

## SUR LA MODELISATION

C.P. BRUTER

Définitions. Soit  $U(t)$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par l'application  $P : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On suppose l'existence d'une fibre  $\mathbb{R}^{n(u(t))}$  au-dessus de chaque  $u(t) \in U(t)$ . On définit ainsi un fibré localement trivial  $F(t)$  de base  $U(t)$ .  $s_t$  désigne une section de ce fibré. On relève la fibration sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , et on pose  $S_t(u, t) = s_t(u(t))$ .

Soit  $\tilde{\mathbb{R}}^3$  enfin l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose l'existence d'une fonction d'énergie  $E : \tilde{\mathbb{R}}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On appelle réalité à l'instant  $t$ ,  $R(t)$ , la donnée d'un couple :  $(S_t, E(U(t)))$ .

Cette réalité est un objet  $O$  pour l'observation définie par la topologie  $\mathcal{C}$ , si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(H, h)} & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ S_t \downarrow & & \downarrow S_h(t) \\ \Phi & \xrightarrow{\varphi} & \Phi_{(H, h)} \end{array}$$

où  $\Phi$  (resp.  $\Phi_{(H, h)}$ ) désigne le fibré sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ,  $(H, h)$  est un homéomorphisme voisin de l'identité pour la topologie d'observation  $\mathcal{C}$  de l'espace et du temps,  $\varphi$  un homéomorphisme voisin de l'identité pour cette topologie,  $S_t$  est voisin de  $S_h(t)$  pour  $\mathcal{C}$ . Un objet est donc une réalité structurellement stable. Deux objets reliés par le diagramme précédent sont dits de même nature, et appartiennent à la même classe d'objets.

S'il existe une projection  $(\Pi, \pi) : F(t) \times \mathbb{R} \rightarrow F'(t') \times \mathbb{R}$ , on dit que l'objet  $O'$  défini par cette projection, soit  $(S'(t'), E'(U'(t')))$ , est un modèle de l'objet  $O$ . L'objet initial  $O$  pourra encore être appelé modèle originel.

Si  $R(t)$  n'est pas structurellement stable (n'est pas un objet) on dira que  $R(t)$  est une réalisation d'un processus. Un processus, observé sur la période  $T$ , consiste en la donnée de  $\bigcup_{t \in T} R(t)$ .

La suite de cet exposé éclairera les définitions qui précèdent. Ces définitions sont parfois insuffisantes. Il convient en effet, dans les cas où  $T$  représente une période de plusieurs siècles, qui se projette sur une période beaucoup plus courte, de quelques mois ou années, de faire intervenir un temps  $\tau$  fonction du temps linéaire  $t$ .

## I - Propriétés générales des modèles

Avec le développement récent des mathématiques appliquées, le terme de modèle est devenu familier à l'esprit de chacun. A vrai dire, tout comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, depuis notre plus tendre enfance, nous ne cessons de faire des modèles.

1.1 Un modèle d'une certaine réalité est une représentation tronquée de cette réalité. Lorsqu'on dit "un chapeau", on évoque une certaine forme, un certain matériau. On ne dit rien de précis sur la couleur, le poids, les dimensions du chapeau. Le terme de "chapeau" est un modèle de l'objet chapeau. Lorsque vous dites "Poincaré", vous évoquez la présence d'un homme ayant eu les propriétés : d'occuper un domaine spatio-temporel, d'être mathématicien, et d'écrire des textes remarquables. La projection définit la manière de tronquer la réalité.

1.2 L'avantage évident du modèle pratique sur le réel qu'il décrit, tient à une propriété de stabilité spatio-temporelle : le modèle est peu touché par déplacements dans l'espace et dans le temps. De plus il est aisément transportable ; P. Samuel ajoute qu'il est facilement reproductible. Ces propriétés n'ont rien d'absolu. L'image de télévision représentant un astronaute marchant sur la lune, est un modèle de cet astronaute et du sol lunaire ; tous ceux qui ont pu regarder cette image de télévision ont pu s'en émerveiller. Cette même image a pu être observée au même instant en de nombreux points du globe : elle a donc été peu sensible aux déplacements spatiaux, on a pu la véhiculer facilement. Conservée dans les archives, les générations futures pourront, si quelque cataclysme ne les détruit pas, regarder à nouveau cette image. Elle aura peu changée avec le temps.

Philophon a démontré la conjecture de Fermat. Philophon est un modèle écrit ou sonore de ce personnage. Ce modèle vérifie-t-il les propriétés 1.2 ?

Quelles doivent être les propriétés des projections  $(\Pi, \pi)$  pour que 1.2 soient satisfaites ?

1.3 Une autre caractéristique du modèle est son degré d'universalité, lié à l'étendue de la classe d'objets considérés. On ne fait un modèle d'un objet, d'un processus, que si cet objet, ce processus sont susceptibles d'être reproduits dans l'espace et dans le temps. On ne dit "table" ou "carré" que parce qu'il existe d'autres tables, ou parce que la forme carrée est très répandue. On ne parle de Dupont que si cette personne existe, c'est-à-dire peut être rencontrée par nous fréquemment dans l'espace et au cours du temps.

## II - Qualités d'un modèle

2.1 On dira que le modèle  $M(R)$  de la réalité  $R$  est plus riche que le modèle  $M'(R)$  de cette même réalité, si la représentation de  $R$  associée à  $M$  est moins tronquée que la représentation de  $R$  associée à  $M'$ . La transitivité des projections exprime cette notion de richesse. Voici un exemple : le modèle "un grand chapeau" est plus riche que le modèle "un chapeau". La richesse d'un modèle est liée à l'étendue de notre perception.

2.2 La valeur du modèle est liée à la justesse de cette perception. Il s'agit de définir avec soin  $n(u(t))$  ainsi que la section  $s_t$ . Quelqu'un à la vue faible pour les couleurs pourra parler d'un chapeau gris (par conséquent d'une certaine longueur d'onde  $\lambda$ ) ; une autre personne à la vue plus perçante dira qu'il s'agit d'un chapeau marron clair.

2.3 C'est encore par l'intermédiaire de la perception, et donc de l'observation, que s'établit la puissance du modèle, qui exprime l'étendue du champ d'application du modèle. Pour établir un modèle d'un objet  $O$ , il faut extirper de l'ensemble des propriétés  $P_i$  que possède  $O$ , un certain nombre de propriétés  $P_0, P'_0, P_1, \dots, P_n$   $n = n(u(t))$ , qui sont vérifiées par tous les objets de même nature que  $O$ . Le modèle est d'autant plus puissant que la classe d'objets considérée est plus large. Ainsi la totalité des objets que nous pouvons observer autour de nous, occupent chacun un certain domaine  $U$  de l'espace-temps. Un modèle d'objet, puissant mais pauvre, consiste donc dans la donnée première d'un domaine  $U$  dans  $R$ .

Un modèle sera efficace s'il est à la fois suffisamment riche, de puissance convenable, de valeur honnête.

## III - Construction des modèles : un exemple

3.1 Quelles sont les qualités d'esprit requises pour être à même de faire des modèles ? Toutes bien sûr, mais en particulier : des qualités mnémomiques pour garder présente à l'esprit la diversité des objets et des situations qu'on aura pu rencontrer, des qualités de sensibilité et de synthèse, pour percevoir les propriétés particulières des objets, être capable de dégager par comparaison entre elles, les propriétés fondamentales auxquelles satisfont tous les objets de la classe dont on veut faire un modèle.

3.2 On peut donc, au préalable, chercher, si elles existent, les propriétés fondamentales de tous les objets de la Nature, propriétés que l'on qualifiera d'universelles. En voici trois : i)  $P_0$  : leur localisation spatio-temporelle, déjà

citée. ii)  $P'_0$  : à tous ces objets, on peut associer une énergie dont la valeur présente des propriétés d'extrémalité. iii)  $P''_0$  : tout objet possède des propriétés d'invariance par rapport à certains groupes de symétrie.

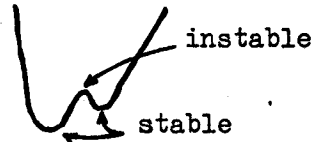
3.3 Nous allons voir sur un exemple comment utiliser la propriété ii). Des simplifications pourraient laisser croire que ce modèle n'entre pas dans le cadre général des définitions données en début d'exposé ; il n'en est rien.

Parmi tous les objets, on peut distinguer l'ensemble de ceux dont l'énergie est une fonction potentielle. L'observation (et la théorie mathématique formée ad hoc) s'accordent pour dire qu'un objet est stable lorsque le potentiel de l'objet atteint un minimum. Il s'agit là d'une propriété intrinsèque de la classe d'objets considérée.

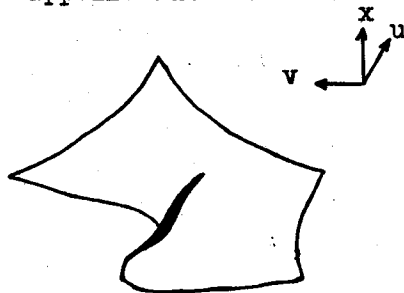
Nous avons alors toutes les données suffisantes pour faire un modèle du mouvement oscillant d'objets appartenant à cette classe. Voici, en s'inspirant des modèles de Thom, le raisonnement physique que nous proposons.

Supposons qu'un objet oscillant de cette classe ait deux positions stables. Sa fonction d'énergie possède donc deux minimums. Pour des raisons d'extrémalité, on va supposer que la fonction d'énergie associée à l'objet est la plus simple possible. Cette fonction est donc un représentant du déploiement universel

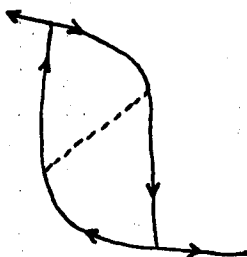
$$E(x) = \frac{x^4}{4} + u \frac{x^2}{2} + vx$$



L'ensemble des extrémums de  $E(x)$  est donné par la surface de Riemann-Hugoniot  $x^3 + ux + v = 0$ , qu'on appelle aussi la fronce :



L'ensemble des minimums est représenté par les nappes claires de cette surface. Si pour  $u$  négatif constant,  $v$  varie périodiquement ( $v = v_0 \cos \omega t$ ), le point représentatif du minimum absolu décrit une courbe de la forme :



Ce modèle s'applique à l'étude d'oscillations du coeur (Zeeman), de membranes, ou plus simplement d'une lame de carton :  $x$  désigne la longueur moyenne de la fibre,  $v$  la pression qu'on exerce alternativement sur chaque face de la lame de carton,  $u$  la hauteur entre les extrémités horizontales de la lame. Ce modèle se généralise immédiatement au cas où le système oscille entre  $n$  positions stables.

#### IV - Fonction du modèle

En agissant, dans le modèle précédent, sur les différents paramètres  $u$ ,  $v$ , on rend compte de la diversité des mouvements oscillatoires de l'objet. On aperçoit ici une des fonctions essentielles des modèles : pouvoir simuler, très rapidement, les différents types de comportement que peut avoir un objet de la classe associée au modèle. En situation de lutte, et c'est notre situation constante, quel que soit le niveau interne ou externe où se place cette lutte, il est vital de savoir parer les coups, donc de simuler à l'avance les mouvements qui peuvent nous atteindre au cours de cette lutte. D'où l'intérêt des modèles efficaces. Il est trivial de remarquer que la simulation implique la prévision.

Nous allons immédiatement tirer de cette propriété fonctionnelle du modèle, un certain nombre de conséquences sur la construction et l'usage des modèles.

#### V - Le modèle en tant que langage

5.1 Le vocabulaire : la construction rapide du modèle s'accorde avec la loi d'économie extrême pour imposer de nouvelles contraintes à la définition d'un modèle efficace : la représentation des propriétés doit pouvoir être faite à dépense d'énergie minimale. On est amené à construire une symbolique, la plus restreinte possible.

Il s'agit là, de notre part, d'une déduction rationnelle. Mais une telle déduction n'est que la prise de conscience d'une démarche cachée de l'esprit, qui n'a cessé d'être faite au cours des générations. Et de fait, l'évolution des langues, ces premiers modèles, montre, avec l'écoulement des temps, un appauvrissement de leur vocabulaire, compensé par un assouplissement de leur grammaire qui permet des constructions plus riches. La dernière née des langues est la langue mathématique. A l'heure actuelle, de plus en plus de monde se familiarise avec le vocabulaire extrêmement pauvre des mathématiques, vocabulaire composé de ce qu'on appelle symboles. Par contre, les phrases mathématiques peuvent être très longues, et par conséquent décrire et expliquer mieux qu'on ne peut le faire avec le langage vernaculaire. Ainsi, l'élément de phrase " $x(t) = (x_i(t))$ ,  $i$  de 1 à 1000" n'est que l'explication du mot  $x(t)$ , la signification des  $x_i(t)$  étant connue.

Puisque l'évolution et l'enrichissement des mathématiques s'inscrit dans le cadre d'une évolution naturelle, puisque la société a besoin d'individus capables de comprendre sinon de construire des modèles, on peut être assuré que l'enseignement des mathématiques n'est pas prêt de mourir. Et la sélection par les mathématiques ne décroîtra pas.

Mais cette sélection est trop partielle pour devoir rester la seule. Car en mathématiques, on travaille, pour la plupart du temps, sur des modèles donnés. On connaît l'attitude plutôt conservatrice de certains mathématiciens pour qui seuls les théories et les problèmes posés par nos grands anciens ont de l'intérêt. Cette position à elle seule, contraire à l'esprit scientifique, montre combien est insuffisante la formation purement mathématique de la pensée. Cette formation engendre des qualités d'habileté intellectuelle, elle les développe après que la sélection par les mathématiques les ait mis en évidence. Mais cette formation, cette sélection ne visent en rien à mettre en évidence les qualités de sensibilité qui fondent le jugement.

5.2 Le discours : venons au caractère de simulation que possède tout bon modèle. Par définition même, un modèle simule une forme, ou un processus qui peut se stabiliser en une forme. Le déroulement de cette simulation fait appel à la causalité, dont l'expression par le raisonnement fait à la fois la force et la difficulté de l'emploi des modèles mathématiques. Difficulté puisque les données de base mises à part, on ne prétend rien admettre qui ne se déduise par le raisonnement de ces données initiales. Force puisque la déduction causale, appelée démonstration, est tenue pour un absolu de justesse.

Mais il faut remarquer que cette position implique des présupposés de nature quasiment ontologique : acceptation au moins partielle de l'hypothèse réductionniste, reconnaissance de la capacité extraordinaire de la pensée à se dérouler de la même manière que les processus observés. Pourquoi une démonstration dite juste nous assure-t-elle de la valeur d'une proposition ?

Si le modèle s'apparente à la donnée d'un vocabulaire et de règles de grammaire, le déroulement du modèle est analogue au développement d'un discours. Comme dans le discours, on annonce des propriétés qu'on essaie de justifier. Bien souvent, il s'agit de propriétés physiques pressenties par la réflexion, ou simplement observées. Ces propriétés sont transcrites dans le langage symbolique du modèle. On essaie de montrer que les données de base suffisent à justifier l'existence des propriétés énoncées.

Dans d'autres cas, la réflexion ne devine pas ces observations physiques. Par contre l'étude approfondie du modèle permet parfois d'inférer des propositions que l'observation justifie. On veut alors le rendre satisfaisant.

crie au miracle. C'est évidemment le rôle du mathématicien que de chercher à mettre en évidence les propositions que recèle le modèle. Il est aidé dans cette tâche par la connaissance des modèles voisins qu'il étudie, de méthodes ou de résultats généraux sur les modèles, qui l'aident à orienter son attention sur des aspects du modèle qui auraient échappé au physicien, trop près de l'arbre parfois pour apercevoir les traits généraux de la forêt.

Voici un exemple de résultat mathématique déduit de l'observation (Hyver) : l'évolution d'un certain système chimique, dont l'analyse se fait à l'aide d'une représentation en graphe (Delattre), conduit par expérience à l'absence d'oscillations. Compte tenu des données, la linéarisation du champ de vecteurs qui dirige la cinétique chimique conduit à établir une matrice carrée  $A$  dont les coefficients vérifient  $\forall i \neq j, a_{ij} \neq 0 \iff a_{ji} \neq 0, a_{ij} \geq 0$ . De plus  $A$  est la matrice associée à un arbre déduit du graphe de Delattre. Puisque le système chimique n'a pas d'oscillations, proposition, les valeurs propres de  $A$  sont réelles. Ce qu'on démontre. L'étude des systèmes chimiques pose d'ailleurs de nombreux problèmes dont la solution intéresse autant le mathématicien que le biochimiste. Par exemple, trouver une caractérisation analytique des cycles limites, savoir si un système dynamique dont tous les points singuliers sont des noeuds attractants peut admettre des cycles limites.

## VI - Les différentes formes de modélisation

6.1 On peut établir une classification des modèles en étudiant le nombre et le degré de généralité des propriétés qui servent de fondement à ces modèles. A un premier niveau, nous trouvons le langage vernaculaire. A un second niveau, les modèles physiques généralisés en théories mathématiques. A un troisième niveau, des modèles qui prennent comme objets des théories mathématiques : par exemple, la théorie de matroïdes (H. Whitney, 1935), la théorie des catégories (Eilenberg-MacLane, 1945).

A l'intérieur du second niveau, on pourrait d'ailleurs affiner la classification : par exemple l'étude du modèle arithmétique a conduit certes à la théorie des nombres, mais aussi a favorisé l'éclosion de la logique, de la théorie des ensembles, de l'algèbre, de la topologie.

6.2 La filiation entre modèles s'établit par l'intermédiaire des projections  $(\Pi, \pi)$ . Les ascendants directs du modèle  $M$  sont définis par  $(\Pi^{-1}, \pi^{-1})$ .

Lorsque  $\pi(U(t))$  conserve les propriétés de rapport métriques de  $U(t)$  et n'est pas contenu dans  $\mathbb{R}^2$ , le modèle est en général dit réduit. Mais si  $\pi(U(t))$  est contenu dans  $\mathbb{R}^2$ , mais non dans  $\mathbb{R}$ , le modèle est un dessin. Si  $\pi(U(t))$  est contenu dans une variété de dimension 1, en général non connexe,

branchue et à ccins on est en présence d'un modèle écrit. Mais dans ce cas  $\pi$  n'est plus une projection ; le modèle que nous avons proposé dans nos définitions n'est pas assez puissant. En particulier il ne permet pas de rendre compte de ce qu'est un modèle "abstrait", dont le support spatial originel est localisé dans notre cerveau.

Nous n'essayerons pas ici de proposer une description des modèles abstraits. Il faudrait pour cela accepter quelques hypothèses difficilement vérifiables dans l'immédiat.

6.3 Toute modélisation se heurte à une difficulté de taille : supposant acquise, via des modèles, la connaissance des différentes parties d'un objet, quelles propriétés peut-on attribuer à l'objet pris dans sa globalité ?

Distinguons trois cas. Nous appellerons le premier, celui qu'on rencontre souvent en physique, le cas trivial : les propriétés du local sont les mêmes que celles du global, et celles-ci se déduisent facilement des premières. Ainsi, on caractérise des objets physiques par leur masse, leurs charges électriques, ... Supposons par exemple connues les masses locales  $m(u_i)$  des  $u_i : \mathbb{R}$  est la fibre au-dessus de  $u_i$  ;  $s(u_i) = m(u_i)$ . La projection  $\pi$  envoie  $U$  sur un point  $p$ . La projection  $\Pi$  envoie toutes les fibres sur  $\mathbb{R}$  ; la valeur de la section de la fibre au-dessus de  $p$  est égale à la somme des masses locales. Dans le cas trivial, la mesure d'une propriété  $P$  du global,  $m(P)$ , s'obtient à partir des mesures  $m_i(P)$  de la même propriété du local par une opération algébrique simple.

Dans le cas normal, cette mesure  $m(P)$  s'obtient encore à partir des mesures  $m_i(P)$ , mais par une opération complexe inconnue.

Enfin, dans d'autres cas, appelés difficiles ou catastrophiques, certaines propriétés du global, parmi les plus importantes, ne sont pas des propriétés du local.

On voit ici l'insuffisance de notre définition du modèle, qui, pour être plus réaliste, devrait faire apparaître certaines parties de  $U$  dotées de spécificités propres que n'auraient pas les éléments.

Ces difficultés de modélisation montrent la nécessité de rechercher des modèles globaux à partir desquels on pourra inférer des propriétés et des modèles locaux. Ces mêmes difficultés incitent à une réflexion plus approfondie sur les propriétés des objets, et à examiner comment prendre en compte de façon sérieuse ces propriétés. En particulier, il importe de faire l'inventaire des propriétés universelles des objets, parmi lesquelles doit figurer en bonne place la présence d'un système de régulation (voir Topologie et Perception, tome 1, page 191).



6.4 Nous n'entreprendrons pas ici d'analyser les fondements des différents types de modèles qu'on a pu inventer : modèles géométriques, modèles statistiques, modèles inspirés par la théorie des automates. Nous allons plutôt montrer le lien entre un modèle statistique et le modèle tel que nous l'avons défini.

Supposons qu'on veuille connaître le nombre de voitures qui passent au point  $p$  de l'autoroute  $A_1$ , le mercredi, à l'heure  $t$ . Pour obtenir ce renseignement, on va compter, à l'heure  $t$  d'un nombre suffisant de mercredis, le nombre de passages de voitures pour en déduire la loi de probabilité de ce nombre de passages - on trouvera probablement une loi de Poisson.

Prenons pour  $U(t)$  un parallépipède de faible largeur transverse à l'autoroute en  $p$ , pour fibré trivial  $U(t) \times \mathbb{Z}$ , pour section  $s_t$  la section définie par  $s_t(u(t)) = n(t)$  où  $n(t)$  désigne le nombre de voitures qui traversent  $U(t)$  à l'instant  $t$  (le genre de  $U(t)$  défini par le nombre de trous dans  $U(t)$ ).

Nous avons défini tout processus par  $\bigcup_{t \in T} R(t)$ , ou encore par la donnée de  $R(0)$  et d'un champ de vecteurs  $X(t)$  [1], lié à l'énergie  $E(t)$  de  $R(t)$ , qui opère d'une part sur l'anneau des entiers pour fixer la dimension de la fibre, d'autre part sur l'espace des sections. Dans le cas présent, la dimension de la fibre est constante,  $X(t)$  opère seulement sur l'espace des sections. On peut transformer ce champ de vecteurs en un champ de vecteurs  $Y$  sur la fibre elle-même. L'analyse statistique permet de définir le mode d'action de  $Y$ .

Mais en aucun cas, la statistique ne permet de comprendre le pourquoi de la loi de probabilité observée.

## VII - Fonction du modèle : 2

7.1 La situation précédente laisse l'esprit insatisfait. On retrouve des situations analogues en physique. Au niveau de la loi, la contrariété qu'on y rencontre est moins grande. Ainsi, on accepte davantage l'a-priori de la Nature que traduit la loi  $F = k \frac{mm'}{2}$  que l'a-priori exprimé par une loi de probabilité de Halphen - qui n'a pas trouvé de justification physique. En effet, on se dit que la force d'attraction exercée par  $M$  sera d'autant plus forte que sa masse  $m$  sera plus grande, que sa distance  $d$  au but  $M'$  sera plus courte. En tenant le même raisonnement avec  $M'$ , on en déduit aussitôt la forme de la loi de Newton. Dans le cas physique, le débat se situe au niveau de l'origine, de la transmission, du pourquoi de ces forces, toutes choses que nous ignorons.

La compréhension d'un phénomène peut se faire à différents paliers : l'esprit de synthétique, celui du véritable historien, auront tendance à s'enquérir [1]. La stabilité structurelle sur les champs de vecteurs se définit par la cor-

sidération d'homéomorphismes. C'est une raison pour laquelle notre définition d'objet structurellement stable fait également appel à cette notion. On rappelle que dans 11 - la théorie du déploiement universel, la stabilité structurelle d'applications est définie en termes de difféomorphismes d'une connaissance globale du phénomène, à en dessiner les traits caractéristiques, les grandes tendances dans une perspective à long terme. L'esprit analytique, à vision plus courte, souvent celui des mathématiciens, préfèrent se limiter à une étude locale, à l'aide d'un formalisme qu'ils manipuleront dans tous les sens pour lui faire dire tout ce qu'il contient. Ces deux attitudes sont complémentaires et doivent être présentes.

Faute peut-être d'une observation suffisante, l'entendement au niveau du global ne permet encore guère d'établir des prévisions sûres. D'autant plus que notre esprit est mal adapté à percevoir le caractère aléatoire d'évènements dont la durée s'étend sur des mois, sur des années. Ces difficultés favorisent l'incompréhension entre l'esprit analytique et l'esprit synthétique, amené à construire des modèles moins quantitatifs, à proposer des analogies audacieuses. Mais l'essentiel est d'amorcer une compréhension du déroulement des processus.

7.2 Les modèles mathématiques jouent un grand rôle car ils permettent : de procéder à des classifications, de faire apparaître des aspects qui avaient d'abord échappé à l'observation, de guider celle-ci, de faire surgir les analogies cachées entre phénomènes. On trouvera des exemples d'emploi de tels modèles dans Morphogénèse et stabilité structurelle, sur la nature des mathématiques.

Les modèles conduisent, petit à petit, à mieux comprendre le monde difficile dans lequel nous vivons ; par leurs conséquences sur la formation des esprits, sur les conceptions qu'on se fait du monde, ils ont une portée considérable que nous ne pouvons mesurer. Les réflexions d'Einstein, les modèles qu'il a conçus ont sans doute contribué à porter l'humanité dans son état de civilisation actuel. Il ne s'agit pas là d'une utilité matérielle et immédiate des modèles, triviale pourrait-on dire ; cette utilité est profonde et durable.

7.3 Enfin, le modèle sert de révélateur à la réalité, par la précision sécurisante de son langage. Prenons l'exemple de la définition même de modèle que nous avons donnée. Le simple examen des différentes projections  $(\Pi, \pi)$  permet de rendre plus claires à l'esprit les différentes acceptions que l'on donne au terme de modèle. Et en éclairant la réalité, le modèle porte en lui les germes de réflexion qui démontrent ses faiblesses, et amènent le progrès dans l'observation.

VIII - Conclusion

Au cours de cet aperçu sur les aspects multiples, de la modélisation, nous avons été amené à entrevoir différentes utilités des modèles, parmi lesquelles nous retiendrons les trois suivantes : transport facile du reflet d'un monde non immédiatement perceptible, simulation rapide de l'environnement, outil qui peut guider l'observation et favoriser la compréhension.

Nous avons omis de parler du danger des modèles : amener certains à prendre le modèle pour la réalité. C'est ainsi que certains linguistes affirment la soumission de l'intellect au langage. Parce qu'un potentiel s'écrit  $\frac{k}{x^2}$ , on se dit que le champ physique induit par ce potentiel s'étend à l'infini. Ce danger, jusqu'à présent, a été mineur.

Ces dernières années, le rythme du développement technologique, comparé à celui des siècles précédents, a été rapide, et certains travaux théoriques ont pu trouver une application immédiate. Le calcul de Heaviside, un ingénieur physicien il est vrai, s'est vite répandu et a favorisé le développement de l'électronique. Mais c'est en physique bien sûr, le domaine scientifique le plus proche des mathématiques, que les découvertes des géomètres trouvent plus facilement une application. Par exemple, Lichnerowicz a montré que, si elles existent, les ondes gravitationnelles doivent être apparentées aux ondes électromagnétiques. Tel résultat suggère et justifie l'emploi des dispositifs expérimentaux utilisés pour la recherche de ces ondes gravitationnelles hypothétiques.

Cependant, le plus souvent, le délai entre la découverte mathématique et son usage dans la pratique est long, ce qu'on a du mal à concevoir aujourd'hui. L'expansion galopante, et récente, de nos sociétés occidentales a conduit à créer le mythe de la rapidité : si vous ne trouvez pas aujourd'hui d'utilisation pratique à la théorie que vous avez échafaudée la veille, votre théorie est déclarée dénuée de signification. Les tenants d'une telle position font preuve de légèreté. Les oeuvres de la pensée, comme toutes les constructions de la Nature, ont un rythme d'évolution qui est lent. Nul ne peut dire si une théorie qui aujourd'hui paraît insignifiante, ne peut avoir, dans un avenir lointain, habilement exploitée, des contrecoups inattendus dans les domaines les plus divers de la science et de la vie pratique. Pensons aux nombres complexes inventés au XVI<sup>e</sup> siècle, qui trouvent, à l'heure actuelle, leur emploi pratique dans les calculs des électroniciens. Cette invention mathématique, sans laquelle notre civilisation ne connaîtrait ni la télévision ni le transistor, a donc, par l'intermédiaire de cette électronique minitieuse, des conséquences extraordinaires sur notre vie quotidienne, sur la vie militaire et celle de la cité.

Etant donnée l'importance du concept de modèle, de la signification pratique qu'en peut lui attacher, on a vu croître ces dernières années, en de grandes proportions, le nombre de personnes attachées à l'élaboration et au développement de ces modèles. Nombre de travaux qui ont été réalisés sont peut-être non-signifiants. Mais ce nombre représente le prix à payer pour qu'apparaisse, de temps en temps, une oeuvre d'intérêt affirmé, et pour transmettre la somme croissante des connaissances nécessaires à la construction de bons modèles.

Une fois ces modèles établis, on cherche à les développer. Ils contribuent alors à modifier notre manière de concevoir, et permettent d'enrichir l'observation. Les modèles alors ne paraissent plus aptes à décrire la richesse des phénomènes nouvellement dévoilés. Il y a crise, il faut repenser les modèles. Nous traversons en ce moment une période de crise. Et plutôt que sur le déroulement mécanique et astucieux des modèles, il est préférable de réfléchir à leurs fondements. C'est à cette réflexion que, de plus en plus, s'emploient aujourd'hui les chercheurs.

Peut-être seront-ils aussi touchés que nous par les présupposés philosophiques que leurs succès révèlent. En tronquant la réalité, le modéliste n'en retient que quelques propriétés. Parce que le modèle est plus pauvre que cette réalité, on se meut avec aisance dans cet univers allégé, on en pénètre avec moins de peine les secrets. Mais si ces secrets ont force de réalité, c'est bien par suite de leur imposante stabilité. On peut alors songer à établir toute une hiérarchie de propriétés ; les plus archétypes d'entre elles affirment leur primauté sur les propriétés secondes. On en déduit une méthodologie : rechercher et étudier les propriétés premières, examiner la force de leur impact sur la vie de l'objet, la façon dont elles se conjuguent pour donner à l'objet son visage particulier.

On trouvera à celui-ci des qualités de laideur ou de beauté. Le modèle qu'on en fera nous inspirera peut-être des sentiments analogues, et l'on sait combien les mathématiciens sont sensibles à l'harmonie de leurs théories, à l'élégance de la démonstration. Mais l'homme n'avait-il pas déjà reconnu le beau dans la musique soyeuse et colorée de ses modèles poétiques,

" La Nature est un temple où de vivants piliers  
Laisser parfois sortir de confuses paroles ;  
L'homme y passe à travers des forêts de symboles  
Qui l'observent avec des regards familiers. " Ch. Baudelaire