée en conclusion, ce dont résulte, compte tenu de l'hypothèse i), le fait que  $T$  applique  $L^p$  dans  $L^p$  continûment.

**3.5 Définition.**— Soit  $T$  une application de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) dans l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^n$ , vérifiant la propriété suivante :

"Il existe une constante  $A$  telle que, pour tout  $\alpha > 0$ , tout  $f \in L^p$ ,

on ait

$$\begin{aligned} & (\text{mesure de l'ensemble des } x \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } |Tf(x)| > \alpha) = \\ & = |E_{|Tf|, \alpha}| \leq \left(\frac{A}{\alpha}\|f\|_p\right)^p \quad ". \end{aligned}$$

On dit alors que "T applique faiblement  $L^p$  dans  $L^p$ " ou encore que T est "faiblement de type  $(L^p, L^p)$ ".

Par exemple, les hypothèses ii) et iii) du théorème 3.3 disent que T est faiblement de type  $(L^1, L^1)$  et faiblement de type  $(L^2, L^2)$ .

Proposition.— Si T désigne une application bornée de  $L^p$  dans  $L^p$ , alors T applique faiblement  $L^p$  dans  $L^p$ .

Car si pour tout  $f \in L^p$  on a  $\int |Tf|^p dx \leq (A\|f\|_p)^p$ , alors

$$|E_{|Tf|, \alpha}| \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |Tf(x)|^p dx \leq \left(\frac{A}{\alpha}\|f\|_p\right)^p.$$

Note bibliographique (chapitre I)

Les résultats concernant la fonction maximale sont dus à HARDY et LITTLEWOOD dans le cas  $n = 1$ , et WIENER (Duke Math Journal, 1939) dans le cas général.

Le deuxième théorème énoncé ici est une variante d'une construction de WHITNEY (Trans. Amer. Math. Soc., 36, 1934, 63-89).

Pour le troisième théorème voir CALDERON-ZYGMUND (Acta Math., 88, 1952, 85-139).

Une forme assez générale du théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ se trouve dans le livre de ZYGMUND, 1959, chapitre XII.

## Chapitre II

### Intégrales singulières.

#### 1.- Quelques résultats classiques.

1.1 Notations. -  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  = Les fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$  qui tendent vers zéro à l'infini.

$L^p(\mathbb{R}^n)$  = L'espace des (classes de) fonctions (mesurables et) de puissance  $p^{\text{ème}}$  sommable sur  $\mathbb{R}^n$  (pour la mesure familière) ( $1 \leq p < \infty$ ).

$L^\infty(\mathbb{R}^n)$  = L'espace des (classes de) fonctions mesurables essentiellement bornées.

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  = L'espace des mesures sur  $\mathbb{R}^n$  de masse totale finie ; on sait que  $L^1$  s'injecte dans  $\mathfrak{B}$  avec conservation des normes.

1.2 La convolution de deux mesures  $\mu = \mu_1 * \mu_2$  de  $\mathbb{R}^n$  est si possible définie par

$$\mu_1 * \mu_2(f) = \iint f(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y)$$

( $f$  continue à support compact).

Si  $f \in L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), on prend avec  $\mu \in \mathfrak{B}$

$$(f * \mu)(x) = \int f(x-y) d\mu(y) = g(x).$$

On a  $g \in L^p$  et  $\|f * \mu\|_p \leq \|f\|_p \|\mu\|$ .

Et pour  $h \in L^1$ ,  $(f * h)(x) = \int f(x-y) h(y) dy = g(x)$  donne

$$f \in L^p \text{ et } \|f * h\|_p \leq \|f\|_p \|h\|_1.$$

1.3 Théorème A.— Soit  $T$  une transformation linéaire de  $L^1$  dans  $L^1$ .

Pour que  $T$  soit bornée et commute avec les translations, il faut et il suffit qu'il existe une mesure  $\mu \in \mathfrak{B}$  (c'est-à-dire de masse totale finie) telle que pour tout  $f \in L^1$   $Tf = f * \mu$ .

$$\text{On a alors } \|T\| = \|\mu\|.$$

1.4 Théorème B.— Soit  $T$  une transformation linéaire de  $L^2$  dans  $L^2$ .

Pour que  $T$  soit bornée et commute avec les translations, il faut et il suffit que les transformées de FOURIER de  $Tf$  et  $f$  soient ainsi reliées  
Il existe une fonction mesurable essentiellement bornée  $m$  ("un multiplicateur") sur le dual de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(Tf)^\wedge(x) = m(x) f^\wedge(x)$ .

$$\text{On a alors } \|T\| = \|m\|_\infty.$$

1.5 Ainsi la structure des transformations du type convolution qui sont bornées dans  $L^1$  ou  $L^2$  est-elle simple et bien comprise : Les caractérisations de ces deux théorèmes sont en fait valables pour un groupe <sup>abélien</sup> localement compact quelconque.

L'étude des opérateurs de convolutions qui sont bornés pour un  $L^p$   $p \neq 2$  est plus ardue. Une classe importante de tels opérateurs sont les convolutions avec des noyaux singuliers  $K$ , ayant pour seules singularités un point (l'origine

et le comportement à l'infini. Des convolutions avec des noyaux dont les singularités sont situées sur des variétés plus générales que des points isolés ne peuvent, semble-t-il, être abordées par nos méthodes.

2.- Cœur du sujet : Une large classe de noyaux.

Dans le seul théorème de ce paragraphe, la condition  $K \in L^2$  a pour objet d'alléger la technique. On pourrait s'en passer, en conservant les deux conditions et en supposant  $Tf$  définie si  $f \in L^1$  ou  $L^2$ .

Nos hypothèses sur le noyau restent valables après dilatation ou rotation de  $\mathbb{R}^n$ , mais non après translation.

2.1 Premier théorème.— Soit  $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que

i) La transformée de FOURIER de  $K$  est essentiellement bornée sur le dual de  $\mathbb{R}^n$  : Il existe une constante  $A_1$  telle que presque partout :

$$(1) \quad |K^\wedge(x)| \leq A_1.$$

ii) Il existe une constante  $A_2$  telle que, pour tout  $y \neq 0$  ( $y \in \mathbb{R}^n$ )

on ait

$$(2) \quad \int_{|x| > |2y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq A_2$$

[La norme familière d'un  $x \in \mathbb{R}^n$  est notée  $|x|$  pour alléger].

Posons pour  $f \in L^1 \cap L^p$  ( $1 < p < \infty$ )

$$(3) \quad Tf(x) = \int K(x-y) f(y) dy$$

Conclusion.— Il existe une constante  $B_p$  (ne dépendant que des deux constantes  $A_1, A_2$  et de la dimension  $n$ ) telle que, pour  $1 < p < \infty$ , on ait

$$(4) \quad \|Tf\|_p \leq B_p \|f\|_p$$

pour tout  $f \in L^1 \cap L^p$ . On pourra donc prolonger  $T$  dans tout  $L^p$  par continuité.

2.2 Premier lemme.— La transformation  $T$  définie par 2.2 (3) applique faiblement  $L^2$  dans  $L^2$ . (Définition ch. I, 3.5).

Preuve.— (Comparer au théorème B1.4). Considérons le produit des transformées de FOURIER  $K^\wedge f^\wedge$  où  $f \in L^2$ ; d'après l'hypothèse 2.1 i) et  $f^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^{n*})$ , c'est une fonction  $L^2(\mathbb{R}^{n*})$  et  $f^\wedge \mapsto K^\wedge f^\wedge$  a pour norme  $\|K^\wedge\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n*})}$ . Comme la transformation de Fourier est une isométrie entre les  $L^2$  de  $\mathbb{R}^n$  et de son dual  $\mathbb{R}^{n*}$ , on en conclut que  $T$  applique continument  $L^2$  dans  $L^2$ , donc aussi faiblement (ch. I, 3.5).

2.2

2.3 Second lemme.— De même,  $T$  applique faiblement  $L^1$  dans  $L^1$ .

2.4 Idée de la démonstration.— On étudie  $Tf$  en décomposant  $f = b + m$  en une "bonne" fonction  $b$  et une "mauvaise"  $m$ . On pourra appliquer le théorème de PLANCHEREL à  $Tb$  ce qui donnera des estimations précises. On a déjà l'idée de la manière dont on s'occupe du mauvais terme  $m$  quand on prend pour  $T$  la



transformation de HILBERT classique : ainsi dans l'intégrale

$$\int_{-L}^L \frac{m(t)}{x-t} dt$$

la principale difficulté pour obtenir une estimation élémentaire <sup>provient</sup> du logarithme

quand on intègre  $\frac{1}{x}$ , c'est-à-dire  $\int_{h>0}^L \frac{dx}{x} \sim \log \frac{1}{h}$  quand  $h \rightarrow 0$ . L'idée est

de remplacer l'intégrale étudiée par

$$\int_{-L}^L \left( \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} \right) m(t) dt$$

ce qui est permis quand  $\int_{-L}^L m(t) dt = 0$ . Observons alors d'une part que

$\left| \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x} \right| \sim \frac{L}{x^2}$  quand  $x$  est nettement éloigné de l'intervalle  $[-L, L]$  (disons

$|x| > 2L$ ), et d'autre part que

$$L \int_{|x| \geq 2L} \frac{dx}{x^2} \leq 1.$$

Ainsi pourra-t-on éviter cette difficulté du logarithme si l'intégrale de  $m$  sur des intervalles (ou des cubes pour  $\mathbb{R}^n$ ) appropriés est nulle. C'est cette propriété de  $m$  qui sera exprimée par l'équation (4) ci-dessous. La décomposition de  $f$  conduisant à ces propriétés de  $m$  est basée sur le troisième théorème du chapitre précédent (ch. I, 2.2).

**2.5 Preuve de 2.3.**— Il s'agit de trouver  $A_3$  tel que, pour tout  $f \in L^1$  et tout  $\alpha > 0$  on ait

$$(1) \quad |E_{|Tf|, \alpha}| \leq \frac{A_3}{\alpha} \|f\|_1$$

où, rappelant la notation 1.2 du chapitre I :

$E_{|Tf|, \alpha}$  = ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|(Tf)(x)| > \alpha$ .

2.5(i) On décomposera  $f$  en une "bonne" et une "mauvaise" fonction

$$(2) \quad f = b + m$$

de la manière suivante.

On sait par le troisième théorème du chapitre précédent (voir ch. I, 2.2 et

2.4) que

$$(***) \quad \left[ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n = P \cup Q \text{ avec } P \cap Q = \emptyset, |f(x)| \leq \alpha \text{ presque partout sur } P, \\ Q = \bigcup_1^{\infty} Q_j \text{ (cubes d'intérieurs deux à deux disjoints),} \\ |Q| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1, \text{ et pour chaque } Q_j, \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| dx < 2^n \alpha. \end{array} \right.$$

On pose alors

$$(3) \quad b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in P \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy & \text{pour } x \in Q_j \end{cases}$$

ce qui définit  $b$  presque partout ; (2) et (3) donnent

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(x) = 0 \text{ pour presque tout } x \in P, \text{ et pour tout cube } \int_{Q_j} m dx = 0. \end{array} \right.$$

On majore le premier membre de (1) d'après (2) :

$$(5) \quad |E_{|Tf|, 2\alpha}| \leq |E_{|Tb|, \alpha}| + |E_{|Tm|, \alpha}|$$

et il suffit d'établir séparément pour les deux termes une inégalité analogue à

(1)

2.5(ii) Etude de la bonne fonction  $b$ .

On a  $b \in L^2$  car, d'après (\*\*\*)

$$\|b\|_2^2 = \int b^2 dx = \int_P + \int_Q \leq \int_P \alpha |f| dx + 2^{2n} \alpha^2 |Q| \leq (2^{2n} + 1) \alpha \|f\|_1$$

Le premier lemme (2.2) s'applique à  $b$  : Il existe une constante  $A_T$  telle que

$$\begin{aligned} |E_{|Tb|, \alpha}| &\leq \left( \frac{A_T \|b\|_2}{\alpha} \right)^2 \\ &\leq (2^{2n} + 1) (A_T)^2 \frac{1}{\alpha} \|f\|_1 \end{aligned}$$

d'après l'évaluation de  $\|b\|_2^2$ . Plus précisément, comparant les calculs de la preuve de 2.2 (où  $\|K^\wedge\|_\infty \leq A_1$ ) et les calculs de la preuve de la proposition 3.5 du chapitre 1 (pour  $p = 2$ ), on voit que  $(A_T)^2 \leq (A_1)^2$  et on a donc

$$(6) \quad |E_{|Tb|, \alpha}| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (2^{2n} + 1) (A_1)^2 \|f\|_1.$$

2.5(iii) Introduction de boules  $B_j$  contenant les cubes de  $Q$  et de deux ensembles  $D, D'$ .-

A chaque cube  $Q_j$  (dont on notera  $y^j$  le centre) du découpage de  $Q$  (voir (\*\*\*) plus haut) on associe une boule  $B_j$  de centre  $y^j$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- on a  $B_j \supset Q_j$
  - pour tout  $x \notin B_j$ , pour tout  $y \in Q_j$ ,  $x$  est au moins deux fois plus éloigné du centre  $y^j$  que  $y$  :
- (\*) (\*)  $|x - y^j| \geq 2|y - y^j|$

(\*\*\*) - Le rapport des volumes est indépendant de l'indice  $j$  : Il existe une constante  $c_n$  (ne dépendant que de la dimension  $n$ ) telle que pour tout  $j$

$$c_n = \frac{|B_j|}{|Q_j|} .$$

(Les deux premières conditions sont réalisées en prenant  $B_j$  de rayon assez grand ; la dernière condition n'a rien de mystérieux).

Soient  $D' = \cup B_j$ ,  $D = [D'$  son complémentaire.

Comme  $|Q| = \sum |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$ , la dernière des conditions (\*\*\*) donne :

$$(7) \quad |D'| \leq c_n |Q| \leq \frac{c_n}{\alpha} \|f\|_1$$

2.5(iv) Etude de la mauvaise fonction  $m$ . - Pour chaque cube  $Q_j$  introduisons

$$m_j(x) = \begin{cases} m(x) & \text{si } x \in Q_j \\ \text{zéro} & \text{si } x \notin Q_j \end{cases}$$

donc (pour presque tout  $x$ )

$$m(x) = \sum_j m_j(x).$$

$$\begin{aligned} Tm_j(x) &= \int_{y \in Q_j} K(x-y) m_j(y) dy = \\ &= \int_{y \in Q_j} (K(x-y) - K(x-y^j)) m_j(y) dy \end{aligned}$$

d'après (4) ; d'où

$$\begin{aligned} \int_D |(Tm)(x)| dx &\leq \sum_j \int_D |(Tm_j)(x)| dx \leq \sum_j \int_{x \notin B_j} |(Tm_j)(x)| dx < \\ &\leq \sum_j \int_{y \in Q_j} |m_j(y)| \left( \int_{x \notin B_j} |K(x-y) - K(x-y^j)| dx \right) dy \end{aligned}$$

En effet, on passe du second membre au troisième en observant que pour tout  $j$ , on a  $D = \bigcup B_j \subset \bigcup B_j$ ; l'expression de  $Tm_j(x)$  fournit une majoration de  $|Tm_j(x)|$  qu'on reporte dans le troisième membre; enfin on intervertit l'ordre d'intégration.

Ecrivons  $x - y = (x - y^j) - (y - y^j)$ ; nous avons construit les  $B_j$  en 2.5(ii) de manière que si on a:  $x \notin B_j$  et  $y \in Q_j$ , alors  $|x - y^j| \geq 2|y - y^j|$ . Tels sont les jeux d'écriture montrant que dans le quatrième membre de la suite d'inégalités on peut appliquer l'hypothèse ii) du

théorème 2.1: on majore  $\int_{x \notin B_j} \cdot$  par  $A_2$ . On a alors

$$\int_D |Tm(x)| dx \leq A_2 \sum_j \int_{y \in Q_j} |m_j(x)| = A_2 \int_Q |m| dx.$$

Or, par construction de  $Q$  et de  $m$ , si  $x \in Q$ , alors

$$|m(x)| \leq |f(x)| + 2^n \alpha, \text{ d'où}$$

$$\int_Q |m(x)| dx \leq \|f\|_1 + 2^n \alpha |Q| \leq (1 + 2^n) \|f\|_1.$$

Ainsi  $\int_D |Tm| dx \leq (1 + 2^n) A_2 \|f\|_1$ , et

$$(8) \quad |D \cap E_{|Tm|, \alpha}| \leq \frac{(1+2^n)A_2}{\alpha} \|f\|_1.$$

Mais d'après  $R^n = D \cup D'$

$$|E_{|Tm|, \alpha}| \leq |D \cap E_{|Tm|, \alpha}| + |D'|,$$

ce qui, compte tenu des majorations (7) et (8) donne

$$(9) \quad |E_{|T_m|, \alpha}| \leq ((1 + 2^n)A_2 + c_n) \frac{\|f\|_2}{\alpha}.$$

2.5(v) Conclusion.— On reporte (6) et (9) dans (5), d'où (1)°

2.3

2.6 Preuve du premier théorème (2.1).—

2.6(i) Pour  $p = 2$ , c'est le premier lemme (2.2).

2.6(ii) Pour  $1 < p < 2$ , il suffit de vérifier les hypothèses du quatrième théorème du chapitre précédent (chapitre I, 3.3).

i) Soient  $f, g \in L^1 + L^2$ , alors on a presque partout

$$|T(f + g)|(x) \leq |Tf|(x) + |Tg|(x)$$

ii) D'après le second lemme (2.3),  $T$  applique faiblement  $L^1$  dans  $L^1$ .

iii) D'après le premier lemme (2.2),  $T$  applique faiblement  $L^2$  dans  $L^2$ .

2.6(iii) Pour  $2 < p < \infty$ , nous exploiterons la dualité entre  $L^p$  et  $L^q$

( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) et le fait que le théorème est prouvé pour  $L^q$ .

Observons que si une fonction  $\psi$  est localement sommable et si

$$\sup \left| \int \psi \chi dx \right| = A < \infty$$

où le sup est pris selon les fonctions  $\chi$  bornées, nulles hors de compacts, et

vérifiant  $\|\chi\|_q \leq 1$ , alors  $\psi \in L^p$  et  $\|\psi\|_p = A$ .

Cela dit, prenons  $f \in L^1 \cap L^p$  ( $2 < p < \infty$ ),  $\chi \in L^q$  du type décrit ci-dessus.

D'après  $K \in L^2$  et le choix de  $f$  et  $\chi$ , l'intégrale double

$$\iint K(x-y)f(y)\chi(x)dx dy$$

converge absolument ; elle vaut donc

$$(1) \int f(y) \left( \int K(x-y) \chi(x) dx \right) dy$$

Or le théorème est vrai pour  $1 < q < 2$  (avec le noyau  $K'(x) = K(-x)$

mais avec la même constante  $B_q$ ) donc

$$y \mapsto \int K(x-y) \chi(x) dx$$

est une fonction  $\in L^q$ , de norme  $- L^q$  majorée par  $B_q \|\chi\|_q$ . L'inégalité de

HÖLDER appliquée à (1) donne enfin

$$\left| \int (Tf)\chi dx \right| = | (1) | \leq B_q \|f\|_p \|\chi\|_q;$$

donc, passant au sup selon ces  $\chi$ , on a

$$\|Tf\|_p \leq B_q \|f\|_p.$$

2.1

2.7 Dans la plupart des cas, la simplification suivante est suffisante.

Premier corollaire.— La seconde hypothèse du premier théorème (2.1 ii)) est

vraie si on suppose que :

[  $K$  est continument dérivable dans le complémentaire de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et

$$\left| \frac{\partial K}{\partial x_j} \right| (y) \leq \frac{A}{|y|^{n+1}}$$

[ pour tout  $y$  dans le complémentaire de l'origine,  $j = 1, \dots, n$

(où comme toujours  $|y| =$  distance de  $y$  à l'origine).

Preuve.— Si  $|x| > 2|y| >$  zéro, alors le segment dans  $\mathbb{R}^n$  joignant  $x$  et

$x - y$  ne passe pas par l'origine ; il existe donc sur ce segment un point  $\gamma$

(donc  $|\gamma| > \frac{|x|}{2}$ ) tel que

$$\begin{aligned} |K(x - y) - K(x)| &= |y| \left| \sum \frac{\partial K}{\partial x_j}(\gamma) \theta_j \right| \\ &\leq |y| \sum \left| \frac{\partial K}{\partial x_j}(\gamma) \right| \\ &\leq n \cdot 2^{n+1} |y| \frac{A}{|x|^{n+1}} \end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis, puis  $|\theta_j| \leq 1$  (les  $\theta_j$  sont les "cosinus directeurs" du segment), puis l'hypothèse. Donc

$$\int_{|x| > 2|y|} |K(x - y) - K(x)| dx \leq n \cdot 2^{n+1} A |y| \int_{|x| > 2|y|} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \leq A_2 \int_{1 < |x|} \frac{dx}{|x|^{n+1}}$$

où  $A_2$  est une constante convenable, et l'intégrale étendue à l'extérieur de la boule unité <sup>est</sup> convergente : ce dernier membre est fini et indépendant de  $y$ .

2.7

2.8 Dans beaucoup de cas, il n'est pas facile de vérifier que  $K^\wedge$  est essentiellement bornée ; voici un corollaire utile dans les applications.

Second corollaire. - Soient  $K \in L^2$  et  $A > 0$  tels que

i) Pour tout  $y$  distinct de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  on a

$$\int_{|x| > 2|y|} |K(x - y) - K(x)| dx \leq A.$$

ii) Pour tout  $R$ ,

$$\int_{|x| < R} |x| |K(x)| dx \leq A R.$$

iii) Pour tout  $R$ ,



$$\left| \int_{|x| < R} K(x) dx \right| \leq A$$

Alors les hypothèses i) et ii) du premier théorème (2.1) sont vérifiées.

2.9 Preuve.— Ici i) reprend l'hypothèse 2.1 ii). Reste à voir que  $\hat{K}$  est essentiellement bornée. On sépare l'intégrale donnant  $\hat{K}(x)$  en deux intégrales étendues à des domaines complémentaires.

Le produit scalaire  $(x|y)$  entre  $\mathbb{R}^n$  et son dual sera noté  $x \cdot y$  car il n'apparaîtra que dans des  $e^{2\pi i(x \cdot y)}$ .

2.9 1<sup>o</sup> Etude de  $\int_{|y| \leq \frac{1}{|x|}} e^{2\pi i x \cdot y} K(y) dy.$

Dans cette première partie,  $\int$  sera toujours étendue aux  $y$  tels que

$$|y| \leq \frac{1}{|x|}.$$

$$\left| \int K(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right| \leq \left| \int K(y) (e^{2\pi i x \cdot y} - 1) dy \right| + \left| \int K(y) dy \right|.$$

D'après  $|x| |y| \leq 1$ , il existe une constante absolue  $A'$  telle que

$$|e^{2\pi i x \cdot y} - 1| \leq A' |x| |y|.$$

Donc

$$\left| \int K(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right| \leq |x| A' \int |y| |K(y)| dx + \left| \int K(y) dy \right| \leq |x| A' \frac{A}{|x|} + A = AA' + A$$

car l'hypothèse 2.8 ii) s'applique au premier terme du second membre et iii) au second terme.

2.9 2<sup>o</sup> Etude de  $\int_{|y| \geq \frac{1}{|x|}} e^{2\pi i x \cdot y} K(y) dy.$

Dans cette seconde partie,  $\int$  sera toujours étendue aux  $y$  tels que  
 $|y| \geq \frac{1}{|x|}$ .

On a, si  $w$  est un vecteur tel que

$$e^{2\pi i x \cdot w} = -1$$

$$\left| \int K(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right| = \frac{1}{2} \left| \int (K(y) - K(y-w)) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right| \leq \frac{1}{2} \int |K(y) - K(y-w)| dy$$

Mais si on prend plus précisément

$$w = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|^2},$$

alors on peut dire que cette dernière intégrale est étendue aux  $y$  tels que

$|y| > 2|w|$  et invoquer l'hypothèse 2.8 i). Donc

$$\left| \int K(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy \right| \leq \frac{1}{2} A.$$

2.9 3<sup>e</sup> Conclusion.- L'étude séparée des deux intégrales donne (avec  $A'$  constante absolue) :

$$|K^\wedge(x)| \leq AA' + A + \frac{A}{2} \quad \blacksquare \quad 2.8$$

### 3.- Les noyaux de CALDERON-ZYGMUND

Nous abordons une sous-classe importante d'intégrales singulières du type précédent, celles où le noyau est de la forme  $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$  avec  $\Omega$  positivement homogène de degré zéro.

Que signifient les transformations du type

$$Tf = f * \frac{\Omega}{|\cdot|^n} ?$$

Elles commutent avec les translations, et - reflet immédiat de l'homogénéité de degré  $-n$  du noyau  $\frac{\Omega}{|x|^n}$  - elles commutent avec les dilatations. Les autres propriétés de  $\Omega$  sont de nature plus technique. Ainsi, la propriété requise en 3.2 ii) est nécessaire pour assurer la convergence des intégrales au sens des valeurs principales. Ces transformations intégrales sont de nature "semi-locale", c'est-à-dire si  $f$  est nulle hors d'un compact, alors  $Tf$  se comporte assez bien hors de ce compact. L'étude des transformations ayant des propriétés d'invariance simple par rapport aux rotations (outre celles par rapport aux translations et dilatations) sera abordée au chapitre suivant.

3.1 Notations. - Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $x \neq 0$

$\lambda > 0$ , on ait

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x) \quad (m \text{ réel})$$

Alors on dit que  $f$  est homogène de degré  $m$  (on devrait dire positivement homogène).

$\Sigma = \Sigma_n$  désigne la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ; pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  distinct de l'origine, on notera  $x' = \frac{x}{|x|}$  ( $\in \Sigma$ ); plus généralement les points de  $\Sigma$  seront affectés de primes :  $x', y', \dots$ ; la mesure usuelle de  $\Sigma$  sera notée  $\int_{\Sigma} \dots dx'$  (ou  $dy'$ ).

3.2 Second théorème (CALDERON-ZYGMUND).— Soit  $\Omega$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose  
que

i)  $\Omega$  est homogène de degré zéro (c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $\lambda > 0$ ,  $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$ );

ii) l'intégrale de  $\Omega$  sur la sphère unité  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  est nulle :

$$\int_{\Sigma} \Omega(y') dy' = 0 ;$$

iii) pour tous  $x', y' \in \Sigma$ , on a

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq \omega(|x' - y'|)$$

où  $\omega(\rho)$  est une fonction positive croissante de  $\rho > 0$  telle que

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho < \infty .$$

(Par exemple  $\omega(\rho) = \rho^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ ).

(On baptise iii) "condition du type de DINI". Elle a pour conséquence que  $\Omega$   
est bornée sur  $\Sigma$ ).

Conclusions.— 1) Pour tout  $f \in L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) et tout  $\varepsilon > 0$ , posons

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x - y) dy.$$

Alors on a  $T_\varepsilon f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et il existe  $A_p$  (indépendant de  $f$  et de  $\varepsilon$ )

tel que

$$\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p .$$

2) La limite en norme  $L^p$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon f = Tf$$

existe pour tout  $f \in L^p$  et  $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ .

3) Si  $f \in L^2$ , alors les transformées de FOURIER de  $f$  et de  $Tf$  sont reliées par

$$(Tf)^\wedge(x) = m(x) f^\wedge(x)$$

où  $m$  est une fonction homogène de degré zéro. Plus précisément

$$m(x') = \frac{\pi i}{2} \sum \int \operatorname{sgn}(x'|y') \Omega(y') dy' + \sum \int \log |(x'|y')| \Omega(y') dy'$$

(avec  $x', y' \in \sum$ ).

### 3.3 Preuve.-

1) Il suffit d'établir que  $\|T_1\|_p \leq A_p$ .

Car on peut écrire pour  $\epsilon > 0$

$$T_\epsilon = \mathcal{T}_{\epsilon^{-1}} T_1 \mathcal{T}_\epsilon \quad \text{où} \quad (\mathcal{T}_\epsilon f)(x) = f(\epsilon x) ;$$

de plus  $\mathcal{T}_\epsilon$  est linéaire, bijective  $L^p \rightarrow L^p$ , avec  $\|\mathcal{T}_\epsilon f\|_p = \|f\|_p \epsilon^{-\frac{n}{p}}$

Etudions donc le cas  $\epsilon = 1$ . Posons

$$K_1(x) = \begin{cases} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} & \text{si } |x| \geq 1 \\ \text{zéro} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Il suffit de voir que  $K_1$  vérifie les trois conditions du second corollaire

du premier théorème (2.8).

D'abord

$$\int_{|x| > 2|y|} |K_1(x-y) - K_1(x)| dx \leq A < \infty$$

pour tout  $y$  distinct de l'origine.

Pour le voir, on décompose

$$K_1(x-y) - K_1(x) = \left( \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x)}{|x-y|^n} \right) + \left( \frac{\Omega(x)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \right)$$

et on "passe aux valeurs absolues". Pour l'intégrale de la valeur absolue de la seconde des deux parenthèses, il suffit d'observer que  $\Omega$  est bornée ; pour la première, on appliquera la condition iii).

Ensuite, (en augmentant au besoin  $A$  ci-dessus)

$$\int_{|x| \leq R} |x| |K_1(x)| dx \leq \int_{|x| \leq R} \frac{|x| |\Omega(x)|}{|x|^n} dx \leq A R$$

d'après la définition de  $K_1$ , puis la condition i) :  $\Omega$  homogène de degré zéro.

Enfin  $\left| \int_{|x| < R} K_1(x) dx \right| \leq A.$

En fait, le premier membre est nul d'après la condition ii) sur  $\Omega$ .

Le premier théorème (2.1) donne

$$\|T_1\|_p \leq B_p$$

où  $B_p$  ne dépend que de la constante  $A$  ci-dessus, de la constante  $A_1$  ( $A_p$  pour  $p = 1$  dans la conclusion 1) du théorème), de l'exposant  $p$  et de la dimension  $n$ . **|| 3.1.1)**

Preuve de 3.1.2).— D'après 1), la famille  $(T_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est équicontinue ; la convergence simple sur un sous-ensemble partout dense de  $L^p$  entraînera la convergence simple sur tout  $L^p$  ;  $L^p$  étant un espace de BANACH, un théorème de BANACH-STEINHAUS donnera 2).

Cela dit, soient  $f \in L^p$ ,  $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > 0$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} (T_{\varepsilon_{k+l}} f - T_{\varepsilon_k} f)(x) &= \int_{\varepsilon_{k+l} \leq |y| \leq \varepsilon_k} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy = \\ &= \int_{\varepsilon_{k+r} \leq |y| \leq \varepsilon_k} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} (f(x-y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse 3.2ii) sur  $\Omega$ .

Comme  $L^p$  est complet, il suffit d'établir que la suite  $(T_{\varepsilon_k} f)_{k \geq 1}$  est une suite de CAUCHY de  $L^p$ ; et même d'après la remarque initiale, on peut pour cela supposer de plus que  $f$  est continument dérivable sur  $\mathbb{R}^n$ , nulle hors d'un compact.

Or toutes les fonctions de cette suite prennent les mêmes valeurs hors d'un compact fixe (un peu plus grand que celui où s'annule  $f$ ), et de plus, j'affirme qu'elles convergent uniformément quand  $k \rightarrow \infty$  (d'où la convergence dans  $L^p$ ).

En effet, il existe une constante  $C_f$  telle que

$$|f(x-y) - f(x)| \leq C_f |y|$$

d'après les hypothèses sur  $f$  et le théorème des accroissements finis; d'où

$$|T_{\varepsilon_{k+r}} f - T_{\varepsilon_k} f|(x) \leq \int_{\varepsilon_{k+r} \leq |y| \leq \varepsilon_k} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \cdot C_f \cdot |y| dy.$$

Or le second membre, indépendant de  $x$ , tend vers zéro avec  $\varepsilon_k$ , car  $\Omega$  est une fonction homogène bornée.

3.1.2)

Preuve de 3.1.3). - Observons d'abord que,  $\Omega$  étant bornée sur  $\Sigma$ , on a

$$\Omega \log^+ |\Omega| \in L^1(\Sigma)$$

donc (avec  $(x'|y')$  produit scalaire) pour tout  $x' \in \Sigma$

$$\int_{\Sigma} |\Omega(y')| \log \frac{1}{|(x'|y')|} dy' < \infty$$

d'après une inégalité de YOUNG (voir ZYGMUND "Intégrales singulières" cours d'ORSAY (1964) page 32 - où on trouvera la preuve rigoureuse de ce qui suit aussi).

Après ce préliminaire, posons

$$K_{\varepsilon, \eta}(x) = \begin{cases} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} & \text{pour } \varepsilon \leq |x| \leq \eta \\ \text{zéro} & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que  $K_{\varepsilon, \eta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  donc pour tout  $f \in L^2$ , on a

$$K_{\varepsilon, \eta} * f \in L^2 \text{ et, avec les transformées de FOURIER :}$$

$$K_{\varepsilon, \eta}^\wedge \cdot f^\wedge \in L^2.$$

Posons

$$y = ry', \quad |y| = r, \quad y' \in \Sigma;$$

$$x = Rx', \quad |x| = R, \quad x' \in \Sigma;$$

$$I_{\varepsilon, \eta}(x, y') = \int_{r=\varepsilon}^{\eta} \exp(2\pi i r R(x'|y')) \frac{dr}{r}.$$

Alors (ZYGMUND p. 31)

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon, \eta}^\wedge(x) &= \int_{\varepsilon \leq |y| \leq \eta} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} e^{2\pi i(x|y)} dy = \\ &= \int_{\Sigma} \Omega(y') \left( \int_{r=\varepsilon}^{\eta} e^{2\pi i(x'|y')} \frac{dr}{r} \right) dy' = \int_{\Sigma} \Omega(y') I_{\varepsilon, \eta}(x', y') dy'. \end{aligned}$$



Or (ZYGmund p. 32) avec  $C$  constante convenable,

$$|\Omega(y') I_{\varepsilon, \eta}(x, y')| \leq |\Omega(y')| \left( 2 \log \frac{1}{|(x'|y')|} + C \right)$$

où, d'après la remarque préliminaire, pour tout  $x$ , le second membre appartient à  $L^1(\Sigma)$ .

On montre (voir ZYGmund page 32), en utilisant le théorème de convergence dominée de LEBESGUE, le fait que

$$\int_{\Sigma} \Omega(y') dy' = 0,$$

et le fait que  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$ ,

que  $K_{\varepsilon, \eta}^{\wedge}(x)$  est bornée indépendamment de  $x, \varepsilon, \eta$ , et tend vers  $m(x)$  (fonction bornée de  $x$ ) quand  $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty$ ; puis le théorème de convergence dominée de LEBESGUE pour  $L^2$  montre que

$$\lim_{\varepsilon, \eta} K_{\varepsilon, \eta}^{\wedge} f^{\wedge} = m f^{\wedge} \text{ en norme } L^2.$$

Reste à exprimer  $m$ .

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon, \eta}^{\wedge}(x) &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \left( \int_{|y'|=1} \frac{\Omega(y')}{|y'|^n} e^{2\pi i r R(x'|y')} r^{n-1} dy' \right) dr = \\ &= \int_{\varepsilon}^{\eta} \left( \int_{\Sigma} \frac{\Omega(y')}{|y'|^n} (e^{2\pi i r R(x'|y')} - \cos 2\pi r R) dy' \right) dr \\ \text{car } \int_{\Sigma} \Omega(y') dy' &= 0, \end{aligned}$$

et on sépare les parties réelles et imaginaires.

La limite de la partie imaginaire est

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_{\Sigma} \Omega(y') \left( \int_0^{\infty} \sin(2\pi r R(x'|y')) \frac{dr}{r} \right) dy' &= \\ &= \frac{\pi i}{2} \int_{\Sigma} \Omega(y') \operatorname{sgn}(x'|y') dy' \end{aligned}$$

$$\text{d'après } \int_0^{\infty} \frac{\sin(\theta t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \theta.$$

La partie réelle a pour limite

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \Omega(y') \left( \int_0^{\infty} (\cos(2\pi r R(x'|y')) - \cos(2\pi r R)) \frac{dr}{r} \right) dy' &= \\ &= \int_{\Sigma} \Omega(y') \log |(x'|y')| dy' \end{aligned}$$

car on sait que pour une "bonne fonction"  $h$ , on a

$$\int_0^{\infty} (h(\lambda r) - h(\mu r)) \frac{dr}{r} = h(0) \log \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\text{avec } \lambda \text{ et } \mu > 0 \text{ et où } \int_0^{\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^{\lambda} \quad \text{3.1.3) } \quad \text{3.1}$$

### 3.3 Quelques remarques sur le théorème 3.1.-

3.3.1 Observer que si  $\Omega$  est réelle la partie réelle de la fonction  $m$  est une fonction paire et que la partie imaginaire est impaire.

3.3.2 Prenons dans  $\mathbb{R}$  pour  $T$  la transformation de HILBERT :

$$Tf(x) = \frac{1}{\pi} \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \epsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt ;$$

prenons pour  $f$  la fonction sommable égale à un sur l'intervalle compact  $[b, c]$

$(b < c)$  et à zéro ailleurs. Sa transformée  $Tf(x) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x-b}{x-c} \right|$  n'est pas une

fonction sommable, car quand  $|x|$  tend vers  $\infty$ , la valeur absolue de cette

expression à  $\frac{c-b}{\pi|x|}$ .

3.3.3. Plus généralement, une transformation T du type introduit dans ce théorème n'applique jamais  $L^1$  dans  $L^1$ .

Raisonnons par l'absurde, avec  $f$  continue à support compact pour ne pas fixer les idées et avec

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \neq 0.$$

On sait que

$$(\hat{Tf})(x) = m(x) \hat{f}(x)$$

Si on suppose  $\hat{Tf} \in L^1$ , alors  $\hat{Tf}$  serait continue, or  $\hat{f}$  est continue, et de plus, par hypothèse  $\neq 0$  à l'origine; par division, on en conclurait que  $m$  est continue à l'origine.

Or  $m$  est homogène de degré zéro, non identiquement nulle :  $m$  serait une constante non nulle. On aura donc une absurdité si on établit que

$$\int_{|x'|=1} m(x') \, dx' = 0.$$

Or on sait qu'on peut écrire, avec  $K$  convenable (borné),

$$m(x') = \int_{|y'|=1} K((x', y')) \, \Omega(y') \, dy'$$

qu'on reporte dans l'intégrale précédente ; pour  $m$ , on intègre d'abord par rapport à  $y'$ , et on observe que

$$\int \sum \Omega(y') \, dy' = 0.$$

(On peut même montrer que la restriction de  $T$  à l'hyperplan  $\int f dx = 0$  de  $L^1$  n'est pas bornée).

3.3.4 On peut montrer (voir CALDERON-ZYGMUND) que si  $f \in L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) alors  $T_\epsilon f$  tend presque partout vers  $Tf$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

#### 4.- Énonçons une extension du premier théorème (2.1)

4.1 Définitions et notations.- Dans ce qui suit,  $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$  sont des espaces de HILBERT séparables.

4.1.1 Une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$  est dite mesurable si pour tout  $h \in \mathcal{H}$  la fonction

$$x \mapsto (f(x)|h) \quad (\text{produit scalaire dans } \mathcal{H})$$

est mesurable.

4.1.2 L'espace  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$  est constitué des  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$  qui sont mesurables avec  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$  où  $|f(x)|$  = norme dans  $\mathcal{H}$  du vecteur  $f(x)$ .

4.1.3 Pour une application mesurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$ , l'intégrale vectorielle

$$f^\wedge(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i(x|y)} dx$$

définit si possible la transformée de FOURIER de  $f$ .

4.1.4  $L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$  est un espace de HILBERT. On peut énoncer un théorème de PLANCHEREL pour ces espaces.

4.1.5  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  désigne l'espace de BANACH des applications linéaires continues

de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$ . Soit alors

$$K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) ;$$

l'application  $K$  est dite mesurable si, pour tous les  $h_1 \in \mathcal{H}_1$ ,  $h_2 \in \mathcal{H}_2$ , la fonction numérique

$$x \longmapsto (K(x)h_1 | h_2) \quad (\text{produit scalaire dans } \mathcal{H}_2)$$

est mesurable.

4.1.6 Enfin, en notant  $\|K(x)\|$  la norme dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  de l'application linéaire  $K(x)$ , on définira comme en 4.1.2 l'espace  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$

4.2 Cela dit, on a

Variante du premier théorème.— Soient  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  deux espaces de HILBERT séparables,  $K \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ ,  $K^\wedge$  sa transformée de FOURIER (définie à peu près comme 4.1.3). Si

- 1)  $\|K^\wedge(x)\| \leq A_1$  partout ;
- 2)  $\int_{|x| \geq 2|y|} \|K(x-y) - K(x)\| dx \leq A_2$  pour tout  $y \neq 0$ ,

en posant

$$(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y) dy \quad (f \in \mathcal{H}_2)$$

où  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{H}_1$ , alors on a pour tout  $p \in ]1, \infty[$  et toute  $f \in L^p$

$$\|Tf\|_p \leq B_p \|f\|$$

où  $B_p$  ne dépend que des constantes  $A_1, A_2$  ci-dessus, de l'exposant  $p$ , de la dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  (ne dépend pas de  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  en particulier).

Remarque bibliographique pour Ch. II

Voir : CALDERON et ZYGMUND, Acta Math., 88, 1952, 85-139, et aussi BENEDECK, CALDERON, et PANZONE.

Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 48, 1962, 356-365, où on peut trouver d'autres références.

Dans le cas d'une variable beaucoup de ces idées ont été abordées par BESICOVITCH et TITCHMARSH. Voir, par exemple, TITCHMARSH, Proc. London Math. Soc., 29, 1929, 49-80.

Pour théorèmes A et B voir RUDIN, "FOURIER ANALYSIS ON GROUPS", (éd. Interscience).

### Chapitre III

#### Transformations de RIESZ, intégrale de POISSON pour un demi-espace, harmoniques sphériques.

Ce chapitre est consacré à des exemples et des applications de la théorie développée dans le chapitre précédent. L'exemple le plus simple - fondamental - d'intégrales singulières est donné par les "transformations de RIESZ". Avec leurs variantes, elles forment le sujet des premiers paragraphes.

Insistons sur ce point : ici, le fait que le groupe des rotations opère dans l'espace euclidien joue un rôle important.

Considérons d'abord le cas classique unidimensionnel.

#### 1.- Cas $n=1$ . Transformation de HILBERT •

Avec les notations du second théorème du chapitre précédent (chapitre II, 3.2)

on prend dans  $\mathbb{R}$

$$(1) \quad \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn} x ;$$

donc

$$(2) \quad K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|} = \frac{1}{\pi x} \quad (x \neq 0) ;$$

d'où (ici par un calcul direct, de préférence à la formule du second théorème) ;

$$(3) \quad m(x) = i \operatorname{sgn} x$$

$$(4) \quad (Tf)(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t| > \epsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

(où on lit v.p. "valeur principale de"...)

C'est un opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$  ; on a  $T^2 = -\text{Id}_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Parmi les opérateurs (bornés) de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $T$  est caractérisé comme étant la seule transformation  $L^2 \rightarrow L^2$  (à une constante multiplicative près)

- i) qui est linéaire bornée,
- ii) qui commute avec les translations de  $\mathbb{R}$ ,
- iii) qui commute avec les dilatations  $> 0$  de  $\mathbb{R}$ ,
- iv) qui anti commute avec la réflexion  $x \mapsto -x$ .

Ainsi, en notant

$$(T_{\delta} f)(x) = f(\delta x) \quad (\delta \neq 0),$$

iii) et iv) signifient que pour tout  $\delta \neq 0$ ,

$$T_{\delta^{-1}} T T_{\delta} = (\text{sgn } \delta) T.$$

## 2.- Cas $n \geq 2$ . Les transformations de RIESZ.

2.1 Ici on introduit simultanément  $n$  fonctions  $\Omega$  (positivement) homogènes de degré zéro :

$$\Omega_j(x) = c_n \frac{x_j}{|x|} \quad (j = 1, \dots, n)$$

avec  $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ ,



et les  $n$  noyaux

$$K_j(x) = \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n} = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$$

qui donnent les  $n$  transformations de Marcel RIESZ  $R_j$  :

$$R_j(x) = c_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy.$$

On a (ZYGMUND : "intégrales singulières" cours d'ORSAY (1964) chapitre IV

théorème 19 page 39) :

$$m_j(x) = (K_j)^\wedge(x) = i \frac{x_j}{|x|}$$

qu'on peut prouver en recourant au quatrième théorème (5.3) de ce chapitre.

Invoquant cette dernière formule, on peut caractériser intrinséquement les

$R_j$  :

2.2 Premier théorème.— Soit

$$T = (T_1, \dots, T_n)$$

( $n > 1$ ) une famille finie de transformations linéaires bornées

$L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  où

- 1) Chaque  $T_j$  commute avec les translations de  $\mathbb{R}^n$ ,
- 2) Chaque  $T_j$  commute avec les dilatations de  $\mathbb{R}^n$ ,
- 3) Pour chaque rotation  $\rho$  de  $\mathbb{R}^n$ , de matrice  $(\rho_{jk})$  on a :

$$\rho^{-1} T_j \rho = \sum \rho_{jk} T_k$$

(Ici,  $\rho$  opère dans  $L^2$  par  $\rho(f)(x) = f(\rho(x))$ ).

Alors il existe une constante  $c$  telle que pour  $j=1, \dots, n$

$$T_j = c R_j$$

( $R_j$   $j^{\text{ème}}$  transformation de Marcel RIESZ).

2.3 Preuve.— D'après 1), la transformée de FOURIER  $T_j^\wedge = m_j$  est une fonction bornée ; d'après 2),  $m_j$  est homogène de degré zéro ; 3) donne d'après

$\mathcal{F} \circ \rho = \rho \circ \mathcal{F}$  que les  $m_j$  vérifient aussi

$$m_j(\rho^{-1}x) = \sum p_{jk} m_k(x)$$

On calcule les valeurs des  $m_j$  en un point simple (sur un axe de coordonnées) puis en tout point.

## 2.2

2.4 Intérêt de ces transformations : Exemples dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Voici l'idée la plus simple, mais typique. Soit  $\varphi$  indéfiniment dérivable à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ , de laplacien

$$\Delta \varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}$$

On a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k} = -R_h R_k \Delta \varphi$$

Car les transformées de FOURIER des deux membres sont égales :

$$(2\pi i x_h)(2\pi i x_k) \varphi^\wedge(x) = -i^2 \frac{x_h x_k}{|x|^2} i^2 4\pi^2 |x|^2 \varphi^\wedge(x).$$

D'où des majorations du type

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_p} \right\|_p \leq A_p \|\Delta \varphi\|_p.$$

### 3.- L'intégrale de POISSON pour un demi-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ .

L'étude des fonctions harmoniques fournit une autre interprétation fondamentale des transformations de RIESZ (troisième théorème (4.3)).

Afin de développer ce point, brosons d'abord les traits principaux de l'intégrale de POISSON.

**3.1 Notation.**— On considère  $\mathbb{R}^n$  comme un hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et on note  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  le demi-espace positif correspondant.

**3.2 Problème de DIRICHLET.**— Soit  $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Trouver une fonction harmonique  $u(x, y)$  dans l'intérieur de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  qui tend en un sens à préciser vers  $f(x)$  quand  $y \rightarrow$  zéro.

**3.3 Solution pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .**— Etudions

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(t) e^{-2\pi i(t|x)} e^{-2\pi |t|y} dt$$

avec, comme d'habitude  $(t|x) = \sum_1^n t_j x_j$ ,  $|t|$  = longueur du vecteur  $t$ ,  $y > 0$ ,

$f^\wedge$  = transformée de FOURIER de  $f$ .

Cette intégrale converge absolument, d'après  $\|f\|_2 = \|f^\wedge\|_2$  et l'inégalité de SCHWARZ.

On a

$$\Delta u = \sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, y > 0)$$

car  $t \mapsto e^{-2\pi|t|y}$  et ses dérivées étant à décroissance rapide, on peut dériver sous le signe  $\int$ .

On a, pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$  et  $y > 0$

$$|f^\wedge(t)e^{-2\pi|t|y}| \leq |f^\wedge(t)|,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^\wedge(t)e^{-2\pi|t|y} = f^\wedge(t).$$

Comme ces fonctions de  $t$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , le théorème de convergence dominée de LEBESGUE dit qu'il y a aussi convergence en norme  $L^2$ . La transformation de FOURIER étant une isométrie de  $L^2$ , et comme  $(f^\wedge)^\wedge = f$ , on en conclut que

$$u(x, y) \longrightarrow f(x) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{quand } y \longrightarrow 0.$$

### 3.4 Définition et propriétés du noyau de POISSON.-

Posons pour tout  $y > 0$

$$P_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|t|y} e^{-2\pi i(x|t)} dt$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, (x|t) = \sum_1^n x_j t_j).$$

Par définition,  $P_y(x)$  est le noyau de POISSON (pour le demi-espace  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  de  $\mathbb{R}^n$ ) - cette précision sera désormais omise.

Pour tout  $y$ , c'est une fonction de  $x$  de  $L^2$ .

On vérifie que l'intégrale étudiée ci-dessus

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{-2\pi i(t/x)} e^{-2\pi|t/y} dt$$

s'écrit aussi

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) P_y(x - t) dt$$

ou (convolution dans  $\mathbb{R}^n$ )

$$u(x, y) = (f * P_y)(x).$$

On a (avec  $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ )

$$P_y(x) = c_n y / (|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}$$

En effet, remarquons d'abord que pour  $\delta > 0$

$$(1) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \delta |t|^2} e^{-2\pi i(t/x)} dt = \delta^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\delta}}$$

et (calcul d'un résidu), avec  $\beta > 0$

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}}{1+x^2} dx$$

et  $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)u} du,$

donc

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{u \in \mathbb{R}^+} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{i\beta x} e^{-(1+x^2)u} dx du.$$

(1) donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} e^{-ux^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{u} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}$$

donc

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} e^{-ux^2} dx \right) du$$

s'écrit

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du$$

(exprimant  $e^{-\beta}$  comme barycentre de la famille des  $e^{-\frac{\beta^2}{4u}}$  ; voir dans BOCHNER :

"Harmonic analysis and the theory of probability" (éd. BERKELEY) le "principe de subordination" dans chapitre 4)

Cela fait, reprenons

$$\begin{aligned} P_y(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|t|y} e^{2\pi i(t|x)} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-(\pi^2|t|^2 y^2)/u} du \right) e^{2\pi i(t|x)} dt \end{aligned}$$

Le changement  $\delta = \frac{\pi y^2}{u}$  donne  $P_y(x) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left( \frac{\pi y^2}{u} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{y^2} u} du = \\ &= \frac{1}{\frac{n+1}{\pi^{\frac{n}{2}}}} \int_0^{\infty} e^{-u} e^{-\frac{|x|^2}{y^2} u} y^{-n} u^{\frac{n-1}{2}} du = \end{aligned}$$

(par le changement  $u \mapsto \frac{u}{y^2}$ )

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{y}{\frac{n+1}{\pi^{\frac{n}{2}}}} \int_0^{\infty} e^{-u} (|x|^2 + y^2) u^{\frac{n-1}{2}} du = \\ &= (y / (\pi (|x|^2 + y^2))^{\frac{n+1}{2}}) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} du \end{aligned}$$

qui donne la formule encadrée ci-dessus.

3.5 Autres propriétés immédiates de  $P_y(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y > 0$ ).-

i)  $P_y(x)$  est harmonique dans l'intérieur de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ .

$$\text{ii) } P_y(x) > 0.$$

$$\text{iii) } \int_{\mathbb{R}^n} P_y(x) dx = 1 \quad (\text{pour tout } y > 0)$$

car les transformées de FOURIER en  $x$  valent 1 à l'origine.

iv) Sur chaque demi-droite de l'intérieur de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  issue de l'origine, la restriction de  $P_y(x)$  est une fonction décroissante de la distance à l'origine : cela résulte de v) :

v)  $P_y(x)$  est (positivement) homogène de degré  $-n$ . On a

$$P_\varepsilon(x) = P_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n} \quad (\varepsilon > 0)$$

On constate que les  $(P_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vérifient les conditions du second théorème ci-dessous (remarque 3.7.2), ce qui permet d'affirmer que :

vi) Si  $f \in L_x^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), alors

$$f * P_y \longrightarrow f \text{ en norme } L^p \text{ quand } y \longrightarrow 0$$

et posant

$$(f * P_y)(x) = u(x, y)$$

on a, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x)$ .

vii) On vérifie que cette fonction  $u$  est harmonique dans l'intérieur de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ , et on peut exprimer vi) ainsi :

"On a résolu le problème de type DIRICHLET pour le demi-espace, quand la donnée sur l'hyperplan frontière est dans  $L^p$ ."

3.6 Il est préférable de décrire cette propriété d'approximation de l'identité du noyau de POISSON dans un cadre plus général.

Second théorème.— Soit  $\varphi$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$i) \int |\varphi| dx < \infty ,$$

$$ii) \int \varphi dx = 1 .$$

Posons ( $\varepsilon > 0$ )

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

On sait bien que pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $f * \varphi_\varepsilon$  converge vers  $f$  en norme  $L^p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Introduisons la fonction radiale  $\psi$ :

$$\psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\varphi(t)|$$

"dominante radiale de  $\varphi$ ".

Si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ )

$$a) \sup_{\varepsilon > 0} |f * \varphi_\varepsilon| \leq A(Mf) \quad (\text{dans tout } \mathbb{R}^n)$$

où  $Mf$  est la fonction maximale de  $f$  (chapitre I, définition 1.1),  $A$  ne dépendant que de l'exposant  $p$ , la dimension  $n$  et la fonction  $\psi$ .

b) Pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * \varphi_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



3.7.1 Première remarque.— On avait déjà considéré ce théorème au chapitre I (1.3)

avec

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 / (\text{volume de la boule unité de } \mathbb{R}^n) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \text{zéro} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

On avait  $\sup_{\varepsilon > 0} |f * \varphi_\varepsilon| \leq Mf$  et égalité pour  $f$  positive.

3.7.2 Seconde remarque.— On peut prendre  $\varphi(x) = P_1(x)$  (notation 3.4) ; alors

$$\varphi_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \psi = \varphi.$$

3.7.3 Troisième remarque.— La preuve montrera que

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, dx$$

convient.

3.7.4 Quatrième remarque.— On posera avec  $|x| = r$

$$\psi(r) = \psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\varphi(y)|$$

( $\psi$  est la plus petite des fonctions qui sont radiales, décroissantes par rapport à  $r$ , et majorent  $|\varphi|$ ).

L'inégalité

$$\int_{\frac{r}{2} \leq |x| \leq r} \psi(x) \, dx \geq \psi(r) \int_{\frac{r}{2} \leq |x| \leq r} dx = \psi(r) r^n \times \text{constante}$$

prouve que

Si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $r^n \psi(r)$  tend vers zéro quand  $r \rightarrow 0$  et quand

$r \rightarrow \infty$ .

3.8 Preuve du second théorème.

Preuve de 3.6 a).— En étudiant l'effet des translations et des dilatations de  $\mathbb{R}^n$  sur les deux membres de l'inégalité en vue, on voit qu'il suffit de se placer à l'origine 0 de  $\mathbb{R}^n$ , et de considérer le seul noyau  $\varphi(\varepsilon = 1)$ , qui est majoré par  $\psi$ .

En définitive, il suffit de voir que

On a

$$(1) \quad |f * \psi(0)| \leq A (Mf)(0)$$

quand on suppose  $f$  positive et le second membre fini, avec

$$(2) \quad A = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx.$$

Introduisons

$$\begin{aligned} \lambda(r) &= \int_{|x'|=1} f(rx') dx', \\ \Lambda(r) &= \int_{|x| \leq r} f(x) dx = \int_0^r \lambda(t) \psi(t) t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f * \psi(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx = \\ &= \int_0^\infty \lambda(r) \psi(r) r^{n-1} dr = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^N \lambda(r) \psi(r) r^{n-1} dr = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (-1) \int_\varepsilon^N \Lambda(r) d(\psi(r)) \quad (\text{Intégrale de STIELTJES}) \end{aligned}$$

En effet, l'intégration par partie à la troisième ligne introduit l'expression

$$\Lambda(N) \psi(N) - \Lambda(\varepsilon) \psi(\varepsilon)$$

dont les deux termes tendent vers zéro en vertu de la quatrième remarque précédant cette démonstration (3.7.4) et de la majoration

$$(3) \quad \Lambda(r) = \int_{|x| \leq r} f(x) dx \leq r^n \cdot V \cdot Mf(0)$$

où  $Mf(0) < \infty$  par hypothèse et où

$$V = \text{volume de la boule unité de } \mathbb{R}^n.$$

Notre chaîne d'inégalité donne

$$f * \psi(0) = \int_0^\infty \Lambda(r) d(-\psi(r)).$$

Enfin, on reporte dans cette intégrale la majoration (3) et la relation

$$\frac{1}{V} \int_0^\infty r^n d(-\psi(r)) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = A.$$

On a :

$$0 \leq f * \psi(0) \leq A (Mf)(0);$$

c'est-à-dire qu'on a (1) et (2).

Preuve de 3.6 b). — Compte-tenu de a), on procède comme au premier chapitre (chapitre I, énoncé 1.3 iv)) où on avait établi b) quand

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{pour } |x| \leq 1 \\ \text{zéro} & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

3.6

4.- Comparaison entre un ensemble de transformées de RIESZ d'une fonction et un système conjugué de fonctions harmoniques.

4.1 Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , on lira l'égalité

$$u = I.P.f$$

ainsi : "u est l'intégrale de POISSON pour le demi-espace  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  de f".

4.2 Rappelons quelques formules sur les transformations de RIESZ.

A  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  on associe  $(R_1(f), R_2(f), \dots, R_n(f))$  où

$$R_k(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_n \int_{|t| \geq \varepsilon} f(x-t) \frac{t_k}{|t|^{n+1}} dt$$

où  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$

Ce sont n fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ; et dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\sum_{k=1}^n R_k^2 = - \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

qui résulte de

$$(R_k(f))^\wedge(x) = i \frac{x_k}{|x|} f^\wedge(x).$$

4.3 Troisième théorème.— Soient  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $f_1, \dots, f_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , et leurs intégrales de POISSON, (définies dans l'intérieur du demi-espace  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ ) :

$$u_0 = I.P.f, \quad u_1 = I.P.f_1, \dots, u_n = I.P.f_n$$

Pour que

$$f_j = R_j(f) \quad (j=1, \dots, n),$$

il faut et il suffit que — avec  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = x_0 > 0$  :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \end{array} \right]$$

4.4 Exemple :  $n=1$ .— Les dernières relations avec  $x_1 + ix_0 = x + iy = z$  expriment les deux conditions de CAUCHY-RIEMANN pour que la fonction  $u_0 + iu_1$  de  $z$  soit analytique (dans le demi-plan  $\text{Im } z > 0$ ).

4.5 Preuve du troisième théorème.—

Si  $f_j = R_j(f)$ , on sait que

$$f_j^\wedge(t) = i \frac{t_j}{|t|} f^\wedge(t)$$

et que

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_j^\wedge(t) e^{-2\pi|t|y} e^{-2\pi i(t|x)} dt = \\ &= i \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(t) \frac{t_j}{|t|} e^{-2\pi|t|y} e^{-2\pi i(t|x)} dt \end{aligned}$$

et que

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(t) e^{-2\pi|t|y} e^{-2\pi i(t|x)} dt.$$

Ces intégrales peuvent être dérivées sous le signe  $\int$  ; alors apparaissent

les relations entre les dérivées partielles des  $u$ .

Inversement si  $\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_0}$  on aura

$$-2\pi i t_j f^\wedge(t) = e^{-2\pi|t|y} = -2\pi|t| f_j^\wedge(t) e^{-2\pi|t|y},$$

c'est-à-dire qu'on aura  $f_j^\wedge(t) = i \frac{t_j}{|t|} f^\wedge(t)$ .

5.- Intervention des harmoniques sphériques

Parmi les transformations

$$Tf = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy$$

où  $\Omega$  est positivement homogène de degré zéro et  $\int_{|x'|=1} \Omega(x') dx' = 0$ , nous avons étudié les transformations de M. RIESZ où

$$\Omega_j = c \frac{y_j}{|y|} \quad j = 1, \dots, n.$$

Pour  $n = 1$ , c'est le seul cas possible.

On a introduit dans le chapitre précédent les expressions

$$m(x) = \int_{|y'|=1} K(x', y') \Omega(y') dy'$$

où

$$K(x', y') = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(x' | y') + \log |(x' | y')|$$

et  $m$  est le "multiplicateur" provenant de la transformation

$$f \longmapsto \text{v.p.} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} * f$$

(chapitre II, 3.2).

On remarque que la transformation  $\Omega \longmapsto m$  commute avec les rotations. On considère donc l'espace des fonctions de carré sommable sur la sphère unité, et la décomposition de cet espace selon les représentations du groupe des rotations, c'est-à-dire la décomposition en harmoniques sphériques.

**5.1 Définition.**— Une harmonique sphérique de degré  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un polynôme  $P$  à  $n$  variables, homogène de degré  $k$ , de Laplacien  $\Delta P$  nul.

5.2 Résumons ici, sans démonstration, les propriétés des harmoniques sphériques que nous utiliserons.

La sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  sera notée  $S_{n-1}$  et sera munie de sa mesure habituelle.

5.2.1 Soit  $\mathcal{X}_k$  l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur la sphère  $S_{n-1}$ , qui sont les restrictions à  $S_{n-1}$  des harmoniques sphériques de degré  $k$ . Alors  $\mathcal{X}_k$  est un sous-espace de dimension finie (fermé) de  $L^2(S_{n-1})$ .

Remarquer que  $\mathcal{X}_0 =$  les fonctions constantes.

Si  $P_k$  est un polynôme homogène de degré  $k$ , on notera  $P_k|_{S_{n-1}} = Y_k$  sa restriction à la sphère unité, c'est-à-dire un élément quelconque de  $\mathcal{X}_k$ .

5.2.2 Pour  $j \neq k$ , les sous-espaces  $\mathcal{X}_j$  et  $\mathcal{X}_k$  sont orthogonaux, c'est-à-dire que si  $Y_j \in \mathcal{X}_j$ ,  $Y_k \in \mathcal{X}_k$ , alors

$$\int_{S_{n-1}} Y_j(x') Y_k(x') dx' = 0 .$$

5.2.3 Chaque  $f \in L^2(S_{n-1})$  s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{k \geq 0} Y_k \quad (Y_k \in \mathcal{X}_k)$$

dù la série converge en norme  $L^2(S_{n-1})$ . Autrement dit,  $L^2(S_{n-1})$  est somme directe hilbertienne des  $\mathcal{X}_k$ .

5.2.4 Soit donc  $f = \sum Y_k \in L^2(S_{n-1})$ .

Pour que  $f$  soit indéfiniment dérivable sur  $S_{n-1}$ , il faut et il suffit que,

pour chaque entier positif  $m$  on ait :

$$\int_{S_{n-1}} |Y_k(x')|^2 dx' = O(k^{-m}) \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

5.3 Quatrième théorème.— Soit  $P_k$  une harmonique sphérique de degré  $k \geq 1$  dans

$\mathbb{R}^n$ . Posons

$$\Omega(x) = \frac{P_k(x)}{|x|^k},$$

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} = \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n}}.$$

Alors le multiplicateur correspondant s'écrit

$$m(x) = \gamma_k \frac{P_k(x)}{|x|^k},$$

où  $\gamma_k$  est une constante ne dépendant que de  $k$  et de  $n$  (équivalente à  $k^{-\frac{n}{2}}$  quand  $k \rightarrow \infty$  d'après la formule de STIRLING):

$$(1) \quad \gamma_k = i^k \pi^{n/2} \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma(\frac{k+n}{2})}.$$

La preuve utilisera des identités sur des transformées de FOURIER.

5.4 Lemme.— (Identité de HECKE). Soit  $P_k$  une harmonique sphérique de degré  $k$ .

Valeur au point  $y$  de la transformée de FOURIER :

$$\mathcal{F}_x (P_k(x) e^{-\pi|x|^2})(y) = i^k P_k(y) e^{-\pi|y|^2}.$$

5.5 Preuve de 5.4.— L'égalité en vue s'écrit

$$(1) \quad \int P_k(x) \exp(-\pi|x|^2 + 2\pi i(x|y)) dx = i^k P_k(y) e^{-\pi|y|^2}$$

Or il est clair que le premier membre de (1) vaut

$$(2) \quad Q(y) e^{-\pi|y|^2}$$



où  $Q$  est un polynome. Il s'agit donc d'établir que

$$Q(y) = P_k(iy) .$$

Or (1) et (2) donnent

$$\begin{aligned} Q(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x) \exp(-\pi \{(x_1 - iy_1)^2 + \dots + (x_n - iy_n)^2\}) dx = \\ &= \int P_k(x + iy) e^{-\pi|x|^2} dx \end{aligned}$$

d'après un changement d'axes dans  $\mathbb{C}^n$  légitimé par des considérations d'analyticité

et de décroissance rapide ; on peut même remplacer  $iy$  par  $y$ .

$$Q\left(\frac{y}{i}\right) = \int P_k(x + y) e^{-\pi|x|^2} dx .$$

Comme l'exponentielle  $e^{-\pi|x|^2}$  est une fonction radiale et que  $P_k$ , étant harmonique, vaut sa moyenne sur une sphère, on peut remplacer  $P_k(x + y)$  par  $P_k(y)$ . Donc, comme voulu

$$Q\left(\frac{y}{i}\right) = \int P_k(y) e^{-\pi|x|^2} dx = P_k(y) .$$

5.4

### 5.6 Applications de l'identité de HECKE : Les transformations $\mathcal{Y}_{n,k}$

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  radiale. Soit  $P_k$  une harmonique sphérique de degré  $k$ .

On montre qu'on peut écrire la transformée de FOURIER de  $f P_k$  sous la forme

$$(f P_k)^\wedge(x) = g(|x|) P_k(x) ,$$

où en posant  $|x| = r$ ,  $g$  est elle aussi une fonction radiale. On peut donc définir une transformation  $\mathcal{Y}_{n,k}$  entre fonctions radiales en posant

$$\mathcal{Y}_{n,k}(f) = g .$$

On a la relation de BOCHNER :

$$(1) \quad \mathcal{Y}_{n,k} = i^k \mathcal{Y}_{n+2k,0}$$

qu'on démontre en recourant à l'identité de HECKE (5.4), en observant que l'en-

semble des fonctions  $f_\delta$  ( $\delta > 0$ )

$$f_\delta(x) = e^{-\pi \delta |x|^2}$$

est total dans l'ensemble des fonctions radiales  $f$  telles que

$$\int_0^\infty |f(|x|)|^2 |x|^{2k+n-1} d|x| < \infty.$$

5.7 Preuve du quatrième théorème (5.3).— On veut voir que  $\mathcal{Y}_k \frac{P_k(x)}{|x|^k}$  est la transformée de FOURIER de  $\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n}}$ , qui n'est pas intégrable, mais est une distribution tempérée, que nous allons approcher par les fonctions

$$\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \quad (\alpha \text{ positif} \rightarrow 0)$$

Montrons

$$(1) \quad \left( \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \right)^\wedge (y) = \mathcal{Y}_{k,\alpha} \frac{P_k(y)}{|y|^{k+\alpha}}$$

avec

$$(2) \quad \mathcal{Y}_{k,\alpha} = i^k \pi^{\frac{n}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})}.$$

(En étudiant l'homogénéité et l'action des rotations, on voit que le second membre de (1) est nécessairement de cette forme).

Il s'agit donc de voir que pour toute  $\varphi \in \mathcal{S}$  on a

$$(3) \quad \int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \hat{\varphi}(x) dx = \mathcal{Y}_{k,\alpha} \int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+\alpha}} \varphi(x) dx.$$

L'effet du changement de variable  $x \mapsto x \sqrt{\delta}$  sur les transformées de FOURIER montre qu'il revient au même de dire que pour tout  $\delta > 0$  on a

$$(4) \quad \delta^{k/2} \int P_k(x) e^{-\pi \delta |x|^2} \hat{\psi}(x) dx = \\ = i^k \delta^{-n/2} \delta^{-k/2} \int e^{-\pi \delta |x|^2} P_k(x) \psi(x) dx.$$

Or on a si  $\beta > -1$

$$\int_0^\infty e^{-\pi t^2} t^\beta dt = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{\beta+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right),$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-\pi |x|^2 |t|^2} t^\beta dt = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{\beta+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) |x|^{-\beta-1}.$$

On multiplie les deux membres de (4) par  $\delta$  élevé à une puissance convenable, de manière qu'en intégrant encore par rapport à  $\delta$ , on puisse intervenir les intégrations par rapport à  $\delta$  et  $x$ . On obtiendra alors (4) avec la valeur (2) de  $\mathcal{V}_{k,\alpha}$ .

Pour établir (3), il faut justifier le passage à la limite :

$$(5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \hat{\psi}(x) dx = \text{v.p.} \int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n}} \hat{\psi}(x) dx.$$

Mais d'une part

$$\int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \hat{\psi}(x) dx = \int_{|x| \leq 1} \dots + \int_{|x| > 1} \dots \\ = \int_{|x| \leq 1} \dots (\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(0)) dx + \int_{|x| > 1} \dots$$

car l'intégrale de  $P_k$  ( $k \geq 1$ ) sur toute sphère centrée à l'origine est nulle.

Or on a de même d'autre part

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int \frac{P_k(x)}{|x|^{k+n}} \hat{\psi}(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon \leq |x| \leq 1} \dots + \int_{|x| > 1} \dots \\ &= \int_{|x| \leq 1} \dots (\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(0)) dx + \int_{|x| \geq 1} \dots \end{aligned}$$

d'où (5) qui donne (3).

5.3

5.8 Application du quatrième théorème aux fonctions de carré sommable sur la sphère unité ( $L^2(\mathbf{S}_{n-1})$ ).-

Soit  $\Omega \in L^2(\mathbf{S}_{n-1})$ , positivement homogène de degré zéro et telle que

$$\int_{\mathbf{S}_{n-1}} \Omega(x') dx' = 0.$$

Elle admet (5.2.3) la décomposition orthogonale dans  $L^2(\mathbf{S}_{n-1})$

$$\Omega(x') = \sum_{k \geq 1} \Omega_k(x')$$

où  $\Omega_k$  est une harmonique sphérique de degré  $k$ .

D'où, pour le multiplicateur correspondant, avec  $Y_k$  introduit en 5.3 (1) :

$$m(x) = \sum_{k \geq 1} Y_k \Omega_k(x).$$

Car 5.3 donne ce résultat pour un seul terme, puis on raisonne par additivité

et continuité :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int K(x', y') \sum_{j=1}^p \Omega_j(y') dy'.$$

5.9 Question.- Etant donné  $m$ , positivement homogène de degré zéro, existe-t-il

$\Omega$  avec  $\int_{\mathbf{S}_{n-1}} \Omega(x') dx' = 0$  telle que

$$m(x') = \int_{\mathbf{S}_{n-1}} K(x', y') \Omega(y') dy'$$

où  $K(x', y') = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(x'|y') + \log |(x'|y')|$  ?

La condition  $\int_{S_{n-1}} m(x') dx' = 0$  est nécessaire.

5.10 [Cinquième théorème.- Si  $m$  est indéfiniment dérivable dans le complémentaire de l'origine et  $\int_{S_{n-1}} m(x') dx' = 0$ , alors

$$m = \left( \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \right)^{\wedge}$$

où  $\Omega$  est elle aussi indéfiniment dérivable dans le complémentaire de l'origine et de moyenne nulle sur  $S_{n-1}$ , et réciproquement.

La preuve utilise 5.2 et 5.8.

5.11 Ce théorème montre que les deux classes suivantes d'opérateurs sont identiques :

A) Les opérateurs  $T$  donnés par des multiplicateurs  $m$  positivement homogènes de degré zéro, et indéfiniment dérivables sur la sphère unité

$$[(Tf)^{\wedge}(x) = m(x) f^{\wedge}(x)] .$$

B) Les opérateurs donnés par

$$Tf(x) = \text{constante} \cdot f + \text{v.p.} \int \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy$$

où  $\Omega$  est positivement homogène de degré zéro, indéfiniment dérivable sur la sphère unité et de moyenne nulle sur cette sphère.

Indications bibliographiques pour le chapitre III.

Pour les transformations de RIESZ voir J. HORVATH, Indig. Math., 1953, 17-29.  
Pour les résultats de paragraphe 5 voir BOCHNER, "Harmonic Analysis and the Theory of Probability", chapitre 2. Des applications se trouvent dans  
CALDERON et ZYGMUND, Amer. Jour. of Math., 79, 1957, 901-21.

## Chapitre IV

### La théorie de LITTLEWOOD-PALEY.

#### Les multiplicateurs de $L^p$ .

0.0 La théorie de LITTLEWOOD-PALEY a été initialement développée dans le cas

$n = 1$ , et selon les trois aspects suivants :

- La fonction auxiliaire  $g$ , (voir premier théorème (1.2))

- La décomposition "dyadique" d'une fonction au moyen de son analyse de FOURIER, (voir § 4)

- Le théorème des multiplicateurs de MARCINKIEWICZ (voir théorème (2.3) et (4.5))

La théorie développée entre 1930 et 1939 par LITTLEWOOD et PALEY, ZYGMUND et MARCINKIEWICZ utilisait les méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe et se limitait donc au cadre  $n = 1$ . Elle est décrite en détail dans ZYGMUND "Trigonometric series" chapitres 14 et 15.

La théorie  $n$ -dimensionnelle est plus récente et a été inspirée par les méthodes de variable réelle décrites dans les chapitres I et II de ce cours. Alors qu'il existe maintenant plusieurs approches pour les principaux résultats (voir bibliographie citée à la fin du chapitre), celle que nous avons choisie n'est pas celle qui est sur le plan logique la plus simple et la plus directe, mais celle

qui, du moins nous l'espérons, est la plus instructive.

0.1 Dans leur étude <sup>des fonctions harmoniques</sup> dans le disque unité, LITTLEWOOD et PALEY introduisirent un opérateur (non linéaire) auxiliaire  $g$ . Soit  $f$ , fonction réelle définie sur la circonférence unité  $S$ ,  $f \in L^p(S)$ . Soit  $\Phi$  fonction analytique dans le disque  $|z| < |\theta| = 1$  telle que  $\lim_{z \rightarrow \theta} \Re e \Phi(z) = f(\theta)$  presque partout - ce qui définit  $\Phi$  à une constante imaginaire près.

On définit sur la circonférence  $S$  la fonction  $g(f)$  par

$$g(f)(\theta) = \left( \int_0^1 (1-r) |\Phi'(r e^{i\theta})|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \quad (|\theta| = 1).$$

Ils ont montré que pour  $1 < p < \infty$ ,  $\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$  et, si  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$ , alors  $\|f\|_p \leq A'_p \|g(f)\|_p$ .

Nous adapterons cette théorie au demi-espace  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , limité par l'hyperplan  $\mathbb{R}^n$ .

1.1 Définition de  $g(f)$ .-  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , on associe son intégrale de POISSON :

$u = I.P.(f)$  harmonique dans l'intérieur de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ . On note

$$|\text{grad } u|^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Af, on associe  $g(f)$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$g(f, x) = \boxed{g(f)(x) = \left( \int_0^\infty y |\text{grad } u|^2(x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Comme  $f \mapsto u$  est linéaire,  $f \mapsto g(f)$  est sous-additive.

1.2 Premier théorème.- Il existe deux constantes  $A_p, B_p$  (dépendant de  $p$  et  $n$ ) telles que pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  on ait



$$\|B_p f\|_p \leq \|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad (1 < p < \infty).$$

### 1.3 Esquisse d'une démonstration employant des méthodes vectorielles.-

Proposons-nous plus simplement d'aborder l'inégalité

$$\left\| \left( \int_0^\infty y \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

On a  $\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_y * f$  où  $\alpha_y$  est la dérivée par rapport à  $y$  du noyau de

POISSON. Introduisons l'opérateur  $T$

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_y(x-t) f(t) dt$$

et les deux espaces de HILBERT

$$H_1 = \mathbb{C}, \quad H_2 = L^2(\varphi) \quad \text{où } \varphi \text{ est la mesure } y dy \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

On peut dire alors que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $H_1$ , et que  $y \mapsto \alpha_y(x)$  est un élément de  $H_2$ , qu'on peut donc identifier à un élément de  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ .

Enfin comme la fonction  $x \mapsto \alpha_y(x)$  est continument dérivable hors de l'origine et que ses dérivées vérifient  $\left| \frac{\partial \alpha_y}{\partial x_j} \right| (x) \leq \frac{A}{|x|^{n+1}}$ , on peut appliquer une version vectorielle du premier corollaire du premier théorème du chapitre 2 (ch.II, 2.7, 4.1, 4.2).

1.4 Notre démonstration utilisera trois lemmes ; (le premier a été utilisé par HARDY et P. STEIN).

1.4.1 Premier lemme.- Soient  $u$  une fonction harmonique positive,  $p$  un exposant  $> 0$

on a évidemment

$$\Delta(u^p) = p(p-1) |\text{grad } u|^2 u^{p-2}.$$

(pour  $p=2$ , on peut omettre l'hypothèse  $u \geq 0$  et

$$\Delta(u^2) = 2 |\text{grad } u|^2).$$

1.4.2 Second lemme.— Si  $F$  est une "bonne" fonction définie dans  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ , alors

$$\int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y \Delta F(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx.$$

[L'ensemble de ces bonnes fonctions sera partout dense dans les espaces fonctionnels où on aura recours à elles].

En effet, dans un domaine  $B$  de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  de frontière  $\partial B$  régulière, de normale extérieure  $n$ , on a

$$\int_B (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial B} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

On prend  $u=y$  (donc  $\Delta u = 0$ ),  $v=F$ , pour  $B$  un bon domaine, variable de manière à inclure une demi-boule de  $\mathbb{R}_{n+1}^+$  centrée en un point de  $\mathbb{R}^n$ ;  $F$  sera "assez bonne" pour que, quand  $B$  grossira,

$$\int_{\partial B \cap \mathbb{R}^n} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \int_{\partial B \cap \mathbb{R}^n} \longrightarrow \text{zéro.}$$

1.4.3 Troisième lemme.— Notant  $M_f$  la fonction maximale de  $f$  et  $u = I.P.(f)$ ,

on a

$$\sup_{0 < y < \infty} |u(x, y)| \leq M_f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Cela résulte de la première conclusion dans le second théorème du chapitre précédent (ch.III. 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3).

1.5 Preuve du premier théorème (1.2).—

1.5.1 Première étape :  $1 < p \leq 2$ . Montrons que si  $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$  ( $f$  indéfiniment dérivable à décroissance rapide) et  $f \geq 0$ , alors

$$\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

(Tout élément de  $\mathcal{Y}$  étant différence de deux éléments positifs de  $\mathcal{Y}$ , et  $g$  étant sous-additif par rapport à  $f$  (1.1), on aura la même inégalité dans tout  $\mathcal{Y}$ , donc dans tout  $L^p$ ). On a

$$\begin{aligned} (g(f, x))^2 &= \int_0^\infty y |\text{grad } u(x, y)|^2 dy = \\ &= \frac{1}{p(p-1)} \int_0^\infty y u^{2-p} \Delta(u^p) dy \leq \\ &\leq \frac{1}{p(p-1)} ((Mf)(x))^{2-p} \int_0^\infty y \Delta(u^p) dy \end{aligned}$$

par définition de  $g$ , puis d'après le premier lemme (1.4.1), car  $f \geq 0$  donne  $u \geq 0$ , enfin d'après le troisième lemme (1.4.3) et l'hypothèse  $2 - p \geq 0$ . On a donc :

$$(1) \quad g(f, x) \leq C_p (Mf)(x)^{\frac{2-p}{2}} (J(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$J(x) = \int_0^\infty y \Delta(u^p(x, y)) dy.$$

Etudions

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} y \Delta(u^p) dx \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u^p(x, 0) dx = \|f\|_p^p.$$

(1) et (2) donnent aussitôt le résultat pour  $p=2$ . Supposons désormais  $p < 2$ .

(1) donne

$$(3) \int_{\mathbb{R}^n} |g(f, x)|^p dx \leq (C_p)^p \int_{\mathbb{R}^n} ((Mf)(x))^{\frac{2-p}{2} \cdot p} (J(x))^{p/2} dx \leq \\ \leq (C_p)^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} ((Mf)(x))^{\frac{2-p}{2} p r'} dx \right)^{1/r'} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (J(x))^{\frac{p}{2} r} dx \right)^{1/r}$$

d'après l'inégalité de HÖLDER avec  $r = \frac{2}{p}$  (donc  $1 < r < 2$  d'après l'hypothèse

$1 < p < 2$  et  $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$ ). Les exposants du dernier membre de (3) valent donc

$$\frac{2-p}{2} p r' = p, \quad \frac{p}{2} r = 1;$$

d'après (2), le dernier facteur du dernier membre de (3) est donc  $\|f\|_p^{p/r}$ , et

le facteur précédent est majoré (d'après le premier théorème (1.3) du chapitre I

et  $1 < 2 < r' < \infty$ ) par  $C'_p \|f\|_p^{p/r'}$  où  $C'_p$  est une constante ne dépendant que

de  $p$  et  $n$ . Reportant dans (3) ces évaluations, on franchit la première étape.

1.5.2 Seconde étape : Si  $4 \leq p < \infty$ , on a

$$\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

1.5.2 (i).— Nous exploiterons la relation

$$(1) \sup \int g^2(f, x) \varphi(x) dx = \|g(f)\|_p^2$$

où le sup est pris selon les fonctions  $\varphi \geq 0$ ,  $\in L^q(\mathbb{R}^n)$ , avec  $q$  exposant con-

jugué de  $p/2$  :  $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $\|\varphi\|_q \leq 1$  : Chacun des deux membres de (1) vaut

alors

$$\left( \int (g(f, x))^{2 \cdot p/2} dx \right)^{2/p},$$

et on a  $1 < q < 2$ . L'intégrale figurant au premier membre de (1) vaut :

$$(2) \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y |\text{grad } u(x, y)|^2 \varphi(x) dx dy .$$

1.5.2 (ii).- J'affirme que (2) est majoré par

$$(3) 2 \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y |\Delta u^2(x, y)| \varphi(x, y) dx dy$$

où on note encore pour alléger  $\varphi$  l'intégrale de POISSON  $I.P.\varphi$ .

En effet  $P_{y_1+y_2} = P_{y_1} * P_{y_2}$  (d'après  $(P_y)^{\wedge}(x) = e^{-2\pi|x|y}$ )

permet d'écrire

$$u(x, y) = P_{y/2} * (P_{y/2} * f) = \int_{t \in \mathbb{R}^n} P_{y/2}(x-t) u(t, \frac{y}{2}) dt.$$

L'inégalité de SCHWARZ et  $\int P_y(x) dx = 1$  donnent

$$|u(x, y)|^2 \leq \int_{t \in \mathbb{R}^n} P_{y/2}(x-t) |u(t, \frac{y}{2})|^2 dt.$$

Pour la même raison

$$|\text{grad } u(x, y)|^2 \leq \int_{t \in \mathbb{R}^n} P_{y/2}(x-t) |\text{grad } u(t, \frac{y}{2})|^2 dt$$

qu'on reporte :

$$\int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y |\text{grad } u|^2 \varphi(x) dx dy \leq$$

$$\leq \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{t \in \mathbb{R}^n} y |\text{grad } u(t, \frac{y}{2})|^2 P_{y/2}(x-t) \varphi(x) dt dx dy =$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \int_{t \in \mathbb{R}^n} y |\text{grad } u(t, \frac{y}{2})|^2 \varphi(t, \frac{y}{2}) dt dy =$$

$$= 4 \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y |\text{grad } u(x, y)|^2 \varphi(x, y) dx dy$$

(la troisième ligne d'après le théorème de FUBINI et  $\varphi = I.P.\varphi = P_y * \varphi$ , la

dernière ligne par changement de variables).

Or (premier lemme 1.4.1 pour  $p=2$ )  $2|\text{grad } u|^2 = \Delta(u^2)$  donne bien (3).

1.5.2 (iii). Reportant dans l'expression (3) d'une part l'identité

$$\psi \Delta(u^2) = \Delta(u^2 \psi) - 4 \sum_{j=0}^n u \cdot u_j \psi_j$$

où les indices  $j$  désignent des dérivées partielles par rapport aux  $n+1$  variables  $x_0 = y, x_1, \dots, x_n$  et d'autre part l'identité du second lemme (1.4.2)

avec

$$F(x, y) = u^2(x, y) \psi(x, y)$$

et

$$F(x, 0) = f^2(x) \psi(x)$$

on obtient

$$\int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y (\Delta u^2) \psi(x, y) dx dy = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f^2(x) \psi(x) dx -$$

$$- 4 \sum_{j=0}^n \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} y u \cdot u_j \psi_j dx dy .$$

Mais

$$\sum_{j=0}^n \int_{y=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |y u \cdot u_j \psi_j| dx dy \leq$$

$$\leq (n+1) \int_{x \in \mathbb{R}^n} (Mf)(x) \left( \int_0^{\infty} y |\text{grad } u| |\text{grad } \psi| dy \right) dx \leq$$

$$\leq C^{te} \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)(x) g(f, x) g(\psi, x) dx$$

d'après le troisième lemme (1.4.3), puis d'après l'inégalité de SCHWARZ avec la mesure  $y dy$ .

1.5.2 (iv). — En résumé 1.5.2 (ii) et (iv) donnent

$$\int (g(f, x))^2 \psi(x) dx \leq \frac{1}{2} \int f^2(x) \psi(x) dx +$$

$$+ C^{te} \int (Mf)(x) g(f, x) g(\psi, x) dx .$$

On applique à cette dernière intégrale l'inégalité de HÖLDER pour ces trois

fonctions, les trois exposants étant reliés par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et (1) (dans 1.5.2 (i)) donne

$$\|g(f)\|_p^2 \leq \frac{1}{2} + C^{te} \|Mf\|_p \|g(f)\|_p \|g(\psi)\|_q$$

Or puisque  $\|f\|_p < 1$ ,  $\|\psi\|_q < 1$  et que  $1 < q < 2$ , ce qui permet d'appliquer la première étape à la fonction  $\psi$ , on voit que la quantité  $X = \|g(f)\|_p$  vérifie une inégalité

$$X^2 \leq AX + B$$

avec  $A > 0$  et  $B = \frac{1}{2}$  qui ne dépendent que de  $n$  et  $p$ . Négligeant de vérifier que  $X < \infty$ , on en conclut que  $X$  est borné : Il existe une constante  $A_p$  telle que  $X \leq A_p$  et la seconde étape est franchie.

**1.5.3 Troisième étape :** On a pour tout  $p$  vérifiant  $1 < p < \infty$

$$\|g(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

En effet, on a observé que  $g$  est sous-additif, et on a démontré les cas  $1 < p \leq 2$  et  $4 \leq p < \infty$ . On vérifie qu'on peut appliquer le théorème de MARCINKIEWICZ. (ch.I, 3.3).

**1.5.4 Quatrième étape :** On a  $\|f\|_p \leq B_p \|g(f)\|_p$ .

1.5.4 (i).- J'affirme que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\varphi(x)} dx = 4 \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v} dy dx.$$

On sait que

$$u^{\wedge}(x, y) = e^{-2\pi|x|y} f^{\wedge}(x),$$

qui donne pour  $u_0$  (dérivée de  $u$  par rapport à  $y$ )

$$u_0^{\wedge}(x, y) = -2\pi|x|e^{-2\pi|x|y} f^{\wedge}(x),$$

et de même pour  $\psi_0$  (dérivée de  $\psi$  par rapport à  $y$ )

$$\psi_0^{\wedge}(x, y) = -2\pi|x|e^{-2\pi|x|y} \psi^{\wedge}(x).$$

D'où (théorème de PLANCHEREL)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} y u_0 \bar{\psi}_0 \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} y 4\pi^2 |x|^2 e^{-4\pi|x|y} f^{\wedge}(x) \overline{\psi^{\wedge}(x)} \, dx \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2 |x|^2 \left( \int_0^{\infty} y e^{-4\pi|x|y} \, dy \right) f^{\wedge}(x) \overline{\psi^{\wedge}(x)} \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int f^{\wedge}(x) \overline{\psi^{\wedge}(x)} \, dx = \frac{1}{4} \int f(x) \overline{\psi(x)} \, dx. \end{aligned}$$

1.5.4 (ii).- D'après (i) et l'inégalité de SCHWARZ pour la mesure  $y \, dy$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \overline{\psi(x)} \, dx \right| &\leq 4 \int g(f, x) g(\psi, x) \, dx \leq \\ &\leq 4 \|g(f)\|_p \|g(\psi)\|_q \leq 4 A_q \|g(f)\|_p \|\psi\|_q \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de HOLDER et la troisième étape.

▣ th. 1.2.

1.6 Remarques sur la démonstration du théorème 1.2.-

1.6.1 On a montré à la quatrième étape que, en notant  $u = I.P.f$ ,  $\psi = I.P.\psi$ ,

$$4 \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} y \frac{\partial u}{\partial y} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial y}} \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi(x)} \, dx.$$

Prenons  $f = \psi$  et posons par définition



$$g_1(f, x) = \left( \int_0^\infty y \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient :

$$2 \|g_1(f, x)\|_{L^2(x)} = \|f\|_2.$$

1.6.2 On peut énoncer : Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , alors  $g_1(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ; et si pour un  $p \in ]1, \infty[$ ,  $g_1(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$  alors (reprenant la partie (ii) de la quatrième étape) on a  $f \in L^p$  et  $\|f\|_p \leq C_p \|g_1(f)\|_p$ .

1.6.3 Définition.- Posons pour tout entier  $k \geq 1$

$$g_k(f, x) = \left( \int_0^\infty y^{2k-1} \left| \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|^2 (x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $u = I.P.f$  (Pour  $k = 1$ , on retrouve  $g_1$ )

Proposition.- Il existe une constante  $A_k$  telle que pour tout  $f$ , pour tout

$x \in \mathbb{R}^n$

$$g_k(f, x) \geq A_k g_1(f, x).$$

Preuve seulement pour  $k = 2$ . Si on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = - \int_y^\infty \left( s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) \right) \left( \frac{1}{s} \right) ds$$

[C'est le cas si  $f \in L^2$  : la transformation de FOURIER montre que la dérivée tend vers 0 quand  $y \rightarrow \infty$ ], alors l'inégalité de SCHWARZ donne

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2(x, y) \leq \left( \int_y^\infty s^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) \right|^2 ds \right) \int_y^\infty \frac{ds}{s^2},$$

donc

$$\begin{aligned} g_1(f, x) &= \left( \int_0^\infty y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &= \left( \int_0^\infty \left( \int_y^\infty s^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) \right|^2 ds \right) dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \int_0^\infty s^3 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

(en intégrant par partie avec  $U(y) = \int_y^\infty \dots$ , et  $dV = dy$ ). D'où l'inégalité pour  $f \in L^2$ , puis pour  $f$  quelconque.

1.7 Passons à l'étude d'une autre fonction auxiliaire,  $g_\lambda^*$ , d'abord étudiée par ZYGMUND (dans le cas  $n=1$ , et par des méthodes de variable complexe). Ici s'aperçoit l'avantage de l'approche assez compliquée de la fonction  $g$ . La méthode plus simple d'espaces vectoriels esquissée en 1.3 ne s'applique pas ici.

1.7.1 Définitions.— Pour  $\lambda > 1$ , on pose

$$(g_\lambda^*(f, x))^2 = \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{y}{y+|t|} \right)^{\lambda n} |\text{grad } u(x-t, y)|^2 y^{1-n} dt dy.$$

Pour étudier cette expression (second théorème, 1.7.3), on utilisera une expression introduite par LUSIN (dans le cas  $n=1$ ) :

$$(S(f, x_0))^2 = \iint_{\Gamma(x_0)} |\text{grad } u(x_0 - t, y)|^2 y^{1-n} dt dy$$

où l'intégrale est étendue au cône  $\Gamma(x_0) =$  ensemble des  $(t, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$  vérifiant  $|t - x_0| < y$ .

1.7.2 Lemme.— On a, avec  $A, A_\lambda$  indépendants de  $f$  et  $x$

$$g(f, x) \leq A S(f, x) \leq A_\lambda g_\lambda^*(f, x).$$

Nous admettrons les inégalités entre le second et le troisième membre.

Etudiant l'effet des translations de  $\mathbb{R}^n$  sur  $g$  et  $S$ , on voit qu'il suffit de se placer en  $x = 0$ . Les dérivées  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$  sont harmoniques comme  $u$ .

Notons  $B_y$  la boule de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de centre  $(0, y)$ , tangente à l'hypersurface limitant le cône  $\Gamma(0)$ ; le rayon de  $B_y$  est proportionnel à  $y$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y}$  étant

harmonique

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = \frac{1}{|B_y|} \iint_{B_y} \frac{\partial u}{\partial y}(x, s) dx ds$$

et l'inégalité de SCHWARZ donne

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) \right|^2 \leq \frac{1}{|B_y|} \iint_{B_y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2(x, s) dx ds.$$

On peut écrire  $\frac{1}{|B_y|} = c y^{-1-n}$  où  $c$  ne dépend que de  $n$ .

intégrons cette inégalité, on a avec une autre constante  $c'$

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2(0, y) y dy \leq c' \iint_{\Gamma(0)} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 y^{1-n} dx dy.$$

de même avec les autres dérivées de  $u$ ; en ajoutant ces inégalités on a bien

$$g(f, 0) \leq A S(f, 0).$$

1.7.3 Second théorème.— Soient  $\lambda$  paramètre  $> 1$ , et  $f$  définie dans  $\mathbb{R}^n$ .

a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $A_\lambda g_\lambda^*(f, x) \geq g(f, x)$  (1.7.2).

b) Si on a  $1 < p < \infty$  et  $p > \frac{2}{\lambda}$ , alors

$$\|g_\lambda^*(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

La preuve de b) pour  $p \geq 2$  sera réglée tout de suite; pour  $p < 2$ , nous passerons par quelques lemmes.

1.7.3 1) Preuve de b) pour  $p \geq 2$  (alors on a  $p > \frac{2}{\lambda}$  pour tout  $\lambda > 1$ ). Montrons

d'abord que si  $\psi$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}^n$ , alors on peut écrire

$$(1) \int_{\mathbb{R}^n} (g_\lambda^*(f, x))^2 \psi(x) dx \leq A_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} (g(f, x))^2 ((M\psi)(x)) dx.$$

Or le premier membre vaut par définition de  $(g_\lambda^*)^2$

$$\int_{y=0}^{\infty} \int_{t \in \mathbb{R}^n} y |\nabla u(t, y)|^2 \left( \int_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(x) (|t-x|+y)^{-\lambda n} y^{\lambda n} y^{-n} dx \right) dt dy ;$$

donc pour établir (1), il suffit de voir que

$$(2) \quad \sup_{y>0} \int \psi(x) (|t-x|+y)^{-\lambda n} y^{\lambda n-n} dx \leq A_{\lambda} (M\psi)(t).$$

Or on sait qu'avec les notations et hypothèses du second théorème du chapitre

III (3.6), on a :

$$\sup_{\epsilon>0} |(\alpha * \varphi_{\epsilon})(x)| \leq A(M\alpha)(x)$$

$$\text{où } \varphi_{\epsilon}(x) = \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\epsilon^{-n}.$$

On est dans cette situation en prenant ici ( $A = A_{\lambda}$ ,  $\epsilon = y$ ,  $\alpha = \psi$ )

$$\varphi(t) = (1 + |t|)^{-\lambda n},$$

d'où

$$\varphi_y(x-t) = \left(\frac{y}{y+|x-t|}\right)^{\lambda n} y^{-n},$$

on a donc (2), d'où (1).

Si  $p=2$ , on trouve 1.7.3 (b) en prenant  $\psi = \text{constante}$  dans (1).

Si  $p > 2$ , posons  $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = 1$ . On passera au sup selon les fonctions  $\psi \geq 0$ ,

$\psi \in L^q$ ,  $\|\psi\|_q \leq 1$  dans le second puis dans le premier membre de (1), en invoquant

l'inégalité de HÖLDER.

$$\begin{aligned} A_{\lambda} \int (g(f, x))^2 (M\psi)(x) dx &\leq A_{\lambda} \|M\psi\|_q \|g(f)\|_p^2 \leq \\ &\leq A_{\lambda} \|M\psi\|_q (A_p)^2 \|f\|_p^2 \leq B_q (A_p)^2 A_{\lambda} \|f\|_p^2 \end{aligned}$$

où  $A_p$  est la constante du premier théorème (1.2), et  $B_q$  provient de l'étude

de la fonction maximale dans  $L^q$  ( $q > 1$ ) (ch.I. premier théorème (1.3)).

Ainsi ce dernier membre majore le  $\sup$  du premier membre de (1), à savoir  $\|g_\lambda^*(f)\|_p^2$ .

Ainsi s'achève la preuve de 1.7.3 b) pour les cas  $p=2$  et  $p > 2$ .

La preuve pour  $p < 2$  mettra en jeu les deux lemmes suivants.

1.7.3 2) Premier lemme.—(HARDY-LITTLEWOOD). Soient  $f \geq 0$  et  $u = I.P.f.$  Alors il existe  $C$  ne dépendant que de  $n$  tels que pour tous  $x, t \in \mathbb{R}^n, y > 0$  on ait  $u(x - y, y) \leq C(1 + \frac{|t|}{y})^n (Mf)(x)$ .

Preuve : En examinant l'effet des dilatations

$$(x, t, y) \longmapsto (\theta x, \theta t, \theta y)$$

sur les deux membres de l'inégalité à prouver, on voit qu'il suffit de la prouver en remplaçant  $y$  par 1.

On a, en faisant  $y=1$  dans le noyau de POISSON  $P_y(x) : P_1(x) = \frac{c}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ ,

$$u(x - t, 1) = (f * P_1)(x - t).$$

Le second théorème du chapitre III((3.6) et (3.7.3)) donne

$$u(x - t, 1) = (f * P_1)(x - t) \leq A_t(Mf)(x)$$

où  $A_t = \int Q_t(x) dx$ , où  $Q_t$  est la majorante radiale de la fonction  $x \longmapsto P_1(x-t)$

c'est-à-dire

$$Q_t(x) = \sup_{|x'| \geq |x|} P_1(x' - t).$$

On évalue facilement  $A_t = \int Q_t(x) dx \leq C(1 + |t|^n)$ .

1.7.3 3) Applications de ce lemme.— Etant donnée une constante  $k > 0$ , considérons l'ensemble des cônes  $\Gamma_k(x)$  de sommet  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\Gamma_k(x) = \text{ensemble des points } (x - t, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+ \text{ vérifiant } |t| \leq ky.$$

Il existe une constante  $A_k$  (dépendant de  $n$  et  $k$ ) telle que si

$$(x - t, y) \in \Gamma_k, \quad f \geq 0, \quad u = \text{I.P.}f \quad \text{on ait}$$

$$0 \leq u(x - t, y) \leq A_k (Mf)(x).$$

Cette remarque peut servir à l'étude des limites non tangentielles à  $\mathbb{R}^n$  de  $u(x, y)$  vers  $f(x)$ .

1.7.3 4) Définition.— Etant donné un (exposant)  $r \geq 1$ , on pose, avec  $f$  (mesurable) sur  $\mathbb{R}^n$

$$M_r(f) = (M(|f|^r))^{1/r}.$$

(Pour  $r=1$ , on retrouve la fonction maximale  $Mf$  de  $f$ ).

1.7.3 5) Second lemme.— Soient  $p \geq r \geq 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \geq 0$  ; alors il existe une constante  $A$  (ne dépendant que de  $r$  et  $n$ ) telle que pour tous  $x$ ,  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $y > 0$  on ait

$$u(x - t, y) \leq A \left(1 + \frac{|t|}{y}\right)^{n/r} M_r(f)(x)$$

où  $u = \text{I.P.}f$  et  $M_r$  a été défini ci-dessus.

(Ici  $1 + \frac{|t|}{y}$  est élevé à une puissance  $< n$ , ce qui sera utile dans l'étude de  $g_\lambda^*$ ).

Preuve : Puisque  $u(x - t, y) = \int_{s \in \mathbb{R}^n} P_y(x - t - s) f(s) ds$  et que la mesure dont la densité au point  $s$  est  $P_y(x - t - s)$  est positive de masse totale 1, on a

$$(u(x - t, y))^r \leq \int_{s \in \mathbb{R}^n} P_y(x - t - s) f^r(s) ds = I.P.f^r(x - t, y),$$

et il suffit d'appliquer le lemme précédent (1.7.3.2) à  $f^r$  au lieu de  $f$ .

1.7.4.1. Retrouvons un résultat connu par le premier théorème (1.2) mais par une démonstration qui donne l'idée que nous appliquerons ci-dessous à  $g_\lambda^*$ . Soit  $f \in L^p$ ,  $f \geq 0$ , avec  $1 < p < 2$ .

$$(g(f, x))^2 = \int_0^\infty y |\text{grad } u(x, y)|^2 dy = \frac{1}{p(p-1)} \int_0^\infty y u^{2-p} |\Delta(u^p(x, y))| dy$$

(d'après la relation entre le gradient et le Laplacien de  $u$  harmonique positive : lemme 1.4.1).

L'inégalité de HÖLDER pour la mesure de densité  $y$  au point  $y$ , la fonction  $\Delta(u^p)$  affectée de l'exposant 1, et la fonction  $u^{2-p}$  "affectée de l'exposant  $\infty$ " donne (voir lemme 1.4.3)

$$(g(f, x))^2 \leq ((Mf)(x))^{2-p} J(x) \frac{1}{p(p-1)}$$

$$\text{où } J(x) = \int_0^\infty y \Delta(u^p(x, y)) dy$$

Le théorème de GREEN (lemme 1.4.2) donne  $\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^p dx$ .

Introduisons les deux exposants conjugués  $\pi$  et  $\pi'$  tels que

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2-p}{2}, \quad \frac{1}{\pi'} = \frac{p}{2}; \quad \text{comme}$$

$$(g(f, x))^p \leq ((Mf)(x))^p)^{1/\pi} (J(x))^{1/\pi'} \left(\frac{1}{p(p-1)}\right)^{1/\pi'}$$

on obtient  $g(f) \in L^p$ . D'après la sous-additivité de  $f \mapsto g(f)$  on peut omettre l'hypothèse  $f \geq 0$  et on retrouve que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ avec } 1 < p < 2, \text{ alors } g(f) \in L^p. \end{array} \right.$$

1.7.4.2. Dernière étape de la démonstration de 1.7.3 b) :

Si on a  $1 < p < 2$  et  $\lambda > \frac{2}{p}$ , alors il existe  $A_p$  tel que pour tout  $f \in L^p$  on ait

$$\|g_\lambda^*(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Observons qu'on peut trouver  $r \in [1, p[$  tel qu'en posant

$$(1) \quad \lambda' = \lambda - \frac{2-p}{r}$$

on ait  $\lambda' > 1$ .

En effet, cette dernière inégalité s'écrit

$$r(\lambda - 1) > 2 - p$$

et par hypothèse on a  $\lambda > \frac{2}{p}$ . Choisissons donc un tel  $r$ .

On sait (lemme 1.7.3.5) que pour tous  $x, t \in \mathbb{R}^n, y > 0$ , on a

$$u(x-t, y) \left(\frac{y}{y+|t|}\right)^{n/r} \leq A M_r(f)(x).$$

Elevons à la puissance  $2-p$  cette inégalité, et comparons-la à l'intégrale double donnant  $g_\lambda^*$ , où on remplace la variable  $t$  par  $x-t$ . On obtient

(comme dans l'étude 1.7.4.1)

$$(g_\lambda^*(f, x))^2 \leq A^{2-p} (M_r(f)(x))^{2-p} J^*(x).$$



où, avec l'exposant  $\lambda'$  introduit en (1)

$$J^*(x) = \iint_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \left(\frac{|t|+y}{y}\right)^{-\lambda'n} y^{1-n} |\Delta u^p(x-t, y)| dt dy.$$

Pour calculer  $\int_{\mathbb{R}^n} J^*(x) dx$ , posons dans le second membre  $x' = x - t$ ,  $t' = t$ ,

$y' = y$  ; ensuite, en étudiant l'effet du changement de variables  $x' = \theta x''$ ,

$y' = \theta y''$ ,  $t' = \theta t''$ , on voit que

$$\int J^*(x) dx = c \iint_{\mathbb{R}_{n+1}^+} y |\Delta u^p(x, y)| dx dy = c \int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = c \int f^p dx$$

où  $c$  ne dépend que de  $\lambda'$  et  $n$  et où  $J$  a été étudiée au préalable (1.7.4.1).

Comme on sait qu'il existe  $A_{p,r}$  tel que

$$\|M_r(f)\| \leq A_{p,r} \|f\|_p \quad (r < p)$$

on achève la démonstration comme dans la remarque préalable (1.7.4.1)

th. 1.7.3

2.- Les multiplicateurs de  $L^p$ .

2.1 Définition.- Soit  $m$  une fonction bornée dans (le dual de)  $\mathbb{R}^n$  ; on peut alors définir sur  $L^2 \cap L^p$  une application linéaire  $T_m$  par la relation entre transformées de FOURIER :

$$(T_m f)^\wedge(x) = m(x) f^\wedge(x),$$

(ce qui donne  $T_m f \in L^2$ ).

On dit que  $m$  est un multiplicateur de  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), si pour tout  $f \in L^2 \cap L^p$  on a  $\|T_m f\|_p \leq A \|f\|_p$  (où  $A$  est indépendant de  $f$ ).

2.2 Notons  $\mathcal{M}_p$  l'ensemble des multiplicateurs de  $L^p$ . C'est évidemment, avec l'addition et la multiplication effectuées point par point, une algèbre.

On sait que pour  $m \in \mathcal{M}_1$ ,  $T_m$  est la convolution avec une mesure bornée, que  $\mathcal{M}_2$  est constitué des fonctions mesurables essentiellement bornées, que pour  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $1 < p < \infty$ , on a  $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$ .

2.3 Troisième théorème.- "Théorème des multiplicateurs, forme préliminaire". On

suppose que

1)  $m$  est  $k$  fois continument dérivable dans le complémentaire de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $k$  entier  $> \frac{n}{2}$ .

2) Pour chaque indice de dérivation  $\alpha$  avec  $0 \leq |\alpha| \leq k$  on a pour

$x \neq 0$

$$|D^{\alpha} m|(x) \leq A |x|^{-\alpha}$$

Alors dans chaque  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) l'opérateur  $T_m$  correspondant est borné :

$$\|T_m f\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad (f \in L^2 \cap L^p)$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $A$ , de  $p$ , et de  $n$ .

2.4 Premier corollaire.— On peut remplacer les hypothèses de 2.3 par les deux hypothèses

$$1) |m(x)| \leq A,$$

$$2) \text{ avec } k > \frac{n}{2}, \text{ si } 0 \leq |\alpha| \leq k \text{ on a}$$

$$\int_{R \leq |x| \leq 2R} |D^{\alpha} m|^2(x) dx \leq A R^{-2|\alpha|+n}.$$

(En fait, ces hypothèses sont plus générales).

2.5 Exemples.—(i) Si  $m$  est positivement homogène de degré zéro, et est  $k$  fois continument dérivable sur une sphère centrée à l'origine, alors  $m$  vérifie les hypothèses du théorème 2.3.

$$(ii) m(x) = |x|^{it} \quad (t \text{ réel}).$$

(iii) Si  $m$  vérifie les hypothèses du théorème 2.3 est minorée par une constante strictement positive, alors  $\frac{1}{m}$  vérifie aussi ces hypothèses (mais pas dans le cas du corollaire 2.4).

(iv) Si  $m$  vérifie les hypothèses du théorème 2.3, alors  $x \mapsto m(\zeta x)$  vérifie

aussi ces hypothèses quand  $\mathcal{T}$  est une rotation ou une dilatation de  $\mathbb{R}^n$ , mais non une translation.

2.6 Lemme.— Avec les hypothèses et notations du théorème 2.3, notons pour chaque

$$f \in L^2$$

$$(T_m f)(x) = F(x) ;$$

alors on a avec  $\lambda = \frac{2k}{n}$

$$g_1(F, x) \leq A_\lambda g_\lambda^*(f, x).$$

Rappelons ces notations de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY :

$$g_1(F, x) = \left( \int_0^\infty y \left| \frac{\partial U}{\partial y} (x, y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } U = I.P.F,$$

$$g_k(f, x) = \left( \int_0^\infty y^{2k-1} \left| \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } u = I.P.f,$$

$$g_\lambda^*(f, x) = \left( \int_{y=0}^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} |\text{grad } u(x-t, y)|^2 (|t|+y)^{-\lambda n} y^{\lambda n - n + 1} dt dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.7 Preuve de 2.3.—  $k > \frac{n}{2}$ , autrement dit  $\lambda = \frac{2k}{n} > 1$ , donc si  $p > \frac{2}{\lambda}$ , le

premier théorème (1.2) combiné avec le lemme 2.6 donnera la chaîne d'inégalités

$$\|F\|_p \leq A \|g(F)\|_p \leq B \|g_\lambda^*(f)\|_p \leq C \|f\|_p$$

(avec des constantes A, B, C dépendant de n et p) :  $T_m$  sera une application

bornée  $L^p \rightarrow L^p$  ( $p \geq 2 > \frac{2}{\lambda}$ ) donc son "adjointe"  $\overline{T_m}$  sera une application

bornée  $L^q \rightarrow L^q$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) (de même norme), et si  $\psi \in L^2 \cap L^q$ , on aura

$$(\overline{T_m} \psi)^\wedge = \bar{m} \psi^\wedge.$$

On aura donc démontré le théorème aussi pour  $L^q$ , donc pour tout exposant  $e \in ]1, +\infty[$ .

2.8 Il suffit donc de prouver le lemme 2.6.-

Preuve du lemme.

2.8.1 Avec  $u = I.P.f$ ,  $U = I.P.F$ , les chapeaux désignant des transformées de FOURIER par rapport aux  $n$  premières variables, à  $y$  fixé, on a

$$u^{\wedge}(x, y) = e^{-2\pi i |x| y} f^{\wedge}(x).$$

$$U^{\wedge}(x, y) = e^{-2\pi i |x| y} F^{\wedge}(x) = e^{-2\pi i |x| y} m(x) f^{\wedge}(x) = \mathcal{M}^{\wedge}(x, y) f^{\wedge}(x)$$

où  $\mathcal{M}^{\wedge}(x, y) = e^{-2\pi i |x| y} m(x).$

Puisque, avec  $y = y_1 + y_2$  ( $y_1$  et  $y_2 > 0$ ), on a

$$U^{\wedge}(x, y) = \mathcal{M}^{\wedge}(x, y_1) u^{\wedge}(x, y_2),$$

on a avec  $\mathcal{M} = \mathcal{F}_x^{-1} (\mathcal{M}^{\wedge})$

$$(1) \quad U(x, y) = \int_{t \in \mathbb{R}^n} \mathcal{M}(t, y_1) u(x - t, y_2) dt.$$

2.8.2 On a vu dans les remarques 1.6 suivant le premier théorème d'une part que pour chaque entier  $j \geq 1$  il existe une constante  $c_j$  telle que pour tout  $\varphi$  défini sur  $\mathbb{R}^n$ , et tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$g_1(\varphi, x) \leq c_j g_j(\varphi, x),$$

et d'autre part qu'il existe une constante  $c'_p$  telle que pour toute  $f \in L^p$  on ait

$$\|\varphi\|_p \leq c'_p \|g_1(\varphi)\|_p$$

Donc pour prouver le lemme, il suffit d'établir que

$$(2) \quad g_{k+1}(f, x) \leq C g_{\lambda}^*(f, x) .$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2.8.3 [Dans ce qui suit,  $\varphi^{(j)}(x_0, y_0)$  désigne la valeur au point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

de la dérivée  $j$ -ième par rapport à  $y$  d'une fonction  $\varphi$ .] Ainsi (1) donne :

$$U^{(k+1)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^{(k)}(t, \frac{y}{2}) u^{(1)}(x-t, \frac{y}{2}) dt .$$

2.8.4 Majoration de  $\mathcal{M}^{(k)}$ . Montrons qu'on a pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $y > 0$

$$(3) \quad |\mathcal{M}^{(k)}(t, y)| \leq A y^{-n-k}$$

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |t|^{2k} |\mathcal{M}^{(k)}(t, y)|^2 dt \leq A y^{-n}$$

En effet

$$\mathcal{M}(x, y) = \int e^{2\pi i(t/x)} e^{-2\pi|x|y} m(x) dx$$

donne en remarquant que  $m$  est bornée

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}^{(k)}(t, y)| &\leq A' \int |x|^k e^{-2\pi|x|y} dx = A'' \int_0^{\infty} r^{k+n} e^{-2\pi r y} \frac{dr}{r} = \\ &= A y^{-n-k} \text{ qui est (3).} \end{aligned}$$

Pour (4), montrons plus précisément que

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |t^{\alpha} \mathcal{M}^{(k)}(t, y)|^2 dt \leq A y^{-n}$$

pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tel que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$  et où  $t^{\alpha} = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$ .

Le théorème de PLANCHEREL donne

$$\|t^{\alpha} \mathcal{M}^{(k)}(t, y)\|_{L^2(t)} = \|(-2\pi)^k D_x^{\alpha} (|x|^k m(x) e^{-2\pi|x|y})\|_{L^2(x)} .$$

Or on a pour une constante  $c$  assez grande

$$\begin{aligned} \int e^{-4\pi|x|y} dx &\leq c y^{-n}, \\ y^2 \int |x|^2 e^{-4\pi|x|y} dx &\leq c y^{-n}, \\ y^4 \int |x|^4 e^{-4\pi|x|y} dx &\leq c y^{-n}, \dots \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse (2) du théorème 2.3

$$|D_x^\alpha m|(x) \leq A |x|^{-k} \quad (k = |\alpha|).$$

ce qui donne par exemple  $|D_x^\alpha |x|^k m| \leq C t^e$ .

Donc l'emploi de la formule de LEIBNITZ pour évaluer

$$D_x^\alpha (|x|^k \mathcal{M}(x, y) e^{-2\pi|x|y})$$

montre qu'avec un  $A$  convenable, on a (5) :

$$\|t^\alpha \mathcal{M}^{(k)}(t, y)\|_{L^2(t)}^2 \leq A y^{-n}.$$

2.8.5 Cela fait, pour démontrer (2), revenons à la relation

$$\begin{aligned} U^{(k+1)}(x, y) &= \int_{t \in \mathbb{R}^n} \mathcal{M}^{(k)}(t, \frac{y}{2}) u^{(1)}(x-t, \frac{y}{2}) dt \\ &= \int_{|t| \leq y} + \int_{|t| \geq y} = J_0 + J_\infty \end{aligned}$$

donc  $|U^{(k+1)}(x, y)|^2 \leq 2 J_0^2 + 2 J_\infty^2$ .

$$\begin{aligned} J_0^2 &\leq \left( \int_{|t| \leq y} |\mathcal{M}^{(k)}(t, \frac{y}{2})| |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})| dt \right)^2 \leq \\ &\leq A' y^{-2n-2k} \left( \int_{|t| \leq y} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})| dt \right)^2 \leq \\ &\leq A'' y^{-2n-2k} \int_{|t| \leq y} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt \cdot y^n = \\ &= A'' y^{-n-2k} \int_{|t| \leq y} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt, \end{aligned}$$

d'après successivement (3) et l'inégalité de SCHWARZ.

$$\begin{aligned} J_{\infty}^2 &\leq \left( \int_{|t| \geq y} |d^{(k)}(t, \frac{y}{2})| |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})| dt \right)^2 \leq \\ &\leq \int_{|t| \geq y} |t|^{-2k} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt \\ &\quad \int_{t \in \mathbb{R}^n} |t|^{2k} |d^{(k)}(t, \frac{y}{2})|^2 dt \leq \\ &\leq A y^{-n} \int_{|t| \geq y} |t|^{-2k} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt, \end{aligned}$$

d'après successivement l'inégalité de SCHWARZ et (4).

Reportons ces majorations dans

$$(g_{k+1}(F, x))^2 = \int_0^{\infty} y^{2k+1} \left| \frac{\partial^{k+1} U}{\partial y^{k+1}} \right|^2 (x, y) dy \leq K_0 + K_{\infty}$$

où  $K_0$  et  $K_{\infty}$  correspondent à respectivement  $J_0$  et  $J_{\infty}$ .

$$\begin{aligned} K_0 &\leq A \int_{y=0}^{\infty} \int_{|t| \leq y} y^{1-n} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt dy \leq \\ &\leq A_0 \int_{y=0}^{\infty} \int_{|t| \leq y} y^{1-n} \left( \frac{y}{|t|+y} \right)^{2k} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt dy ; \\ K_{\infty} &\leq A \int_{y=0}^{\infty} \int_{|t| \geq y} y^{1-n} \left( \frac{y}{|t|} \right)^{2k} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt dy \leq \\ &\leq A_0 \int_{y=0}^{\infty} \int_{|t| \geq y} y^{1-n} \left( \frac{y}{|t|+y} \right)^{2k} |\text{grad } u(x-t, \frac{y}{2})|^2 dt dy \end{aligned}$$

où  $A_0$  est une constante convenable ; une dernière transformation remplace  $\frac{y}{2}$

par  $y$  dans ces intégrales.



3.- Emploi du système de RADEMACHER.3.1 Système orthonormé de RADEMACHER.-

La propriété la plus importante ou utile, de notre point de vue, de ce système est décrit dans le lemme ci-dessous. Pour une large part, cette propriété reflète le fait que les fonctions qui forment ce système sont mutuellement indépendantes.

Soit  $\rho_1$  la fonction périodique de période 1 valant +1 sur  $[0, \frac{1}{2}[$ , -1 sur  $[\frac{1}{2}, 1[$ . (Donc  $\rho_1(t) = \text{signe de } \sin \pi t$  pour presque tout  $t$ ).

On prend  $r_p =$  restriction à  $[0, 1]$  de la fonction  $t \mapsto \rho_1(2^{p-1}t)$ .

On obtient un système orthonormé incomplet de fonctions sur  $[0, 1]$ .

Ce système interviendra à la faveur de la remarque suivante : Pour toute suite

$(\epsilon_k)_{k \geq 1}$  de nombres valant +1 ou -1, il existe un et un seul  $t \in [0, 1]$  tel que pour tout  $k$ ,  $\epsilon_k = r_k(t)$ .

Lemme.- 1° (Une variable). Pour  $1 \leq p < \infty$ , il existe deux constantes  $A_p$  et  $B_p > 0$  telle que pour toute série orthogonale :

$$F(t) \cong \sum a_k r_k(t) \text{ avec } \sum |a_k|^2 < \infty$$

on ait

$$A_p \|F\|_{L^p([0,1])} \leq \|F\|_{L^2([0,1])} = \left( \sum |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq B_p \|F\|_{L^p([0,1])} .$$

2° (Deux variables). Enoncé analogue, avec

$$F(t, t') \cong \sum a_{m,k} r_m(t) r_k(t') \text{ et } \sum |a_{m,k}|^2 < \infty$$

et avec les espaces  $L^p([0, 1] \times [0, 1])$ .

(ZYGmund : trigonometric series) ou (KARZMARZ-STEINHAUS : Theorie der Orthogonalreihen).

3.2 Soient  $\mathcal{H}$  un espace de HILBERT séparable,  $T$  un opérateur linéaire de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $f \in L^p$ ,  $h \in \mathcal{H}$ , on notera  $fh$  la fonction  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H} : t \mapsto f(t).h$

(on peut identifier  $fh$  à  $f \otimes h \in L^p \otimes \mathcal{H}$ ) et on définit alors

$$T \otimes I : L^p \otimes \mathcal{H} \rightarrow L^p \otimes \mathcal{H} \text{ par } (T \otimes I)(fh) = (Tf)h$$

et par bilinéarité. On sait que le complété de  $L^p \otimes \mathcal{H}$  s'identifie canoniquement

à  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$  où on sait définir la norme d'un élément : voir ch.II. 4.1. Ces

notions étant rappelées, on a le

Théorème.— Les opérateurs  $T : L^p \rightarrow L^p$  et  $T \otimes I : L^p \otimes \mathcal{H} \rightarrow L^p \otimes \mathcal{H}$  ont même norme.

3.3 Traduisons le théorème ci-dessus en explicitant les diverses normes mises en jeu, et en décomposant les vecteurs de  $\mathcal{H}$  selon une base orthonormale choisie une fois pour toutes.

Théorème.— Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H} : f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \dots)$  où les  $f_m$  sont à valeurs complexes.

Soit  $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  bornée ( $1 \leq p \leq \infty$ ).

Posons pour alléger  $T \circ I = \bar{T}$  puis

$$\bar{T}f = (Tf_1, Tf_2, \dots, Tf_m, \dots) = (F_1, F_2, \dots, F_m, \dots)$$

Si la norme de  $T$  est  $A$ , alors celle de  $\bar{T}$  est aussi  $A$  :

$$(1) \quad \left\| \left( \sum |F_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(x)} \leq A \left\| \left( \sum |f_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(x)} .$$

3.4 Première démonstration de 3.3. - Elle nous donnera au lieu de 3.3(1) une conclusion moins précise ; la constante  $A$  sera remplacée par  $A \frac{A}{B} \frac{p}{p}$  et dépendra donc de  $p$  ; de plus, elle supposera  $p < \infty$ .

Un passage à la limite montre qu'il suffit d'examiner le cas où  $\mathcal{X}$  est de dimension finie  $N$  :  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))$ .

Posons pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  :

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^N r_m(t) f_m(x)$$

et 
$$F(x, t) = \sum_{m=1}^N r_m(t) F_m(x)$$

où  $r_m$  est la  $m$ -ème fonction de RADEMACHER (3.1). D'où pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

successivement

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, t)|^p dx \leq A^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, t)|^p dx ,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^1 |F(x, t)|^p dt \right) dx \leq A^p \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^1 |f(x, t)|^p dt \right) dx .$$

Or, avec les constantes  $A_p$  et  $B_p$  du lemme 3.1 (1°), et compte tenu du fait

que  $(r_n)$  est orthonormé sur  $[0, 1]$ , on a

$$\left( \sum_1^N |F_m(x)|^2 \right)^{p/2} = \left( \int_0^1 |F(x, t)|^2 dt \right)^{p/2} \leq (B_p)^p \int_0^1 |F(x, t)|^p dt$$

et de même

$$\int_0^1 |f(x, t)|^p dt \leq \left(\frac{1}{A}\right)^p \left(\int_0^1 |f(x, t)|^2 dt\right)^{p/2} = \left(\frac{1}{A}\right)^p \left(\sum_1^N |f_m(x)|^2\right)^{p/2}.$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_1^N |F_m(x)|^2\right)^{p/2} dx \leq \left(A \frac{B}{A}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_1^N |f_m(x)|^2\right)^{p/2} dx;$$

passant aux racines  $p$ -èmes, on a l'inégalité annoncée au début de la preuve.

**3.5 Seconde démonstration de 3.3.** Ici on obtiendra la constante exacte, et cela pour tout  $p \in [1, \infty]$ .

Soit en  $\sum$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\int \dots d\sigma$  sa mesure ordinaire ; pour tout vecteur  $t$  non nul de  $\mathbb{R}^N$  fixé, on a

$$\int_{\xi \in \sum} |\cos(t, \xi)|^p d\sigma(\xi) = \int_{\xi \in \sum} |\xi_1|^p d\sigma(\xi) = \int_{\xi \in \sum} \theta^p d\sigma(\xi)$$

où  $(t, \xi)$  est l'angle que font ces deux vecteurs, où  $\xi_1$  est la première coordonnée de  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \sum$ , et où  $\theta > 0$  est une constante convenable dépendant seulement de  $N$  et de  $p$ , car le premier membre est indépendant de  $t$ .

Les produits scalaires avec  $\xi$  des vecteurs

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)), \quad F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x)) \quad \text{où } F_j = Tf_j$$

valent [ nous verrons à la fin comment définir les cosinus quand  $f(x)$  ou  $F(x) = 0$  ] :

$$(f(x)|\xi) = \xi_1 f_1(x) + \dots + \xi_N f_N(x) = \left(\sum_1^N |f_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\xi, f(x)),$$

$$(F(x)|\xi) = \xi_1 F_1(x) + \dots + \xi_N F_N(x) = \left(\sum_1^N |F_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\xi, F(x))$$

qui est la valeur au point  $x \in \mathbb{R}^n$  de l'image par  $T$  de la fonction

$x \mapsto (f(x)|\xi)$  ;  $A$  étant la norme de  $T$  comme opérateur de  $L^p$ , on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(F(x)|\xi)|^p dx \leq A^p \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x)|\xi)|^p dx .$$

où on reporte les troisièmes membres qui donnent les valeurs de ces produits sca-

laire  $(F(x)|\xi)$  et  $(f(x)|\xi)$  ; puis on étend les intégrations à  $\mathbb{R}^N \times \Sigma$  ;

mais si on intègre d'abord par rapport à  $\xi \in \Sigma$ , apparaissent dans les deux

membres les facteurs

$$\int |\cos(\xi, F(x))|^p d\sigma(\xi) \quad \text{et} \quad \int |\cos(\xi, f(x))|^p d\sigma(\xi)$$

indépendants de  $x$ , à condition de remplacer  $\cos(\xi, F(x))$  par  $\xi_1$  (ou  $\theta$ )

quand  $F(x)$  est nul ; et de même pour  $\cos(\xi, f(x))$  quand  $f(x) = 0$ .

3.3

#### 4.- Un autre type de multiplicateurs de $L_p$ .

Voici maintenant le second des outils principaux de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY (Le premier était le théorème 1.2 relatif à la fonction  $g$ ). Il serait intéressant d'étendre le théorème 4.1 ci-dessous dans les deux directions suivantes

(A) Remplacer les pavés par des boules,

(B) Remplacer les pavés (qui sont par définition des produits d'intervalles sur les axes) par des parallélépipèdes d'orientations quelconques.

Y. MEYER a observé que la résolution de (A) donnerait celle de (B). D'autre part, il est maintenant connu que cette variante (A), même avec une seule boule,

est fautive hors du domaine  $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$  : le problème ne se pose que pour ces valeurs.

4.1 Quatrième théorème.— Soient  $\rho_1, \dots, \rho_m, \dots$  une suite de pavés de  $\mathbb{R}^n$  (non nécessairement disjoints)  $\psi_m$  la fonction valant un sur  $\rho_m$ , zéro ailleurs; considérons pour chaque rectangle la transformation

$$(S_{\rho_m} f)^\wedge = \psi_m f^\wedge \quad (f \in L^2).$$

Alors

(i) (MARCEL RIESZ). Pour chaque pavé  $\rho (= \rho_m)$  et  $f \in L^2 \cap L^p$

( $1 < p < \infty$ ) on a

$$\|S_\rho(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

où  $A_p$  ne dépend que de  $p$  et  $n$  (ne dépend pas du pavé).

(ii) (ZYGmund) Quelle que soit la suite de pavés  $\rho_1, \dots, \rho_m, \dots$  on a pour toute suite de fonctions  $f_1, \dots, f_m, \dots \in L^2 \cap L^p$  ( $1 < p < \infty$ )

$$\left\| \left( \sum_m |S_{\rho_m}(f_m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A_p \left\| \left( \sum_m |f_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

(Exemple avec  $n = 1$ ,  $(S_{[-R,R]} f)(x) = \int_{-R}^R f^\wedge(t) e^{-2\pi i t x} dt$ .)

4.2 Preuve de 4.1(i).

4.2.1 Première étape.—  $n = 1$  et  $\rho_m = ]-\infty, d_m]$  ( $d_m < \infty$ ).

$$(S_\rho f)^\wedge(x) = \begin{cases} f^\wedge(x) & \text{pour } x \leq d, \\ 0 & \text{pour } x > d. \end{cases}$$

On sait que,  $H$  désignant la transformation de HILBERT (ch.III.1.)

$$(Hf)^{\wedge}(x) = i \operatorname{sgn} f^{\wedge}(x),$$

Or  $\mathcal{F}_y(e^{2\pi i dy} f(y)) (x) = f^{\wedge}(x + d),$

d'où  $[H_y(e^{2\pi i dy} f(y))]^{\wedge}(G) = i(\operatorname{sgn} x) f^{\wedge}(x + d),$

et  $[e^{-2\pi i dy} H_y(e^{2\pi i dy} f(y))]^{\wedge}(x) = i \operatorname{sgn}(x - d) \cdot f^{\wedge}(x),$

d'où

$$-\frac{1}{2i} \left[ \left\{ e^{-2\pi i dy} H_y(e^{2\pi i dy} f(y)) \right\} - \left\{ if \right\} \right] = S_p f$$

qui montre que quand  $d$  varie, les  $S_p = S_{]-\infty, d]}$  forment un ensemble borné d'opérateurs de  $L^2 \cap L^p$  muni de la norme  $L^p$  d'après les propriétés de  $H$ . De plus, le théorème (3.3) nous montre que

$$\left\| \left( \sum |S_{p_m}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A_p \left\| \left( \sum |f_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

4.2.2 Seconde étape.—  $n = 1$  et  $p_m = [g_m, d_m]$  ( $-\infty < g_m < d_m < \infty$ ).

On écrit  $S_{p_m} = S_{]-\infty, d_m]} \circ S_{[g_m, +\infty[}$

et on applique la conclusion de la première étape au premier facteur; et pour le second facteur on a un résultat analogue.

4.2.3 Troisième étape.— ( $n$  quelconque). Tout pavé de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit  $p_m = L_1^{(m)} \times \dots \times L_n^{(m)}$  produit de  $n$  intervalles  $L_j$  situés sur les  $n$  axes de coordonnées. On peut

alors écrire :

$$S_{p_m} = S_{L_n^{(m)}}^{(n)} \circ S_{L_{n-1}^{(m)}}^{(n-1)} \circ \dots \circ S_{L_2^{(m)}}^{(2)} \circ S_{L_1^{(m)}}^{(1)}$$

$$\text{où } (S_{L_j}^{(j)} f)^\wedge(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f^\wedge(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x_j \in L_j \\ \text{zéro} & \text{si } x_j \notin L_j. \end{cases}$$

On considère d'abord les fonctions du type  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$

et on remarque que le résultat est déjà prouvé pour une variable.

4.1(i)

### 4.3 Découpage diadique de $\mathbb{R}^n$ .

4.3.1 Notations.— On découpe  $\mathbb{R}$  en intervalles  $\mathcal{I}_j^+ = [2^j, 2^{j+1}]$  et

$$\mathcal{I}_j^- = [-2^{j+1}, -2^j] \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Ayant effectué sur chacun des  $n$  axes de  $\mathbb{R}^n$  un tel découpage, on découpe  $\mathbb{R}^n$  selon les pavés qui sont produit d'intervalles de ce type. On numérote ces pavés par un ensemble dénombrable  $\Delta$  d'indices  $\mathcal{J}$ .

Et pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  on note  $f_{\mathcal{J}}$  la fonction dont la transformée de FOURIER  $f_{\mathcal{J}}^\wedge$  vaut  $f^\wedge$  sur le pavé  $\rho_{\mathcal{J}}$ , zéro ailleurs. On écrit  $S_{\mathcal{J}}(f) = f_{\mathcal{J}}$  ( $S_{\mathcal{J}}$  au lieu de  $S_{\rho_{\mathcal{J}}}$ ).

### 4.3.2 Cinquième théorème. (LITTLEWOOD-PALEY).—

Avec les notations ci-dessus, pour tout  $f \in L^2 \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ , le rapport

$$\left\| \left( \sum_{\mathcal{J}} |f_{\mathcal{J}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p / \|f\|_p$$

est compris entre deux nombres ne dépendant que de  $p$  et  $n$  :

$$0 < A_p < B_p < \infty.$$



4.3.3 Avant d'aborder la démonstration, introduisons des notations plus précises que 4.3.1 et qui ne nous serviroient que pour la démonstration du cas  $n = 1$ .

Notations.— Partageons l'ensemble des intervalles diadiques de  $\mathbb{R}$  en  $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$  où, distinguant la parité des exposants,  $\Delta_0 =$  ensemble des intervalles  $[2^{-2k}, 2^{-2k+1}]$  et de leurs symétriques  $[-2^{-2k+1}, -2^{-2k}]$ ,  $\Delta_1 =$  ensemble des intervalles  $[2^{-2k+1}, 2^{-2k+2}]$  et de leurs symétriques  $[-2^{-2k+2}, -2^{-2k+1}]$ .

Pour tout  $\delta \in \Delta$ , notons  $2_\delta$  le point de  $\delta$  le plus proche de l'origine ( $2_\delta = 2^\ell$  si  $\delta = [2^\ell, 2^{\ell+1}]$  et  $2_\delta = -2^\ell$  si  $\delta = [-2^{\ell+1}, -2^\ell]$ ).

Au moyen d'une bijection fixée de  $\Delta$  (respectivement  $\Delta_0$  ou  $\Delta_1$ ) sur  $\mathbb{N}^*$  (ensemble des entiers  $\geq 1$ ), on peut noter  $(r_\delta)_{\delta \in \Delta}$  (respectivement  $(r_\delta^{(i)})_{\delta \in \Delta_i}$ ) le système orthonormal de RADEMACHER (3.1).

On introduira une fonction fixée  $\varphi$ , indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , nulle hors de  $[\frac{3}{4}, 3]$ , valant 1 sur  $[1, 2]$ .

On considérera les familles de nombres  $\varepsilon = (\varepsilon_\delta)_{\delta \in \Delta}$  où chaque  $\varepsilon_\delta = \pm 1$ .

Au moyen de  $\varphi$  et de chaque suite  $\varepsilon$ , on construit la fonction  $m_\varepsilon$  :

$$(1) \quad m_\varepsilon(x) = \sum_{\delta \in \Delta} \varepsilon_\delta \varphi(2_\delta x)$$

Comme au voisinage de tout point  $\neq 0$ , au plus trois des termes de cette série ne sont pas nuls, il existe une constante  $A > 0$  telle que, indépendamment du choix des  $\varepsilon_\delta = \pm 1$ , on ait

$$(2) \quad |m_\epsilon(x)| \leq A, \quad |m'_\epsilon(x)| \leq \frac{A}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

#### 4.3.4 Preuve de 4.3.2 dans le cas $n = 1$ .

On définit pour tout  $\delta \in \Delta$  les multiplicateurs  $S_\delta$  et  $\tilde{S}_\delta$  par

$$(S(f))^\wedge(x) = \begin{cases} f^\wedge(x) & \text{si } x \in \delta \\ \text{zéro} & \text{si } x \notin \delta. \end{cases}$$

$$(\tilde{S}_\delta(f))^\wedge(x) = \psi(2_\delta x) f^\wedge(x)$$

D'après 4.3.3 (2), le théorème des multiplicateurs 2.3 (dont l'entier  $k > \frac{n}{2}$  vaut 1 ici) s'applique à  $m_\epsilon$  : Il existe une constante  $C_p$ , ne dépendant que de  $p$  et de  $A$  (4.3.3 (2)) (en particulier  $C_p$  ne dépend pas du choix de la suite  $\epsilon$ ) telle que

$$(1) \quad \left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta} \epsilon_\delta \tilde{S}_\delta \right) f \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Soit  $t$  l'unique nombre  $\in [0, 1]$  tel que pour tout  $\delta \in \Delta$  on ait

$r_\delta(t) = \epsilon_\delta$  (voir notation 4.3.3) et posons en nous inspirant de la méthode 3.4 :

$$(2) \quad f(x, t) = \sum_{\delta \in \Delta} r_\delta(t) \tilde{S}_\delta f(x)$$

Alors (1) implique

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^p dx \leq C_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \quad \text{pour chaque } t \in [0, 1],$$

et donc

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x, t)|^p dt dx \leq C_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx$$

qui entraîne que

$$(5) \quad \left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta} |\tilde{S}_\delta f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C'_p \|f\|_p.$$

Remarquons que  $S_\delta \circ \tilde{S}_\delta = S_\delta$ .

Alors (5) et le théorème (4.1) nous donnent que

$$(6) \quad \left\| \left( \sum |S_\delta f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_p'' \|f\|_p.$$

Pour avoir une inégalité majorant  $\|f\|_p$  par un multiple convenable du premier membre on peut supposer que  $\left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta} |S_\delta f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = 1$ . Alors

$$\left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta_0} |S_\delta f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta_1} |S_\delta f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq 1.$$

Posons  $f_0(x, t) = \sum_{\delta \in \Delta_0} r_\delta^{(0)}(t) S_\delta f(x)$  et  $f_1(x, t) = \sum_{\delta \in \Delta_1} r_\delta^{(1)}(t) S_\delta f(x)$  ;

il existe au moins un  $t_0 \in [0, 1]$  donnant

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_0(y, t_0)|^p dy \leq \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^p dx dt \leq A_p^p$$

qui s'écrit avec  $\varepsilon_\delta = r_\delta^{(0)}(t)$  pour tout  $\delta$

$$(7) \quad \left\| \sum_{\delta \in \Delta_0} \varepsilon_\delta S_\delta(f) \right\|_p \leq A_p.$$

Appliquons maintenant l'opérateur  $\sum_{\delta \in \Delta_0} \tilde{S}_\delta$  et observons que  $\tilde{S}_\delta S_\delta = S_\delta$

et  $\tilde{S}_\delta S_\gamma = 0$  pour  $\delta \neq \gamma$ , ( $\delta, \gamma \in \Delta_0$ ) ; (1) et (7) donnent

$$\left\| \sum_{\delta \in \Delta_0} S_\delta f \right\|_p \leq A_p C_p$$

et de même en remplaçant au premier membre  $\sum_{\delta \in \Delta_0}$  par  $\sum_{\delta \in \Delta_1}$ . Donc

$$\|f\|_p = \left\| \sum_{\delta \in \Delta_0} S_\delta f + \sum_{\delta \in \Delta_1} S_\delta f \right\|_p \leq 2 A_p C_p.$$

Ceci prouve le théorème dans le cas  $n = 1$ .

Conséquence : Il existe deux constantes  $0 < D_p < D'_p$  telles que pour toute

$f \in L^p(\mathbb{R})$  et pour tout choix des  $\varepsilon_{\delta} = \pm 1$  on ait

$$(8) \quad D_p \|f\|_p \leq \left\| \sum_{\delta \in \Delta} \varepsilon_{\delta} S_{\delta} f \right\|_p \leq D'_p \|f\|_p.$$

4.3.5 Preuve de 4.3.2 pour  $n = 2$ . On écrit chaque rectangle diadique de  $\mathbb{R}^2$

$\delta = \delta_1 \times \delta_2$  où  $\delta_j$  est un intervalle diadique du  $j$ -ème axe ( $j = 1, 2$ ) et

$S_{\delta} = S_{\delta_1}^{(1)} \circ S_{\delta_2}^{(2)}$  où  $S_{\delta_j}^{(j)}$  opère sur la  $j$ -ème variable  $x_j$  ( $j = 1, 2$ ). Soit

$f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ . (8) donne pour presque tout  $x_2$

$$D_p \|f(x_1, x_2)\|_{L^p(x_1)} \leq \left\| \sum_{\delta_1 \in \Delta(\mathbb{R}_1)} \varepsilon_{\delta_1} S_{\delta_1}^{(1)} f(x_1, x_2) \right\|_{L^p(x_1)} \leq D'_p \|f(x_1, x_2)\|_{L^p(x_2)}$$

puis en intégrant cette fois par rapport à  $x_2$

$$(9) \quad D_p^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \sum_{\delta_1 \times \delta_2} \varepsilon_{\delta_1} \varepsilon_{\delta_2} S_{\delta_1}^{(1)} S_{\delta_2}^{(2)} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq D_p'^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

Ayant fixée une numérotation des  $\delta_1$  et des  $\delta_2$ , il existe un et un seul

$t \in [0, 1]$  tel que pour tout  $\delta_1$ ,  $\varepsilon_{\delta_1} = r_n(\delta_1)(t)$  et de même  $t'$  tel que pour

tout  $\delta_2$ ,  $\varepsilon_{\delta_2} = r_n(\delta_2)(t')$ .

Et on utilise ici la partie 2<sup>o</sup> du lemme 3.1, à la manière dont nous avons utilisé le 1<sup>o</sup> pour le cas  $n = 1$ .

(Le cas  $n$  quelconque se traite selon les mêmes idées).

th.4.3.2.

4.4 Pour prouver le théorème des multiplicateurs de MARCINKIEWICZ, nous aurons

besoin d'une version généralisée du théorème 4.1 : les démonstrations, analogues dans les deux cas, ne sont pas indiquées.

Théorème.— Soit  $(M, \mu)$  un espace mesuré muni de la mesure abstraite  $\mu$ . A chaque

$\alpha \in \mathcal{M}$  on associe un pavé  $\rho_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ . On sait comment on munit l'ensemble des pavés de  $\mathbb{R}^n$  d'une topologie "naturelle". Cela fait, on suppose que l'application  $\alpha \mapsto \rho_\alpha$  est mesurable,

Soit  $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose par définition,

$$\|f\|_p = \left\| \left( \int |f(x, \alpha)|^2 d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

et

$$F(x, \alpha) = (S_{\rho_\alpha} f_\alpha)(x) \quad (\text{où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } f_\alpha \text{ est } x \mapsto f(x, \alpha)).$$

Alors on a, avec  $A_p$  ne dépendant que de  $p$  et  $n$  (en particulier indépendant de  $\alpha \mapsto \rho_\alpha$ ) :

$$\|F\|_p = \left\| \left( \int |F(x, \alpha)|^2 d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \|f\|_p.$$

Exemple.— Quand on prend pour  $\mathcal{M}$  l'ensemble de tous les pavés  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ , muni de la mesure atomique  $\mu(P) = 1$  pour tout  $P$ , on retrouve une partie du théorème 4.1.

#### 4.5 Sixième théorème (MARCINKIEWICZ).— Énoncé pour $n = 1$ .

Soit  $m$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à variation localement bornée sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe une constante  $A$  telle que

$$(1) \quad |m(x)| \leq A \text{ sur tout } \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad \int_{\mathcal{I}} dM(x) \leq A \text{ pour tout intervalle diadique}$$

$\mathcal{I} = ]2^k, 2^{k+1}]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) où  $M = \mu^+ + \mu^-$  est la valeur absolue de la mesure

$\mu = \mu^+ - \mu^-$  définie par la variation de  $m$  par intégrale de STIELTJES.

Conclusion.—  $m$  est un multiplicateur de  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) ; il existe une

constante  $A_p$  (ne dépendant que de  $A$  et de  $p$ ) telle que pour tout

$f \in L^2 \cap L^p$ , on ait

$$\|T_m f\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Remarque.— Si de plus  $m$  est dérivable, alors l'inégalité de SCHWARZ montre que

l'hypothèse

$$\int_{\delta} |m'(x)|^2 dx \leq A / (\text{longueur de } \delta) \quad (\delta \text{ dyadique})$$

implique l'hypothèse (2). Or pour tout  $x \in \delta$ ,  $|x|$  et la longueur de  $\delta$  sont

à peu près proportionnels. Ceci montre que pour  $n = 1$  ce théorème est plus fort

que le théorème 2.3.

Preuve.— Soit  $\Delta$  l'ensemble des intervalles dyadiques de  $\mathbb{R}$ .

Posons  $T_m f = F$  (autrement dit  $F^\wedge = mf^\wedge$ ), et pour tout intervalle dyadique

$$\delta \in \Delta, \quad f_\delta = S_\delta f, \quad F_\delta = S_\delta F.$$

Le cinquième théorème 4.3.2 vaut pour  $f$  et les  $f_\delta$  comme pour  $F$  et les

$F_\delta$  ; il suffit donc de voir que

$$(3) \quad \left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta} |F_\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c_p \left\| \left( \sum_{\delta \in \Delta} |f_\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Quand on a, pour fixer les idées  $0 < 2^k \leq y \leq 2 \cdot 2^k$ , écrivons

$$m(y) = \int_{2^k}^y dm(t) + m(2^k) = \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} \psi(y-t) dm(t) + m(2^k)$$

où  $\psi(u) = 0$  pour  $u < 0$ ,  $\psi(u) = 1$  pour  $u > 0$ . Posons

$$S_t = S_{[2^k, t]}, \quad f_k = S_{[2^k, 2^{k+1}]} f; \quad F_k = S_{[2^k, 2^{k+1}]} F.$$

D'après la représentation intégrale de  $m$ ,  $F_k = T_m f_k$  s'écrit :

$$F_k(x) = \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} (S_t f_k)(x) \, d\mu(t) + m(2^k) f_k(x)$$

D'où, d'après (1) et l'inégalité de SCHWARZ:

$$\frac{1}{2} |F_k(x)|^2 \leq A^2 |f_k(x)|^2 + \left( \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} |S_t(f_k)|^2(x) \, d\mu(t) \right) \left( \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} d\mu(t) \right)$$

On peut remplacer l'indice  $k$  par  $\delta$  et le signe  $\int_{2^k}^{2 \cdot 2^k}$  par  $\int_{\delta}$ .

Avant de sommer ces inégalités selon  $\delta$  puis prendre les racines carrées :

$$\left( \frac{1}{2} \sum_{\delta \in \Delta} |F_{\delta}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \dots \text{on appliquera aux expressions } \int_{\delta} |S_t f_{\delta}|^2(x) \, d\mu(t) \text{ le}$$

théorème 4.4 avec  $\mathbb{M} = \mathbb{R}$  et la mesure  $M$  au lieu de  $\mu$ , et l'application  $\rho$ :

$$t \longmapsto S_{[2^k, t]} \quad \text{th. 4.5}$$

4.6 On peut dans les hypothèses de ce théorème délaissier la terminologie des découpages dyadiques.

Corollaire du sixième théorème.— Les hypothèses du théorème 4.5 sont équivalentes aux conditions

$$(1') \quad |m(x)| \leq A' \text{ partout,}$$

$$(2') \quad \int_{-T}^T |x| \, dM(x) \leq A'T \text{ pour tout } T.$$

Pour le voir, on observera que si  $2^k \leq T \leq 2 \cdot 2^k$ , alors d'une part

$$\int_0^T |x| dM(t) \leq \int_0^{2 \cdot 2^k} |x| dM(x) = \sum_{j=-\infty}^k \int_{2^j}^{2 \cdot 2^j} |x| dM(x) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=-\infty}^k 2^j \int_{2^j}^{2 \cdot 2^j} dM(x) \leq 2^{k+1} \int_0^{2 \cdot 2^k} dM(t) ,$$

et d'autre part

$$2^k \int_0^{2^k} dM(t) \leq \sum_{j=-\infty}^{k-1} 2^j \int_{2^j}^{2 \cdot 2^j} dM(x) \leq \sum_{j=-\infty}^{k-1} \int_{2^j}^{2 \cdot 2^j} |x| dM(x) \leq$$

$$= \int_0^{2^k} |x| dM(t) \leq \int_0^T |x| dM(x) .$$

(et des inégalités analogues).

On peut de même s'exercer à énoncer et à prouver une version du théorème 4.7 suivant, où on ne parle plus d'intervalles dyadiques.

#### 4.7 Notations pour le théorème ci-dessous.-

$Y_n$  = ensemble des points  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  dont au moins une coordonnée est nulle :  $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = 0$ .

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \times \dots \times \mathbb{R}_n$  ( $\mathbb{R}_j$  est le  $j$ -ème axe).

$\mathcal{J}^{(j)}$  : pavé dyadique de  $\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j$  ;  $\Delta^{(j)}$  = ensemble des pavés

dyadiques de  $\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j$ .

$$dV^{(j)} = dx_1 dx_2 \dots dx_j .$$

Si  $\pi$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $m^\pi$  est la fonction prenant au point  $(x_1, \dots, x_n)$  la valeur  $m^\pi(x_1, \dots, x_n) = m(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ .

Sixième théorème (Énoncé pour  $n \geq 2$ ). - Soit dans  $\mathbb{R}^n$  une fonction

a) bornée :  $|m| \leq A$  ,

b) de classe  $\mathcal{C}^{(n)}$  sur le complémentaire de  $Y_n$  (c'est-à-dire sur l'ensemble des points dont chaque coordonnée est non nulle),

c) quelle que soit la permutation  $\pi$  de  $\{1, \dots, n\}$ , quel que soit l'in-



tervalle dyadique  $\delta^{(j)}$  de  $\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j$  (pour  $j = 1, \dots, n$ ), on a

$$\sup_{(x_{j+1}, \dots, x_n)} \int_{\delta^{(j)}} \left| \frac{\partial^j (m^{\pi_j})}{\partial x_1 \dots \partial x_j} (x) \right| dV^{(j)}(x_1, \dots, x_j) \leq A$$

(où on supprime  $\sup_{(x_{j+1}, \dots, x_n)}$  pour  $j = n$ ).

Conclusion.—  $m$  est un multiplicateur de  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) ; et pour tout

$f \in L^2 \cap L^p$  on a  $\|T_m f\|_p \leq A_p \|f\|_p$  où  $A_p$  ne dépend que de  $A, n, p$ .

**4.8 Remarques.**— Nous désirons comparer ce sixième théorème (le théorème énoncé par MARCINKIEWICZ) avec la version préliminaire (2.3).

Pour  $n = 1$  ou  $2$ , le sixième théorème implique le troisième théorème.

Pour  $n > 2$ , aucun des deux n'implique l'autre.

Du point de vue des applications, il peut sembler que le sixième théorème a plus de portée que le troisième. Par exemple le multiplicateur  $m(x) = \frac{x_j x_k}{|x|^2}$ ,

objet typique des équations aux dérivées partielles elliptiques est abordé aussi

bien par les deux théorèmes. Mais le multiplicateur  $\frac{x_1}{x_1 + i(x_2^2 + \dots + x_n^2)}$  provenant

d'une équation parabolique peut être étudié par le sixième théorème, mais non par

le second. Autre exemple  $\frac{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^\alpha}$ , où  $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$  avec les

$\alpha_i > 0$ .

L'énoncé du sixième théorème reste valable après le changement de variables

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n)$  alors que ceci n'a lieu pour le troisième

théorème que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n$ .

4.9 Preuve du théorème 4.7 pour  $n = 2$  seulement.— Posons à nouveau

$$f_\delta = S_\delta(f), F^\wedge(x) = m(x) f^\wedge(x), F_\delta = S_\delta F = T_m f_\delta \quad (\delta \text{ pavé dyadique de } \mathbb{R}^n).$$

Ici encore il suffit de voir que

$$\left\| \left( \sum_\delta |F_\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c_p \left\| \left( \sum_\delta |f_\delta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

$$\text{L'identité} \quad \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial^2 m}{\partial t_1 \partial t_2} (t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= m(x_1, x_2) - m(a_1, x_2) - m(x_1, a_2) + m(a_1, a_2) =$$

$$= m(x_1, x_2) - \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial m}{\partial t_1} (t_1, a_2) dt_1 - \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial m}{\partial t_2} (a_1, t_2) dt_2 - m(a_1, a_2)$$

s'écrit aussi

$$m(x_1, x_2) = m(a_1, a_2) + \int \dots dt_1 + \int \dots dt_2 + \iint \dots dt_1 dt_2$$

Supposons pour fixer les idées que le point  $t = (t_1, t_2)$  vérifie

$$0 < a_1 = 2^k \leq t_1 \leq 2 \cdot 2^k$$

$$0 < a_2 = 2^\ell \leq t_2 \leq 2 \cdot 2^\ell$$

Notons pour alléger  $S_t$  : multiplicateur relatif au "sud ouest" de  $t$  : ensemble

des  $(y_1, y_2)$  avec  $y_1 \leq t_1, y_2 \leq t_2$ ,

$$S_{t_1}^{(1)} = \text{multiplicateur relatif au demi-espace à l'ouest de } t : y_1 \leq t_1,$$

$$S_{t_2}^{(2)} = \text{multiplicateur relatif au demi-espace au sud de } t : y_2 \leq t_2.$$

$$(\text{Ainsi } S_t = S_{t_1}^{(1)} S_{t_2}^{(2)})$$

Le rectangle  $\delta$  étant celui précisé par les limites d'intégration au second membre, on a

$$F_{\delta}(x) = \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} \int_{2^{\ell}}^{2 \cdot 2^{\ell}} (S_t(f_{\delta})) (x) \frac{\partial_m^2}{\partial t_1 \partial t_2} dt_1 dt_2 + \\ + \int_{2^{\ell}}^{2 \cdot 2^{\ell}} S_{t_1}(f_{\delta}) \frac{\partial_m}{\partial t_1} dt_1 + \int_{2^k}^{2 \cdot 2^k} S_{t_2}(f_{\delta}) \frac{\partial_m}{\partial t_2} dt_2 + m(2^k, 2^{\ell}) f_{\delta}(x_1, x_2)$$

En utilisant la généralisation 4.4 du théorème 4.1, on poursuit alors le raisonnement comme dans la démonstration du théorème 4.5.

(Mêmes idées pour  $n$  quelconque).

th. 4.7

## INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Pour la théorie classique ( $n = 1$ ) voir ZYGMUND "Trigonometric series" ch. 14 et 15.

L'auteur du cours a été le premier à traiter par des méthodes de variables réelles (et donc  $n$ -dimensionnelles) les fonctions  $g$  de LITTLEWOOD-PALEY ; voir Trans. Amer. Math. Soc. tome 88 (1958) p. 430-466.

D'autres démonstrations sont dues à HORMANDER, J. SCHWARTZ ; toutes ces idées sont rassemblées dans l'article de BENEDECK-CALDERON-PANZONE, cité à la fin du chapitre II.

La présente démonstration du premier théorème (1.2) est nouvelle ; la même idée a été retrouvée indépendamment par GASPER Proc. Nat. Acad. 1967 p. 25. Pour le second théorème (1.7.3) voir l'article de l'auteur de ce cours dans le Bull. Amer. Math. Soc. (1961) p. 99-101.

Pour le sixième théorème (4.5 et 4.7) voir MARCINKIEWICZ Studia Math tome 8 (1939) p. 78-91 (= Collected Papers p. 501-512). Le lecteur pourra aussi consulter HÖRMANDER Acta Math. tome 104 (1960) p. 93-139, et KREE, thèse dans Ann. Inst. FOURIER tome 16 (1966) p. 38-89.

## Chapitre V

### Potentiels de MARCEL RIESZ et potentiels de BESSEL.

#### Espaces vectoriels de fonctions caractérisées par des propriétés de leurs intégrales de POISSON.

Le but de ce chapitre est l'étude des propriétés de différentiabilité des fonctions qui peuvent être expliquées dans le cadre d'espaces fonctionnels. Nous traiterons des espaces fonctionnels suivants :

- Les espaces de SOBOLEV  $L_k^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $k$  entier ;
  - Les espaces des potentiels d'ordre  $\alpha$  des fonctions de  $L^p : \mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$  ;
- quand  $1 < p < \infty$ ,  $\alpha$  entier, ces espaces généralisent les espaces de SOBOLEV  $L_k^p$  ;
- Certains espaces  $\Lambda_{\dots}$  définis au moyen des  $L^p$  - modules de continuité.

Nous commencerons par l'emploi d'un de nos outils principaux, à savoir les puissances fractionnaires de l'opérateur laplacien :  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ . Plus loin, nous verrons qu'il est commode de leur substituer  $(I - \Delta)^{\alpha/2}$ .

#### 1.- Potentiels de MARCEL RIESZ.

1.1 Les transformées de FOURIER d'une fonction  $f$  convenable définie sur  $\mathbb{R}^n$  et

de son laplacien  $\Delta f = \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$  sont reliées par

$$(1) \quad (-\Delta f)^\wedge(x) = 4\pi^2 |x|^2 f^\wedge(x).$$

D'où l'idée, en remplaçant dans  $|x|^2$  l'exposant 2 par  $\alpha > 0$  ou  $< 0$  ( $\alpha$  assez petit, et restant dans des limites raisonnables dépendant de la dimension  $n$ ) d'étudier  $\mathcal{J}_\alpha f$  et  $(-\Delta)^\alpha f$  :

$$(2) \quad (\mathcal{J}_\alpha f)^\wedge(x) = (2\pi |x|)^{-\alpha} f^\wedge(x) \quad (\alpha > 0),$$

$$(3) \quad ((-\Delta)^{\alpha/2} f)^\wedge = (2\pi |x|)^\alpha f^\wedge(x) \quad (\alpha > 0).$$

1.2 Lemme.— Pour  $0 < \alpha < n$ ,  $|x|^{-n+\alpha}$  est une fonction localement intégrable de  $x$ , donc est une distribution tempérée, dont la transformée de FOURIER est proportionnelle à  $|x|^{-\alpha}$  ; c'est à nouveau une fonction localement intégrable et une distribution tempérée.

Pour la démonstration, voir la section 2 sur les noyaux besséliens et chapitre

III 5.3 et 5.7.

1.3 Définition.— Soit  $0 < \alpha < n$  ; on pose

$$(1) \quad \left( \frac{1}{\mathcal{Y}(\alpha)} |x|^{-n+\alpha} \right)^\wedge = (2\pi |x|)^{-\alpha}$$

ce qui définit la constante  $\mathcal{Y}(\alpha)$  (dépendant de  $\alpha$  et  $n$  ; on trouve

$\mathcal{Y}(\alpha) = 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})$ ), puis on définit

$$(2) \quad \mathcal{J}_\alpha f(x) = \frac{1}{\mathcal{Y}(\alpha)} \int |y|^{-n+\alpha} f(x-y) dy$$

quand la fonction  $f$  est telle que ces intégrales convergent absolument pour presque tout  $x$  :

$$(3) \quad \mathcal{J}_\alpha f = \mathcal{R}_\alpha * f \quad \text{avec}$$

$$(4) \mathcal{R}_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} |x|^{-n+\alpha}.$$

#### 1.4 Premier théorème.

Soient  $p$  et  $q \in ]1, \infty[$  et  $\alpha \in ]0, n[$  tels que

$$(1) \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

(donc  $p < q$ ).

i) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , alors les intégrales 1.3(2) donnant  $J_\alpha f(x)$  convergent pour presque tout  $x$ .

$$\text{ii) } \|J_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p.$$

iii) Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$  ( $0 < \alpha < n$ ), alors  $J_\alpha f$  converge à nouveau presque partout, et

$$|E_{|J_\alpha f|, \lambda}| \leq \left( \frac{A_q \|f\|_1}{\lambda} \right)^q \quad (\lambda > 0)$$

(le premier membre se lit "mesure de l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$  où  $|J_\alpha f(x)| > \lambda$ ":

notation ch. I (1.2)):

On dit que "l'opérateur  $J_\alpha$  est faiblement de type  $(L^1, L^q)$ ".

1.5 Remarques.— On peut se proposer à priori de rechercher pour des paramètres  $\alpha$ ,

$p, q$  quelconques des propriétés de continuité de  $J_\alpha$ :

$$\|J_\alpha f\|_q \leq A(\alpha, p, q) \|f\|_p.$$

Que se passe-t-il quand on remplace  $f$  par  $\mathcal{C}_\delta f$ :

$$(\mathcal{C}_\delta f)(x) = f(\delta x) \quad (\delta > 0) ?$$

$$(1) \quad \|\tau_\delta f\|_p = \delta^{-n/p} \|f\|_p \quad (\text{de même pour } q),$$

$$(\tau_\delta f)^\wedge(x) = \delta^{-n} f^\wedge(x/\delta),$$

$$(\mathcal{J}_\alpha \tau_\delta f)^\wedge(x) = \delta^{-n} (2\pi |x|)^{-\alpha} f^\wedge(x/\delta),$$

d'où

$$(2) \quad \tau_{\delta^{-1}} \mathcal{J}_\alpha \tau_\delta = \delta^{-\alpha} \mathcal{J}_\alpha.$$

Joint à des considérations d'intégrabilité, (1) et (2) montrent que le seul cas possible est celui où les paramètres sont reliés comme au début de l'énoncé.

On montre que le théorème est faux quand  $p = 1$  ou quand  $q = \infty$ . Le cas  $p = 1$  est le dual du cas  $q = \infty$ . Pour ce dernier cas, voir la remarque après le second théorème.

1.6 Preuve de 1.4.— Commençons par les dernières assertions.

1.6.1.— Si  $f \in L^1$ , alors pour presque tout  $x$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |y|^{-n+\alpha} dy \quad \text{est fini} :$$

Soit  $\mu > 0$ . Posons  $\mathcal{R}_\alpha(y) = |y|^{-n+\alpha} = K_1(y) + K_\infty(y)$ ,

$$\text{où } K_1(y) = \begin{cases} |y|^{-n+\alpha} & \text{pour } |y| \leq \mu, \\ \text{zéro} & \text{pour } |y| > \mu, \end{cases}$$

donc  $K_1 \in L^1$  et  $K_\infty \in L^\infty$ ; et  $\mathcal{R}_\alpha * f = K_1 * f + K_\infty * f$  fait apparaître le premier membre comme somme d'une fonction sommable et d'une fonction bornée.

1.6.2.— Pour établir

$$(1) \quad |\mathcal{E}_{\mathcal{J}_\alpha f}|_{2\lambda} \leq \left( \frac{\text{constante } \|f\|_1}{\lambda} \right)^q,$$



ajoutons l'hypothèse  $\|f\|_1 = 1$ .

Avec les notations  $K_1, K_\infty, \mu$  de 1.6.1, le premier membre de (1) est majoré par

$$(2) \quad |E_{|K_1 * f|, \lambda}| + |E_{|K_\infty * f|, \lambda}|,$$

dont le second terme sera nul, à condition de prendre

$$(3) \quad \mu = \lambda^{\frac{1}{\alpha-n}} = \lambda^{-\frac{q}{n}}$$

(car alors on a partout  $|K_\infty(x)| \leq \lambda$ , donc aussi

$$|K_\infty * f(x)| \leq \lambda \text{ d'après } \|f\|_1 = 1).$$

De plus, avec  $c$  ne dépendant que de  $n$  et  $\alpha$

$$\|K_1 * f\|_1 \leq \|K_1\|_1 = \int_{|y| \leq \mu} |y|^{-n+\alpha} dy = c \mu^\alpha$$

donne, compte-tenu de (3)

$$|E_{|K_1 * f|, \lambda}| \leq c \frac{\mu^\alpha}{\lambda} = c \lambda^{-q}.$$

1.6.3.- Faisons brièvement une étude analogue pour tout exposant  $p < \frac{n}{\alpha}$ .

Soit  $f \in L^p$ ; étudions à nouveau

$$\mathcal{J}_\alpha f = K_1 * f + K_\infty * f$$

De  $K_1 \in L^1, f \in L^p$  résulte  $K_1 * f \in L^p$ .

Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , on a

$$\|K_\infty\|_{p'} = \left( \int_{|y| > \mu} |y|^{(-n+\alpha)p'} dy \right)^{1/p'} = c' \mu^{-n/q}$$

(cette intégrale converge d'après  $(-n + \alpha)p' < -n$ ); donc l'inégalité de HÖLDER

donne pour tout  $x$

$$|K_{\omega} * f(x)| \leq \|K_{\omega}\|_p, \|f\|_p = c' \mu^{-n/q} \|f\|_p.$$

On vient de montrer que  $\mathcal{R}_{\alpha} * f$  est presque partout fini ( $f \in L^p$ ).

De plus

$$\|K_1 * f\|_p \leq \|K_1\|_1 \|f\|_p = c \mu^{\alpha} \|f\|_p$$

donne le début de

$$|E_{|K_1 * f|, \lambda}| \leq (c \mu^{\alpha} \|f\|_p / \lambda)^p = C^{te} \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^q}$$

On obtient le dernier membre quand, imitant la démonstration précédente, on choisit  $\mu = \text{Constante } \lambda^{-q/n}$  de manière à annuler  $|E_{|K_{\omega} * f|, \lambda}|$ .

En résumé, pour tout  $p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $f \in L^p$ ,  $\mathcal{R}_{\alpha} * f$  est presque partout fini et

$$|E_{|\mathcal{R}_{\alpha} * f|, \lambda}| \leq \text{constante} \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^q}.$$

1.6.4.- Ce résumé et l'étude analogue pour  $p = 1$  permettent d'appliquer un théorème de MARCINKIEWICZ (généralisant le théorème 3.3 du chapitre I), d'où la conclusion 1.4(ii).

1.4

## 2.- Espaces de SOBOLEV.

On sait définir les dérivées  $\frac{\partial^{\beta} f}{\partial x^{\beta}}$  au sens des distributions d'une fonction  $f$

localement intégrable :

$$\text{Pour tout } \varphi \in \mathcal{D} \quad \int f \frac{\partial^{\beta} \varphi}{\partial x^{\beta}} dx = (-1)^{\beta} \int \frac{\partial^{\beta} f}{\partial x^{\beta}} \varphi dx,$$

et dire par exemple que  $\frac{\partial f}{\partial x} \in L^p$  signifie que cette distribution  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est égale à

la distribution provenant d'une fonction de  $L^p$ .

2.1.- Définition.- Un espace de SOBOLEV  $L_k^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ ) est constitué des fonctions  $f$  dont toutes les dérivées au sens des distributions  $\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$  d'ordre  $|\beta| \leq k$  appartiennent à  $L^p$ . C'est un espace de BANACH pour la norme

$$\|f\|_{L_k^p} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\| \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \right\|_p.$$

2.2.- Définition équivalente pour  $1 \leq p < \infty$ . On a  $f \in L_k^p$  si et seulement s'il existe une suite  $(f_m)$  de fonctions de  $\mathcal{D}$  qui converge en norme  $L^p$  vers  $f$ , et dont chaque suite des dérivées d'ordre  $|\beta| \leq k$  :  $\left( \frac{\partial^\beta f_m}{\partial x^\beta} \right)$  est une suite de CAUCHY de  $L^p$ .

En effet, notons provisoirement  $V$  l'espace des fonctions obéissant à cette dernière définition ;  $V \subset L_k^p$  résulte de la définition des dérivées au sens des distributions. Inversement, si  $f \in L_k^p$ , alors la suite  $f_m = (f * \psi_m) \cdot \varphi_m$  où  $\psi_1$  et  $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ ,  $\int \psi_1 dx = 1$ ,  $\varphi_1(0) = 1$ ,  $\psi_m(x) = m^n \psi(mx)$ ,  $\varphi_m(x) = \varphi_1(x/m)$  est une suite de CAUCHY de  $L^p$ , et il en va de même pour chaque suite des dérivées d'ordre  $|\beta| \leq k$ .

2.3 [ Second théorème.- On suppose  $k$  entier  $\geq 0$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ .

- i) Quand  $p \leq q < \infty$ ,  $L_k^p(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ .
- ii) Quand  $q = \infty$  (c'est-à-dire  $k = \frac{n}{p}$ ),  $L_k^p(\mathbb{R}^n) \subset L_{loc}^r(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $r < \infty$ .
- iii) Quand  $\frac{k}{n} > \frac{1}{p}$ ,  $L_k^p(\mathbb{R}^n)$  est constitué de fonctions continues [après au besoin modification sur des ensembles négligeables].

2.4.1 Première preuve de 2.3(i).— Il suffit (récurrence) de traiter le cas  $k = 1$ .

Par transformation de FOURIER, on vérifie l'identité

$$f = - \mathcal{J}_1 \left( \sum_{j=1}^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \text{ si } f \in \mathcal{D}.$$

La parenthèse appartient à  $L^p$  en vertu de la continuité des opérateurs de RIESZ  $R_j : L^p \rightarrow L^p$  (chapitre III, définition 2.1 et chapitre II théorème 3.2), et  $\mathcal{J}_1$  applique continument cette parenthèse  $\in L^p$  dans  $L^q$  (théorème 1.4). La définition 2.2 des espaces de SOBOLEV montre qu'on peut étendre de  $\mathcal{D}$  à  $L_1^p$  ce résultat par passage à la limite.

2.3(i)

2.4.2 Remarque.— Si on reste au stade  $f \in \mathcal{D}$ , cette démonstration donne une inégalité du type  $\|f\|_q \leq A \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p$ . Mais le passage à la limite donnera pour

$f \in L_1^p$  une inégalité du type moins précis  $\|f\|_q \leq A(\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p)$ . Si on omet l'hypothèse  $f \in L^p$ , on obtient la conclusion qu'il existe une constante  $c$  telle que  $f - c \in L^q$  et  $\|f - c\|_q \leq A \sum \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p$ .

2.4.3 Autre preuve de 2.3(i). Soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . La formule pour  $n = 1$

$$f(x) = - \int_0^\infty f'(x-t) dt$$

s'écrit pour  $n$  quelconque, en notant  $(\dots | \dots)$  le produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = - \int_0^\infty (\text{grad } f(x - \xi t) | \xi) dt$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur de longueur  $|\xi| = 1$ . Ceci donne en intégrant sur la sphère  $|\xi| = 1$

$$(1) \quad f(x) = - \frac{1}{s_{n-1}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} (\text{grad } f(x-y) \mid \frac{y}{|y|^n}) dy$$

où  $s_{n-1}$  est l'aire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . D'où

$$|f(x)| \leq c \int \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y) \right| \frac{1}{|y|^{n-1}} dy$$

et on peut appliquer le premier théorème (1.4).

**2.4.4 Esquisse des preuves de 2.3(ii) et (iii).** Les conclusions étant de caractère local, on se ramène au cas où  $f$  est à support compact. Pour prouver (ii), on reprend l'égalité 2.4.3(1) ; l'inégalité de YOUNG

$$\|\alpha * \beta\|_r \leq \|\alpha\|_s \|\beta\|_p \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} - 1,$$

pour  $\alpha(y) = \frac{y_j}{|y|^n}$  si  $|y| \leq R$ ,  $\alpha(y) = 0$  si  $|y| > R$  ( $R$  convenable) et

$$\beta(y) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(y).$$

Pour (iii), on sait que  $\alpha * \beta$  est continu borné pour  $\alpha \in L^{p'}$ ,  $\beta \in L^p$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Prenons  $k=1$  : Il faut montrer que si  $f \in L^p$  et les  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p$  ( $n < p$ ),  $f$  à support compact, alors  $f$  est continue. (Ce serait faux pour  $n = p$ ).

On reprend l'égalité 2.4.3(1). Or  $\frac{y}{|y|^n} \in L_{loc}^{p'}$ .

**2.4.4 Remarque.**— Le théorème 2.3 est vrai pour  $p=1$ , mais non le théorème 1.4.

Voir GAGLIARDO et NIRENBERG : Anali Scuola PISA tome 13 (1959) p. 116-162.

Dans cet article, on énonce l'inégalité

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1}^{1/n}.$$

Voici à titre d'intermède un cas particulier.

Proposition.— Soit  $f$  continument dérivable à support compact dans  $\mathbb{R}^2$ . On a

$$\|f\|_2^2 \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_1 .$$

En effet,

$$(1) \quad \int |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 \leq \sup_{x_1} |f(x_1, x_2)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)| dx_1 ,$$

$$(2) \quad \sup_{x_1} |f(x_1, x_2)| \leq \sup_{x_1} \int_{x_1}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| dx_1 .$$

Donc en intégrant (1) par rapport à  $x_2$  :

$$(3) \quad \iint |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \sup_{x_2} \int |f(x_1, x_2)| dx_1 \iint \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1 dx_2 ,$$

et on reporte dans le premier facteur de second membre l'inégalité analogue à (2)

qu'on intègre par rapport à  $x_2$  :

$$\sup_{x_2} \int |f(x_1, x_2)| dx_1 \leq \int \sup_{x_2} |f(x_1, x_2)| dx_1 \leq \iint \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2 .$$

**2.4.5 Remarque.**— Le théorème 2.3 est faux pour  $q = \infty$ . Voici un exemple avec

$k = 1, p = n > 1$ . Il suffit de trouver une fonction  $\varphi$  intégrable dont la dérivée première est intégrable, dont la transformée

$$\int_1^\infty \varphi(x) = \int \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{n-1}} dy$$

tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow 0$ .

On pose  $\varphi(y) = -\frac{1}{|y| \log |y|}$  au voisinage de l'origine, que l'on prolonge de manière à avoir une fonction positive, nulle hors d'un compact, continument dérivable sur le complémentaire de l'origine.

alors  
On a  $\forall \epsilon > 0$  le contre-exemple en prenant  $f \in L^p_1$  tel que

$$\varphi = \sum_1^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \quad (\text{alors } \frac{\partial f}{\partial x_j} = -R_j \varphi \in L^p).$$

### 3.- Noyaux besséliens.

Le comportement local ( $|x| \rightarrow 0$ ) des noyaux de RIESZ  $\mathcal{R}_\alpha(x) = |x|^{-n+\alpha} / \Gamma(\alpha)$  est convenable. Par contre, le comportement à l'infini n'est pas assez bon pour certains usages; en particulier, quand on utilise les noyaux de RIESZ pour régulariser, les potentiels obtenus ne suivent pas le comportement de la fonction.

Pour sortir de ce dilemme, nous remplaçons  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  par  $(I - \Delta)^{\alpha/2}$ : Les potentiels correspondants (de BESSEL) auront le même comportement local, mais se comporteront beaucoup mieux à l'infini.

3.1 Dans le tableau suivant  $\boxed{0 < \alpha < n}$ , la colonne de droite donne des noyaux de convolution, celle de gauche leurs transformées de FOURIER. La première ligne est relative au noyau de RIESZ. Notre objectif est d'explicitier le noyau  $G_\alpha$  relatif à la seconde ligne : noyau de BESSEL. On pose  $\boxed{a = \frac{\alpha}{2}}$ .

$(2\pi x )^{-\alpha}$ $(1 + 4\pi^2 x ^2)^{-\alpha}$ $e^{-\pi x ^2}$ $e^{-\pi\delta x ^2}$ $\int_0^\infty e^{-\pi\delta x ^2} \delta^a \frac{d\delta}{\delta}$ <p style="text-align: center;">  </p> $\Gamma(\alpha) (\pi x ^2)^{-\alpha}$	$\frac{1}{\gamma(\alpha)}  x ^{-n+\alpha} = \mathcal{R}_\alpha(x)$ $G_\alpha(x) = ?$ $e^{-\pi x ^2}$ $e^{-\pi x ^2/\delta} \cdot \delta^{-n/2}$ $\int_0^\infty e^{-\pi x ^2/\delta} \delta^{-n/2} \delta^a \frac{d\delta}{\delta}$ <p style="text-align: center;">  </p> $\Gamma\left(\frac{n}{2} - \alpha\right) (\pi x ^2)^{\frac{n}{2} - \alpha}$
---	--

Les égalités ci-dessus sont des cas particuliers de

$$\int_0^\infty e^{-t\delta} \delta^a \frac{d\delta}{\delta} = \Gamma(a) t^{-a}.$$

On a de même

$$\int_0^\infty e^{-\pi\delta|x|^2} e^{-\delta/4\pi} \delta^a \frac{d\delta}{\delta} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4\pi}(1 + 4\pi^2|x|^2)\delta} \delta^a \frac{d\delta}{\delta} = \Gamma(a) \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-a} (1 + 4\pi^2|x|^2)^{-a}.$$

Autrement dit, le noyau de BESSEL est

$$G_\alpha(x) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/\delta} \delta^{\frac{-n+\alpha}{2}} e^{-\delta/4\pi} \frac{d\delta}{\delta},$$

et de même le noyau de RIESZ  $\mathcal{R}_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} |x|^{-n+\alpha}$  avec  $\gamma(\alpha) = 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$

vaut  $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/\delta} \delta^{\frac{-n+\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}.$

### 3.2 Propriétés immédiates de $G_\alpha$ ( $0 < \alpha < n$ ).

1°  $0 \leq G_\alpha \leq \mathcal{R}_\alpha.$

2°  $\lim_{x \rightarrow 0} G_\alpha(x) / \mathcal{R}_\alpha(x) = 1.$

3°  $G_\alpha(x) = \mathcal{O}(e^{-c|x|})$  quand  $|x| \rightarrow \infty :$



$G_\alpha$  est à décroissance rapide.

$$4^\circ \quad G_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$5^\circ \quad G_\alpha^\wedge(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\alpha/2}.$$

$$6^\circ \quad \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x) dx = 1.$$

Tout ceci laisse espérer que l'effet régularisant de la convolution par  $G_\alpha$  sera meilleur que celui par  $\mathcal{P}_\alpha$ .

3.3 Lemme.— (i) Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une mesure  $\mu_\alpha$  de masse totale finie,

dont la transformée de FOURIER  $\mu_\alpha^\wedge$  vérifie

$$\mu_\alpha^\wedge(x) = \frac{(2\pi|x|)^\alpha}{(1 + 4\pi^2|x|^2)^{\alpha/2}}.$$

(ii) Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe deux mesures de masses totales finies

$\mu_\alpha', \mu_\alpha''$  telles que

$$(1 + 4\pi^2|x|^2)^{\alpha/2} = \mu_\alpha'^\wedge(x) + (2\pi|x|)^\alpha \mu_\alpha''^\wedge(x).$$

Preuve de (i).— Le développement  $(1 - t)^{\alpha/2} = \sum_{m \geq 0} u_{m,\alpha} t^m$  valable pour

$|t| < 1$  vérifie  $\sum |u_{m,\alpha}| < \infty$ , car ces coefficients sont tous d'un même signe

à partir d'un rang assez grand, et le premier membre reste borné quand  $t \rightarrow 1$ .

Si donc on pose  $t = (1 + 4\pi^2|x|^2)^{-1}$ , alors le dernier membre de

$$\left(1 - \frac{1}{1 + 4\pi^2|x|^2}\right)^{\alpha/2} = \left(\frac{4\pi^2|x|^2}{1 + 4\pi^2|x|^2}\right)^{\alpha/2} = 1 + \sum_{m \geq 1} u_{m,\alpha} \left(\frac{1}{1 + 4\pi^2|x|^2}\right)^m$$

est une série absolument convergente. Mais

$$\left(\frac{1}{1 + 4\pi^2|x|^2}\right)^m = G_{2m}^\wedge(x) \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Donc dans la série

$$\mu_\alpha = \delta_0 + \sum_{m \geq 1} u_{m,\alpha} G_{2m}$$

où  $\delta_0$  = masse unité à l'origine,  $\sum_{m \geq 1} \dots$  converge dans  $L^1$  ; donc cette série admet pour transformée de FOURIER  $1 + \psi^\wedge$  (avec  $\psi \in L^1$ ), laquelle transformée se développe en série :

$$1 + \psi^\wedge(x) = 1 + \sum_{m \geq 1} u_{m,\alpha} \left( \frac{1}{1 + 4\pi^2 |x|^2} \right)^m = \frac{(2\pi|x|)^\alpha}{(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2}}.$$

Preuve de (ii). - Un théorème de WIENER dit que

Si  $\psi_1 \in L^1$  et  $c_1$  constante sont telles que  $c_1 + \psi_1^\wedge(x) \neq 0$  pour tout  $x$ , alors il existe  $c_2$  constante et  $\psi_2 \in L^1$  telles que

$$c_2 + \psi_2^\wedge(x) = (c_1 + \psi_1^\wedge(x))^{-1} \text{ pour tout } x.$$

L'hypothèse est vérifiée avec  $c_1 = 1$  et  $\psi_1 = \varphi + G_\alpha$  car

$$1 + \psi_1^\wedge(x) = (1 + \varphi^\wedge(x)) + G_\alpha^\wedge(x) = \frac{(2\pi|x|)^\alpha}{(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2}} + \frac{1}{(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2}}.$$

Conclusion : il existe  $\psi_2 \in L^1$  et  $c_2$  telles que

$$\frac{(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2}}{1 + (2\pi|x|)^\alpha} = c_2 + \psi_2^\wedge(x) = 1 + \psi_2^\wedge(x)$$

( $c_2 = 1$  se voit en faisant  $|x| \rightarrow \infty$ ), qui s'écrit

$$(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2} = [1 + \psi_2^\wedge(x)] + (2\pi|x|)^\alpha \{1 + \psi_2^\wedge(x)\};$$

et on peut poser  $[\dots] = \mu_\alpha^\wedge(x)$ ,  $\{\dots\} = \mu_\alpha''^\wedge(x)$ .

3.4 De même que  $\mathcal{J}_\alpha f = \mathcal{R}_\alpha * f$  et  $\mathcal{J}_{\alpha+\beta} = \mathcal{J}_\alpha \mathcal{J}_\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta$  petits), on note

$$\underline{\mathcal{J}_\alpha f = G_\alpha * f};$$

on définit  $G_0 = 1$ , et on a pour  $\alpha, \beta \geq 0$   $\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$ .

Définition des  $\mathcal{L}_\alpha^p$ .— Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha \geq 0$ . On pose

$$\mathcal{L}_\alpha^p = \mathcal{F}_\alpha(L^p).$$

C'est un espace de BANACH pour la norme  $\|f\|_{\mathcal{L}_\alpha^p} = \|g\|_p$  où  $f = \mathcal{F}_\alpha g$ .

3.5 Conséquences.— (i)  $\mathcal{L}_0^p = L^p$ .

(ii) Pour chaque  $\alpha \geq 0$ ,  $\mathcal{L}_\alpha^p \subset L^p$  ;

et même, si  $f = \mathcal{F}_\alpha g = G_\alpha * g$  avec  $g \in L^p$ , alors  $\|f\|_p \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\alpha^p}$  d'après

$$\|G_\alpha * g\|_p \leq \|G_\alpha\|_1 \|g\|_p \text{ et } \|G_\alpha\|_1 = 1.$$

(iii) Pour  $0 \leq \alpha \leq \beta$ , on a  $\mathcal{L}_\beta^p \subset \mathcal{L}_\alpha^p$  et  $\|f\|_{\mathcal{L}_\alpha^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\beta^p}$ .

(iv) L'application  $\mathcal{F}_\beta : \mathcal{L}_\alpha^p \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha+\beta}^p$  est linéaire, bijective, isométrique.

3.6 Troisième théorème.— Soient  $k$  entier  $> 0$ ,  $1 < p < \infty$ . Alors les espaces vectoriels  $\mathcal{L}_k^p$  et  $L_k^p$  (3.4 et 2.1, 2.2) sont égaux, et les normes  $\|f\|_{\mathcal{L}_k^p}$ ,  $\|f\|_{L_k^p}$  sont équivalentes.  
(pour  $p = 2$ , on pourrait dire plus).

3.7 Preuve du troisième théorème seulement pour  $k = 1$ .

3.7.1 Montrons que pour  $1 < p < \infty$ , on peut écrire

$$\|\mathcal{F}_1(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi)\| \leq A_{p,k} \|\varphi\|_p \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D} \quad (k = 1, \dots, n).$$

En effet, on obtient la transformée de FOURIER de  $\mathcal{F}_1(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi)$  en multipliant  $\varphi^\wedge(x)$  par

$$2\pi i x_k / (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{ix_k}{|x|} \right) \cdot 2\pi \left( \frac{|x|^2}{1 + 4\pi^2 |x|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est un multiplicateur de  $L^p$  (ch. IV, 2.1), car la première parenthèse du second membre vient d'une transformation de RIESZ  $R_k$  (ch. III, 2.1) et l'autre facteur provient d'une mesure bornée (lemme 3.3 (i)). (Cette propriété du premier membre se voit encore en étudiant ses majorations de ses dérivées successives (ch. IV. 2.3)).

**3.7.2 Montrons que si  $f = \mathcal{F}_1 g$  où  $g \in L^p$  (autrement dit,  $f \in \mathcal{L}_a^p$ ), alors  $f \in L_1^p$ .**

Il s'agit essentiellement de voir que chaque dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  au sens des distributions, peut être identifiée à une fonction de  $L^p$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . En notant  $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$  ( $T \in \mathcal{D}'$ ), on a

$$- \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = \langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle \mathcal{F}_1 g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle g, \mathcal{F}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle$$

d'après successivement la définition de  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ , de  $f$ , et  $\mathcal{F}_1 = G_1 * \dots$ .

L'inégalité de HÖLDER et 3.7.1 appliqué à l'exposant  $p'$  conjugué de  $p$  donnent

$$\left| \langle g, \mathcal{F}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle \right| \leq A_{p',k} \|g\|_p \|\varphi\|_{p'}, \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

On en conclut que  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  est une forme linéaire continue sur  $L^{p'}$ , donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^p.$$

**3.7.2 Inversement,** les deux dernières lignes de la démonstration du lemme 3.3

donnent

$$(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} \wedge(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\frac{1}{2}} = \mu'_{\frac{1}{2}} \wedge(x) + (2\pi |x|) \mu''_{\frac{1}{2}} \wedge(x),$$

c'est-à-dire

$$(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} = \mu'_{\frac{1}{2}} + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mu''_{\frac{1}{2}} \quad (\text{ces } \mu \text{ sont deux mesures bornées}).$$

$$\text{De plus } (-\Delta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Cela dit, soit  $f \in L_1^p$ ; il s'agit de voir que  $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} f \in L^p$ . Pour cela, on suppose d'abord  $f \in \mathcal{D}$  et on utilise la décomposition ci-dessus de  $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$  en deux termes.

3.6

#### 4.- Propriétés fonctionnelles des $\mathcal{L}_\alpha^p$ .

4.1 Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). On posera

$$(1) \quad \omega_p(t) = \left\| f(x+t) - f(x) \right\|_{L^p(x)} \quad (t \in \mathbb{R}^n),$$

" $L^p$ -module de continuité de  $f$ ".

On sait que pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_p(t) = \text{zéro}$ .

Peut-on caractériser  $\mathcal{L}_\alpha^p$  (ou  $L_k^p$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ ) au moyen du  $L^p$ -module de continuité : condition  $\omega_p(t) = \mathcal{O}(|t|^\alpha)$  par exemple ? Ceci n'a lieu que dans des cas exceptionnels :  $\alpha$  entier ou  $p = 2$ . Les résultats positifs sont donnés dans le quatrième théorème ci-dessous, dont l'énoncé est scindé en trois parties.

4.2 Quatrième théorème (Première partie :) cas  $\alpha = 1$ .-

Pour  $1 < p < \infty$ ,  $L_1^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_1^p(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $\in L^p$  dont le module de continuité  $\omega_p(t)$  est  $\mathcal{O}(|t|)$  pour  $t \rightarrow 0$ .

(La preuve donne aussi des résultats pour  $p = 1$ ).

Preuve.— Soit  $f \in L^p$  avec  $\left\| \frac{1}{|t_k|} (f(x + t_k) - f(x)) \right\|_{L^p(x)} \leq A$  pour  $k = 1, \dots, n$ ,

où on pose

$$t_k = (0, \dots, 0, t_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Comme  $L^p$  est le dual de  $L^{p'}$  ( $p \neq 1$ !), sa boule fermée centrée à l'origine et de rayon  $A$  est faiblement compacte. Donc il existe une suite de points  $t_k^{(m)}$  de  $\mathbb{R}^n$  tendant vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , et telles que pour chacune de leurs  $n$  coordonnées  $t_k^{(m)}$ , les expressions  $(f(x + t_k^{(m)}) - f(x))/t_k^{(m)}$  tendent faiblement dans  $L^p$  vers des fonctions  $g_k \in L^p$ . En particulier pour chaque  $\psi \in \mathcal{D}$ ,

$$\left\langle \frac{\dots}{t_k^{(m)}}, \psi \right\rangle \rightarrow \langle g_k, \psi \rangle. \text{ On en conclut que, au sens des distributions,}$$

on a bien  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = g_k \in L^p$ .

(Observons que pour  $p = 1$ , ce raisonnement s'adapte : les bornés de  $L^1$  ne sont pas  $\sigma(L^1, L^\infty)$ -compacts ; mais  $L^1$  se plonge isométriquement dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  (constitué des mesures de masse totale finie), qui lui est le dual d'un espace de BANACH  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  (constitué des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini). On peut énoncer :

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et si  $\omega_1(t) = \left\| \frac{1}{|t|} (f(x + t) - f(x)) \right\|_{L^p(x)}$  est  $\mathcal{O}(|t|)$  pour  $t \rightarrow 0$ , alors les dérivées premières de  $f$  au sens des distributions sont des mesures bornées).

Inversement (raisonnement valable même pour  $p = 1$ ), soit  $f \in L_1^p$ .

Supposons d'abord  $f \in \mathcal{D}$ ; alors

$$f(x+t) - f(x) = \int_0^{|t|} (\text{grad } f)(x + \{s\}) ds, \quad (t = |t| \{ \})$$

donne

$$\omega_p(t) \leq |t| \left\| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \right\|_p.$$

Puis on raisonne en passant à la limite pour  $f$  quelconque en recourant à la définition 2.2 de  $L_1^p$ . || 4.2

4.3 Quatrième théorème (Seconde partie :) cas  $p = 2$ .-

Pour  $0 < \alpha < 1$ , on a  $f \in \mathcal{S}_\alpha^2$  si et seulement si  $f \in L^2$  et si l'expression

$$(1) \quad A_f = \int_{t \in \mathbb{R}^n} (\|f(x+t) - f(x)\|_{L^2(x)}^2 / |t|^{n+2\alpha}) dt$$

est finie.

Preuve.- Etudions d'abord  $A_f$  pour  $f \in L^2$ .

Le théorème de PLANCHEREL donne

$$\omega_2(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_{L^2(x)}^2 = \| |f^\wedge(x)| e^{-2\pi i(x|t)} - 1 \|_{L^2(x)}^2$$

donc d'après un théorème de FUBINI :

$$A_f = \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 \left( \int_{t \in \mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i(x|t)} - 1|^2 / |t|^{n+2\alpha} dt \right) dx.$$

En utilisant pour  $t$  grand l'évaluation  $|e^{-2\pi i(t|x)} - 1|^2 = 4 \sin^2 \pi(t|x) \leq 4$  et pour  $t$  petit  $|\dots|^2 = \mathcal{O}(|t|^2)$ , on voit que la parenthèse  $(\int_{t \in \mathbb{R}^n} \dots)$

converge. Or  $|e^{-2\pi i(t/x)} - 1|^2 / |t|^{n+2\alpha}$  est majoré par une fonction de  $|t|$  homogène de degré  $-n - 2\alpha$ , <sup>donc</sup>  $\int$  on peut écrire

$$\left( \int_{t \in \mathbb{R}^n} \dots \right) \sim |x|^{2\alpha} \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty.$$

Cette étude montre que pour  $f \in L^2$  les assertions  $\{A_f < \infty\}$  et  $\left\{ \int |f^\wedge(x)| |x|^\alpha |^2 dx < \infty \right\}$  sont équivalentes. La seconde assertions équivaut à  $\{|x|^\alpha f^\wedge(x) \in L^2(x)\}$ , et à  $\{(1 + 4\pi^2 |x|^2)^{\alpha/2} f^\wedge(x) \in L^2(x)\}$ .

En remplaçant  $|e^{-2\pi i(x/t)} - 1|^2$  par  $|e^{2\pi i(x/t)} + e^{-2\pi i(x/t)} - 1|^2$

dans la démonstrations ci-dessus, on prouve ce qui suit.

4.4 Quatrième théorème (Troisième partie :) cas  $p = 2$  et  $0 < \alpha < 2$ .

On a  $f \in \mathcal{L}_\alpha^2$  si et seulement si  $f \in L^2$  et si l'expression

$$(1) \quad B_f = \int_{t \in \mathbb{R}^n} (\|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|_{L^2(x)}^2 / |t|^{n+2\alpha}) dt$$

est finie.

4.5 Au moyen des séries lacunaires à une variable, on montre que pour  $p \neq 2$ , on n'a pas de caractérisation complète des  $\mathcal{L}_\alpha^p$  au moyen des modules de continuité.

Mais en corollaire du septième théorème ( 6.4 ) ci-dessous, on peut énoncer :

Soient  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $(\omega_p(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_{L^p(x)})$ .

(i) Si  $f \in \mathcal{L}_\alpha^p$ ,  $2 \leq p$ , alors  $f \in L^p$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\omega_p(t))^p / |t|^{n+\alpha p} dt < \infty.$$

(ii) Si  $f \in L^p$ ,  $2 \leq p$  et



$$\int_{\mathbb{R}^n} (\omega_p(t))^2 / |t|^{n+2\alpha} dt < \infty,$$

alors  $f \in \mathcal{L}_\alpha^p$ .

(iii) Si  $f \in \mathcal{L}_\alpha^p$ ,  $p \leq 2$ , alors  $f \in L^p$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\omega_p(t))^2 / |t|^{n+2\alpha} dt < \infty.$$

(iv) Si  $f \in L^p$ ,  $p \leq 2$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\omega_p(t))^p / |t|^{n+\alpha p} dt < \infty,$$

alors  $f \in \mathcal{L}_\alpha^p$ .

5.- Les espaces  $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$  . Cas des espaces  $\Lambda_{\alpha}$ .

Ces derniers résultats montrent l'intérêt de décrire plus systématiquement les espaces fonctionnels suivants.

5.1 Définition.- Soient  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $p$  et  $q \in [1, \infty]$ .

Si  $q < \infty$ ,  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$  est constitué des  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  dont le  $L^p$ -module de continuité  $\omega_p(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_{L^p(x)}$  vérifie

$$(1) \left( \int_{t \in \mathbb{R}^n} (\omega_p(t))^q / |t|^{n+\alpha q} dt \right)^{1/q} < \infty$$

et  $\Lambda_{\alpha}^{p,\infty}$  est constitué des  $f \in L^p$  telles que  $\sup_t \text{ess.}(\omega_p(t)/|t|^{\alpha}) < \infty$ .

Ce sont des espaces de BANACH pour les normes

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^{p,q}} = \|f\|_p + \left( \int \dots / \dots dt \right)^{1/q} \quad (q < \infty),$$

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_t \text{ess.}(\omega_p(t)/|t|^{\alpha}).$$

$\Lambda_{\alpha}^{\infty,\infty}$  : est constitué des  $f \in L^{\infty}$  telles que

$$\sup_t (\|f(x+t) - f(x)\|_{L^{\infty}(x)} / |t|^{\alpha}) < \infty.$$

La définition de  $\Lambda_{\alpha}$  sera élargie à d'autres valeurs de  $\alpha$  (5.7).

Exemple.-  $\Lambda_{\alpha}^{2,2} = \mathcal{L}_{\alpha}^2$  (avec normes comparables). (4.3).

5.2 Proposition.- Si  $f \in \Lambda_{\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ), alors  $f$  coïncide presque partout avec une fonction continue.

Preuve.- Soit  $u = I.P.f$  (Le noyau de POISSON pourrait-être remplacé par une bonne approximation de  $\delta_0$ ). Fixons  $y$  dans

$$|u(x, y) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |P_y(t) (f(x-t) - f(x))| dt.$$

Si  $\|f(x-t) - f(x)\|_{L^\infty(x)} \leq A |t|^\alpha$ , alors

$$\|u(x, y) - f(x)\|_{L^\infty(x)} \leq A \int P_y(t) |t|^\alpha dt = A \alpha_n y^\alpha$$

où  $\alpha_n$  ne dépend que de  $n$  (car pour  $y=1$ , on a  $P_1(t) = \frac{C^t e}{(|t|^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sim |t|^{-n-1}$

pour  $|t| \rightarrow \infty$ , et on raisonne par homogénéité).

Les fonctions continues  $x \mapsto u(x, y)$  convergent donc uniformément quand  $y \rightarrow$  zéro.

5.3 Cinquième théorème.— Soit  $0 < \alpha < 1$ . Soit  $u = I.P.f.$

On note  $u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

On a  $f \in \Lambda_\alpha$  si et seulement si  $f \in L^\infty$  et si la fonction harmonique  $u$  vérifie une des quatre conditions A), B), C), D) suivantes, qui sont équivalentes.

A)  $\|u_0(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-1+\alpha}$ .

B)  $\sum_{j=1}^n \|u_j(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-1+\alpha}$ .

C) Pour un entier  $k$  fixé  $> 1$ , avec  $u_0^{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial y^k}$

$$\|u_0^{(k)}(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-k+\alpha}.$$

D) Pour un entier  $k$  fixé  $> 1$ , et pour tous les  $\nabla_x^{(k)}$  = opérateur de dérivation par rapport aux seules variables  $x_1, \dots, x_n$ , homogène de degré  $k$ , on a

$$\|\nabla_x^{(k)} u(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-k+\alpha}.$$

5.4 Lemme.— Soit  $\nabla^{(k)}$  un polynome opérateur de dérivation homogène de degré  $k$  par rapport à l'ensemble des variables  $x_j, y$ . On a

$$\|\nabla^{(k)} P(x, y)\|_{L^1(x)} \leq A y^{-k},$$

$$\|\nabla^{(k)} P(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-k-n},$$

(et évidemment des inégalités analogues en remplaçant  $(x, y)$  par  $(x, \frac{y}{2})$  aux membres de gauche).

(Revenir à l'expression

$$P(x, y) = P_y(x) = cy / (|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}.)$$

5.5 Conséquence.— Puisque

$$u(x, y) = \int P_{y/2}(x-t) u(t, \frac{y}{2}) dt$$

et que pour dériver le premier membre, il suffit de dériver au second membre le noyau, on trouve (notation 5.3.c))

$$\|u_0^{(k)}(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-k} \|u(x, \frac{y}{2})\|_{L^\infty(x)}.$$

5.6 Preuve de 5.3.—

5.6.1 Si  $f \in \Lambda_\alpha$ , alors  $u$  vérifie A) :

$$u_0(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) f(x-t) dt = \int \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) (f(x-t) - f(x)) dt$$

car  $\int P_y dt = 1$  donne  $\int \frac{\partial P}{\partial y} dt = 0$ .

Or  $\sup_x |f(x-t) - f(x)| \leq A |t|^\alpha$ . Donc

$$\sup_x |u_0(x, y)| \leq A \int \left| \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) \right| |t|^\alpha dt.$$

Le second membre est intégrable, car pour  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $\left| \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) \right| \sim |t|^{-n-1}$   
 donc ce membre est, par raison d'homogénéité, proportionnel à  $y^{-1+\alpha}$ .

5.6.2 Si  $u$  vérifie A) et si  $f \in L^\infty$ , alors  $f \in \Lambda_\alpha$ .

Avec  $y > 0$  que nous fixerons plus loin,

$$f(x) - f(x-t) = (u(x, y) - u(x-t, y)) + (f(x) - u(x, y)) + (u(x-t, y) - f(x-t))$$

donne

$$\|f(x) - f(x-t)\|_{L^\infty(x)} \leq 2 \|u(x, y) - f(x)\|_{L^\infty(x)} + \|u(x, y) - u(x-t, y)\|_{L^\infty(x)}$$

D'abord  $\|u(x, y) - f(x)\|_{L^\infty(x)} \leq A |t|^\alpha$  résulte de  $u(x, y) - f(x) = -\int_0^y u_0(x, w) dw$  et de l'hypothèse A) sur  $u_0$ .

De plus,  $|\text{grad}_x u|$  désignant la longueur du vecteur dont les  $n$  composantes sont  $u_1, \dots, u_n$ , on a

$$\|u(x-t, y) - u(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq |t| \|\text{grad}_x u(x, y)\|_{L^\infty(x)}$$

par intégration sur le segment  $[x-t, x]$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Il suffit de voir que  $\|\text{grad}_x u\|_{L^\infty(x)} \leq C_\alpha y^{-1+\alpha}$

(et alors on choisira  $y = |t|$  dans l'égalité et dans l'inégalité initiales). Autrement dit, il reste à voir 5.6.3 :

5.6.3 Si  $u$  vérifie A), alors  $u$  vérifie D) (pour  $k = 1$ ).

Soit  $j = 1, \dots, n$ , notons  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y} = u_{0,j}$ . Ainsi

$$u_j(x, y) = - \int_y^\infty u_{0,j}(x, y') dy'.$$

Or, d'après le lemme 5.4, l'hypothèse A) implique

$$\|u_{0,j}(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-2+\alpha};$$

donc

$$\|u_j(x, y)\|_{L^\infty(x)} \leq A \int_y^\infty y'^{-2+\alpha} dy' = A y^{-1+\alpha}.$$

5.6.4 A)  $\implies$  B) : Même raisonnement : A)  $\implies \|u_{0,j}\| \leq A y^{-2+\alpha}$  ( 1 ) ;

et de plus  $u_j = - \int_y^\infty u_{0,j} dy'$ .

5.6.5 A)  $\implies$  C) : par dérivation.

5.6.6 C)  $\implies$  A) : par intégrations successives par rapport à y.

5.6.7 B)  $\implies$  A) : par dérivation par rapport à y puis intégration.

5.6.8 D)  $\implies$  A) .

### 5.3

5.7 Définition.- Avec  $0 < \alpha < \infty$ ,  $\Lambda_\alpha$  est constitué des  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  dont l'intégrale de POISSON I.P.f = u vérifie

$$(1) \quad \left\| \frac{\partial^\ell u}{\partial y^\ell}(n, y) \right\|_{L^\infty(x)} \leq A y^{-\ell+\alpha} \quad (y > 0)$$

où  $\ell$  est le plus petit entier  $\geq \alpha$ .

On norme  $\Lambda_\alpha$  en posant  $\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_\infty +$  le plus petit A vérifiant (1).

(Pour  $0 < \alpha < 1$ , on retrouve la définition 5.1 d'après 5.3)

5.8 Remarques.- (i) Comme dans le théorème 5.3, si  $f \in \Lambda_\alpha$ , on a une inégalité analogue à 5.7 (1) en remplaçant  $\ell$  par n'importe quel entier  $\geq \alpha$ .

(ii).- On montre que  $\Lambda_1$  ne coïncide pas avec les fonctions lipschitziennes ordinaires, mais que pour  $0 < \alpha < 2$ ,  $\Lambda_\alpha$  est constitué des  $f \in L^\infty$  telles que

$$(1) \quad \left\| f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right\|_{L^\infty(x)} \leq A |t|^\alpha.$$

Par exemple, si  $f \in L^\infty$  vérifie (1) avec  $\alpha = 1$ , alors

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \right\|_{L^\infty(x)} \leq Cte/y.$$

Pour le voir, on observe que dans l'intégrale donnant la valeur en un point  $\in \mathbb{R}_{n+1}^+$  du produit de convolution

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} * f,$$

on peut, puisque le noyau est une fonction paire de  $x$ , remplacer  $f(x-t)$  par  $(f(x+t) + f(x-t))/2$ ; de plus pour  $|x| \rightarrow \infty$  et  $y$  fixé  $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \sim |x|^{-n-2}$ ; ce noyau est une fonction radiale de  $x$  et  $x^\alpha \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$  est intégrable.

(iii).- Connaissant  $\Lambda_\alpha$  pour  $0 < \alpha \leq 1$ , on peut déterminer tous les autres

$\Lambda_\alpha$ :

Proposition (admise).- Soient  $m$  entier et  $\alpha$  tels que  $0 \leq m < \alpha < \infty$ . L'espace  $\Lambda_\alpha$  est constitué des  $f \in L^\infty$  dont toutes les dérivées, au sens des distributions, d'ordre  $m$  appartiennent à  $\Lambda_{\alpha-m}$ .

#### 6.- Etude des espaces $\Lambda_\alpha^{p,q}$ .

Nous esquissons l'étude des espaces  $\Lambda_\alpha^{p,q}$  (définitions 5.1), il y a généralisation par rapport aux  $\Lambda_\alpha$ , mais aussi analogies, tant pour la structure que pour

les démonstrations, plus compliquées en plusieurs points. Voir étude plus détaillée et plus vaste par

TABLESON dans Journal of Math. and Mechanics, tome 13, 1964, p. 407-480.

6.1 Sixième théorème.— Avec  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 < q < \infty$ , soient  $f \in L^p$  et  $u = I.P.f.$  On note  $u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ). On a  $f \in \Lambda_\alpha^{p,q}$  si et seulement si  $u$  vérifie les conditions A), B), C) suivantes, qui sont équivalentes.

$$A) \left( \int_0^\infty \left( \|u_0(x, y)\|_{L^p(x)} y^{1-\alpha} \right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty .$$

B) Pour tout entier  $k > 0$ , avec  $u_{0,k} = \frac{\partial^k u}{\partial y^k}$ , on a

$$\left( \int_0^\infty \left( \|u_{0,k}(x, y)\|_{L^p(x)} y^{k-\alpha} \right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty .$$

$$C) \left( \int_0^\infty \left( \sum_{j=1}^n \|u_j(x, y)\|_{L^p(x)} y^{1-\alpha} \right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty .$$

Remarques.— Cet énoncé est parallèle à celui du théorème 5.3.

Les énoncés s'adaptent au cas  $q = \infty$ .

C'est au voisinage de  $y = 0$  que réside la principale difficulté pour assurer que l'intégrale A) converge.

Preuve.— Montrons seulement que si  $f \in \Lambda_\alpha^{p,q}$ , alors  $u$  vérifie A).

$$(1) \quad u_0(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) (f(x-t) - f(x)) dt$$

(car on a égalité quand on omet  $-f(x)$  au second membre),

Posons



$$(2) \quad \omega_p(t) = \|f(x-t) - f(x)\|_{L^p(x)},$$

$$(3) \quad \overline{\omega_p}(t) = \text{moyenne de } \omega_p(t) \text{ sur la sphère centrée à l'origine de } \mathbb{R}^n$$

et de rayon  $|t|$ .

Justifions la chaîne d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \|u_0(x, y)\|_{L^p(x)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| (t, y) \omega_p(t) dt \leq \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p(t) / (|t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} dt = \\ &= c \int_0^\infty \overline{\omega_p}(r) r^{n-1} / (r^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} dr = \\ &= c \int_0^\infty (r^{n-1} r^{\frac{1}{q} + \alpha} / (r^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}) (r^{-\frac{1}{q} - \alpha} \overline{\omega_p}(r)) dr. \end{aligned}$$

En effet, reportant dans la première  $\int_{\mathbb{R}^n}$  une majoration de  $\left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|$ , on a la seconde ligne, où le dénominateur  $(|t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}$  est une fonction radiale de  $t$ , d'où la troisième ligne. La quatrième ligne est un jeu d'écriture, qui prend fin une fois écrite l'inégalité

$$\begin{aligned} y^{1-\alpha} \|u_0(x, y)\|_{L^p(x)} y^{-1/q} &\leq \\ &\leq c \int_0^\infty \left[ y^{1-\alpha-\frac{1}{q}} r^{n-1} r^{\frac{1}{q} + \alpha} / (r^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} \right] (r^{-\frac{1}{q} - \alpha} \overline{\omega_p}(r)) dr. \end{aligned}$$

Notons ce crochet  $[...] = K(r, y)$  : on obtient un noyau positivement homogène de degré  $-1$ . Compte-tenu de  $\alpha < 1$ , on vérifie que  $\int_0^\infty K(r, 1) r^{-1/q} dr < \infty$ . En

invoquant le lemme de SCHUR 6.2 ci-dessous, on aboutit à la conclusion

$$\|y^{1-\alpha} \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right\|_{L^p(x)} y^{-\frac{1}{q}} \|_{L^q(y>0)} < \infty$$

qui est la conclusion A) de l'énoncé.

6.2 Lemme de SCHUR (voir HARDY, LITTLEWOOD, POLYA :

Inequalities, éd. CAMBRIDGE, § 9.3, n° 319 p. 229). Soit

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} K(x, y) \varphi(y) dy \quad (x > 0, y > 0)$$

une transformation intégrale dont le noyau  $K$  est positivement homogène de degré  $-1$  :

$$K(\lambda x, \lambda y) = K(x, y)/\lambda \quad (\lambda, x, y > 0).$$

Si  $(1 < q < \infty)$

$$A = \int_0^{\infty} |K(1, y)| y^{-\frac{1}{q}} dy < \infty,$$

alors la transformation est bornée dans  $L^q(x > 0)$  ; et

$$\left( \int_0^{\infty} |\Phi(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq A \left( \int_0^{\infty} |\varphi(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

Preuve. - En posant  $y = x Y$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^{\infty} K(x, x Y) \varphi(x Y) x d Y = \\ &= \int_0^{\infty} K(1, y) \varphi(xy) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \|\Phi\|_q &\leq \int_0^{\infty} |K(1, y)| \|\varphi(xy)\|_{L^q(x)} dy = \\ &= \|\varphi\|_q \int_0^{\infty} |K(1, y)| y^{-1/q} dy. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(Exemples classiques pour tous  $q \in ]1, \infty[$  .  $\Phi(x) =$

$$\frac{1}{x} \int_0^x \varphi(y) dy, \quad \text{ou } \int_x^{\infty} \varphi(y)/y dy, \quad \text{ou } \int_0^{\infty} \frac{\varphi(y)}{x+y} dy .)$$

6.3 Définition. - Pour  $0 < \alpha < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$  est constitué des  $f \in L^p$  tels que

$$\left( \int_0^\infty \left( \left\| \frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right\|_{L^p(x)} y^{r-\alpha} \right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty$$

où  $u = I.P.f$ ,  $r$  est le plus petit entier  $> \alpha$ . (Définition semblable pour  $q = \infty$ ).

C'est un espace de BANACH.

6.4 Certains résultats fondamentaux sur l'aspect "espace fonctionnel" des fonctions différentiables s'expriment par des relations d'inclusion entre espaces  $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$ .

Voici une série de telles relations, qui résultent directement de caractérisations des fonctions au moyen de leurs intégrales de POISSON.

Septième théorème.— Dans ce qui suit, les inclusions donnent des injections continues.

A) Pour  $q \leq q_1 \leq \infty$ , on a  $\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset \Lambda_{\alpha}^{p,q_1}$ .

B) Pour  $q_1$  et  $q_2 \in [1, \infty]$ ,  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\Lambda_{\alpha+\varepsilon}^{p,q_1} \subset \Lambda_{\alpha}^{p,q_2}.$$

C) En particulier pour  $\beta < \alpha$

$$\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset \Lambda_{\beta}^{p,q}.$$

D) Pour  $\beta < \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $q$  et  $r \in [1, \infty]$  reliés par

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \beta}{n},$$

on a  $\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset \Lambda_{\beta}^{r,q}$ .

6.5 Le lemme suivant montre l'intérêt d'utiliser les définitions des espaces  $\Lambda_{\alpha}^{\dots}$  où interviennent les dérivées des intégrales de POISSON par rapport à  $y$  (plutôt

que par rapport à  $x_1, \dots, x_n$ ).

**Lemme.**— Soit  $u = I.P.f$  ( $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ). On a  $\|u(x, y)\|_{L^p(x)} \leq \|f\|_p$ ; et pour chaque dérivée  $u_o^{(r)}$  de  $u$  par rapport à  $y$ , la fonction  $y \mapsto \left\| \frac{\partial^r u}{\partial y^r}(x, y) \right\|_{L^p(x)}$  est une fonction décroissante ( $y > 0$ ).

Cela résulte des relations fondamentales

$$u(x, y) = (P_y * f)(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x) dx = 1, \quad P_y \geq 0,$$

$$u(x, y_1 + y_2) = (P_{y_1}(t) * u(t, y_2))(x), \quad (y_1 \text{ et } y_2 > 0),$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial y^r}(x, y_1 + y_2) = (P_{y_1}(t) * \frac{\partial^r u}{\partial y^r}(t, y_2))(x).$$

■

6.6 Attaquons quelques assertions du septième théorème (6.4). D'abord

A)  $\Lambda_\alpha^{p,q} \subset \Lambda_\alpha^{p,q_1}$  ( $q \leq q_1 \leq \infty$ ) : Prenons  $f \in \Lambda_\alpha^{p,q}$ .

Quand on intègre une fonction positive,  $\int_{y/2}^y \leq \int_0^\infty$ . Donc

$$(1) \left( \int_{y/2}^y (s^{r-\alpha} \|u_o^{(r)}(t, s)\|_{L^p(t)})^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \left( \int_0^\infty (\dots)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} = \theta.$$

Le lemme 6.5 dit que  $\| \dots \| \dots$  est une fonction décroissante de  $s$ .

On minore donc le premier membre par le premier membre de

$$\|u_o^{(r)}(t, y)\|_{L^p(t)} \left( \int_{y/2}^y (s^{r-\alpha})^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \theta.$$

Donc avec une constante  $\theta'$  convenable

$$(2) \|u_o^{(r)}(t, y)\|_{L^p(t)} y^{r-\alpha} \leq \theta';$$

(on a donc déjà  $f \in \Lambda_\alpha^{p,\infty}$ ). Le premier membre de (2) est dans

$L^q(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y})$  donc aussi dans  $L^{q_1}(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y})$  ( $q \leq q_1 \leq \infty$ ). D'où A).

Prouvons 6.4 D) seulement pour  $q = \infty$ , et  $\alpha < 1$  (pour ne mettre en jeu que la première dérivée  $u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}$  de  $u = \text{I.P.f}$  par rapport à  $y$ ). Bref, montrons que

Pour  $0 < \beta < \alpha < 1$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \beta}{n}$ , alors  $\Lambda_\alpha^{p, \infty} \subset \Lambda_\alpha^{r, \infty}$  :

Soit donc  $f \in L^p$ , telle que  $\|u_0(x, y)\|_{L^p(x)} \leq A y^{-1+\alpha}$ ; il s'agit de voir que  $f \in L^r$  et  $\|u_0(x, y)\|_{L^r(x)} \leq A y^{-1+\beta}$ .

Si on définit  $s$  par

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1,$$

l'inégalité de YOUNG appliquée à la convolution

$$u_0(x, y) = (u_0(t, y/2) * P_{y/2}(t))(x)$$

donne

$$\|u_0\|_r \leq \|u_0\|_p \|P_{y/2}(x)\|_{L^s(x)}.$$

Pour voir que  $u_0$  a la propriété recherchée, il suffit de voir que

$$\|P_y(x)\|_{L^s(x)} \leq C^{te} y^{-n(s-1)/s}.$$

Ceci résulte de  $\|P_y\|_1 = 1$ ,  $\|P_y\|_\infty \leq C y^{-n}$ , qui donnent

$$\|P_y\|_s^s = \int (P_y)^1 (P_y)^{s-1} dx \leq \|P_y\|_1 \|P_y\|_\infty^{s-1}.$$

Pour voir que  $f \in L^r$ , on appliquera les théorèmes classiques sur les intégrales dépendant d'un paramètre aux relations

$$u(x, y_1) = - \int_{y_1}^{y_2} u_0(x, w) dw + u(x, y_2)$$

et (pour presque tout  $x$ )

$$f(x) = - \int_0^1 u_0(x, w)dw + u(x, 1).$$

7.- Relations entre potentiels de BESSEL et espaces  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ .

7.0 La définition 5.1 des  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$  et le quatrième théorème (4.4) montrent que pour  $0 < \alpha < 2$ , on a  $\mathcal{L}_{\alpha}^2 = \Lambda_{\alpha}^{2,2}$ . On montre que c'est vrai pour tout  $\alpha > 0$ , avec coïncidence des topologies.

Voici un résultat analogue à la remarque 3.5 (iv).

7.1 Huitième théorème.- Soient  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $p$  et  $q \in [1, \infty]$ ;  $\mathcal{J}_{\beta}$  est un isomorphisme de  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$  sur  $\Lambda_{\alpha+\beta}^{p,q}$ .

(Si  $f \in \Lambda_{\alpha}^{p,q}$ , alors  $\mathcal{J}_{\beta} f = G_{\beta} * f$  est défini, car c'est la convolution d'un noyau  $\in L^1$  (3.2, 4<sup>o</sup>) et de  $f \in L^p$  (5.1)).

7.2 Preuve.-

7.2.1 Relations entre  $f$ ,  $\mathcal{J}_{\beta} f$  et leurs intégrales de POISSON.-

Posons

$$(1) \begin{cases} F = \mathcal{J}_{\beta} f = G_{\beta} * f, \\ \Gamma_{\beta} = I.P.G_{\beta}, \\ u = I.P.f, \\ U = I.P.F. \end{cases}$$

La définition 3.1

$$(2) G_{\beta}^{\wedge}(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\beta/2}$$

donne (chapitre III, 3.4)

$$(3) \Gamma_{\beta}(x, y) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\beta/2} e^{-2\pi|x|y}.$$

D'après (1) et  $u(x, y) = (P_{y/2}(t) * u(t, y/2))(x)$  on a

$$(4) U(x, y) = (u(t, y/2) * \Gamma(t, y/2))(x),$$

d'où avec  $D_0^r = \frac{\partial^r}{\partial y^r}$

$$D_0^r U(x, y) = (D_0^{r-1} u(t, y/2) *_{(t)} D_0 \Gamma_\beta(t, y/2))(x);$$

donc

$$(5) \quad \|D_0^r U(x, y)\|_{L^p(x)} \leq \|D_0^{r-1} u(x, y/2)\|_{L^p(x)} \|D_0 \Gamma_\beta(x, y/2)\|_{L^1(x)}.$$

7.2.2 Montrons que pour  $0 < \beta < 1$ , on a  $G_\beta \in \Lambda_\beta^{1, \infty}$ .

On a bien  $G_\beta \in L^1$  (3.2). Il reste donc à voir (5.1) que

$$(6) \quad \|G_\beta(x-t) - G_\beta(x)\|_{L^1(x)} \leq C^{te} |t|^\beta.$$

On sait que

$$|G_\beta(x)| \leq C^{te} |x|^{-n+\beta}$$

et on vérifie que

$$|\text{grad } G_\beta(x)| \leq C^{te} |x|^{-n+\beta-1} \quad (x \neq 0).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int |G_\beta(x-t) - G_\beta(x)| dx \leq \\ & \leq \int_{|x| \leq 2|t|} (|G_\beta(x-t)| + |G_\beta(x)|) dx + \int_{|x| \geq 2|t|} |G_\beta(x-t) - G_\beta(x)| dx \leq \\ & \leq 2 \int_{|x| \leq 3|t|} |G_\beta(x)| dx + \int_{|x| \geq 2|t|} |t| |\text{grad } G_\beta(x)| dx \leq \\ & \leq C^{te} \int_{|x| \leq 3|t|} |x|^{-n+\beta} dx + C^{te} \int_{|x| \geq 2|t|} |t| |x|^{-n+\beta-1} dx \leq C^{te} |t|^\beta. \end{aligned}$$

7.2.3 Montrons que l'opérateur de convolution  $\mathcal{J}_\beta$  applique  $\Lambda_\alpha^{p,q}$  dans  $\Lambda_{\alpha+\beta}^{p,q}$ .

Il suffit évidemment ( $\beta = r \cdot (\beta/r) \sqrt[r]{\phantom{x}}$  de le voir pour  $0 < \beta < 1$ . Or dans ce cas, on vient d'établir que  $G_\beta \in \Lambda_\beta^{1, \infty}$ , ce qui entraîne (variante avec  $q = \infty$  du

sixième théorème (6.1)) que  $\Gamma_\beta = \text{I.P.G}_\beta$  vérifie

$$\|D_0 \Gamma_\beta(x, y/2)\|_{L^1(x)} \leq C^{te} \cdot y^{-1+\beta}$$

Donc dans (5) :

$$\|D_0^r U(x, y)\|_{L^p(x)} \leq C^{te} \cdot y^{-1+\beta} \|D_0^{r-1} u(x, y)\|_{L^p(x)}$$

et on applique 6.1 B).

7.2.4 Cette étape consiste à admettre le lemme suivant :

Lemme. - A) L'injection  $\Lambda_{\beta+2}^{p,q} \longrightarrow \Lambda_\beta^{p,q}$  (6.4) est continue.

B) Si  $f \in \Lambda_{\beta+1}^{p,q}$ , alors ses dérivées au sens des distributions  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  appartiennent à  $\Lambda_\beta^{p,q}$  et  $f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_k} : \Lambda_{\beta+1}^{p,q} \longrightarrow \Lambda_\beta^{p,q}$  est continue.

C) L'application  $I - \Delta$  (c'est-à-dire  $f \longmapsto f - \Delta f$ )  $\Lambda_{\beta+2}^{p,q} \longrightarrow \Lambda_\beta^{p,q}$  est continue.

D) L'application  $\mathcal{J}_\beta : \Lambda_\alpha^{p,q} \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}^{p,q}$  est continue.

(A) est facile ; C) résulte de A) et B) ; D) fait suite à 7.2.3 et se voit en utilisant une amélioration du théorème 6.1).

Dans les étapes suivantes, on verra que dans de bons espaces fonctionnels, on a

$$(6) \quad (I - \Delta)\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2(I - \Delta) = I \quad (= \text{application identique ; } \Delta = \text{laplacien})$$

D'après C), si  $f \in \Lambda_{\alpha+2}^{p,q}$ , il existera donc  $g \in \Lambda_\alpha^{p,q}$  tel que  $f = \mathcal{J}_2 g$ , à savoir  $g = (I - \Delta)f$ .

Comme les  $\mathcal{J}_\beta$  sont injectives et que (d'après (6))  $\mathcal{J}_2$  est de plus surjective, la relation

$$\mathcal{J}_{2-\beta} \mathcal{J}_\beta = \mathcal{J}_2$$



montre que pour  $0 < \beta < 2$ , les  $\mathcal{F}_\beta$  sont bijectives. D'après D) et le fait que nos espaces fonctionnels sont des espaces de BANACH, ce seront des homéomorphismes.

7.2.5 Dans l'espace  $\mathcal{S}$  des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, l'application  $\varphi \mapsto \mathcal{F}_\alpha \varphi$  où  $\mathcal{F}_\alpha \varphi(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\alpha/2} \varphi(x)$  est un isomorphisme ; comme la transformation de FOURIER est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$ , on conclut que  $\mathcal{F}_\alpha$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  ; donc dans  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{F}_{\alpha+\beta} = \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta$ .

Pour la souplesse des démonstrations, on définit  $\mathcal{F}_\alpha$  sur  $\mathcal{S}'$  (ensemble des distributions tempérées) par

$$\langle \mathcal{F}_\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_\alpha \varphi \rangle \quad (T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}).$$

L'injectivité de  $\mathcal{F}_\alpha$  aussi bien pour  $\mathcal{S}$  que pour  $\mathcal{S}'$  (ou pour  $L^p \dots$ ) est visible.

Dans  $\mathcal{S}$ , on a

$$(6) \quad \mathcal{F}_2(1 - \Delta) = (1 - \Delta)\mathcal{F}_2 = I,$$

donc aussi dans  $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$  d'après C) du lemme 7.2.4.

7.2.6 Si  $0 < \beta < 2$ , on peut définir dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{F}_{-\beta} = \mathcal{F}_{-2} \mathcal{F}_{2-\beta};$$

on a déjà la continuité de  $\mathcal{F}_{-2} = (1 - \Delta) : \Lambda_{\alpha+2}^{p,q} \longrightarrow \Lambda_{\alpha}^{p,q}$  et celle de

$\mathcal{F}_{2-\beta} : \Lambda_{\alpha+\beta}^{p,q} \longrightarrow \Lambda_{\alpha+2}^{p,q}$ . On vérifie (en passant par  $\mathcal{S}'$ ) que  $\mathcal{F}_\beta \mathcal{F}_{-\beta} = \mathcal{F}_{-\beta} \mathcal{F}_\beta = I$ .

■ 7.1

8.- Relations entre espaces  $\mathcal{L}_\alpha^p$  et  $\Lambda_{\dots}^{\dots}$ .

Voici enfin les relations importantes entre ces deux types d'espaces. La démonstration des relations d'inclusion suivantes invoque la théorie de LITTLEWOOD-PALEY du chapitre IV. On peut montrer - nous ne le ferons pas - que ce sont les meilleures relations d'inclusion possibles : preuves détaillées dans l'article de TAIBLESON cité au début du § 6.

8.1 Neuvième théorème. - Soient  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \alpha < \infty$ .

A) Si  $2 \leq p$ , alors  $\mathcal{L}_\alpha^p \subset \Lambda_\alpha^{p,p}$ .

B) Si  $p \leq 2$ , alors  $\mathcal{L}_\alpha^p \subset \Lambda_\alpha^{p,2}$ .

C) Si  $2 \leq p$ , alors  $\Lambda_\alpha^{p,2} \subset \mathcal{L}_\alpha^p$ .

D) Si  $p \leq 2$ , alors  $\Lambda_\alpha^{p,p} \subset \mathcal{L}_\alpha^p$ .

Preuve. - On se restreint au cas  $\alpha = 1$ , car les  $\mathcal{I}_\theta$  sont des isomorphismes ((3.5, iv) et (7.1)).

8.2 Preuve de A). - Il s'agit de voir que  $\mathcal{L}_1^p \subset \Lambda_1^{p,p}$ , si  $2 \leq p$ .

8.2.1 Rappels. - (i) Soit  $\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ); on sait que

$$\sup_{y>0} |\text{I.P.}\varphi|(x, y) \leq M\varphi(x)$$

(chapitre III théorème 3.6 et remarque 3.7.2) ;

et si  $1 < r < \infty$ , on a

$$\|M\varphi\|_r \leq A_r \|\varphi\|_r$$

(chapitre I, théorème 1.3 (iii)).

(ii).- On sait que dans  $L^r(\mathbb{R}^n)$ , les normes  $\|\varphi\|_r$  et

$$\left\| \left( \int_0^\infty y |\text{grad } U|^2(x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r(x)}$$

avec  $U = \text{I.P.}\varphi$  et  $|\text{grad } U|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ , sont équivalentes (théorie de LITTLEWOOD-PALEY, chapitre IV, théorème 1.2).

(iii).- On sait que  $\mathcal{L}_1^p = L_1^p$  (théorème 3.6). Soit  $f \in L_1^p$  (autrement dit,  $f \in L^p$  et ses dérivées au sens des distributions  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^p$ ). Alors on a la loi

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \text{I.P.} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{où} \quad u = \text{I.P.} f.$$

8.2.2 Cela rappelé, posons pour alléger

$$|\nabla^2 u| = \left( \sum_{k=1}^n \left| \text{grad} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque la théorie de LITTLEWOOD-PALEY s'applique aussi bien à  $f$  qu'à ses dérivées, on peut dire que

$$\left\| \left( \int y |\nabla^2 u|^2(x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(x)} \leq A_p \|f\|_{L_1^p}.$$

Comme  $f \in L_1^p \subset L^p$ , pour voir que  $f \in \Lambda_1^{p,p}$ , il reste à voir (théorème 6.1)

que

$$\left( \int_0^\infty \frac{1}{y} \left( y \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_p \right)^p dy \right)^{1/p} \leq A_p \|f\|_{L_1^p}.$$

En explicitant l'expression  $\|\dots\|_p$ , on voit que le premier membre vaut

$$(1) \quad \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y > 0} \left( y \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right)^{p-2} \left( y \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right)^2 \frac{dy}{y} dx.$$

8.2.3 Le noyau de POISSON vérifie les inégalités

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} P_y \right| (x) \leq \frac{C}{y} P_y(x) \quad (k = 1, \dots, n)$$

comme on le voit par homogénéité après avoir pris  $y = 1$  ; on en conclut

$$\sup_{y > 0} \left| y \frac{\partial U}{\partial x_k} \right| (x, y) \leq c^{te} \cdot M\varphi \quad (k = 1, \dots, n, U = I.P.\varphi)$$

analogue à 8.2.1 (i).

8.2.4 Dans notre espace fonctionnel, ( $p > 2$ ,  $u = I.P.f$ ,  $f \in L_1^p$ ) on a

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{p-2} \leq c^{te} \cdot \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{p-2} ;$$

donc en faisant  $\varphi = \frac{\partial f}{\partial x_k}$  dans ce qu'on a vu, on montre qu'on peut majorer l'expression (1) de 8.2.2 par

$$(2) \quad c^{te} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \underline{\left( M \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)^{p-2}} (x) \underline{\left( g \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)^2} (x) dx$$

où les parenthèses soulignées sont la fonction maximale et la fonction de LITTLEWOOD PALEY de  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ .

Supposons  $p > 2$  strictement; soit  $r$  tel que

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{p} = 1 ;$$

On majore alors (2) par

$$\begin{aligned} & c^{te} \cdot \sum_{k=1}^n \left\| \left( M \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)^{p-2} \right\|_r \left\| g \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right\|_p^2 = \\ & = c^{te} \cdot \sum_{k=1}^n \left( \int \left( M \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)^p dx \right)^{1/r} \left( \int \left( g \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)^p dx \right)^{2/p} \leq \\ & \leq c^{te} \cdot \sum_{k=1}^n \left( \int \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|^p dx \right)^{1/r} \left( \int |f|^p dx \right)^{2/p}, \end{aligned}$$

d'après successivement l'inégalité de HÖLDER, l'égalité  $(p-2)r = p$ , et la continuité dans  $L^p$  des deux applications  $\varphi \mapsto M\varphi$  et  $\varphi \mapsto g(\varphi)$ . Comme

$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\|_p \leq c^{te} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_1^p}$ , on obtient la majoration recherchée pour 8.2.2 (1). Pour

$p = 2$ , on le voit en reprenant directement (2).

8.3 Preuve de 8.1 B).— Puisque  $\alpha = 1$ , il s'agit de voir que :

Pour  $p \leq 2$ , on a  $\mathcal{L}_1^p \subset \Lambda_1^{p,2}$ .

Soient  $F$  une fonction de deux groupes de variables  $x_1, x_2$  (par exemple  $x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}$ )  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures positives sur ces deux espaces ; on a avec  $p < 2, s = \frac{2}{p}$  et  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

$$\begin{aligned} \left( \int \left( \int F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right)^s d\mu_2(x_2) \right)^{1/r} &\leq \\ &\leq \int \left( \int (F(x_1, x_2))^s d\mu_2(x_2) \right)^{1/r} d\mu_1(x_1), \end{aligned}$$

inégalité du type "la norme de l'intégrale est inférieure à l'intégrale de la norme".

Faisons  $F = |\nabla^2 u|^p$  (notation 8.2.2),  $x_1 = x \in \mathbb{R}^n, x_2 = y \in \mathbb{R}^+$ , et prenons les mesures  $d\mu_1(x_1) = dx, d\mu_2(y) = y dy (y > 0)$ .

$$\text{Il vient } \left( \int_0^\infty \left( y \left\| \nabla^2 u(x, y) \right\|_{L^p(x)} \right)^2 \frac{dy}{y} \right)^{1/2} \leq \left\| \left( \int_0^\infty y |\nabla^2 u|^2(x, y) dy \right)^{1/2} \right\|_{L^p(x)}.$$

Entre les doubles barres du second membre, on observe la fonction de LITTLEWOOD-PALEY d'une combinaison linéaire de fonctions de  $L^p$  ; on lui applique les inégalités du chapitre IV. D'où (premier membre)  $\leq A_p \|f\|_{L_1^p}$ , puis la conclusion.

8.4 Les preuves de 8.1 C) et D) utilisent aussi les inégalités de la théorie de LITTLEWOOD-PALEY.

Indications bibliographiques pour le chapitre V.

Pour le cas  $n = 1$ , beaucoup de résultats de ce chapitre remontent à HARDY-LITTLEWOOD, et à HIRSCHMANN, souvent sous une forme implicite. La théorie multidimensionnelle a une vaste littérature. Les deux premiers théorèmes ont été établis par SOBOLEV. Les potentiels de BESSEL ont été étudiés d'abord par N. ARONSZAJN et K.T. SMITH, Annales de l'Institut Fourier, tome 11, 1961, p. 385-475 et par A.P. CALDERÓN, Symposium on Pure Math., tome 5, 1964, p. 33-49.

Voir aussi l'article de l'Auteur dans le Bulletin Amer. Math. Soc., tome 67, 1961, p. 1894-1897.

Le huitième théorème (7.1) est dû à TAIBLESON, Journal of Math. and Mechanics, tome 13, 1964, p. 407-480.

Voir cet article pour plus de détails sur la matière de ce chapitre.

## Chapitre VI

Prolongement à  $\mathbb{R}^n$  d'une fonction différentiable  
définie sur un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

Prolongement à  $\mathbb{R}^{n+1}$  d'une fonction différentiable  
définie au-dessus du graphe d'une application  
Lipschitzienne  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

0.0 Dans ce chapitre, nous étudierons deux sortes de théorèmes d'extension pour les fonctions différentiables.

Le premier type de théorèmes, valable pour un fermé quelconque, est une légère variante d'un théorème donné d'abord par WHITNEY. Une idée fondamentale de sa construction est le découpage du complémentaire d'un fermé donné (arbitraire) de  $\mathbb{R}^n$  en une réunion de cubes "presque disjoints" dont les diamètres sont du même ordre de grandeur que la distance des dits cubes à l'ensemble fermé. Ce découpage, auquel nous avons fait allusion au chapitre I, rend des services dans bien d'autres contextes.

Le second type de théorèmes de prolongement a pour cadre fonctionnel les espaces de SOBOLEV introduits au chapitre précédent. Ici le domaine de définition de la fonction à prolonger exige quelque régularité (mettant en jeu des conditions de LIPSCHITZ d'ordre 1) mais il se trouve que cette régularité suffit pour donner un prolongement pour les dérivées de tous les ordres. Les extensions de ce type ont d'abord été étudiées par CALDERÓN.

1.- Découpage d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  en cubes.

Comme toujours, un "cube" est un cube à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

1.1 Premier théorème (WHITNEY)..- Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , tel que  $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ .

On note  $\Omega = ]F$  son complémentaire.

L'ouvert  $\Omega$  est réunion d'une famille de cubes compacts  $(Q_m)$ , à côtés parallèles aux axes de coordonnées, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, le diamètre de chaque cube étant à peu près proportionnel à sa distance à  $F$ . Autrement dit,

a)  $\Omega = \bigcup_m Q_m$ ,

b)  $Q_m \cap Q_{m'} = \emptyset$  pour  $m \neq m'$ ,

c) il existe deux constantes  $c_1, c_2$  ne dépendant que de la dimension  $n$ ,  $0 < c_2 < c_1 < \infty$ , telles que pour tout  $m$

$$c_2 (\text{diamètre de } Q_m) \leq \text{distance de } Q_m \text{ à } F \leq c_1 (\text{diamètre de } Q_m).$$

(En fait,  $c_1 > 1$  et  $c_2 = (c_1 - 1)/2$  conviennent).

1.2 Nous décrivons une construction rapide dans  $\mathbb{R}$ , mais elle est trop simple pour être typique.

Premier cas :  $\Omega = ]0, 1[$ . Construisons de proche en proche le découpage. A la première étape, on coupe  $\Omega$  en deux intervalles de longueurs égales :  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $[\frac{1}{2}, 1[$ .



Le découpage à la  $p^{\text{ème}}$  étape est constitué de  $2p$  intervalles. On passe à la  $p + 1^{\text{ème}}$  étape en divisant en deux intervalles de même longueur d'une part l'intervalle d'extrémité gauche 0 (dans la  $p^{\text{ème}}$  étape), et d'autre part celui d'extrémité droite 1 ; et on conserve tous les  $2p - 2$  autres intervalles.

En définitive, les intervalles sont  $[2^{-m}, 2^{-m+1}]$  ( $m$  entier  $\geq 2$ ) et leurs symétriques par rapport à  $\frac{1}{2}$ .

Second cas :  $\Omega = ]0, \omega[$ . On peut prendre  $\Omega_m = [2^{-m}, 2^{-m+1}[$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

Troisième cas :  $\Omega$  ouvert ( $\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{R}$ ) quelconque de  $\mathbb{R}$ . Sur chacune des composantes connexes relativement compactes de  $\Omega$ , on applique une construction analogue à celle du premier cas. Et une construction analogue à celle de second cas si  $\Omega$  admet une (ou deux) demi-droite comme composante connexe.

**1.3 Une dynastie de cubes.**— On note  $\mathcal{F}_0$  l'ensemble des cubes fermés dont les côtés (parallèles aux axes de coordonnées) ont pour longueur 1, et dont chaque sommet a toutes ses coordonnées entières.

Par l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $2^{-m}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), on obtient un ensemble  $\mathcal{F}_m$  de cubes (dont les côtés ont pour longueur  $2^{-m}$ ).

Chaque cube appartenant à  $\mathcal{F}_m$  contient exactement  $2^n$  cubes appartenant à  $\mathcal{F}_{m+1}$ , qui sont ses fils et dont il est le père. Chaque cube de  $\mathcal{F}_m$  est contenu dans un seul cube de  $\mathcal{F}_{m-1}$  : son père, et possède  $2^n - 1$  frères, à savoir les autres fils de son père.

1.4 Preuve du théorème 1.1.— La construction dans le cas général se fera en deux stades (1.4.1 et 1.4.2). Dans le premier stade, nous passerons du découpage initial de  $\mathbb{R}^n$  en cubes égaux à un découpage en gros cubes. Parmi les gros cubes obtenus à l'issue du premier stade, ceux qui sont assez loin du fermé  $F$  seront conservés au deuxième stade, mais ceux qui sont assez proches de  $F$  seront alors subdivisés.

1.4.1 Premier stade. On choisit  $c_1 > 1$ .—

On construira un recouvrement de  $\mathbb{R}^n$  par des cubes  $K_m$  "presque disjoints" (découpage I) qui seront assez gros, c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup K_m,$$

$$K_m \cap K_{m'} = \emptyset \text{ pour } m \neq m',$$

$$d(F, K_m) = \text{distance de } K_m \text{ à } F \leq c_1 (\text{diamètre de } K_m) = c_1 \text{ diam}(K_m).$$

On construit d'abord par récurrence sur  $p$  entier  $\geq 0$ , des familles de cubes  $\mathcal{P}_{-p}$ . D'abord  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F}_0$  (notation de 1.3).

Chaque cube de  $\mathcal{P}_{-p}$  subit à la  $p+1$ <sup>ème</sup> étape le même sort que ses frères (terminologie de 1.3).

Ou bien un cube  $K \in \mathcal{P}_{-p}$  vérifie

$$(1) \quad c_1 \text{ diam}(K) < d(F, K),$$

et alors  $K$  et ses frères ne feront pas partie de la famille  $\mathcal{P}_{-p-1}$ , mais seront remplacés par leur père.

Ou bien,  $K'$  désignant un cube  $K \in \mathcal{P}_{-p}$  ou l'un quelconque de ses  $2^n - 1$

frères, on a pour tout  $K'$

$$(2) \quad c_1 \operatorname{diam}(K') \geq d(F, K'),$$

et alors ces  $2^n$  cubes figureront encore dans  $\mathcal{P}_{-p-1}$ .

Quand la lettre  $Q$  désigne successivement un cube appartenant à un  $\mathcal{F}_m$  puis son père,  $\operatorname{diam}(Q)$  est doublé, alors que  $d(F, Q)$  décroît. Donc tout cube  $Q \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{P}_0$  est inclus dans un cube  $Q' \in \mathcal{F}_{-m}$  (" $Q'$  est un ancêtre de  $Q$ ") avec  $m$  assez grand pour que

$$d(F, Q') \leq (c_1 - 1) \operatorname{diam}(Q') ;$$

mais alors chaque frère  $Q''$  de  $Q'$  vérifie au moins

$$d(F, Q'') \leq d(F, Q') + \operatorname{diam}(Q') \leq c_1 \operatorname{diam}(Q'').$$

Grâce à cette remarque, on voit que pour tout cube  $K \in \mathcal{P}_0$ , il existe un indice  $p_0$  tel que l'un des "ancêtres"  $K'$  de  $K$  vérifie  $K' \in \mathcal{P}_{-p}$  pour tout  $p \geq p_0$ .

On peut prendre pour  $(K_m)$  l'ensemble de cubes  $\bigcap_{j \geq 0} \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{P}_{-j-m} =$   
 $= \limsup_{p \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{-p}$ .

1.4.2 Second stade. On adopte  $c_2 = (c_1 - 1)/2$ .

On part d'un découpage  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  en cubes  $Q$  qui appartiennent à  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_m$  et qui vérifient

$$d(F, Q) \leq c_1 \operatorname{diam}(Q) ;$$

Par exemple,  $\mathcal{P} = \limsup_{p \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{-p}$  convient, comme on vient de le voir. Et on cons-

truit par récurrence sur  $p$  entier  $\geq 1$  l'ensemble  $\mathcal{P}_p$  de cubes ainsi.

Soit  $Q \in \mathcal{P}_{p-1}$  (ou  $\in \mathcal{P}$ ).

Ou bien  $d(F, Q) > c_2 \text{diam}(Q)$  et alors on décide de garder  $Q$  dans  $\mathcal{P}_p$ .

Ou bien  $d(F, Q) < c_2 \text{diam}(Q)$  ; (c'est en particulier le cas si  $Q \cap F \neq \emptyset$ )

alors on remplace  $Q$  par ses  $2^n$  fils qui eux feront partie de  $\mathcal{P}_p$ .

Un fils  $Q'$  d'un cube  $Q$  de ce dernier type vérifie

$$\begin{aligned} \underline{d(F, Q')} &\leq d(F, Q) + \text{diam}(Q') < \\ &< c_2 \text{diam}(Q) + \text{diam}(Q') = \\ &= (2c_2 + 1) \text{diam}(Q') = \underline{c_1 \text{diam}(Q')}. \end{aligned}$$

Soit  $x \in \Omega$ . A partir d'un certain rang  $p_0$ ,  $x$  appartient à un cube  $Q$  faisant partie de  $\mathcal{P}_{p_0}$  et tel que  $Q \cap F = \emptyset$ . Alors un raisonnement analogue à celui terminant 1.4.1 montre qu'à partir d'un certain rang  $p_0 + q_0$  les cubes inclus dans  $Q$  qui figurent dans  $\mathcal{P}_{p_0 + q_0}$  figureront aussi dans  $\mathcal{P}_p$  pour tout  $p > p_0 + q_0$ .

La construction par récurrence, l'évaluation, et la remarque finale montrent qu'on peut prendre pour  $(Q_m)$  les cubes (convenablement numérotés) du découpage de  $\Omega$  déduit de l'ensemble de cubes  $\bigcup_{p \geq 0} \mathcal{P}_p$ .

|| 1.1

**1.5 Notation.**— Etant donné un cube  $Q$  et  $\epsilon > 0$ ,  $Q^\epsilon$  désignera le cube déduit de  $Q$  par l'homothétie de centre le centre de  $Q$  et de rapport  $1 + \epsilon$  ; (son volume vaut  $|Q^\epsilon| = (1 + \epsilon)^n |Q|$ ).

1.6 Remarques.— Avec les notations de 1.1 et 1.5, il existe  $\epsilon_0 > 0$  (ne dépendant que de  $c_1$ ) tel que pour tout indice  $m$ , pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , on ait  $Q_m^\epsilon \cap F = \emptyset$ .

Les quantités  $d(F, Q_m)$ ,  $\text{diam}(Q_m)$ ,  $d(x, F)$  (pour  $x$  parcourant  $Q_m$ ) sont à peu près proportionnelles : leurs rapports sont majorés et minorés par deux nombres  $> 0$  qui ne dépendent que de  $n, c_1, c_2$ .

Ces deux remarques (et des variantes de la seconde remarque) serviront dans des évaluations prochaines ou lointaines.

Le symbole  $N^*$  désignera un entier  $> 0$  dont la signification est donnée dans l'énoncé 1.7.

1.7 Corollaire du théorème 1.1.— Soit  $\epsilon > 0$ , assez petit pour que les cubes "dilatés"  $Q_m^\epsilon$ , construits à partir des cubes  $Q_m$  de 1.1, ne rencontrent pas  $F$  (1.6).

Il existe  $N^*$  (ne dépendant que de  $\epsilon, c_1, c_2$ , et de la dimension  $n$ ) tel que pour tout  $x \in \Omega$ , tout voisinage assez petit de  $x$  rencontre au plus  $N^*$  cubes  $Q_m^\epsilon$ .

Preuve.— Il existe  $c_3$  assez grand pour que, pour tout  $x \in \Omega$  la boule  $B_x$  de rayon  $c_3 d(x, F)$  et de centre  $x$  contienne tous les cubes  $Q_m$  tels que  $Q_m^\epsilon \ni x$  : On le voit en observant que pour  $x \in Q_m^\epsilon$ , les trois quantités  $d(x, F)$ ,  $\text{diam}(Q_m)$ ,  $\text{diam}(Q_m^\epsilon)$  sont à peu près proportionnelles.

Notons  $M_x$  l'ensemble des indices  $m$  tels que  $x \in Q_m^\epsilon$ , et  $\mu_x = \text{Cardinal}$

de l'ensemble  $M_x$ .

On a  $B_x \supset \bigcup_{m \in M_x} Q_m$ ; de plus puisque les intérieurs des cubes  $Q_m$  sont deux à deux disjoints, on a  $|\bigcup_{m \in M_x} Q_m| = \sum_{m \in M_x} |Q_m|$ ; donc

$$(1) \quad |B_x| \geq \sum_{m \in M_x} |Q_m| > \mu_x \inf_{m \in M_x} |Q_m|.$$

Or  $|B_x| = c_4 (d(x, F))^n$  où  $c_4$  ne dépend que de  $c_3$  et  $n$ , et les nombres  $|Q_m|$  pour  $m \in N_x$  sont à peu près proportionnels. Ces évaluations reportées dans les membres extrêmes de (1) montrent que  $N_0 = \sup_{x \in \Omega} \mu_x < \infty$ : Tout  $x \in \Omega$  ap-  
partient à au plus  $N_0$  cubes  $Q_m^\epsilon$ .

En perfectionnant ce raisonnement, on montre qu'il existe  $\epsilon_1$  (assez petit, dépendant de  $\epsilon, n, c_1, c_2$ ) tel que la boule de centre  $x \in \Omega$ , de rayon  $\epsilon_1 d(x, F)$  rencontre au plus  $N^*$  cubes  $Q_m^\epsilon$ . □ 1.7

1.8 Application: Une fonction dérivable  $\delta$  avec  $\delta(x)$  à peu près proportionnelle à  $d(x, F)$ .

Comme première application du théorème de découpage 1.1 et comme illustration de la construction dans le théorème d'extension (2.2 et 3.6), nous donnons une "régularisée" de la distance à un ensemble fermé quelconque. Cette distance régularisée sera employée dans le second théorème d'extension 3.6.

1.8.1 Second théorème.— Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ( $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ ).

Il existe des constantes  $\gamma > 0, A, B$  et (pour chaque  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in$

$\in \mathbb{N}^n) B_\alpha$ , et une fonction  $\delta$  indéfiniment dérivable dans  $\Omega = ]F$ , telle que pour tout  $x \in \Omega$

$$A d(x, F) \leq \delta(x) \leq B d(x, F),$$

$$|D_\alpha \delta(x)| \leq B_\alpha (d(x, F))^{1-|\alpha|},$$

avec  $D_\alpha \delta$  = dérivée d'indice  $\alpha$  de  $\delta$  et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

1.8.2 Remarque.— La preuve (1.8.4) montre qu'on pourrait préciser une évaluation de  $A$ ,  $B$  et des  $B_\alpha$  en fonction de certaines données, mais indépendamment du fermé  $F$ .

1.8.3 Exemple :  $n = 1$ ,  $\Omega = ]-1, 1[$ . On peut prendre pour  $\delta$  une fonction définie sur  $\Omega$ , concave, paire, indéfiniment dérivable sur  $\Omega$ , valant  $1 - |x|$  pour  $x \in \Omega \cap [ ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$ .

1.8.4 Preuve.— Soit  $Q$  le cube centré à l'origine et dont chaque côté est de longueur 1, (on a  $(x_1, \dots, x_n) \in Q$  si et seulement si  $\sup |x_j| \leq \frac{1}{2}$ ). Prenant  $\epsilon$  petit (comme pour le corollaire 1.7), soit  $\psi$  indéfiniment dérivable, à valeurs dans  $[0, 1]$ , valant 1 sur  $Q$ , nulle hors de  $Q^\epsilon = (1 + \epsilon)Q$  (notation 1.5).

Posons pour tout  $x \in \Omega$

$$\varphi_m(x) = \psi\left(\frac{x-y^{(m)}}{L_m}\right)$$

où  $y^{(m)}$  est le centre du cube  $Q_m$  (notation 1.1),  $L_m$  est la longueur de chaque côté de  $Q_m$ ; ( $\varphi_m$  vaut donc 1 sur  $Q_m$  et est nul hors de  $Q_m^\epsilon$ ).

J'affirme qu'on peut adopter

$$\mathcal{S}(x) = \sum_m L_m \varphi_m(x) \quad (x \in \Omega).$$

D'abord, d'après le premier théorème (1.1) et son corollaire (1.7), où est défini  $N^*$ , on a avec  $B$  convenable et  $x \in \Omega$

$$\mathcal{S}(x) \leq \sum_{x \in Q_m^c} L_m \leq N^* \sup_{x \in Q_m^c} L_m \leq B d(x, F),$$

car pour  $x \in Q_m^c$ ,  $L_m$  et  $d(x, F)$  sont à peu près proportionnels (remarque 1.6).

De plus, soit  $m$  tel que  $x \in Q_m$ . La définition de  $\varphi_m$  et 1.6 donnent avec  $A$  convenable

$$\mathcal{S}(x) \geq L_m \geq A d(x, F).$$

Enfin, avec  $K_\alpha = \sup |D_\alpha \varphi(x)|$ , on a  $|D_\alpha \varphi_m(x)| \leq K_\alpha L_m^{-|\alpha|}$  pour chaque indice  $m$ ; et dans la dérivation de la série donnant  $\mathcal{S}$ , il n'y a à considérer que les termes (en nombre  $\leq N^*$  d'après 1.7) qui ne sont pas identiquement nuls sur un petit voisinage de  $x$  (on ose à peine déranger pour si peu le théorème de WEIERSTRASSE sur les séries de fonctions dérivables !).

### ■ 1.8.1

2.- Le théorème de prolongement de WHITNEY : cas élémentaire.

2.1 Définition.- Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ( $F \neq \emptyset$ );  $\mathcal{B}_1(F)$  est l'espace vectoriel constitué des fonctions  $f$  réelles bornées, définies sur  $F$ , telles que

$$M_f = \sup_{x, y \in F; x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \infty.$$

C'est un espace de BANACH pour la norme  $\|f\| = \sup_{x \in F} |f(x)| + M_f$ .

Pour  $F = \mathbb{R}^n$ , on retrouve les fonctions Lipschitziennes <sup>bornées</sup> ( $d$  d'exposant 1);



$\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$  est aussi l'espace de SOBOLEV  $L_1^\infty(\mathbb{R}^n)$  (chapitre V, 2.2).

2.2 D'abord nous énoncerons et prouverons le théorème de prolongement de WHITNEY dans le cas de l'ordre 1, car l'idée principale apparaît déjà, très clarifiante.

Troisième théorème.— Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ( $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ ). Il existe une application linéaire bornée  $\mathcal{E}_1 : \mathcal{B}_1(F) \rightarrow \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{B}_1(F)$ , la restriction de  $\mathcal{E}_1(f)$  à  $F$  soit  $f$ .

(Dans  $\mathcal{E}_1$ , la lettre  $\mathcal{E}$  évoque "extension" et l'indice 1 rappelle  $\mathcal{B}_1$ ).

Remarque.— La preuve ne précise pas explicitement la manière dont les majorations dépendent (ou au contraire sont indépendantes) des données ( $n, \varepsilon, c_1, c_2, \varphi \dots$ ), mais elle permet au lecteur d'étudier ces précisions.

2.3 Preuve du théorème 2.2.

2.3.1 On introduit les fonctions définies sur  $\Omega = \int F$

$$\Phi = \sum_m \varphi_m \quad (\varphi_m \text{ est défini en 18.4) et}$$

$$\Phi_m = \frac{\varphi_m}{\Phi}.$$

$$\text{Donc } \sum_m \Phi_m = 1 \text{ sur } \Omega. \text{ D'après } \Phi \geq 1, \text{ on a } |\Phi'_m| \leq |\varphi'_m \Phi| + |\varphi_m \Phi'|$$

(le prime désignant une dérivée première quelconque). Plus généralement, de même que  $\varphi_m$ ,  $\Phi_m$  vérifie pour tout indice de dérivation  $\alpha$  une inégalité du type (avec  $C_\alpha$  constante indépendante de  $x$  et de l'indice  $m$ )

$$|D_\alpha \Phi_m| (x) \leq C_\alpha (d(x, F))^{-|\alpha|}.$$

Pour chaque indice  $m$ , on introduit un point  $p_m \in F$  tel que

$$d(p_m, Q_m) = d(F, Q_m) \quad (Q_m \text{ comme en 1.1}).$$

Il existe au moins un tel point. (En fait, il suffirait d'assurer  $p_m \in F$  et  $d(p_m, Q_m)$  à peu près proportionnel à  $d(F, Q_m)$ .)

2.3.2 Soit  $f \in \mathcal{B}_1(F)$ . Posons

$$M = \sup_{p \in F} |f(p)| ,$$

$$M_f = \sup_{p, q \in F ; p \neq q} |f(p) - f(q)| / d(p, q).$$

Montrons que, en posant

$$(1) \quad (\mathcal{E}_1 f)(p) = f(p) \quad (p \in F),$$

$$(2) \quad (\mathcal{E}_1 f)(x) = \sum_m f(p_m) \Phi_m(x) \quad (x \in \Omega),$$

on a  $\mathcal{E}_1 f \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$ .

A) Dans  $\Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 f$  est indéfiniment dérivable.

(Observer que support de  $\Phi_m =$  support de  $\psi_m \subset Q_m^\epsilon$ ).

$$B) \quad \underline{\sup_{x \in \Omega} |(\mathcal{E}_1 f)'(x)| \leq M = \sup_{p \in F} |f(p)|}.$$

(D'après  $\sum \Phi_m = 1$  dans  $\Omega$ ).

C) Dans  $\Omega$ ,  $(\mathcal{E}_1 f)'$  est bornée (le signe prime indiquant une dérivée première par rapport à l'une quelconque des variables). Les constructions du § 1 utilisées ci-dessous et les calculs suivants permettent de majorer  $|(\mathcal{E}_1 f)'|$  en fonction d'autres données.

Fixons  $x \in \Omega$ . Soit  $p_x$  un des points  $p_m (\in F)$  de 2.3.1, dont nous pré-

ciserons plus loin le choix. On peut dériver terme à terme la série (1) évaluée au point  $y \in \Omega$ , ainsi que la relation  $\sum_m f(p_x) \Phi_m(y) = f(p_x)$ , d'où par soustraction

$$(1) \quad (\mathcal{E}_1 f)'(y) = \sum_m (f(p_m) - f(p_x)) \Phi'_m(y) \quad (y \in \Omega).$$

Il existe (2.3.1) une constante  $C'$  telle que sur  $\Omega$  et pour tout indice  $m$   $|\Phi'_m(y)| \leq C'/d(y, F)$ ; de plus  $f$  appartient à  $\mathcal{B}_1(F)$  (autrement dit le nombre  $M_f$  introduit au début de 2.3.2 est fini); donc (1) donne "provisoirement"

$$(2) \quad |(\mathcal{E}_1 f)'(y)| \leq M_f C' \sum_m d(p_m, p_x)/d(y, F) \quad (y \in \Omega)$$

(qui est sans intérêt car  $\sum_m \dots = +\infty$ ).

Or en se restreignant aux  $y$  voisins de  $x$ , nous montrerons d'une part que dans (1) et par suite dans (2), on peut remplacer  $\sum_m$  par une somme portant sur au plus  $N^*$  indices (notation de 1.7) fixés avec  $x$ , et d'autre part, que si  $m$  est un tel indice, un choix convenable de  $p_x$  assure, avec  $C$  constante indépendante de  $x$ , la majoration  $d(p_m, p_x) \leq C d(x, F)$  (voisin de  $C d(y, F)$ ): d'après l'équation (2) modifiée, la preuve de l'assertion C) sera achevée.

En effet, d'une part, d'après 1.7 et support de  $\mathcal{U}_m \subset \mathcal{Q}_m^{\mathcal{E}}$  (1.8.4), pour tous les  $y$  assez voisins de  $x$ , la série (1) se réduit à, disons

$$\sum_{m = m_1, \dots, m_k} \quad (k \leq N^* \text{ indépendant de } x),$$

Et d'autre part, prenons pour  $p_x$  l'un des  $k$  points  $p_{m_1}, \dots, p_{m_k}$  (disons

$p_x = p_{m_1}$ ). Comme les quantités  $d(x, F)$ ,  $d(F, Q_{m_j}^\epsilon) \leq d(F, Q_{m_j})$ ,

$\text{diam}(Q_{m_j}) \leq \text{diam}(Q_{m_j}^\epsilon)$  ( $j = 1, \dots, k$ ) sont à peu près proportionnelles, on a

d'après  $x \in Q_{m_j}^\epsilon$  ( $j = 1, \dots, k$ ) et  $p_x = p_{m_1}$  et avec  $C$  convenable indépendant

de  $x$ ,

$$\begin{aligned} d(p_x, p_{m_j}) &\leq d(p_x, x) + d(x, p_{m_j}) \leq \\ &\leq (d(F, Q_{m_1}^\epsilon) + \text{diam}(Q_{m_1}^\epsilon)) + \\ &+ (d(F, Q_{m_j}^\epsilon) + \text{diam}(Q_{m_j}^\epsilon)) \leq C d(x, F). \end{aligned}$$

D) Il existe  $M'$  tel que pour  $x \in \Omega$ ,  $p \in F$  on ait

$$|\mathcal{G}_1 f(x) - f(p)| \leq M' d(x, p).$$

En effet, compte tenu de  $\sum_m \Phi_m(x) = 1$ ,

$$\mathcal{G}_1 f(x) - f(p) = \sum_m f(p_m) \Phi_m(x) - f(p) = \sum_m (f(p_m) - f(p)) \Phi_m(x).$$

Or d'après  $\sum_m \Phi_m = 1$ , on a  $\Phi_m(x) \leq 1$  et même  $= 0$  sauf peut-être pour

les  $m = m_1, \dots, m_h$  ( $h \leq N^*$  comme en C)) tels que  $x \in Q_m^\epsilon$ ; et d'après

$f \in \mathcal{B}_1(F)$  et  $p, p_m \in F$ , on a  $|f(p_m) - f(p)| \leq M_f d(p_m, p)$ ; mais pour chaque

$m_j$  ( $j = 1, \dots, h$ ), on a d'après  $x \in Q_{m_j}^\epsilon$

$$\begin{aligned} d(p_{m_j}, p) &\leq d(p_{m_j}, x) + d(x, p) \leq \\ &\leq (d(p_{m_j}, Q_{m_j}^\epsilon) + \text{diam}(Q_{m_j}^\epsilon)) + d(x, p) \leq \\ &\leq C^{te} d(x, F) + d(x, p) \leq (C^{te} + 1) d(x, p). \end{aligned}$$

E) Sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G}_1 f$  est continue d'après  $f \in \mathcal{B}_1(F)$ , A) et D).

F) Avec  $M'$  assez grand, on a pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathcal{E}_1 f(x) - \mathcal{E}_1 f(y)| \leq M' d(x, y).$$

En effet, on majore le premier membre ainsi :

si  $x$  et  $y \in F$ , par  $M_f d(x, y)$ , car  $f \in \mathcal{B}_1(F)$ ,

si  $x \in F, y \in \Omega$ , en utilisant D),

si  $x, y \in \Omega$  et le segment  $[x, y]$  de  $\mathbb{R}^n$  d'extrémités  $x, y$  ne rencontre pas  $F$ , en utilisant C),

si  $x, y \in \Omega$  mais il existe  $p \in [x, y] \cap F$ , on écrit  $|\mathcal{E}_1 f(x) - \mathcal{E}_1 f(y)| \leq$   
 $\leq |\mathcal{E}_1 f(x) - f(p)| + |f(p) - \mathcal{E}_1 f(y)|$ , et on utilise D) et  $d(x, p) +$   
 $+ d(p, y) = d(x, y)$ .

2.3.3. L'application linéaire  $\mathcal{E}_1 : \mathcal{B}_1(F) \longrightarrow \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$  est continue.

Cela résulte de 2.3.2 B) et d'une majoration de  $M'$  en 2.3.2 F) qu'obtiendront ceux qui auront appliqué la remarque de 2.2.

■ 2.2

2.4 Construction plus simple du prolongement dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $F$  fermé de  $\mathbb{R}$  ( $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}$ ) ; soit  $(]g_j, d_j[)$  la famille dénombrable des composantes connexes de  $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ . Si  $-\infty < g_j < d_j < \infty$ , on prolonge  $f \in \mathcal{B}_1(F)$  par l'unique fonction affine dans cet intervalle qui coïncide avec  $f$  aux extrémités. Si (par exemple)  $g_j = -\infty$ , on peut prendre  $\mathcal{E}_1 f(x) = f(d_j)$  pour  $x < d_j$ .

(En supposant seulement  $f$  continue sur  $F$ , ce procédé donne un prolongement

continu sur  $\mathbb{R}$  : vérifier que l'oscillation en chaque point est nulle).

3.- Le théorème de prolongement de WHITNEY : cas général.

On définira  $\mathcal{B}_k(F)$  qui généralise  $\mathcal{B}_1(F)$  ; le quatrième théorème est l'analogue du troisième. Les espaces fonctionnels où WHITNEY obtient des résultats semblables sont voisins.

3.1 Définition de  $\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$ . Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  appartient à  $\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ) si et seulement si

- ses dérivées  $D_\alpha f$  d'ordre  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$  sont continues,

- il existe  $M$  tel que  $|D_\alpha f| \leq M$  pour  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ , et quand  $|\alpha| = k-1$ ,

$$|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq M d(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

(On peut montrer que  $\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n) = L_k^\infty(\mathbb{R}^n)$  (définition chapitre V, 2.1, 2.2).

3.2 Remarque.-- Cette définition ne s'adapte pas quand on remplace  $\mathbb{R}^n$  par un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , car elle recourt aux dérivations  $D_\alpha$ . Partons du développement de

TAYLOR :

Une fonction  $g$ ,  $k-1$  fois dérivable dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{0 \leq |j| \leq k-1} \frac{1}{j!} D_j g(b) (x-b)^j + R(x, b) = \\ &= P(x, b) + R(x, b) \quad (x, b \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et de même pour  $|j| \leq k-1$ ,

$$\begin{aligned} D_j g(x) &= \sum_{0 \leq |j+h| \leq k-1} \frac{1}{h!} (D_h(D_j g))(b) (x-b)^h + \\ &+ R_j(x, b) = P_j(x, b) + R_j(x, b) \quad (x, b \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Avec ces notations, dire que  $g \in \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$  équivaut à dire qu'il existe  $M$  tel que pour tous  $x, b \in \mathbb{R}^n$

$$|R(x, b)| \leq M(d(x, b))^k$$

et pour  $0 \leq |j| \leq k - 1$

$$|R_j(x, b)| \leq M(d(x, b))^{k-|j|}$$

et  $|D_j g(x)| \leq M$ .

3.3 Définition de  $\mathcal{B}_k(F)$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ). Soit  $F$  un fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

Une fonction  $f$  définie sur  $F$  appartient à  $\mathcal{B}_k(F)$  si et seulement si la famille  $\vec{f}$  de fonctions définies sur  $F$

$$\vec{f} = (f^{(\alpha)})_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} \quad \text{avec} \quad f^{(0)} = f, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

vérifie les deux propriétés suivantes :

Chaque  $f^{(\alpha)}$  est bornée.

(Pour  $0 \leq |j| \leq k - 1$ , posons pour tous  $b, c \in F$

$$f^{(j)}(b) - f^{(j)}(c) = \sum_{0 \leq |j+h| \leq k-1} \frac{1}{h!} f^{(j+h)}(c) (b - c)^h + R_j(b, c) = P_j(b, c) + R_j(b, c)$$

et  $P_0 = P, R_0 = R$ ).

Il existe  $M$  tel que, avec ces notations, pour  $0 \leq |j| \leq k - 1$  et  $b, c \in F$  on ait

$$|R_j(b, c)| \leq M(d(b, c))^{k-|j|}.$$

3.4 Remarques.— L'espace  $B_k(F)$  est normable complet.

Pour  $F = \mathbb{R}^n$ , on a  $f^{(\alpha)} = D_\alpha f$ .

Il est clair que l'identité définissant  $P_j$  conserve un sens pour  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in F$ . On obtient donc pour tout  $c \in F$  un polynome

$$x \mapsto P_j(x, c) = \sum_{0 \leq |j+h| \leq k-1} \frac{1}{h!} \cdot f^{(j+h)}(c) \cdot (x - c)^h;$$

et en dérivant par rapport à  $x$ , pour  $|j+h| \leq k-1$  on a

$$D_j P_h(x, c) = P_{j+h}(x, c).$$

3.5 Lemme.— On a les identités ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b, c \in F$ ,  $0 \leq |j| \leq k-1$ )

$$P_j(x, b) - P_j(x, c) = \sum_{0 \leq |j+h| \leq k-1} \frac{1}{h!} R_{j+h}(b, c) (x - b)^h.$$

(Algèbre élémentaire).

3.6 Quatrième théorème (WHITNEY).— Soit  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ( $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ ).

Il existe une application linéaire continue  $\mathcal{E}_k : \mathcal{B}_k(F) \rightarrow \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$  telle que

pour  $f \in \mathcal{B}_k(F)$ ,  $c \in F$  on ait  $(\mathcal{E}_k f)(c) = f(c)$ .

3.7 Preuve.

3.7.1 Méthode adoptée.— Soit  $\mathcal{J}_1(F)$  le voisinage de  $F$ , ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$

tels que  $\mathcal{J}(x) \leq 1$ , (où  $\mathcal{J}$  est la fonction construite au second théorème (1.8.2),

indéfiniment dérivable sur  $\Omega = \mathcal{J}(F)$ ).

Supposons construit un prolongement  $\mathcal{E}_k$  de  $\mathcal{B}_k(F)$  à  $\mathcal{B}_k(H)$ , où  $H$  est un fermé contenant  $\mathcal{J}_1(F)$ ; on en déduira aussitôt un prolongement  $\mathcal{E}_k$  à  $\mathbb{R}^n$  en

posant



$$(\mathcal{E}_k f)(x) = \begin{cases} (e_k f)(c) = f(c) & \text{pour } c \in F, \\ (e_k f)(x) \varphi(\delta(x)) & \text{pour } x \in \delta_1(F), \\ 0 & \text{pour } x \notin \delta_1(F), \end{cases}$$

où  $\varphi$  est une fonction indéfiniment dérivable définie sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , valant 1 au voisinage de 0, valant 0 sur  $[1, +\infty]$ . Il suffit de voir que :

Il existe un fermé  $H \supset \delta_1(F)$  et une application linéaire continue

$$\mathcal{E}_k : \mathcal{B}_k(F) \longrightarrow \mathcal{B}_k(H) \text{ telle que pour } f \in \mathcal{B}_k(F), c \in F, \mathcal{E}_k f(c) = f(c).$$

### 3.7.2 Formule donnant le prolongement au voisinage de $F$ .

En évaluant des dérivées, nous verrons que

$$(1) \quad \mathcal{E}_k f(x) = \sum_{L_m \leq L} P(x, c_m) \Phi_m(x) \quad (x \in \Omega = \bigcup F)$$

convient, moyennant un choix convenable de  $L$  ; on a posé dans (1) :

$L_m$  = longueur de chaque côté du cube  $Q_m$  ;

$c_m$  = un point de  $F$  vérifiant  $d(c_m, Q_m) = d(F, Q_m)$  ;

$$P(x, c_m) = \sum_{0 \leq |j| \leq k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(c_m) (x - c_m)^j \quad (x \in \mathbb{R}^n) ;$$

$\Phi_m(x) = \varphi_m(x) / \sum_h \varphi_h(x)$  (notation de 1.8.4 et 2.3.1) ; c'est une par-

tition de l'unité associée aux cubes  $Q_m^{\mathcal{E}}$  :  $\sum_m \Phi_m$  vaut 1 sur  $\Omega$ .

On pose comme en 3.3

$$P_h(x, c) = \sum_{0 \leq |j+h| \leq k-1} f^{(j+h)}(c) (x - c)^j / j! \quad (x \in \mathbb{R}^n, c \in F),$$

et pour  $b, c \in F$

$$R_j(b, c) = f^{(j)}(b) - P_j(b, c),$$

en particulier

$$R(b, c) = f(b) - P(b, c).$$

### 3.7.3 Etude de l'expression (1) de 3.7.2.

A)  $\epsilon_k f$  est indéfiniment dérivable dans  $\Omega = ]F,$

car cette série est localement la somme d'un nombre fini de termes indéfiniment dérivables.

B) Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon_k f$  est bornée.

Observer que  $0 \leq \bar{\Phi}_m \leq 1$ , que les degrés et les coefficients des polynômes sont bornés, et que si  $\bar{\Phi}_m(x) \neq 0$  alors  $d(x, c_m) \leq C^{te} \cdot L_m \leq C^{te} \cdot L$ .

C) Plus généralement, chaque dérivée  $D_\alpha \epsilon_k f$  d'ordre  $|\alpha| \leq k - 1$  est bornée au voisinage de  $\delta_1(F)$ .

Dérivons dans  $\Omega$  la série (1) de 3.7.2 et employons la formule de LEIBNITZ

( $\beta + \gamma = \alpha$ ,  $|\beta| = j$ ,  $|\gamma| = k - j$ ) :

$$D_\alpha \epsilon_k f = \sum_{\dots} (D_\alpha P \dots) \bar{\Phi} \dots + \dots + \binom{\alpha}{\beta} \sum_{\dots} (D_\beta P \dots) (D_\gamma \bar{\Phi} \dots) + \dots + \sum_{\dots} P \dots (D_\alpha \bar{\Phi} \dots).$$

Comme en B), on voit que la première série  $\sum_{\dots} (D_\alpha P \dots) \bar{\Phi} \dots$  est une fonction bornée. Montrons que  $\sum_{\dots} (D_\beta P \dots) (D_\gamma \bar{\Phi} \dots)$  est bornée.

(Il est temps de préciser que nous avons choisi  $L$  assez grand pour que, sur un voisinage (relativement à l'espace  $\Omega$ ) de  $\delta_1(F) \cap \Omega$  la série

$\sum_{L_m \leq L} \bar{\Phi}_m$  soit égale à un, donc ait sur ce voisinage toutes ses dérivées

d'ordre  $\geq 1$  nulles).

Pour tous les  $y$  assez voisins de  $x \in \mathfrak{D}_1(F) \cap \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{L_m \leq L} D_\beta P(y, c_m) D_\gamma \bar{\Phi}_m(y) = \\ &= \sum_{L_m \leq L} (D_\beta P(y, c_m) - D_\beta P(y, c_x)) D_\gamma \bar{\Phi}_m(y) = \\ &= \sum_{L_m \leq L} \sum_{0 \leq |\beta + \mu| \leq k-1} \frac{1}{|\mu|} R_{\beta + \mu}(c_m, c_x) (y - c_m)^\lambda D_\gamma \bar{\Phi}_m(y) ; \end{aligned}$$

au second membre,  $c_x$  est l'un des points  $c_m$  dont nous précisons le choix ;

la première égalité résulte de  $\sum_{L_m \leq L} D_\gamma \bar{\Phi}_m(y) = 0$  ; la seconde résulte du lemme d'algèbre 3.5.

Reprenons des arguments de 2.3.C) dans la preuve du troisième théorème (relatif à  $k = 1$ ).

Le premier des trois membres se réduit dans le petit voisinage à une somme d'au plus  $N^*$  termes, ceux relatifs aux indices  $m = m_1, \dots, m_h$  ( $h \leq N^*$ ) pour lesquels le cube  $Q_m^E$  rencontre ce voisinage de  $x$ . On prend à nouveau pour  $c_x$  l'un des  $h$  points  $c_{m_1}, \dots, c_{m_h}$ .

On sait que pour ces indices  $m$ , on a  $d(c_m, c_x) \leq C^{te} \cdot d(x, F)$ , donc, (d'après  $f \in \mathfrak{B}_k(F)$  avec  $M$  comme en 3.3),

$$|R_{\beta + \mu}(c_m, c_x)| \leq C^{te} \cdot M \cdot (d(x, F))^{k - |\beta + \mu|}.$$

De plus, dans ce petit voisinage de  $x$ , et pour ces  $m$

$$|(y - c_m)^\mu| \leq C^{te} \cdot (d(x, F))^{|\mu|}.$$

Enfin, dans les mêmes conditions  $|D_{\gamma} \Phi_m(y)| \leq C^{te} \cdot (d(x, F))^{-|\gamma|}$ .

D) On a pour  $c \in F$ ,  $x \in \Omega = \int F$

$$|\mathcal{E}_k f(x) - P(x, c)| \leq C^{te} \cdot (d(x, F))^k.$$

E) Plus généralement, pour  $c \in F$ ,  $x \in \Omega$ ,  $|j| \leq k - 1$ , on a

$$|D_j \mathcal{E}_k f(x) - P_j(x, c)| \leq C^{te} \cdot (d(x, c))^{k-|j|}.$$

Pour établir la continuité du prolongement  $\mathcal{E}_k f$ , au lieu de comparer  $\mathcal{E}_k f(x) - f(c)$  à  $d(x, c)$  pour  $x$  proche de  $F$  on évalue  $\mathcal{E}_k f(x) - P(x, c)$  ;  
on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k f(x) - P(x, c) &= \sum_{L_m \leq L} (P(x, c_m) - P(x, c)) \Phi_m(x) = \\ &= \sum_{L_m \leq L} \left( \sum_{0 \leq |j| \leq k-1} \frac{1}{j!} R_j(c, c_m) (x - c)^j \right) \Phi_m(x), \end{aligned}$$

d'après le lemme d'algèbre 3.5. Donc la valeur absolue du premier membre est majorée au voisinage de  $x$  par

$$\sum_{m=m_1, \dots, m_h} C^{te} \cdot |c - c_m|^{k-j} |x - c|^j.$$

Mêmes idées pour établir la continuité des dérivées : on évalue en fonction des dérivées l'expression  $D_j \mathcal{E}_k f(x) - P_j(x, c)$ .

### ¶ 3.6

Notons en conclusion que la construction de  $\mathcal{E}_k$  change avec  $k$  : Si  $f \in \mathcal{B}_k(F)$  et  $\rho < k$ , on peut avoir  $\mathcal{E}_\rho f \neq \mathcal{E}_k f$ .

4.- Prolongement à  $\mathbb{R}^{n+1}$  d'une fonction dérivable définie au-dessus du graphe d'une fonction lipschitzienne  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

4.0 Enonçons hâtivement le théorème qui est l'objectif de ce paragraphe.

Soit  $\omega$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  constitué des points situés au-dessus du graphe d'une fonction lipschitzienne définie dans l'hyperplan  $\mathbb{R}^n$ .

Définition (analogue à V.2.1).- L'espace  $L_k^p(\omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k$  entier positif) est constitué des fonctions  $f$  définies dans l'ouvert  $\omega$  dont toutes les dérivées au sens des distributions  $(: \mathcal{D}'(\omega)) \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$  d'ordre  $|\beta| \leq k$  appartiennent à  $L^p(\omega)$ . C'est un espace de BANACH pour la norme

$$\|f\|_{L_k^p(\omega)} = \sum_{|\beta| \leq k} \left\| \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \right\|_{L^p(\omega)}.$$

Nous montrerons qu'il existe un opérateur de prolongement  $\mathcal{E}$  ( $: \mathcal{E}f|_\omega = f$ ) défini sur tous les  $L_k^p(\omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k$  entier positif) appliquant linéairement et continûment  $L_k^p(\omega)$  dans  $L_k^p(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Cet opérateur  $\mathcal{E}$  est le même pour tous les  $p$  et  $k$  : il peut être qualifié d'universel (en contraste avec les  $\mathcal{E}_k$  de WHITNEY, remarque finale du § 3). CALDERON à le premier construit un prolongement  $L_k^p(\omega) \rightarrow L_k^p(\mathbb{R}^{n+1})$  ( $1 < p < \infty$  seulement), mais qui n'était pas universel (Symposium in pure math., volume IV (1961) p. 33-49).

4.1 Données et notations.

Comme précédemment un point  $s$  (ou  $t$ ) de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est noté  $s = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . En identifiant  $x$  et  $(x, 0)$ , on a  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Le demi-espace ouvert  $y > 0$  associé à l'hyperplan  $\mathbb{R}^n$  est noté  $\mathbb{R}_{n+1}^+$ . La distance ordinaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est notée  $d$ .

On fixe une fonction lipschitzienne  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  : il existe  $M_\varphi = M$  tel que pour tous  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq x'$

$$(1) \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| < M d(x, x') \quad (\text{inégalité stricte}).$$

On note  $G_\varphi$  le graphe (inclus dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) de  $\varphi$ .

L'ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est constitué des points  $(x, y)$  vérifiant  $y > \varphi(x)$  [nous dirons qu'ils sont "situés au-dessus du graphe de  $\varphi$ "] : La frontière de  $\omega$  est  $G_\varphi$ .

On construit le cône  $\Gamma$  (à deux nappes) de sommet l'origine

(2)  $\Gamma =$  ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  vérifiant  $|y| \geq M|x|$  (avec  $|x| =$  norme de vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ ).

La nappe supérieure de  $\Gamma$  est notée  $\Gamma^+$  :

$$\Gamma^+ = \Gamma \cap \mathbb{R}_{n+1}^+ ;$$

c'est un cône convexe épointé ; la nappe inférieure  $\Gamma^-$  est son opposée :

$\Gamma^- = -\Gamma^+$  ; enfin pour tout  $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on introduit les translatés de ces ensembles

$$\Gamma(s) = s + \Gamma, \Gamma^+(s) = s + \Gamma^+, \Gamma^-(s) = s + \Gamma^- .$$

4.2 Constructions auxiliaires : la "distance régularisée"  $\delta^*$  et la "fonction de poids"  $\psi: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

4.2.1. Le fait que  $\psi$  est lipschitzienne est fidèlement reflété par une interprétation géométrique fondamentale :

Pour tout point  $s = (x, \psi(x))$  situé sur le graphe  $G_\psi$  de  $\psi$ , les translates  $\Gamma^+(s) = s + \Gamma^+$  et  $\Gamma^-(s) = s + \Gamma^-$  de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont inclus respectivement dans  $\omega$  et dans  $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega$ . (notations de 4.1).

4.2.2 Lemme.— Posons

$$F = \omega \cup G_\psi, \quad \Omega = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F,$$

et reprenons la distance régularisée  $\delta$  associée au fermé  $F$  (de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ici) que nous avons construite au théorème 1.8.1. Pour une constante assez grande, la distance régularisée  $\delta^*$  proportionnelle à  $\delta$

$$(1) \quad \delta^* = c^{te} \cdot \delta$$

vérifie dans  $\Omega$

$$(2) \quad \delta^*((x,y)) > 2(\psi(x)-y)$$

(ce second membre est strictement positif par définition de  $\Omega$ ).

De plus, pour tout  $\lambda \geq 1$ , pour tout  $(x,y) \in \Omega$ , le point

$$(3) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{x,y,\lambda} = (x, y + \lambda \delta^*(x,y))$$

appartient à  $\omega$ .

Enfin on a (avec  $A'$  indépendant de  $\lambda$ )

$$\left[ (4) \quad A'(\varphi(x)-y) \leq d(\Omega, \mathfrak{C}_{x,y,\lambda}) \leq (2t-1)(\varphi(x)-y) . \right.$$

Preuve.— Soit  $(x,y) \in \Omega$ , autrement dit  $\varphi(x) > y$ . Notons

$$(5) \quad s = (x, \varphi(x))$$

le point de  $G_\varphi$  situé au-dessus de  $(x,y)$ . L'interprétation géométrique 4.2.1

donne (voir figure supérieure page VI.27)

$$(x,y) \in \Gamma^-(s) \subset \Omega = \int F, \quad \text{donc}$$

$$(6) \quad d((x,y), \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma^-(s)) \leq d((x,y), F) .$$

Mais le premier membre de (6) n'est autre que la distance de  $(x,y)$  à la fron-

trière de  $\Gamma^-(s)$  ; il est donc proportionnel à  $\varphi(x) - y$  (il vaut exactement

avec  $M$  défini en 4.1(1)

$$(\varphi(x)-y) / \sqrt{1 + \frac{1}{M^2}} .$$

Or la distance régularisée  $\mathfrak{D}$  vérifie une inégalité du type

$$\Lambda d((x,y), F) \leq \mathfrak{D}((x,y)) . (1.8.1) .$$

D'où l'inégalité (2) de 4.2.2 avec une constante assez grande dans l'égalité

(1) précédente.

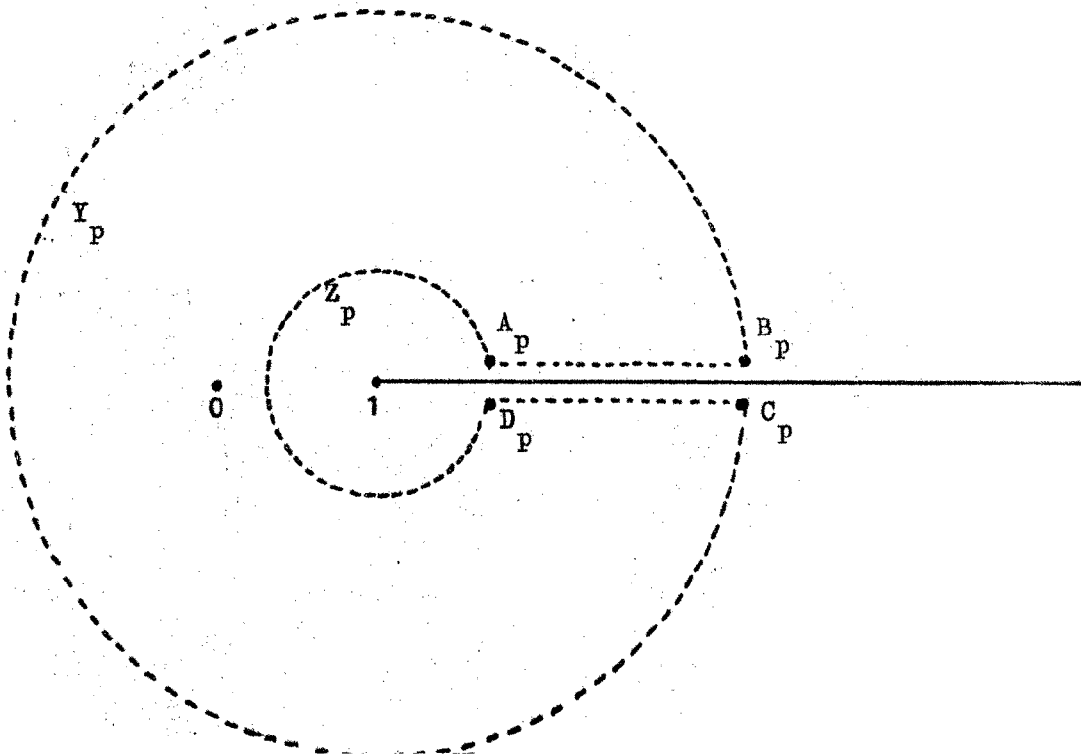
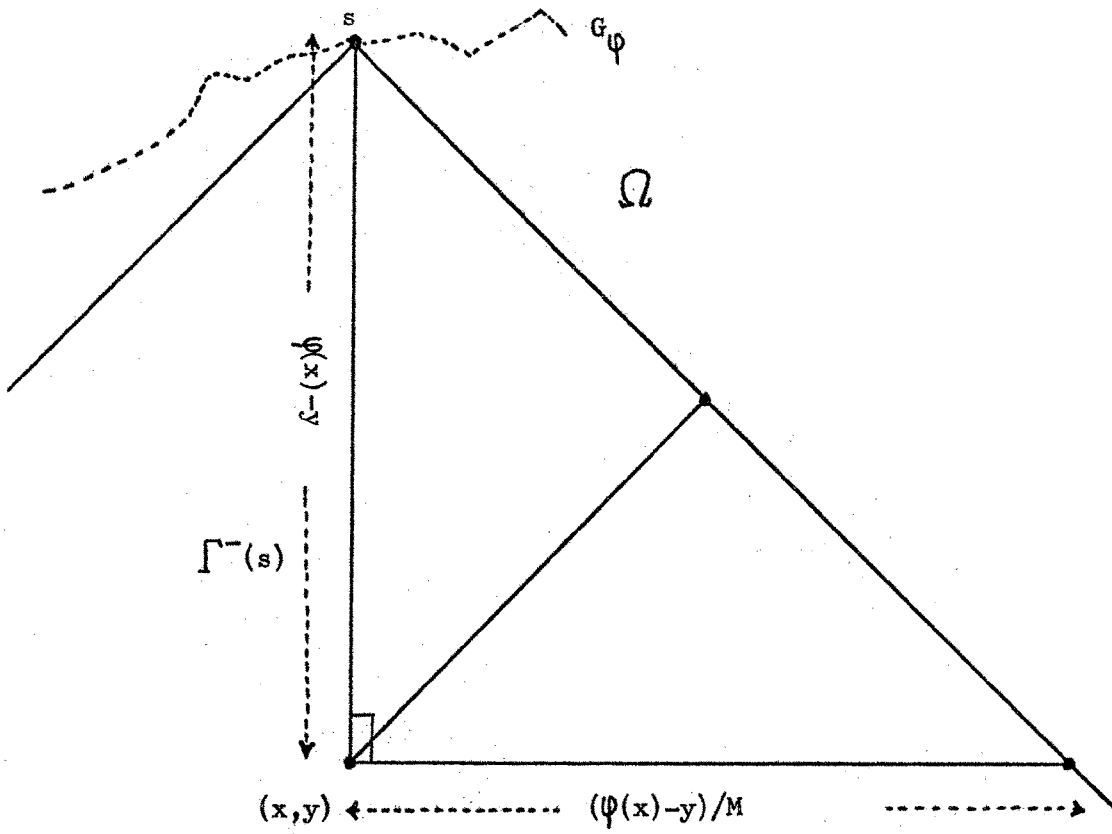
De plus, comparons la dernière coordonnée des points  $\mathfrak{C}$  et  $s$  (notations 4.2.2 (3) et 4.2.2 (5)). D'après  $\lambda \geq 1$  et 4.2.2 (2) on a

$$(7) \quad y + \lambda \mathfrak{D}^*((x,y)) > y + 2(\varphi(x)-y) = \varphi(x) + (\varphi(x)-y) > \varphi(x) .$$

L'inégalité entre les membre extrêmes donne  $\mathfrak{C} \in \omega$ .

Enfin 4.2.2 (4) a lieu car



$\omega$ 

$$(2\lambda-1)(\varphi(x)-y) \geq d(\mathcal{Z}, s) \geq d(\mathcal{Z}, \Omega) \geq$$

$$\begin{aligned} d(\mathcal{Z}, \int \Gamma^+(s)) &\geq d((x, \varphi(x) + (\varphi(x) - y)), \int \Gamma^+(s)) = \\ &= (\varphi(x) - y) / \sqrt{1 + \frac{1}{M^2}} \end{aligned}$$

d'après successivement : (3), (5), (2), et  $s \in$  frontière de  $\Omega$ ; puis  $\zeta \in \Gamma^+(s)$  et l'inégalité entre le premier et le troisième membre de (7); enfin parce que l'avant-dernier membre est égal au premier membre de (6).

#### 4.2.2

4.2.3 Lemme (BEURLING, communication orale).— Il existe une fonction réelle conti-

nue, définie sur  $[1, +\infty[$ , telle que

(i) pour  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\psi(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-k})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) (décroissance rapide),

(ii)  $\int_1^{\infty} \psi(\lambda) d\lambda = 1$ ,

(iii)  $\int_1^{\infty} \lambda^k \psi(\lambda) d\lambda = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Preuve.— Soient  $\alpha, \beta, \theta$  trois constantes satisfaisant aux conditions

$$(1) \begin{cases} 0 < \alpha < 1/4, & \theta = \exp(2\pi i \alpha), \\ |\beta| = 1, & \Re \beta > 0, \quad \Re(\theta\beta) > 0, \end{cases}$$

(d'où  $\inf_{0 \leq \alpha' < \alpha} \Re(\beta \exp(2\pi i \alpha')) > 0$ ).

Introduisons deux fonctions  $f, g$  définie dans l'ouvert  $\mathbb{T}$ :

$\mathbb{T} =$  le plan complexe privé de l'intervalle  $[1, +\infty[$  situé sur l'axe réel.

Soit  $f$  la fonction holomorphe dans  $\mathbb{T}$ .

$$(2) f(z) = \exp(-\beta(z-1)^\alpha)$$

branche déterminée par la condition

$$\lim_{\substack{\lambda+i\mu \in \mathbb{T}, \lambda > 1, \\ \mu \text{ positif}, \mu \rightarrow 0}} f(\lambda+i\mu) = \exp(-\beta(\lambda-1)^\alpha) ;$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{\lambda+i\mu \in \mathbb{T}, \lambda > 1, \\ \mu \text{ négatif}, \mu \rightarrow 0}} f(\lambda+i\mu) = \exp(-\beta\theta(\lambda-1)^\alpha).$$

Soit  $g$  la fonction méromorphe dans  $\mathbb{T}$

$$(3) g(z) = \frac{1}{z} f(z) ;$$

dans  $\mathbb{T}$ ,  $0$  est son seul pôle, et il est simple.

D'après (1), on a pour  $|z|$  grand,  $z \in \mathbb{T}$

$$(4) |z^m g(z)| \leq C \cdot \exp(-c_m |z|) \quad (m = 0, 1, \dots, c_m > 0)$$

Le contour positivement orienté (voir figure inférieure page VI.27)

$\gamma_p = \bigcup_p \{A_p B_p, B_p Y_p, Y_p C_p, C_p D_p, D_p Z_p, Z_p A_p\}$  est constitué de deux parties rectilignes  $A_p B_p$  et  $D_p C_p$  soudées au segment disons  $[1, p+1]$  de l'axe réel, et de deux parties curvilignes  $B_p Y_p C_p$  et  $D_p Z_p A_p$  soudées l'une à un grand cercle de rayon  $R_p$  ( $= p$  disons) et l'autre à un petit cercle de rayon  $r_p$  ( $= 1/(p+1)$  disons) centrés au point  $1$  de l'axe réel.

Quand  $r_p \rightarrow 0$ , l'intégrale étendue au petit cercle de chaque fonction  $z^m g(z)$  tend vers zéro, et de même d'après (4) pour l'intégrale étendue au grand cercle quand  $R_p \rightarrow \infty$ . Donc chaque  $\int_{\gamma_p} \dots dz$  tend vers une limite, quand

$p \rightarrow \infty$ , limite notée  $\int_{\gamma_\infty} \dots dz$ .

Or l'origine est le seul pôle de  $g$ , et il est simple. Donc

$$(5) \int_{\gamma_\infty} g(z) dz = 2\pi i f(0) \neq 0,$$

et par contre

$$(6) \int_{\gamma_\infty} g(z) z^m dz = 0 \quad (m = 1, 2, \dots);$$

et de plus en posant

$$(7) U(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (\exp(-\beta(\lambda-1)^\alpha) - \exp(-\beta^\theta(\lambda-1)^\alpha))$$

les premiers membres de (5) et (6) valent respectivement

$$\int_1^\infty U(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad \int_1^\infty U(\lambda) \lambda^m d\lambda.$$

Donc, à une constante  $> 0$  ou  $< 0$  près, on peut adopter  $\psi = C^{\text{te}} \Re U$  dans

4.2.4, sauf quand le second membre de (5) est imaginaire pur, auquel cas

$C^{\text{te}} \Im U = \psi$  convient.

#### 4.2.4.

4.3 Cinquième théorème.—(Les notations  $\omega$ ,  $L_k^p(\omega)$ ,  $\delta^*$ ,  $\psi$  ont été introduites précédemment : 4.1, 4.0, 4.2.2, 4.2.4).

Soit  $f \in L_k^p(\omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k$  entier positif).

En posant  $\mathfrak{E}f|_\omega = f$ , et pour  $(x, y) \notin \bar{\omega}$

$$(1) \mathfrak{E}f(x, y) = \int_1^\infty f(x, y + \lambda \delta^*(x, y)) \psi(\lambda) d\lambda,$$

on définit un opérateur de prolongement  $\mathfrak{E}$  qui est une application linéaire continue de  $L_k^p(\omega)$  dans  $L_k^p(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Remarques.— La valeur au point  $(x,y) \notin \bar{\omega}$  de  $\mathcal{E}f$  ne dépend que des valeurs de  $f$  sur la demi-droite située au-dessus du point  $(x, \varphi(x)) \in G_\varphi$  : on s'assure avant tout que le point  $(x, y + \lambda \delta^*(x,y))$  appartient bien à  $\omega$  d'après le lemme 4.2.2.

On pourrait majorer la  $L_k^p$ -norme de l'opérateur  $\mathcal{E}$  par une expression dépendant de  $p$ ,  $k$  et d'autres données, mais ne dépendant de  $\varphi$  que par l'intermédiaire de son "coefficient de LIPSCHITZ"  $M$  (4.1.(1)).

Preuve de ce théorème en 4.6.

4.4 Au lieu d'étudier directement l'expression 4.3 (1), remplaçons  $f$  par des régularisées  $f_\varepsilon$  ayant les propriétés ci-dessous.

Lemme.— Soit  $f \in L_k^p(\omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). Il existe une famille de fonctions  $f_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) définies dans des ouverts  $\omega_\varepsilon$  qui sont des voisinages de  $\bar{\omega}$ , telles que

(i) dans  $\omega_\varepsilon$ ,  $f_\varepsilon$  est indéfiniment dérivable ;

(ii) dans  $\omega_\varepsilon$ ,  $f_\varepsilon$  et chacune de ses dérivées sont des fonctions bornées ;

(iii) la  $L_k^p(\omega)$ -norme de  $f_\varepsilon|_\omega$  est  $\leq \|f\|_{L_k^p(\omega)}$  ;

(iv) si  $p < \infty$ , alors  $f_\varepsilon|_\omega$  tend en norme  $L_k^p(\omega)$  vers  $f$  ; si  $p = \infty$ ,

alors il y a convergence au sens des distributions de  $\omega$ .

Preuve.— Soit  $\mathcal{G}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont l'adhérence compacte est incluse dans

l'intérieur du cône  $\Gamma^+$  introduit en 4.1. Soit  $h$  une fonction positive indéfi-

niment dérivable à support inclus dans  $\mathcal{O}$  ( $h$  n'est donc pas "équilibrée autour de l'origine", mais "au-dessus"), avec  $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(s) ds = 1$ . On note  $h_\epsilon(s) = h(s/\epsilon)\epsilon^{-n-1}$ . Et on prend (non seulement si  $s \in \omega$ , mais aussi si  $s + \epsilon \mathcal{O} \subset \omega$ )

$$f_\epsilon(s) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(s+t) h_\epsilon(t) dt.$$

4.5 Lemme.- (version faible de 4.3). Soit  $\gamma$  une fonction bornée définie sur un ouvert  $\omega'$  contenant  $\bar{\omega} = \omega \cup G_\varphi$ , indéfiniment dérivable sur  $\omega'$ , et chacune de ses dérivées étant bornée sur  $\omega'$ . Posons

$$\begin{cases} g(s) = \gamma(s) & \text{pour } s \in \bar{\omega}, \\ g(x,y) = \int_1^\infty \gamma(x, y + \lambda \delta^*(x,y)) \psi(\lambda) d\lambda & \text{pour } (x,y) \notin \bar{\omega}. \end{cases}$$

Alors  $g$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Preuve.- A) Dans  $\Omega = \bar{\omega}$ ,  $g$  est indéfiniment dérivable. En effet (lemme 4.2.2),

pour les  $(x,y)$  voisin de  $(x^0, y^0) \in \Omega$ , les points  $(x, y + \lambda t \delta^*(x,y))$

( $\lambda \geq 1$ ) restent assez loin de la frontière  $G_\varphi$  et dépendent différentiablement

de  $(x,y)$ . On dérive sous le signe  $\int_1^\infty \dots d\lambda$ .

B) Sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $g$  est continue. D'après A), il suffit d'étudier le cas où

$(x,y) \in \bar{\omega}$  tend vers  $(x^0, \varphi(x^0)) \in G_\varphi$ . Grâce au poids  $\psi$  on passe à la limite sous  $\int_1^\infty \dots d\lambda$  d'après par exemple le théorème de convergence dominée de LEBESGUE.

C) Continuité des dérivées premières de  $g$ . Par exemple celle de  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ . Posons

pour alléger  $g_x = \frac{\partial g}{\partial x_1}$ ,  $\gamma_x = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}$ , ..., et (comme en 4.2.2)

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{x.v.} = (x, y + \lambda \delta^*(x,y))$ .

On a pour  $(x,y) \in \int \bar{\omega}$  qu'on fera tendre vers  $(x^0, \varphi(x^0)) \in G_\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x,y) &= g_x(x,y) = \\ &= \int_1^\infty \gamma_x(\zeta) \psi(\lambda) d\lambda + \int_1^\infty \gamma_y(\zeta) \lambda \delta_x^*(x,y) \psi(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers

$$\int_1^\infty \gamma_x(x^0, \varphi(x^0)) \psi(\lambda) d\lambda = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x^0, \varphi(x^0)) \quad (4.2.3).$$

La seconde fonction à intégrer est dominée par

$$\|\delta_x^*\|_{L^\infty(\int \bar{\omega})} |\gamma_y(\zeta) \lambda \psi(\lambda)|.$$

(La fonction  $\delta_x^*$  est bien bornée. Plus généralement, étant proportionnelle à  $\delta$ ,

$\delta^*$  vérifie pour chaque dérivée  $D_\alpha$  d'ordre  $|\alpha|$  des inégalités du type (1.8.1) :

$$|D_\alpha \delta^*(s)| \leq C_\alpha (d(s,\omega))^{1-|\alpha|} \quad (s \notin \bar{\omega}).$$

On peut passer à la limite (convergence dominée) sous  $\int_1^\infty \dots d\lambda$ , donc  $|\int_1^\infty \dots d\lambda|$

tend vers

$$|\int_1^\infty \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x^0, \varphi(x^0)) \lambda \psi(\lambda) d\lambda| = 0 \text{ d'après 4.2.3.}$$

D) Continuité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  des dérivées d'ordre supérieur de  $g$ . Par exemple

pour  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ . On pose pour alléger  $g_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}$ , ...,  $\gamma_{yy} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}$ , ...,  $\zeta$  comme en

C). Ainsi  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x,y) = g_{xx}(x,y) =$

$$= \int_1^\infty \gamma_{xx}(\zeta) \psi(\lambda) d\lambda + \dots + \int_1^\infty \gamma_{yx}(\zeta) \lambda \delta_x^* \psi(\lambda) d\lambda + \dots + \int_1^\infty \gamma_y(\zeta) \lambda \delta_{xx}^*(x,y) \psi(\lambda) d\lambda.$$

La première de ces intégrales tend vers  $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2}(x^0, \varphi(x^0))$ . Montrons que les autres tendent vers zéro.

Dans la dernière intégrale (les précédentes se traitent de manière analogue : plus on y aura dérivé  $\gamma$ , moins on aura dérivé  $\delta^*$ ), reportons le développement de TAYLOR valable dès que  $(x,y)$  appartient à l'ouvert  $\omega'$  de l'énoncé

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y + \lambda \delta^*(x,y)) = \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x,y) + \lambda \delta^*(x,y) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}(x,y) + \mathcal{O}((\lambda \delta^*(x,y))^2)$$

où  $\mathcal{O}$  est "uniforme" quand  $(x,y)$  varie car les dérivées d'ordre 3 de  $\gamma$  sont bornées.

En vertu de  $\int_1^\infty \lambda \psi(\lambda) d\lambda = 0$  et  $\int_1^\infty \lambda^2 \psi(\lambda) d\lambda = 0$  (4.2.3), ce report crée peu d'ennui quand aux deux premiers termes du développement. Enfin le report de  $\mathcal{O}(\lambda^2 \delta^{*2})$  donne une majoration de la valeur absolue de l'intégrale correspondante par un

$$\mathcal{O}\left(\int_1^\infty \lambda^2 \delta^{*2} |\delta_{xx}^*| |\psi(\lambda)| d\lambda\right)$$

donc (d'après l'inégalité du type  $|\delta_{xx}^*| \leq C^{te} / d(x,y) \leq C^{te} / \delta^*(x,y)$  signalée en C)) par un  $\mathcal{O}(\delta^*)$ , qui tend bien vers zéro quand  $(x,y)$  tend vers  $(x^0, \varphi(x^0)) \in G_\varphi$ .

#### ■ 4.5

#### 4.6 Preuve du théorème 4.3.-

4.6.1. Schéma de la démonstration.- Rapprochons les deux lemmes 4.4 et 4.5. Il s'agit essentiellement de voir que les prolongements (donnés par les formules de 4.5) des fonctions différentiables (définies sur des ouverts voisinages de  $\bar{\omega}$ ) qui approximent (comme en 4.4) la donnée  $f$  tendent vers le prolongement (donné par les formules de 4.3) de  $f$ . Cette convergence sera établie à l'étape 4.6.3.



Un préparatif pour étayer ce passage à la limite consiste à comparer la  $L_k^p(\mathbb{R}^{n+1})$ -norme du prolongement (construit en 4.5) d'une bonne fonction avec la  $L_k^p(\omega)$ -norme de cette bonne fonction différentiable. Tel est l'objet de l'étape initiale. (On aura alors fait la plus grande partie du travail. On appliquera 4.4 en faisant tendre la bonne fonction vers  $f$ ).

Dans cette première étape, on examine seulement une situation typique : On se limite à  $k = 2$  ; de plus, parmi les termes du second membre donnant la  $L_2^p$ -norme d'une fonction  $w$

$$(1) \quad \|w\|_{L_2^p} = \sum_{|\beta| \leq 2} \|D_\beta w\|_{L^2}$$

figure le terme avec  $D_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ . Nous concentrerons nos soins sur ce terme-ci, pour  $w = \mathfrak{E} f_\varepsilon$  ( $\mathfrak{E}$  construit en 4.5 pour  $f_\varepsilon$  figurant en 4.4).

Cette dérivée seconde en un point  $(x,y) \notin \bar{\omega}$  du prolongement a été exprimée en fonction des données au début de l'étape D) de la démonstration de 4.5. Reconnaissons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x,y) &= g_{xx}(x,y) = \\ &= \int_1^\infty \gamma_{xx}(\mathfrak{E}) \psi(t) d\lambda + \dots + \int_1^\infty \gamma_{yx}(\mathfrak{E}) \lambda \delta_x^*(x,y) \psi(\lambda) d\lambda + \\ &+ \dots + \int_1^\infty \gamma_y(\mathfrak{E}) \lambda \delta_{xx}^*(x,y) \psi(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Parmi les  $\int_1^\infty$  du dernier membre, nous étudierons la première (étape 4.6.2.2) et

de même la dernière  $\int_1^\infty$  (: étape 4.6.2.3). Comme il s'agit d'intégrer dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  le carré de cette dérivée seconde, on fera l'opération analogue pour cette  $\int_1^\infty$ .

Cette première étape aura montré la continuité  $L_2^p(\omega) \longrightarrow L_2^p(\mathbb{R}^n)$  de l'opérateur  $\mathfrak{G}$ , du moins quand on se restreint au sous-espace partout dense des bonnes fonctions.

#### 4.6.2 Première étape.--

4.6.2.1 Données.-- Soit  $v$  une fonction indéfiniment dérivable définie sur un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\bar{\omega}$ , bornée ainsi que chacune de ses dérivées ; on suppose de plus que ses dérivées d'ordre  $\leq 2$  appartiennent à  $L^p(\omega)$ . Soit

$$(3) \quad w = \mathfrak{G}v$$

le prolongement de  $v$  construit comme en 4.5.

On peut conjoindre les résultats de l'étude suivante et ceux de 4.5 et 4.4 en posant respectivement dans les premiers, seconds et troisièmes membres suivants

$$(4) \quad \left[ \begin{array}{l} v = \mathcal{V} = f_\epsilon ; \\ \mathcal{V} = \omega' = \omega_\epsilon ; \\ w = g = \mathfrak{G}f_\epsilon . \end{array} \right.$$

En particulier, (2) donne pour  $(x,y) \notin \bar{\omega}$

$$(5) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x,y) = w_{xx}(x,y) = \\ = \int_1^\infty v_{xx}(\zeta) \psi(\lambda) d\lambda + \dots + \int_1^\infty v_y(\zeta) \lambda \delta_{xx}^*(x,y) \psi(\lambda) d\lambda . \end{array} \right.$$

4.6.2.2 Etude de la première intégrale de (5) :

$$(6) \quad \int_1^{\infty} v_{xx}(\zeta) \psi(\lambda) d\lambda.$$

Puisque  $|\psi(\lambda)| \leq (\text{constante})/\lambda^2$  pour  $\lambda \geq 1$  (lemme 4.2.3), on a

$$| (6) | \leq C^{te} \int_1^{\infty} |v_{xx}(\zeta) \frac{d\lambda}{\lambda^2}|.$$

Fixons provisoirement  $x$  ; on peut alors supposer aussi que  $\psi(x) = 0$  d'où

$$(7) \quad c_M |y| \geq \delta^*(x,y) > -2y > 0,$$

où la constante  $c_M$  résulte de ce que,  $\psi$  étant lipschitzienne (relations 4.1 (1))

les expressions  $|y|$ ,  $d((x,y),\omega)$  et  $\delta^*(x,y)$  sont ici à peu près proportion-

nelles. Ecrivons (pour expliciter simplement l'intégrale  $\int_1^{\infty} v_{xx}(\zeta) \frac{d\lambda}{\lambda^2}$  mise en

jeu pour majorer  $| (6) |$

$$(8) \quad H(y) = \int_1^{\infty} h(y + \lambda \delta(y)) \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (y < 0)$$

où on a posé (rappel :  $\zeta = (x, y + \lambda \delta^*(x,y))$ )

$$h = v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \quad \text{et} \quad \delta(y) = \delta^*(x,y).$$

Montrons que la transformation intégrale (8) est  $L^p(\mathbb{R}^+) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^-)$  -continue,

ou encore, qu'avec  $A$  convenable

$$(9) \quad \left( \int_{-\infty}^0 |H(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq A \left( \int_0^{\infty} |h(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Dans l'intégrale de (8), le changement de variable

$$\Lambda = y + \lambda \delta(y)$$

donne  $d\Lambda = \delta(y)d\lambda$  et  $\lambda = \frac{\Lambda-y}{\delta(y)}$  d'où

$$H(y) = \delta(y) \int_{y+\delta(y)}^{\infty} \frac{h(\Lambda)}{(\Lambda-y)^2} d\Lambda.$$

Mais les inégalités (7) montrent que  $\delta(y) \leq c_M |y|$ , que  $\frac{1}{(\Lambda-y)^2} \leq \frac{1}{\Lambda^2}$ , et que l'intervalle d'intégration  $[y + \delta(y), +\infty[$  est inclus dans  $[|y|, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} |H(y)| &\leq c_M \int_{|y|}^{\infty} \frac{|h(\Lambda)|}{\Lambda^2} d\Lambda = \\ &= c_M \int_0^{\infty} K(|y|, \Lambda) |h(\Lambda)| d\Lambda \end{aligned}$$

avec un noyau  $K$  positivement homogène de degré  $-1$ . Puisque

$$\int_0^{\infty} K(1, \Lambda) \Lambda^{-1/p} d\Lambda = \int_1^{\infty} \Lambda^{-2} \cdot \Lambda^{-1/p} d\Lambda < \infty,$$

le lemme de SCHUR V.6.2 donne (9).

4.6.2.3. Etude de la dernière intégrale de (5), à savoir

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \int_1^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} (x, y + \lambda \delta^*(x, y)) \frac{\partial^2 \delta^*}{\partial x_1^2} (x, y) \psi(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_1^{\infty} [v_y(\xi) - v_y(x, y)] \lambda \delta_{xx}^* (x, y) \psi(\lambda) d\lambda = \\ &= \delta_{xx}^* (x, y) \int_1^{\infty} \left[ \int_{\eta=0}^{\lambda \delta^*(x, y)} v_{yy} (x, y + \eta) d\eta \right] \lambda^2 \psi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= \delta_{xx}^* (x, y) \int_1^{\infty} \left[ \int_{\eta=0}^{|\lambda| y} v_{yy} (x, y + \eta) d\eta \right] \frac{\lambda |y|}{\delta^*(x, y)} \psi \left( \frac{\lambda |y|}{\delta^*(x, y)} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

En effet, on peut introduire au troisième membre le nouveau terme entre crochets

en vertu de  $\int_1^{\infty} \lambda \psi(\lambda) d\lambda = 0$  (4.2.3), et la dernière égalité résulte de la loi de calcul  $\int_1^{\infty} \Phi(\lambda \mu_1) \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_1^{\infty} \Phi(\lambda \mu_2) \frac{d\lambda}{\lambda}$ .

Or avec  $x$  fixé comme en 4.6.2.2, (7) donne d'après 1.8.1  $\left| \frac{\partial^2 \delta^*}{\partial x_1^2} (x, y) \right| \leq c^{te} / |y|$ ; et  $|\psi(\lambda)| \leq c^{te} / \lambda^2$  pour  $\lambda \geq 1$ . (lemme 4.2.1).

Donc la valeur absolue de l'intégrale  $L(x, y)$  est majorée par

$$c^{te} \int_1^\infty \left[ \int_0^{\lambda|y|} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (x, y + \eta) d\eta \right] \frac{\lambda}{|y|} \cdot \frac{1}{\lambda^2} d\lambda.$$

Ceci permet d'appliquer le lemme de SCHUR ; d'où une inégalité analogue à (9):

$$(10) \quad \left( \int_{-\infty}^0 |L(x, y)|^p dy \right)^{1/p} \leq A' \left( \int_0^\infty |v_{yy} (x, y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

4.6.2.4 L'étude de ces deux intégrales figurant dans (5) est à peu près typique :

plus on dérive  $v$ , moins on dérive  $\delta^*$ . Mais dans les autres  $\int_1^\infty \dots d\lambda$  il faut utiliser des développements limités de  $v(x, y + \lambda \delta^*(x, y))$  à partir du point  $(x, y) \in \mathcal{V}$  et selon les puissances de  $\lambda \delta^*$ .

5.6.2.5 En faisant maintenant varier non seulement  $y$ , mais aussi  $x$  (et  $\psi(x)$ ), le prolongement  $w = \mathcal{E}v$  vérifie d'après (9), (10) et des inégalités analogues

$$\|w\|_{L_2^p(\bar{\omega})} \leq c^{te} \|v\|_{L_2^p(\omega)}$$

Mais comme le prolongement  $w$  est différentiable dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  (4.5), on a aussi

$$\|w\|_{L_2^p(\mathbb{R}^n)} \leq A'' \|v\|_{L_2^p(\omega)}.$$

On vérifie que cet  $A''$  dépend de  $p$ ,  $k$  ( $= 2$  ici),  $\psi$ ,  $n$ ,  $M, \dots$ , mais est indépendant du voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{\omega}$ .

4.6.3 Passage à la limite.— Cette conclusion sur le prolongement s'applique à

$w = \mathcal{E}_\epsilon f$  (notation de 4.5). D'après 4.4 elle s'étend au prolongement  $f \mapsto \mathcal{E}f$  des  $L_k^p$  pour  $1 \leq p < \infty$ , en faisant  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Pour  $p = \infty$ , on s'appuiera sur le fait que les  $f_\epsilon$  et leurs dérivées  $D_\alpha f_\epsilon$  d'ordre  $|\alpha| \leq k$  convergent pour la topologie faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ; donc on peut trouver une suite de paramètres  $\epsilon_m$  tendant vers 0 avec  $1/m$  telle que pour ces  $\alpha$  et tout  $g \in L^1$ ,  $(D_\alpha f_{\epsilon_m})g \, ds \rightarrow \int (D_\alpha f)g \, ds$ .

■ 4.3

#### 4.7 Remarques.-

On peut généraliser ce théorème en remplaçant  $\omega$  par un domaine de  $\mathbb{R}^{n+1}$  à frontière "localement" lipschitzienne (en raisonnant avec des bonnes partitions de l'unité, et en partant ... d'une bonne définition de "localement").

Par contre, on ne peut remplacer  $\omega$  par l'ouvert  $\omega(\theta)$  construit à partir d'une fonction  $\theta$  vérifiant au lieu de 4.2 (1)

$$|\theta(x) - \theta(x')| \leq M (d(x, x'))^\alpha \quad (\alpha < 1 \text{ strictement}).$$

Contre-exemple avec  $n = 2$ ,  $y = \theta(x) = |x|^\alpha$  : On peut trouver  $\beta > 0$  tel que, en posant  $f(x, y) = y^{-\beta}$  au-dessus du graphe mais près de l'origine, on ait  $f \in L_1^{2+\epsilon}(\omega(\theta))$ . (C'est possible dès que  $\frac{1}{\alpha} + 2(\beta - 1) > -1$ ). Or toute fonction de  $L_1^{2+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$  est bornée d'après un théorème de SOBOLEV (V.2.3).

■ 4.3

Indications bibliographiques pour le chapitre VI.

H.WHITNEY : Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets ; Trans. Amer. Math. Soc. tome 36 (1934) p. 63-89.

A.CALDERÓN : Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions ; Symposium in pure math., volume IV (1961) p. 33-49, (éd. Amer. Math. Soc.).