

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

2.5
3.3

n° 80

Approximation polynômiale pondérée dans
un domaine d'holomorphie de \mathbb{C}^n

Nessim Sibony

Approximation pondérée sur une
sous-variété totalement réelle de \mathbb{C}^n

J.-P. Ferrier et N. Sibony

Analyse Harmonique d'Orsay

1974

25.165

APPROXIMATION POLYNÔMIALE PONDEREE DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE DE \mathbb{C}^n

par Nessim Sibony

1. INTRODUCTION. Soit Ω un domaine d'holomorphie dans \mathbb{C}^n et soit w une fonction s. c. i. définie dans Ω , à valeurs réelles strictement positives. $H^p(\Omega, w)$ désignera l'espace des fonctions f , holomorphes dans Ω , telles que

$\int |f|^p(z) w(z) d\lambda(z) < +\infty$, λ étant la mesure de Lebesgue de Ω et $1 \leq p < \infty$. On munit cet espace de la norme $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p(z) w(z) d\lambda(z) \right)^{1/p}$. $H^\infty(\Omega, w)$ désignera l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $\sup_{z \in \Omega} w(z) |f(z)|$ tend vers zéro quand z tend vers le bord de Ω , on le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} w(z) |f(z)|.$$

Nous noterons ces espaces $H^p(w)$, $1 \leq p \leq +\infty$, lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$. Ce sont des espaces de Banach.

On se pose le problème de l'approximation des fonctions de $H^p(\Omega, w)$, $1 \leq p \leq +\infty$, par des fonctions holomorphes dans des ouverts contenant strictement le domaine Ω ou bien par des fonctions holomorphes à croissance donnée, par exemple des polynômes.

Un tel problème a été étudié par B. Taylor dans [12] lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$. Il a donné une condition suffisante pour approcher les fonctions de $H^2(w)$, par des fonctions à croissance donnée, mais pour une topologie plus faible que celle de $H^2(w)$; c'est celle

d'un espace $H^2(w_1)$, $w_1 < w$.

Le problème d'approximation pour des algèbres bornologiques de fonctions holomorphes a été étudié par J.-P. Ferrier [4], [5], qui utilise pour cela le calcul symbolique de Waelbroeck.

Nous avons besoin de quelques notations pour introduire ce problème.

Etant donné un ouvert Ω de \mathbb{C}^n , nous noterons $d_\Omega(z)$ la distance au complémentaire de Ω soit: $d_\Omega(z) = \inf_{z' \notin \Omega} |z - z'|$. Posons $\delta_\Omega(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$ où $|z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ et $\delta_\Omega(z) = \min [d_\Omega(z), \delta_\Omega(z)]$.

Soit δ une fonction lipschitzienne positive dans \mathbb{C}^n ; posons $\Omega_\delta = \{z/\delta(z) > 0\}$. On suppose $\delta \leq \delta_\Omega$ et $-\log \delta$ plurisousharmonique (p. s. h.) dans Ω .

Notons $E(k, \delta)$ l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que $\|f\|_k = \sup_z |f(z)| \delta^k(z) < \infty$ où k est un entier positif et $\mathcal{O}(\delta) = \bigcup_k E(k, \delta)$. L'espace $\mathcal{O}(\delta)$ a une structure naturelle d'algèbre bornologique [5]. Un sous-espace F est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ pour cette structure si on peut approcher les éléments de $E(k, \delta)$ par des éléments de F , pour la topologie de $E(k', \delta)$. J.-P. Ferrier [4] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{O}(\delta')$ soit dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, au sens précédent lorsque $\delta' \geq \delta$.

Nous généralisons la technique de B. Taylor pour étudier l'approximation dans un domaine d'holomorphic de \mathbb{C}^n , nous essayons de faire l'approximation pour la norme de l'espace de départ. Nous donnons également des conditions nécessaires d'approximation, ce qui nous permet de retrouver, sans avoir à utiliser le calcul symbolique de Waelbroeck, les résultats de [4] sur les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$. La technique utilisée permet en particulier

de préciser l'entier k' , de la définition de la densité, en fonction de k .

L'outil essentiel est la résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec les estimations de Hörmander [7].

Nous aurons besoin des notions suivantes. Etant donnée une fonction g à valeurs réelles définie dans Ω , on notera g^* la plus petite fonction s. c. s. qui majore g . On dira que $\exp(\kappa)$ est un module de plurisousharmonicité pour Φ , défini dans Ω , si κ est une fonction continue dans Ω et si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ la distribution

$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k - \exp(\kappa) \sum_{j=1}^n |t_j|^2$ est une mesure positive. On pose

$H_\Phi(z, t) = \sum \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$. Dans toute la suite on supposera que w est de la forme

$w = \exp(-\Phi)$. On dira que w est un poids si pour tout entier k on a :

$$\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi(z)) \delta_\Omega^{-k}(z) < \infty.$$

Nous obtenons en particulier les résultats suivants.

THEOREME. Si $(\Phi - 2 \log \delta_\Omega)(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$, où chaque φ_i est p. s. h. dans un domaine d'holomorphie $\Omega_i \supset \Omega$, la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ restreinte à Ω étant supposée filtrante croissante et si de plus il existe une constante $C > 0$ telle que $C \delta_\Omega^{-2}$ soit un module de plurisousharmonicité pour Φ , alors

$\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$ est dense dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$. Lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ il suffit de supposer que $C \delta_\Omega^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour Φ .

THEOREME. Soient Ω un ensemble convexe de \mathbb{C}^n et Φ une fonction convexe dans Ω telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. Alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes

sont denses dans $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Nous obtenons comme corollaire d'un théorème plus général le résultat suivant.

COROLLAIRE. Si Φ est p. s. h. homogène complexe d'ordre $\rho > 0$ dans \mathbb{C}^n , i. e. $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$ pour $u \in \mathbb{C}^n$ et $z \in \mathbb{C}^n$. Alors les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Pour étudier des conditions nécessaires d'approximation, nous montrons le résultat suivant sur les fonctions p. s. h., ce résultat admet d'autres applications. [11].

PROPOSITION. Soit Φ une fonction p. s. h. continue dans un domaine d'holomorphie Ω telle que $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$ et $\exp(-\Phi)$ lipschitzienne dans Ω ; alors $\Phi(z) = (\sup_\nu C_\nu \log |a_\nu|)^*(z)$ pour tout $z \in \Omega$, où $C_\nu > 0$ et où a_ν sont des fonctions holomorphes dans Ω .

On montre alors qu'une condition nécessaire pour que $H(\Omega')$, l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega' \supset \Omega$, soit dense dans $H^2(\Omega, \exp(-k\Phi))$ pour tout entier positif k , est que, $\exp(-\Phi)$ étant un poids, $\sqrt{\Phi(z)} = (\sup_i c_i \log |f_i|)^*(z)$, $z \in \Omega$, les c_i étant des constantes positives et f_i des fonctions holomorphes dans Ω' .

Les cas où cette condition est suffisante sont étudiés dans la suite.

2. APPROXIMATION DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE POUR LES ESPACES

$H^p(\Omega, w)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises les deux théorèmes suivants dûs à L. Hörmander [7].

THEOREME 1. Soient Ω un domaine d'holomorphic de \mathbb{C}^n , Φ une fonction p.s.h. dans Ω et $\exp(\kappa)$ un module de plurisousharmonicité pour Φ . Pour toute forme $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$ $q > 0$ telle que $\bar{\partial}g = 0$ et $\int_{\Omega} |g|^2 \exp(-(\Phi + \kappa)) d\lambda(z) < \infty$, il existe $u \in L^2_{(q,q-1)}(\Omega, \text{loc})$ telle que $\bar{\partial}u = g$ et

$$(1) \quad q \int_{\Omega} |u|^2 \exp(-\Phi) d\lambda \leq \int_{\Omega} |g|^2 \exp(-(\Phi + \kappa)) d\lambda.$$

Les notations sont celles de [7] et [8].

COROLLAIRE 2. Soient Ω un domaine d'holomorphic de \mathbb{C}^n , φ une fonction p.s.h. dans Ω , $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$ $q > 0$ avec $\bar{\partial}g = 0$ et $\int_{\Omega} |g|^2 \exp(-\varphi) d\lambda < \infty$. Alors il existe $u \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \text{loc})$ vérifiant $\bar{\partial}u = g$ et

$$(2) \quad q \int_{\Omega} |u|^2 \exp(-\varphi) \delta_o^4 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g|^2 \exp(-\varphi) d\lambda.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $\Phi = \varphi + 2 \log(1 + |z|^2)$.

On a

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geq 2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1 + |z|^2) t_j \bar{t}_k \geq 2 \frac{|t|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

d'où : $\exp(-\Phi) = \exp(-\varphi) \delta_o^4$ et $\exp(-(\Phi + \kappa)) = \frac{1}{2} \exp(-\varphi)$.

Donc (2) se déduit de (1).

PROPOSITION 3. Soit Φ une fonction positive dans un domaine d'holomorphic Ω .

On suppose que $\Phi(z) - 2 \log \delta_{\Omega}(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ où, pour chaque $i \in I$, φ_i est une fonction p.s.h. positive dans un domaine d'holomorphic $\Omega_i \supset \Omega$. La restriction de la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$   Ω est supposé filtrante croissante. Alors pour $f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$

il existe une suite de fonctions appartenant à $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i) \delta_0^4)$ qui converge vers f dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 \delta_0^4)$.

Démonstration. D'après un lemme de G. Choquet [9], il existe une suite $i(m)$ d'indices tels que la suite $\varphi_{i(m)}$ soit croissante et $(\sup_m \varphi_{i(m)})^* = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*$ dans Ω .

Soit $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et (α_p) une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , $0 \leq \alpha_p \leq 1$, α_p valant 1 sur un voisinage de K_p .

En convolant la fonction caractéristique de K_p avec $\varepsilon^{-n} \rho(\frac{x}{\varepsilon})$ où ρ est une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact égale à 1 sur un voisinage de l'origine, on voit qu'en choisissant

ε en fonction de K_p , on peut construire une suite α_p qui vérifie de plus la condition

$$(3) \quad \sum_{1 \leq \ell \leq n} \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}} \right|^2(z) \leq C(1 + d_\Omega^{-1}(z))^2 \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

indépendante de p .

Posons $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f) = f \bar{\partial} \alpha_p$; g_p est une forme différentielle de type $(0, 1)$ à coefficients dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

$$\text{Soit} \quad I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 d\lambda = \int |f|^2 |\bar{\partial} \alpha_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 d\lambda.$$

$$\text{D'après (3)} \quad I(p) \leq C \int_{\Omega \setminus K_p} |f|^2 \exp(-\Phi) (1 + \delta_\Omega^2) d\lambda.$$

Or

$$f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi)) \quad \text{et} \quad \delta_\Omega < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0.$$

Afin d'alléger les notations, désignons $\varphi_{i(m)}$ par φ_m , $\Omega_{i(m)}$ par Ω_m et posons :

$$I(p, m) = \int_{\Omega_m} |g_p|^2 \exp(-\varphi_m) d\lambda.$$

Rappelons que $(\sup_m \varphi_m) = (\sup_{i(m)} \varphi_{i(m)})^*$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle

[9]. Par suite, p étant fixé, en appliquant le théorème de convergence monotone on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(p, m) = \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)) d\lambda = \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)^*) d\lambda =$$

$$\int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 = I(p), \quad \text{d'après l'hypothèse : } \Phi - 2 \log \delta_{\Omega} = (\sup_i \varphi_i)^*.$$

Donc pour tout p , il existe un entier $m(p)$ tel que $I(p, m(p)) \leq 2I(p)$.

Réolvons l'équation $\bar{\partial} u = g_p$ dans le domaine d'holomorphic $\Omega_{m(p)}$. D'après le

corollaire 2, il existe une solution u_p vérifiant

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_o^4 d\lambda \leq \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) d\lambda = I(p, m(p)) < 2I(p). \quad \text{Posons}$$

$v_p = f\alpha_p - u_p$ alors $\bar{\partial} v_p = 0$ dans $\Omega_{m(p)}$; par suite v_p est une fonction holomorphe dans $\Omega_{m(p)}$ et $\int_{\Omega_{m(p)}} |v_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_o^4 d\lambda < \infty$ car il en est ainsi de u_p et

$f\alpha_p$ est à support compact.

$$\text{De plus } \int_{\Omega} |f\alpha_p - v_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_o^4 d\lambda = \int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_o^4 d\lambda \leq$$

$$\int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_o^4 d\lambda \leq 2I(p),$$

or $f\alpha_p$ est arbitrairement proche de f dans $L^2(\Omega, \exp(\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_o^4)$.

Par suite v_p converge vers f dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_o^4)$. Cette proposition a été démontrée par B. Taylor [12] lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ sous des hypothèses plus fortes sur Φ . Remarquons qu'on peut remplacer dans l'énoncé la fonction δ_{Ω} par une fonction lipschitzienne strictement positive et tendant vers zéro sur le bord de Ω .

THEOREME 4. Soit Φ une fonction p.s.h. positive dans le domaine d'holomorphic Ω . On suppose que $\exp(-\Phi)$ est un poids vérifiant les conditions suivantes :

a) $\Phi(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$, φ_i p.s.h. dans Ω_i , domaine d'holomorphic contenant Ω et la restriction de la famille φ_i à Ω étant filtrante croissante.

b) Il existe une constante $C > 0$ telle que $C \delta_{\Omega}^{-2}$ soit un module de plurisousharmonicité pour Φ .

On suppose de plus que

c) $-\log \delta_{\Omega}(z) = (\sup_{i \in I} \psi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$, ψ_i p.s.h. dans Ω_i et la restriction de la famille (ψ_i)   Ω est filtrante croissante.

Alors $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$ est dense dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Si on suppose que $(\varphi_i), (\psi_i)$ sont définies dans \mathbb{C}^n et que $\exp(\varphi_i)$ et $\exp(\psi_i)$ sont à croissance polynomiale alors les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 3 posons

$$I(p) = \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 d\lambda, \quad I(p, r) = \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-r\Phi) \delta_{\Omega}^2 d\lambda$$

où $0 < r < 1$ et $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f)$.

On voit facilement que $\lim_{r \rightarrow 1} I(p, r) = I(p)$; donc pour tout p il existe $\frac{1}{2} < r(p) < 1$ tel

que $I(p, r(p)) \leq 2I(p)$. D'après le théorème 1 et l'hypothèse b) faite sur Φ il existe

une solution u_p de l'équation $\bar{\partial}u = g_p$ dans Ω vérifiant

$$\int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-r(p)\Phi) d\lambda \leq \frac{2}{C} \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-r(p)\Phi) \delta_{\Omega}^2 d\lambda \leq \frac{4}{C} I(p).$$

En effet $C/2 \delta_{\Omega}^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour $r(p)\Phi$ puisque $r(p) > \frac{1}{2}$.

En posant $v_p = f \alpha_p - u_p$ alors $\bar{\partial}v_p = 0$ et on voit qu'on peut approcher f dans

$H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ par des fonctions qui sont dans $\bigcup_{r < 1} H^2(\Omega, \exp(-r\Phi))$.

Il nous suffit à présent d'approcher les fonctions de $H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi))$ $r_0 < 1$.

Or $(r_0\Phi - 2 \log \delta_{\Omega})(z) = (\sup_i (r_0\varphi_i + 2\psi_i))^*(z)$ pour $z \in \Omega$, d'après les hypothèses a)

et c). La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher une fonction

$h \in H^2(\Omega, \exp(-r_0 \Phi))$ par des fonctions de $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-r_0 \varphi_i - 2\psi_i) \delta_0^4)$ et ceci pour

la norme de l'espace $H^2(\Omega, \exp(-r_0 \Phi) \delta_\Omega^2 \delta_0^2)$. Or, puisque pour tout $k > 0$

$\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi) \delta_\Omega^{-k}(z) < \infty$, la convergence dans l'espace $H^2(\Omega, \exp(-r_0 \Phi) \delta_\Omega^2 \delta_0^2)$ implique

la convergence dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$. Pour terminer la démonstration, il nous suffit de

montrer que les fonctions de $H^2(\exp(-r_0 \varphi_i - 2\psi_i) \delta_0^4)$ sont des polynômes si $\exp(\varphi_i)$

et $\exp(\psi_i)$ sont à croissance polynomiale. En effet, soit f appartenant à cet espace,

par hypothèse il existe un entier $k > 0$ tel que $\int |f|^2 (1 + |z|^2)^{-k} d\lambda < \infty$. On a

alors

$$|f(z)|^2 \leq C_n \int_{|u| \leq 1} |f(z+u)|^2 d\lambda(u) \leq C_n \int_{|u| \leq 1} |f(z+u)|^2 (1 + |z+u|^2)^{-k} \cdot (1 + |z+u|^2)^k d\lambda(u) \leq$$

$$\sup_{|u| \leq 1} (1 + |z+u|^2)^k C_n \int_{\mathbb{C}^n} |f(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^{-k} d\lambda(\zeta) \leq M(1 + |z|^2)^k$$

donc f est un polynôme d'après le théorème de Liouville.

EXEMPLE 5. Soit U un ouvert borné de \mathbb{C}^n et ρ une fonction de classe \mathcal{C}^2

strictement plurisousharmonique dans U . Posons $\Omega = \{z/z \in U, \rho(z) < 0\}$, on suppose

$U \supset \bar{\Omega}$ alors Ω est strictement pseudoconvexe. Posons $\Phi = -\frac{1}{\rho}$, Φ vérifie les hypothèses

de la proposition 4, car c'est la composée de ρ avec la fonction $h(x) = -x^{-1}$ qui

est convexe croissante sur \mathbb{R}_- . Donc $\Phi = \sup(\alpha_i \rho + \beta_i) \alpha_i$, β_i étant des constantes,

$\alpha_i > 0$ et $\alpha_i \rho + \beta_i$ est p.s.h. dans U . De plus on a

$\delta \bar{\delta} \Phi \geq \rho^{-2} \delta \bar{\delta} \rho \geq c \rho^{-2} \geq c \delta_\Omega^{-2}$. Donc Φ vérifie l'hypothèse b) et il est clair que

$\exp(-\Phi)$ est un poids. Par suite les fonctions holomorphes dans U sont denses dans

$H^2(\Omega, \exp(\rho^{-1}))$.

THEOREME 6. Soient Ω un ouvert convexe de \mathbb{C}^n et Φ une fonction convexe dans

Ω telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids ; alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes sont

denses dans $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Lorsque $\Omega = \mathbb{C}^n$ ce résultat est démontré dans [12] en utilisant des fonctionnelles analytiques; notre démonstration est cependant différente même dans ce cas.

Démonstration. Nous allons faire d'abord la démonstration pour $p = 2$. On peut toujours supposer que $\Phi \geq 0$, $0 \in \Omega$ et $\Phi(0) = 0$.

Soit $t > 1$. La convexité de Φ permet d'écrire $\Phi(z) \leq t^{-1}\Phi(z) + (1-t^{-1})\Phi(0)$ ou encore

$$(4) \quad \Phi(tz) \geq t \Phi(z).$$

En particulier $\Phi(z) \geq R^{-1} |z| \Phi(\frac{Rz}{|z|})$; par suite il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(z) \geq \varepsilon |z|$ pour $|z|$ assez grand, sinon Φ serait nulle dans une direction donnée et $\exp(-\Phi)$ ne serait pas un poids.

Posons pour $r < 1$ $f_r(z) = f(rz)$; f_r est définie dans $\Omega_r = r^{-1}\Omega \supset \Omega$. On a

$$\int_{\Omega} |f_r(z)|^2 \exp(-\Phi(z)) d\lambda = r^{-2n} \int_{r\Omega} |f(z)|^2 \exp(-\Phi(r^{-1}z)) d\lambda ;$$

or $X_{r\Omega}(z) \exp(-\Phi(r^{-1}z)) \leq X_{\Omega} \exp(-\frac{1}{r} \Phi(z)) \leq X_{\Omega} \exp(-\Phi(z))$ où

X_{Ω} désigne la fonction caractéristique de Ω .

D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\|f_r\| \rightarrow \|f\|$ quand

$r \rightarrow 1$; par ailleurs f_r converge vers f ponctuellement. La boule unité de l'espace

$H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ étant faiblement compacte, on voit que $\|f_r - f\|$ tend vers zéro quand

r tend vers 1; $f_r \in H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r))$.

Nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 7. Soient Ω un ouvert convexe et ψ une fonction convexe sur Ω telle que $\psi(z) \geq \varepsilon |z|$.

Alors il existe une suite ψ_k de fonctions p. s. h. dans \mathbb{C}^n telles que $\exp(\psi_k)$ soit

à croissance polynomiale et $\psi(z) = (\sup_k \psi_k(z))$ pour tout $z \in \Omega$.

Supposons le lemme démontré et achevons la démonstration du théorème.

Il est clair que $\Phi - 2 \log \delta_\Omega = \sup((\Phi - 2 \log d_\Omega), \Phi + 2 \log(1 + |z|^2))$. Or

$\Phi - 2 \log d_\Omega$ est convexe puisque Φ l'est et l'hypothèse Ω convexe équivaut à

$-\log d_\Omega$ convexe. De plus $\sqrt{\Phi - 2 \log d_\Omega} \geq \varepsilon |z|$ comme on l'a vu, puisque

$-\log d_\Omega(z) \geq -\log |z-a|$. D'après le lemme 7, $\Phi - 2 \log d_\Omega$ et Φ s'écrivent comme

enveloppe supérieure de fonctions p. s. h. dont l'exponentielle est à croissance polynomiale,

il en est donc de même de $\Phi - 2 \log \delta_\Omega$ et de $\Phi_r - 2 \log \delta_{r^{-1}\Omega}$, puisque $r^{-1}\Omega$ est

convexe. D'où $\Phi_r - 2 \log \delta_{r^{-1}\Omega} = (\sup \varphi_k)$ avec $\exp(\varphi_k)$ à croissance polynomiale.

La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher f_r dans l'espace

$H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r) \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4)$ par des fonctions de $\bigcup_i H^2(\exp(-\varphi_i) \delta_0^4)$ c'est-à-dire

par des polynômes, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 4.

Il suffit de remarquer que la convergence dans $H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r) \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4)$ implique la convergence dans $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$.

Or

$$(5) \quad d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0 \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

En effet, il existe une boule de centre 0 et de rayon β contenue dans Ω , donc si

$z \in \Omega$

$$z + \zeta = r[r^{-1}z] + (1-r)((1-r)^{-1}\zeta) \in r^{-1}\Omega \quad \text{si } |\zeta| \leq \beta(1-r)$$

d'où l'inégalité (5). On a vu que pour $r < 1$, $\Phi(r) \geq r^{-1}\Phi(rz)$ (4) par suite

$$\exp(-\Phi(z)) \leq \exp(-r^{-1}\Phi_r(z)) = \exp(-\Phi_r(z)) \cdot \exp(1-r^{-1})\Phi_r(z) \leq C \cdot \exp(-\Phi_r(z)) \cdot \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4$$

puisque $d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0$ et $\Phi(z) \geq \varepsilon |z|$.

Démonstration du lemme 7. ψ étant convexe, d'après le théorème de Hahn Banach,

$\psi = \sup_j (\operatorname{Re} \langle z, w_j \rangle - \alpha_j)$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $w_j \in \mathbb{C}^n$. Il nous suffit donc de montrer que dans \mathbb{C} la fonction $\varphi = \sup(\varepsilon |z|, x)$, où $x = \operatorname{Re} z$, s'écrit comme $(\sup_k \varphi_k) / \sqrt{\varphi_k}$ avec sous harmonique dans \mathbb{C} et $\exp(\varphi_k)$ à croissance polynomiale.

En effet, $\psi = \sup_j \left[\sup(\operatorname{Re} \langle z, w_j \rangle) - \alpha_j, \varepsilon |z| \right]$ et en utilisant une rotation on se ramène au cas où $w_j = (w_j^0, 0, \dots, 0)$. Remarquons que

$\varepsilon |z| = \sup_N \left(\log \sum_0^N \frac{\varepsilon^n |z|^n}{n!} \right) = \sup_N \varphi_N$. La fonction $\sqrt{\varphi_N}$ est sous harmonique et $\exp(\varphi_N)$ est à croissance polynomiale.

Soit θ une représentation conforme de l'angle $\varepsilon |z| < x$ sur le demi plan supérieur

$$(6) \quad \theta(z) = e^{iy} z^\beta.$$

Si $\operatorname{Im} z > 0$, posons $(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$ où $z = x + iy$.

On voit que $(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t) \leq p \log^+ |t| + C$ donc que l'intégrale est convergente. On voit facilement que $\log^+ |t| = \inf_{s < 1} ((es)^{-1} t^s)$, par suite

$$|(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z)| \leq A + \frac{py}{\pi} \int \frac{\log^+ |t|}{(t-x)^2 + y^2} dt \leq A + \frac{py}{\pi} \int \frac{(es)^{-1} t^s}{(t-x)^2 + y^2} = A + p \operatorname{Re}(z^s) (es)^{-1}.$$

D'où il résulte que

$$(7) \quad |(\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}})(z)| \leq A + p \log^+ |z|.$$

Posons $\widetilde{\varphi}_N(z) = \varphi_N(z)$ si $\varepsilon |z| > x$ et $\widetilde{\varphi}_N(z) = (\widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}}) \circ \theta$ si $\varepsilon |z| \leq x$. On a $|\widetilde{\varphi}_N(z)| \leq A_1 + A_2 \log^+ |z|$ d'après (6) et (7) et $|\varphi_N(z)| \leq \varphi(z)$.

Remarquons que $\widetilde{\varphi}_N \circ \theta^{-1}(z) \geq \varphi_N \circ \theta^{-1}(z)$ (8), par suite $\widetilde{\varphi}_N(z) \geq \varphi_N(z)$ voir lemme 8. Donc $\widetilde{\varphi}_N$ est sousharmonique dans \mathbb{C} et à l'intérieur de l'angle

$x > \varepsilon |z|$ elle est égale à la solution du problème de Dirichlet avec donnée au bord φ_N . De plus $\varphi(z) = \sup_N \tilde{\varphi}_N(z)$, car en faisant tendre N vers l'infini on voit que la solution du problème de Dirichlet, dans la construction choisie, avec pour donnée au bord φ_N converge vers la solution du problème avec pour donnée au bord x et que cette solution est égale à x .

L'inégalité (7) et la relation (6) permettent de voir que $\exp(\varphi_N)$ est à croissance polynomiale.

Remarquons que la conclusion du lemme 7 reste vraie pour la fonction ψ^α , α étant un nombre strictement positif et ψ une fonction convexe vérifiant $\psi(z) \geq \varepsilon |z|$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.

Pour écrire l'inégalité (8) nous avons utilisé le résultat suivant.

Soit h une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$0 \leq h(z) \leq k \log(1 + |z|^2).$$

Notons Ph l'intégrale de Poisson de la fonction h , i. e. $Ph(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}$.

On a alors $h \leq Ph$.

Nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

LEMME 8. Soit u une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(t)|}{1+t^2} dt < \infty \quad \text{et que} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi u^+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Alors $u \leq Pu$ où Pu désigne l'intégrale de Poisson de u .

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im } z > 0$. Désignons par μ_z^R la mesure harmonique, relative au point z , du demi-disque centré en 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur.

On peut calculer explicitement μ_z^R . On a alors pour R assez grand :

$$u(z) \leq \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{(R^2 - |z|^2)(R^2 - t^2)}{|t-z|^2 |R^2 - tz|^2} u(t) dt + \frac{2y}{\pi} \int_0^\pi \frac{(R^2 - |z|^2) R \sin \varphi}{|\text{Re}^{i\varphi} - z|^2 |\text{Re}^{i\varphi} - \bar{z}|^2} u(\text{Re}^{i\varphi}) d\varphi.$$

Majorons la dernière intégrale en remplaçant u par u^+ . Les hypothèses faites sur u permettent de passer à la limite en faisant tendre R vers l'infini; d'où il résulte que $u \leq Pu$.

Ceci achève la démonstration du théorème pour $p = 2$.

Faisons la démonstration pour $p = +\infty$. Soit $r < 1$. On a

$$|f_r(z)| \exp(-\Phi) \leq |f(rz)| \exp(-r^{-1}\Phi(rz)) \text{ puisque } \Phi(rz) \leq r\Phi(z).$$

Donc $f_r \in H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f quand r tend vers 1.

Pour $r' > r$, $f_r \in H^2(r'^{-1}\Omega, 2\Phi_{r'})$. En effet $\Phi(r'z) \geq \frac{r'}{r}\Phi(rz)$, d'où

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\alpha(r'z)) \leq |f(rz)|^2 \exp(-2\frac{r'}{r}\Phi(rz)) \text{ qui est intégrable puisque } \Phi(z) \geq \epsilon|z|$$

et $r'/r > 1$.

Par suite, il existe une suite de polynômes p_j qui converge vers f_r dans

$H^2(r_1^{-1}\Omega, 2\Phi_{r_1})$, c'est l'application du théorème pour $p = 2$. Or si $z \in \Omega$ on a vu que $z + \zeta \in r_1^{-1}\Omega$ pour $|\zeta| \leq \beta(1-r_1) = r_1$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} |f_{r_1}(z) - p_j(z)|^2 &\leq C r_1^{-2n} \int_{|\zeta| < r_1} |f_{r_1}(z+\zeta) - p_j(z+\zeta)|^2 d\lambda(\zeta) \\ &\leq C r_1^{-2n} \sup_{|\zeta| \leq r_1} \exp(2\Phi_{r_1}(z+\zeta)) \int_{r_1^{-1}\Omega} |f_{r_1}(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r_1}(\zeta)) d\lambda(\zeta) \\ &\leq C r_1^{-2n} \exp(2\Phi(z)) \varepsilon_j, \quad \text{où} \quad \varepsilon_j = \int_{r_1^{-1}\Omega} |f_{r_1}(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r_1}(\zeta)) d\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

En effet, $\Phi_{r_1}(z + \zeta) \leq \Phi(z) + A(r_1)$

car $\Phi(r_1 z + r_1 \zeta) \leq r_1 \Phi(z) + (1-r_1)\Phi(r_1(1-r_1)^{-1}\zeta) \leq r_1 \Phi(z) + A(r_1)$. D'où il résulte

que p_j converge vers f_{r_1} dans $H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$ puisque $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$.

Pour démontrer le résultat, lorsque $1 \leq p < \infty$, on se ramène selon la même technique au cas $p = 2$.

3. APPROXIMATION POUR LES ALGÈBRES $\mathcal{O}(\delta)$.

Nous avons défini l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ au paragraphe 1, δ étant une fonction lipschitzienne positive telle que $\delta \leq \delta_0$.

THEOREME 9. Si $-\log \delta(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ avec φ_i p. s. h. dans un domaine d'holomorphie $\Omega_i \supset \Omega$ et la restriction de la famille φ_i à Ω étant filtrante croissante, alors on peut approcher les fonctions de $E(k, \delta)$ pour la norme de $E(k+2n+4, \delta)$ par des fonctions de $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i) \delta_0^4)$, avec $c = 2k + 2n + 3$.

Démonstration. Soit $\Omega = \{z/z \in \mathbb{C}^n \mid \delta(z) > 0\}$. On a $\delta(z) \leq \delta_\Omega(z)$ pour tout z .

Dans la démonstration de la proposition 3, on peut supposer

$$\sum_p \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_p} \right|^2 \leq c(1 + \delta^{-1})^2.$$

Par suite étant donné $f \in E(k, \delta)$ qui est inclus dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1})$ on peut l'approcher dans $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$ par des fonctions appartenant à $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i) \delta^4)$. Il suffit pour terminer la démonstration de voir que $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$ s'injecte continuellement dans $E(k + 2n + 4, \delta)$.

$$\text{En effet, } |f(z)|^2 \delta^{2k+2n+7}(z) \leq (\text{vol } B_z)^{-1} \int_{B_z} |f(z+\zeta)|^2 \delta^{2k+2n+7}(z) d\lambda(\zeta) \quad (9); \text{ où}$$

B_z désigne la boule de centre z et de rayon $\frac{1}{2} \delta(z)$. B_z est contenue dans Ω , car

$$|\delta(z) - \delta(z+\zeta)| \leq \frac{1}{2} \delta(z) \text{ si } |\zeta| \leq \frac{1}{2} \delta(z); \text{ donc } \delta(z+\zeta) > 0 \text{ si } z+\zeta \in B_z.$$

$$\text{De (9) on déduit } |f(z)|^2 \delta(z)^{2k+2n+7} \leq c_n \delta(z)^{-2n} \int_{\Omega} |f(z')|^2 \delta(z')^{2k+2n+7} d\lambda(z')$$

$$\text{i. e. } \|f\|_{k+2n+4} \leq c \left(\int_{\Omega} |f(z')|^2 \delta^{2n+2k+7} d\lambda(z') \right).$$

Introduisons une définition de la densité dans $\mathcal{O}(\delta)$ qui est plus fine que la notion de densité pour la structure bornologique.

DEFINITION 11. Un sous espace F est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout k , on peut approcher les fonctions de $E(k, \delta)$ par des éléments de F et cela pour la norme de l'espace $E(k+\gamma, \delta)$.

COROLLAIRE 12. Soit Ω un domaine de \mathbb{C}^n . On suppose/o $\overline{\Omega} = \bigcap_{i \in I} \overline{\Omega}_i$ où chaque Ω_i est un domaine d'holomorphic. Alors $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$.

En particulier si $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$ et $\bar{\Omega}$ est un compact polynômialement convexe les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$.

Démonstration. Puisque $\Omega = \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{\Omega}_i$ $\delta_{\Omega}(z) = \inf_i \delta_{\Omega_i}(z)$ pour $z \in \Omega$.

D'où $-\log \delta_{\Omega}(z) = \sup_{i \in I} (-\log \delta_{\Omega_i}(z)) \quad z \in \Omega$; or $-\log \delta_{\Omega_i}$ est p. s. h. dans Ω_i puisque Ω_i est un domaine d'holomorphie. Donc $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$ au sens de la définition 10, ceci d'après le théorème 9.

Si $\bar{\Omega}$ est un compact polynomialement convexe, on a $\bar{\Omega} = \bigcap_p \Omega_p$ où chaque Ω_p est un polyèdre analytique et $\Omega = \overset{o}{\bar{\Omega}} = \bigcap_p \Omega_p$. Le théorème d'approximation d'Oka permet d'approcher les fonctions de $\mathcal{O}(\delta_{\Omega_p})$ par des polynômes uniformément sur $\bar{\Omega}$.

EXEMPLE 13. Dans \mathbb{C}^2 considérons le domaine d'holomorphie

$$\omega = \{(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad |z_1| < |z_2| < 1\}.$$

On montre que $\delta_{\omega}(z) = d_{\omega}(z) = \inf \left[(1 - |z_2|), |z_2| - |z_1| \right]$.

Or
$$(1 - |z_2|)^{-1} = \sup_N \left[\sum_{0 \leq p \leq N} |z_2|^p \right]$$

et
$$(|z_2| - |z_1|)^{-1} = \sup_{N, \lambda_1, \lambda_2} |P_{N, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2)|; \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

où
$$P_{N, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2) = \sum_{0 \leq p \leq N} (\lambda_1 z_1)^p (\lambda_2 z_2)^{-(p+1)}.$$

D'où il résulte que $-\log \delta_{\omega}(z) = (\sup_j \log |f_j|)(z)$ pour $z \in \omega$

avec f_j holomorphe dans $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C} \times \{0\} = \Omega$, donc $H(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta_{\omega})$. On voit facilement que les polynômes ne sont pas denses dans $\mathcal{O}(\delta_{\omega})$.

4. APPROXIMATION DE FONCTIONS ENTIÈRES.

Dans ce paragraphe on suppose que Φ est une fonction positive p. s. h. dans \mathbb{C}^n , telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids, i. e. pour tout k , $\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \delta_0^{-k}(z) \exp(-\Phi(z)) < \infty$.

PROPOSITION 14. Supposons que Φ vérifie les conditions suivantes :

a) Il existe une constante $C > 0$ telle que $C \delta_0^2$ soit un module de plurisousharmoni-

citée pour Φ .

b) $\Phi = (\sup_{j \in J} \Phi_j)^*$ Φ_j étant une famille de fonctions p. s. h. dans \mathbb{C}^n , avec $\exp(\Phi_j)$ à croissance polynômiale.

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. Soit α une fonction de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{C}^n , $0 \leq \alpha \leq 1$ égale à 1 pour $|z| \leq 1$ et nulle pour $|z| \geq 2$. Posons $\alpha_p(z) = \alpha(p^{-1}z)$. On a

$$(10) \quad \sum_j \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \leq C(1 + |z|^2)^{-1}.$$

En posant $g_p = \bar{\partial}(\alpha f)$ où $f \in H^2(\exp(-\Phi))$, et $I(p) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi)(1 + |z|^2) d\lambda(z)$ on voit comme dans la proposition 3 que $\lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0$.

$$\text{Soit } I(p, j) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi_j/2 - \Phi/2)(1 + |z|^2) d\lambda.$$

On peut supposer comme on l'a vu que Φ_j est une suite, et qu'elle est filtrante croissante, puisque cela ne modifie pas la croissance polynômiale de $\exp(\Phi_j)$ lorsque on prend la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions de ce type.

Pour p fixée on a : $\lim_{j \rightarrow \infty} I(p, j) = I(p)$. Donc pour tout p , il existe $j(p)$ avec

$I(p, j(p)) \leq 2I(p)$. Résolvons dans \mathbb{C}^n l'équation

$$(11) \quad \bar{\partial}u = g_p$$

pour la fonction $\varphi_p = \frac{\Phi_{j(p)}}{2} + \frac{\Phi}{2}$, φ_p admet comme module de plurisousharmonicité

$\exp(\chi) = \frac{C}{2}(1 + |z|^2)^{-1}$ d'après l'hypothèse a), d'après le théorème 1 il existe une solution

de (11) vérifiant

$$\int |u_p|^2 \exp(-\varphi_p) d\lambda \leq \frac{2}{C} \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_p)(1 + |z|^2) d\lambda \leq \frac{4}{C} I(p).$$

Soit $v_p = \alpha_p f - u_p$, on a $\bar{\partial}v_p = 0$. On voit comme dans la proposition 3 que v_p

converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$. Les fonctions v_p appartiennent à

$\bigcup_j H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_j}{2}))$. Il nous suffit donc d'approcher les fonctions $v \in H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}))$ par des polynômes. Or l'hypothèse b) montre que $\frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi_{j_0}}{2} = (\sup_j \frac{\Phi_j}{2} + \frac{\Phi_{j_0}}{2})^*$.

En reprenant le raisonnement de la proposition 3, mais avec $\alpha_p = \alpha(p^{-1}z)$, on voit que

$\bigcup_{j \in J} H^2(\exp(-\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}) \zeta_{j_0}^2)$ est dense dans $H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}))$ pour la norme de

$H^2(\exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}) \zeta_{j_0}^2)$. Or la convergence dans cet espace implique la convergence dans

$H^2(\exp(-\Phi))$; en effet $\exp(-\Phi) \leq c_{j_0} \exp(-\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}) \zeta_{j_0}^2$ puisque $(1+|z|^2)\exp(\Phi_{j_0})$

étant à croissance polynomiale est majoré par $c_{j_0} \exp(-\frac{\Phi}{2})$.

Enfin les fonctions de $H^2(\exp(-\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2}) \zeta_{j_0}^2)$ sont des polynômes.

REMARQUE 15. Si on ne conserve que l'hypothèse $\Phi = (\sup_j \Phi_j)^*$ où Φ_j est p.s.h. dans \mathbb{C}^n la famille Φ_j étant filtrante croissante, on peut approcher les fonctions de

$H^2(\exp(-\Phi))$ pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi) \zeta_{j_0}^2)$ par des fonctions de

$\bigcup_{j \in J} H^2(\exp(-\Phi_j) \zeta_{j_0}^2)$.

EXEMPLE 16. Si $\Phi(z) = |z|^{2\alpha} + \varphi(z)$ où $\alpha > 0$ et φ une fonction convexe avec

$z \geq \varepsilon|z|$, les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$. En effet $\partial\bar{\partial}\Phi \geq \partial\bar{\partial}|z|^{2\alpha}$ et

$$\sum_{k,j} \frac{\partial^2 |z|^{2\alpha}}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} t_k \bar{t}_j = \alpha |z|^{2(\alpha-1)} + \alpha(\alpha-1) |z|^{2(\alpha-2)} \left| \sum_{j=1}^n z_j \bar{t}_j \right|^2 \geq c(1+|z|^2)^{-1} |t|^2.$$

Or $|z|^{2\alpha} = \sup_N \log \left(\sum_0^N \frac{|z|^{2\alpha p}}{p!} \right)$, donc $\Phi = (\sup_j \Phi_j)^*$; Φ_j vérifiant les conditions de la

proposition 14, pour φ il faut utiliser le lemme 7.

COROLLAIRE 16. Soit Φ une fonction p.s.h. dans \mathbb{C}^n , telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids. On suppose de plus les conditions suivantes.

a) $\Phi = (\sup_{i \in I} \Phi_i)^*$ où chaque Φ_i est p.s.h. dans \mathbb{C}^n , $\exp(\Phi_i)$ étant à croissance

polynomiale.

b) Il existe une constante B telle que pour tout $1 \leq \lambda \leq 2$: $\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) - B$.

c) Pour tout $1 \leq \lambda \leq 2$, il existe une constante $A(\lambda)$ telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + \log(1 + |z|^2) - A(\lambda).$$

Alors les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. Posons $f_r(z) = f(rz)$. On voit grâce à l'hypothèse b) que f_r converge vers f dans $H^2(\exp(-\Phi))$. (Même démonstration que pour le théorème 6). Il nous suffit d'approcher f_r par des polynômes ; on peut supposer la famille Φ_i filtrante croissante, d'après la remarque 15 on peut approcher f_r par des polynômes pour la norme de $H^2(\exp(-\Phi_r) \delta_0^2)$. Or l'hypothèse c) montre que $\exp(-\Phi) \leq C_r \exp(-\Phi_r) \delta_0^2$ donc les polynômes sont denses dans $H^2(\exp(-\Phi))$.

PROPOSITION 17. On suppose que Φ vérifie les conditions a) et b) du corollaire 16 ainsi que les deux conditions suivantes.

c') Pour tout $1 \leq \lambda \leq 2$ il existe une constante $C(\lambda)$ telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + n \log(1 + |z|^2) - C(\lambda).$$

d) Pour tout $r < 1$, il existe une constante $B(r)$ telle que

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leq B(r) \quad \text{où} \quad \tilde{\Phi}(\zeta) = \sup_{|w| \leq 1} \Phi(\zeta + w).$$

Alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$.

Démonstration. L'hypothèse b) montre que $\|f_r\|_p \rightarrow \|f\|_p$ lorsque r tend vers 1 il est clair que f_r converge ponctuellement vers f ; par suite d'après [6] p. 208 f_r converge vers f dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p < \infty$.

Lorsque $p = +\infty$ $|f(rz)| \exp(-\Phi(z)) \leq \exp(B) |f(rz)| \exp(-\Phi(rz))$.

Donc $f_r \in H^\infty(\exp(-\Phi))$ et f_r converge vers f dans cet espace.

Poursuivons la démonstration lorsque $p = +\infty$.

Nous allons approximer f_r , $r < 1$. Soit $r_0 < r' < 1$

$$|f_r(z)| \leq \exp(B) \|f\|_\infty \exp(\Phi(rz))$$

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq \exp(B) \|f\|_\infty^2 \exp(-2\Phi(r'z) - 2\Phi(rz))$$

or $\Phi(r'z) \geq \Phi(rz) + n \log(1 + |rz|^2) - A\left(\frac{r'}{r}\right)$ d'après c').

Donc $|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq C_r \|f\|_\infty^2 (1 + |rz|^2)^{-2n}$, d'où $f_r \in H^2(\exp(-\Phi_{r'}))$ et

$\Phi_{r'}$ vérifie les hypothèses du corollaire 16. Par suite il existe une suite p_j de polynômes tels que

$$\int |f(rz) - p_j(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) = \varepsilon_j \text{ tend vers zéro lorsque } j \text{ tend}$$

vers l'infini. $|f_r - p_j|^2$ étant plurisousharmonique on a

$$|f_r(z) - p_j(z)|^2 \leq V_n^{-1} \int_{|u| \leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 d\lambda(u)$$

$$\leq V_n^{-1} \int_{|u| \leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(z+u)) \exp(2\Phi_{r'}(z+u)) d\lambda(u)$$

$$\leq V_n^{-1} \exp(2\tilde{\Phi}_{r'}(z)) \varepsilon_j, \quad V_n \text{ désigne le volume de la boule unité dans } \mathbb{C}^n.$$

$$\text{D'où} \quad \exp(-\Phi(z)) |f_r(z) - p_j(z)| \leq V_n^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)\right] \varepsilon_j$$

l'hypothèse d) montre que p_j converge vers f_r lorsque j tend vers l'infini puisque

$\tilde{\Phi}_{r'}(z) - \Phi(z)$ est borné.

La démonstration pour $1 \leq p < \infty$ suit les mêmes étapes.

EXEMPLE 18. Si Φ est positivement homogène d'ordre $\rho > 0$, i. e.

$\Phi(tz) = t^\rho \Phi(z)$ pour tout $t > 0$, les conditions b), c') et d) sont vérifiées. C'est clair

pour les conditions b) et c'). Pour d) soit $r < 1$ et $|u| \leq 1$

$$\Phi(rz + u) = |rz + u|^\rho \Phi\left(\frac{rz+u}{|rz+u|}\right) = |rz + u|^\rho \Phi(\alpha) \quad \text{où } |\alpha| = 1 \text{ et}$$

$$\Phi(z) = |z|^\rho \Phi(\beta) \quad \text{avec } \beta = z/|z|. \text{ D'où il résulte que}$$

$$\Phi(rz+u) - \Phi(z) = |rz + u|^\rho \Phi(\alpha) - |z|^\rho \Phi(\beta).$$

$$\text{Or } |\alpha - \beta| = \frac{|(r|z| - (rz+u))|}{|rz + u|} \leq \frac{|u|}{|rz + u|}$$

r étant fixé, on voit que $|\alpha - \beta|$ est arbitrairement petit pour $|z|$ assez grand, indépendamment de u , donc si $\epsilon > 0$, $\Phi(\alpha) \leq (1 + \epsilon)\Phi(\beta)$ pour $|z|$ assez grand.

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leq \Phi(\beta) \left[(1+\epsilon)(|rz|+1)^\rho - |z|^\rho \right] \leq B(r) \quad \text{si } r^\rho(1+\epsilon) \leq 1.$$

COROLLAIRE 19. Si Φ est p. s. h. homogène complexe, d'ordre $\rho > 0$

i. e. si $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$ pour tout $u \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^n$. Alors les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration. Comme on vient de le voir, il suffit de vérifier la condition a) de la proposition 17. Il est clair que Φ est positive et d'après [9], th. 2.5.1 $\log \Phi$ est p.s.h., or $\Phi = \sup_N \log \left(\sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!} \right)$. La fonction $\sqrt[\rho]{\Phi_N} = \log \left(\sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!} \right)$ est p.s.h. car il en est ainsi de $\log \left(\frac{\Phi^p}{p!} \right)$ pour tout p et $\exp(\Phi_N)$ est à croissance polynomiale car

$$\Phi(z) = |z|^\rho \Phi\left(\frac{z}{|z|}\right) \leq C |z|^\rho \quad \text{d'où}$$

$$\exp(\Phi_N) \leq \sum_{p=0}^N C^p \frac{|z|^{\rho p}}{p!}. \quad \text{La proposition 17 permet de conclure.}$$

Supposons que Φ soit une fonction de la forme

$$\alpha) \quad \Phi(z_1, \dots, z_n) = v(|z_1|, \dots, |z_n|) \quad v \text{ étant une fonction sur } (\mathbb{R}_+)^n.$$

Nous ferons également les hypothèses suivantes sur v

$$\beta) \quad v \text{ est une fonction convexe de } \log r. \quad \text{i. e. } v(e^{r_1}, \dots, e^{r_n}) \text{ est convexe dans}$$

\mathbb{R}^n .

PROPOSITION 20. Si Φ vérifie les conditions α , β). Les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi))$, $1 \leq p \leq \infty$ lorsque $\exp(-\Phi)$ est un poids.

Démonstration. Puisque $v(e^{r_1}, \dots, e^{r_n})$ est une fonction convexe, on a, d'après le théorème de Hahn-Banach

$$v(e^{r_1}, \dots, e^{r_n}) = \sup_j (\langle r, \alpha^j \rangle - \beta_j) \text{ avec } \alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$$

et chaque $\alpha_k^j \geq 0$ car v est non décroissante en chaque variable, d'où

$$\Phi(z) = \sup_j \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^j \log |z_k| - \beta_j \right) = \sup_j \Phi_j$$

Φ_j est p.s.h. car $\alpha_k^j \geq 0$ et $\exp(\Phi_j)$ est à croissance polynomiale. On vérifie facilement les hypothèses de la proposition 17 grâce à α , β) et qu'il fait que $\exp(-\Phi)$ est un poids.

Signalons également cette extension du théorème 6.

Soit Φ une fonction convexe dans \mathbb{C}^n telle que $\exp(-\Phi)$ soit un poids.

Si $\alpha > 0$, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les polynômes sont denses dans $H^p(\exp(-\Phi^\alpha))$.

En effet, comme on l'a remarqué à la fin du lemme 7, la fonction Φ^α vérifie l'hypothèse a). De plus, si on suppose $\Phi(0) = 0$, on a $\Phi^\alpha(tz) \geq t^\alpha \Phi^\alpha(z)$ pour $t > 1$ car Φ est convexe. Cette inégalité permet de vérifier que les conditions b) et c) sont satisfaites.

On peut supposer $\alpha < 1$, car si $\alpha \geq 1$ la fonction Φ^α est convexe et le résultat est alors un cas particulier du théorème 6.

On a vu que $\tilde{\Phi}(rz) \leq \Phi(z) + A(r)$, puisque Φ est convexe. D'où l'on déduit lorsque $\alpha < 1$

$$\tilde{\Phi}^\alpha(rz) \leq \Phi^\alpha(z) + A^\alpha(r).$$

Donc la condition d) est satisfaite.

5. CONDITIONS NECESSAIRES D'APPROXIMATION.

Nous allons montrer que si Φ est une fonction p.s.h. continue, dans un domaine d'holomorphic Ω , qui croît assez vite vers le bord de Ω , elle s'écrit

$\Phi(z) = (\sup_{\nu} c_{\nu} \log |a_{\nu}|)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ où $c_{\nu} > 0$ et a_{ν} sont des fonctions holomorphes dans Ω . Les conditions nécessaires pour l'approximation en découleront.

Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires.

Dans [2], I. Cnop a démontré le théorème suivant.

THEOREME 21. Soit Ω un domaine d'holomorphic dans \mathbb{C}^n , il existe des fonctions

u_0, u_1, \dots, u_n définies dans $\mathbb{C}^n \times \Omega$ telles que pour tout $s \in \mathbb{C}^n$ $u_i(s, \cdot)$ sont des fonc-

ions holomorphes dans Ω et $(\zeta_1 - s_1)u_1(s, \zeta) + \dots + (\zeta_n - s_n)u_n(s, \zeta) + \delta_\Omega(s)u_0(s, \zeta) \equiv 1$ (11)

pour tout $(s, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \Omega$. De plus, il existe un entier N et une constante $M > 0$,

tels que

$$\delta_\Omega^N(\zeta) |u_i(s, \zeta)| \leq M \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Nous en déduisons le corollaire.

COROLLAIRE 22. Pour tout $\zeta^0 \in \partial\Omega$, il existe une fonction $f \in E(N, \Omega)$, i.e.

$\delta_\Omega^N |f| \leq 1$ telle que f soit non bornée au voisinage de ζ^0 .

Démonstration. En effet, si chaque $u_i(\zeta^0, \cdot)$ était borné au voisinage de ζ^0 on aurait, puisque $\delta_\Omega(\zeta^0) = 0$,

$$1 \leq \sum |u_i(\zeta^0, \zeta)| |\zeta_i - \zeta_i^0| \leq K \sum |\zeta_i - \zeta_i^0|$$

ce qui est impossible dans un voisinage de ζ^0 .

PROPOSITION 23. Soit Ω un domaine d'holomorphic dans \mathbb{C}^n , il existe une fonction f holomorphe dans Ω et un entier N , tels que $\sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^N(z) |f(z)| < \infty$ et f n'est bornée au voisinage d'aucun point du bord de Ω .

Démonstration. Soit une suite de points dense sur la frontière de Ω et (B_j) la famille dénombrable de polydisques de rayons rationnels centrés en ces points. Désignons par E_j l'espace des fonctions f , holomorphes dans Ω , telles que

$\sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^N(z) |f|(z) = \|f\|_N$ et $\|f\|_j = \sup_{z \in \Omega \cap B_j} |f(z)|$ soient bornées. L'entier N étant le

même que dans le théorème 21.

On norme l'espace E_j , en posant $\|f\| = \sup(\|f\|_N, \|f\|_j)$, c'est un espace de Banach.

Considérons l'application de restriction $R_j : E_j \rightarrow E(N, \Omega)$. Cette application est continue et le corollaire précédent montre qu'elle n'est pas surjective, il en résulte d'après le théorème des homomorphismes que $R_j(E_j)$ est maigre dans $E(N, \Omega)$. Il en est de même de la réunion $\bigcup_j R_j(E_j)$. Soit f appartenant à $E(N, \Omega)$ et n'appartenant à aucun des $R_j(E_j)$, il est clair qu'une telle fonction n'est bornée sur aucun des $B_j \cap \Omega$, c'est-à-dire au voisinage d'aucun point du bord. En particulier Ω est son domaine d'holomorphic.

Remarquons que le théorème de I. Cnop permet d'associer à chaque domaine d'holomorphic Ω un entier $N \geq 1$ tel que Ω soit le domaine d'existence d'une fonction $f \in E(N, \Omega)$. Dans [11], nous étudions les domaines pour lesquels $N = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont domaine d'holomorphic d'une fonction bornée.

PROPOSITION 24. Soit Φ une fonction p.s.h. dans Ω , continue, telle que $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$ et $\exp(-\Phi)$ lipschitzienne de rapport 1. Alors il existe une suite a_ν de fonctions holomorphes dans Ω telle que

$$\Phi(z) = \left(\sup_\nu c_\nu \log |a_\nu| \right)^*(z) \text{ pour tout } z \in \Omega \text{ avec } c_\nu > 0.$$

Démonstration. Considérons l'ouvert $\tilde{\Omega} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in \Omega, w \in \mathbb{C}, |w| < \exp(-\Phi(z))\}$

Il est clair que $d_{\tilde{\Omega}}(z, w) \leq \exp(-\Phi(z)) - |w|$ et que $d_{\tilde{\Omega}}(z, w) \geq d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) - |w|$.

Or $d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) \leq \exp(-\Phi(z))$ et si $(z', w') \notin \tilde{\Omega}$ on a

$$|z - z'| + |w'| \geq \exp(-\Phi(z))$$

car la fonction $\exp(-\Phi)$ est lipschitzienne et vaut 0 au bord de Ω .

Remarquons que l'hypothèse implique que $|z| \exp(-\Phi(z))$ est bornée sur Ω donc on peut supposer $\exp(-\Phi(z)) - |w| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z, w)$.

En appliquant la proposition 23, il existe $f \in E(k, \tilde{\Omega})$ dont $\tilde{\Omega}$ soit le domaine d'holomorphie. Considérons le développement de Hartogs de f [1],

$$f(z, w) = \sum_{\nu \geq 0} a_{\nu}(z) w^{\nu} \quad \text{où} \quad a_{\nu}(z) = \frac{1}{\nu!} D^{\nu} f(z, 0).$$

Posons $-\log R(z) = (\overline{\lim}_{\nu} \frac{1}{\nu} \log |a_{\nu}|)^*(z)$. D'après un théorème de Hartogs la série

$$\sum_{\nu} a_{\nu}(z) w^{\nu} \text{ est définie et holomorphe dans le domaine } \Omega_R = \{(z, w) \mid z \in \Omega, |w| < R(z)\}.$$

On a $\tilde{\Omega} \subset \Omega_R$, et $\tilde{\Omega}$ étant le domaine d'existence de f d'où $\tilde{\Omega} = \Omega_R$ et $\exp(-\Phi(z)) = R(z)$. Il en résulte que

$$(12) \quad \Phi(z) = -\log R(z) = (\overline{\lim}_{\nu} \frac{1}{\nu} \log |a_{\nu}|)^*(z) \text{ pour } z \in \Omega.$$

Puisque $f \in E(k, \delta_{\tilde{\Omega}})$ on peut supposer $\sup_{(z, w) \in \tilde{\Omega}} \delta_{\tilde{\Omega}}^k(z, w) |f(z, w)| \leq 1$.

Or $a_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, r \exp(-\Phi(z)) e^{i\theta}) r^{-\nu} \exp(\nu \Phi(z)) e^{-i\nu\theta} d\theta$ avec $r < 1$; d'où

$$|a_{\nu}(z)| < (2\pi)^{-1} r^{-\nu} \exp(\nu \Phi(z)) \int_0^{2\pi} \delta_{\tilde{\Omega}}^{-k}(z, r \exp(-\Phi(z)) e^{i\theta}) d\theta.$$

On a vu qu'on peut supposer $\exp(-\Phi(z)) - |w| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z, w)$, par suite

$$|a_{\nu}(z)| \leq r^{-\nu} \exp(\nu \Phi(z)) \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} (1-r)^{-k} \exp(+k\Phi(z)) d\theta$$

d'où $|a_{\nu}(z)| \leq r^{-\nu} (1-r)^{-k} \exp((\nu+k)\Phi(z))$.

Pour ν fixé, posons $r = \nu(\nu+k)^{-1}$ on trouve alors

$$|a_{\nu}(z)| \leq (\nu+k)^{(\nu+k)} \nu^{-\nu} k^{-k} \exp[(\nu+k)\Phi(z)].$$

Donc

$$(13) \quad \frac{1}{\nu+k} \log K_{\nu} |a_{\nu}(z)| \leq \Phi(z) \quad \text{où} \quad K_{\nu} = \nu^{\nu} k^k (\nu+k)^{-(\nu+k)}.$$

Nous allons montrer que $\Phi(z) = (\sup_{\nu} \frac{1}{\nu+k} \log K_{\nu} |a_{\nu}|)^*(z)$.

Or $\frac{1}{\nu+k} \log K_\nu |a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu+k} \log K_\nu + \frac{1}{\nu+k} \log |a_\nu(z)|$;

et on voit facilement que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu+k} \log K_\nu = 0$,

donc $\overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu+k} \log K_\nu |a_\nu(z)| = \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu+k} \log |a_\nu(z)| = \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu} \log |a_\nu(z)|$

d'où le résultat, d'après les relations (12) et (13).

THEOREME 25. Soit δ une fonction positive définie dans \mathbb{C}^n , lipschitzienne avec $\delta \leq \delta_0$ et $-\log \delta$ p.s.h. dans $\Omega = \{z/\delta(z) > 0\}$.

$H(\Omega')$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$, au sens de la définition 11, si et seulement si

$-\log \delta = (\sup_{j \in J} c_j \log |f_j|)^*$ avec $c_i > 0$ et $f_i \in H(\Omega)$.

Démonstration. Le fait que la condition soit suffisante résulte du théorème 9, puisque $c_j \log |f_j|$ est p.s.h. dans Ω' et $\sqrt{\text{qu'on/}} \text{prend tous les } \Omega_i \text{ égaux à } \Omega$.

Montrons que la condition est nécessaire.

La fonction $-\log \delta$ vérifie les hypothèses de la proposition 24, par suite

$$(14) \quad -\log \delta(z) = \left(\sup_\nu \frac{1}{\nu} \log |a_\nu| \right)^*(z) \text{ pour } z \in \Omega.$$

On peut supposer aussi que $\overline{\lim}_\nu (\nu^{-1} \log |a_\nu|) = \sup_\nu (\nu^{-1} \log |a_\nu|)$.

D'après (14), $\delta^\nu(z) |a_\nu(z)| \leq 1$ pour $z \in \Omega$, i.e. $a_\nu \in E(\nu, \delta)$; puisque $H(\Omega')$ est dense dans $\mathcal{O}(\delta)$ il existe un entier $\gamma > 0$ et une suite de fonctions $a_{\nu,p} \in H(\Omega')$ tels que :

$$\delta^{\nu+\gamma}(z) |a_\nu(z) - a_{\nu,p}(z)| \leq p^{-1} \text{ pour tout } z \in \Omega.$$

Donc $\delta^{\nu+\gamma}(z) |a_{\nu,p}(z)| \leq (1+p^{-1})$ si $z \in \Omega$.

Par suite

$$\frac{1}{\nu+\gamma} \log(1+p^{-1}) |a_{\nu,p}| \leq -\log \delta.$$

Or
$$\frac{1}{\nu+\gamma} \log |a_\nu(z)| \leq \sup_p \log(1+p^{-1}) |a_{\nu,p}|(z).$$

Donc
$$\overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu} \log |a_\nu| = \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu+\gamma} \log |a_\nu| \leq \sup_{p,\nu} \frac{1}{\nu+\gamma} \log(1+p^{-1}) |a_{\nu,p}|(z),$$

et
$$-\log \delta(z) = \left(\sup_{\nu,p} \frac{1}{\nu+\gamma} \log(1+p^{-1}) |a_{\nu,p}| \right)^*(z) \text{ pour tout } z \in \Omega.$$

La démonstration montre que les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\delta)$ si et seulement si

$$-\log \delta(z) = \left(\sup_i c_i \log |p_j| \right)^*(z), \text{ les } p_j \text{ étant des polynômes.}$$

COROLLAIRE 26. Soit δ vérifiant les hypothèses du théorème 25.

Si $c \delta_\Omega^{-2}$ est un module de plurisousharmonicité pour $-\log \delta$ alors les conditions suivantes sont équivalentes.

i) $H(\Omega') \cap H^2(\Omega, \delta^k)$ est dense dans $H^2(\Omega, \delta^k)$ pour tout entier $k > 0$.

ii) $-\log \delta(z) = \left(\sup_i c_i \log |f_i| \right)^*(z)$ pour $z \in \Omega$ $f_i \in H(\Omega')$ $c_i > 0$.

Démonstration. Si i) est vérifiée, $H(\Omega')$ est alors dense dans $\mathcal{O}(\delta)$. En effet

$$E(k, \delta) \subset H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1}) \subset E(k+2n+4, \delta)$$

les injections étant continues, il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Lorsque la condition ii) est vérifiée on peut appliquer la proposition 4 pour en déduire i).

Je voudrais terminer, en remerciant J.-P. Ferrier avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé.

(1) J. BREMERMAN Math. Annalen 136 (1958), 173-186.

(2) I. CNOP Spectral study of holomorphic functions with bounded growth. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 293-310.

- (3) De BRANGES Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall 1968.
- (4) J.-P. FERRIER Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance. Ann. Inst. Fourier 22 (1972), 67-87.
- (5) J.-P. FERRIER Spectral theory and complex analysis. North Holland Publishing Cny, 1973.
- (6) E. HEWITT and K. STROMBERG Real and abstract analysis. Springer Verlag 1965.
- (7) L. HÖRMANDER L^2 -estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator. Acta Math. 13 (1965), 89-152.
- (8) L. HÖRMANDER An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand Cny 1966.
- (9) P. LELONG Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal. Presses de l'Université 1968.
- (10) N. SIBONY Approximation polynomiale pondérée sur un domaine d'holomorphic de C^n . C. R. Acad. sc. Paris, t. 276 (1973), 249-252.
- (11) N. SIBONY Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (1973), 973-976.
- (12) B. A. TAYLOR On weighted polynomial approximation of entire functions. Pacific J. Math. 36 (1971), 523-539.

Approximation pondérée sur une
sous-variété totalement réelle de \mathbf{C}^n .

par J.-P. Ferrier et N. Sibony

1.- Introduction et position du problème.

On considère une sous-variété réelle fermée Σ de dimension k et de classe \mathcal{C}^r de \mathbf{C}^n . On suppose dans toute la suite que Σ est totalement réelle, c'est à dire qu'en tout point x de Σ l'espace tangent T_x à Σ en x ne contient pas de sous-espace complexe autre que $\{0\}$; cela implique en particulier $k \leq n$.

L. Hörmander et J. Wermer ont démontré dans [6] le résultat suivant

Théorème. - On suppose $r > k/2 + 1$; si K est un compact de Σ , toute fonction continue sur K est uniformément approchable sur K par des fonctions holomorphes au voisinage de K .

Ce résultat a été étendu par E. Cirka [1] d'une part et F.R. Harvey et J.O. Wells [3] d'autre part, au cas d'une variété Σ de classe \mathcal{C}^1 .

On se propose ici, en utilisant les techniques de [1] et [6], d'étudier le problème de l'approximation, au sens d'un poids sur Σ , des fonctions continues sur Σ vérifiant des hypothèses de croissance à l'infini par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ , puis par des polynômes.

Plus précisément, soit w une fonction continue strictement positive sur Σ ; on désigne par $\mathcal{G}_w(\Sigma)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques complexes continues f sur Σ telles que $w|f|$ tende vers zéro à l'infini sur Σ , muni de la norme

$$f \mapsto \|f\|_w = \sup_{x \in \Sigma} w(x)|f(x)|,$$

pour laquelle $\mathcal{G}_w(\Sigma)$ est un espace de Banach. On suppose que w est un poids, c'est à dire que $\|p\|_w < +\infty$ pour tout polynôme p ; dans ce cas $\mathcal{G}_w(\Sigma)$ contient les polynômes et on se propose d'étudier dans

ce cadre le problème de Bernstein, c'est à dire de chercher des conditions sous lesquelles les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}_w(\Sigma)$.

Nous commençons par approcher les fonctions de $\mathcal{C}_w(\Sigma)$ par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ , sous une condition d'uniforme H-convexité introduite par E. Cirka [1]. Une hypothèse géométrique sur Σ permet ensuite de faire l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage tubulaire fixe. Le passage à l'approximation par des polynômes se fait à l'aide des techniques de [8].

Fixons quelques notations; de façon générale, lorsque Ω est un ouvert de \mathbb{C}^n et ψ une fonction numérique continue strictement positive sur Ω , on notera $H^2(\Omega, \psi)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur Ω , qui sont de carré intégrable pour la mesure de densité ψ . On posera encore

$$\delta_o(z) = (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$H_f(z, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) t_i \bar{t}_j$$

si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert Ω de \mathbb{C}^n et pour $z \in \Omega$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$.

2.- Ensembles uniformément H-convexes.

Nous posons suivant [1] la

Définition 1.- Un ensemble fermé F de \mathbb{C}^n est dit uniformément H-convexe s'il existe une constante $\theta > 0$ et une suite Ω_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, de domaines d'holomorphie de \mathbb{C}^n pour lesquels

$$(1) \quad \frac{\theta}{\nu} \leq \inf_{\zeta \in \partial \Omega_\nu} d(\zeta, F) \leq \sup_{\zeta \in \partial \Omega_\nu} d(\zeta, F) \leq \frac{1}{\nu} .$$

On donne deux exemples de variétés totalement réelles Σ qui sont uniformément H-convexes.

Exemple a. On considère le graphe Σ d'une application $F = (f_1, \dots, f_m)$ de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m vérifiant les conditions suivantes:

- (i) Le rang de la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j}\right)_{i,j}$ est égal à n en tout point de \mathbf{C}^n .
- (ii) La différentielle de F est bornée en norme sur \mathbf{C}^n .
- (iii) Il existe une constante positive C_1 telle que

$$(2) \quad \sum_{k=1}^m \left| H_{\bar{f}_k}(z, t) \right|^2 \leq C_1 \left(\sum_{k=1}^m \left| \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 \right)^2$$

pour $t \in \mathbf{C}^n$ et $z \in \mathbf{C}^n$.

Alors Σ est une sous-variété totalement réelle qui est uniformément H -convexe.

Le fait que Σ est totalement réelle résulte de la condition (i). Pour voir que Σ est uniformément H -convexe, introduisons la fonction ϕ définie dans \mathbf{C}^{n+m} par

$$\phi(z, w) = \sum_{k=1}^m |w_k - f_k(z)|^2$$

où $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbf{C}^m$, et désignons, pour tout entier $\nu > 0$, par Ω_ν l'ensemble des couples (z, w) de \mathbf{C}^{n+m} tels que $\phi(z, w) < \nu^{-2}$. Clairement $\Sigma = \phi^{-1}(0)$; de plus si $(z, w) \in \partial \Omega_\nu$ et si on considère sur \mathbf{C}^{n+m} la norme $(z, w) \mapsto |z| + |w|$, en désignant par M une constante ≥ 1 majorant la norme de F' sur \mathbf{C}^n , il vient

$$(M\nu)^{-1} \leq d((z, w), \Sigma) \leq \nu^{-1}.$$

La première inégalité résulte de ce que si $z_0 \in \mathbf{C}^n$, la boule ouverte de centre $(z_0, F(z_0))$ et de rayon $(M\nu)^{-1}$ est contenue dans Ω_ν ; en effet, si $(\zeta, \zeta') \in \mathbf{C}^{n+m}$ vérifie $|\zeta| + |\zeta'| \leq (M\nu)^{-1}$, le théorème des accroissements finis et l'hypothèse (ii) assurent que

$$\phi(z_0 + \zeta, F(z_0) + \zeta') = \sum_{k=1}^m \left| f_k(z_0) + \zeta'_k - f_k(z_0 + \zeta) \right|^2$$

est majoré par $M^2|\zeta|^2 + |\zeta'|^2$ et donc par ν^{-2} . La seconde inégalité vient de

$$d((z, w), \Sigma) \leq |(z, w) - (z, F(z))| \leq \phi(z, w)^{\frac{1}{2}} \leq \nu^{-1}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que Ω_ν est un domaine d'holomorphic pour ν assez grand; or pour $(t, t') \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, il vient

$$(3) \quad H_{\phi}((z, w), (t, t')) =$$

$$\sum_{k=1}^m \left| \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 + \sum_{k=1}^m \left| t'_k - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial z_l}(z) t_l \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^m (w_k - f_k(z)) H_{\bar{f}_k}(z, t).$$

Cette expression est elle-même minorée par

$$\sum_{k=1}^m \left| \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 - 2 \nu^{-1} \left(\sum_{k=1}^m |H_{\bar{f}_k}(z, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

de sorte que l'hypothèse (iii) assure pour $\nu > 2C_1$ que $H_{\phi}((z, w), (t, t')) \geq 0$ lorsque (z, w) reste dans un voisinage convenable de $\bar{\Omega}_{\nu}$. Ainsi Ω_{ν} vérifie la condition de Levi et la démonstration est achevée.

Exemple b. On considère une sous-variété totalement réelle Σ de \mathbf{C}^n de classe \mathcal{C}^2 pour laquelle on suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $C_2 \geq 0$ telles que tout point z de \mathbf{C}^n vérifiant $d(z, \Sigma) < \alpha$ possède une projection unique $p_{\Sigma}(z)$ sur Σ et que sur l'ensemble Σ^{α} des points z de \mathbf{C}^n vérifiant $d(z, \Sigma) < \alpha$, on ait

$$|p_{\Sigma}(z) - p_{\Sigma}(z')| \leq C_2 |z - z'|.$$

Si X, Y sont des vecteurs tangents non nuls en un point x de Σ , on note $A(X, iY)$ l'angle, dans l'espace hilbertien \mathbf{C}^n , de X et de iY . On pose

$$\beta(x) = \inf A(X, iY),$$

lorsque X, Y parcourent les vecteurs non nuls de T_x ; dire que Σ est totalement réelle revient à dire que $\beta(x) > 0$ pour tout point x de Σ . On fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\beta = \inf_{x \in \Sigma} \beta(x) > 0.$$

Dans ces conditions Σ est uniformément H-convexe. Cela résulte aussitôt du

Lemme 2. - Sous les hypothèses qui précèdent et pour $C_2^2 (1 + \cos \beta) < 2$, la fonction $\phi : z \mapsto d^2(z, \Sigma)$ est plurisousharmonique dans Σ^{α} .

Démonstration. Soient $p_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \dots, p_n = \varphi_n + i\psi_n$, les composantes de p_Σ qui est différentiable dans Σ^α puisque la projection sur Σ est unique. Le fait que $p_\Sigma(z)$ minimise la distance du point z de coordonnées $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ à Σ se traduit par

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(z) - x_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) + (\psi_j(z) - \varphi_j(z)) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_k}(z) = 0$$

pour $k = 1, \dots, n$. Il en résulte

$$H_\phi(z, t) = |t|^2 - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial p_1}{\partial z_k}(z) \bar{t}_k t_l,$$

soit encore $\langle (I - A(z))t, t \rangle$ où \langle, \rangle désigne le produit hermitien dans \mathbb{C}^n et $A(z)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial z_k}(z) \right)_{k, l}.$$

On a évidemment

$$A(z) \cdot t = \frac{1}{2} [p'_\Sigma(z) \cdot t + i p'_\Sigma(z) \cdot (-it)]$$

et

$$|A(z) \cdot t|^2 = \frac{1}{4} \left[|p'_\Sigma(z) \cdot t|^2 + |p'_\Sigma(z) \cdot (-it)|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle p'_\Sigma(z) \cdot t, p'_\Sigma(z) \cdot (-it) \rangle \right].$$

Or $p'_\Sigma(z) \cdot t$ et $p'_\Sigma(z) \cdot (-it)$ sont des vecteurs tangents à Σ en $p_\Sigma(z)$ de sorte que l'expression précédente est majorée par $\frac{1}{2} |t|^2 C_2^2 (1 + \cos \beta)$.

L'hypothèse assure alors que $H_\phi(z, t) \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

Si alors Ω_ν désigne l'ensemble des points z de \mathbb{C}^n tels que $d(z, \Sigma) < \nu^{-1}$ pour un entier $\nu > 0$, la suite (Ω_ν) est une suite de domaines d'holomorphic qui vérifient les conditions de la définition 1.

3. Approximation par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ .

Nous établissons ici le

Théorème 3.- Soit Σ une sous-variété fermée totalement réelle de classe \mathcal{C}^r , avec $r > \frac{n}{2} + 1$, de \mathbb{C}^n ; on suppose Σ uniformément H-convexe et on considère une suite (Ω_ν) , $\nu = 1, 2, \dots$ de domaines d'holomorphic

vérifiant (1). Dans ces conditions les restrictions à Σ des fonctions de $\bigcup_{\gamma} H^2(\Omega_{\gamma}, \delta_{\gamma}^4)$ sont denses dans $\mathcal{E}_{\delta_0}^2(\Sigma)$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes à commencer par le
 Lemme 4.- Les restrictions à Σ des fonctions de classe \mathcal{E}^{∞} à support compact de \mathbf{C}^n sont denses dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Soit en effet $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Σ , vérifiant $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ pour tout j et soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur Σ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que φ_j soit égale à 1 au voisinage de K_j et à support dans K_{j+1} .

Pour toute fonction f de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$, la fonction $w|\varphi_j f - f| = w|f|(\varphi_j - 1)$ est nulle sur K_j et majorée par $2w|f|$; elle tend donc uniformément vers zéro lorsque j tend vers l'infini. Par suite f est approchée par des fonctions continues à support compact sur Σ ; en prolongeant ces dernières en des fonctions continues, à support compact sur \mathbf{C}^n , puis en les régularisant on achève la démonstration du lemme. On peut même se limiter à des fonctions de classe \mathcal{E}^{∞} à support dans un voisinage ouvert arbitraire de Σ , soit par exemple Ω_1 .

Rappelons d'autre part un lemme dû à L. Hörmander et J. Wermer [6].

Lemme 5.- Soit g une fonction de classe \mathcal{E}^{∞} à support compact dans Ω_1 ; il existe une fonction G de classe \mathcal{E}^1 à support compact dans Ω , qui coïncide avec g sur Σ et vérifie pour une constante C_3 l'inégalité

$$(3) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq C_3 d(z, \Sigma)^{r-1},$$

où $j = 1, \dots, n$.

Nous utiliserons enfin comme dans [6] un lemme classique de la théorie des équations aux dérivées partielles:

Lemme 6.- Soient z_0 un point de \mathbf{C}^n et r un nombre réel strictement positif; désignons par B la boule ouverte de centre z_0 et de rayon r . Il existe une constante C_3 telle que pour toute fonction u de $L^2(B)$ pour laquelle $\bar{\partial}u$ soit une fonction continue sur B , on ait

$$|u(z_0)| \leq C_3 \left\{ r^{-n} \|u\|_{L^2(B)} + r \sup_{z \in B} |\bar{\partial}u(z)| \right\}.$$

Démonstration du théorème. - Nous sommes ramenés par le lemme 4 à approcher

une fonction g de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact K dans Ω_1 . Pour chaque entier $\nu > 0$, la restriction ω_ν de $\bar{\partial}G$ à Ω_ν , est une forme fermée de type $(0, 1)$ de sorte qu'il existe d'après [4] une fonction G_ν dans Ω_ν , vérifiant $\bar{\partial}G_\nu = \bar{\partial}G$ et

$$(4) \quad \int_{\Omega_\nu} |G_\nu|^2 \delta_o^4 \, d\lambda \leq \int_{\Omega_\nu} |\bar{\partial}G|^2 \, d\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue de \mathbf{C}^n . Clairement $G - G_\nu$ est holomorphe et donc dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ et $G - (G - G_\nu) = G_\nu$. Il nous suffit alors de montrer que $\delta_o^4 G_\nu$ tend uniformément vers zéro sur Σ lorsque ν tend vers l'infini. Appliquons pour cela le lemme 6 à la fonction G_ν , restreinte à une boule ouverte B de centre $x \in \Sigma$ et de rayon $\theta \bar{\nu}^1$; il vient

$$|G_\nu(x)| \leq C_3 \left\{ \nu^n \theta^{-n} \left(\int_B |G_\nu|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} + \theta \bar{\nu}^1 \sup_{z \in B} |\bar{\partial}G_\nu(z)| \right\}.$$

On vérifie facilement qu'il existe une constante C_4 telle que $\delta_o^2(x) \leq C_4 \delta_o^2(z)$ pour $|x-z| \leq 1$ de sorte que

$$\delta_o^2(x) |G_\nu(x)| \leq C_3 \left\{ C_4^2 \nu^n \theta^{-n} \left(\int_B \delta_o^4(z) |G_\nu(z)|^2 \, d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{2}} + \theta \bar{\nu}^1 \delta_o^2(x) \sup_{z \in B} |\bar{\partial}G_\nu(z)| \right\},$$

le membre de droite étant lui-même majoré d'après (4) par

$$C_3 \left\{ C_4^{-2} \nu^n \theta^{-n} \left(\int_{\Omega_\nu} |\bar{\partial}G|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} + \theta \bar{\nu}^1 \sup_{z \in K} |\bar{\partial}G| \right\}.$$

En utilisant alors l'inégalité (3) et le fait que le volume de $\Omega_\nu \cap K$ est un $O(\nu^{-(2n-k)})$, il est clair que l'expression considérée tend uniformément vers zéro pour $x \in \Sigma$ lorsque $\nu > \frac{k}{2} + 1$.

Remarque. Si on remplace la condition (1) de la définition 1 par la condition

$$\bigcup_{x \in \Sigma} B(x, \theta(x) \bar{\nu}^{-1}) \subset \Omega_\nu \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B(x, \bar{\nu}^{-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

dans laquelle θ est une fonction continue sur Σ à valeurs dans $]0, 1]$ et $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r , on obtient alors en conclusion que $\bigcup_\nu H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ est dense dans $\mathcal{E}_{\theta, n} \delta_o^2(\Sigma)$.

La nouvelle condition a d'autant plus de chance d'être vérifiée que θ tend plus vite vers zéro à l'infini.

On utilise les mêmes majorations que précédemment mais en prenant pour B la boule ouverte de centre x et de rayon $\theta(x) \bar{\nu}^{-1}$.

Nous allons maintenant dans des cas particuliers passer de l'approximation par des fonctions holomorphes avec un voisinage variable de Σ à l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage fixe à l'aide du résultat suivant de [8] :

Théorème 7. - Soient k un entier naturel, Ω un domaine d'holomorphie de \mathbb{C}^n et δ une fonction lipschitzienne strictement positive dans Ω tendant vers zéro au bord de Ω ; on suppose que $-\log \delta$ est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante $(\varphi_i)_{i \in I}$ de fonctions plurisousharmoniques positives dans un domaine d'holomorphie Ω' contenant Ω . On peut alors approcher toute fonction de $H^2(\Omega, \delta_o^k)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta^2 \delta_o^{k+4})$ par des fonctions de $\bigcup_i H^2(\Omega', \exp(-\varphi_i) \delta_o^{k+4})$.

Notons que si $\Omega' = \mathbb{C}^n$ et si chaque fonction $\exp \varphi_i$ est à croissance polynômiale, alors l'approximation se fait par des polynômes.

Nous obtenons d'abord la

Proposition 8. - On se place dans le cas de l'exemple b) dont on conserve les notations ; alors $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_o^8)$ est dense dans $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$.

Démonstration. - Puisque Σ est uniformément H -convexe, on est ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathcal{E}_{\delta_o^4}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ par des fonctions de $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_o^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$d_\nu(z) = (\nu^{-2} - d^2(z, \Sigma))^+.$$

Clairement d_ν est lipschitzienne sur \mathbb{C}^n et l'ensemble des points où d_ν est strictement positive est l'ouvert Ω_ν des points z tels que $d(z, \Sigma) < \nu^{-1}$.

La fonction $x \mapsto -\log((\nu^{-1} - x)^+)$ est convexe sur $[0, +\infty[$; on peut l'écrire sur cet intervalle comme enveloppe supérieure d'une suite croissante $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions convexes finies (en la remplaçant par exemple par une fonction affine pour $x > \nu^{-1} - 1/j$). Par suite on a

$$-\log d_\nu = \sup_j \varphi_j,$$

où $\varphi_j(z) = f_j(d^2(z, \Sigma))$. Chaque fonction φ_j est évidemment plurisous-harmonique dans Σ^α . Pour $\nu \geq 1/\alpha$ on a $\Omega_\nu \subset \Sigma^\alpha$; en appliquant le théorème 7, on approche les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_\circ^4)$ pour la norme de $H^2(\Omega_\nu, d_\nu^2 \delta_\circ^8)$ par des fonctions de

$$\bigcup_j H^2(\Sigma^\alpha, \exp(-\varphi_j) \delta_\circ^8).$$

La démonstration s'achève alors car d'une part $d_\nu^2(x) \geq \nu^{-2}$ pour $x \in \Sigma$ et la restriction $H^2(\Omega_\nu, \delta_\circ^8) \rightarrow \mathcal{E}_{\delta_\circ^4}(\Sigma)$ est continue d'après le lemme 6, et d'autre part $\exp(-\varphi_j)$ est minorée sur Σ^α .

Nous obtenons d'autre part la

Proposition 9. - On se place dans le cas de l'exemple a) dont on conserve les notations; si Ω désigne l'ensemble ouvert des points (z, w) tels que $\phi(z, w) < 2C_1$, alors $H^2(\Omega, \delta_\circ^8)$ est dense dans $\mathcal{E}_{\delta_\circ^4}(\Sigma)$.

Si les fonctions f_k sont de plus pluriharmoniques, toute fonction de $\mathcal{E}_{\delta_\circ^4}(\Sigma)$ peut être approchée par des fonctions entières.

Démonstration. - Comme on l'a vu au paragraphe 2, la fonction ϕ est plurisousharmonique dans Ω . On est ramené, comme pour la proposition précédente, à approcher dans $\mathcal{E}_{\delta_\circ^4}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_\circ^4)$ par des fonctions de $H^2(\Omega, \delta_\circ^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$\phi_\nu(z, w) = (\nu^{-2} - \phi(z, w))^+.$$

La fonction ϕ_ν est lipschitzienne dans Ω à cause de l'hypothèse (ii). Si on considère les fonctions f_j introduites pour démontrer la proposition précédente et si l'on pose $\psi_j = f_j \circ \phi$, alors

$$-\log \phi_\nu = \sup_j \psi_j.$$

sur Ω , où ψ_j est plurisousharmonique et bornée dans Ω . Il en résulte alors que $\bigcup_j H^2(\Omega, \exp(-\psi_j) \delta_\circ^8)$ est dense dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_\circ^4)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta_\circ^8)$, ce qui permet d'achever la démonstration.

Si les fonctions f_j sont pluriharmoniques, alors ϕ est plurisousharmonique dans \mathbf{C}^{n+m} et l'approximation se fait par des fonctions de $H^2(\mathbf{C}^{n+m}, \exp(-\psi_j) \delta_\circ^8)$ et par conséquent des fonctions entières.

4. Régularisation des fonctions plurisousharmoniques.

Pour traiter le problème de l'approximation des fonctions de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ par des polynômes, nous avons besoin d'introduire un procédé de régularisation des fonctions plurisousharmoniques. Si f est une fonction numérique réelle, semi-continue inférieurement, sur un espace métrique E , nous posons pour chaque entier $k > 0$ et chaque point x de l'espace

$$f_k(x) = \inf_{\xi \in E} (k d(\xi, x) + f(\xi)).$$

La fonction f_k est lipschitzienne dans le rapport k et majorée par f ; c'est précisément la plus grande fonction ayant ces propriétés. On vérifie facilement que la suite (f_k) est croissante et qu'elle converge simplement vers f lorsque f est minorée.

Soient maintenant Ω un ouvert de \mathbf{C}^n et f une fonction positive semi-continue sur Ω . Nous prolongeons f par zéro hors de Ω , obtenant ainsi une fonction semi-continue inférieurement sur \mathbf{C}^n , et considérons la suite (f_k) de fonctions sur \mathbf{C}^n qui est associée à f par le procédé mentionné ci-dessus. Nous allons interpréter f_k d'une manière différente.

Désignons pour cela par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des points (z, w) de $\Omega \times \mathbf{C}$ tels que $|w| < f(z)$ et considérons sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ la norme $(z, w) \mapsto k|z| + |w|$ et la distance d_k associée à cette norme.

Lemme 10. - Pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, on a $f_k(z) = d_k[(z, 0), \tilde{\Omega}]$; si de plus Ω est un domaine d'holomorphic et si $-\log f$ est plurisousharmonique dans Ω , alors $-\log f_k$ est plurisousharmonique dans Ω .

Démonstration. - On a en effet successivement

$$\begin{aligned} d_k [(z, 0), \tilde{\Omega}] &= \inf_{(\zeta, z) \notin \tilde{\Omega}} [k|\zeta - z| + w] \\ &= \inf_{\zeta \in \mathbf{C}^n} [k|\zeta - z| + f(\zeta)] \\ &= f_k(z). \end{aligned}$$

De plus, si Ω est un domaine d'holomorphic et si $-\log f$ est plurisousharmonique dans Ω , alors $\tilde{\Omega}$ est un domaine d'holomorphic d'après le théorème d'Oka. Par suite la fonction $(z, w) \mapsto -\log d_k [(z, w), \tilde{\Omega}]$ est plurisousharmonique dans $\tilde{\Omega}$. Sa trace sur Ω l'est encore; or c'est précisément f_k .

Signalons au passage une conséquence de ce lemme qui n'est pas directement utile pour la suite, mais présente un intérêt propre.

Proposition 11. - Pour toute fonction plurisousharmonique dans ce domaine d'holomorphie Ω de \mathbb{C}^n , il existe une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques localement lipschitziennes qui converge simplement vers φ ; si φ est continue, la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. - On applique ce qui précède à la fonction $\exp(-\varphi)$, prolongée par zéro hors de Ω . Il suffit simplement de poser

$$\varphi_k = \left\{ -\log [\exp(-\varphi)] \right\}_k ,$$

pour obtenir une suite ayant les propriétés souhaitées.

Nous nous limiterons maintenant au cas de fonctions lipschitziennes dans le rapport 1. Pour toute fonction polynomiale p sur \mathbb{C}^n , nous définissons une fonction p^* sur \mathbb{C}^n par

$$\frac{1}{p^*(z)} = \inf_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \left[|\zeta - z| + \frac{1}{p(\zeta)} \right] .$$

Clairement $1/p^*$ est lipschitzienne dans le rapport 1 et p^* majore $|p|$; en fait p^* est la plus petite fonction ayant ces propriétés. De plus,

Lemme 12. - La fonction p^* est à croissance polynomiale et $\log p^*$ est plurisousharmonique.

Démonstration. - La première assertion résulte de ce que pour tout polynôme p , il existe une constante C et un nombre entier naturel r tels que

$$|p(z)| \leq C (1+|z|)^r .$$

On peut choisir C assez grande pour que la fonction $z \mapsto C^{-1}(1+|z|)^{-r}$ soit lipschitzienne dans le rapport 1, de sorte que cette fonction minore encore $1/p^*$. Quant à la seconde assertion, elle résulte seulement du lemme 10 et du fait que la fonction $\log |p|$ est plurisousharmonique sur \mathbb{C}^n .

5. Approximation polynomiale.

Etant donné un poids w sur Σ et un nombre $\varepsilon > 0$, on désigne de façon générale par $B_{\varepsilon, w}$ l'ensemble des fonctions polynomiales p sur \mathbb{C}^n pour lesquelles $|p(x+z)| w(x) \leq 1$ pour tout point x de Σ et tout

point $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $|z| \leq \varepsilon$. Nous désignons d'autre part par Σ^ε l'ensemble des points z de \mathbb{C}^n tels que $d(z, \Sigma) < \varepsilon$.

Théorème 13. - Nous reprenons les notations et hypothèses du paragraphe 1. S'il existe un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que pour tout entier $\nu > 1$ on ait

$$\sup_{p \in B_{\theta \bar{\nu}^1, \delta_o^{-4} w}} p^*(z) = +\infty$$

en tout point z du bord de $\Sigma \bar{\nu}^1$, les polynômes sont denses dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Démonstration. - Posons

$$\delta_\nu = \inf_{p \in B_{\theta \bar{\nu}^1, \delta_o^{-4} w}} 1/p^*,$$

et désignons par Ω_ν l'ensemble des points où δ_ν est strictement positive. Il est facile de vérifier que δ est lipschitzienne dans le rapport 1 et que Ω_ν est un domaine de Runge compris entre $\Sigma_{\theta \bar{\nu}^1}$ et $\Sigma \bar{\nu}^1$. Cela montre en particulier que Σ est uniformément H-convexe. On est donc ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_o^4)$ par des polynômes. Compte tenu du lemme 12, le théorème 7 montre que l'approximation peut être faite pour la norme de $H^2(\Omega_\nu, \delta^2 \delta_o^8)$; il ne reste plus qu'à montrer que cette norme est plus fine que celle de $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

Or si $f \in H^2(\Omega_\nu, \delta^2 \delta_o^8)$, en utilisant la sous-harmonicité de la fonction $|f|^2$ dans Ω_ν , il vient pour une constante C convenable

$$|f(x)|^2 w^2(x) \leq C \nu^{-2n} w^2(x) \int_{B(x, \frac{\theta}{2\nu})} |f(z)|^2 d\lambda(z).$$

La démonstration sera donc achevée si l'on sait que $w(x) \leq C' \delta_o^4(z) \delta_\nu(z)$ pour $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$, où C' est une constante. Or si un polynôme p appartient à $B_{\theta \bar{\nu}^1, \delta_o^{-4} w}$, il vérifie pour $\zeta \in B(x, \theta \bar{\nu}^1)$ la majoration

$$p(\zeta) \delta_o^{-4}(x) w(x) \leq 1.$$

Il en résulte que si $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$ et $\zeta \in \mathbb{C}^n$, alors

$$|\zeta - z| + \frac{1}{|p(\zeta)|} \geq \text{Min} \left[\frac{\theta}{2\nu}, w(x) \delta_o^{-4}(x) \right],$$

comme on le voit en distinguant les cas $|\zeta - z| \leq \frac{\theta}{2\nu}$ et $|\zeta - z| \geq \frac{\theta}{2\nu}$. Par

suite, pour $z \in B(x, \frac{\theta}{2\nu})$, il vient

$$\frac{1}{p^*(z)} \geq \text{Min} \left[\frac{\theta}{2\nu}, w(x) \delta_o^{-4}(x) \right]$$

soit $p^*(z) = O(\delta_o^4(x) w^{-1}(x))$. Sachant que par ailleurs $\delta_o^{-4}(x) = O(\delta_o^{-4}(z))$, et passant à la borne supérieure sur p , on obtient l'inégalité cherchée.

On obtient de façon analogue dans un cas particulier le

Théorème 14. - Nous nous plaçons sous les hypothèses de l'exemple b).

S'il existe $\varepsilon \in]0, \alpha[$ tel que

$$\sup_{p \in B(\varepsilon, \delta_o^{-6} w)} p^*(z) = +\infty$$

en tout point z du bord de Σ_α , les polynômes sont denses dans $\mathcal{E}_w(\Sigma)$.

La démonstration se conduit comme pour le théorème précédent.

Bibliographie

- [1] Cirka (E.M.).- Math Sbornik, 78 (1969), p. 95-114.
- [2] Ferrier (J.-P.).et Sibony (N.).- C. R. A. S., t. 276, p. 175-177, (1973).
- [3] Harvey (F. R.) et Wells (R. O.).- Bull. Amer. Math. Soc. 77(1971),
p. 824-828.
- [4] Hörmander (L.).- Acta Math., Uppsala, 113 (1965), p. 89-152.
- [5] Hörmander (L.).- An introduction to complex analysis in several variables,
New-York, D. Van Nostrand Company, 1966.
- [6] Hörmander (L.) et Wermer (J.).- Math. Scand., 23 (1968), p. 5-21.
- [7] Nirenberg (R.) et Wells Jr. (R. O.).- Trans. Amer. Math. Soc., 142 (1969),
p. 5-35.
- [8] Sibony (N.).- Approximation polynomiale pondérée dans un domaine
d'holomorphie de \mathbb{C}^n , à paraître.

