PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

80.08

LES SYMETRIES DES EQUATIONS ET LEURS APPLICATIONS DANS LA MECANIQUE ET LA PHYSIQUE

D.H. SATTINGER

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Matiérisation

code matière : 35 A.30, 35 G.20, 35 Q.99, 22.05, 22 E.45

mots-clefs : équations aux dérivées partielles, groupes de Lie

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

80.08

LES SYMETRIES DES EQUATIONS ET LEURS APPLICATIONS DANS LA MECANIQUE ET LA PHYSIQUE

D.H. SATTINGER

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

LES SYMETRIES DES EQUATIONS

ET LEURS APPLICATIONS

DANS LA MECANIQUE ET LA PHYSIQUE

D.H. SATTINGER

Cours de Troisième Cycle, (1980)
Université Paris-Sud, Centre d'Orsay

I - INVARIANCE ET CONSERVATION ; THEOREMES D'EMMY NOETHER

A. Problèmes en dimension un

Nous commençons en traitant les problèmes de variations les plus simples, ceux en dimension 1 . Supposons que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x,u,u')\,dx$$

est invariante pour une famille de transformations générales de la forme

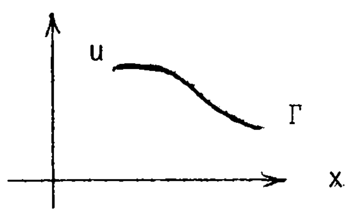
$$(1.1)\qquad \begin{cases} x^* = X(x,u,\varepsilon) \\ u^* = U(x,u,\varepsilon) \end{cases}$$

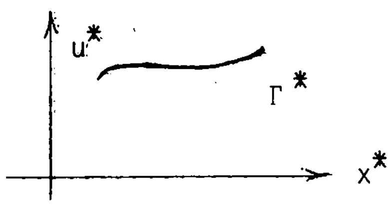
qui se réduisent à l'identité pour $\varepsilon=0$. Sous (1.1) une fonction $u(x)$ est transformée en une fonction $u^*(x^*)$ définie par

$$(x,u(x)) \longrightarrow (X(x,u(x),\varepsilon),\, U(x,u(x),\varepsilon)) = (x^*,u^*(x^*)) \;.$$

Alors

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u^*(x^*) = U(x,u(x),\varepsilon) \\ \quad x^* = X(x,u(x),\varepsilon) \end{cases}$$





Nous considérons donc une transformation très générale du plan x-u au plan x^*-u^*. Une fonction $u(x)$ avec son graphe Γ est transformée dans une nouvelle fonction $u^*(x^*)$ avec graphe Γ^*, Γ^* étant l'image de Γ par la transformation.

Or, par l'invariance de l'intégrale nous voulons dire que, pour x_0, x_1 quelconques et fonction $u(x)$,

$$\int_{x_0^*}^{x_1^*} L(x^*,u^*(x^*),u^{*\prime}(x^*))\, dx^* = \int_{x_0}^{x_1} L(x,u(x),u'(x))\, dx .$$

En faisant un changement de variables on arrive à

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x^*,u^*(x^*),u^{*\prime}(x^*))\, \frac{dX}{dx}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} L(x,u(x),u'(x))\, dx ;$$

alors il faut que

$$(1.3) \qquad L(x,u(x),u'(x))\, dx = L(x^*,u^*(x^*),u^{*\prime}(x^*))\, dx^*$$

pour tout ε, où $dx^* = \frac{\partial}{\partial x} X(x,u(x),\varepsilon)\, dx$ et

$$u^{*\prime}(x^*) = \frac{d}{dx^*} u^*(x^*) .$$

Il est pratique de considérer u, u', u", ... comme coordonnées dans un espace de vecteurs $J^\infty = (x,u,u',u",\ldots)$ de dimension infinie. On définit la dérivée totale D_x sur J^∞ par

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial u'} + u" \frac{\partial}{\partial u"} + \ldots$$

Donc $D_x L(x,u,u') = L_x + L_u u' + L_{u'} u"$, et aussi

$$dx^* = (D_x X)\, dx \quad \text{et} \quad u^{*\prime} = \frac{d}{dx^*} u^*(x^*) = \frac{d}{dx} U(x,u(x),\varepsilon)\, \frac{dx}{dx^*} = D_x U / D_x X .$$

Maintenant nous définissons l'opérateur $\delta = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ et nous appliquons δ à la relation d'invariance (1.3). Nous obtenons

$$\delta(L\, dx^*) = (\delta L)\, dx + L\delta(dx^*) = 0 \ .$$

(Rappelons-nous que $x^* = x$ quand $\varepsilon = 0$; alors $dx^* = dx$ quand $\varepsilon = 0$). Il s'ensuit que

$$(1.4) \qquad L_x\, \delta x^* + L_u\, \delta u^* + L_{u'}\, \delta(u^{*'}) + L\delta(dx^*) = 0 \ .$$

Or, $\delta D_x x^* = \delta D_x X = D_x\, \delta X$. Nous définissons

$$\overline{\delta} u^* = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\, u^*(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \ ;$$

alors

$$\delta u^* = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\, u^*(x^*,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = u^{*'}(x,0)\delta x^* + \overline{\delta} u^* = u'\delta X + \overline{\delta} u^* \ ;$$

$$\begin{aligned} \delta u^{*'} &= u^{*''}\, \delta x^* + \overline{\delta} u^{*'} \\ &= u''\delta X + (\overline{\delta} u^*)' \\ &= u''\delta X + D_x(\overline{\delta} u^*) \ . \end{aligned}$$

L'équation (1.4) devient

$$\begin{aligned} &(L_x + L_u u' + L_{u'} u'')\delta X + L\, D_x(\delta X) + L_u\, \overline{\delta} u^* + L_{u'}\, D_x(\overline{\delta} u^*) \\ &\qquad = D_x(L\delta X + L_{u'} \overline{\delta} u^*) + (Lu - D_x\, L_{u'})\overline{\delta} u^* = 0 \ . \end{aligned}$$

Puisque l'expression $L_u - D_x L_{u'} = [L]_u$ est l'expression Euler-Lagrange, ce terme disparaît pour les extrêma. Alors pour les extrêma du problème variationnel nous avons la condition

$$D_x(L\delta X + L_{u'}\, \overline{\delta} u^*) = 0 \ .$$

Nous sommes arrivés à une loi de conservation.

Par exemple, le Lagrangien $L(u,u')dx$ est invariant par rapport au groupe des translations $x \to x+\varepsilon$. Nous avons

$$x^* = x + \varepsilon \ , \quad u^* = u \ , \quad u^*(x^*) = u(x) = u(x^* - \varepsilon) \ ;$$

alors $\delta X = 1$ et $\overline{\delta}u^* = - u'$. La quantité conservée est donc $L - u' L_{u'}$.

On étend facilement ces résultats au cas de plusieurs fonctions $u_1, \ldots, u_n$. On obtient que

$$(1.5) \qquad (L\delta X + \sum_{i=1}^{n} L_{u_i'} \overline{\delta}u_i^*)_x = 0 .$$

On note deux classes de transformations spéciales :

i) <u>transformations des variables indépendantes</u> $u_i^* = u_i$, $x^* = X(x,\varepsilon)$

Dans ce cas

$$u_i^*(x^*,\varepsilon) = u_i(x) = u_i(X^{-1}(x^*,\varepsilon))$$

et

$$\overline{\delta}u_i^* = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} u_i^*(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} u_i(X^{-1}(x,\varepsilon),\varepsilon) = u_i'\delta X^{-1} = - u_i'\delta X .$$

On arrive donc à la loi de conservation

$$(1.6) \qquad \frac{d}{dx}((L - \sum_{i=1}^{n} u_i' L_{u_i'})\delta X) = 0 ;$$

ii) <u>transformations de "jauge"</u> $u_i^* = U_i(u,\varepsilon)$, $x^* = x$.

Alors $u_i^*(x^*) = U_i(u(x),\varepsilon) = u_i^*(x)$, et $\overline{\delta}u_i^* = \delta U$.

La loi de conservation dans ce cas est

$$(1.7) \qquad (\sum_{i=1}^{n} L_{u_i'} \delta U_i)_x = 0 .$$

<u>Exemple</u> : Conservation de l'énergie, de l'implusion et du moment cinétique en mécanique

Le Lagrangien d'un système de particules est

$$L(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x,y,\ldots,z_n) .$$

On suppose que V dépend seulement des différences $x_i - x_j$, etc...

Ce Lagrangien est invariant par rapport aux translations :

$$t^* = t \ , \quad x_i^* = x_i + \varepsilon \ , \quad y_i^* = y_i \ , \quad z_i^* = z_i \ .$$

Pour ce groupe on a $\delta t^* = 0$, $\bar{\delta} x_i^* = 1$, $\bar{\delta} y_i^* = 0$, et $\bar{\delta} z_i^* = 0$. Alors la loi de conservation est

$$\frac{d}{dt}\left(L\delta t^* + \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{x}_i}\ \bar{\delta} x_i^*\right) = 0 \ ,$$

où $\displaystyle \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} L_{\dot{x}_i} = 0$,

où $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} m_i\ \dot{x}_i = P_x$ = constant

Alors l'invariance par rapport aux translations $x \to x+\varepsilon$ conduit à la conservation de la quantité de mouvement dans la direction x .

De la même façon on obtient les quantités conservées

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ \dot{y}_i = \text{const.}, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\ \dot{z}_i = \text{const.}$$

De l'invariance par rapport aux rotations, on obtient la conservation du moment cinétique. Posons $t^* = t$,

$$x_i^* = x_i \cos\varepsilon + y_i \sin\varepsilon$$

$$y_i^* = -\ x_i \sin\varepsilon + y_i \cos\varepsilon$$

$$z_i^* = z_i$$

pour une rotation autour de l'axe z . On démontre sans difficulté que le Lagrangien est invariant par rapport à ces transformations. Puisque $\delta t^* = 0$, $\bar{\delta} x_i^* = y_i$, $\bar{\delta} y_i^* = -\ x_i$, $\bar{\delta} z_i^* = 0$, la loi de conservation est

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\ L_{\dot{x}_i} - x_i\ L_{\dot{y}_i}\right) = 0 \ ,$$

où

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i\ \dot{x}_i - x_i\ \dot{y}_i) = 0 \ .$$

Enfin, de l'invariance sous les translations du temps $t^* = t + \varepsilon$ on déduit la conservation d'énergie :

$$x_i^*(t^*) = x_i(t^*-\varepsilon) \text{ , etc ... ;}$$

$$\delta t^* = 1 \text{ , } \bar{\delta} x_i^* = - x_i' \text{ , } \bar{\delta} y_i^* = - y_i' \text{ , } \bar{\delta} z_i^* = - z_i' \text{ ; donc}$$

$$L - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i L_{\dot{x}_i} + \dot{y}_i L_{\dot{y}_i} + \dot{z}_i L_{\dot{z}_i} = \text{const.}$$

où

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V(x_1,\ldots,z_n) = \text{const.}$$

B. <u>Courants conservés pour les équations aux dérivées partielles.</u>

On obtient aussi de tels résultats en dimension deux, trois, etc. Par exemple, si le Lagrangien $L(x,y,u,u_x,u_y)\, dx\, dy$ est invariant par rapport à une famille de transformations on obtient, pour les extrema, la loi de conservation

$$(L\delta X + L_{u_x} \bar{\delta} u^*)_x + (L\delta Y + L_{u_y} \bar{\delta} u^*)_y = 0 \text{ .} \tag{1.8}$$

Cette fois les transformations prennent la forme

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y,u,\varepsilon) \\ y^* &= Y(x,y,u,\varepsilon) \\ u^* &= U(x,y,u,\varepsilon) \text{ .} \end{aligned}$$

Pour arriver à (1.8) on procède presque comme en dimension une ; seulement il faut calculer la variation de l'élément $dx^*\, dy^*$. Puisque

$$dx^*\, dy^* = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy$$

nous avons

$$\delta(\frac{\delta(X,Y)}{\delta(x,y)})\, dx\, dy = \delta \begin{vmatrix} D_x X & D_x Y \\ D_y X & D_y Y \end{vmatrix} dx\, dy$$

$$= (\delta D_x X + \delta D_y Y)\, dx\, dy\ .$$

(Nous remarquons que, $A(t)$ étant une matrice pour laquelle $A(0) = I$, alors

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \frac{d}{dt}\ e^{\mathrm{Tr}\ \log A} = \mathrm{Tr}\ \dot{A}(0)\ .)$$

Aussi, rappelons-nous que $X = X(x,y,u(x,y),\varepsilon)$, etc...

En utilisant la notation des formes différentielles on peut faire le calcul comme ceci :

$$\delta(dx^* \wedge dy^*) = \delta(dx^*) \wedge dy^* + dx^* \wedge \delta(dy^*)$$

$$= \delta(dX) \wedge dy + dx \wedge \delta(dY)\ .$$

Mais $dX = (D_x X)dx + (D_y X)dy$ et $\delta dX = D_x(\delta X)dx + D_y(\delta X)dy$. Alors

$$\delta(dX) \wedge dy = D_x(\delta X)dx \wedge dy\ .$$

De la même façon

$$dx \wedge \delta(dY) = D_y\ \delta Y\ dx \wedge dy\ .$$

Alors

$$\delta(dX \wedge dY) = {-D_x}\ \delta X + D_y\ \delta Y)dx \wedge dy\ .$$

Plus généralement on a, pour variables x^j et fonctions u_α ,

$$(1.9) \qquad \frac{\partial}{\partial x^j}\ (L\delta x^j + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial^j\ u_\alpha)}\ \bar{\delta} u_\alpha^*) = 0$$

où ∂^j signifie $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$.

Exemples

i) Le Lagrangien pour l'équation de Laplace est

$$L\,dx\,dy = (\nabla u)^2\,dx\,dy = (u_x{}^2 + u_y{}^2)\,dx\,dy\ .$$

Il est invariant par rapport au groupe des translations

$$x^* = x + \varepsilon \quad , \quad y^* = y \quad , \quad u^* = u\ ;$$

On a $u^*(x^*,y^*) = u(x^*-\varepsilon,y^*)$, et

$$\delta x^* = 1\ ,\quad \delta y^* = 0\ ,\quad \overline{\delta} u^* = -\ ux\ .$$

La loi de conservation est donc

$$(L\delta x^* + Lu_x\,\overline{\delta}u^*)_x + (L\delta y^* + Lu_y\,\overline{\delta}u^*)_y = 0\ ,$$

$$((\nabla u)^2 + 2u_x(-u_x))_x + (2u_y(-u_x))_y = 0\ ,$$

ou

$$(u_y^2 - u_x^2)_x - 2(u_x\,u_y)_y = 0\ .$$

Sous forme d'intégrale, c'est

$$\oint_C 2u_x\,u_y\,dx + (u_y^2 - u_x^2)\,dy = 0$$

pour toute courbe fermée C . Cette équation a un sens pour toute fonction u harmonique.

ii) Invariance aux rotations. Le Lagrangien est aussi invariant par rapport aux rotations

$$x^* = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon$$

$$y^* = -\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon$$

$$u^* = u\ .$$

Alors

$$\delta x^* = y \ , \quad \delta y^* = - x \quad , \quad \overline{\delta} u^* = (- y \frac{\delta}{\delta x} + x \frac{\delta}{\delta y}) \ u \ .$$

La loi de conservation est donc

$$((\nabla u)^2 y + 2u_x(-yu_x + xu_y))_x + ((\nabla u)^2(-x) + 2u_y(-yu_x + xu_y))_y = 0 \ ,$$

et sous forme d'intégrale

$$\oint 2 \ u_x u_y \ d(xy) + (u_y^2 - u_x^2) \ d(y^2 - x^2) = 0$$

iii) Transformations d'échelle.

$$x^* = \lambda x \ , \quad y^* = \lambda y \ , \quad u^* = u \qquad\qquad (\lambda = 1+\varepsilon).$$

Alors $u^*(x,y,\lambda) = u(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$ et

$$\delta x^* = x \ , \quad \delta y^* = y \ , \quad \overline{\delta} u^* = - (u_x + u_y) \ .$$

On arrive à

$$((\nabla u)^2 x - 2u_x(u_x+u_y))_x + ((\nabla u)^2 - 2u_y(u_x+u_y))_y = 0$$

ou

$$\oint (\nabla u)^2 \ (x \ dy - y \ dx) + (u_x + u_y)(u_y \ dy - u_x \ dx) = 0 \ .$$

<u>Equation des Ondes.</u> Le Lagrangien pour l'équation des ondes en dimension 1 est $L(u_x, u_t) = (u_x^2 - u_t^2)$. Il est invariant par rapport aux translations en temps

$$t^* = t + \varepsilon \ , \quad x^* = x \quad , \quad u^* = u \ .$$

Pour ce groupe nous trouvons $\delta t^* = 1$, $\delta x^* = 0$, $\overline{\delta} u^* = - u_t$ et

$$2(u_x u_t)_x = (u_x^2 + u_t^2)_t$$

ou

$$\oint (u_x{}^2+u_t{}^2)dx + 2\, u_x\, u_t\, dt = 0 \ .$$

C'est la loi de conservation d'énergie bien connue. De la même façon, l'invariance par rapport aux translations en x implique que

$$2(u_x u_t)_t - (u_t{}^2+u_x{}^2)_x = 0$$

ou

$$\oint 2\, u_x u_t\, dx + (u_x{}^2+u_t{}^2)dt = 0 \ .$$

Le Lagrangien est aussi invariant par rapport aux transformations de Lorentz

$$x^* = x \cos \varepsilon + t \sin \varepsilon$$

$$t^* = x \sin \varepsilon + t \cos \varepsilon$$

$$u^* = u \ .$$

On trouve facilement

$$\oint (u_x{}^2+u_t{}^2)\ d(xt) + u_x u_t\ d(x^2+t^2) = 0 \ .$$

Enfin, l'invariance par rapport aux transformations d'échelle

$$x^* - \lambda^* \ , \quad t^* = \lambda t \ , \quad u^* = u$$

implique

$$\oint (u_x{}^2-u_t{}^2)(x\ dt - t\ dx) - 2\left[(u_x{}^2 + u_x u_t)dt + (u_t{}^2 + u_x u_t)dx\right] = 0 \ .$$

Tandis que tous ces exemples sont linéaires, on arrive de la même façon à des lois de conservation dans les cas non-linéaires. Par exemple, si l'on considère le Lagrangien $L = u_x{}^2 - u_t{}^2 + f(u)$, qui conduit à une équation des ondes non linéaires, on arrive, en utilisant l'invariance par rapport aux transformations du type de Lorentz, à la loi

$$\oint (u_x{}^2+u_t{}^2)\ d(xt) + u_x u_t\ d(x^2+t^2) + f(u)\ d(\frac{x^2-t^2}{2}) = 0 \ .$$

<u>Conservation de l'énergie</u> pour l'équation des ondes en dimension 3.

En dimension 3 l'équation des ondes est

$$\Box \phi = \phi_{tt} - \Delta\phi = 0 .$$

Le Lagrangien peut s'écrire comme

$$L = g_{\mu\nu}\, \partial^\mu\phi\, \partial^\nu\phi = \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi$$

où

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ , \ \partial_\mu = g_{\mu\nu}\, \partial^\nu .$$

Le Lagrangien est invariant par rapport aux translations dans l'espace de 4 dimensions (espace-temps) ; ainsi

$$x^{*\mu} = x^\mu + \varepsilon\, \delta^\mu{}_\nu \qquad\qquad \phi^* = \phi$$

On a $\delta x^{*\mu} = \delta^\mu{}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ et $\bar{\delta}\phi^* = -\, \partial^\nu\phi$

La loi de conservation est donc

$$\partial^\mu\Big(L\, \delta x^*_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\, \bar{\delta}\phi^*\Big) = 0 .$$

Nous pouvons écrire ceci

$$L\delta x^*_\mu + \frac{L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\, \bar{\delta}\phi^* = \partial_\sigma\phi\, \partial^\sigma\phi\, \delta_\mu{}^\nu - \partial^\nu\phi(2\partial_\mu\phi) .$$

Alors les lois de conservation sont

$$\partial^\mu(T_\mu{}^\nu) = 0 \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, 3$$

où $T_\mu{}^\nu$ est le tenseur d'énergie-impulsion,

$$T_\mu{}^\nu = (\partial_\sigma\phi\, \partial^\sigma\phi)\delta_\mu{}^\nu - 2\, \partial_\mu\phi\, \partial^\nu\phi .$$

Invariance de jauge dans la mécanique quantique.

Nous supposons que $L(\psi_a, \partial^\mu \psi_a)$ est le Lagrangien pour un système de particules dans la mécanique quantique, $a = 1, \ldots, N$, $\mu = 0, 1, 2, 3$; et supposons que ce Lagrangien est invariant par rapport aux transformations de jauge

$$g\psi_a = e^{\theta\tau}\,\psi_a$$

où τ est une matrice $n \times n$, et $e^{\theta\tau}$ son exponentielle. Pour une transformation de ce type on a $\delta x^*_\mu = 0$, $\overline{\delta\psi}^* = \tau\psi = \tau_a{}^b\,\psi_b$. Nous arrivons ainsi à

$$\partial^\mu J_\mu = \partial^\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \psi_a)}\,\tau_a{}^b\,\psi_b\right) = 0 .$$

Alors

$$J_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \psi_a)}\,\tau_a{}^b\,\psi_b$$

est le courant conservé. Plus tard, nous allons étudier des systèmes invariants des systèmes invariants par rapport au groupe SU(2) , qui apparaît dans la théorie de Yang-Mills.

Dans la théorie du champ électromagnétique le groupe Abélien U(1) apparaît. Dans ce cas nous avons des champs complexes ψ et ψ^* et

$$L(\psi,\psi^*) = \partial_\mu\psi\,\partial^\mu\overline{\psi} - m^2\,\psi\overline{\psi}$$

par exemple. Le groupe de transformations dans ce cas est

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \quad , \quad \overline{\psi} \to e^{-i\theta}\overline{\psi} .$$

Alors

$$\delta x_\mu{}^* = 0 \;,\; \overline{\delta\psi}^* = i\psi \;,\; \overline{\delta\overline{\psi}}^* = -i\overline{\psi} \;,$$

et

$$J = \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\psi)} \overline{\delta\psi}^{*} + \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\overline{\psi})} \overline{\delta\psi}^{*} = (\partial_{\mu}\psi)i\psi + (\partial_{\mu}\psi)(-i\psi)$$

$$= i(\psi\ \partial\mu\overline{\psi} - \overline{\psi}\ \partial\mu\psi)\ .$$

Dans la théorie du champ électromagnétique, J_{μ} est un quadrivecteur et la loi $\partial^{\mu} J_{\mu} = 0$ exprime la conservation de charge.

II - GROUPE ET ALGEBRE DE LIE

Une variété analytique, dont tous les éléments forment un groupe, et pour laquelle les opérations de multiplication (au sens du groupe) et d'inversion sont aussi analytiques, s'appelle un groupe de Lie. Dans ce cours nous ne traiterons pas la théorie générale de tels groupes ; nous considérerons seulement les groupes linéaires de Lie. Soit $GL(n,F)$ le groupe des $n \times n$ matrices non-singulières sur un corps F, c'est-à-dire les matrices A pour lesquelles dét $A \neq 0$. Nous prenons pour F soit le corps des réels R, soit le corps des complexes C. Alors $GL(n)$ est une variété analytique de dimension $n^2 - 1$. Un groupe linéaire de Lie est une sous-variété analytique de $GL(n)$ qui est aussi un sous groupe.

Nous donnons des exemples importants.

2.1 - Groupes orthogonaux

Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace des vecteurs (n-tuples) $\underline{x} = (x_1,\ldots x_n)$ et soit $<,>$ le produit scalaire euclidien :

$$<\underline{x},\underline{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

Nous notons par $O(n)$ l'ensemble des matrices O qui conservent le produit scalaire : $<O\underline{x}, O\underline{y}> = <\underline{x}, \underline{y}>$. On voit facilement que

$$O(n) = \{O|OO^+ = I\}$$

et que $O(n)$ est un groupe. De la relation $OO^+ = I$ il suit que dét $O = \pm 1$; le sous ensemble de O pour lequel dét $O = +1$ est un sous groupe, qui se désigne par $SO(n)$. De plus, l'application $O \to$ dét O est un homomorphisme de $O(n)$ dans le groupe multiplicatif $\{\pm 1, \cdot\}$, dont $SO(n)$ est le noyau. Il suit que $SO(n)$ est un sous groupe invariant.

Il existe toujours un élément R qui appartient à $O(n)$ mais pas à $SO(n)$; et $O(n) = SO(n) \cup RSO(n)$. $SO(n)$ et $(R)\, SO(n)$ sont les deux classes résiduelles par rapport au sous groupe invariant $SO(n)$.

On définit un produit scalaire sur l'espace M_n de $n \times n$ matrices par

$$<A, B> = \text{tr } AB^*$$

On voit immédiatement que ce produit scalaire est positif défini. La condition $OO^+ = I$ implique que $O(n)$ est un sous ensemble de la sphère de rayon $\sqrt{n}$. Puisque $O(n)$ est aussi fermé, c'est une sous variété compacte de $GL(n,R)$.

Dans le cas $n = 2$ la condition $OO^+ = I$ nous conduit aux équations

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ces équations possèdent deux classes de solutions :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

La première matrice a pour déterminant un, et appartient à $SO(2)$; la deuxième matrice a pour déterminant - 1 et est une rotation - réflexion. Le groupe $SO(2)$ est donc difféomorphe au cercle S^1.

Les groupes $SO(3)$ et $O(3)$ sont plus compliqués.

<u>Proposition 2.1</u> *<u>Soit $O \in SO(3)$; alors 1 est une valeur propre de O, qui représente une rotation autour d'un axe $\underline{k}$, pour lequel $O\underline{k} = \underline{k}$.</u>*

<u>Démonstration</u>

Si $O \in SO(3)$ alors :

$$\begin{aligned} \text{dét}\,(O-I) &= \text{dét}\,(O^+ - I^+) = \text{dét}\,(O^{-1} - I) \\ &= \text{dét}\,O^{-1}\,(-I)\,(O - I) \\ &= -\,\text{dét}\,(O - I) \end{aligned}$$

Alors $\text{dét}\,(O - I) = 0$ et il existe un vecteur $\underline{k}$ tel que $O\underline{k} = \underline{k}$. Choisissons une base orthonormale $\{f_1, f_2, f_3\}$ pour laquelle $O f_3 = f_3$. Puisque f_3 est invariant et $<,>$ est invariant par rapport à O, le sous-espace $\{f_1, f_2\}$ est aussi invariant ; et la matrice de l'application O prend la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les équations (2.1) sont toujours vérifiées.

Alors O prend la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidemment le groupe SO(3) contient, comme sous groupe, des rotations autour d'un axe fixé.

Le groupe SO(3) se paramétrise par la méthode de la projection stéréographique. Les rotations de la sphère de Riemann sont homomorphes à un sous-groupe des transformations de Möbius du plan complexe. Evidemment toutes les rotations de la sphère engendrent des applications de Möbius qui fixent les images des deux points antipodals de l'axe de révolution. Deux points antipodals ont pour images dans le plan complexe z_0 et $- 1/\bar{z}_0$, et les transformations de Möbius qui en résultent prennent la forme

$$\frac{w - z_0}{w+1/\bar{z}_0} = A\,\frac{z - z_0}{z+1/\bar{z}_0}$$

ou $|A| = 1$ (point technique de la théorie des transformations de Möbius ; voir Knopp, Problem Book I). En prenant $A = e^{i\omega}$ nous obtenons

$$w = \frac{z(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2}\,|z_0|^2) + z_0\,(e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2})}{z\,\bar{z}_0(e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}) + (e^{-i\omega/2} + e^{i\omega/2}\,|z_0|^2)}$$

ou

$$w = \frac{a\,z + b}{-\,\bar{b}\,z + \bar{a}}$$

Rien n'est changé si nous choisissons a et b tel que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Puisque a et b sont complexes nous avons obtenu une correspondance entre les rotations de la sphère, donc les éléments de SO(3), et les points de la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^4$. De plus, les 2 x 2 matrices

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

forment un sous-groupe de GL(2,C), précisément le groupe SU(2) : $UU^* = I$, dét $U = 1$. La sphère S_3 étant compacte et simplement connexe, le groupe SU(2) a aussi ces propriétés ; mais le groupe SO(3) n'est pas simplement connexe!

L'homomorphisme SU(2) $\rightsquigarrow$ SO(3) se manifeste plus clairement par la méthode suivante. Faisons une identification entre les points de $\mathbb{R}^3$ et les 2 x 2 matrices par

$$(x,y,z) \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = \underset{\sim}{X} .$$

Les matrices $A \in SU(2)$ s'appliquent aux $\underset{\sim}{X}$ par

$$U_A \underset{\sim}{X} = A \underset{\sim}{X} A^* .$$

Or les matrices $\underset{\sim}{X}$ possèdent les propriétés suivantes :

$$\operatorname{tr} X = 0 \qquad \underset{\sim}{X}^* = \underset{\sim}{X} \quad , \quad \text{dét } \underset{\sim}{X} = -(x^2 + y^2 + z^2) .$$

Il est clair que ces propriétés sont invariantes par rapport aux applications U_A, en particulier la norme Euclidienne. Donc les applications U_A correspondent aux rotations de l'espace. Notons nous que $U_{A_1} U_{A_2} = U_{A_1 A_2}$; alors nous avons construit un homomorphisme de SU(2) dans SO(3).

Nous montrons maintenant que SO(3) n'est pas simplement connexe. Considérons $A \in SU(2)$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & o \\ o & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix} .$$

On trouve facilement

$$U_A \underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} z & e^{i\omega}(x - iy) \\ e^{-i\omega}(x + iy) & -z \end{pmatrix}$$

et que cette transformation correspond à une rotation autour de l'axe z par l'angle ω. Prenant $\omega = 2\pi$ nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mais } U_A = I \, .$$

Donc, l'image de l'intervalle $[0,2\pi]$ dans SO(3) est une courbe fermée que l'on ne peut pas rétracter en un point, puisqu'elle n'est pas fermée dans SU(2). Ce phénomène mathématique joue un rôle très important dans la mécanique quantique.

2.2 - Groupes Euclidiens

Considérons maintenant le groupe des transformations de l'espace pour lesquelles la distance Euclidienne est invariante. On peut démontrer qu'elles sont toutes de la forme :

$$g\underline{x} = 0\underline{x} + \underline{a}$$

où $a \in \mathbb{R}^3$ et $0 \in O(3)$. La loi de composition est :

$$\{a,0\}\ \{b,0'\} = \{a + 0b,\ 00'\}\ .$$

Ces transformations ne sont pas linéaires, parce qu'elles ne sont pas homogènes ; néanmoins le groupe Euclidien qui est désigné par E(3), est homomorphe à un groupe linéaire par

$$\{a,0\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0 & & a_2 \\ & & & a_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

qu'on vérifie sans difficulté.

2.3 - Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz, qui apparaît dans les théories relativistes, est celui qui laisse invariant la longueur Minkowskienne. On prend

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

comme métrique fondamentale dans l'espace - temps V^4. Les points sont des quadri-vecteurs X^μ, $\mu = 0,1,2,3$. On pose $X_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu$; et la longueur est :

$$X_\mu \; X^\mu = g_{\mu\nu} \; X^\mu \; X^\nu \; .$$

On considère maintenant les transformations $\Lambda^\mu{}_\nu$, $x'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu \; x$, (convention de sommation) telles que :

$$x'_\mu \; x'^\mu = x_\mu \; x^\mu \; .$$

Cette condition implique :

$$\Lambda^t \; g \; \Lambda = g \; .$$

En effet on écrit :

$$x_\mu \; y^\mu = \langle gx,y\rangle = x.y \; .$$

Alors $(\Lambda x) \; . \; (\Lambda y) = \langle g\Lambda x,\Lambda y\rangle = \langle\Lambda^t g\Lambda x,y\rangle = \langle gx,y\rangle$, ce qui implique $\Lambda^t g\Lambda = g$.

Le groupe de Lorentz n'est pas compacte ; il contient, par exemple, le sous groupe

$$\begin{pmatrix} \cos h\alpha & \sin h\alpha & 0 & 0 \\ \sin h\alpha & \cos h\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour n'importe quel α.

Enfin on a aussi le groupe de Poincaré qui est le groupe de Lorentz augmenté des translations, précisément comme les groupes Euclidiens sont des groupes orthogonaux augmentés des translations.

2.4 - Paramétrisation locale des groupes

Soit $\mathcal{G}$ un groupe linéaire de Lie. Comme $\mathcal{G}$ est une variété on introduit des coordonnées locales. Donc il existe un domaine $\mathcal{U}$ ouvert dans F_k (k - triples d'éléments de F), $0 \in \mathcal{U}$, et des fonctions $A(g) \in GL(n)$ pour $g \in F_k$ telles que

1) $A(o) = I$

2) A est analytique en $g = (g_1 \dots g_k)$

3) $g \to A(g)$ est bijective de $\mathcal{U}$ à $A(\mathcal{U})$

4) $\frac{\partial A}{\partial g_j}$ sont linéairement indépendants.

5) il existe U' tel que $0 \in U' \subsetneq U$ et tel que $\forall\ g_1, g_2 \in \mathcal{U}'$ $\exists!$ h tel que

$$A(g_1)\ A(g_2) = A(h)$$

Ayant obtenu des coordonnées locales on a immédiatement un système de coordonnées locales qui couvre le groupe entier. Si $B \in \mathcal{G}$ il suffit de poser $\tilde{A}(g) = BA(g)$ pour obtenir des coordonnées locales dans le voisinage de B.

Cette paramétrisation nous donne une base pour une définition abstraite d'un groupe local. Dans le cas ci-dessus du groupe linéaire il faut qu'il existe une fonction $\varphi : \mathcal{U}' \times \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ définie par

$$A(g_1)\ A(g_2) = A(\varphi(g_1, g_2)) \ .$$

Nous voyons que φ est analytique et, de plus, pour tout $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{U}'$ tel que $\varphi(g_1, g_2)$ et $\varphi(g_2, g_3) \in \mathcal{U}'$,

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, g_3)) = \varphi(\varphi(g_1, g_2), g_3) \qquad (2.2)$$

La propriété (2.2) exprime l'axiome de l'associativité.

Définition 2.2 *Un groupe de Lie locale de dimension k est un domaine ouvert $\mathcal{U}$, $0 \in \mathcal{U} \subset F_k$, sur lequel est défini une fonction φ telle que*

i) $\varphi(g,h) \in \mathcal{U}$ *pour tout* $g,h \in \mathcal{U}$

ii) φ *est analytique*

iii) *Si* $\varphi(g,h) \in \mathcal{U}$ *et* $\varphi(h,k) \in \mathcal{U}$ *alors* $\varphi(\varphi(g,h),k) = \varphi(g,\varphi(h,k))$

iv) $\varphi(o,g) = \varphi(g,o) = g$

2.5 - Algèbres de Lie

Un groupe de Lie étant une variété analytique, son algèbre est l'espace tangent à l'identité. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est un groupe linéaire, on calcule son algèbre $\mathfrak{g}$ par différentation le long d'une courbe à l'origine. Donc, si A(t) est une courbe dans $\mathcal{G}$ tel que $A(o) = I$, $\dot{A}(o) \in \mathfrak{g}$.

Par exemple, dans le cas SO(2) nous avons la suite :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ;$$

donc $\dot{R}(o) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque SO(2) est un groupe de dimension un, son algèbre est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons maintenant l'algèbre SO(n). Si O(t) est une courbe dans SO(n) pour laquelle $O(0) = I$, alors :

$$O(t)\, O^+ (t) = I .$$

On obtient par différentation :

$$\dot{O}(o) + \dot{O}^+(o) = Z .$$

Donc l'algèbre de SO(n) est l'ensemble de toutes les matrices réelles anti-symétriques. On peut prendre comme base, par exemple, les trois matrices

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour SO(3).

Exercices

Trouvez les algèbres des groupes Euclidiens, du groupe de Poincaré, et de SU(2).

Les trois matrices L_1, L_2, L_3 ci-dessus sont les générateurs des rotations autour des axes x,y,z respectivement.

2.6 - Structure des algèbres de Lie

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie, ensemble des matrices de Mn (nxn matrices) qui sont obtenues par le procédé de différentation. Si L_1 et $L_2 \in \mathcal{G}$ alors :

$$[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1 \in \mathcal{G} .$$

On montre ceci tout simplement. Soit $L_1 = \dot{A}(o)$, $L_2 = \dot{B}(o)$ où A(s) et B(s) sont des courbes de $\mathcal{G}$. Alors posons :

$$\mathcal{U}(s) = A(\sqrt{s})\ B(\sqrt{s})\ A^{-1}(\sqrt{s})\ B^{-1}(\sqrt{s}) .$$

Utilisant la série de Taylor nous avons :

$$\mathcal{U}(s) = (I + \sqrt{s}\, L_1)\ (I + \sqrt{s}\, L_2)\ (I - \sqrt{s}\, L_1)\ (I - \sqrt{s}\, L_2) + 0(s^{3/2})$$

$$= I + s[L_1, L_2] + 0(s^{3/2}) .$$

De plus, $\mathcal{U}(s) \in \mathcal{G}$ par la loi de composition ; et $\dot{\mathcal{U}}(o) = [L_1, L_2]$.

Le commutateur $[L_1, L_2]$ appartient donc à $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie, et écrivons $[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k L_k$ où $\{L_1 , L_2, \ldots L_p\}$ est une base de l'algèbre. Les constantes c_{ij}^k s'appellent les constantes de structure de l'algèbre. Elles ne sont pas uniques, car elles dépendent du choix de la base.

Exercice

Trouvez les constantes de structure, pour une certaine base, des algèbres de Lie pour SU(2) , E(3), et le groupe de Lorentz.

On vérifie finalement que le commutateur satisfait l'identité de Jacobi.

$$[A, [B,C]] + [B, [C,A]] + [C, [A,B]] = 0$$

2.7 - Exponentiation

Réciproquement, étant donnée l'algèbre de Lie nous pouvons retrouver le groupe par le procédé d'exponentiation. Soit Mn l'espace des n x n matrices à coefficients dans F, et soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie contenue dans Mn. Pour tout $A \in \mathcal{G}$ la suite $\{e^{tA} | -\infty < t < \infty\}$ constitue un groupe d'un paramètre. Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{G} = \{e^A | A \in \mathcal{G}\}.$$

Il est clair que $I \in \mathcal{G}$ et que $(e^A)^{-1} = e^{-A} \in \mathcal{G}$. Pour démontrer que $\mathcal{G}$ est un groupe il faut établir que $e^A, e^B \in \mathcal{G} \Rightarrow e^A e^B \in \mathcal{G}$, c'est-à-dire qu'il existe un $C \in \mathcal{G}$ pour tout $A,B \in \mathcal{G}$ tel que

$$e^C = e^A e^B \quad .$$

En général il n'est possible de démontrer ceci que dans un voisinage de l'origine. Si A et B sont suffisamment petits de sorte que $\| e^A e^B - I \| < 1$, on peut définir de façon unique :

$$C = \operatorname{Log} e^A e^B \, .$$

En effet rappelons nous que la série

$$\operatorname{Log}(I + R) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j}$$

converge uniformément pour une matrice si $\| R\| < 1$, où $\| R\| = \sup_{\| v\|=1} \| Rv\|$. Il reste à démontrer que $C \in \mathcal{G}$. Pour cela employons le théorème de Campbell - Baker - Hausdorff : Pour tout A,B suffisamment petits

$$\operatorname{Log} e^A e^B = C = B + \int_0^1 g\,(e^{tAdA}\, e^{AdB})\,(A)\,dt$$

où

i) $g(z) = \frac{\log z}{z-1}$

ii) AdA est l'opération $(AdA)X = [A,X]$

iii) $g(e^{tAdA}\, e^{AdB})$ est l'opérateur obtenu en remplaçant z par l'opérateur linéaire $e^{tAdA}\, e^{AdB}$.

Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie les opérations AdA, AdB, $e^{tAdA}\, e^{AdB}$, etc . préservent $\mathcal{G}$.

Exercice

Soit $A,B \in \mathcal{G}$. Montrez que :

$$e^{tA}\, Be^{-tA} = e^{tAdA}B \qquad -\infty < t < \infty .$$

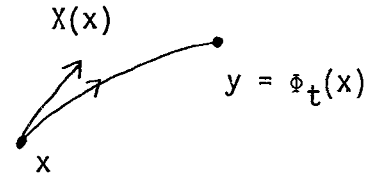
2.8 - Réalisations des groupes de Lie comme difféomorphismes et algèbres de Lie comme champs de vecteurs

Soit Φ_t une suite de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Phi_{t+s} = \Phi_t\, \Phi_s$; Alors la dérivée $\frac{d}{d_t}\, \Phi_t|_{t=o} = X$ nous donne partout un champ de vecteurs. Réciproquement étant donné un champ de vecteurs X on résoud le problème des valeurs initiales

$$\frac{dy}{dt} = X(y) \qquad y(o) = x$$

et par ce moyen on retrouve la suite $\{\Phi_t\}$ comme solution générale :

$$y(t) = \Phi_t(x).$$



Ecrivons

$$\frac{dy^i}{dt} = X^i(y).$$

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U}$, on calcule la dérivée de f le long des trajectoires :

$$\frac{d}{dt} f\ (\Phi_t(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\ \frac{dx^i}{d_t} = \sum_{i=1}^{n} X^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Donc l'opérateur différentiel associé au champ de vecteurs X, est

$$X = X_i\ \frac{\partial}{\partial x^i}$$

tel que

$$\frac{d}{dt} f\ (\Phi_t(x)) = Xf\ .$$

Définissons maintenant un groupe de transformations linéaires

$$(T_t f)\ (\underline{x}) = f(\Phi_t(x))\ ;$$

D'où (formellement) le générateur infinitésimal du $\{T_t\}$ est précisément l'opérateur X. On écrit (au moins dans un sens formel)

$$(T_t f)\ (\underline{x}) = f(\Phi_t(x)) = e^{tX} f.$$

Par exemple, dans le cas $\mathbb{R}^1$ on sait que $D = \frac{d}{dx}$ est le générateur infinitésimal des translation :

$$f(x + t) = (e^{tD} f)\ (x)\ .$$

Exercice

En supposant que f est analytique, démontrez que

$$f(\Phi_t(x)) = (I + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots)f = (e^{tX} f)(x)\ ,$$

la série convergeant uniformément dans les domaines compactes.

Exemples

générateurs	transformations
$\frac{\partial}{\partial x}$	translation de vecteur x
$y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$	rotations autour de l'axe z
$z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$	rotations autour de l'axe x
$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	laquelle ?

Supposons maintenant que nous avons deux champs de vecteurs X et Y. En utilisant la série de Taylor nous trouvons :

$$e^{\sqrt{\varepsilon}X} e^{\sqrt{\varepsilon}Y} e^{-\sqrt{\varepsilon}X} e^{-\sqrt{\varepsilon}Y} f = f + t\,[X,Y]f + O(t^{3/2})$$

où

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Exercice

Montrez que $[X,Y]$ est aussi un champ de vecteurs. Montrez que X est une dérivation.

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg \qquad \alpha,\beta \text{ constants.}$$

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \qquad f,\ g \text{ fonctions}$$

Montrez que $[X,Y]$ est aussi une dérivation. Montrez que AdX est une dérivation sur une algèbre de Lie. Montrez que $[,]$ satisfait l'identité de Jacobi.

Définition *Un ensemble* $\mathcal{G}$ *de champs de vecteurs* X, Y, Z, ... *est une algèbre de Lie si* $X, Y \in \mathcal{G} \Rightarrow [X,Y] \in \mathcal{G}$.

Exercice

Trouvez les réalisations des groupes de Lie O(2), O(3), E(2), et E(3) comme difféomorphismes. Trouvez les algèbres de Lie pour ces groupes.

III - ACTIONS DES GROUPES DE LIE ; FONCTIONS ET VARIETES INVARIANTES ; FIBRES DE JET ; PROLONGEMENTS

Soit $\mathcal{G}$ un groupe local de fonction $\varphi(g,h)$. Un sous groupe d'un paramètre est une courbe $g(t)$ dans $\mathcal{G}$ tel que

$$g(t + s) = \varphi(g(t), g(s)) \ . \tag{3.1}$$

On a $g(o) = 0$. Une telle fonction g doit satisfaire à l'équation

$$\frac{dg}{dt} = A(g)\alpha \tag{3.2}$$

où $\alpha = g'(o)$ et $A(g) = \varphi'_h\,(g,o)$; c'est à dire que $A(g)$ est la matrice

$$A^i_j\,(g) = \frac{\partial\varphi^i}{\partial h^j}\,(g,h)\,\Big|_{h\,=\,o}$$

Par contre, l'existence d'une telle fonction tel que $g'(o) = \alpha$ vient de la résolution du système d'équations (3.2), en prenant $g(o) = 0$.

Soit $\mathcal{U}$ un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et soit Φ une application de $\mathcal{G} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tel que

$$\Phi(g,g_2,x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2,x)) \ .$$

(Nous avons écrit $g_1\, g_2$ pour $\varphi(g_1,g_2)$.) Nous supposons toujours que, g étant fixé, $\Phi(g,x)$ est un difféomorphisme, C^∞ et bijectif de $\mathcal{U}$ dans le domaine $\mathcal{U}'_g = \{y : y = \Phi(g,x)\}$. Une telle application Φ est un homomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ dans le groupe des difféomorphismes de $\mathcal{U}$. Si $g(t)$ est un sous groupe à un paramètre alors

$$\Phi_t(x) = \Phi(g(t),x)$$

est un sous groupe de difféomorphismes dont le générateur est

$$X_\alpha = \frac{d}{dt}\,\Phi_t(x)\,\Big|_{t=o} = \frac{\partial\Phi^i}{\partial g^j}\,\alpha^j\,\frac{\partial}{\partial x^i} \quad ,$$

$$\alpha^j = \frac{dg^j}{dt}\Big|_{t=o}$$

Par exemple, $\Phi(t;x,y) = (\frac{x}{1-ty} , \frac{y}{1-ty})$ est une action locale du groupe $\mathbb{R}^1$ dont le générateur est

$$\delta\Phi(t;x,y) = xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} = X$$

On reconstruit le difféomorphisme Φ du champ de vecteur X en résolvant le système d'équations avec données initiales

$$\dot{x} = xy \ , \ \dot{y} = y^2$$

Définition 3.1 Une algèbre de Lie g est un espace linéaire sur un corps F, avec une opération bilinéaire, dite crochet, [,], tel que

(i) $[\alpha,\beta] = -[\beta,\alpha]$

(ii) $[\alpha,[\beta,\gamma]] + [\beta,[\gamma,\alpha]] + [\gamma,[\alpha,\beta]] = 0$.

Théorème 3.2 (Lie)

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie (de dimension finie) ; il existe un groupe local de Lie $\mathcal{G}$ (unique aux homomorphismes près) dont $\mathcal{G}$ est l'algèbre. De plus il existe une application $\alpha \to \exp \alpha$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ qui est une bijection régulière d'un voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ dans un voisinage de l'identité dans $\mathcal{G}$ tel que $\exp t\,\alpha$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{G}$. Donc, tout élément de $\mathcal{G}$ suffisamment proche de l'identité, reste uniquement sur un sous-groupe d'un paramètre.

Fonctions invariantes

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et soit F une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^m$,

$$F(x) = (I^1(x), \ldots I^m(x)) \ , \ x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

F est dite invariante (par rapport au groupe $\mathcal{G}$) si

$$F(\Phi(g,x)) = F(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{U}$ et g dans un domaine ouvert de $\mathcal{G}$. Prenons, par exemple, O(3) agissant sur $\mathbb{R}^3$; les fonctions invariantes sous 0(3) sont celles qui ont la forme $f(\rho)$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Par contre, les fonctions qui sont invariantes par rapport aux rotations autour de l'axe z ont la forme $f(r,z)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Théorème 3.3 *Une fonction F est invariante par rapport au groupe $\mathcal{G}$ si et seulement si*

$$XF = 0 \text{ pour tout } X \in \mathcal{G} .$$

Démonstration Si F est invariante

$$F(\Phi_t(x)) = F(x)$$

pour tout sous-groupe Φ_t. Puisque $F(\Phi_t(x)) = e^{tX}F$, où X est le générateur infinitésimal, nous avons

$$\frac{d}{dt} e^{tX}F \Big|_{t=0} = XF = 0 .$$

Par contre, si $XF = 0$ pour tout $X \in \mathcal{G}$ alors $(e^{tX}F)(x) = F(\Phi_t(x)) = F(x)$ pour tout sous-groupe d'un paramètre. D'après le théorème 3.2, F reste donc invariante par un rapport au groupe entier. (Il faut remarquer qu'on parle ici de l'invariance par rapport aux groupes locals).

Variétés invariantes

Une sous variété $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite $\mathcal{G}$ invariante si $x \in \mathcal{M} \Rightarrow \Phi(g,x) \in \mathcal{M}$ pour tout g dans le groupe local $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{M}$ est une courbe de niveau d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire

$$\mathcal{M} = S_c = \{x \mid F(x) = c\}$$

où $c \in \mathbb{R}^m$, et si F est invariante, alors $\mathcal{M}$ est évidemment invariante. Par contre, il est possible, par exemple, que la variété

$$S_o = \{x \mid F(x) = 0\}$$

soit invariante, tandis que F ne l'est pas. (Il faut que toutes les courbes de niveaux de F soient invariantes pour que F soit elle-même invariante). Montrons le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Soit $\mathcal{G}$ un groupe local connexe agissant sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$ soit $G_x = \{g \mid \Phi(g,x)$ est bien défini$\}$ un sous ensemble connexe de $\mathcal{G}$. Si $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, est une fonction dont le jacobien $\| \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \|$ est de rang m partout, alors*

$$\mathcal{M} = \{x : F(x) = C_o,\ C_o \in \mathbb{R}^m\}$$

est une variété invariante ssi $XF = 0$ pour tout $X \in \mathcal{G}$ et tout $X \in \mathcal{M}$. N'oubliez pas qu'on a besoin de $XF = 0$ sur $\mathcal{M}$ seulement.

Démonstration : La nécessité est une conséquence du théorème 3.3. Pour démontrer la condition suffisante, choisissons un point $x_0 \in \mathcal{M}$ et faisons le changement de coordonnées

$$\tilde{x}^1 = F^1(x^1, \ldots x^n)$$

$$\tilde{x}^2 = F^2(x^1, \ldots x^n)$$

$$\tilde{x}^m = F^m(x^1, \ldots x^n)$$

$$\tilde{x}^{m+1} = x^{m+1}$$

$$\tilde{x}^n = x^n .$$

Puisque le jacobien est toujours de rang m nous pouvons supposer que les variables $x^1, \ldots x^n$ sont numérotées de telle sorte que $\| \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \|$, $i,j = 1, \ldots m$ est non-singulière. Dans les coordonnées $\tilde{x}^1, \ldots \tilde{x}^n$ la variété $\mathcal{M}$ est donnée par $\mathcal{M} = \{(o, \ldots o, \tilde{x}^{m+1}, \ldots \tilde{x}^n)\}$, et $F(\tilde{x}) = (\tilde{x}^1, \ldots \tilde{x}^m)$. Alors la condition $XF = 0$ prend la forme

$$XF = \tilde{X}^i \frac{\partial F^j}{\partial \tilde{x}^i} = 0 \qquad \text{pour } j = 1, \ldots m$$

et la sommation est de 1 à n. Ceci implique que dans les nouvelles coordonnées $\tilde{X}^i = 0$

pour i = 1,...m, donc

$$X = \tilde{X}^{m+1} \frac{\partial}{\partial x^{m+1}} + \ldots \tilde{X}^{n} \frac{\partial}{\partial x^{n}} .$$

Les équations pour le difféomorphisme sont

$$\frac{dx^i}{dt} = \tilde{X}^i \qquad i = 1,\ldots n ;$$

donc la variété $\tilde{x}^1 = \ldots \tilde{x}^m = 0$ reste invariante - c'est-à-dire que $\mathcal{M}$ reste invariante sous les difféomorphismes locals du groupe.

Fibrés de Jet

Pour tout indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ (α_i sont des entiers non-négatifs) soit

$$\partial_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \quad \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Notons par u_α les dérivées $\partial_\alpha u$ et par U_k l'espace linéaire dont la dimension est égale au nombre de dérivées de u d'ordre k. Soit X l'espace des variables $x^1,\ldots x^n$, $U_{(k)} = U x\ U_1 \ x\ldots x\ U_k$. Pour tout k nous définissons l'espace

$$J_k = X \times U_{(k)}$$

J_k est un espace linéaire qui s'appelle un fibré de jet. Toute fonction $u = u(x)$ définit une section dans J_k par la fonction u et toutes ses dérivées jusqu'au ordre k :

$$(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots \partial_\alpha u, \ldots) .$$

On considère, plus généralement, des applications $u(x)$, $u : X \to \mathbb{R}^m$, dans ce cas $\mathcal{U}$ représente l'espace de m-uples $u^1,\ldots u^m$. On écrit encore, comme au dessus,

$$J_k = X \times U \times U_1 \times \ldots \times U_k$$

où $\mathcal{U}_1, \ldots \mathcal{U}_k$ sont les espaces linéaires dont les coordonnées sont notées par les dérivées $\partial_\alpha\ U^i$, $i = 1,\ldots m$. Une section $U = U\ (x)$ définit, par les dérivées $\partial_\alpha U^i$, un graphe $\Gamma(u)$ dans J_k :

$$\Gamma(u) = \{(x,u^i,\ \partial_\alpha u^i)\ |\ x \varepsilon X,\ u^i \varepsilon \quad , \ldots\}$$

Prolongations

Supposons maintenant qu'il existe un groupe local $\mathcal{G}$ qui agit sur $X \times U$:

$$\tilde{x}^j = X^j\ (x,u,g) \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}^i = U^i\ (x,u,g)$$

où $x \varepsilon X$, $u \varepsilon U$, $g \varepsilon \mathcal{G}$. Nous supposons que les transformations (3.3) font un homomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ dans les difféomorphismes de $X\!\times U$.

Soit $u(x)$ une application de X vers U ; alors son graphe $\Gamma(u) = \{(x,u(x))|x \varepsilon X\}$ est une section dans $X\!\times U$. Sous la transformation (3.3) la fonction U et son graphe sont transformées en une nouvelle fonction $\tilde{u}$ de graphe $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x,u(x),g)$$

$$\tilde{x} = X(x,u(x),g)$$

$$\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x}))\}$$

De plus, les dérivées de u, $\dfrac{\partial^{|\alpha|}u^i}{\partial x^1,\ldots\partial x^n}$, sont transformées en nouvelles dérivées

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\tilde{x}^1\ldots\partial\tilde{x}^n}\,\tilde{u}^i(\tilde{x})$$

On veut démontrer que ces transformations des dérivées donnent aussi une action du groupe $\mathcal{G}$; c'est-à-dire que la propriété de l'homomorphisme est toujours vraie. On y arrive en plusieurs étapes.

Lemme 3.5 *Chaque action $\Phi(g,x)$ d'un groupe $\mathcal{G}$ sur l'espace X produit une action sur l'espace TX de fibré tangent de X.*

Par action on entend toujours la propriété d'homomorphisme : $Tg_1 \circ g_2 = Tg_1 \circ Tg_2$.

En effet, l'action sur l'espace TX est précisément

$$(x,v) \xrightarrow{g} Tg(x,v) = (\Phi(g,x),\ A(g,x)v)$$

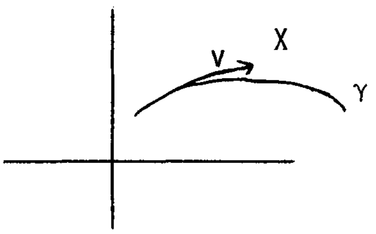
où

$$A(g,x) = \Phi'_x\ (g,x)\ , \tag{3.4}$$

$\Phi'_x\ (g,x)$ étant le jacobien du difféomorphisme $\Phi(g,x)$ par rapport à x.

Démonstration

Soit γ une courbe dans X donnée par $x^i(t)$; le vecteur tangent est $v^i = \dfrac{dx^i}{dt}$. Sous $\Phi(g,.)$ γ est transformée en $\tilde{\gamma}$, qui est donnée par $\tilde{x}^i = \Phi^i(g,x(t))$. Donc :



$$\tilde{v}^i = \frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\ (g,x)\ \frac{dx^j}{dt}$$

$$= A^i_j\ (g,x)\ v^j\ ,$$

ou, plutôt, $\tilde{v} = A(g,x)v$. La propriété d'homomorphisme est obtenue en dérivant la relation

$$\Phi(g_1g_2,x) = \Phi(g_1,\Phi(g_2,x))\ .$$

En effet, nous obtenons

$$\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\ (g_1g_2,x) = \frac{\partial\Phi^i}{\partial x^k}\ (g_1,\Phi(g_2,x))\ \frac{\partial\Phi^k}{\partial x^j}\ (g_2,x)\ ,$$

ou

$$A^i_j\ (g_1g_2,x) = A^i_k\ (g_1,\Phi(g_2,x))\ A^k_j\ (g_2,x)\ .$$

Supposons maintenant que l'espace X prenne la forme d'un produit cartésien XxU, où $X \cong \mathbb{R}^n$ et $U \cong \mathbb{R}^m$. En principe il n'y a aucune différence entre ce cas et celui du lemme 3.5. Le fibré tangent de XxU est TX x TU et on écrit, pour les points de T(X x U)

$$(x,u,v,w) \ .$$

L'action (3.3) induit sur T(X x U) l'action $(x,u,v,w) \xrightarrow{g} (\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$

où

$$\tilde{v}^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{dt} + \frac{\partial X^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{dt}$$

$$= \frac{\partial X^i}{\partial x^k} v^k + \frac{\partial X^i}{\partial u^\ell} w^\ell$$

$$\tilde{u}^j = \frac{du^j}{dt} = \frac{\partial U^j}{\partial x^k} v^k + \frac{\partial U^j}{\partial u^\ell} w^\ell \ ,$$

que nous écrivons de la manière plus brève

$$\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

où $A = X_x$, $B = X_u$, $C = U_x$, $D = U_u$.

La loi de composition, c'est-à-dire d'homomorphisme, qui est donnée par le lemme 3.5 est

$$\begin{pmatrix} A_{12} & B_{12} \\ C_{12} & D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

où $A_{12} = X_x(g_1g_2,x)$, $A_1 = X_x(g_1,\Phi(g_2,x))$, $A_2 = X_x(g_2,x)$, etc ...

On arrive maintenant au but.

Théorème 3.6 *L'action du groupe $\mathcal{G}$ donnée par (3.3) s'étend à une action sur le fibré de jet $J_1 = X \times U \times U_1$. Elle est caractérisée par*

$$(x,u,P) \longrightarrow (\tilde{x},\tilde{u},\tilde{P})$$

où P est la matrice des coordonnées $\left\| \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} \right\|$

et

$$\tilde{P} = (U_x + U_u\, P)\; (X_x + X_u\, P)^{-1} \tag{3.6}$$

Cette action est celle qui transforme les sections de J_1 en sections.

Rappelons nous que par $\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j}$ nous notons soit les coordonnées de J_1, soit les dérivées d'une application $u^i(x)$.

Démonstration

Soit $u(x)$ une section de $X \times U$, soit $P = \left\| \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} \right\|$, (où ici nous parlons vraiment des dérivées de u), et soit $\tilde{P} = \left(\dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)$.

On trouve les vecteurs tangents à la section en dérivant le long des courbes contenues dans la section :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,(x(t),\, u(x(t))) &= (\dot{x},\dot{u}) \\ &= \left(\dot{x}^i,\, \frac{\partial u^j}{\partial x^k}\,\dot{x}^k\right) \\ &= (v,\ Pv)\ . \end{aligned}$$

Or, comme nous avons déjà trouvé,

$$(x,u,v,w) \xrightarrow{g} (\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$$

où $$\tilde{v} = X_x v + X_u\, Pv$$

$$\tilde{w} = U_x v + U_u\, Pv$$

Mais aussi $$\tilde{w} = \frac{d}{dt}\tilde{u} = \tilde{P}\tilde{v}\ ;$$

donc $$\tilde{P}\,\tilde{v} = (U_x + U_u\, P)v,$$

$$\tilde{P}(X_x + X_u\, P)v = (U_x + U_u\, P)v\ .$$

Puisque cette relation doit être vraie pourtout v la conclusion (3.6) suit immédiatement. Il reste au lecteur à démontrer la propriété d'homomorphisme pour l'application $P \to \tilde{P}$; elle résulte d'un petit calcul, en utilisant (3.5).

L'extension de l'action du groupe à J_1 est appelée "le premier prolongement". Il est clair que le procédé peut se répéter en remplaçant XxU par $XxUxU_1$, les sections de XxU par celles de $XxUxU_1$, en arrivant à $XxUxU_1xU_2$ et ses sections. Le prolongement de l'action à J_k est appelé le k^e prolongement. L'action du groupe ayant été prolongée au fibré de jet J_k on calcule maintenant le générateur infinitésimal de cette action. Supposons que α soit le générateur d'un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{G}$ agissant sur XxU :

$$\alpha = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

où $\xi^i = \delta\tilde{x}^i = \delta X^i$ et $\varphi^j = \delta\tilde{u}^j = \delta U^j$. Le k^e prolongement de α est donc

$$pr^{(k)}\alpha = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{|J|<k} \varphi^\ell_J \frac{\partial}{\partial u^\ell_J}$$

où $J = (J^1,\dots J^n)$ et $u^k_J = \partial_J u^k$. Les fonctions φ^ℓ_J sont évidemment les dérivées δu^ℓ_J.

Rappelons nous l'idée de la dérivée totale D_i que l'on a introduit dans le premier chapitre. Nous regardons D_i comme un champ de vecteurs sur l'espace linéaire J_k dont les coordonnées sont x^i, u^j, P^j_J. La dérivée D_i est le champ de vecteurs

$$D_i = \partial_i + (\partial_i u^j)\frac{\partial}{\partial u^j} + \dots + (\partial_i\, u^j_J)\frac{\partial}{\partial u^j_J} + \dots$$

Soit $\Delta : J_k \to \mathbb{R}$; on calcule l'effet de D_i sur Δ en traitant tous les coefficients de Δ comme une fonction et ses dérivées et puis en remplaçant D_i par ∂_i. Par exemple :

$$D_i(u^1\partial_j u^2) = (\partial_i u^1)\ \partial_j u^2 + u^1\partial^2_{ij}u^2 \ .$$

On définit enfin $D_J = (D_1)^{J_1} \ldots (D_n)^{J_n}$.

Théorème *3.7* $\quad \varphi^{\ell}_{\ J} = D_J(\varphi^{\ell} - \xi^i u_i) + (D_i u^{\ell}_J)\ \xi^i \qquad (3.7)$

Démonstration : Nous calculons d'abord le premier prolongement $pr^{(1)}\alpha$ en calculant $\delta\dfrac{\partial\tilde{u}^{\ell}}{\partial\tilde{x}^i}$. D'après (3.6) on a

$$\tilde{P}(X_x + X_u P) = U_x + U_u P$$

ou bien

$$\tilde{P}^{\ell}_{\ i}\ (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{\partial X^i}{\partial u^k}\ P^h_{\ j}) = \frac{\partial U^{\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial U^{\ell}}{\partial u^k}\ P^h_{\ j} \ .$$

(Ici $P^k_j = \dfrac{\partial u^k}{\partial x^j}$; k désigant l'indice de ligne et j l'indice de colonne). Au dessus, $X^i = X^i(x,u(x),\varepsilon)$, etc. , et δ signifie l'opération $\delta = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$. On voit que la relation peut s'écrire :

$$\tilde{P}^{\ell}_{\ i}(D_j X^i) = D_j U^{\ell} \ .$$

En appliquant δ et en employant les relations

$$\delta(D_j U^{\ell}) = D_j\delta U^{\ell} = D_j\varphi^{\ell}$$

$$\delta(D_j X^i) = D_j\delta X^i = D_j\xi^i$$

$$D_j X^i|_{\varepsilon=0} = D_j X^i = \delta_j^{\ i}$$

$$\tilde{P}\ |_{\varepsilon=0} = P$$

Nous arrivons à

$$(\delta\tilde{P})^{\ell}_{\ j} + P^{\ell}_{\ i}\ D_j\xi^i = D_j\varphi^{\ell}$$

$$(\delta\tilde{P})^{\ell}_{\ j} = D_j\varphi^{\ell} - P^{\ell}_{\ i}\ D_j\xi^i \qquad (3.8)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\varphi_j^\ell = (\delta\widetilde{P})_j^\ell = D_j(\varphi^\ell - \xi^i u_i^\ell) + \xi^i \partial_{ji} u^\ell \tag{3.9}$$

Il reste maintenant à calculer les prolongements d'ordres plus élevés auxquels nous appliquons le principe de récurrence. Nous supposons que φ_J^ℓ est connue et nous trouvons φ_{Ji}^ℓ , où $J_i = J + (0,\ldots 1^i,0\ldots 0)$. Or $\varphi_J^\ell = \delta\widetilde{u}_J^\ell$; nous avons trouvé le prolongement de α à J_k, où $k = |J|$; donc nous appliquons $pr^{(1)}$ (α_k) à u_J^ℓ, où $\alpha_k = pr^{(k)}$ (α). D'après (3.9), en remplaçant u^ℓ par u_J^ℓ et φ^ℓ par φ_J^ℓ, nous arrivons à

$$\delta(\widetilde{u}^\ell{}_{Jj}) = \varphi^\ell{}_{Jj} = D_j\varphi^\ell{}_J - (D_i u_J^\ell)\, D_j\xi^i \ ,$$

qui nous donne une formule de récurrence pour les φ_J^ℓ. Nous montrons maintenant que les fonctions φ_J^ℓ définies par (3.7) sont les solutions de cette formule de récurrence. En effet, si

$$\varphi_J^\ell = D_J(\varphi^\ell - \xi^i u_i) + (D_i u_J^\ell)\xi^i \ ,$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{J_j}^\ell &= D_j D_J(\varphi^\ell - \xi^i u_i^\ell) + (D_i u_{J_j}^\ell)\xi^i \\
&= D_j(D_J(\varphi^\ell - \xi^i u_i^\ell) + u_{J_i}^\ell \xi^i) - u_{J_i}^\ell\, D_j\xi^i \\
&= D_j\, \varphi_J^\ell - (D_j\xi^i)u_{J_i}^\ell = D_j\, \varphi_J^\ell - (D_j\xi^i)D_i u_J^\ell
\end{aligned}$$

<u>Exemple</u> Soit $X = U = R$ et prenons le groupe des rotations

$$\widetilde{x} = x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon$$
$$\widetilde{u} = x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon$$

Nous calculons le premier prolongement de la fonction $u = ax + b$. D'après (3.3)

$$\widetilde{x} = x\cos\varepsilon - (ax+b)\sin\varepsilon$$
$$\widetilde{u}(\widetilde{x}) = x\sin\varepsilon + (ax+b)\cos\varepsilon$$

Si $\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon \neq 0$ nous avons :

$$x = \frac{\widetilde{x} + b\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon} \ ,$$

donc

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \left(\frac{\sin\varepsilon + a\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon}\right)\tilde{x} + \frac{b}{\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon} \tag{3.10}$$

Remarquez que l'action n'est que locale, bien que le groupe (SO(2)) soit global.

Nous pouvons maintenant trouver le premier prolongement de l'action à $J_1 = X\mathrm{x}U\mathrm{x}U_1$. J_1 est le fibré de jet dont les coordonnées sont notées (x,u,p). Il suffit de trouver l'action du groupe SO(2) sur les sections de J_1 ; c'est-à-dire qu'on cherche la transformation de $\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}$, où $(x,u(x),u'(x))$ est une section de J_1. Soit $(\bar{x},\bar{u},\bar{p})$ un point fixe dans J_1 et soit $f(x)$ une fonction linéaire dont la section passe par $(\bar{x},\bar{u},\bar{p})$, c'est-à-dire $f(x) = ax + b$ où $a = \bar{p}$, $b = \bar{u} - \bar{x}\bar{p}$; donc $(\bar{x},f(\bar{x}),f^1(\bar{x})) = (\bar{x},\bar{u},\bar{p})$.
D'après (3.10)

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin\varepsilon + \bar{p}\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - \bar{p}\sin\varepsilon}\,\tilde{x} + \frac{\bar{u} - \bar{p}\,\bar{x}}{\cos\varepsilon - \bar{p}\sin\varepsilon} .$$

Donc

$$\tilde{f}'(\tilde{x}) = \frac{\sin\varepsilon + p\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - \bar{p}\sin\varepsilon}$$

et l'action sur J_1 est

$$\tilde{x} = x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon$$

$$\tilde{u} = x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon$$

$$\tilde{p} = \frac{\sin\varepsilon + p\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - p\sin\varepsilon}$$

Nous trouvons facilement le générateur

$$pr^{(1)}\alpha = \delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \delta u\,\frac{\partial}{\partial u} + \delta p\,\frac{\partial}{\partial p}$$

$$= -\,u\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial u} + (1 + p^2)\,\frac{\partial}{\partial p}$$

D'autre part, calculons $\delta\tilde{p}$, c'est-à-dire la fonction φ_1, du théorème 3.7 : nous avons $\xi = -\,u$, $\varphi = x$, et $(p = u')$

$$\varphi_1 = D_1(x + uu') + (D_1u')\ (-u)$$

$$= 1 + (u')^2 + uu'' \ - uu''$$

$$= 1 + P^2$$

En général, les prolongements des actions des groupes sont plus difficiles à calculer que les prolongements des générateurs infinitésimaux.

IV - SYMETRIES INFINITESIMALES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Dans ce chapitre nous exposons les méthodes pour calculer les algèbres de Lie pour les groupes de symétries des équations aux dérivées partielles. Une équation aux dérivées partielles du k^e ordre peut se regarder comme une application Δ: $J_k \to \mathbb{R}$; et un système d'équations comme une application $\Delta : J_k \to \mathbb{R}^m$. C'est-à-dire qu'une équation, ou système d'équations, aux dérivées partielles est une sous-variété de la forme

$$\Delta^i(x,u^j,P^j_J) = 0 \qquad\qquad i = 1,\dots m \qquad\qquad (4.1)$$

dans J_k. Une telle relation décrit une sous variété régulière de codimension m si le jacobien

$$\frac{\partial(\Delta^1,\dots\Delta^m)}{\partial(x^i,u^j,P^j_J)}$$

est toujours de rang m dans un domaine ouvert de J_k.

De ce point de vue une solution d'une équation ou système d'équations, est une section u(x) de J_k qui est contenue dans cette sous-variété. En remplaçant u^j par $u^j(x)$, P^j_J par les dérivées $\partial_J u^j(\underline{x})$, il faut que

$$\Delta^i(x,u(x),\ \partial_J u^j(x)) = 0$$

identiquement pour tout $x \in \mathcal{O} \subset X$.

Soit $\{\Phi_g\}$ un groupe de difféomorphismes qui agissent sur XxU ; nous désignons le k^e prolongement de Φ_g à J_k par $\Phi^{(k)}_g$. Un système d'équations aux dérivées partielles

$$\Delta^i(x,u^j,P^j_J) = 0$$

est dit invariant si la variété

$$S_0 = \{(x,u^j,P^j_J) \in J_k \mid \Delta^i(x,u^j,P^j_J) = 0\}$$

est une sous-variété de J_k invariante par rapport à l'action $\Phi^{(k)}_g$.

Théorème 4.1 *Soit $\mathcal{G}$ un groupe local qui agit sur $X \times U$ par*

$$\tilde{x} = X(x,u,g) \qquad \tilde{u} = U(x,u,g) \ . \tag{4.2}$$

Supposons que le système régulier d'équations aux dérivées partielles (4.1) est invariant par rapport au prolongement $\Phi^{(k)}_g$ de l'action (4.2). Alors l'action $(x,u) \to (\tilde{x},\tilde{u})$ laisse invariante les solutions de (4.1). De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que les équations soient invariantes par rapport à $\Phi^{(k)}_g$ est

$$pr^{(k)}\, \alpha\, \Delta = 0 \qquad \text{quand } \Delta = 0 \tag{4.3}$$

pour tout générateur infinitésimal α,

$$\alpha = \delta X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \delta U^j \frac{\partial}{\partial u^j} \ .$$

Démonstration : Si $u(x)$ est une solution de (4.1), alors $\Delta(x,u,P_J) \equiv 0$ identiquement dans un domaine ouvert quand u et P_J sont remplacés par $u(x)$ et $\partial_J u(x)$. Sous l'action $\Phi^{(k)}_g(x,u(x),\partial_J u(x)) \xrightarrow{g} (\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x}),\tilde{\partial}_J\tilde{u}(\tilde{x}))$; et l'invariance de la variété $\Delta = 0$ implique que $\Delta(\tilde{x},\tilde{u}, \tilde{P}_J) = 0$ si $\Delta(x,u,P_J) = 0$. (L'invariance de $\Delta = 0$ n'est pas équivalente à la condition $\Delta(x,u,P_J) = \Delta(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{P}_J)$!) Alors, la section $(\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x}), \tilde{\partial}_J\tilde{u}(\tilde{x}))$ satisfait aussi l'équation. La nécessité et suffisance de la condition (4.3) est une conséquence du Théorème 3.4.

La condition (4.3) nous fournit une méthode pour calculer les générateurs α du groupe de symétries des équations. On va donner des exemples. On va aussi calculer des groupes de symétries pour des lagrangiens. Comme on a déjà vu dans le chapitre I, les symétries des lagrangiens sont toujours liées à des lois de conservation. Cependant, il se passe très souvent que les équations d'Euler - Lagrange possèdent des plus grands groupes de symétries que les lagrangiens d'où elles viennent ! Soit :

$$L(x,u,P_J)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = Ld^nx$$

un lagrangien invariant par rapport aux transformations (4.2). Alors :

$$\delta\mathcal{L}(x,u,P_J)d^n\tilde{x} = 0 \ ,$$

ou

$$\delta\mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{P}_J)d^nx + \mathcal{L}(x,u,P_J)\ \delta(d^n\tilde{x}) = 0$$

où δ signifie la dérivée $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ le long d'un sous-groupe d'un paramètre. Or

$$\delta(\mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{P}_J) = pr^{(k)}\alpha\,\mathcal{L}(x,u,P_J)$$

et

$$\delta(d^n\tilde{x}) = \delta\left(\frac{\partial(\tilde{x}^1,\ldots\tilde{x}^n)}{\partial(x^1,\ldots x^n)}\right)d^nx$$

$$= \delta\left(\frac{\partial(X^1,\ldots X^n)}{\partial(x^1,\ldots x^n)}\right)d^nx = \delta\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n}\right)d^nx$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \partial\,\frac{\delta X^i}{\partial x^i}\right)d^nx = \left(\sum_{i=1}^{n} D_i\xi^i\right)d^nx \ .$$

Finalement la condition pour l'invariance d'un lagrangien $\mathcal{L}$ est

$$(pr^{(k)}\alpha + D_i\xi^i)\,\mathcal{L} = 0 \qquad (4.4)$$

<u>Exemple</u> <u>1°</u> : On trouve le groupe des symétries du lagrangien

$$(u_x^2 + u_y^2)\ dx\ dy\ .$$

Soit $\alpha = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}$; donc

$$pr^{(1)}\ \alpha = \alpha + \varphi_{(1,0)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi_{(0,1)}\frac{\partial}{\partial u_y}\ .$$

D'après (3.7)

$$\varphi_{1,0} = D_x(\varphi - \xi u_x - \eta u_y) + u_{xx}\xi + u_{xy}\,\eta$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} u_x - \frac{\partial\xi}{\partial x} u_x - \frac{\partial\xi}{\partial u} u_x^2 - \xi\, u_{xx} - \frac{\partial\eta}{\partial x} u_y - \frac{\partial\eta}{\partial u} u_x\, u_y - \eta\, u_{xy}$$

$$+ u_{xx}\xi + u_{xy}\,\eta \ ,$$

$$\varphi_{1,0} = \varphi_x + \varphi_u u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \eta_x u_y - \eta_u u_x u_y \ .$$

De même

$$\varphi_{0,1} = \varphi_y + \varphi_u u_y - \xi_y u_x - \xi_u u_x u_y - \eta_y u_y - \eta_u u_y^2 \ .$$

Donc les équations pour les symétries infinitésimales sont :

$$(\mathrm{pr}^{(1)}\alpha)\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_x\xi + D_y\eta) = 0 \quad ,$$

$$2u_x\,\varphi_{1,0} + 2u_y\,\varphi_{0,1} + (u_x^2 + u_y^2)\,(\xi_x + \xi_u\,u_x + \eta_y + \eta_u\,u_y) = 0 \quad ,$$

$$u_x(2\varphi_x) + u_y(2\varphi_y) + u_x^2\,(2\varphi_u + \eta_y - \xi_x)$$

$$+ u_y^2\,(2\varphi_u + \xi_x - \eta_y) + u_x\,u_y\,(-\,2\eta_x - 2\xi_y) \tag{4.5}$$

$$+ u_x^3\,(-\xi_u) + u_y^3\,(-\eta_u) + u_x^2\,u_y\,(-\eta_u) + u_x u_y^2\,(-\xi_u) = 0 \ .$$

Rappelons nous maintenant que u_x, u_y, u_{xy}, etc. sont des coordonnées indépendantes dans le fibré de jet J_∞ $(x,y,u,u_x,u_y,\ldots)$ est que l'équation (4.5) est une identité polynomiale sur J_∞. Alors, pour que (4.5) soit satisfaite identiquement, il faut que tous les coefficients de u_x, u_y, u_x^2, $u_x\,u_y$,... etc. soient nuls. Cette condition nous donne un ensemble d'équations au dérivées partielles pour les fonctions φ, ξ, η. Ces équations des "symétries infinitésimales" sont :

$$\varphi_x = \varphi_y = 0$$

$$2\varphi_u + \eta_y - \xi_x = 0 \tag{4.6}$$

$$2\varphi_u + \xi_x - \eta_y = 0$$

$$\eta_x + \xi_y = 0$$
$$\xi_u = \eta_u = 0 \tag{4.6}$$

Nous résolvons ces équations sans difficulté. D'après la dernière équation $\xi_u = \eta_u = 0$, ξ et η sont fonctions des variables x et y seulement. De plus, elles doivent satisfaire $\eta_x + \xi_y = 0$. Si nous ajoutons la deuxième et la troisième équation, nous trouvons que $\varphi_u = 0$; et, puisque $\varphi_x = \varphi_y = 0$ aussi, φ est une constante. Finalement nous avons :

$$\xi_x - \eta_y = 0 \qquad \eta_x + \xi_y = 0 \ , \tag{4.7}$$

que nous reconnaissons comme les équations de Cauchy - Riemann. L'algèbre des symétries est donc engendrée par

$$\alpha = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \qquad \beta = \frac{\partial}{\partial u} \ .$$

Le β est le générateur du groupe $u \to u + \text{const}$; les α sont les générateurs des transformations conformes dans le plan $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice</u> : Soit $\xi^1(x^1,x^2)$, $\xi^2(x^1,x^2)$ solutions des équations de Cauchy-Riemann :
$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = 0$. Montrez que le difféomorphisme Φ de l'écoulement $\dot{x}^i = \xi^i(x^1,x^2)$ est une transformation conforme.

<u>Solution</u> Désignons l'écoulement par $\Phi^1(x^1,x^2;t)$, $\Phi^2(x^1,x^2;t)$, où $\frac{\partial \Phi^i}{\partial t} = \xi^i(\Phi^1,\Phi^2)$.
L'écoulement des tangentes est effectué selon le Lemme 3.5(voir équation (3.4))par le jacobien

$$A = \frac{\partial(\Phi^1,\Phi^2)}{\partial(x^1,x^2)} \ .$$

Soit (x,v) un point dans le fibré tangent. Sous l'écoulement il se déplace en :

$$(x,v) \xrightarrow{t} (\Phi_t(x),\ A(\Phi_t(x))v)$$

si v_0, w_0 sont deux vecteurs tangents au point X_0, ils sont transformés en v_t, w_t ; et l'angle θ_0 entre eux devient $\theta(t)$. Si l'on représente la modification de l'angle par $\theta(t) = S_t(\theta_0)$ on a $S_{t+\tau}(\theta_0) = S_t(S\tau(\theta_0))$. Il faut montrer que $\theta(t) = \theta_0$, donc il suffit, grâce à cette propriété de S_t, de démontrer que $\dot{\theta}(o) = 0$. (Parce que ça implique que $\dot{\theta}$ est toujours zéro). Donc :

$$\theta(t) = \frac{\langle A(t)\, V_0,\ A(t)\, W_0\rangle}{\|v(t)\|\ \ \|w(t)\|}$$

Soit $\delta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$; la condition $\delta\theta = 0$ est une conséquence du fait que

$$\delta\, AA^+ = \lambda I$$

(Montrez-le). Or

$$(AA^+)_{ik} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\frac{\partial\Phi^k}{\partial x^j}\ ,$$

et de plus $\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\Big|_{t=0} = \delta^i_j$; donc

$$\delta(AA^+)_{ik} = \sum_{j=1}^{2} \left(\delta\,\frac{\partial\Phi^i}{\partial x^j}\right)\delta^k_j + \delta^i_j\ \ \delta\left(\frac{\partial\Phi^k}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\,\delta^k_j + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\,\delta^i_j$$

$$= \frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ \lambda & \text{si } i = k \end{cases}$$

où $\lambda = 2\,\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} = 2\,\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}$.

<u>Exemple 2°</u> : Symétries de $(\nabla u)^2 d\underline{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

Ce lagrangien donne l'équation de Laplace en dimension n. Le cas $n \geqslant 3$ est différent de celui de $n = 2$. L'équation (4.4) prend dans ce cas la forme

$$2u_j\ \varphi_{ij} + u_j\ u_j\ (D_i\xi^i) = 0$$

(convention de sommation où $u_j = \partial_j u$ et, selon théorème 3.7

$$\varphi(j) = D_j(\varphi - \xi^i u_i) + (D_i\, u_j)\, \xi^i$$

$$= \varphi_{x_j} + \varphi_u\, u_j - (\xi^i{}_{x_j} + \xi^i_u\, u_j)\, u_i\ .$$

Nous avons donc

$$2u_j\, \varphi_{x_j} + 2u_j\, u_j\, \varphi_u - 2\xi^i_{x_j}\, u_i\, u_j$$

$$- 2\xi^i_u\, u_i\, u_j \cdot u_j + u_j\, u_j\, (\xi^i_{x_i} + \xi^i_u\, u_i) = 0 \quad ,$$

et finalement

$$\sum_{j=1}^{n} \{\ 2\, u_j\, \varphi_{x_j} + u_j\, u_j\, (2\, \varphi_u - 2\, \xi^j_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \xi^i_{x_j})$$

$$- 2 \sum_{i \neq j} \xi^i_{x_j}\, u_i\, u_j + \sum_{i=1}^{n} u_i\, u_j\, u_j\, (-\xi^i_u)\ \} = 0$$

(Cette fois je n'emploie pas la convention de sommation. Faites attention au troisième terme !).

Le terme $- 2 \sum_{i \neq j} u_i\, u_j\, \xi^i_{x_j}$ s'écrit comme $-\sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right) u_i\, u_j$.

En mettant tous les coefficients de u_j, u_j^2, $u_i\, u_j$, et $u_i\, u_j^2$ égaux à zéro, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\varphi_{x_j} = 0 \\
&2\varphi_u - 2\, \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0 \qquad j = 1, \dots n \\
&\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0 \qquad i \neq j \\
&\frac{\partial \xi^i}{\partial u} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De la première et de la dernière équation nous trouvons $\varphi = \varphi(u)$ et $\xi^i = \xi^i(x^1, \dots x^n)$.

Des n équations de la deuxième ligne nous voyons qu'il faut que φ_u soit constant. Donc $\varphi(u) = au + b$ et

$$2a - 2 \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0 \qquad j = 1,\ldots n \tag{4.9}$$

En sommant les deux premières équations (4.9) nous obtenons :

$$2\left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial \xi^n}{\partial x^n} \right) + 4a = 0 \quad ,$$

et, de même façon, de la première et de la troisième équation, nous obtenons :

$$2\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} + \ldots + \frac{\partial \xi^n}{\partial x^n} \right) + 4a = 0 \ .$$

En prenant la différence de ces deux équations nous obtenons :

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0$$

Alors,

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \ldots = \frac{\partial \xi^n}{\partial x^n} = \psi(x^1,\ldots x^n)$$

avec

$$(n-2)\,\varphi + 2a = 0 \quad , \qquad \psi = -\frac{2a}{n-2} \ .$$

Enfin

$$\xi^i(x^1,\ldots x^n) = \frac{a}{n-2}\, x^i + b^i(x^1,\ldots \hat{x}^i,\ldots x^n)$$

où b^i ne dépend pas de x^i ; <u>i.e.</u> $\frac{\partial b^i}{\partial x^i} = 0$.

Finalement les b^i doivent satisfaire $\frac{\partial b^i}{\partial x^j} + \frac{\partial b^j}{\partial x^i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial b^i}{\partial x^i} = 0$.

Exercice Démontrez que tous les b^i sont des fonctions linéaires ; i.e. que $\frac{\partial^2 b^i}{\partial x^j \partial x^n} = 0$, i, j, k = 1,...n.

Donc

$$b^i(x^1,\dots x^n) = A^i_j\, x^j + C^i$$

où

$$A^i_j + A^j_i = 0 \ .$$

Les matrices A forment l'algèbre so(n), celle du groupe SO(n).

Enfin, l'algèbre entière est donnée par

	générateurs	actions du groupe
1)	$\frac{\partial}{\partial x^i}$	(translations)
2)	$x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}$	(rotations)
3)	$\frac{\partial}{\partial u}$	$u \to u + \text{const.}$
4)	$- x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) u \frac{\partial}{\partial u}$	(dilations)

Exemple 3° : Symétries de $\Delta u = 0$ dans la dimension n.

Les équations pour les symétries sont $pr^{(2)} \alpha(\Delta u) = 0$ quand $\Delta u = 0$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{(jj)} = 0 \text{ quand } \sum_{j=1}^{n} u_{jj} = 0 \ ,$$

où

$$\varphi_{(jj)} = D^2_j \left(\varphi - \xi^i u_i\right) + \xi^i\, u_{jji}$$

$$\varphi_{(jj)} = \varphi_{jj} + \varphi_{ju}\, u_j + \varphi_u\, u_{jj} + (\varphi_{uj} + \varphi_{uu}\, u_j)u_j$$

$$- \xi^i\, u_{ijj} - 2u_{ij}(\xi^i_j + \xi^i_u\, u_j)$$

$$- u_i(\xi^i_{jj} + \xi^i_{ju}\, u_j + \xi^i_u\, u_{jj} + \xi^i_{u_j}\, u_j + \xi^i_{uu}\, u_j\, u_j)$$

$$+ \xi^i\, u_{jji}\ .$$

On emploie ici la notation φ_{jj} pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial {x_j}^2}$ et $\varphi_{(jj)}$ pour φ_J quand $J = (0,\ldots\overset{j}{2},\ 0\ldots0)$.

Pour arriver aux équations on fait la somme des $\varphi_{(jj)}$, ainsi :

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{jj} + \sum_j u_j(2\varphi_{uj} - \Delta\xi^j) + \varphi_u\, \Delta u$$

$$- \sum_{i,j} u_{ij}\ (\xi^i_j + \xi^j_i) + u_i\, u_j\ (\varphi_{uu}\, \delta_{ij} - (\xi^i_{u_j} + \xi^j_{u_i}))$$

$$+ \sum_{i,j,k} u_i\, u_{jk}\ (-\ 2\ \xi^j_u\, \delta_{ki} - \xi^i_u\, \delta_{kj})$$

$$- \sum_{i,j} u_i\ u^2_j\ \xi^i_{uu} = 0 \qquad \text{quand } \Delta u = 0\ .$$

(Faites attention à la condition "quand $\Delta u = 0$"). Les équations sont donc :

(i) $\quad \Delta_x\, \varphi(x,u) = 0$

(ii) $\quad 2\ \varphi_{u_j} - \Delta\xi^j = 0 \qquad j = 1,\ldots n$

(iii) $\quad \xi^i_j + \xi^j_i = 0 \qquad i \neq j$

(iv) $\quad \xi^1_1 = \xi^2_2 = \ldots = \xi^n_n \qquad (4.10)$

(v) $\quad \varphi_{uu}\, \delta_{ij} = (\xi^i_{u_j} + \xi^j_{u_i})$

(vi) $\quad 2\ \xi^j_u\, \delta_{ki} + \xi^i_u\, \delta_{kj} = 0$

(vii) $\quad \xi^i_{uu} = 0$

On trouve les équations (iii) et (iv) de la façon suivante :

$$\sum_{i,j} u_{ij} (\xi^i_j + \xi^j_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} u_{ii} \xi^i_i + \sum_{i \neq j} u_{ij} (\xi^i_j + \xi^j_i) .$$

Pour le deuxième terme il suit, u_{ij} étant indépendants, que $\xi^i_j + \xi^j_i = 0$ quand $i \neq j$, donc (iii). Quant au premier terme nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ii} (\xi^i_i) = \sum_{i=2}^{n} u_{ii} (\xi^i_i - \xi^1_1)$$

puisque la condition $pr^{(2)}(\alpha)\, \Delta u = 0$ n'est satisfaite que sur la variété $\sum_i u_{ii} = 0$ dans J^∞. Au delà de cette restriction, les u_{ii} sont indépendants, donc $\xi^i_i = \xi^1_1$ pour tout i, cf. (iv) ci-dessus. De même façon, on ne demande pas que $\varphi_u = 0$ puisque le coefficient de φ_u est Δu.

Tournons nous maintenant vers la solution des équations (4.10). L'équation (vi) signifie que $3\, \xi^i_u = 0$ (quand $i = j = k$), donc $\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots x^n)$. Alors (v) implique que $\varphi_{uu} = 0$, donc que $\varphi(x,u) = A(x)u + B(x)$. De plus, (i) démontre que $\Delta A = \Delta B = 0$. Par (ii) et (iii) nous avons :

$$2A_j = \Delta\xi^j ,$$

$$2A_{jk} = \Delta\xi^j_k = - \Delta\xi^k_j = - \alpha A_{kj} ,$$

donc $A_{jk} = 0$ pour $j \neq k$. De la même façon, pour (ii) et (iv) nous trouvons que $A_{11} = A_{22} = \ldots = A_{nn}$, donc tout $A_{ii} = 0$ puisque $\Delta A = 0$. Enfin A est une fonction linéaire

$$A(x) = A_o + \sum_{i=1}^{n} A_i x^i$$

Nous mettons $\Psi = \xi^1_1 = \ldots = \xi^n_n = \Psi(x^1_1 \ldots x^n)$. On trouve que $\xi^i_{jk} = 0$ pour $i \neq j \neq k$; donc $\xi^i_{jki} = \Psi_{jk} = 0$.

Il suit que Ψ prend la forme

$$\Psi(x^1,\ldots x^n) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \ (x^j) \ .$$

Or

$$\psi_1'' \ (x_1) = \Psi_{11} = \xi^1_{111} = \xi^2_{211} = \xi^2_{121} = - \ \xi^1_{221}$$
$$= - \ \xi^1_{122} = - \ \Psi_{22} = - \ \psi_2'' \ \ (x_2) \ .$$

Donc

$$\psi_1'' \ (x_1) + \psi_2'' \ \ (x_2) = 0 \ ,$$

et les deux fonctions doivent être des constantes.

Nous avons démontré que

$$\Psi(x^1,\ldots x^n) = \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2) + \ldots + \psi_n(x_n)$$

où les ψ_j sont linéaires. Donc

$$\Psi(x^1,\ldots x^n) = a_1 \ x_1 + \ldots + a_n \ x_n + b$$

où $a_1 \ldots a_n$, b sont des constantes. Aussi

$$A(x) = A_o + \sum_{i=1}^{n} A_i \ x_i \ .$$

Nous ne supposons pas que toutes ces constantes sont indépendantes. Donc

$$\xi^1 = \frac{a_1}{2} \ x_1{}^2 + x_1(a_2 \ x_2 + \ldots + a_x \ x_n) + bx_1 + \phi^1(x_2,\ldots x_n)$$

$$\xi^2 = \frac{a_2}{2} \ x_2{}^2 + x_2(a_1 \ x_1 + a_3 + \ldots + a_n \ x_n) + bx_2 + \phi^2(x_1,\ldots x_n)$$

De plus, nous avons trouvé que $\xi^1_{jk} = 0$ pour $j \neq k \neq 1$; donc $\phi^1(x_2,\ldots x_n)$ doit prendre la forme $\phi^1_2(x_2) + \ldots + \phi^1_n(x_n)$. Donc

$$\xi^\ell = \frac{a_\ell}{2} x_\ell^{\,2} + x_\ell \sum_{j\neq\ell} a_j\, x_j + bx_\ell + \sum_{j\neq\ell} \phi^\ell_j(x_j)$$

Or

$$\xi^1_2 + \xi^2_1 = a_2\, x_1 + a_1\, x_2 + \dot\phi^1_2(x_2) + \dot\phi^2_1(x_1) = 0$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} \dot\phi^1_2(x_2) + a_1\, x_2 &= \gamma^1_2 \\ \dot\phi^2_1(x_1) + a_2\, x_1 &= \gamma^2_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{const.}$$

où

$$\gamma^1_2 + \gamma^2_1 = 0$$

et, plus généralement

$$\dot\phi^i_j(x_j) + a_i\, x_j = \gamma^i_j$$

où

$$\gamma^i_j + \gamma^i_j = 0 \qquad i \neq j$$

Alors

$$\phi^i_j(x_j) + \frac{a_i}{2} x_j^{\,2} = \gamma^i_j\, x_j + \delta^i_j$$

$$\phi^i_j\,(x_j) = -\frac{a_i}{2} x_j^{\,2} + \gamma^i_j\, x_j + \delta^i_j$$

et

$$\xi^\ell(x_1\ldots x_n) = a_\ell \frac{x^{\,2}}{2} + \Big(\sum_{j\neq\ell} x_\ell\, a_j\, x_j + \gamma^\ell_j\, x_j - \frac{a_\ell}{2} x_j^{\,2} + \delta^\ell_j\Big)$$

$$\xi^{\ell}(x_1 \ldots x_n) =$$

$$= \frac{a_\ell}{2} (2x_\ell^{\,2} - x_1^{\,2} - \ldots - x_n^{\,2}) + x_\ell \sum_{j \neq \ell} a_j x_j + \sum_{j \neq \ell} \gamma_j^\ell x_j$$

$$+ \delta^\ell + bx^\ell$$

où

$$\gamma_j^\ell + \gamma_\ell^j = 0$$

Maintenant nous trouvons les A_i : nous avons

$$2A_\ell = \Delta \xi^\ell ,$$

donc

$$2A_\ell = a_\ell (2-n)$$

$$A_\ell = \frac{a_\ell}{2} (2-n)$$

Alors

$$\varphi(x,u) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(2-n)}{2} a_\ell x_\ell u + A_0 u + B(x)$$

$$\xi^\ell(x_1 \ldots x_n) = \frac{a_\ell}{2} (2x_\ell^{\,2} - \sum_{j=1}^{\ell} x_j^{\,2}) + x_\ell \sum_{j \neq \ell} a_j x_j + \sum_j \gamma_j^\ell x_j + bx^\ell + \delta^\ell$$

$$\gamma_j^\ell + \gamma_\ell^j = 0$$

donc $\qquad \gamma_\ell^\ell = 0$

Les différentes constantes ci-dessus nous donnent les champs de vecteurs :

$\delta^\ell : \dfrac{\partial}{\partial x^\ell}$ $\qquad$ translations

γ_j^ℓ	$x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}$	rotations
b	$\sum_{\ell=1}^{n} x^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$	dilations
A_o	$u \frac{\partial}{\partial u}$	$u \to \lambda u$
B	$B(x) \frac{\partial}{\partial u}$	$u \to u + B$

a_k nous prenons $\psi = x_1$ par exemple, donc

$$\xi^1 = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)$$

$$\xi^2 = x_1 x_2$$

$$\vdots$$

$$\xi^n = x_1 x_n$$

$$2 A_j = \Delta\xi^j \qquad 2 A_1 = (2-n)$$

$$2 A_2 = 0, \dots$$

$$A(x) = \frac{1}{2} (2-n)x_1$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (2-n)x_1 u$$

et

$$\underset{=}{X} = \frac{1}{2} (x_1^2 - \dots - x_n^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^{n} x_1 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (2-n) x_1 u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$= - \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (2-n)x_1 u \frac{\partial}{\partial u}$$

ou bien plus généralement

$$\underset{=}{i}_k = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2) \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k (x_j \frac{\partial}{\partial x_j}) + \frac{(n-2)}{2} x_k u \frac{\partial}{\partial u}$$

<u>Exemple 4°</u> : Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur dans une dimension est $u_t - u_{xx} = 0$.

En prenant

$$\alpha = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}$$

nous arrivons aux équations des symétries

$$pr^{(2)}\alpha(u_t - u_{xx}) = \varphi_{(t)} - \varphi_{xx} = 0$$

quand $u_t = u_{xx}$,

où

$$\varphi_{(t)} = \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u\, u_x u_t - \tau_u u_x^2$$

$$\begin{aligned}\varphi_{(xx)} = \varphi_{xx} &+ u_x\,(2\,\varphi_{xu} - \xi_{xx}) - u_t\,\tau_{xx}\\ &+ u_x^2\,(\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) - 2u_x\,u_t\,\tau_{xu} - u_x^3\,\xi_{uu}\\ &- u_x^2\,u_t\,\tau_{uu} + u_{xx}(\varphi_u - 2\xi_x) - 2u_{xt}\,\tau_x\\ &- 3u_{xx}\,u_x\,\xi_u - u_{xx}\,u_t\,\tau_u - 2u_{xt}\,u_x\,\tau_u\,.\end{aligned}$$

Le système est donc

(i)	$\varphi_t - \varphi_{xx} = 0$	(1)
(ii)	$2\varphi_{xu} - \xi_{xx} + \xi_t = 0$	(u_x)
(iii)	$\tau_{xx} - \tau_t = -2\xi_x$	(u_{xx})
(iv)	$-\tau_u = \varphi_{uu} - 2\xi_{xu}$	(u_x^2)
(v)	$\xi_{uu} = 0$	(u_x^3)
(vi)	$\xi_u = -\tau_{xu}$	$(u_x\,u_t)$

(vii)	$\tau_{uu} = 0$	$u_x{}^2\, u_t$
(viii)	$\tau_u = 0$	$(u_{xx}\, u_t)$
(ix)	$\tau_x = 0$	u_{xt}
(x)	$\tau_u = 0$	$u_x\, u_{xt}$

Par (ix) et (x) $\tau = \tau(t)$; donc par (vi) $\xi = \xi(x,t)$; et par (iv) $\varphi_{uu} = 0$, donc $\varphi(x,t,u) = A(x,t)u + B(x,t)$. Par (i) $A_t = A_{xx}$ et $B_t = B_{xx}$. Par (iii) $\tau_t = 2\xi_x$ donc $\xi_{xx} = 0$. Par (ii) $2A_x = \xi_{xx} - \xi_t = -\xi_t$. Puisque $\xi_{xx} = 0$, $A_{xxx} = 0$ et $A_{tx} = 0$. Alors $\xi_{tt} = 0$. On trouve facilement les solutions

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 2c_6 t^2$$

$$\varphi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + B(x,t)$$

Les générateurs sont

$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \alpha_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\,t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \alpha_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\alpha_3 = u\frac{\partial}{\partial u} \qquad \alpha_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\alpha_B = B(x,t)\frac{\partial}{\partial u}$$

Grâce à α_B l'algèbre est actuellement de dimension infinie. Les actions correspondants du groupe sont ($e^{\lambda\alpha_i}$)

$e^{\lambda\alpha_1}$: $(x + \lambda, t, u)$

$e^{\lambda\alpha_2}$: $(x_1 t + g, u)$

$e^{\lambda\alpha_3}$: $(x,t,e^{\lambda}u)$

$e^{\lambda\alpha_4}$: $(e^{\lambda}x,\ e^{2\lambda}t,u)$

$e^{\lambda\alpha_5}$: $(x - 2\lambda t,\ t,\ u\exp\{x\lambda - \lambda^2 t\})$

$e^{\lambda\alpha_6}$: $\left(\frac{x}{4\lambda t + 1} , \frac{t}{4\lambda t + 1} , u\sqrt{4\lambda t + 1} \exp \left\{ \frac{-\lambda x^2}{4\lambda t + 1} \right\} \right)$

$e^{\lambda B}$: $(x,t,u + \lambda B(x,t))$

Exemple 5° : Système non linéaire

$$u_y = v_x \qquad\qquad v_y = -uu_x$$

Ce système est une approximation des équations pour l'écoulement d'un gaz. En introduisant les variables

$$p = u_x \qquad q = u_y \qquad r = v_x \qquad s = v_y$$

les équations deviennent

$$q = r \qquad\qquad s = - up.$$

Nous cherchons les générateurs infinitésimaux de symétrie

$$\alpha = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \sigma \frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v}$$

dont le prolongement est

$$pr^{(1)}\alpha = \alpha + \delta\tilde{p} \frac{\partial}{\partial p} + \delta\tilde{q} \frac{\partial}{\partial g} + \delta\tilde{r} \frac{\partial}{\partial g} + \delta\tilde{s} \frac{\partial}{\partial s} .$$

Les dérivées totales sont

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} + r \frac{\partial}{\partial v}$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial u} + s \frac{\partial}{\partial v}$$

et les fonctions $\delta\tilde{p}$, ... sont

$$\delta\tilde{p} = D_x\sigma - pD_x\xi - qD_x\eta$$

$$\delta\tilde{q} = D_y\sigma - pD_y\xi - qD_y\eta$$

$$\delta\tilde{r} = D_x\tau - rD_x\xi - sD_x\eta$$

$$\delta\tilde{s} = D_y\tau - rD_y\xi - sD_y\eta \ .$$

Donc les équations de symétries sont

$$\delta\tilde{q} = \delta\tilde{r} \qquad\qquad \begin{aligned} \delta\tilde{s} &= - u\delta\tilde{p} - p\delta\tilde{u} \\ &= - u\delta\tilde{p} - p\sigma \end{aligned}$$

quand $q = r$ et $s = - up$. Nous arrivons donc à

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} + q\frac{\partial\sigma}{\partial u} + s\frac{\partial\sigma}{\partial v} - p\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + q\frac{\partial\xi}{\partial u} + s\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)$$

$$- q\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + q\frac{\partial\eta}{\partial u} + s\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial\tau}{\partial x} + p\frac{\partial\tau}{\partial u} + r\frac{\partial\tau}{\partial v} - r\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + p\frac{\partial\xi}{\partial u} + r\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)$$

$$- s\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + p\frac{\partial\eta}{\partial u} + r\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)$$

et

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} + q\frac{\partial\tau}{\partial u} + s\frac{\partial\tau}{\partial v} - r\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + q\frac{\partial\xi}{\partial u} + s\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)$$

$$- s\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + q\frac{\partial\eta}{\partial u} + s\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)$$

$$= - u\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} + p\frac{\partial\sigma}{\partial u} + r\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) + up\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + p\frac{\partial\xi}{\partial u} + r\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)$$

$$+ ur\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + p\frac{\partial\eta}{\partial u} + r\frac{\partial\eta}{\partial v}\right) - \sigma p$$

Nous faisons $q = r$ et $s = -up$ ici et nous prenons tous les coefficients de p, r, pr, p^2, r^2 égaux à zéro. Les équations au-dessus sont regardées comme identités polynomiales des variables p et r avec des coefficients en x, y, u et v. Donc nous arrivons aux équations suivantes :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} = \frac{\partial\tau}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} + u\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\tau}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial\tau}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial y} = -u\frac{\partial\sigma}{\partial v} + u\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial\xi}{\partial y} - u\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\partial\tau}{\partial u} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad\qquad -u\frac{\partial\tau}{\partial v} + u\frac{\partial\eta}{\partial y} = -u\frac{\partial\sigma}{\partial u} + u\frac{\partial\xi}{\partial x} - \sigma$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{\partial\eta}{\partial v} \qquad\qquad -\frac{\partial\xi}{\partial u} = u\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

Ces équations sont équivalentes aux suivantes :

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{\partial\eta}{\partial u} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial u} = -u\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = -u\frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\sigma}{2u} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = -u\frac{\partial\sigma}{\partial v} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial v} = \frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\sigma}{2u}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial y} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} = -u\frac{\partial\sigma}{\partial x} \tag{4.12}$$

Par les équations (4.12) on trouve les conditions de combatabilité pour les dérivées de τ de deuxième ordre :

$$\tau_{vx} = \sigma_{ux} + \frac{\sigma_x}{2u}$$

$$\tau_{xv} = \sigma_{yv}$$

$$\tau_{uy} = -u\,\sigma_{vy}$$

$$\tau_{yu} = -u\,\sigma_{xu} - \sigma_x$$

Ainsi

$$\sigma_x = 2u(\tau_{yx} - \sigma_{ux}) = 2u(\sigma_{yv} - \sigma_{ux})$$

et

$$\sigma_x = -(\tau_{yu} + u\sigma_{xu}) = u(\sigma_{vy} - \sigma_{xu}),$$

et donc $\sigma_x = 0$. De la même façon $\sigma_y = 0$. En revenant à (4.12) il vient que $\tau_x = \tau_y = 0$. A partir des équations (4.11) on trouve, en imposant les conditions nécessaires de combatabilités pour les dérivées de ξ,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial v} \qquad\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\sigma}{u} \quad .$$

De $\sigma_u = \sigma/u$ il suit que $\sigma(u,v)$ prend la forme $\sigma(u,v) = uf(v)$. Maintenant d'après les équations (4.12) nous trouvons que

$$\tau_u = -u^2 f' \qquad\qquad \tau_v = \frac{3}{2}f(v),$$

donc

$$0 = \tau_{yu} = \tau_{uv} = -u^2 f'' \quad .$$

Ainsi

$$\sigma = u(av + b)$$

$$\tau = \frac{3}{4}av^2 - a\frac{u^3}{3} + \frac{3}{2}by + c$$

ou a, b, c sont des constantes. Donc

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\frac{au}{2}$$

et, utilisant les équations (4.11), nous trouvons les solutions générales :

$$\xi = \frac{ayu^2}{2} - \frac{avx}{2} + \frac{bx}{2} + dx + \xi_0$$

$$\eta = -\frac{aux}{2} - avy + dy + \eta_o$$

où ξ_o, η_o sont des solutions arbitraires de

$$\xi_u = -u\eta_v \qquad \xi_v = \eta_u$$

Par conséquence, l'algèbre de Lie est de dimension infinie ; en dehors des fonctions ξ_o, η_o il existe une algèbre de dimension 4 (les a, b, c, d), donc

$$X_1 = (yu^2 - xv)\frac{\partial}{\partial x} - (xu + 2yv)\frac{\partial}{\partial y} + 2uv\frac{\partial}{\partial u} + (-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2)\frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} + 3v\frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

Les crochets des X_1, X_2, X_3, X_4 sont donnés par la table

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-3X_1$	$-X_2+2X_4$	0
X_2	$3X_1$	0	$-3X_3$	0
X_3	X_2-2X_4	$3X_3$	0	0
X_4	0	0	0	0

<u>Exemple 6°</u>: Equations d'Euler

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0$$
$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0 \qquad (4.13)$$

u^i sont les composants de la vitesse et p est la pression hydrodynamique. Nous cherchons les champs des vecteurs

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^o \frac{\partial}{\partial t} + \varphi^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \pi \frac{\partial}{\partial p}$$

dont les prolongements $pr^{(1)}X$ sont les générateurs infinitésimales des symétries. Nous écrivons u_k^ℓ et p_k pour les dérivées, où $k = 0, 1, 2, 3$ et u_o^ℓ est $\frac{\partial u^\ell}{\partial t}$.

Donc

$$\delta \tilde{u}_k^\ell = \varphi_{(k)}^\ell = D_k \varphi^\ell - (D_k \xi^i) u_i^\ell$$

$$\delta \tilde{p}_k = \pi_{(k)} = D_k \pi - (D_k \xi^i) p_i$$

Le prolongement de X est

$$pr^{(1)}X = X + \varphi_{(k)}^\ell \frac{\partial}{\partial u_k^\ell} + \pi_{(k)} \frac{\partial}{\partial p_k} .$$

Ici $\ell = 1,2,3$; $i = 0,1,2,3$; et $k = 1,2,3$. Les équations (4.13) peuvent s'écrire

$$u_t^i + u^j u_j^i + p_i = 0$$

$$\sum u_\ell^\ell = 0$$

Les équations des symétries viennent de

$$\delta \tilde{u}_t^\ell + u^j (\delta \tilde{u}_j^\ell) + u_j^\ell (\delta \tilde{u}^j) + \delta p_\ell = 0$$

$$\sum_\ell \delta \tilde{u}_\ell^\ell = 0$$

donc

$$\varphi_{(t)}^\ell + u^j \varphi_{(j)}^\ell + u_j^\ell \varphi^j + \pi_{(\ell)} = 0 ,$$

$$\sum_{\ell=1}^3 \varphi_{(\ell)}^\ell = 0 ,$$

alors

$$D_t\varphi^\ell - (D_t\xi^i)u_i^\ell + u^j(D_j\varphi^\ell - (D_j\xi^i)u_i^\ell$$

$$+ u_j^\ell\varphi^j + D_\ell\pi - (D_\ell\xi^i)p_i = 0 \;, \tag{4.14}$$

$$\sum_{\ell=1}^{3} \{D_\ell\varphi^\ell - (D_\ell\xi^i)u_i^\ell\} = 0 \;,$$

Ces équations ayant lieu quand les équations (4.13) sont elles-mêmes satisfaites. Etudions d'abord la dernière équation ; nous arrivons à

$$\sum_{\ell=1}^{3} \{\frac{\partial\varphi^\ell}{\partial x^\ell} + \frac{\partial\varphi^\ell}{\partial u^j} u_\ell^j + \frac{\partial\varphi^\ell}{\partial p} p_\ell - \sum_{i=o}^{3} u_i^\ell \left(\frac{\partial\xi}{\partial x^\ell} + \frac{\partial\xi}{\partial u^j} u_\ell^j + \frac{\partial\xi}{\partial p} p_\ell\right)\} = 0$$

quand $\sum_{\ell=1}^{3} u_\ell^\ell = 0$. On peut écrire ces équations sous la forme

$$0 = \sum_{\ell=1}^{3} \{\frac{\partial\varphi^\ell}{\partial x^\ell} + \frac{\partial\varphi^\ell}{\partial p} p_\ell - u_o^\ell \frac{\partial\xi^o}{\partial x^\ell}\} + \sum_{j,\ell=1}^{3} u_\ell^j\left(\frac{\partial\varphi^\ell}{\partial u^j} - \frac{\partial\xi^\ell}{\partial x^j}\right)$$

$$- \sum_{i=o}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \{u_i^\ell u_\ell^j \frac{\partial\xi^i}{\partial u^j} + u_i^\ell p_\ell \frac{\partial\xi^i}{\partial p}\} \;.$$

Alors nous obtenons les équations suivantes

$$\sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial\varphi^\ell}{\partial x^\ell} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi^\ell}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial\xi^o}{\partial x^\ell} = 0 \;, \quad \ell=1,2,3$$

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial p} = \frac{\partial\xi^i}{\partial u^j} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 0,1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{array} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial\varphi^\ell}{\partial u^j} = \frac{\partial\xi^\ell}{\partial x^j} \qquad j \neq \ell$$

et enfin

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^1} - \frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\varphi^2}{\partial u^2} - \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi^3}{\partial u^3} - \frac{\partial\xi^3}{\partial x^3} \;.$$

En utilisant ces résultats et les équations (4.13)(on substitue $u_t^i = - u^j u_j^i - p_i$) les équations (4.14) se simplifient à

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial x^{\ell}} + u^j \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial x^j}\right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial u^k} (-u^j u^k_j - p_k)\\
&- \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\xi^i}{\partial t} u^{\ell}_i + \frac{\partial\xi^o}{\partial t} (u^j\, u^{\ell}_j + p_{\ell})\\
&+ \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial u^k} u^j\, u^k_j - \sum_{i,j=1}^{3} u^{\ell}_i\, u^j \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\\
&+ u^{\ell}_j\, \varphi^j + \frac{\partial\pi}{\partial u^k} u^k_{\ell} + \frac{\partial\pi}{\partial p} p_{\ell} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\xi^i}{\partial x^{\ell}} p_i = 0 .\end{aligned}$$

Rappelons que celles-ci sont des identités pour les polynômes des variables u^{ℓ}_i, p_k avec coefficients en x,t,u^j. Donc nous arrivons aux équations suivantes en prenant les coefficients des termes (1), (p_k), et u^k_j égaux à zéro :

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial t} + u^j \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial\pi}{\partial x^{\ell}} = 0$$

$$(p_k) \qquad \sum_{k=1}^{3} p_k\left(- \frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial u^k} + \delta_{\ell k}\left(\frac{\partial\xi^o}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial p}\right) - \frac{\partial\xi^k}{\partial x^{\ell}}\right) = 0 ,$$

donc

$$\frac{\partial\varphi^{\ell}}{\partial u^k} + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^{\ell}} = \delta_{\ell k} \left(\frac{\partial\xi^o}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial p}\right) ,$$

$$(u^k_j) \qquad \sum_{k,j=1}^{3} u^k_j\left\{\delta_{\ell k}\left(- \frac{\partial\xi^j}{\partial t} + u^j \frac{\partial\xi^o}{\partial t} - u^m \frac{\partial\xi^j}{\partial x^m} + \varphi^j\right) + \delta_{\ell j} \frac{\partial\pi}{\partial u^k}\right\} = 0 .$$

Prenons ℓ=1 dans la dernière équation, par exemple; nous obtenons

$$\begin{aligned}&u^1_1 \left(- \frac{\partial\xi^1}{\partial t} + u^1 \frac{\partial\xi^o}{\partial t} - u^m \frac{\partial\xi^1}{\partial x^m} + \varphi^1 + \frac{\partial\pi}{\partial u^1}\right)\\
&+ u^1_2 \left(- \frac{\partial\xi^2}{\partial t} + u^2 \frac{\partial\xi^o}{\partial t} - u^m \frac{\partial\xi^2}{\partial x^m} + \varphi^2\right)\end{aligned}$$

$$+ u_3^1 \left(- \frac{\partial \xi^3}{\partial t} + u^3 \frac{\partial \xi^o}{\partial t} - u^m \frac{\partial \xi^3}{\partial x^m} + \varphi^3\right)$$

$$+ u_1^2 \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^2}\right) + u_1^3 \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^3}\right) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial \pi}{\partial u^j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi^j}{\partial t} + u^m \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m} = u^j \frac{\partial \xi^o}{\partial t} + \varphi^j \tag{4.16}$$

pour j=1,2. De la même façon, en prenant aussi ℓ=2,3, on arrive aux équations (4.16) pour tout j. Nous reprenons toutes les équations que nous avons trouvées ci-dessous :

(i) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial x^\ell} = 0$

(ii) $\dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial p} = 0$

(iii) $\dfrac{\partial \xi^o}{\partial x^\ell} = 0$

(iv) $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial p} = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial u^j} = 0 \qquad i = 0,1,2,3\ ;\ j = 1,2,3$

(v) $\dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial u^j} = \dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^j} \qquad j \neq \ell$

(vi) $\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} - \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} - \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial u^3} - \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x^3}$

(vii) $\dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial t} + u^j \dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial x^j} + \dfrac{\partial \pi}{\partial x^\ell} = 0$

(viii) $\dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial u^k} + \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} = 0 \qquad k \neq \ell$

(ix) $\dfrac{\partial \varphi^\ell}{\partial u^\ell} + \dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^\ell} = \dfrac{\partial \xi^o}{\partial t} + \dfrac{\partial \pi}{\partial p}$

(x) $\dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} + \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} = 0 \qquad k \neq \ell$

(xi) $\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial u^k} = 0$

(xii) $\quad \varphi^j + u^j \dfrac{\partial\xi^o}{\partial t} = \dfrac{\partial\xi^j}{\partial t} + u^m \dfrac{\partial\xi^j}{\partial x^m}$

(Equation (x) suit de (v) et (viii))

De (iii) et (iv) il suit que $\xi^o = \xi^o(t)$; nous écrivons désormais $\xi^o(t) =$ (t). De même façon, $\varphi^\ell = \varphi^\ell(x,t,u)$, $\xi^\ell = \xi^\ell(x,t)$, et $\pi = \pi(x,t,p)$. Par (viii) et (ix) nous voyons que $\dfrac{\partial\varphi^\ell}{\partial u^j}$ est indépendant des u^j ; alors

$$\varphi^\ell = A^\ell_k\,(x,t)u^k + B^\ell(x,t)\ .$$

Par (vii) nous trouvons

$$\frac{\partial A^\ell_k}{\partial t}\,u^k + \frac{\partial B^\ell}{\partial t} + u^j\left(\frac{\partial A^\ell_k}{\partial x^j}\,u^k + \frac{\partial B^\ell}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial\pi}{\partial x^\ell} = 0\ ,$$

donc

$$u^j\left(\frac{\partial A^\ell_j}{\partial t} + \frac{\partial B^\ell}{\partial x^j}\right) + u^j\,u^k\,\frac{\partial A^\ell_k}{\partial x^j} + \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial x^\ell}\right) = 0\ ,$$

enfin

$$\frac{\partial A^\ell_j}{\partial t} + \frac{\partial B^\ell}{\partial x^j} = 0$$

$$\frac{\partial A^\ell_k}{\partial x^j} = 0 \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial B^\ell}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial x^\ell} = 0$$

Il suit que les A^j_k ne dépendent que de t et que

$$B^\ell = -\,\dot{A}^\ell_j x^j + D^\ell(t)$$

et

$$\frac{\partial B^{\ell}}{\partial t} = - \frac{\partial \pi}{\partial x^{\ell}} = - \ddot{A}^{\ell}_{j} \; x^{j} + D^{\ell} \; .$$

Par (xii) nous trouvons

$$A^{j}_{k}(t)u^{k} + B^{j}(x,t) + u^{j}\dot{a} = \frac{\partial \xi^{j}}{\partial t} + u^{k} \; \frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{k}} \; ,$$

donc

$$(\delta_{jk} \; a + A^{j}_{k}(t) - \frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{k}})u^{k} + B^{j} = \frac{\partial \xi^{j}}{\partial t} \; .$$

Il suit que

$$\frac{\partial \xi^{j}}{\partial t} = B^{j}(x,t) \; ,$$

$$\frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{k}} = A^{j}_{k}(t) \qquad\qquad j \neq k$$

$$\frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{j}} = A^{j}_{j}(t) + a \; .$$

Alors

$$\xi^{\ell} = A^{\ell}_{j} \; x^{j} + \dot{a} \; x^{\ell} + C^{\ell}(t)$$

et

$$\frac{\partial \xi^{\ell}}{\partial t} = \dot{A}^{\ell}_{j} \; x^{j} + \ddot{a} \; x^{\ell} + C^{\ell}$$

$$= B^{\ell}(x,t)$$

$$= - A^{\ell}_{j} \; x^{j} + D^{\ell}(t) \; .$$

Cela implique que $D^{\ell} = \dot{C}^{\ell}$ et que $\dot{A}^{\ell}_{j}(t) = 0$ pour $\ell \neq j$. De plus, par (x), $A^{\ell}_{j} + A^{j}_{\ell} = 0$ pour $\ell \neq j$.

Enfin

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = A^j_j(t) + \dot{a}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial t} = \frac{\partial B^j}{\partial x^j} ,$$

$$\dot{A}^j_j + \ddot{a} = - \dot{A}^j_j ,$$

$$2\,\dot{A}^j_j + \ddot{a} = 0$$

ou bien

$$A^j_j = - \frac{1}{2}\,\dot{a} + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.})$$

Alors

$$\varphi^\ell = A^\ell_k u^k + (\alpha - \frac{1}{2}\,\dot{a})u^\ell - \dot{A}^\ell_\ell x^\ell + \dot{C}^\ell$$

$$= A^\ell_k u^k + (\alpha - \frac{1}{2}\,\dot{a})u^\ell - \frac{1}{2}\,\ddot{a}x^\ell + \dot{C}^\ell$$

et

$$\xi^\ell = A^\ell_k x^k + (\alpha + \frac{1}{2}\,\dot{a})x^\ell + C^\ell(t)$$

ou la matrice A^ℓ_k est une matrice constante telle que

$$A^\ell_k + A^k_\ell = 0$$

Par (i) nous trouvons que

$$\sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial x^\ell} = - \frac{3}{2}\,\ddot{a} = 0$$

donc $a(t) = \beta t + \gamma$ et $a = \beta$. Aussi par (ix)

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = (2\alpha - \beta)$$

et

$$\pi = (2\alpha - \beta)p + \pi_o(x,t) \ .$$

Par (4.17)

$$0 = \frac{\partial B^\ell}{\partial t} + \frac{\partial \pi_o}{\partial x^\ell} = \ddot{C}^\ell + \frac{\partial \pi_o}{\partial x^\ell} \ ,$$

donc

$$\pi_o(x,t) = - \ddot{C}^\ell \, x^\ell + E(t)$$

Nous avons finalement

$$\varphi^\ell = A^\ell_k \, u^k + (\alpha - \frac{1}{2}\,\beta)u^\ell + \dot{C}^\ell$$

$$\xi^o = \beta t + \gamma$$

$$\xi^\ell = A^\ell_k \, x^k + (\alpha + \frac{1}{2}\,\beta) \, x^\ell + C^\ell$$

$$\pi = (2\alpha - \beta)p + E(t) - \ddot{C}^\ell \, x^\ell$$

Une base de champs de vecteurs correspondants est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$R_{ij} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial}{\partial u^j} - u^j \frac{\partial}{\partial u^i} \ ,$$

$$- u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - 2p \frac{\partial}{\partial p} \ ,$$

$$u^{\ell} \frac{\partial}{\partial u^{\ell}} + x^{\ell} \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} + 2p \frac{\partial}{\partial p}$$

$$E(t) \frac{\partial}{\partial p}$$

$$G_{\ell} = C(t) \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} + \dot{C} \frac{\partial}{\partial u^{\ell}} - \ddot{C}\, x^{\ell} \frac{\partial}{\partial p} \qquad \ell = 1,2,3$$

Les G_{ℓ} engendrent les transformations gallilëennes. Par exemple, en prenant $C(t) = vt$ nous avons

$$\tilde{x}^1 = x^1 + vt \qquad \tilde{x}^2 = x^2 \qquad \tilde{x}^3 = x^3$$
$$\tilde{u}^1 = u^1 + v \qquad \tilde{u}^2 = u^2 \qquad \tilde{u}^3 = u^3$$

V - THEORIE DES SOLUTIONS INVARIANTES

Sous l'action du groupe $\mathcal{G}$ les solutions sont transformées en d'autres solutions. Si H est un sous groupe de $\mathcal{G}$ une solution $u = \varphi(x)$ s'appelle une solution H-invariante si le graphe de $u = \varphi(x)$, comme sous variété dans XxU, reste invariant sous l'action H. Par exemple, le champ de vecteurs

$$\alpha_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}$$

est un générateur infinitésimal des symétries de l'équation de la chaleur. L'action $e^{\lambda\alpha_4}$ est donnée par

$$\tilde{x} = e^{\lambda} x \qquad \tilde{t} = e^{2\lambda} t \qquad \tilde{u} = u ,$$

ou bien $\tilde{x} = sx$, $\tilde{t} = s^2 t$, $\tilde{u} = u$. Une fonction $u(x,t)$ est transformée dans $(T_s u)(x,t) = u(\frac{x}{s}, \frac{t}{s^2})$. Une fonction est donc H-invariante (où H est le groupe engendré par $e^{\lambda\alpha_4}$) si $T_s u = u$, donc si

$$u(x,t) = u(\frac{x}{s}, \frac{t}{s^2}) \qquad \forall s.$$

En mettant $s = \sqrt{t}$ nous voyons qu'une telle fonction invariante prend la forme

$\tilde{u}(x,t) = u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1) = \phi(\xi)$ où $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ et ϕ est une fonction quelconque.

Dans ce cas nous pouvons démontrer qu'il existe de telles solutions invariantes de l'équation de la chaleur. En effet, en prenant $u(x,t) = \phi(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$ dans l'équation $u_t - u_{xx} = 0$, nous arrivons à

$$-\frac{1}{t}\left(\frac{\xi}{2}\phi' + \phi''\right) = 0$$

ou bien

$$\phi'' + \frac{\xi}{2}\phi' = 0 .$$

La solution générale de cette équation est

$$\phi(\xi) = A + B \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\tau^2/4}\, d\tau .$$

Evidemment $u_x = \frac{d}{dx}\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}\phi'(\xi)$ est aussi une solution, et celle-ci est

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} ,$$

qui est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

De la même façon considérons les solutions qui sont invariantes par rapport à un groupe engendré par $\alpha_5 = xt\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$. L'action dans ce cas est

$$e^{s\alpha_5}(x,t,u) = (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u}) = (x+2st, t, e^{-(xs+ts^2)}u).$$

Le transformé d'une fonction $u(x,t)$ est

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = e^{-(xs+ts^2)}u(x,t)$$

où

$$(T_s u)(x,t) = e^{-(xs-ts^2)}u(x-2ts,t).$$

Cherchons une fonction qui est invariante : $T_s u = u$. Prenons $\frac{x}{2t} = s$; donc

$$u(x,t) = e^{-x^2/4t} u(o,t).$$

De plus, en mettant cette expression dans l'équation de la chaleur, nous trouvons $u(o,t) = A/\sqrt{t}$. Donc

$$u(x,t) = \frac{A\, e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}$$

pour A constante quelconque.

Enfin, essayons le sous groupe engendré par $\alpha_4 + \gamma\alpha_3$, où γ = const. On trouve sans difficulté l'action

$$(T_s u)\ (x,t) = s^\gamma\, u(\frac{x}{s}, \frac{t}{s^2}) .$$

Puis, si u est une fonction invariante, u doit prendre la forme

$$u(x,t) = t^{\gamma/2}\ \phi(\xi) \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}} .$$

En mettant cette expression dans l'équation de chaleur nous trouvons cette fois

$$u_t - u_{xx} = t^{\gamma/2-1}\ [\frac{\gamma}{2}\ \phi - \xi\phi' - \phi''] ;$$

alors l'équation différentielle ordinaire est

$$\phi'' + \xi\phi' - \frac{\gamma}{2}\ \phi = 0 .$$

Théorie Générale

Passons maintenant à une situation plus générale. Soit Φ_g l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace XxU. Une invariante, comme nous l'avons dit, est une fonction I(x,u) telle que $I(\Phi_g(x,u)) = I(x,u)$. Nous avons vu (Théorème 3.3) que I est une invariante ssi

$$\alpha I = \xi^i \frac{\partial I}{\partial x^i} + \varphi^j \frac{\partial I}{\partial u^j} = 0$$

pour tout champs de vecteurs α dans l'algèbre de générateurs de l'action Φ_g. Une base d'ingégrité d'invariantes est un ensemble $\{I_1,\ldots I_p\}$ d'invariantes indépendantes telle que toute invariante I peut s'exprimer comme $I(x,u) = F(I_1,\ldots I_p)$ pour une fonction F. Les fonctions $I_j(x,u)$ sont indépendantes si le jacobien

$$\frac{\partial(I_1,\ldots I_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m)}$$

a toujours le rang p.

<u>*Lemme 5.1 :*</u> <u>*Soit*</u> $\alpha_j = \xi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi_j^k \frac{\partial}{\partial u^k}$ <u>*des champs de vecteurs qui font une base pour une algèbre de Lie,*</u> $j = 1,\ldots r$. <u>*Soit*</u> R <u>*le rang dans un ouvert de la matrice*</u>

$$M = \left\| \begin{matrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n & \varphi_1^1 & \ldots & \varphi_1^m \\ \xi_2^1 & \ldots & \xi_2^n & \varphi_2^1 & \ldots & \varphi_2^m \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \xi_r^1 & \ldots & \xi_r^n & \varphi_r^1 & \ldots & \varphi_r^m \end{matrix} \right\|$$

<u>*si*</u> $m + n > R$ <u>*le nombre d'invariantes indépendantes est*</u> $n + m - R$.

Puisque les α_j forment une algèbre de Lie le système d'équations $\alpha_j\, I = 0$ est complète; donc le Lemme concerne le nombre de solutions d'un système complet. (voir, par exemple le livre de Carathéodory sur les problèmes variationnelles.(Holden - Day, Inc., 1965 ; San Francisco ; voir Part I, Theorème 3, page 35)

<u>Exemple</u>

$$\alpha_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\alpha_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\alpha_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$M = \left\| \begin{matrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{matrix} \right\|$$

On voit que le rang d'M est 2 ; et il existe une seule invariante $x^2 + y^2 + z^2$ ($n = 3$, $m = 0$ dans cet exemple).

Si $R = m + n$ l'action est transitive, et chaque point se transforme dans tous les autres ; les seules invariantes dans ce cas sont les constantes.

Nous arrivons maintenant aux questions suivantes. Soit une équation différentielle $\Delta = 0$, un groupe de symétries $\mathcal{G}$, et un sous-groupe H :

1) Comment trouver la forme des fonctions H-invariantes

2) Comment trouver des solutions H-invariantes de $\Delta = 0$.

Tout d'abord, soit $J_\tau(x,u)$, $\tau = 1,\ldots n + m - R$, une base d'intégrité pour les invariantes de H :

$$\alpha_s = \xi^i_s \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^j_s \frac{\partial}{\partial u^j}$$

$$\alpha_s \, J_\tau = 0$$

Une variété de codimension m dans XxU, invariante sous l'action de H, est donnée par des équations

$$\varphi^j(x,u) = \Phi^j(J_1,\ldots J_p) = 0 \qquad j = 1,\ldots m\,.$$

Nous supposons que les Φ^j sont des fonctions indépendantes par rapport aux variables $J_1,\ldots J_p$; c'est-à-dire que le jacobien $\left\| \frac{\partial \Phi^j}{\partial J_\tau} \right\|$ a toujours le rang m.

Nous essayons maintenant d'inverter les relations $\Phi^j = 0$ pour trouver des fonctions invariantes.

<u>Exemple</u> Dans l'équation de chaleur les invariantes de l'action engendrée par α_4 sont les solutions de $\alpha_4\,\varphi = 0$, c'est-à-dire

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x,t,u) = 0$$

Dans ce cas, $n = 2$, $m = 1$, et $R = 1$; donc il y a deux invariantes, en fait $\xi = x/\sqrt{t}$ et u. Si on se donne une variété invariante $\psi(\xi,u) = 0$ telle que $\psi_u \neq 0$, alors on trouve une fonction invariante $u = \varphi(\xi)$.

Exemple (W.W Puchnačev, Priklady Mekhani Tekh. Fiz. 1 (1960), p. 83-90).

Nous prenons les équations de Navier-Stokes en dimension 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Pour ces équations on trouve les symétries

$$\alpha_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2p\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\alpha_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$$

α_2 engendre les rotations ; α, engendre une transformation d'échelle (voir aussi l'exemple des équations d'Euler). Tout d'abord, $[\alpha_1,\alpha_2] = 0$; donc $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ forme une sous-algèbre, et ils engendrent un sous groupe de symétries. La matrice M est dans ce cas :

$$M = \left\| \begin{matrix} 2t & x & y & -u & -v & 2p \\ 0 & -y & x & -v & u & 0 \end{matrix} \right\|$$

donc rang $M = 2$ et il existe $n + m - R = 3 + 3 - 2 = 4$ invariantes, qui sont en fait

$$J_1 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}} \qquad J_2 = ux + vy \qquad J_3 = uy - vx \qquad J_4 = pt$$

Prenons $\xi = J_1 = r/\sqrt{t}$, et disons que nous avons une variété invariante

$$\Phi^j(\xi, J_2, J_3, J_4) = 0$$

de codimension 3. Une telle relation implique que J_2, J_3, et J_4 sont des fonctions de ξ. On voit que

$$\frac{\partial(J_2,J_3,J_4)}{\partial(u,v,p)} = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = -t(x^2+y^2)$$

et on peut exprimer u, v, p en J_2, J_3, J_4 :

$$p = \frac{1}{t} J_4 \qquad u = \frac{x J_2 + y J_3}{x^2+y^2} \qquad v = \frac{y J_2 - x J_3}{x^2+y^2}$$

Donc des solutions H-invariantes s'expriment

$$p(x,y,t) = \frac{1}{t} J_4(\xi)$$

$$u(x,y,t) = \frac{x J_2(\xi) + y J_3(\xi)}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y,t) = \frac{y J_2(\xi) - x J_3(\xi)}{x^2+y^2}$$

Il reste maintenant à chercher les équations aux dérivées ordinaires pour J_2, J_3, J_4. Passons en coordonnées polaires

$$u_r = u\cos\theta + v\sin\theta$$
$$u_\theta = -u\sin\theta + v\cos\theta$$

donc

$$u_r = \frac{1}{v} J_2(\xi) \qquad u_\theta = -\frac{1}{r} J_3(\xi) \qquad p = \frac{1}{t} J_4(\xi) .$$

Les équations pour les J sont

$$\frac{dJ_2}{d\xi} = 0$$

$$\xi^3 \frac{dJ_4}{d\xi} = J_2{}^2 + J_3{}^3$$

$$\frac{d^2J_3}{d\xi^2} + \left(\frac{\xi}{2} - \frac{J_2+1}{\xi}\right)\frac{dJ_3}{d\xi} = 0$$

<u>Exemple</u> Prenons cette fois $H = \{\alpha_1, \frac{\partial}{\partial t}\}$. Les invariantes de $\frac{\partial}{\partial t}$ sont x, y, u, v, p. Nous pouvons prendre comme invariantes d'α_1 les fonctions

$$J_2 = ux + vy \qquad J_3 = uy - vx \ , \ \frac{y}{x} \ , \qquad r^2 p$$

par exemple ; ou bien nous pouvons remplacer $\frac{y}{x}$ par $\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$. Nous avons encore

$$u = \frac{x\,J_2 + y\,J_3}{r^2} \qquad v = \frac{y\,J_2 - x\,J_3}{r^2} \qquad p = \frac{J_1}{r^2}$$

ou $J_i = J_i(\varphi)$. En mettant ces expressions dans les équations de Navier Stokes nous trouvons que

$$u_r = \frac{f(\varphi)}{r} \qquad u = \frac{C_1}{r} \qquad p = \frac{2f + C_2}{r^2}$$

ou f satisfait l'équation

$$f'' - C_1 f' + f^2 + 4f(\varphi) + C_1{}^2 + 2C_2 = 0$$

<u>Exemple</u> $u_{tt} - u_{xx} + u^m = 0$.

Cette équation est invariante sous la transformation d'échelle

$$\tilde{x} = \lambda x \qquad \tilde{t} = \lambda t \qquad \tilde{u} = \lambda^\gamma u$$

où $\gamma = \frac{2}{1-m}$. Le générateur de cette transformation est

$$\alpha = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + \gamma u\frac{\partial}{\partial u} \ .$$

Les invariantes d'α sont $\frac{x}{t}$ et $t^{-\gamma}u$; donc nous cherchons des solutions invariantes du type

$$ut^{-\gamma} = \psi(\xi) \qquad \xi = \frac{x}{t} \ ,$$

$$u = t^\gamma\ (\xi) \ .$$

On trouve pour ψ l'équation

$$(\xi^2 - 1)\psi'' - 2\gamma\xi\psi' + \gamma(\gamma - 1)\psi + \psi^m = 0 \ .$$

VI - SYMETRIES GENERALISEES (voir [7], [8])

Soit $J^\infty(x,u,p_J)$, où $x = (x_1,\ldots x_n)$, $J = (J_1,\ldots J_n)$ et u une scalaire, le fibré de jet sur XxU aux dérivées de tout ordre. Si v est un champ de vecteurs sur XxU

$$v = \xi^i(x,u)\partial_i + \varphi(x,u)\partial_u \tag{6.1}$$

son prolongement à J^∞ est

$$pr^{(\infty)}v = \xi^i\,\partial_i + \varphi\,\partial_u + \sum_J \varphi(J)\,\frac{\partial}{\partial p_J}$$

ou, par (3.7),

$$\varphi_{(J)} = D_J(\varphi - \xi^i\,p_i) + (D_J\,p_i)\xi^i\ . \tag{6.2}$$

Dans les premiers chapitres nous avons considéré les symétries engendrées par des champs de vecteurs (6.1) où les ξ^i et φ ne dépendent pas des dérivées de u, c'est-à-dire, sur les coordonnées p_J. Dans ce chapitre nous considérons la généralisation au cas où les φ et ξ^i dépendent des p_J.

Nous commençons avec la situation spécialisée

$$V = Q(x,u,p_J)\partial_u\ ; \tag{6.3}$$

et nous voyons qu'un tel champ de vecteurs est de forme standard. Puisque les ξ^i sont nuls, le prolongement d'un tel V est

$$pr^{(\infty)}Q\partial_u = e^{tV_Q} = \sum_J (D_JQ)\,\frac{\partial}{\partial p_J}\ .$$

Nous voudrions savoir quel est l'action sur J^∞ engendrée par V_Q. En effet, un tel champ de vecteurs V comme dans (6.3) engendre un écoulement sur les sections de J^∞.

__Proposition 6.1__ : __Supposons que le problème aux données initiales__

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q(x,u,\partial_J u) \qquad u(x,o) = f(x) \tag{6.4}$$

__a toujours une solution unique et régulière pour n'importe quelle f bornée dans__ $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. __Alors l'action__ e^{tV_Q} __sur__ J^∞ __est donnée par__ $(e^{tV_Q}f)\ (x) = u(t,x)$.

<u>Démonstration</u> : Evidemment l'écoulement sur les sections de J_∞ définie par (6.4) est un groupe de transformations d'un paramètre. Pour trouver son générateur infinitésimal il faut calculer les dérivées de $\partial_J u$ à l'instant t = 0. Nous mettons $\delta = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=o}$; donc

$$\delta(\partial_J u) = \left.\frac{d}{dt} D_J u\right|_{t=o} = D_J Q \ ;$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial t} = Q(x,u,\partial_J u)$, donc $\frac{\partial}{\partial t}\partial_J u = \partial_J \frac{\partial u}{\partial t} = D_J Q(x,u,\partial_J u)$. Ceci implique que le générateur infinitésimal est formellement $(D_J Q)\frac{\partial}{u_J}$; mais ce champ de vecteurs est précisément V_Q.

Passons maintenant à la situation générale,

$$V = \xi^i(x,u,\partial_J u)\partial_i + \varphi(x,u,\partial_J u)\partial_u \ . \tag{6.5}$$

Nous constatons que le cas général est toujours équivalent à la forme standard. Donnons n'importe quelle fonction Q sur J_∞ qui dépend de x,u,p_J ($|J| \leqslant k$ pour un entier positif k), définissons

$$V_Q = \sum_J (D_J Q)\frac{\partial}{\partial p_J} \ . \tag{6.6}$$

Par exemple, pour $Q = p_i$

$$V_{p_i} = \sum_J (D_i\, p_J)\frac{\partial}{\partial p_J} \ .$$

Or, les dérivées totales sont des champs de vecteurs sur J_∞ :

$$D_i = \partial_i + p_i\frac{\partial}{\partial u} + (D_j\, p_i)\frac{\partial}{\partial p_i} + \ldots$$

ou bien

$$D_i = \partial_i + \sum_J (D_i\, p_J)\frac{\partial}{\partial p_J} \ ;$$

donc

$$D_i = \partial_i + V_{p_i} \quad \text{et} \quad \partial_i = D_i - V_{p_i} \ .$$

Par (6.2), nous pouvons écrire

$$pr^{(\infty)}V = \xi^i \partial_i + \sum_J \varphi_{(J)} \frac{\partial}{\partial p_J} = \xi^i (D_i - V_{p_i}) + \sum_J D_J(\varphi - \xi^i u_i) \frac{\partial}{\partial p_J} + \sum_J (D_J p_i)\xi^i \frac{\partial}{\partial p_J}$$

(sommation sur i)) ; donc

$$pr^{(\infty)}V = \xi^i D_i + V_Q \tag{6.7}$$

où $Q = \varphi - \xi^i p_i$.

Soit $P(x,u,p_J)$ une fonction sur J^∞, où les J sont restreints à $|J| \leqslant k$, un champ de vecteurs V sur J^∞ est une symétrie généralisée infinitésimale de l'équation aux dérivées partielles $P(x,u(x),\partial_J u(x)) = 0$ si

$$[pr^{(\infty)}V\ P]\ (x,u(x),\partial_J u(x)) = 0 \tag{6.8}$$

quand

$$P(x,u(x),\partial_J u(x)) = 0\ .$$

Une condition suffisante pour (6.8) est

$$[pr^{(\infty)}V\ P]\ (x,u,p_J) = \sum_J R^J D_J P \tag{6.9}$$

où les R^J sont des fonctions sur J^∞. Nous désignons par $\{P\}$ l'idéal différentiel engendré par toutes les dérivées $D_J P$; c'est-à-dire, $\{P\}$ consiste à ce que toutes fonctions sur J^∞ soient de la forme

$$Q = \sum_J R^J D_J P\ .$$

Donc la condition (6.9) peut s'écrire comme $pr^{(\infty)}v\ P \in \{P\}$. Evidemment, si $f(x)$ est une fonction pour laquelle $P(f) = 0$, c'est-à-dire $P(x,f(x),\partial_J f(x)) = 0$, donc aussi $Q(f) = 0$ pour tout $Q \in \{P\}$.

<u>Question</u> : Considérons l'idéal I_p qui consiste à ce que toutes fonctions Q telle que $Q(x,u(x),\partial_J u(x)) = 0$ quand $P(x,u(x),\partial_J u(x)) = 0$. Evidemment $\{P\} \subset I_p$. Est-ce que $Ip = \{P\}$?

Désormais, quand j'écris $P = 0$, je veux dire $P(x,u(x),\partial_J u(x)) = 0$ pour une fonction u ; alors $P = 0$ veut dire que P est nulle sur une section de $J\infty$. Evidemment $D_i\, P = 0$ quand $P = 0$; d'après (6.7) il est clair que $pr^{(\infty)}V\, P = 0$ ssi $V_Q P = 0$, où V est donnée par (6.5) et V_Q est donnée par (6.6) quand $Q = \varphi - \xi^i\, p_i$. Or, $V_Q = pr^{(\infty)}\hat{V}$ où

$$\hat{V} = Q\, \partial_u = (\varphi - \xi^i\, p_i)\partial_u \, .$$

Donc les deux champs de vecteurs $V = \xi^i\, \partial_i + \varphi\, \partial_u$ et $\hat{V} = (\varphi - \xi^i\, p_i)\partial_u$ sont équivalentes dans le sens que $pr^{(\infty)}V\, P = 0$ ssi $pr^{(\infty)}\hat{V}\, P = 0$, c'est-à-dire que $\hat{V}$ est une symétrie infinitésimale de P ssi V en est une. Alors nous avons la

Proposition 6.2 : *Tout champ de vecteurs $V = \xi^i(x,u,p_J)\,\partial_i + \varphi(x,u,p_J)\,\partial_u$ est équivalent du point de vue des symétries infinitésimales des équations aux dérivées partielles, au champ de vecteurs de forme standard $\hat{V} = (\varphi - \xi^i\, p_i)\,\partial_u$.*

Désormais, nous nous restreignons aux champs de vecteurs de forme standard.

Pour $K = K(x,u,p_J)$ une fonction sur $J\infty$ ($|J| \leqslant k$) nous désignons par $\hat{K}_t$ l'écoulement sur $J\infty$ engendré par $K\partial_u$, c'est-à-dire, par le problème aux données initiales (6.4). Plus précisément, $\hat{K}_t$ est un écoulement sur les sections de $J\infty$ telle que $\hat{K}_t \circ \hat{K}_s = \hat{K}_{t+s}$. Mettons $u(x,t) = \hat{K}_t\, f(x)$. Si $P(x,u,p_J)$ est une fonction sur $J\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P \circ \hat{K}_t)f &= \frac{d}{dt} P(x,u(x,t),\partial_J u(x,t)) \\
&= \sum_J \frac{\partial P}{\partial p_J}\, \frac{\partial u_J}{\partial t} = \sum_J \frac{\partial P}{\partial p_J}\, D_J\, \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= \sum_J \frac{\partial P}{\partial p_J}\, D_J\, K \\
&= (V_K P)\,(u(x,t)) \\
&= (V_K P) \circ \hat{K}_t(f)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} P \circ \hat{K}_t = (V_K P) \circ \hat{K}_t \tag{6.10}$$

où V_K est le prolongement à J_∞ de $K\partial_u$ (selon 6.6).

Proposition 6.3 : Si l'écoulement $\hat{K}_t$ laisse invariantes les solutions de $P = 0$, $V_K\, P = 0$ quand $P = 0$.

Démonstration : Si u(x) est une solution de P = 0 alors $\hat{K}_t(u)$ est aussi solution pour tout t, et $P \circ K_t(u) = 0$ identiquement. Il suit que

$$\delta P \circ \hat{K}_t(u) = \frac{d}{dt} P \circ \hat{K}_t(u)\Big|_{t=o} = (V_K\, P)\ (u) = 0\ .$$

On voudrait aussi démontrer le contraire, c'est-à-dire

Proposition 6.4 : Si $V_K\, P = 0$ quand $P = 0$ alors $\hat{K}_t$ laisse invariantes les solutions de $P = 0$.

Malheureusement, une démonstration rigoureuse m'échappe pour l'instant. On peut regarder cette proposition comme version de dimension infinie du Théorème 3.4 sur les variétés invariantes. L'écoulement dans le cas du Théorème 3.4 était écoulement dans un espace de dimension finie, mais $\hat{K}_t$ en est un dans l'espace de sections de J_∞, c'est-à-dire sur les fonctions u(x). Nous avons, par (6.10), que P(u) = 0 implique que $\frac{d}{dt} P \circ \hat{K}_t(u) = 0$ pour t = 0 ; mais cela ne suffit pas pour démontrer que $P \circ \hat{K}_t(u) = 0$ identiquement.

Néanmoins, il y a une proposition plus faible qu'on peut démontrer sans difficulté.

Proposition 6.4 : Si $V_K\, P = 0$ identiquement alors $\hat{K}_t$ laisse invariantes les solutions de $P = 0$.

Démonstration : $\frac{d}{dt} P \circ \hat{K}_t = (V_K\, P) \circ K_t$; donc $\frac{d}{dt} P \circ \hat{K}_t = 0$ identiquement, et, si $P(u) = 0$, $P \circ \hat{K}_t\, u = 0$ pour tout t.

Cette proposition correspond au cas de dimension finie où une fonction F(x) satisfait XF = 0 pour un champ de vecteurs X ; dans ce cas tous les niveaux $\{F(x) = c\}$ sont invariants sous l'écoulement Φ_t engendré par X.

Ecoulements commutants

Soient X et Y des champs de vecteurs en $\mathbb{R}^n$ qui engendrent les écoulements Φ_t et Ψ_s. C'est-à-dire $\chi(t) = \Phi_t(x_o)$ satisfait le problème aux données initiales

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x) \qquad\qquad \chi(o) = x_o .$$

et $y(s) = \Psi_s(y_o)$ satisfait

$$\frac{dy^i}{ds} = Y^i(y) \qquad\qquad y(o) = y_o .$$

Les deux écoulements Φ et Ψ commutent si

$$\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t .$$

La condition nécessaire et suffisante pour la commutation est

$$[X,Y] = 0 \tag{6.11}$$

où [,] est le crochet de Lie pour les champs de vecteurs. Nous cherchons l'analogue de (6.11) pour les écoulements $\hat{K}_t$ et $\hat{P}_s$ engendrés par $U_t = K(u)$ et $U_s = P(u)$.

Mettons $K_1 = K(u) - \frac{\partial u}{\partial t}$, un polynôme sur $J\infty(x,t,u,p_J,u_t,\ldots)$. La condition pour que l'écoulement $\hat{P}_s$ laisse invariantes les solutions de $K_1 = 0$ est, selon les propositions 6.3 et 6.4, $V_pK_1 = 0$ quand $K_1(u(x,t)) = 0$. Nous écrivons $J = \ell_o,L)$ où $L = (L_1,\ldots L_n)$ et $\partial_o = \frac{\partial}{\partial t}$, $u_o = \frac{\partial u}{\partial t}$, etc. Donc

$$\begin{aligned}
V_pK_1 &= \sum_J (D_JP) \frac{\partial K}{\partial u_J} \\
&= \sum_{\ell_o=o}^{\infty} \sum_L (D_t^{\ell_o} D_LP) \frac{\partial K_1}{\partial u_o^{\ell}o \partial u_L} \\
&= \sum_L (D_LP) \frac{\partial K_1}{\partial u_L} + \sum_{\ell_o=1}^{\infty} (D_t^{\ell_o}P) \frac{\partial K_1}{\partial u_o^{\ell}} \\
&= V_PK - D_tP .
\end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à la condition $V_PK - D_tP = 0$ quand $U_t = K(u)$.

De même façon l'écoulement $\hat{K}_t(u)$ doit laisser invariantes les solutions de $U_s = P(u)$ (la condition est symétrique), donc $V_K P - D_s K = 0$. Puisque

$$D_t P = \sum_J \frac{\partial P}{\partial u_J} D_t U_J = \sum_J \frac{\partial P}{\partial u_J} D_t D_J u$$

$$= \sum_J \frac{\partial P}{\partial u_J} D_J K = V_K P ,$$

la condition pour que les deux écoulements restent invariants l'un et l'autre est

$$V_K P - V_p K = 0 \tag{6.12}$$

Nous n'avons pas encore démontré que les écoulements commutent, seulement que si $u(x,t)$ est une solution de $u_t = K(u)$, alors $\hat{P}_s u$ en est une aussi. Mettons $u(x,t) = \hat{K}_t f$ pour une section $f(x)$. Puisque $(\hat{P}_s u)\ (x,t)$ est aussi une solution, il existe une fonction f_s telle que

$$(\hat{P}_s u)\ (x,t) = \hat{K}_t f_s \ .$$

Pour $t = 0$, nous obtenons $(\hat{P}_s f)\ (x) = f_s(x)$, donc

$$(\hat{P}_s \hat{K}_t f)\ (x) = (\hat{K}_t \hat{P}_s f)\ (x) \ .$$

Alors les deux écoulements commutent.

Exemple. Considérons l'équation non linéaire $u_t = u_{xx} + uu_x$ qui s'appelle l'équation de Burger. Nous allons essayer de construire des écoulements qui commutent avec celle-ci. Nous commençons avec une P de la forme $P = P(u,u_x)$. Nous avons

$$V_p K = P \frac{\partial K}{\partial u} + (D_x P) \frac{\partial K}{\partial u_x} + (D_{xx} P) \frac{\partial K}{\partial u_{xx}}$$

$$= u_x P + u(D_x P) + (D_{xx} P)$$

$$V_K P = K \frac{\partial P}{\partial u} + (D_x K) \frac{\partial P}{\partial u_x} \ .$$

En mettant $\xi = u_x$, $\eta = u_{xx}$, et $\xi = u_{xxx}$, et en faisant les calculs indiquées, nous arrivons au résultat

$$V_p K - V_K P = \xi P + \xi^2 (P_{uu} - P_\xi) + 2\xi\eta\, P_{u\xi} + \eta^2\, P_{\xi\xi} = 0$$

Puisque P ne dépend pas de η il faut que $P_{\xi\xi} = P_{u\xi} = 0$ et ainsi que $P = a\xi + b(u)$ pour une constante a. Alors

$$\xi(a\xi + b(u)) + \xi^2(b'' - a) = 0 ,$$

et

$$\xi b(u) + \xi^2 b'' = 0 .$$

Il faut ainsi que b = 0, et le seul écoulement engendré par une $P = P(u,\xi)$ est $P = \xi = u_x$, donc $u_s = u_x$. Ce sont les translations en x.

Maintenant nous cherchons des écoulements plus compliqués, du type $P = P(u,u_x,u_{xx},u_{xxx})$. Cette fois nous prenons $\tau = u_{xxxx}$, $\xi = u_x$, etc. Après un calcul assez long nous arrivons au résultat

$$\begin{aligned} V_pK - V_KP &= \xi P + \xi^2(P_{uu} - P_\xi) \\ &+ \xi\eta(2P_{u\xi} - 3P_\eta) + \xi\zeta(2P_{u\eta} - 4P_\zeta) \\ &+ \xi\tau(P_{u\zeta}) + \eta^2(P_{\xi\xi} - 3P_\zeta) \\ &+ \eta\zeta(2P_{\xi\eta}) + \zeta^2 P_{\eta\eta} + \zeta\tau(2P_{\eta\zeta}) \\ &+ \eta\tau(2P_{\xi\zeta}) + \tau^2(P_{\zeta\zeta}) = 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Puisque P est indépendant de τ nous devons mettre

$$P_{\zeta\zeta} = P_{\xi\zeta} = P_{\eta\zeta} = P_{u\zeta} = 0 ;$$

il suit que

$$P = c_1\zeta + b(u,\xi,\eta)$$

pour c_1 constante. En revenant à (6.14) nous arrivons à l'équation pour b

$$\xi(C_1\zeta + b(u,\xi,\eta)) + \xi^2(b_{uu} - b\xi)$$

$$+ \xi\eta(2b_{u\xi} - 3b_\eta) + \xi\zeta(2b_{u\eta} - 4c_1)$$

$$+ \eta^2(b_{\xi\xi} - 3c_1) + \eta\zeta(2b_{\xi\eta}) + \zeta^2\, b_{\eta\eta} = 0 \ .$$

Nous traitons d'abord les termes en ξ :

$$\xi\zeta(2b_{u\eta} - 3c_1) + \eta\zeta(2b_{\xi\eta}) + \zeta^2\, b_{\eta\eta} = 0 \ ,$$

donc

$$b_{\eta\eta} = 0 \qquad b_{\xi\eta} = 0 \qquad b_{u\eta} = \frac{3c_1}{2}$$

et

$$b(u,\xi,\eta) = \eta\left(\frac{3c_1 u}{2} + c_2\right) + c(u,\xi) \ .$$

Ensuite nous traitons les termes en u, ξ, η :

$$\xi\left(\left(\frac{3c_1}{2} u + c_2\right)\eta + C(u,\xi)\right) + \xi^2(C_{uu} - C_\xi)$$
$$+ \xi\eta\left(2C_{u\xi} - 3\left(\frac{3c_1}{2} u + C_2\right)\right) + \eta^2(C_{\xi\xi} - 3c_1) = 0 \ .$$

En mettant à zéro les coefficients de η^2 et $\xi\eta$ nous trouvons

$$C_{\xi\xi} = 3c_1 \qquad C_{u\xi} = \frac{3c_1 u}{2} + C_2$$

donc

$$C(u,\xi) = \frac{3c_1\xi^2}{2} + \left(\frac{3c_1 u^2}{4} + C_2 u + C_3\right)\xi + E(u) \ .$$

Enfin, en considérant les termes en ξ et u, nous arrivons à

$$\xi C(u,\xi) + \xi^2(C_{uu} - C_\xi) = 0$$

Cette équation implique que $E(u) = 0$. Enfin

$$b(u,\xi,\eta) = \left(\frac{3c_1 u}{2} + c_2 \right)\eta + \frac{3c_1}{2}\xi^2 + \xi\left(\frac{3c_1 u^2}{4} + C_2 u + C_3 \right)$$

et

$$P = C_1\left(\zeta + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}u^2\xi + \frac{3}{2}u\eta\right) + C_2(\eta + \xi u) + C_3\xi \ .$$

Puisque les trois constantes sont indépendantes, nous arrivons à tois écoulements engendrés par

$$P_1 = u_x$$

$$P_2 = u_{xx} + uu_x$$

$$P_3 = u_{xxx} + \frac{3}{2} uu_{xx} + \frac{3}{2} u_x{}^2 + \frac{3}{4} u^2 u_x .$$

Ces méthodes sont très compliquées, et nous voudrions des procédés plus systématiques. Dans ce but, nous énonçons la définition suivante :

Définition : Un opérateur de récursion $\mathcal{D}$ est une application sur les polynômes de $J^\infty(x,u,p_J)$ telle que $\mathcal{D}P$ est une symétrie infinitésimale de $\hat{K}_t$ quand P en est une.

Nous mettons $A(K) = \sum_J \frac{\partial K}{\partial u_J} D_J$ et nous remarquons que $A(K)P = V_p K$. La condition pour que $\hat{P}_s$ laisse invariant l'écoulement $\hat{K}_t$ est donc $V_p K - D_t P = (A(K) - D_t)P = 0$ quand $u_t = K$.

Proposition 6.5 : Si $[A(K) - D_t, \mathcal{D}]\ P = 0$ pour tout u telle que $u_t = K(u)$, $\mathcal{D}$ est un opérateur de récursion.

Démonstration (Exercice)

Par conséquent, si $\mathcal{D}$ est un opérateur de récursion pour K et si P est une symétrie infinitésimal, alors $\mathcal{D}^j P$ est une série infinie de symétries. En particulier $\mathcal{D}^j K$ est une série de symétries. Alors, si l'on a la chance de trouver un opérateur de récursion, il peut construire une infinie d'écoulements commutants.

Nous nous restreignons désormais au cas d'une dimension d'espace (donc x,t). Soit D la dérivée totale D_x et D^{-1} son inverse à gauche : $D^{-1}D = \mathrm{id}$. Donc $D^{-1}u_x = u$ tandis que $D^{-1}u$ n'est pas définie.

Exemple (L'équation de Korteweg-de-Vries) : $u_t = u_{xxx} + uu_x$.

Puisque $u_{xxx} + uu_x = K(u) = D(u_{xx} + \frac{u^2}{2})$ nous pouvons écrire $D^{-1}K = u_{xx} + \frac{u^2}{2}$. L'opérateur $\mathcal{D} = D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x D^{-1}$ est un opérateur de récursion pour l'équation KdV. Cet opérateur a été proposé par M. Andrew Lenart en 1967.

Démonstration

$$A(K) = \frac{\partial K}{\partial u} D + \frac{\partial K}{\partial u_x} D^2 + \dots$$

$$= D^3 + uD + u_x \ ;$$

alors

$$A(K)\mathcal{D} = (D^3 + uD + u_x)\ (D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x\ D^{-1})$$

$$= D^5 + \frac{5}{3} uD^3 + \frac{10}{3} u_x D^2 + (3u_{xx} + \frac{2}{3} u^2)D$$

$$+ \frac{5}{3} K(u) + \frac{1}{3} (DK(u))\ D^{-1} \ ,$$

et

$$\mathcal{D}\ A(K) = (D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x\ D^{-1})\ (D^3 + u\ D + u_x)$$

$$= (D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x\ D^{-1})\ (D^3 + Du)$$

$$= D^5 + \frac{5}{3} uD^3 + \frac{10}{3} u_x\ D^2$$

$$+ (3u_{xx} + \frac{2}{3} u^2)D + K(u) \ .$$

Remarquons que $u\ D + u_x = Du)$. Donc

$$[A(K), \mathcal{D}] = \frac{1}{3} (DK)D^{-1} + \frac{2}{3} K(u) \ .$$

De plus

$$[D_t, \mathcal{D}\,] = [D_t,\ D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x\ D^{-1}]$$

$$= \frac{2}{3} u_t + \frac{1}{3} u_{xt}\ D^{-1} \ ;$$

enfin

$$[A(K) - D_t, \mathcal{D}\,] = \frac{2}{3} (K(u) - u_t) + \frac{1}{3} (D(K(u) - u_t))D^{-1} \ ,$$

et notre affirmation est démontrée.

Afin que $\mathcal{D}P$ soit bien définie, P doit être dans l'image de D. Puisque $K(u) = D(u_{xx} + \frac{u^2}{2})$ il n'y a pas de problème pour définir $\mathcal{D}K$, et nous trouvons que

$$K^{(1)} = \mathcal{D}\, D(u_{xx} + \frac{u^2}{2}) = (D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x\, D^{-1})\, D(u_{xx} + \frac{u^2}{2})$$

$$= u_{xxxxx} + \frac{5}{3}uu_{xxx} + \frac{10}{3}u_xu_{xx} + \frac{5}{6}u^2\, u_x$$

$$= D(u_{xxxx} + \frac{5}{3}(uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2}) + \frac{10}{6}u_x^2 + \frac{5}{18}u^3)$$

$$= D(u_{xxxx} + \frac{5}{3}uu_{xx} - \frac{10}{6}u_x^2 + \frac{5}{18}u^3)\ .$$

Alors $\mathcal{D}K^{(1)}$ est aussi bien définie. Pour établir que $\mathcal{D}^jK$ est défini pour tout j, il faut démontrer que $\mathcal{D}^jK$ est toujours une divergence, c'est-à-dire, que $\mathcal{D}^jK$ prend toujours la forme DQ^j. Voir chapitre VII.

<u>Exemple</u> : Un opérateur de récursion pour l'équation de Burger est

$$\mathcal{D} = D + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x\, D^{-1}$$

Il faut encore établir que $\mathcal{D}^{(j)}\,(u_{xx} + uu_x)$ est toujours définie.

On peut commencer avec u_x, puisque u_x engendre des symétries. Donc

$$(D + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x\, D^{-1})u_x = u_{xx} + uu_x$$

$$(D + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x\, D^{-1})\,(u_{xx} + uu_x) = u_{xxx} + \frac{3}{2}(uu_{xx} + u_x^{\,2}) + \frac{3}{4}u^2\, u_x$$

comme nous avons trouvé précédemment.

Nous retournons à la théorie en démontrant que la condition (6.12) peut se considérer comme une annulation d'un crochet de Lie. Nous définissons

$$\begin{aligned}\{K,Q\} &= V_KQ - V_QK \\ &= \sum_J (D_JK)\frac{\partial Q}{\partial P_J} - (D_JQ)\frac{\partial K}{\partial P_J}\end{aligned} \tag{6.15}$$

On voit que le crochet {,} est antisymétrique et qu'il satisfait la condition de Jacobi

$$\{P,\{Q,R\}\} + \{Q,\{R,P\}\} + \{R,\{P,Q\}\} = 0\ .$$

De l'autre côté le crochet de Lie des champs de vecteurs V_K et V_Q est formellement

$$[V_K,V_Q] = \sum_J \left\{ \sum_I (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_I} D_J Q - (D_I Q) \frac{\partial}{\partial P_I} D_J K \right\} \frac{\partial}{\partial P_J} \tag{6.16}$$

Théorème 6.6 : $[V_K, V_Q] = V_{\{K,Q\}}$.

Démonstration : Tout d'abord nous établissons des formules pour les commutateurs. Dans le cas d'une variable x nous mettons $P_i = D^i u = (\frac{\partial}{\partial x})^i u$ et nous avons

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} , D\right] = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial}{\partial p_i} , D\right] = \frac{\partial}{\partial p_{i-1}}$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D = D \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_{i-1}} .$$

Cette dernière formule est valable pour tout $i \geqslant 0$ si nous mettons $\frac{\partial}{\partial p_{-1}} = 0$. Par induction on trouve

$$\frac{\partial}{\partial p_i} D^j = \sum_{k=o}^{j} \binom{j}{k} D^{j-k} \frac{\partial}{\partial p_{i-k}}$$

où $\frac{\partial}{\partial p_i} = 0$ si $i < 0$. Aussi

$$D^j \frac{\partial}{\partial p_i} = \sum_{k=o}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \frac{\partial}{\partial p_{i-k}} D^{j-k}$$

Dans le cas de plusieurs variables nous mettons

$$J - L = (J_1 - L_1, J_2 - L_2,\dots J_n - L_n)$$

$$J \geqslant 0 \text{ si } J_i \geqslant 0$$

$$J! = J_1! \, J_2! \dots J_n!$$

$$\binom{J}{L} = \frac{J!}{L!(J-L)!}$$

Nous avons donc les formules

$$\frac{\partial}{\partial p_I} D_J = \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} D_{J-L} \frac{\partial}{\partial p_{I-L}} \tag{6.17}$$

$$D_J \frac{\partial}{\partial P_I} = \sum_{L\leqslant J} (-1)^{|L|} \binom{J}{L} \frac{\partial}{\partial P_{I-L}} D_{J-L} \tag{6.18}$$

$$D_J(PQ) = \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} (D_L P)(D_{J-L}Q) \tag{6.19}$$

Tous ces résultats s'établissent par induction. Pour démontrer le théorème nous devons calculer

$$D_J\{K,Q\} = D_J \sum_I \left\{ (D_I K) \frac{\partial Q}{\partial P_I} - (D_I Q) \frac{\partial K}{\partial P_I} \right\}$$

Le premier terme est

$$D_J \sum_I (D_I K) \frac{\partial Q}{\partial P_I} = \sum_I \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} (D_{I+L}K)(D_{J-L} \frac{\partial Q}{\partial P_I})$$

$$= \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} \sum_{I>0} (D_{I+L}K)(D_{J-L} \frac{\partial Q}{\partial P_I})$$

$$= \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} \sum_{I\geqslant Q} (D_I K)(D_{J-L} \frac{\partial Q}{\partial P_{I-L}})$$

$$= \sum_I (D_I K) \sum_{L\leqslant J} \binom{J}{L} (D_{J-L} \frac{\partial Q}{\partial P_{I-L}})$$

$$= \sum_I (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_I} D_J Q$$

Alors $D_J\{K,Q\}$ est le coefficient de $\frac{\partial}{\partial P_J}$ dans le crochet $[V_K,V_Q]$. Nous terminons par la

__Proposition 6.7 : Les champs de vecteurs V_K ont les propriétés suivantes :__

(i) $[V_K,D_J] = 0$

(ii) $[V_K,u] = K$ *(6.20)*

(iii) $[V_K,P_J] = (D_J K)$.

Nous considérons V_K, D_J, et p_J comme des opérateurs sur l'algèbre $\mathcal{A}$ de polynômes sur J_∞, c'est-à-dire les polynômes en u sont les dérivées de p_J. Par p_J et $D_J K$ nous entendons la multiplication par les polynômes p_J et $D_J K$.

<u>Démonstration</u> : Soit D_j la dérivée totale par rapport au x_j et soit $I \pm j = (I_1, \dots I_j \pm 1, \dots I_n)$. Donc

$$V_K D_j = \sum_I D_I K \frac{\partial}{\partial P_I} D_j = \sum_I (D_I K) \left(D_j \frac{\partial}{\partial P_I} + \frac{\partial}{\partial P_{I-j}}\right)$$

$$= \sum_I D_j\left(D_I K \frac{\partial}{\partial P_I}\right) - (D_{I+j}K) \frac{\partial}{\partial P_I} + (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_{I-j}}$$

$$= D_j \sum_I (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_I} = D_j V_K$$

puisque

$$\sum_{I \geqslant 0} (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_{I-j}} = \sum_{I \geqslant 0} (D_{I+j}K) \frac{\partial}{\partial P_I} .$$

La propriété (i) s'ensuit par répétition.

Pour démontrer (ii) nous avons

$$V_K u = \sum_I (D_I K) \frac{\partial}{\partial P_I} u = \sum_I (D_I K) u \frac{\partial}{\partial P_I} + K$$

$$= u\, V_K + K$$

La propriété (iii) est établie pour $J = 0$; le résultat général s'établie par induction : appuyez D_j à $[V_K, P_J] = (D_J K)$.

Dans le dernier chapitre nous allons développer la théorie algébrique des équations variationnelles et l'appuyer à l'équation de Korteweg-de-Vries.

VII - <u>STRUCTURES ALGEBRIQUES DANS LES PROBLEMES VARIATIONNELLES</u> (voir [3], [4].

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de tous les polynômes sur les variables u et p_J dans J_∞. Nous considérons sur $\mathcal{A}$ les champs de vecteurs

$$\xi = \sum_J \xi_J \frac{\partial}{\partial p_J}$$

où $\xi_J \in \mathcal{A}$. Comme nous avons déjà vu, les dérivées totales D_j sont de tels champs de vecteurs. Nous écrivons

$$D_j = \sum_J p_{J+j} \frac{\partial}{\partial p_J}$$

où $J+j = (J_1, \ldots J_j + 1, \ldots J_n)$; il n'y a pas de terme $\frac{\partial}{\partial x_j}$ puisque les éléments de $\mathcal{A}$ ne dépendent pas des variables $x_1, \ldots x_n$. De plus

$$M = \sum_J p_J \frac{\partial}{\partial p_J} \quad \text{et} \quad V_K = \sum_J (D_J K) \frac{\partial}{\partial p_J}$$

sont des opérateurs importants. Ces sommes infinies sont bien définies quand elles agissent sur $\mathcal{A}$ puisque les éléments de $\mathcal{A}$ sont des polynômes. Le crochet de Lie des deux champs de vecteurs ξ et η est formellement

$$[\xi, \eta] = \sum_L \sum_J (\xi_J \frac{\partial \eta_L}{\partial p_J} - \eta_J \frac{\partial \xi_L}{\partial p_J}) \frac{\partial}{\partial p_L} \quad .$$

Les champs de vecteurs sur J_∞ forment donc une algèbre de Lie de dimension infinie.

On voit, sans difficulté, que $[D_i, D_j] = 0$ et aussi que

$$[\xi, D_j] = \sum_L (\xi_{L+j} - D_j \, \xi_L) \frac{\partial}{\partial p_L} \quad .$$

Alors $[\xi, D_j] = 0$ ssi $\xi_{L+j} = D_j \, \xi_L$; et, si $[\xi, D_j] = 0$ pour $j = 1, \ldots n$ il s'ensuit que $\xi_L = D_L \, \xi_0$ et ξ prend la forme V_K ou $K = \xi_0$. Nous désignons cette sous classe par $\mathcal{V}$.

Théorème 7.1 : *La classe*

$$\mathcal{V} = \{\xi \mid \xi = V_K = \sum_J (D_J K) \frac{\partial}{\partial P_J}\}$$

est une sous-algèbre des champs de vecteurs sur J_∞ dont tous les éléments commutent avec les dérivées totales D_J.

Le théorème 7.1 est une conséquence immédiate du théorème 6.6 et (6.20). On voit aussi que $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre en appuyant l'identité de Jacobi :

$$\left[D_i, [\xi, \eta]\right] + \left[\xi, [\eta, D_i]\right] + \left[\eta, [D_i, \xi]\right] = 0 \quad ,$$

donc $[\xi, D_i] = [\eta, D_i] = 0$ implique $[[\xi,\eta], D_i] = 0$.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ sont isomorphe par l'identification $K \leftrightarrow V_K$. Cela nous permet d'introduire une structure de Lie sur $\mathcal{A}$, en effet

$$\{P,Q\} = V_P Q - V_Q P \ .$$

Nous introduisons un autre opérateur sur $\mathcal{A}$,

$$Y = \sum_I (-D)^I \frac{\partial}{\partial p_I} \quad ;$$

Y est l'opérateur d'Euler qui survient dans le calcul variationnel. Si $L \in \mathcal{A}$ est le lagrangien pour un problème variationnel, les équations d'Euler - Lagrange sont

$$YL = 0$$

Dans le cas d'une variable nous allons démontrer que

$$L = DP \quad \text{ssi} \quad YL = 0$$

donc la séquence $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{D} \mathcal{A} \xrightarrow{Y} \mathcal{A}$ est exacte. Dans le cas de n variable nous prenons pour A_n l'ensemble de n-tuples de polynômes dans $\mathcal{A}$:

$$P = (P_1, \ldots P_n)$$

et nous définissons

$$\mathrm{Div}\, P = \sum_{i=1}^{n} D_i\, P_i \ .$$

Alors

<u>Théorème</u> <u>7.2</u> : $L = \mathrm{Div}\, P$ *<u>ssi</u>* $YL = 0$.

Nous démontrons le théorème dans le cas d'une variable. Tout d'abord, d'après (6.17)

$$YD = \sum_{i=0}^{\infty} (-D)^i \frac{\partial}{\partial p_i} D = \sum_{i=0}^{\infty} (-D)^i \left(D \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_{i-1}}\right) = 0 \ .$$

Pour démontrer le contraire nous utilisons la formule

$$uD^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} D^{n-j}\ p_j \qquad (7.1)$$

Or
$$uYQ = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \, uD^n \frac{\partial Q}{\partial p_n}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} D^{n-j} \; p_j \frac{\partial Q}{\partial p_n}$$

Mettons n-j=k et ajoutons pour k fixe, k courant de 0 à ∞. Donc

$$uYQ = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^k \binom{j+k}{i} D^k \; p_j \frac{\partial Q}{\partial p_{j+k}}$$

$$= MQ + DX$$

où
$$M = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$$

et
$$X = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, D^{k-1} \sum_{j=o}^{\infty} \binom{j+k}{j} \; p_j \frac{\partial Q}{\partial p_{j+k}}$$

On voit facilement que M est inversible sur $\mathcal{A}$ et que $[M,D] = 0$; donc si $YQ = 0$, $Q = - DM^{-1}X$.

Nous établissons maintenant une relation très importante entre Y et le crochet $\{P,Q\}$. (voir [8])

Théorème 7.3 : *Si P et Q appartiennent à l'image de Y*

$$Y(QDP) = V_{DP}Q - V_{DQ}P \tag{7.2}$$

L'expression Y(QDP) s'appelle le crochet de Gardner-poisson. Le corollaire immédiat est

Corollaire 7.4 : *Définissons* $\{P,Q\}_1 = V_{DP}Q - V_{DQ}P$, *alors l'image de Y est une sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *par rapport au* $\{,\}_1$.

Nous allons employer le théorème 7.3 pour démontrer l'existence d'une famille infinie d'écoulements commutants pour l'équation de Korteweg-de-Vries. Nous nous restreignons au cas d'une variable, tandis que le théorème 7.3 tient aussi dans plusieurs variables.

Nous commençons la démonstration du théorème 7.3 en introduisant les opérateurs d'Euler généralisés :

$$Y^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (-D)^{j-k} \frac{\partial}{\partial P_j} .$$

On voit facilement

$$Y^{(k)} D = Y^{(k-1)}$$

donc

$$Y^{(k)} D^k = Y \quad \text{et} \quad Y^{(k)} D^j = 0 \quad \text{si } j > k .$$

Par un calcul direct nous obtenons

$$Y\ PQ = \sum_{j=o}^{\infty} ((-D)^j P)\ Y^{(j)} Q + ((-D)^j Q)\ Y^{(j)}\ P . \tag{7.3}$$

<u>Lemme</u> <u>7.5</u> : $$\frac{\partial}{\partial p_i} Y = (-1)^i\ Y^{(i)}\ Y \tag{7.4}$$

<u>Démonstration</u>

$$\frac{\partial}{\partial p_i} Y = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_i} (-D)^j \frac{\partial}{\partial p_j}$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} (-1)^j \sum_{k=o}^{j} \binom{j}{k} D^{j-k} \frac{\partial}{\partial p_{i-k}} \frac{\partial}{\partial p_j}$$

(voir (6.17))

$$= \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (-D)^{j-k} \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial p_{i-k}}$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k E^{(k)} \frac{\partial}{\partial p_{i-k}}$$

$$= \sum_{k=o}^{i} (-1)^{i-k} E^{(i-k)} \frac{\partial}{\partial p_k}$$

$$= (-1)^i \sum_{k=o}^{\infty} E^i (-D)^k \frac{\partial}{\partial p_k} = (-1)^i E^{(i)} Y .$$

Finalement nous obtenons le théorème 7.3. Mettons P = YG et Q = YF.

Donc

$$Y((YF)\ (DYG)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} ((-D)^j\ (YF))Y^{(j)}DYG + (-D)^j\ (DYG)Y^{(j)}YF$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-D)^j\ (YF)Y^{(j-1)}YG - (-D)^{j+1}\ (YG)Y^j\ YF$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} - D^j(YF)\ \frac{\partial YG}{\partial p_{j-1}} + D^{j+1}\ (YG)\ \frac{\partial}{\partial p_j}\ YF$$

$$= V_{DYG}\ (YF) - V_{DYF}(YG)$$

$$= V_{DP}Q - V_{DQ}P\ .$$

Retournons à l'équation de Korteweg-de-Vries. Nous suivons le développement selon Olver [8]. Nous mettons

$$\mathcal{D} = D^2 + \frac{2}{3}\ u + \frac{1}{3}\ u_x\ D^{-1}$$

et son adjoint formel

$$\mathcal{D}^* = D^2 + \frac{2}{3}\ u - \frac{1}{3}\ D^{-1}u_x = D^{-1}\ \mathcal{D}\ D\ .$$

Lemme 7.6 : *Si $Q \in im\ \mathcal{D}$ et $P \in im\ \mathcal{D}^*$, c'est-à-dire, si $Q = DF$ et $u_x\ P = DG$, alors $Y(P\ \mathcal{D}\ Q) = Y(Q\ \mathcal{D}^*\ P)$.*

Démonstration : Puisque $YD = 0$, il est clair que, pour n'importe quel P et Q,

$$Y(P(D^2 + \frac{2}{3}\ u)Q) = Y(Q(D^2 + \frac{2}{3}\ u)P)\ ,$$

donc il suffit de démontrer que

$$P\ u_x\ D^{-1}Q + (D^{-1}\ u_x\ P)\ Q \in im\ D\ .$$

Mais cette dernière expression est précisément $(DG)F + (DF)G = D(FG)$.

Lemme 7.7 : *Mettons $K_j = \mathcal{D}^j(u_x)$ et supposons que $K_j \in im\ D$ pour $j = 1, \ldots k$. Alors $u\ K_j \in im\ D$.*

Démonstration : Puisque $K_i = \mathcal{D}^i u_x$ existent, $G_i = D^{-1} K_i = D^{-1} \mathcal{D}^i Du = \mathcal{D}^{*i} u$ existent pour $i = 1,\ldots k$. Alors

$$Y(uK_k) = Y(u \, \mathcal{D}^k u_x) = Y((\mathcal{D}^{*k}u)u_x)$$
$$= Y(u_x \, D^{-1}K_k) \; .$$

Mais $D(uD^{-1}K_k) = u_x D^{-1}K_k + uK_k$, donc $Y(uK_k) = Y(u_x D^{-1}K_k) = - Y(uK_k)$, et $Y(uK_k) = 0$.

Lemme 7.8 : Si K_j et $uK_j \in$ im D alors $K_{j+1} \in$ im D.

Démonstration : $K_{j+1} = \mathcal{D} K_j = D(D + \frac{1}{3}[u\, D^{-1} + D^{-1}u])K_j$.

Théorème 7.9 : $K_i = \mathcal{D}^i u_x$ existe pour tout i et, de plus

$$Y(G_i \, D \, G_j) = 0 \quad \textit{pour tout } i,j.$$

Démonstration : L'existence s'ensuit par induction des lemmes 7.7 et 7.8. Alors

$$Y(G_i \, DG_j) = Y((\mathcal{D}^{*i}u)\,(\mathcal{D}^j u_x))$$
$$= Y(u \, \mathcal{D}^{i+j} u_x) = Y(uK_{i+j}) = 0 \; .$$

Théorème 7.10 : Pour tout i, $K_i \in$ im DY, c'est-à-dire tous les G_i peuvent s'écrirent comme $G_i = YF_i$.

Démonstration : Assez difficile. Voir Olver [8] ou Lax.(P.D. Lax "Almost Periodic Solutions of the KdV Equation", SIAM Review, **18** (1976), 351-375).

Théorème 7.11 : Les flows $\hat{K}_{i,t}$ et $\hat{K}_{j,t}$ commutent.

Démonstration : Par (7.2)

$$Y(G_i \, DG_j) = V_{K_i} G_j - V_{K_j} G_i = 0$$

Puisque $[V_D,D] = 0$ nous avons

$$V_{K_i} K_j - V_{K_j} K_i = 0 \; ,$$

la condition (6.12) pour la commutation des flows.

Théorème 7.12 : Les fonctionnelles

$$\mathcal{F}_i(u) = \int F_i(u)\, dx$$

sont des invariantes des flows $\hat{K}_{j,t}$ *pour tout* i, j. $(G_i = Y\, F_i)$

Démonstration : Supposons que $u_t = K_j(u)$. Alors

$$\frac{d}{dt}\, \mathcal{F}_i(u) = \int (Y\, F_i) u_t\, dx = \int G_i\, K_j$$

$$= \int G_i\, D\, G_j\, dx \ .$$

Mais $Y(G_i\, D\, G_j) = 0$ implique que $G_i\, D\, G_j = DX$ pour un polynôme X et cela implique que

$$\int G_i\, D\, G_j\, dx = 0 \ .$$

Nous supposons, et c'est vrai, que les solutions des équations $u_t = K_i(u)$ possèdent la propriété que u et toutes ses dérivées tendent vers zéro rapidement quand $|x|$ tend vers ∞.

Il reste beaucoup à exposer, mais malheureusement, nous n'avons plus de temps. Alors je vous laisse les références suivantes afin que vous puissiez vous informer plus profondément.

REFERENCES

[1] H. Bacry :
Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Elémentaires ,
Gordon & Breach, 1967.

[2] Courant & Hilbert :
Methods of Mathematical Physics ,
Interscience, New York, 1953.

[3] Gelfand and Dikii :
Asymptotic Behaviour of the Resolvent of Sturm-Liouville Equations and the Algebra of the Korteweg-De-Vries Equations ,
Uspekhi Mat. Nauk 30 : 5 (1975), 67-100 ; Russian Math. Surveys 30 : 5 (1975), 77-113.

[4] Gelfand and Dickii :
A Lie Algebra Structure in a Formal Variational Calculation ,
Translated by Plenum Publishing from Funktsionat'nyi Analiz i Ego Prilozh, 10 (1976), 18-25.

[5] Kruskal, Miura, Gardner, Zabusky :
Korteweg-De-Vries Equation and Generalizations, V ,
Jour. of Math. Phys. II (1970), 952-960.

[6] Miller :
Symmetry Groups and their Applications ,
Academic Press, New York, 1972.

[7] P. Olver :
How to compute the symmetry group of a differential equation ,
dans Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, par D.H. Sattinger, Springer Lecture Notes in Mathématics = 762, New York, 1979.

[8] P. Olver :
Symmetry Groups and Conservation Laws in the Formal Variational Calculus ,
Preprint, unpublished.

[9] P. Olver :
Evolution Equations Possessing Infinitely Many Symmetries ,
Jour. Math. Phys. 18 (1977), 1215-1215.

[10] L.V. Ovsjannikov :
Group Properties of Differential Equations ,
Traduit de l'anglais par G.W. Blumen, non publié. Publié en U.R.S.S. en 1962 à Novosibirsk par l'Académie de Science d'U.R.S.S. Un exemplaire se trouve dans la Bibliothèque d'Orsay.

[11] W.W. Puchnacev :
Priklady Mekhani Tekho Fiz ,
1 (1969), p. 83-90.