APPENDICE

[NDLR. Comme il a été fait allusion à la conférence faite le 23 Mai 1973 par J. Dieudonné à Bordeaux, il paraît utile de la reproduire ici].

ORIENTATION GENERALE DES MATHEMATIQUES PURES EN 1973

RESUME DE LA CONFERENCE DE M.J. DIEUDONNE

(Rédigé par H. HOGBE-NLEND)

(Relu et corrigé par J. DIEUDONNE)

Quand on parle d'un sujet de ce genre, il ne peut y avoir d'objectivité. Ce que je dirai décrit ma position personnelle, ma tendance personnelle. D'autres mathématiciens ont d'autres points de vue.

Je ne rentrerai pas dans la querelle entre Mathématiques dites Pures et Mathématiques dites Appliquées. Actuellement il y a beaucoup d'attaques contre les Mathématiques dites Pures ; celles-ci sont même parfois proscrites. J'ai rencontré un mathématicien chinois aux Etats-Unis. Dans la Chine de Mao, on empêche de publier les résultats mathématiques "purs" sous prétexte que les mathématiques doivent être immédiatement utilisables. En fait cette volonté de subordination des mathématiques aux applications immédiates est récente ; elle remonte environ à la Renaissance. Auparavant (chez les Grecs par exemple) on ne se souciait pas d'applications des Mathématiques. Devant les succès de la Mécanique Newtonienne, puis de l'électricité, de l'optique on a voulu que les mathématiques se restreignent aux résultats directement utilisables dans les sciences de la nature et la technologie. En 1932, en Russie, on avait également la même hantise des mathématiques "pratiques". Cela a maintenant changé. (Prix à Vinogradov en Arithmétique). Laissons donc de côté ces questions d'applications et venons en aux Mathématiques Pures.

La question essentielle qui se pose est la question suivante :

Quels sont les critères sur lesquels on peut juger un travail Mathématique ?

Comme on ne tient pas compte des critères utilitaires, il ne reste plus que des critères esthétiques. Comme toute question d'esthétique c'est donc une question de goût. Il y a par conséquent des écoles tenant à telle ou telle manière de juger ou d'apprécier. Des groupements s'opèrent suivant certains principes, on peut donner une classification grossière en trois grandes écoles :

- Les traditionnalistes (disons "l'extrême droite")
- Les Egalitaristes (disons "l'extrême gauche")
- Entre les deux, quelque chose difficile à nommer on peut parler de "centre"

mais cela n'a pas de sens. C'est la tendance de tous ceux qui se réclament de BOURBAKI. Mais personne ne peut parler sur cette question au nom de BOURBAKI car BOURBAKI n'a jamais exprimé d'opinion là-dessus. Cette dernière tendance est d'ailleurs aussi celle de certains éminents mathématiciens qui détestent BOURBAKI. On mettra donc "BOURBAKI" entre guillemets.

Tout le monde est cependant d'accord sur un point : Un travail n'a de considération que s'il représente une certaine dose de matière grise. Les travaux triviaux (axiomes + une ou deux conséquences évidentes) sont jetés au panier.

En dehors de cela il y a des divergences sur trois points fondamentaux.

- Les sujets de recherche mathématique,
- Les méthodes de recherche,
- La pathologie en recherche.

1) <u>Le Sujet</u> : Pour certains (les Traditionnalistes et "BOURBAKI") il faut des sujets ayant une longue histoire ; des sujets ayant attiré de grands mathématiciens du passé. Pas de génération spontanée. Pour d'autres (les Egalitaristes), n'importe quoi est intéressant pourvu qu'on fasse des Mathématiques. C'est la position des deux tiers (2/3) des mathématiciens Américains et de certains mathématiciens Français.

2) <u>Les Méthodes</u> : Ici le groupement est différent. D'un côté "BOURBAKI" et les Egalitaristes, de l'autre les Traditionnalistes. Les premiers sont partisans de ce qu'on peut appeler la "Stratégie", les seconds de la "Tactique".

<u>Tactique</u> (Traditionnalistes) : On fonce dans le problème, on utilise de façon plus astucieuse peut être, des idées, des moyens connus depuis longtemps. C'est une tendance répandue en théorie des nombres ou en théorie des groupes, par exemple.

<u>Stratégie</u> (<u>"BOURBAKI" + Egalitaristes</u>) : On s'en va à 1000 lieues en apparence ; on bâtit une théorie nouvelle sur la base de problèmes anciens. Petit à petit on arrive à trouver les racines du problème et à faire tomber la place-forte.

Avec cette tendance "Stratégie" se fait sentir le besoin et la vertu de <u>l'Unité des Mathématiques</u>. Les théories mathématiques diverses se fécondent mutuellement.

3) La Pathologie : Les Traditionnalistes et les Egalitaristes aiment les "belles pathologies". Pour "BOURBAKI", par contre il y a une croyance fondamentale : Les mathématiques sont essentiellement simples et si on arrive à des choses trop compliquées c'est que le problème est mal posé, c'est qu'on est parti d'un mauvais point de vue.
(Exemple : Les fonctions continues sans dérivée au sens usuel. L. Schwartz a saisi le bon point de vue, d'où la notion de dérivée-distribution).

Inutile que je vous dise que je partage dans tout ceci les idées de "BOURBAKI". De façon plus détaillée voici mes points de vue. Puisqu'il s'agit d'esthétique, nous dirons qu'il y a des mathématiques nobles et des mathématiques serviles. Comment classer ? Il n'y a pas de vote. Les mathématiques, c'est une question d'aristocratie. Les bonnes mathématiques sont faites par très peu de gens (150 au 20ème siècle au plus). Il y a une poignée de "leaders". Les bonnes orientations sont celles données par ces gens là : Exemples Riemann ; Elie Cartan ; Siegel ; au total 7 à 8 au 18ème siècle ; 30 au 19ème siècle ; 1 par an au 20ème siècle. Une théorie noble est une théorie considérée comme bonne par ces mathématiciens ; l'opinion des autres est sans importance.

Que doivent faire les autres ? Ils doivent suivre, essayer d'avancer dans les voies nouvelles défrichées par les "génies". Il faut avoir une certaine humilité devant eux ; c'est la caractéristique essentielle d'un homme de science. Les génies sont en avance sur leur époque. Ceux qui suivent ont un rôle nullement négligeable : ils jouent le rôle de caisses de résonance. Les "suiveurs" doivent essayer d'expliquer, de vulgariser ce que les leaders n'ont pas pris la peine de développer. Ce métier de suiveur n'a rien de déshonorant. On a mis 100 ans pour pénétrer la pensée de Riemann et ceci a fortement fait avancer la connaissance mathématique. En même temps on a enrichi cette pensée et on lui a donné des bases solides.

Maintenant je vais terminer en vous donnant une classification des théories nobles et des théories serviles. Pour bien connaître les théories nobles, il faut lire les Séminaires BOURBAKI. Dans le tableau ci-dessous, les théories nobles sont en première ligne. Plus on descend vers le bas, plus les théories deviennent serviles.

[voir tableau dernière page]

<u>Commentaire sur ce tableau.</u>

1) Chaque ligne prend appui sur celles qui sont en dessous et qui lui fournissent ses outils.

2) Les théories du "bas" sont des théories fondamentales mais "achevées" donc mortes. Par exemple pour les E.V.T., J. LERAY a dit : "BOURBAKI" a rédigé un grand traité sur les E.V.T. alors qu'il n'y a que quatre théorèmes dont tout le monde se sert". Je suis obligé de reconnaître que LERAY avait raison.

3) Les groupes de Lie sont devenus le centre des Mathématiques ; on ne peut plus rien faire de sérieux sans eux.

4) Le tableau ci-dessus n'est pas stable. Il y a des théories qui montent et d'autres qui descendent. Par exemple les groupes de Lie montent. Si une théorie descend c'est qu'elle se renferme sur elle-même. On ne considère plus que des problèmes internes à cette théorie. Quand une théorie tourne autour d'elle même, elle finit par dégringoler. Il y a vingt ans, l'Analyse Harmonique commutative était au sommet. Actuellement elle suit la voie de l'Analyse Classique en s'engageant dans des raffinements subtils et ingénieux, mais perdant peu à peu le contact avec le grand courant des autres théories "nobles". Ce qui monte c'est l'Analyse Harmonique non commutative (théorie des représentations de dimension infinie de groupes de Lie). On pense que c'est la clé de la théorie quantique des champs et peut être du corps de classes.

5) A propos de l'Algèbre, Kronecker en 1861 a dit que l'Algèbre en elle-même n'est pas une discipline indépendante. Mais c'est la base de toutes les mathématiques. On ne doit pas développer l'algèbre pour elle-même, mais dans la mesure où elle est nécessaire dans les autres parties des mathématiques. C'est aussi l'avis de Chevalley.

Nuançons. Il y a des exemples de théories qui ont longtemps paru "pathologiques" et non motivées et tout d'un coup, grâce à l'imagination d'un nouveau "leader", se sont révélées très fécondes. Exemple le plus récent : les questions d'homéomorphie dans les espaces de dimension infinie. Il faut savoir reconnaître que l'on s'est trompé : c'est ce que fait toujours "BOURBAKI" (voir son Séminaire).

CLASSIFICATION DES THEORIES MATHEMATIQUES EN 1973 (J. DIEUDONNE)

Ligne 1	Logique ; Probabilités ; Combinatoire ; Topologie algébrique ; Topologie différentielle ; Géométrie différentielle ; Analyse Harmonique non commutative ; Equations différentielles ordinaires ; Contrôle ; Théorie ergodique ; Equations aux dérivées partielles ; Géométrie analytique (au sens de Serre) ; Géométrie algébrique ; Théorie des nombres ; Groupes finis.
Ligne 2	Algèbre homologique ; Analyse harmonique commutative ; groupes de Lie ; Théorie spectrale des opérateurs ; C*-algèbres (un peu plus bas que la ligne 2).
Ligne 3	Catégories ; Analyse classique ; Algèbre commutative.
Ligne 4	Intégration ; Théorie de la mesure ; Espaces vectoriels topologiques
Ligne 5	Topologie générale ; Algèbre générale
Plus bas encore	Théorie des ensembles.