Croissance et zéros des Fonctions Méromorphes.

Espaces Duals de Fonctions Entières.

Par

L. A. RUBEL.

Rédigé par les soins de Melle. DETRAZ Jacqueline
M. FIOLET Michel.

Croissance et zéros des Fonctions Méromorphes.

Espaces Duals de Fonctions Entières.

par

L. A. RUBEL.

Rédigé par les soins de Melle. DETRAZ Jacqueline.
M. FIOLET Michel.

UNIVERSITE DE PARIS.

Faculté des Sciences d'ORSAY.

PUBLICATION DU SEMINAIRE

DE MATHEMATIQUES D'ORDAY

5ème année 1965-66.

Secrétariat de Mathematiques

1966

Table des Matières.

INTRODUCTION.

Nous étudierons ici quelques espaces vectoriels topologiques de fonctions entières contenant les classes classiques. Par exemple :

E espace vectoriel topologique des fonctions entières, muni de la topologie de la convergence compacte (convergence uniforme sur tout compact).

E', dual topologique de E, est E_o, espace des fonctions entières de type exponentiel ($f \in E_o \Leftrightarrow \exists\ A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall\ z \in \mathbb{C}\ |f(z)| \leqslant A \exp[B|z|]$). Pour $f \in E$ et $F \in E_o$, $\langle f, F \rangle = (F(D) \cdot f)(0)$ où $F(D)$ est l'opérateur de dérivation lié à F :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad F(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dz^n}$$

C_o espace des fonctions : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues, tendant vers zéro à l'infini. on considère aussi $C_o^+ = \left\{ f \,|\, f \in C_o,\ f \geqslant 0 \right\}$.

Nous introduirons les "classes de poids" :

<u>Définition</u> : $K \subset C_o^+$ sera dite une classe de poids si elle vérifie les conditions

1) si $k \in K$ et $c > 0$ alors $ck \in K$
   si $k \in K$ et $0 \leqslant k_1 \leqslant k$ alors $k_1 \in K$
   si $k \in K$ et $k_1 \in K$ alors $\mathrm{Max}(k, k_1) \in K$
2) pour tout compact H de $\mathbb{C}$, K contient $C_H^+ = \left\{ f \,|\, f \in C_o^+,\ f \text{ nulle en dehors de } H \right\}$
3) pour toute k dans K, il existe k_1 dans K, k_1 radiale et $0 \leqslant k \leqslant k_1$ (majoration radiale)
4) si $k \in K$, $c \geqslant 0$, et $k_1 : z \longmapsto k(cz)$ alors $k_1 \in K$
5) si $b \in \mathbb{C}$ et $k \in K$, $\varphi : t \longmapsto k(t) \exp(bt)$, alors $\varphi \in C_o$.

Eventuellement il sera utile d'imposer une ou plusieurs conditions plus techniques que nous citons ici sans préciser :

I hypoconvexité

II hyperconvexité

III déterminé par une suite

IV base dénombrable

Nous définissons alors $E(K)$, espace de fonctions entières associé à K, classe de poids ; $E(K) = \{f \mid f \text{ entière}, \forall k \in K \ \ fK \in C_o\}$ Puis on considère la famille de semi-normes sur $E(K)$ définie par :

$$\forall f \in E(K), \forall k \in K, \ ||f||_k = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)\, k(z)|$$

Cette famille de semi-normes munit alors $E(K)$ d'une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe.

On introduit ensuite K^*, classe duale de K, définie par :

$$K^* = \{k^* \mid k^* \in C_o^+, \forall k \in K \ \ k^*(w)\, k(z) \exp(zw) \ \text{ est bornée}\}$$

On constate aisément que K^* est une classe de poids et on montre que $E(K^*)$ représente le plus souvent $[E(K)]^*$ dual topologique de $E(K)$, moyennant éventuellement des conditions supplèmentaires sur K, conditions du type I à IV, ou $K^{**} = K$.

Dans ce cas la forme bilinéaire séparante réalisant la dualité est donnée par $\langle f, F\rangle = [F(D).f]\,(0)$ où $D = \frac{d}{dz}$ et $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ alors $F(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ d'où $[F(D).f]\,(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n(w)$ la série étant absolument convergente

Exemples :

$E(K)$	$E(K^*)$
$E = \{f \mid f \text{ entière}\}$	$E_0 = \{F \mid F \in E,\ F \text{ de type exponentiel}\}$
$\{f \mid f \in E,\ \text{Log Log } M(r, f) = O(r)\}$	$\{F \mid F \in E,\ \text{Log } M(r, F) = o(r \log r)\}$
$\{f \mid f \in E,\ \text{Log Log } M(r, f) = o(r)\}$	$\{F \mid F \in E,\ \text{Log } M(r, F) = O(r \text{ Log } r)\}$
$\{f \mid f \in E,\ f \text{ d'ordre fini}\}$	$\{F \mid F \in E,\ F \text{ d'ordre} \leq 1\}$
$\{f \mid f \in E,\ f \text{ d'ordre} \leq p\}\ 1 < p < +\infty$	$\{F \mid F \in E,\ F \text{ d'ordre} \leq q\}\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$\{f \mid f \in E,\ f \text{ d'ordre} \leq p, \text{ de type exponentiel}\}\ 1 < p < +\infty$	$\{F \mid F \in E,\ F \text{ d'ordre } q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ de type zéro}\}$

Voici maintenant un aperçu des problèmes que l'on se posera·

1 Etant donnée l'équation différentielle d'ordre infini $F(D).f = g$, on considère l'équation homogène associée $F(D).f = 0$ et on montre que l'espace des solutions est une variété de $E(K)$.

<u>Définitions</u> : - V variété de $E(K) \Leftrightarrow V$ sous espace fermé invariant par les translations

- exponentielle monôme : fonction de la forme $P_n(z) = z^n \exp(\lambda z)$ $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il est alors naturel de se poser le problème suivant :

Est-ce que toute variété V est engendrée par les exponentielles monômes qu'elle contient, c'est-à-dire : peut-on écrire en un certain sens $f(z)$"="$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ où $a_n \in \mathbb{C}$, P_n exponentielle monôme, $P_n \in V$.

D'après Ehrenpreis et Malgrange, ce problème se réduit au suivant:

2. I idéal fermé de $E(K^*)$ $Z(I) = \{z \in C \mid \forall f \in I,\ f(z) = 0\}$

$Z \subset \mathbb{C}$, on définit $I(Z) = \{f \mid \forall z \in Z,\ f(z) = 0\}$ alors $I(Z)$ est un idéal

Alors, quand a-t-on $I = I[Z(I)]$.

3 C'est pourquoi l'on se doit d'étudier la répartition des zéros des fonctions de $E(K)$ (en fait de $E(K^*)$). Pour ce faire, on a besoin d'une notion nouvelle, remplaçant les produits canoniques d'Hadamard. Posant

$$\operatorname{Log} |f(r e^{i\theta})| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(r, f)\, e^{ik\theta}$$

les idées sont

4 Comparer la croissance de f à celle des c_k.

5 Exprimer les c_k au moyen des zéros de f.

On introduit la notion de fonction de croissance :

<u>Définition</u> : λ fonction de croissance $\Leftrightarrow \lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue non décroissante. Puis, pour chaque λ fonction de croissance, on introduit la classe Λ_E des fonctions entières dites de λ type fini

$$f \in \Lambda_E \Leftrightarrow \exists\, A, B \in \mathbb{R}_+ \text{ telsque } \operatorname{Log} M(r, f) \leqslant A\, \lambda(Br)$$

Plus généralement, on peut considérer Λ, classe de fonctions méromorphes de λ type fini : $f \in \Lambda \Leftrightarrow [f$ méromorphe et $\exists\, A, B$ telsque $T(r, f) \leqslant A\, \lambda(Br)]$ où $T(r, f)$ est la caractéristique de Nevanlinna.

Se posent alors les problèmes suivants :

6 Etant donnée $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $Z \subset \mathbb{C}$, $0 \notin Z$, $|z_n| \longrightarrow +\infty$ qd $n \longrightarrow +\infty$, donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe $f \in \Lambda$ tel que $Z = Z(f)$.

La réponse est du type :

a) $N(r) \leqslant A\, \lambda(Br)$

b) $$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |z_n| \leqslant r_2} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k \right| \leqslant \frac{A\, \lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\, \lambda(Br_2)}{r_2^k}$$

où $n(r) = \sum_{|z_n| \leqslant r} 1$, et $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$

7 Dans quel cas a-t-on $\Lambda = \frac{\Lambda_E}{\Lambda_E}$ (i.e $h \in \Lambda \Leftrightarrow h = \frac{f}{g}$ où $f, g \in \Lambda_E$)

La réponse est :

$\forall\, Z$ satisfaisant à a), $\exists\, Z' \supset Z$, Z' satisfaisant a) et b).

8 Pour commencer nous étudierons la caractéristique généralisée de Nevanlinna par la méthode des coefficients de Fourier pour mettre en évidence la croissance angulaire des fonctions.

A I LA CARACTERISTIQUE GENERALISEE.

Nous considérons ici le cas des fonctions méromorphes dans le disque unité, mais beaucoup de résultats s'étendent au cas du plan entier.

Nous supposerons aussi que si f est méromorphe, l'origine n'est ni zéro, ni pôle de f ; sinon il suffit de modifier légèrement les formules écrites.

1. La caractéristique de Nevanlinna.

1.1. Définitions : f méromorphe dans $D = \left\{z \; ; \; |z| < 1\right\}$, $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$ $w_1, w_2, w_n, \ldots$ les pôles de f.

1.1.1. $$n(r, f) = \sum_{|w_n| \leq r} 1$$

1.1.2. $$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f)}{t}\, dt = \sum_{|w_n| \leq r} \log \frac{r}{|w_n|}$$

1.1.3. $$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}^+ |f(r\, e^{i\theta})|\, d\theta$$

1.1.4. $$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

1.2. Propriétés :

1.2.1. $$T(r, \tfrac{1}{f}) = T(r, f) + O(1)$$

1.2.2. $$T(r, \prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j)$$

1.2.3. $$T(r, \sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + O(1)$$

Preuve : 1.2.1. résulte de la formule de Jensen

$$T(r, \tfrac{1}{f}) = T(r, f) - \mathrm{Log}\, |f(0)|$$

1.2.2. résulte de $$\mathrm{Log}^+ \Big| \prod_{j=1}^{n} a_j \Big| \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Log}^+ |a_j|$$

1.2.3. résulte de $$\mathrm{Log}^+ \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Log}^+ |a_j| + \mathrm{Log}\, n$$

1.3. Théorème : (premier théorème fondamental)

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1)$$

Preuve : on part de la formule de Jensen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}\,|f(r\; e^{i\theta})\,|\,d\theta = N(r, \frac{1}{f}) - N(r, f) + \mathrm{Log}\,|f(0)\,|$$

c'est-à-dire :

$$T(r, f) = T(r, \frac{1}{f}) + \mathrm{Log}\,|f(0)|$$

on en déduit, si $f(0) \neq a$

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f-a) - \mathrm{Log}|f(0) - a| = T(r, f) + T(r, f-a) - T(r, f) - \mathrm{Log}|f(0) - a|$$

or, d'après 1.2.3.

$$|T(r, f-a) - T(r, f)| \leqslant \mathrm{Log}^+|a| + \mathrm{Log}\ 2$$

d'où le résultat.

1.4. Théorème :Soit $T^*(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} N(r, \frac{1}{f-e^{i\varphi}})\,d\varphi$

1.4.1. $T^*(r, f) - T(r, f) = 0(1)$

1.4.2. $r\frac{d}{dr}[T(r, f)] = r\frac{d}{dr}[T^*(r, f)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} n(r, \frac{1}{f-e^{i\varphi}})\,d\varphi$

1.4.3. $T(r, f)$ et $T^*(r, f)$ sont des fonctions convexes de $\mathrm{Log}\ r$.

Preuve : d'après la formule de Jensen :

$$N(r, \frac{1}{f-e^{i\varphi}}) - N(r, f) + \mathrm{Log}|f(0) - e^{i\varphi}| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}|f(r\,e^{i\theta}) - e^{i\varphi}|\,d\theta$$

en intégrant on obtient :

$$T^*(r, f) - N(r, f) + \mathrm{Log}^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}|f(r\,e^{i\theta}) - e^{i\varphi}|d\theta\right\}d\varphi$$

puis en utilisant Fubini, car l'intégrale double converge absolument

$$T^*(r, f) - N(r, f) + \mathrm{Log}^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}^+|f(r\,e^{i\theta})|\,d\theta = m(r, f)$$

d'où 1.4.1.

Alors 1.4.2. est évident, d'où il résulte 1.4.3.

1.5. Théorème : (deuxième théorème fondamental)

$$m(r, f) + \sum_{\nu=1}^{q} m(r, \frac{1}{f-a}) \leq 2\,T(r, f) - N'(r, f) + S(r, f)$$

où

$$N'(r, f) = N(r, \frac{1}{f'}) + 2\,N(r, f) - N(r, f')\ ;\quad N'(r, f) \geq 0$$

et

$$S(r, f) \leq 3(q+1)\,\mathrm{Log}^+ [T(r, f)] + 8\,\mathrm{Log}^+ \frac{1}{R-r} \qquad 0 < r < R < 1$$

Si $\displaystyle \operatorname*{Lim\,Inf}_{r \to 1-0} \frac{T(r, f)}{\mathrm{Log}\frac{1}{1-r}} = +\infty$, alors $r \longrightarrow 1-0$, $r \in E$ tel que

$$\int_{\complement E} \frac{dr}{1-r} < +\infty\ ,\qquad S(r, f) = o[T(r, f)]$$

Preuve : Nous ne donnons pas ici la démonstration. cf Hayman [1].

2. Coefficients de Fourier d'une fonction holomorphe.

2.1. Rappels : $\displaystyle \mathrm{Log}|f(r\,e^{i\theta})| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(r)\,e^{ik\theta}$

$$c_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}|f(r\,e^{i\theta})|\ .\ e^{-ik\theta}\,d\theta$$

alors $c_o(r) = N(r, \frac{1}{f}) - N(r, f) + \mathrm{Log}|f(0)|$ est la formule de Jensen.

2.2. Lemme. f holomorphe dans $D = \left\{z\ ;\ |z| < 1\right\}$, $f(0) \neq 0$

$$\mathrm{Log}\ f(z) = \mathrm{Log}\ f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\,z^k$$

$\left\{z_n = r_n\,e^{i\theta_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ les zéros de f avec leur multiplicité.

Alors :

2.2.1. $$c_o(r) = \sum_{|z_n|\leq r} \mathrm{Log}\,\frac{r}{|z_n|} + \mathrm{Log}|f(0)|$$

2.2.2. $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad c_p(r) = \frac{1}{2}\,\alpha_p\,r^p + \frac{1}{2p}\sum_{|z_n|\leq r} \left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^p - \left(\frac{\bar{z}_n}{r}\right)^p\right\}$$

2.2.3. $$\forall p \in \mathbb{Z}\quad c_{-p} = \bar{c}_p$$

Preuve :

$$I_p(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\mathrm{Log}\ f(r\,e^{i\theta})]\cos p\theta\,d\theta = \frac{-1}{p\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f'(r\,e^{i\theta})}{f(r\,e^{i\theta})}\ \sin p\theta\ ir\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$I_p(r) = \frac{1}{2p\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\left[\frac{r^p}{z^p} - \frac{z^p}{r^p}\right] dz$$

On calcule $I_p(r)$ comme somme de résidus et on prend la partie réelle, soit $\Re e[I_p(r)]$. Traitant de même $J_p(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\mathrm{Log}\, f(r\, e^{i\theta})] \sin p\theta\, d\theta$ et considérant $c_p(r) = \Re e(I_p) - i\, \Re e(J_p)$, on obtient le résultat 2.2.2. ; 2.2.1. est la formule de Jensen et 2.2.3. est évident car $\mathrm{Log}\,|f(r\, e^{i\theta})|$ est réel.

3. Quelques définitions et propriétés relatives aux suites complexes.

$$Z = \left\{z_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \quad Z \subset D, \quad Z \text{ discret dans } D, \quad 0 \notin Z.$$

3.1. Définitions :

3.1.1. $k \in \mathbb{Z}$, $n_k(r, Z) = \frac{1}{2} \sum_{|z_n|\leq r} \left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^k + \left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right)^k\right\}$

3.1.2. $k \in \mathbb{Z}$, $N_k(r, Z) = \frac{1}{2} \sum_{|z_n|\leq r} \int_{\frac{z_n}{r}}^{\frac{r}{\overline{z_n}}} t^k \frac{dt}{t}$

l'intégrale ayant lieu sur le segment $\left[\frac{z_n}{r}, \frac{r}{\overline{z_n}}\right]$

3.2. Propriétés :

3.2.1. $$N_k(r, Z) = \int_0^r \frac{n_k(t, Z)}{t}\, dt$$

3.2.2. $$n_k(r, Z) = r\frac{d}{dr}\, [N_k(r, Z)]$$

3.2.3. $$n_0 = \sum_{|z_n|\leq r} 1 = n, \quad N_0 = \int_0^r n(t, Z)\frac{dt}{t} = N$$

3.3. Définitions et Notations : on appellera polynôme trigonométrique une expression de la forme :

$$B(e^{i\theta}) = \sum_{k=-m}^{+m} \beta_k\, e^{-ik\theta} \quad \text{où } m \in \mathbb{N}, \; -\pi \leq \theta \leq \pi$$

que l'on notera parfois $B(\theta)$.

Au polynôme trigonométrique B est associée la fonction :

$$z \mapsto B(z) = \sum_{k=-m}^{+m} \beta_k\, z^k$$

A cette fonction est associée la fonction conjuguée :

$$z \to B^*(z) = \sum_{k=-m}^{+m} \overline{\beta_k}\, z^k = \overline{B(\bar z)}$$

3.4. <u>Définitions</u> : Etant donnés une suite Z et un polynôme trigonométrique B, on définit :

3.4.1. $$N_B(r, Z) = \frac{1}{2} \sum_{|z_n| \leq r} \int_{\frac{\bar z_n}{r}}^{\frac{r}{z_n}} B^*(t)\, \frac{dt}{t}$$

3.4.2. $$n_B(r, Z) = \frac{1}{2} \sum_{|z_n| \leq r} \left[B^*\left(\frac{r}{z_n}\right) + B^*\left(\frac{\bar z_n}{r}\right) \right]$$

3.5. <u>Propriétés</u> : $$\sum_{n=1}^{\infty} [1 - |z_n|] = +\infty \Leftrightarrow \lim_{r \to 1-0} N(r, Z) = +\infty$$

<u>Preuve</u> : Il suffit d'évaluer $N(r, Z)$ comme somme de logarithmes et d'utiliser la transformation d'Abel, ou bien de partir de 3.2.1. et d'intégrer par parties.

3.6. <u>Théorème</u> : Etant donné une suite Z telle que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) = +\infty$ pour tout polynôme trigonométrique B on a :

3.6.1. $$\limsup_{r \to 1-0} \left| \frac{N_B(r, Z)}{N(r, Z)} \right| \leq \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |B(e^{i\theta})| = \|B\|_\infty$$

3.6.2. $$\forall \varphi, \quad \limsup_{r \to 1-0} \left| \frac{\mathcal{R}e\,\{e^{-i\varphi} N_B(r, Z)\}}{N(r, Z)} \right| \leq \|B\|_\infty$$

où $\mathcal{R}e\{u\}$ désigne la partie réelle du nombre u.

<u>Preuve</u> : Pour $0 < \rho < r < 1$, on a :

$$N_B(r, Z) = \frac{1}{2} \sum_{\rho \leq |z_n| \leq r} \int_{\frac{\bar z_n}{r}}^{\frac{r}{z_n}} B^*(t)\, \frac{dt}{t} + O(1)$$

étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons ρ tel que $\sup_{\rho < t < \frac{1}{\rho}} |B^*(t)| \leq (1 + \varepsilon)\|B\|_\infty$

alors pour tout n tel que $\rho \leq |z_n| \leq r$ on a :

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\frac{\overline{z_n}}{r}}^{\frac{r}{z_n}} B^*(t) \frac{dt}{t} \right| \leqslant (1+\varepsilon) \| B \|_\infty \operatorname{Log} \frac{r}{|z_n|}$$

Il en résulte que

$$|N_B(r, Z)| \leqslant (1+\varepsilon) \| B \|_\infty N(r, Z) + O(1)$$

d'où le résultat 3.6.1.

3.6.2. est un corollaire immédiat de 3.6.1.

3.7. Propriétés :

3.7.1. B réel $\Rightarrow n_B, N_B$ réels

3.7.2. $B \geqslant 0 \Rightarrow n_B, N_B \geqslant 0$

Preuve : B réel, $\beta_{-k} = \overline{\beta_k}$

$$B^*\left(\frac{r}{z_n}\right) + B^*\left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \overline{\beta_k} \left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right)^k + \beta_k \left(\frac{z_n}{r}\right)^k + \overline{\beta_k}\left(\frac{r}{z_n}\right)^k + \beta_k\left(\frac{r}{\overline{z_n}}\right)^k \right\}$$

d'où n_B réel.

Posons $\frac{z_n}{r} = \rho\, e^{i\theta}$, $t = \lambda\, e^{i\theta}$, alors :

$$\int_{\frac{z_n}{r}}^{\frac{r}{\overline{z_n}}} B^*(t) \frac{dt}{t} = \int_{\rho}^{\frac{1}{\rho}} B^*(\lambda\, e^{i\theta}) \frac{d\lambda}{\lambda} = \sum_{-m}^{+m} \overline{\beta_k}\, e^{ik\theta} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\rho^k} - \rho^k\right) = \sum_{-m}^{+m} \frac{\overline{\beta_k}}{k} \left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k - \left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right)^k\right]$$

et on termine comme ci-dessus.

3.7.2. résulte aussi du calcul précédent.

4. La caractéristique généralisée.

4.1. Notations :

Il s'agit de f méromorphe dans D, $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\} = W(f)$ la suite des pôles de f $(0 \notin W)$

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\} = Z(f)$ la suite des zéros de f $(0 \notin Z)$

$f_r(z) = f(r\, z)$, $f_r(\theta) = f(r\, e^{i\theta})$

B désigne un polynôme trigonométrique, sauf mention contraire

$F, G \in L^2(-\pi, +\pi)$, $\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\theta) \cdot \overline{G(\theta)}\, d\theta$

4.2. Définitions :

4.2.1. $n_B(r,f) = n_B[r, W(f)]$ et $N_B(r, f) = N_B[r, W(f)]$

4.2.2. $N_B(r, a) = N_B(r, \frac{1}{f-a})$

4.2.3. $m_B(r, f) = \langle \mathrm{Log}^+|f_r|, B\rangle$

4.2.4. $m_B(r, a) = m_B(r, \frac{1}{f-a})$

4.2.5. $T_B(r, f) = m_B(r, f) + N_B(r, f)$

4.3. Théorème : (formule de Jensen généralisée)

$$\langle \mathrm{Log}|f_r|, B\rangle = N_B(r, \frac{1}{f}) - N_B(r, f) + \frac{1}{2} \sum_{-m}^{+m} \alpha_k \overline{\beta_k}\, r^{|k|}$$

où les α_k sont définis comme en 2.2.

Preuve : d'après le lemme 2.2. :

$$\mathrm{Log}|f(r e^{i\theta})| = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(r)\, e^{ik\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Log}\, f(z) = \mathrm{Log}\, f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Z^k,$$

$$\alpha_0 = 2\,\mathrm{Log}|f(0)| \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$$

et $$c_k(r) = \frac{1}{2} \alpha_k r^{|k|} + N_k(r, \frac{1}{f}) - N_k(r, f)$$

Alors

$$\langle \mathrm{Log}|f_r|, B\rangle = \sum_{-m}^{+m} c_k(r)\, \overline{\beta_k} = N_B(r, \frac{1}{f}) - N_B(r, f) + \frac{1}{2} \sum_{-m}^{+m} \alpha_k \overline{\beta_k}\, r^{|k|}$$

4.4. Application : f holomorphe dans D, $\sum_{n=1}^{\infty} (1-|Z_n|) = +\infty$, B polynôme trigonométrique alors :

$$\limsup_{r \to 1-0} \left| \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{B}(\theta)\, \mathrm{Log}|f_r(\theta)|\, d\theta}{\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}|f_r(\theta)|\, d\theta} \right| \leq \|B\|_\infty$$

Preuve : $\langle \mathrm{Log}|f_r|, B\rangle = N_B(r, \frac{1}{f}) + O(1)$ d'après 4.3.

$\langle \mathrm{Log}|f_r|, 1\rangle = N(r, \frac{1}{f}) - \mathrm{Log}|f(0)|$ d'après la formule de Jensen

et $\sum (1 - |Z_n|) = +\infty \Leftrightarrow N(r, \frac{1}{f}) \longrightarrow +\infty$ lorsque $r \to 1-0$

d'après 3.5. alors 4.4. est une conséquence de 3.6.1.

4.5. <u>Extension</u> : B analytique dans la couronne $A_\rho = \left\{ z \; ; \; \rho < |z| < \frac{1}{\rho}, \rho < 1 \right\}$ alors on peut écrire $f = g\,H$ où $H = \dfrac{H_1}{H_2}$

H_1 produit de Blaschke relatif à un nombre fini de zéros dans $D_{\rho'} = \left\{ z \; ; \; |z| < \rho' \right\}$

H_2 produit de Blaschke relatif à un nombre fini de poles dans $D_{\rho'}$, $\rho < \rho' < 1$

g est holomorphe sans zéro dans $D_{\rho'}$

et $H_r \longrightarrow 1$ uniformément quand $r \longrightarrow 1 - 0$

$$< \mathrm{Log}\,|f_r|, B > = < \mathrm{Log}\,|g_r|, B > + < \mathrm{Log}\,|H_r|, B >$$

$\mathrm{Log}\; g(z) = \mathrm{Log}\; g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* z^k$ dans un voisinage de zéro contenant $D_{\rho'}$ car g est holomorphe sans zéro dans $D_{\rho'}$

$$B(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k z^k \quad \text{pour} \quad z \in A_\rho$$

Alors $< \mathrm{Log}\,|H_r|, B > \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow 1 - 0$ et

$$< \mathrm{Log}\,|g_r|, B > = N_B(r, \tfrac{1}{g}) - N_B(r, g) + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^* \, \overline{\beta_k} \, r^{|k|}$$

mais $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^* \, \overline{\beta_k} \, r^{|k|}$ converge absolument et uniformément pour $r < 1$.

4.6. <u>Applications</u> :

4.6.1. f holomorphe dans D, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) = +\infty$, B analytique dans A_ρ. Alors

$$\underset{r \to 1-0}{\mathrm{Lim\,Sup}} \left| \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{B(\theta)}\, \mathrm{Log}\,|f_r(\theta)|\, d\theta}{\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}\,|f_r(\theta)|\, d\theta} \right| \leq ||B||_\infty$$

<u>Preuve</u> : on peut supposer $f(0) = 1$. Alors

$$\left| \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{B(\theta)}\, \mathrm{Log}\,|f_r(\theta)|\, d\theta}{\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}\,|f_r(\theta)|\, d\theta} \right| = \left| \frac{N_B(r, \frac{1}{f}) + 0(1)}{N(r, \frac{1}{f})} \right| \leq ||B||_\infty + \varepsilon$$

4.6.2. f holomorphe dans D, $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) < +\infty$, B analytique dans A_ρ. Alors

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{B(\theta)}\ \mathrm{Log}|f_r(\theta)|\ d\theta \quad \text{est borné.}$$

4.6.3. <u>Lemme</u> : $B \in L^2(-\pi, +\pi)$, B non analytique.

Alors il existe U harmonique dans D telle que $|\langle U_r, B\rangle| \longrightarrow +\infty$ quand $r \longrightarrow 1-0$.

<u>Preuve</u> : $B(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k z^k$, $B(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ik\theta}$. Il n'est pas restrictif de supposer que $\sum_{k>0} \beta_k z^k$ a un rayon de convergence égal à 1.

Ecrivons $U(r e^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{in\theta}$ et supposons que $\sum a_k r^k$ converge absolument pour $r < 1$. Dans ces conditions $\langle U_r, B\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \overline{\beta_k} r^{|k|}$.

On peut déterminer $K \subset \mathbb{N}$, K non borné et $\{\varepsilon_k\}_{k\in K}$ tels que :

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k\in K}} |\beta_k|^{1/k} = 1 \ ; \quad 0 \leqslant \varepsilon_k < 1, \quad \lim_{\substack{k \to +\infty \\ k\in K}} \varepsilon_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in K,\ |\beta_k| \geqslant (1-\varepsilon_k)^k$$

Prenons donc
$$a_k = 0 \ \text{si}\ k \notin K$$
$$\overline{\beta_k}\, a_k = 1 \ \text{si}\ k \in K$$

Alors $k \in K \Rightarrow |a_k|^{1/k} = \dfrac{1}{|\beta_k|^{1/k}} \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon_k} \Rightarrow \limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} \leqslant 1$

Alors $\sum a_k r^k$ converge absolument pour $r < 1$, mais $\forall k$, $a_k \overline{\beta_k} \geqslant 0$ et $\sum a_k \overline{\beta_k} = +\infty$, d'où le résultat.

4.6.4. $B \in L^2(-\pi, +\pi)$, B non analytique.

Alors il existe f holomorphe dans D, $\sum (1 - |z_n|) = +\infty$ et telle que

$$\limsup_{r \to 1-0} \left| \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{B(\theta)}\ \mathrm{Log}|f_r(\theta)|\ d\theta}{\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}|f_r(\theta)|\ d\theta} \right| = +\infty$$

<u>Preuve</u> : Construisons u du lemme précédent, il n'est pas restrictif de supposer $u(0) = 0$. Soit v la fonction harmonique conjuguée de u $(v(0) = 0)$.

Soit $h = \exp(u + iv)$ et choisissons g holomorphe dans D telle que $N(r, \frac{1}{g}) \longrightarrow \infty$ quand $r \longrightarrow 1-0$, mais assez lentement pour que

$$\frac{N(r, \frac{1}{g})}{\langle U_r, B\rangle} \longrightarrow 0 \ \text{quand}\ r \longrightarrow 1-0.$$

Prenons enfin $f = gh$

$$h(0) = 1 \Rightarrow \langle \mathrm{Log}|h_r|, 1\rangle = \mathrm{Log}|h(0)| = 0$$

$$\frac{\langle \mathrm{Log}|f_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|f_r|, 1\rangle} = \frac{\langle \mathrm{Log}|g_r|, B\rangle + \langle \mathrm{Log}|h_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle + \langle \mathrm{Log}|h_r|, 1\rangle} = \frac{\langle \mathrm{Log}|g_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle} + \frac{\langle \mathrm{Log}|h_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle}$$

Alors l'une au moins des deux fonctions f ou g convient, sinon

$$\operatorname*{Lim\,Sup}_{r \to 1-0} \left|\frac{\langle \mathrm{Log}|h_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle}\right| \leqslant \operatorname*{Lim\,Sup}_{r \to 1-0} \left|\frac{\langle \mathrm{Log}|f_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|f_r|, 1\rangle}\right| + \operatorname*{Lim\,Sup}_{r \to 1-0} \left|\frac{\langle \mathrm{Log}|g_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle}\right|$$

prouverait que $\operatorname*{Lim\,Sup}_{r \to 1-0} \left|\frac{\langle \mathrm{Log}|h_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle}\right|$ est borné ; or, par construction,

$\frac{\langle \mathrm{Log}|h_r|, B\rangle}{\langle \mathrm{Log}|g_r|, 1\rangle} \longrightarrow \infty$ quand $r \to 1-0$, d'où une contradiction.

4.7. __Théorème__ : (premier théorème fondamental)

$$T_B(r, \frac{1}{f-a}) = T_B(r, f) + O(1).$$

__Preuve__ : elle est la même que dans le cas de la caractéristique de Nevanlinna.

4.8. __Théorème__ : Soit $T_B^*(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} N_B\,(r, \frac{1}{f-e^{i\varphi}})\,d\varphi$

alors $T_B^*(r, f) = T_B(r, f) + O(1) \qquad 0 < r < 1$

__Preuve__ : elle est la même que dans le cas de la caractéristique de Nevanlinna.

4.9. __Théorème__ : (deuxième théorème fondamental)

Si $B \geqslant 0$,

$$N_B(r, f) + \sum_{\nu=1}^{q} m_B(r, \frac{1}{f-a_\nu}) \leqslant 2\,T_B(r, f) - N_B^1(r, f) + S_B(r, f)$$

où $N_B^1(r, f) \geqslant 0$ et $S_B(r, f) \leqslant S(r, f)$, $S(r, f)$ étant la quantité qui intervient dans le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna.

__Preuve__ : elle est la même que dans le cas de la caractéristique de Nevanlinna.

5. Applications :

5.1. Définitions :

5.1.1. a est déficient $\Leftrightarrow \underset{r\to 1-0}{\text{Lim Sup}}\left[\dfrac{N(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, \frac{1}{f-a})}\right] < 1$

5.1.2. le défaut de a est $\delta(a) = 1 - \underset{r\to 1-0}{\text{Lim Sup}}\left[\dfrac{\overline{N}(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, \frac{1}{f-a})}\right]$

5.2. Théorème : $-\ \sum_a \delta(a) \leqslant 2$

$-$ si $B \geqslant 0$, $\sum_a \delta_B(a) \leqslant 2$

où $\delta_B(a)$ a une définition évidente.

Preuve : les deux parties se démontrent de la même manière ; pour la première, cf. Haymann [1]

5.3. Théorème : f holomorphe dans D, 0 non déficient, $\exists \left\{\theta_j\right\}_{j=1}^n$ tel que les $e^{i\theta_j}$ sont les seuls points d'accumulation des zéros de f ; alors, $r \longrightarrow 1-0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{\text{Log}^+ \left|\frac{1}{f_r(\theta)}\right|\right\} \prod_{j=1}^n (\theta-\theta_j)^2\, d\theta = o\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log}^+ |f_r(\theta)|\, d\theta\right]$$

Preuve : Prenons $B(\theta) = \prod_{j=1}^n [1-\cos(\theta-\theta_j)]$ alors $B(\theta) > 0$ si $\theta \neq \theta_j$ et $B(\theta_j) = 0$; de plus $\exists\, m, M > 0$ tels que :

$$m \prod_{j=1}^n (\theta-\theta_j)^2 \leqslant B(\theta) \leqslant M \prod_{j=1}^n (\theta-\theta_j)^2$$

tout revient donc à montrer que $r \longrightarrow 1-0$, $m_B(r, \frac{1}{f}) = o\,[m(r, f)]$

$-$ f étant holomorphe, $m(r, f) = T(r, f)$

$-$ $N_B(r, \frac{1}{f}) = o\left[N(r, \frac{1}{f})\right]$ car les zéros de B sont précisement les points d'accumulation des zéros de f (faire une évaluation du type de celle effectuée dans la démonstration du théorème 3.6.)

$-$ $\langle \text{Log}|f|, B\rangle = o\left[N(r, \frac{1}{f})\right]$ en utilisant la formule de Jensen généralisée et le fait que $N(r, \frac{1}{f}) \longrightarrow +\infty$ quand $r \longrightarrow 1-0$.

$-$ $\langle \text{Log}^+|\frac{1}{f}|, B\rangle = 0\left[m(r, \frac{1}{f})\right]$ car $|\langle \text{Log}^+ |\frac{1}{f}|, B\rangle| \leqslant \|B\|_\infty \langle \text{Log}^+|\frac{1}{f}|, 1\rangle$

$-$ $m(r, \frac{1}{f}) = o\left[N(r, \frac{1}{f})\right]$ car 0 n'est pas déficient

- alors $m_B(r, f) = \langle \mathrm{Log}|f|, B\rangle + \langle \mathrm{Log}^+|\frac{1}{f}|, B\rangle$

donc $m_B(r, f) = o\left[N(r, \frac{1}{f})\right]$

enfin $N(r, \frac{1}{f}) \sim T(r, f)$ car $T(r, f) = T(r, \frac{1}{f}) + O(1)$ et 0 n'est pas déficient.

Citons maintenant trois applications, sans démonstration.

5.4. <u>Théorème</u> : f méromorphe dans D

$a_1, a_2, a_3 \in \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, distincts ; $e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sont les seuls points d'accumulation des solutions des équations :

$$f - a_1 = 0, \quad f - a_2 = 0, \quad f - a_3 = 0$$

$$B(\theta) = \prod_{j=1}^{n} [1 - \cos(\theta - \theta_j)]$$

Alors $$T_B(r, f) \leqslant S_B(r, f) + o[N(r, f)] + b(r)$$

où $b(r)$ est bornée.

En particulier :

$$\forall a, \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}^+\left|\frac{1}{f-a}\right| \prod_{j=1}^{n} (\theta - \theta_j)^2 \, d\theta = o[T(r, f)] \quad \text{quand } r \longrightarrow 1-0, \ r \in E$$

où $\int_{\complement E} \frac{dr}{1-r} < +\infty$, pourvu que $\displaystyle \operatorname{Lim\,Inf}_{r \to 1-0} \frac{T(r, f)}{\mathrm{Log}\frac{1}{1-r}} = +\infty$

5.5. <u>Théorème</u> : f holomorphe dans D.

Il est impossible que f ait deux valeurs non déficiente réparties sur deux ensembles finis disjoints de rayons.

5.6. <u>Théorème</u> : f holomorphe dans D, 0 non déficient tous les zéros de f sont réels positifs.

S'il existe a tel que $f(z) = a \Rightarrow f(-z) = a$, alors a est déficient.

A II ETUDE DES SUITES COMPLEXES.

On considère $Z = \{z_n\}$, $0 \notin Z$, $|z_n| \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$

1. Définitions :

1.1. $n(r, Z) = \sum\limits_{|z_n| \leq r} 1$

1.2. $N(r, Z) = \int_0^r n(t, Z) \frac{dt}{t}$

1.3. $S(r, k, Z) = \frac{1}{k} \sum\limits_{|z_n| \leq r} (\frac{1}{z_n})^k \quad k \in N^*$

1.4. $S(r_1, r_2, k, Z) = S(r_2, k, Z) - S(r_1, k, Z)$

1.5. λ fonction de croissance $\Leftrightarrow \lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante, continue, non bornée.

1.6. Z de λ densité finie $\Leftrightarrow \exists A, B > 0$ tels que $\forall r > 0 \quad N(r, Z) \leq A\lambda(Br)$

1.7. Z est λ équilibrée $\Leftrightarrow \exists A, B > 0$ tels que $\forall r_1, r_2 > 0, \forall k \in N^*$

$$|S(r_1, r_2, k, Z)| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k}$$

1.8. Z est λ-fortement équilibrée $\Leftrightarrow \exists A, B > 0$ tel que $\forall r_1, r_2 > 0$

$\forall k \in N^* \quad |S(r_1, r_2, k, Z)| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{k\, r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{k\, r_2^k}$

1.9. Z est λ admissible $\Leftrightarrow$ Z est de λ-densité finie et λ-équilibrée.

1.10. Z est λ^*-équilibrée (respectivement λ^* fortement équilibrée) $\Leftrightarrow$

$\exists \{\alpha_n\}, \exists A, B > 0$ tel que $\forall k \in N^* \quad |\alpha_k + S(r, k, Z)| \leq \frac{A\lambda(Br)}{r^k}$

(respectivement $\frac{A\lambda(Br)}{k\, r^k}$).

2. Propriétés.

2.1. Z de λ-densité finie $\Rightarrow \exists A', B'$ tel que $n(r, Z) \leq A'\lambda(B'r)$.

Preuve : $n(r, Z) \cdot \text{Log } 2 \leq \int_r^{2r} \frac{n(t, Z)}{t} dt \leq N(2r, Z)$

2.2. Z est λ-admissible $\Rightarrow$ Z est λ-fortement équilibrée.

Preuve : prenons $r' = r\, k^{1/k} \Rightarrow r < r' < 2r$

On a alors $|S(r_1, r_2, k)| \leq |S(r_2, r_2', k)| + |S(r_1', r_2', k)| + |S(r_1, r_1', k)|$

Or $$|S(r, r', k)| \leq \frac{1}{k}\int_r^{r'} \frac{1}{t^k}\, dn(t) = \frac{1}{k}\left[\frac{n(r')}{r'^k} - \frac{n(r)}{r^k}\right] + \int_r^{r'} \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt$$

d'où $$|S(r, r', k)| \leq \frac{1}{k}\left[\frac{n(r')}{r'^k} - \frac{n(r)}{r^k}\right] + n(r')\int_r^{r'} \frac{dr}{t^{k+1}} = \frac{n(r')-n(r)}{k\, r^k} \leq \frac{n(r')}{k\, r^k}$$

il suffit alors d'utiliser les hypothèses, la propriété 2.1., le fait que $k^{1/k} < 2$ et la croissance de λ.

Remarque : La propriété signifie que si Z est de λ densité finie avec les constantes A et B et est λ équilibrée avec les constantes A', B', alors Z est λ-fortement équilibrée avec des constantes A'' et B'' qui ne dépendent que de A, B, A', B' mais ni de λ ni de Z.

De même dans la propriété 2.1. où on peut prendre $A' = \frac{A}{\text{Log } 2}$ et $B' = 2B$.

Le calcul détaillé dans la proposition 2.2. montre que l'on peut prendre $A'' = \text{Max}\left(\frac{A}{\text{Log } 2}, A'\right)$; $B'' = \text{Max}\,(4B, 2B')$.

2.3. $$\left.\begin{array}{l} Z \text{ de } \lambda \text{ densité finie} \\ Z\ \lambda^* \text{ équilibrée} \end{array}\right\} \Rightarrow Z\ \lambda^*\text{-fortement équilibrée.}$$

Preuve : elle est la même que pour la proposition 2.2.

2.4. Z est λ-équilibrée (respectivement λ-fortement équilibrée) $\Leftrightarrow$
Z est λ^*-équilibrée (respectivement λ^*-fortement équilibrée).

Preuve : démontrons seulement l'équivalence des propriétés fortes, la preuve étant pratiquement la même dans les deux cas.

ⓐ $\Leftarrow$
$$|S(r_1, r_2, k)| = |S(r_2, k) + \alpha_k - [\alpha_k + S(r_1, k)]| \leq |\alpha_k + S(r_2, k)| + |\alpha_k + S(r_1, k)|$$

ⓑ $\Rightarrow$

Soit $p(\lambda) = \text{Inf}\left\{ n \in N \;\middle|\; \underset{r \to \infty}{\text{Lim Inf}}\, r^{-n}\lambda(r) = 0 \right\}$ $(\text{Inf}\ \emptyset = +\infty)$

$1 \leq k < p(\lambda)$, $\underset{r>0}{\text{Inf}}\left[\frac{\lambda(Br)}{r^k}\right] > 0 \Rightarrow \exists \left\{r_k\right\}_{k=1}^{p(\lambda)-1}$ tel que

$$\forall\, r > 0 \quad \frac{\lambda(Br_k)}{r_k^k} \leq 2\,\frac{\lambda(Br)}{r^k}$$

et on prend $\alpha_k = - S(r_k, k)$ pour $1 \leq k < p(\lambda)$

pour définir α_k dans le cas $k \geq p(\lambda)$, prenons d'abord une suite $\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\rho_j \longrightarrow +\infty$ quand $j \longrightarrow +\infty$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_j^{-p(\lambda)} \lambda(B\ \rho_j) = 0$ puis définissons $\alpha_k = \lim\limits_{j \to +\infty} [- S(\rho_j, k)]$ $k \geq p(\lambda)$.

Montrons d'abord que cette définition a un sens en montrant que $\forall\ k \geq p(\lambda)$ $\{S(\rho_j, k)\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

$$\Delta_{i,j} = |S(\rho_i, k) - S(\rho_j, k)| = |S(\rho_j, \rho_i, k)| \leq \frac{A\lambda(B\ \rho_j)}{k\ \rho_j^k} + \frac{A\lambda(B\ \rho_i)}{k\ \rho_i^k}$$

mais $\rho > 1$ et $k \geq p(\lambda) \Rightarrow \frac{1}{\rho^k} \leq \frac{1}{\rho^{p(\lambda)}}$ et le choix des ρ_j prouve que $\Delta_{i,j} \to 0$ quand $(i, j) \longrightarrow \infty$.

Avec ce choix des α_k, montrons que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ $|\alpha_k + S(r, k)| \leq \frac{3\ A\lambda(B\ r)}{k\ r^k}$

en effet si $1 \leq k < p(\lambda)$:

$$|\alpha_k + S(r, k)| = |S(r_k, r, k)| \leq \frac{A\lambda(B\ r_k)}{k\ r_k^k} + \frac{A\lambda(B\ r)}{k\ r^k} \leq \frac{3\ A\lambda(B\ r)}{k\ r^k}$$

et si $k \geq p(\lambda)$:

$$|\alpha_k + S(r, k)| = \lim_{j\to\infty} |S(r, \rho_j, k)| \leq \frac{A\lambda(B\ r)}{k\ r^k} + \operatorname{Lim\,Sup}_{j\to\infty} \frac{A\lambda(B\ \rho_j)}{k\ \rho_j^k} = \frac{A\lambda(B\ r)}{k\ r^k}$$

2.5. Si Z est de λ-densité-finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Z est λ-équilibrée

ii) Z est λ-fortement équilibrée

iii) Z est λ^*-équilibrée

iv) Z est λ^*-fortement équilibrée

v) Z est λ admissible

Preuve : résulte immédiatement des propriétés précédentes.

3. Exemple et exercice.

$\lambda(r) = r^\rho$ $\rho > 0$ alors

$$\rho \text{ entier, } Z \ \lambda\text{-admissible} \Leftrightarrow \begin{cases} n(r, Z) \leq A\, r^{\rho} \\ \left| \sum_{|z_n| \leq r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^{\rho} \right| \leq B \end{cases}$$

$$\rho \text{ non entier, } Z \ \lambda\text{-admissible} \Leftrightarrow n(r, Z) \leq A\, r^{\rho}$$

4. Restes d'une suite.

4.1. Définition : $R > 0$, $Z(R) = Z \cap \{z \mid |z| > R\}$

$Z(R)$ s'appelle le reste d'ordre R de la suite Z.

4.2. Définition : soit $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+$; on dit que $\{Z(R)\}_{R \in \mathfrak{R}}$ est un ensemble complet de restes si et seulement si $\mathfrak{R}$ n'est pas borné.

4.3. Théorème : Z est λ fortement équilibrée ; alors :

4.3.1. $\exists\ Z' \supset Z$ tel que i) $n(r, Z') = 0\, [n(r, Z)]$

ii) $\exists \{Z'(R)\}_{R \in \mathfrak{R}}$ ensemble complet de restes de Z', $Z(R)$ est λ-équilibrée, uniformément en R.

4.3.2. si $\forall \rho > 0$ $\displaystyle \operatorname*{Lim\,Inf}_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{r^{\rho}} = 0$, on peut prendre $Z' = Z$.

4.3.3. si $u : x \to u(x) = \operatorname{Log}[\lambda(e^{x})]$ est convexe, on peut prendre $Z' = Z$ et $\mathfrak{R} = \{R \mid R \geq R_0\}$

Preuve :

Lemme 1 : supposons u convexe ; alors :

a) $\sigma > 0$. $r \longrightarrow r^{-\sigma}\ \lambda(r)$ est décroissante puis croissante

b) $\exists\ R_0$ tel que $R \geq R_0 \Rightarrow \exists \sigma = \sigma(R)$ tel que $\dfrac{\lambda(R)}{R^{\sigma}} = \operatorname*{Inf}_{r > 0} \dfrac{\lambda(r)}{r^{\sigma}}$

c) si de plus $\exists \sigma_0 > 0$ tel que $\displaystyle \operatorname*{Lim\,Sup}_{r \to +\infty} r^{-\sigma_0}\ \lambda(r) < +\infty$ alors $\exists\ M$ tel que $\lambda(2r) \leq M\lambda(r)$.

Nous ne démontrons pas ce lemme technique.

Par hypothèse, $\exists\ A, B$ tel que :

$$|S(r_1, r_2, k, Z)| \leq \frac{A\lambda(B\, r_1)}{k\, r_1^k} + \frac{A\lambda(B\, r_2)}{k\, r_2^k}$$

Dans ces conditions nous avons :

<u>Lemme 2</u> : Si R et σ sont deux nombres positifs tels que

$$\frac{\lambda(BR)}{R^\sigma} = \operatorname*{Inf}_{r>0} \frac{\lambda(Br)}{r^\sigma}$$

Alors

$$|S(r_1, r_2, k, Z(R))| \leqslant \frac{2A\ \lambda(Br\ )}{k\ r^k} + \frac{2A\ \lambda(Br_2)}{k\ r_2^k}$$

<u>Preuve</u> : - si $r_1 \leqslant r_2 \leqslant R$, $S(r_1, r_2, k, Z(R)) = 0$

- si $R \leqslant r_1 \leqslant r_2$, $S(r_1, r_2, k, Z(R)) = S(r_1, r_2, k, Z)$

- si $r_1 \leqslant R \leqslant r_2$,

$$|S(r_1, r_2, k, Z(R))| = |S(R, r_2, k, Z)| \leqslant \frac{A\ \lambda(BR)}{k\ R^k} + \frac{A\ \lambda(Br_2)}{k\ r_2^k}$$

si $k \geqslant \sigma$ $\quad \dfrac{\lambda(BR)}{R^k} = \dfrac{\lambda(BR)}{R^\sigma}\ \dfrac{1}{R^{k-\sigma}} \leqslant \dfrac{\lambda(Br_1)}{r_1^\sigma}\ \dfrac{1}{r_1^{k-\sigma}} = \dfrac{\lambda(Br_1)}{r_1^k}$

si $k \leqslant \sigma$ $\quad \dfrac{\lambda(BR)}{R^k} = \dfrac{\lambda(BR)}{R^\sigma}\ \dfrac{1}{R^{k-\sigma}} \leqslant \dfrac{\lambda(Br_2)}{r_2^\sigma}\ \dfrac{1}{r_2^{k-\sigma}} = \dfrac{\lambda(Br_2)}{r_2^k}$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 4.3.

- supposons d'abord : $\forall \rho > 0 \quad \lim\limits_{r \to +\infty} r^{-\rho}\ \lambda(r) = +\infty$

Définissons pour $\sigma > 0$: $R_\sigma = \operatorname{Sup}\left\{ R \ \middle|\ \dfrac{\lambda(BR)}{R^\sigma} = \operatorname*{Inf}\limits_{r>0} \dfrac{\lambda(Br)}{r^\sigma} \right\}$

λ étant continue, $R_\sigma > 0$

Si $\sigma' > \sigma$ et $R < R_\sigma$, $\dfrac{\lambda(BR)}{R^{\sigma'}} = \dfrac{\lambda(BR)}{R^\sigma}\ \dfrac{1}{R^{(\sigma'-\sigma)}} > \dfrac{\lambda(BR_\sigma)}{R_\sigma^\sigma}\ \dfrac{1}{R_\sigma^{\sigma'-\sigma}} = \dfrac{\lambda(BR_\sigma)}{R_\sigma^{\sigma'}}$

donc $R_{\sigma'} \geqslant R_\sigma$

de plus $R \geqslant R_\sigma + 1 \Rightarrow \dfrac{\lambda(R)}{R^\sigma} > \dfrac{\lambda(R_\sigma)}{R_\sigma^\sigma} \Rightarrow \dfrac{\lambda(R)}{\lambda(R_\sigma)} > \left(\dfrac{R_\sigma + 1}{R_\sigma}\right)^\sigma$

d'où il résulte que $\sigma \to R_\sigma$ n'est pas bornée.

Prenons alors $\mathfrak{R} = \left\{ R > 0 \ \middle|\ \exists \sigma \text{ tel que } \dfrac{\lambda(BR)}{R^\sigma} = \operatorname*{Inf}\limits_{r>0} \dfrac{\lambda(Br)}{r^\sigma} \right\}$

$\left\{Z(R)\right\}_{R \in \mathfrak{R}}$ est donc un ensemble complet de restes, uniformément λ-équilibrés d'après le lemme 2 d'où 4.3.1.

4.3.3. résulte alors du lemme 1.

– Supposons maintenant $\exists\, \rho > 0$ tel que $\lim\limits_{r \to +\infty} r^{-\rho}\lambda(r) = 0$

Soit $p(\lambda) = \operatorname{Inf}\left\{ n \in N \mid \liminf\limits_{r \to +\infty} r^{-n}\,\lambda(r) = 0 \right\}$ et soit $\mathfrak{R}$ un ensemble non borné de nombres réels strictement positifs tels que :

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ R \in \mathfrak{R}}} \frac{\lambda(BR)}{R^{p(\lambda)}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda(BR)}{R^{p(\lambda)}} = \operatorname*{Inf}_{r \leqslant R} \left\{ \frac{\lambda(Br)}{r^{p(\lambda)}} \right\}$$

$\liminf\limits_{r \to \infty} r^{-p(\lambda)}\,\lambda(Br) = 0$ assure l'existence d'un tel ensemble $\mathfrak{R}$.

L'hypothèse supplémentaire de 4.3.2. entraine $p(\lambda) = 1$.

Construisons maintenant Z'. Soit ω une $p(\lambda)$-ième racine primitive de l'unité : $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{p(\lambda)}$.

Soient

$$\omega^{-j}\, Z = \left\{ \omega^{-j}\, Z_n \right\}_{Z_n \in Z} \quad \text{et} \quad Z' = \bigcup_{j=0}^{p(\lambda)-1} \omega^{-j}\, Z$$

Alors $n(r, Z') = p(\lambda)\, n(r, Z)$ et $S(r_1, r_2, k, Z') = \left(\sum\limits_{j=0}^{p(\lambda)-1} \omega^{kj} \right) S(r_1, r_2, k, Z)$

Pour $1 \leqslant k \leqslant p(\lambda) - 1$, $S(r_1, r_2, k, Z') = 0$

et $\forall k$ $|S(r_1, r_2, k, Z')| \leqslant p(\lambda)\, |S(r_1, r_2, k, Z)|$.

Il nous suffit de prouver que

$$|S(r_1, r_2, k, Z(R))| \leqslant \frac{2A\,\lambda(Br_1)}{k\, r_1^k} + \frac{2A\,\lambda(Br_2)}{k\, r_2^k} \qquad \text{pour } k \geqslant p(\lambda) \text{ et } R \in \mathfrak{R}$$

Comme dans le lemme 2, les cas $r_1 \leqslant r_2 \leqslant R$ et $R \leqslant r_1 \leqslant r_2$ sont triviaux

si $r_1 \leqslant R \leqslant r_2$ $\quad |S(r_1, r_2, k, Z(R))| = |S(R, r_2, k, Z)| \leqslant \dfrac{A\,\lambda(BR)}{k\, R^k} + \dfrac{A\,\lambda(Br_2)}{k\, r_2^k}$

mais $k \geqslant p(\lambda)$ et $r_1 \leqslant R \Rightarrow \dfrac{\lambda(BR)}{R^k} = \dfrac{\lambda(BR)}{R^{p(\lambda)}}\,\dfrac{1}{R^{k-p(\lambda)}} \leqslant \dfrac{\lambda(Br_1)}{r_1^{p(\lambda)}}\,\dfrac{1}{r_1^{k-p(\lambda)}} = \dfrac{\lambda(Br_1)}{r_1^k}$

et tout est démontré.

A III COEFFICIENTS de FOURIER.

1. Définitions et propriétés relatives aux coefficients de Fourier associés à une suite.

1.1. Définition : $S'(r, k, Z) = \frac{1}{k} \sum_{|z_n| \leq r} \left(\frac{\overline{z_n}}{r}\right)^k \qquad k \in \mathbb{N}^*$

1.2. Propriété : $|S'(r, k, Z)| \leq \frac{1}{k} N(er, Z)$

Preuve : résulte de $\quad n(r) \leq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t}\, dt \leq N(er)$

1.3. Définition : Soient $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $Z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alors on définit $\{c_k(r, Z, \alpha)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ par les formules :

1.3.1. $c_o(r, Z, \alpha) = N(r, Z)$

1.3.2. $c_k(r, Z, \alpha) = \frac{1}{2} r^k [\alpha_k + S(r, k, Z)] - \frac{1}{2} S'(r, k, Z) \qquad k \in \mathbb{N}^*$

1.3.3. $c_{-k} = \overline{c_k} \qquad k \in \mathbb{N}$

1.4. Définition : $\{c_k(r, Z, \alpha)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ λ-admissible $\Leftrightarrow \exists\, A, B > 0$ tels que $\forall\, k \in \mathbb{Z} \quad |c_k(r)| \leq \frac{A\, \lambda(Br)}{1 + |k|}$.

1.5. Théorème : Z λ-admissible $\Leftrightarrow \exists \{c_k(r, Z, \alpha)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ λ-admissible.

Preuve :

ⓐ $\Rightarrow$.

Z λ-admissible $\Rightarrow$ Z λ^*-fortement équilibrée d'après II.2.5. prenons $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ où les α_k sont ceux qui interviennent dans la définition de λ^*-fortement équilibré, et formons $c_k(r, Z, \alpha)$; $|c_o(r, Z)| \leq A\lambda(Br)$ car Z est de λ-densité finie

$$k \in \mathbb{N}^* \quad |c_k(r, Z, \alpha)| \leq \frac{r^k}{2} |\alpha_k + S(r, k, Z)| + \frac{1}{2} |S'(r, k, Z)|$$

et il suffit d'utiliser la propriété 1.2.

ⓑ $\Leftarrow$

$N(r, Z) = c_o(r, Z, \alpha) \leq A\, \lambda(Br) \;\Rightarrow\; Z$ est de λ densité finie

$$k \in \mathbb{N}^* \quad \left|\frac{r^k}{2}\,[\alpha_k + S(r, k, Z)]\right| = |c_k(r, Z, \alpha) + S'(r, k, Z)| \leqslant \frac{A\,\lambda(Br)}{|k| + 1} + \frac{N(er)}{2k} \leqslant \frac{2A\,\lambda(eBr)}{k}$$

donc Z est λ^* fortement équilibrée, donc Z est λ admissible d'après II.2.5.

2. Définitions et propriétés relatives aux coefficients de Fourier associés à une fonction méromorphe.

2.1. Rappels :

2.1.1. On s'occupe de f méromorphe et on suppose $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$.

2.1.2. $Z(f)$ est la suite des zéros de f

$W(f)$ est la suite des pôles de f

2.1.3. $n(r, f) = n[r, W(f)]$

$N(r, f) = N\,[r, W(f)]$

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Log}^+|f(r\,e^{i\theta})|\;d\theta$$

$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$

2.1.4. λ fonction de croissance $\Leftrightarrow \lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue croissante.

2.2. Les classes Λ.

2.2.1. Définitions : $f \in \Lambda \Leftrightarrow f$ est de λ-type fini $\Leftrightarrow \exists\, A, B > 0$ tels que $T(r, f) \leqslant A\,\lambda(Br)$

$f \in \Lambda_E \Leftrightarrow f$ entière, $f \in \Lambda$.

2.2.2. Propriété : $f \in \Lambda_E \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,M(r, f) \leqslant A\,\lambda(Br) \Leftrightarrow \forall\, z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant \exp\,[A\,\lambda(Br)]$ $\quad r = |z|$

2.2.3. Exemple : $\lambda = r^\rho$, alors

$f \in \Lambda \Leftrightarrow f$ d'ordre $\leqslant \rho$, de type fini.

2.3. Lemme : f méromorphe dans $D(o, R) = \{z \mid |z| < R\}$

$\mathrm{Log}\,f(z) = \mathrm{Log}\,f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, z^k$ dans un voisinage de zéro.

alors
$$\mathrm{Log}|f(r\,e^{i\theta})| = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(r, f)\,e^{ik\theta}$$

où $c_0(r, f) = N(r, Z) - N(r, W) + \mathrm{Log}|f(0)|$

$k \in \mathbb{N}^*$ $\quad c_k(r, f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^k + \frac{1}{2} r^k [S(r, k, Z) - S(r, k, W)] - \frac{1}{2}[S'(r, k, Z) - S'(r, k, W)]$

$k \in \mathbb{N}^*$ $\quad c_{-k}(r, f) = \overline{c_k(r, f)}$

Preuve : résulte de I.2.2. qui est le cas où f est holomorphe.

2.4. Théorème :

$$f \in \Lambda \Rightarrow \begin{cases} 2.4.1. & Z(f) \text{ et } W(f) \text{ sont de } \lambda\text{-densité finie.} \\ 2.4.2. & \exists A, B > 0 \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{Z}\ |c_k(r,f)| \leqslant \dfrac{A\,\lambda(Br)}{|k|+1} \end{cases}$$

$$f \in \Lambda \Leftarrow \begin{cases} 2.4.3. & Z(f) \text{ ou } W(f) \text{ est de } \lambda\text{-densité finie.} \\ 2.4.4. & \exists A, B > 0 \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{Z}\ |c_k(r,f)| \leqslant A\,\lambda(Br) \end{cases}$$

Preuve : Le schéma de la démonstration est le suivant

a) 2.4.3. et 2.4.4. $\Rightarrow$ 2.4.1. et 2.4.2.
b) $f \in \Lambda \Rightarrow$ 2.4.4. et 2.4.1.
c) 2.4.3. et 2.4.2. $\Rightarrow f \in \Lambda$

On peut toujours supposer $f(0) = 1$, sinon on considère $g(z) = A z^m f(z)$; les propriétés de f et g sont les mêmes, sauf si $\liminf\limits_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{\mathrm{Log}\, r} = 0$, mais dans ce cas Λ ne contient que les constantes, d'après des résultats bien connus, essentiellement le théorème de Liouville.

a) considérant dans 2.4.4. le cas $k = 0$ et tenant compte de 2.4.3., on obtient 2.4.1. comme $c_{-k} = \overline{c_k}$, il suffit de prouver 2.4.2. pour $k \in \mathbb{N}^*$; d'après 2.3. nous avons, pour $k \in \mathbb{N}^*$

2.4.5. $\quad |c_k(r, f)| \leqslant \frac{r^k}{2}|\alpha_k + S(r, k, Z) - S(r, k, W)| + \frac{1}{2}|S'(r, k, Z)| + \frac{1}{2}|S'(r, k, W)|$

2.4.6.

$$\frac{r^k}{2}|\alpha_k + S(r, k, Z) - S(r, k, W)| \leqslant |c_k(r, f)| + \frac{1}{2}|S'(r, k, Z)| + \frac{1}{2}|S'(r, k, W)|$$

d'après 1.2. avec $Z = Z(f)$ puis $Z = W(f)$, on montre que :

$$\exists A', B' \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}|S'(r, k, Z)| + \frac{1}{2}|S'(r, \ , W)| \leqslant \frac{A'\,\lambda(B'r)}{k}$$

il résulte alors de 2.4.6. et 2.4.4.

$\exists\, A'', B''$ tels que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}\, |\alpha_k + S(r, k, Z) - S(r, k, W)| \leqslant \frac{A''\, \lambda(B''r)}{k}$

en utilisant $r' = r\, k^{\frac{1}{k}}$ comme dans la démonstration de II.2.2., on montre que

$$\exists\ A, B \ \text{tels que}\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*\ |\alpha_k + S'(r', k, Z) - S(r', k, W)| \leqslant \frac{A\, \lambda(Br)}{k\, r^k}$$

enfin on prouve que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|S(r, r', k, Z)| \leqslant \frac{A\, \lambda(Br)}{k\, r^k}$ pour $Z = Z(f)$ puis $Z = W(f)$, comme cela a été fait dans II.2.2..

2.4.2 résulte alors de 2.4.5.

b) $f \in \Lambda \Rightarrow N\,[r, W(f)] = N(r, f) \leqslant T(r, f)$ d'où il résulte que $W(f)$ est de λ-densité finie. La formule de Jensen $T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \mathrm{Log}\,|f(0)|$ prouve que $f \in \Lambda \Rightarrow \frac{1}{f} \in \Lambda$. Alors d'après ci-dessus, $Z(f) = W(\frac{1}{f})$ est aussi de λ-densité finie d'où 2.4.1.

Enfin

$$|c_k(r, f)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ik\theta}\, \mathrm{Log}\,|f(r\, e^{i\theta})|\, d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big|\mathrm{Log}\, |f(r\, e^{i\theta})|\big|\, d\theta =$$
$$m(r, f) + m(r, \tfrac{1}{f}) \leqslant T(r, f) + T(r, \tfrac{1}{f})$$

d'où 2.4.4.

c) supposons d'abord $W(f)$ de λ-densité finie ; il en résulte que $N(r, f) \leqslant A'\lambda(B'r)$ quant à $m(r, f)$ on a :

$$m(r, f) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big|\mathrm{Log}\,|f(r\, e^{i\theta})|\big|\, d\theta \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big|\mathrm{Log}\,|f(r\, e^{i\theta})|\big|^2\, d\theta\right)^{1/2} =$$
$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(r, f)|^2\right)^{1/2}$$

alors d'après 2.4.2., on obtient

$$m(r, f) \leqslant A\, \lambda(Br) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{|k| + 1}\right)^2\right]^{1/2}$$

d'où le résultat.

Si $Z(f)$ est de λ-densité finie, le raisonnement précédent s'applique à $\frac{1}{f}$

2.5. Corollaire : f entière

$$f \in \Lambda \Rightarrow \begin{cases} \text{2.5.1. } Z(f) \text{ est de } \lambda\text{-densité finie} \\ \text{2.5.2. } \exists\ A, B \text{ tels que } \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad |c_k(r, f)| \leq \dfrac{A\ \lambda(Br)}{|k| + 1} \end{cases}$$

$f \in \Lambda \Leftarrow$ 2.5.3. $\exists\ A, B$ tels que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ $|c_k(r, f)| \leq A\ \lambda(Br)$

Preuve : il suffit de remarquer que $W(f) = \emptyset$, donc de λ-densité finie.

3. Applications.

3.1. Définition : f méromorphe, $q > 0$

$$E_q(r, f) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\mathrm{Log}|f(r\, e^{i\theta})||^q\, d\theta\right]^{1/q}$$

3.2. Théorème : f méromorphe

a) $f \in \Lambda \Rightarrow \forall\ q \in [1, +\infty[$, $\exists\ A, B > 0$ tels que $E_q(r, f) \leq A\ \lambda(Br)$

b) $\exists\ q \in [1, +\infty[$, $\exists\ A, B > 0$ tels que $E_q(r, f) \leq A\ \lambda(Br) \Rightarrow f \in \Lambda$

Preuve :

a) si p désigne le conjugué de q $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, le théorème d'Hausdorff-Young prouve pour $q \geq 2$:

$$E_q(r, f) = ||\mathrm{Log}|f_r|\ ||_q \leq ||c_k(r, f)||_p$$

or

$$||c_k(r, f)||_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r, f)|^p\right)^{1/p} \leq A\ \lambda(Br) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{|k|+1}\right)^p\right]^{1/p}$$

car $f \in \Lambda$ et théorème 2.4.

si $1 \leq q \leq 2$, d'après l'inégalité de Hölder, $\forall\ Q \geq 1$ $E_q(r, f) \leq A_{q,Q}\ E_{qQ}(r, f)$ et il suffit de choisir Q tel que $qQ \geq 2$.

b) l'inégalité de Hölder prouve que $\forall\ q \geq 1$ $E_1(r, f) \leq B_q\ E_q(r, f)$ d'où $|c_k(r, f)| \leq E_1(r, f) \leq B_q\ E_q(r, f) \leq A\ B_q\ \lambda(Br)$ et il suffit alors d'utiliser le théorème 2.4.

A IV APPLICATIONS AUX FONCTIONS ENTIERES OU MEROMORPHES.

1. Caractérisation des suites des zéros des fonctions de λ-type fini.

1.1. Théorème : soit $\left\{c_k(r, Z, \alpha)\right\}$ une suite de coefficients de Fourier associés à Z

suppososns que : $\forall\, r > 0, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(r, Z, \alpha)|^2 < +\infty$

Alors il existe f unique, f entière telle que :

$$Z(f) = Z, \quad f(0) = 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \quad c_k(r, f) = c_k(r, Z, \alpha).$$

Preuve : définissons :

1.1.1. $\Phi(\rho\, e^{i\varphi}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(\rho, Z, \alpha)\, e^{ik\varphi}$

alors $\Phi \in L^2$ d'après le théorème de Riesz-Fischer.

1.1.2. $B_\rho(z, z_n) = \dfrac{\bar{z}_n}{|z_n|}\, \dfrac{\rho(z_n - z)}{\rho^2 - \bar{z}_n z}$

1.1.3. $B_\rho(z) = \prod_{|z_n| \leq \rho} B_\rho(z, z_n)$

1.1.4. $Q_\rho(z) = \exp\left[\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|w|=\rho} \dfrac{w+z}{w-z}\, \Phi(w)\, \dfrac{dw}{w}\right]$

1.1.5. $f_\rho(z) = B_\rho(z)\, Q_\rho(z)$

Alors f_ρ a les propriétés suivantes.

1.1.6. f_ρ est holomorphe dans $D_\rho = \left\{z \mid |z| < \rho\right\}$ et

$$f_\rho(z) = 0 \Leftrightarrow z \in Z \cap D_\rho$$

1.1.7. $f_\rho(0) = 1$

1.1.8. $r < \rho \Rightarrow c_k(r, f\ ) = c_k(r, Z, \alpha) \quad k \in \mathbb{Z}$

en effet, 1.1.6. est évident, montrons 1.1.7.

$$f_\rho\,(0) = B_\rho(0)\, Q_\rho(0) \qquad B_\rho(0) = \prod_{|z_n| \leq \rho} \frac{|z_n|}{\rho} \quad \text{et}$$

$$Q_\rho(0) = \exp\left[c_0(r, Z, \alpha)\right] = \prod_{|z_n| \leq \rho} \frac{\rho}{|z_n|}$$

Montrons 1.1.8. en comparant les formules donnant les $c_k(r, f_\rho)$ et $c_k(r, Z, \alpha)$ on voit qu'il suffit de prouver qu'au voisinage de zéro on a :

$\operatorname{Log}|f_\rho(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ où les α_k sont ceux de la suite α ; autrement dit, il s'agit de prouver :

$$\frac{f'_\rho(z)}{f_\rho(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \alpha_k\, z^{k-1}$$

$$\frac{B'_\rho(z,z_n)}{B_\rho(z,z_n)} = \frac{\bar{z}_n}{\rho^2 - \bar{z}_n z} - \frac{1}{z_n - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{z}_n}{\rho^2}\right)^k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k z^{k-1}$$

Alors

$$\frac{B'_\rho(z)}{B_\rho(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\rho}\, z^{k-1} \quad \text{avec} \quad U_{k,\rho} = \sum_{|z_n| \leqslant \rho} \left[\left(\frac{\bar{z}_n}{\rho^2}\right)^k - \left(\frac{1}{z_n}\right)^k\right]$$

Il s'agit maintenant d'évaluer $\dfrac{Q'_\rho(z)}{Q_\rho(z)} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|w|=\rho} \Phi(w) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \frac{dw}{w}$

Soit
$$\frac{Q'_\rho(z)}{Q_\rho(z)} = \frac{2}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \Phi(w) \frac{dw}{(w-z)^2}$$

on prend donc $w = \rho\, e^{i\varphi}$ et on écrit $c_k(\rho, Z, \alpha)\, e^{ik\varphi} = \Omega_k\, w^k$

alors $\Omega_0 = N(\rho, Z)$

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\alpha_k + \frac{1}{2k} \sum_{|z_n| \leqslant \rho} \left[\left(\frac{1}{z_n}\right)^k - \left(\frac{\bar{z}_n}{\rho^2}\right)^k\right] \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\Phi(w) = N(\rho, Z) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_k w^k + \bar{\Omega}_k \bar{w}^k) = N(\rho, Z) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_k w^k + \bar{\Omega}_k \rho^{2k} \frac{1}{w^k})$$

Or
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{w^k}{(w-z)^2}\, dw = k\, z^{k-1} \qquad \text{si } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{1}{w^k} \frac{dw}{(w-z)^2} = 0 \qquad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

Alors
$$\frac{Q'_\rho}{Q_\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, \Omega_k\, z^{k-1} \quad \text{il en résulte que}$$

$$\frac{f'_\rho(z)}{f_\rho(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2k\, \Omega_k + U_{k,\rho})\, z^{k-1} = \sum_{k=1} k\, \alpha_k\, z^{k-1} \qquad \text{d'où } 1.1.8.$$

Il résulte alors des propriétés 1.1.6. à 1.1.8. :

1.1.9. $\rho' > \rho$ alors $f_{\rho'}$ est le prolongement analytique de f_ρ à $D_{\rho'}$

En effet, soit $F(z) = \dfrac{f_{\rho'}(z)}{f_\rho(z)}$. F est holomorphe sans zéro dans D_ρ d'après 1.1.6., donc $\mathrm{Log}\,|F|$ est holomorphe dans D_ρ

pour $0 \leqslant r < \rho$, $c_k(r, F) = c_k(r, f_{\rho'}) - c_k(r, f_\rho) = 0$ d'après 1.1.8.

donc $|F| = 1$ dans D_ρ, donc F est constante dans D_ρ or $F(0) = 1$ d'après 1.1.7. donc $F \equiv 1$ dans D_ρ.

On peut donc définir f par $f(z) = f_\rho(z)$ pour $|z| < \rho$

Il est immédiat que f est entière, $f(0) = 1$, $Z(f) = Z$ et $c_k(r, f) = c_k(r, f_\rho) = c_k(r, Z, \alpha)$ en prenant $\rho > r$.

Enfin l'unicité se démontre de la même manière que 1.1.9.

1.2. Théorème : étant donné Z, pour que Z soit la suite des zéros d'une fonction f entière de λ-type fini, il faut et il suffit que Z soit λ admissible.

Preuve : a) $Z = Z(f)$, $f \in \Lambda_E \Rightarrow \left\{c_k(r, f)\right\}$ est λ-admissible d'après III.2.5. et il en résulte que Z est λ-admissible d'après III.1.5.

b) Z λ-admissible $\Rightarrow \exists\, c_k(r, Z, \alpha)$ λ-admissible d'après III.1.5. d'après 1.1., $\exists f$ entière telle que $Z = Z(f)$, $c_k(r, f) = c_k(r, Z, \alpha)$ mais d'après III.2.5., $f \in \Lambda_E$.

1.3. Remarque : le théorème 1.2. est une généralisation d'un théorème de Lindelöff correspondant au cas $\lambda(r) = r^\rho$.

Rappelons que :

$$\lambda(r) = r^\rho,\ \rho \notin \mathbb{N} \quad Z \ \lambda\text{-admissible} \Leftrightarrow n(r, Z) \leqslant A\, r^\rho$$

$$\lambda(r) = r^\rho, \rho \in \mathbb{N} \quad Z \ \lambda\text{-admissible} \Leftrightarrow \begin{cases} n(r, Z) \leqslant A\, r^\rho \\ \left| \displaystyle\sum_{|z_n| \leqslant \rho} \left(\frac{1}{z_n}\right)^\rho \right| \leqslant M \end{cases}$$

1.4. Théorème : pour que Z soit la suite des zéros d'une fonction méromorphe de λ-type fini il faut et il suffit que Z soit de λ-densité finie.

Preuve : a) $Z = Z(f)$, $f \in \Lambda \Rightarrow N(r, \frac{1}{f}) \leqslant T(r, f) \leqslant A\, \lambda(Br)$

b) soit Z de λ-densité finie, on fait une construction analogue à celle du théorème 1.1.

Construisons d'abord la suite des pôles $W = \{w_n\}$:

$w_n = z_n + \varepsilon_n$ tel que $|w_n| = |z_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\varepsilon_n}{z_n}\right| \leq \lambda(0)$ et $W \cap Z = \emptyset$

Prenons $\gamma_k = -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{z_n}\right)^k - \left(\frac{1}{w_n}\right)^k\right]$ $k \in N^*$ puis $c_0(r) = N(r,Z) - N(r,W) = 0$

$$c_k(r, Z, W, \gamma) = \frac{1}{2} \gamma_k r^k + \frac{1}{2} r^k \left[S(r, k, Z) - S(r, k, W)\right] - \frac{1}{2}\left[S'(r, k, Z) - S'(r,k,W)\right]$$

$c_{-k} = \overline{c_k}$ $k \in N^*$

Prouvons que les $c_k(r, Z, W, \gamma)$ satisfont à $|c_k(r, Z, W, \gamma)| \leq A\,\lambda(Br)$

$n(r, Z) = n(r, W) \Rightarrow W$ est de λ-densité finie et d'après III.1.2. :

$$S'(r, k, Z) \leq \frac{1}{k} A\,\lambda(Br) \quad \text{et} \quad S'(r, k, W) \leq \frac{1}{k} A\,\lambda(Br)$$

Considérons :

$$I = \frac{r^k}{2} \left|\gamma_k + S(r, k, Z) - S(r, k, W)\right| = \frac{r^k}{2k} \left|\sum_{|z_n| > r} \left[\left(\frac{1}{z_n}\right)^k - \left(\frac{1}{w_n}\right)^k\right]\right|$$

$$\leq \frac{r^k}{2k} \sum_{|z_n| > r} \left|\frac{w_n^k - z_n^k}{(w_n z_n)^k}\right|$$

$$I \leq \frac{r^k}{2k} \sum_{|z_n| > r} \frac{k|\varepsilon_n||z_n|^{k-1}}{|z_n|^{2k}} \leq \frac{1}{2} \sum_{|z_n| > r} \left|\frac{\varepsilon_n}{z_n}\right| \leq \lambda(0) \leq \lambda(r)$$

d'où il résulte que $|c_k(r, Z, W, \gamma)| \leq A\,\lambda(Br)$ alors d'après la première partie de la démonstration du théorème III.2.4.

$$|c_k(r, Z, W, \gamma)| \leq \frac{A\,\lambda(Br)}{|k| + 1} \Rightarrow \sum_{k \in Z} |c_k|^2 < +\infty.$$

On peut alors faire une construction analogue à celle du théorème 1.1.

$$B_\rho(z, z_n) = \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \frac{\rho(z_n - z)}{\rho^2 - \overline{z_n}\, z} \;;\; B_\rho(z) = \prod_{|z_n| \leq \rho} B_\rho(z, z_n)$$

$$C_\rho(z) = \prod_{|w_n| \leq \rho} B_\rho(z, w_n)$$

$$\Phi(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(\rho)\, e^{ik\rho} \qquad Q_\rho(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = \rho} \frac{w+z}{w-z}\, \Phi(w)\, \frac{dw}{w}\right]$$

$$f_\rho(z) = \frac{B_\rho(z)}{C_\rho(z)} \; Q_\rho(z)$$

Comme dans le théorème 1.1., on montre que les f_ρ sont méromorphes dans $D_\rho = \left\{ z \mid |z| < \rho \right\}$, dont les zéros sont $Z \cap D_\rho$ et les pôles $W \cap D_\rho$ et dont les coefficients de Fourier sont $c_k(r, f_\rho) = c_k(r, Z, W, \gamma)$ pour $r < \rho$; enfin f_ρ et $f_{\rho'}$ coïncident dans $D_\rho \cap D_{\rho'}$.

On définit alors f par $f(z) = f_\rho(z)$ pour $\rho > |z|$.

f est méromorphe, de pôles W, de zéros Z, et $c_k(r, f) = c_k(r, Z, W, \gamma)$ il en résulte que $|c_k(r, f)| \leqslant A\,\lambda(Br)$ donc $f \in \Lambda$ d'après III.2.4.

2. Propriétés de Λ et Λ_E.

2.1. Définition : λ régulière $\Leftrightarrow \forall\, Z$ de λ-densité finie, $\exists\, Z' \supset Z$, Z' λ-admissible.

2.2. Théorème : $\Lambda = \Lambda_E / \Lambda_E \Leftrightarrow \lambda$-régulière.

Preuve :

a) $\Leftarrow$

$f \in \Lambda \Rightarrow Z(f)$ est de λ-densité finie $\Rightarrow \exists\, Z' \supset Z$, Z' λ-admissible alors $\exists\, g \in \Lambda_E$ tel que $Z(g) = Z'$ d'après 1.2.

Considérons $h = \frac{g}{f}$; $h \in \Lambda$ car $g, f \in \Lambda$ et h est entière car $Z(g) \supset Z(f)$ alors $h \in \Lambda_E$. D'où $f = \frac{g}{h}$ et $g, h \in \Lambda_E$ q.e.d.

b) $\Rightarrow$

Soit Z de λ-densité finie, alors $\exists\, f \in \Lambda$ tel que $Z(f) = Z$ d'après 1.4. mais $\Lambda = \frac{\Lambda_E}{\Lambda_E} \Rightarrow f = \frac{g}{h}$ où $g, h \in \Lambda_E$ alors $Z(g) \supset Z(f)$ et $Z(g)$ est λ-admissible car $g \in \Lambda_E$.

2.3. Problème : toute fonction de croissance est-elle régulière ?

Cette question est restée sans réponse complète jusqu'ici. On peut voir qu'il suffit de répondre dans le cas où $x \longrightarrow \lambda(e^x)$ est convexe. On a cependant deux résultats partiels qui suffisent pour les cas classiques :

2.4. Propriété : $\frac{\lambda(2r)}{\lambda(r)} = O(1) \Rightarrow \lambda$ est régulière.

2.5. Propriété : $u : x \to \operatorname{Log}[\lambda(e^x)]$ convexe $\Rightarrow \lambda$ est régulière.

Nous démontrerons ces propriétés en appendice du présent chapitre.

2.6. Théorème : Λ_E est relativement algèbriquement clos dans l'anneau des fonctions entières.

Preuve : il s'agit de montrer que :

si $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \Lambda_E$ et si f est entière et solution de $f_0 + f_1 f + \ldots + f_n f^n = 0$ alors $f \in \Lambda_E$

On montre facilement par récurrence :

$$T(r, \sum_{j=0}^{n} h_j h^j) \leqslant n\, T(r, h) + \sum_{j=0}^{n} T(r, h_j) + n \operatorname{Log} 2$$

alors

$$n\, T(r, f) = T(r, f^n) = T(r, -\frac{1}{f_n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j f^j) \leqslant (n-1)\, T(r, f) + \sum_{j=0}^{n} T(r, f_j) + O(1)$$

d'où le résultat.

3. Produit d'Hadamard généralisé.

Théorème : Soit $f \in \Lambda_E$, f non constante.

Alors il existe :

1) une fonction h de Λ_E, h non identiquement nulle

2) un ensemble $\mathfrak{R}$ non borné de nombres positifs et un ensemble $\left\{f_R\right\}_{R \in \mathfrak{R}} \subset \Lambda_E$

3) deux constantes A et B strictement positives

tels que 4) $Z(f_R) = Z(fh) \cap D_R$ où $D_R = \left\{z \,\middle|\, |z| < R\right\}$

5) $\lim\limits_{\substack{R \to +\infty \\ R \in \mathfrak{R}}} \frac{fh}{f_R} = 1$ uniformément sur tout compact.

6) $\operatorname{Log} M(r, F) \leqslant A\, \lambda(Br)$ pour $F = f, h, f_R, \frac{fh}{f_R}$

De plus :

7) si $\forall k \in \mathbb{N}$ $\liminf\limits_{r \to +\infty} [\lambda(r)\, r^{-k}] = +\infty$, on peut prendre $h \equiv 1$

8) si $u : x \to \mathrm{Log}[\lambda(e^x)]$ est convexe, onpeut prendre

$$h = 1 \text{ et } \mathcal{R} = \left\{R \mid R \geq R_o > 0\right\}$$

<u>Preuve</u> : on peut supposer $f(0) = 1$; $f \in A_E \Rightarrow T(r, f) \leq A_o \lambda(B_o r)$

d'après III.2.5. $|c_k(r, f)| \leq \dfrac{A_1 \lambda(B_1 r)}{|k| + 1}$ où A_1 et B_1 ne dépendent que de A_o et B_o,

d'après III.1.5., $Z=Z(f)$ est λ-admissible avec des constantes qui ne dépendent que de A_1 et B_1 donc de A_o et B_o.

d'après III.2.5. et II.4.3., $\exists\, Z' \supset Z$ et $\left\{Z'(R)\right\}_{R \in \mathcal{R}}$ ensemble complet de restes de Z' où Z' et $Z'(R)$ sont λ-admissibles avec des constantes ne dépendant que de A_o et B_o.

d'après III.1.5., $\exists\, A_2, B_2$ ne dépendant que de A_o et B_o, $\exists\, c_k(r, Z', \alpha)$ et $c_k[r, Z'(R), \alpha(R)]$ suites de coefficients de Fourier tels que :

$$|c_k(r, Z', \alpha)| \leq \frac{A_2 \lambda(B_2 r)}{|k| + 1},$$

$$|c_k[r, Z'(R), \alpha(R)]| \leq \frac{A_2 \lambda(B_2 r)}{|k| + 1}$$

il n'est pas difficile d'ajouter

9) $$\lim_{\substack{R \to \infty \\ R \in \mathcal{R}}} c_k[r, Z'(R), \alpha(R)] = 0$$

d'après 1.1., $\exists\, f^*$ entière telle que $f^*(0) = 1$, $Z(f^*) = Z'$, $c_k(r, f^*) = c_k(r, Z', \alpha)$,

$\exists\, g_R$ entière telle que $g_R(0) = 1$, $Z(g_R) = Z'(R)$,

$c_k(r, g_R) = c_k[r, Z'(R), \alpha(R)]$ définissons enfin $f_R = \dfrac{f^*}{g_R}$, $h = \dfrac{f^*}{f}$ d'où $f^* = fh$ et $g_R = \dfrac{fh}{f_R}$.

Les points 1), 2) et 4) sont alors évidents ; grâce à 9), on peut montrer 5).

Reste à montrer 3) et 6) il est clair que :

$$|c_k(r, h)| = |c_k(r, f^*) - c_k(r, f)| \leq \frac{A_1 \lambda(B_1 r)}{|k| + 1} + \frac{A_2 \lambda(B_2 r)}{|k| + 1}$$

$$|c_k(r, f_R)| = |c_k(r, f^*) - c_k(r, g_R)| \leq \frac{2 A_2 \lambda(B_2 r)}{|k| + 1}$$

il en résulte que :

$\exists\, A', B'$ ne dépendent que de A_o et B_o tels que :

$$|c_k(r, F)| \leqslant \frac{A'\ \lambda(B'r)}{|k| + 1} \qquad \text{pour } F = f, h, f_R, g_R$$

alors pour F holomorphe :

$\operatorname{Log} M(r, F) \leqslant 3\, T(2r, F)$ et

$$T(r,F) = m(r, F) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\operatorname{Log}|F(r\, e^{i\theta})||\, d\theta \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\operatorname{Log}|F(r\, e^{i\theta})||^2\, d\theta\right)^{1/2}$$

mais

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\operatorname{Log}|F(r\, e^{i\theta})||^2\, d\theta\right)^{1/2} = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(r, F)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant A'\,\lambda(B'r) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{|k|+1}\right)^2\right]^{1/2}$$

d'où

$$\operatorname{Log} M(r, F) \leqslant 3\, A' \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{|k|+1}\right)^2\right]^{1/2} \lambda(2B'r)$$

Les points 7) et 8) résultent immédiatement des cas spéciaux du théorème II.4.3. car si $Z' = Z$, on peut prendre $f^* = f$.

4. Appendice.

4.1. Démonstration de la propriété 2.4. :

$$\frac{\lambda(2r)}{\lambda(r)} \leqslant M \Rightarrow \lambda \text{ régulière}$$

Lemme : $\exists\, A, B > 0$, $\exists\, p_o \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, p \geqslant p_o$, $\displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{p+1}}\, dt \leqslant \frac{A\ \lambda(Br)}{p\ r^p}$

en effet $\dfrac{\lambda(2r)}{\lambda(r)} \leqslant M \Rightarrow \forall\, q \in \mathbb{N}\quad \lambda(2^q r) \leqslant M^q\, \lambda(r)$

alors :
$$\int_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)\, dt}{t^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\lambda(t)\, dt}{t^{p+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(2^{k+1} r)}{p\ r^p (2^k)^p} \leqslant \frac{M\lambda(r)}{p\ r^p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{M}{2^p}\right)^k$$

Définissons $Z' = \bigcup\limits_{k=0}^{p_o} \omega^{-k} Z$ où $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{p_o+1}$ alors $n(r, Z') \leqslant (p_o + 1)\, n(r, Z)$

$S(r, r', k, Z') = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, p_o$ car si $\omega^k \neq 1$,

$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{p_o k} = 0$.

si $k > p_o$, $$|S(r, r', k, Z')| \leqslant \frac{1}{k} \int_r^{r'} \frac{dn(t, Z')}{t^k}$$

on intégre par parties et on utilise le lemme.

4.2. Démonstration de la propriété 2.5. :

$$x \longrightarrow \operatorname{Log}[\lambda(e^x)] \quad \text{convexe} \Rightarrow \lambda \quad \text{régulière}$$

Supposons que $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\lambda(r)}{r^p} = +\infty$ (sinon λ serait de croissance lente $\dfrac{\lambda(2r)}{\lambda(r)} \leqslant M$), d'après II.4.3. Lemme 1 page 21.

Nous référant toujours à ce lemme, on peut affirmer :

$$r \longrightarrow \frac{\lambda(r)}{r^p} \quad \text{passe par un minimum } R_p > 0 \text{ et l'on a}$$

$R_1 < R_2 < \dots R_p < R_{p+1}$ $\lim\limits_{p \to +\infty} R_p = +\infty$; ajoutons $R_0 = 0$.

Construisons maintenant Z'. Pour chaque $z_n \in Z$, effectuons la construction suivante :

$z_n \in Z$, $\exists\, p$ unique tel que $R_{p-1} < |z_n| \leqslant R_p$; soient alors $m = 2^p$ et $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{m}$. Nous mettons alors dans Z' les nombres z_n, $\dfrac{1}{\omega} z_n$, $\dfrac{1}{\omega^k} z_n, \dots, \dfrac{1}{\omega^{m-1}} z_n$.

Montrons que Z' est de λ-densité finie. Soit $r > 0$, prenons $R_q \geqslant r > R_{q-1}$ alors $n(r, Z') \leqslant 2^q\, n(r, Z) \Rightarrow N(r, Z') \leqslant 2^q\, N(r, Z) \leqslant 2^q\, \lambda(r)$ mais $r > R_{q-1} \Rightarrow \dfrac{\lambda(r)}{r^{q-1}} \leqslant \dfrac{\lambda(2r)}{(2r)^{q-1}} \Rightarrow 2^q\, \lambda(r) \leqslant 2\, \lambda(2r)$.

Montrons que Z' est λ-équilibrée.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k = k_1 \cdot 2^q$ k_1 impair

$$S(r, r', k, Z') = \frac{1}{k} \sum_{r < |z_n| \leqslant r'} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k \left[1 + \omega_n^k + \dots + \omega_n^{k(m-1)}\right] \quad \text{où } \omega_n \text{ et } m = m(n)$$

sont définis comme il est dit plus haut.

Si $r \geqslant R_q$, les z_n qui interviennent sont tels que $|z_n| > R_q$ donc les ω_n sont de la forme $\omega_n = \exp \dfrac{2i\pi}{m}$ avec $m = 2^p$ et $p > q$ d'où

$$\omega_n^k = \exp \frac{2i\pi\, k}{m} = \exp \frac{2i\pi\, k_1}{2^{p-q}} \neq 1 \quad \text{d'où} \quad 1 + \omega_n^k + \dots + \omega_n^{k(m-1)} = 0.$$

Donc si $r \geqslant R_q$, $S(r, r', k, Z') = 0$ et si $r < R_q$ $S(r, r', k, Z') = S(r, r'', k, Z')$ avec $r'' = \operatorname{Min}(r', R_q)$.

Puis on utilise :

$$|S(r, r'', k, Z')| \leqslant \frac{1}{k} \int_r^{r''} \frac{dn(t, Z')}{t^k}\, dt$$

et on évalue l'intégrale comme dans II.2.2.

B ESPACES DUALS de FONCTIONS ENTIERES.

Dans toute cette partie on notera :

- C_0 l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{C}$, complexes, continues et tendant vers zéro à l'infini.

- C_0^+ le sous ensemble de C_0 des fonctions réelles non négatives.

Un sous ensemble K de C_0^+ sera dit <u>ensemble de poids</u> s'il a les propriétés suivantes :

K_1 : pour toute constante $c > 0$ et toute fonction $k \in K$, la fonction ck appartient à K

si k est dans K et k' dans C_0^+ avec $0 \leq k' \leq k$, alors k' est dans K

si k et k' sont dans K, alors $\mathrm{Sup}(k, k')$ est dans K.

K_2 : K contient les fonctions de C_0^+ à support compact.

K_3 : toute fonction k de K admet une majorante radiale k' appartenant à K.

K_4 : si $t \to k(t)$ appartient à K, pour tout $\varepsilon > 0$, $t \to k(\varepsilon t)$ appartient à K.

K_5 : si k appartient à K, pour tout a réel $t \to k(t) \exp at$ appartient à C_0.

On pourra parfois remplacer la condition K_5 par la condition suivante, plus faible :

K_5' : si k appartient à K, quelque soit l'entier n la fonction $t \to t^n k(t)$ appartient à C_0.

Nous allons étudier l'espace $E(K)$ des fonctions entières f telles que $f.K$ appartienne à C_0 pour toute k de K.

B I ESPACES $E(K)$, $M(K)$; $E(K^*)$.

Soit $E(K) = \left\{ f \;;\; f \text{ entière, } k \in K \; fk \in C_0 \right\}$

On munit $E(K)$ de la topologie localement convexe définie par les semi-normes :

$$\|f\|_k = \sup_{t \in \mathbb{C}} |f(t)\, k(t)|$$

1. Propriétés de $E(K)$.

Si f est entière, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, posons :

$$M(r, f) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)| \;, \quad B(r, f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\, r^n$$

On peut alors énoncer :

1.1. $f \in E(K) \Leftrightarrow \forall k \in K \quad \sup_{0<r} M(r, f)\, k(r) < +\infty$

1.2. $f \in E(K) \Leftrightarrow \forall k \in K \quad \sup_{0<r} B(r, f)\, k(r) < +\infty$

1.3. $B \subset E(K)$, B borné $\Leftrightarrow \exists\, U(r)$ telle que $\forall k \in K$, $\forall f \in B$

$$M(r, f) \leq U(r) \quad \text{et} \quad \sup_{0<r} U(r)\, k(r) < +\infty$$

1.4. $B \subset E(K)$, B borné $\Leftrightarrow \exists\, g \in E(K)$, $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n z^n$ telle que

$$\forall f \in B, \; f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \quad |a_n| \leq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow \exists\, h \in E(K)$, $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n z^n$ telle que

$$\forall f \in B, \; f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

$$2^n |a_n| \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en particulier, $\forall f \in B \quad M(r, f) \leq M(r, g)$ et $M(r, f) \leq M(r, h)$

1.5. Sur les parties bornées de $E(K)$, la topologie relative est identique à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et est donc métrisable

1.6. Les parties bornées de $E(K)$ sont relativement compactes.

1.7. Sur les parties bornées de $E(K)$, la topologie induite est identique à la topologie de la convergence ponctuelle.

1.8. La série de Taylor d'une fonction de $E(K)$ converge dans $E(K)$ vers cette fonction.

1.9. $E(K)$ est complet.

Ces propriétés découlent de la définition de K et des propriétés des fonctions entières.

Nous ne démontrerons que les propriétés 1.5. et 1.8..

Démonstration de 1.5.

La topologie induite est plus finie que la topologie de la convergence compacte. Il suffit donc de montrer que si $\{f_\alpha\}$ est une suite généralisée de fonctions d'un ensemble borné B de E(K) convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f de B, alors, pour toute k de K :

$$\operatorname{Lim}_{\alpha} \|f_\alpha - f\|_k = 0$$

par hypothèse, $\forall R > 0$, $\operatorname{Lim}_{\alpha}\left[\sup_{|z|\leqslant R} |f_\alpha(z) - f(z)|\right] = 0$

$$\|f_\alpha - f\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f_\alpha(z) - f(z)|\ k(z)$$

$$\|f - f\|_k \leqslant \sup_{|z|\leqslant R} |f_\alpha(z) - f(z)|\ k(z) + \sup_{|z|\leqslant R} f_\alpha(z)\ k(z) + \sup_{z\ R} f(z)\ k(z)$$

Nous pouvons supposer k radiale d'après K_3 et considérer, d'après 1.4., une fonctio h de E(K) telle que pour toute fonction f de B on ait :

$$M(r, f) \leqslant M(r, h)$$

Alors :

$$\sup_{|z|>R} |f_\alpha(z)|\ k(z) + \sup_{|z|>R} |f(z)|\ k(z) \leqslant 2 \sup_{r>R} M(r, h)\ k(r) = \varepsilon_R$$

d'où il résulte que :

$$\operatorname{Lim}_{\alpha}\operatorname{Sup}\|f - f\|_k \leqslant \varepsilon_R$$

Or $\operatorname{Lim}_{R\to+\infty} \varepsilon_R = 0$, d'où le résultat.

Démonstration de 1.8.

Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, posons $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$; lorsque N tend vers l infini, $S_N(z)$ tend vers f(z) en chaque point. D'après 1.7. il suffit de montrer que les sommes partielles S_N forment un ensemble borné de E(K).

$$M(r, S_N) \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n (2r)^n\, 2^{-n} \leqslant M(2r, f) \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \leqslant 2\, M(2r, f).$$

Or $M(2r, f)\, k(r) < +\infty$ pour toute k de K. Les sommes partielles forment donc un ensemble borné, d'après 1.3. .

2. Le dual de $E(K)$

2.1. Définitions et notations.

2.1.1. M désigne l'ensemble des mesures bornées sur $\mathbb{C}$.

2.1.2. $M(K)$ désigne le sous-ensemble de M défini par :

$$M(K) = \left\{ k\mu \; ; \; k \in K, \mu \in M \right\}$$

2.1.3. $M^{\wedge}(K)$ désigne l'espace des transformées de Fourier $\hat{\nu}$ des mesures ν de $M(K)$.

2.1.4. $M'(K)$ désigne l'espace quotient : $M'(K) = M(K) / N$ où

$$N = \left\{ \nu \in M(K) \; ; \; f \in E(K) \int f \, d\nu = 0 \right\}$$

2.1.5. $C(K)$ désigne l'espace des fonctions f continues complexes telles que fk appartienne à C_0 pour toute $\underset{\sim}{k}$ de K.

2.2. Propriétés.

2.2.1. $E(K)$ est un sous espace fermé de $C(K)$

2.2.2. $M(K)$ est le dual de $C(K)$

2.2.3. $M'(K)$ est le dual de $E(K)$

2.2.4. Si est dans $M^{\wedge}(K)$ $\nu = F(z) = \int \exp(zt)\, d\nu(t)$ alors F est entière et $F^{(n)}(z) = \int t^n \exp(zt)\, d\nu(t)$.

2.2.5. $M^{\wedge}(K)$ représente aussi le dual de $E(K)$.

Preuves : Les quatres premières propriétés sojt évidentes, démontrons 2.2.5.

Il suffit de montrer que $\mu - \nu \in N \Leftrightarrow \hat{\mu} = \hat{\nu}$

D'après K_5, les exponentielles sont dans $E(K)$, donc si $(\mu - \nu) \in N$, $\hat{\mu} = \hat{\nu}$

Réciproquement, si $\nu = 0$, c'est-à-dire $F(z) = \int \exp(zt)\, d\nu(t) \equiv 0$ on a aussi pour tout entier n, $F^{(n)}(z) \equiv 0$. En particulier, pour tout entier n,

$$F^{(n)}(0) = \int t^n \, d\nu(t) = 0.$$

Mais d'après 1.8., les polynômes sont denses dans $E(K)$, d'où le résultat.

Il résulte d'ailleurs de cette démonstration la propriété :

2.2.6. Les exponentielles sont denses dans $E(K)$.

2.2.7. Si f appartient à $E(K)$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, si F appartient à $M^*(K)$, $F = \overset{*}{\nu}$, $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$, et si on note D l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dz}$, alors :

$$<f, F> = \int f(t)\, d\nu(t) = [F(D).f]\,(0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\, f^{(n)}(0),$$

la série étant absolument convergente.

<u>Preuve</u> : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et la série converge dans $E(K)$ d'après 1.8. alors :

$$<f, F> = \int f(t)\, d\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n <z^n, F> = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F^{(n)}(0)$$

$$<f, F> = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n n! = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} b_n f^{(n)}(0)$$

de plus d'après 1.2., $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \exp(i\theta_n) z^n$ est dans $E(K)$ pour toute suite $\{\theta_n\}$, dès que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y est. Alors pour un choix convenable de la suite $\{\theta_n\}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n f^{(n)}(0)\, e^{i\theta_n}$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n f^{(n)}(0)$ converge absolument.

2.2.8. Si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est entière, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $F \in M^*(K)$

(ii) $\exists\, k \in K$, k radiale, telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n!\, |b_n| \leq \operatorname{Sup}_{0<t} [t^n k(t)]$

(iii) $\exists\, k \in K$, $\exists\, A, B$ constantes positives telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n!\, |b_n| \leq A\, B^n \operatorname{Sup}_{0<t} [t^n k(t)]$$

<u>Preuve</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) supposons $F \in M^*(K)$, $F = \overset{*}{\nu}$ où $\nu = k\mu$ $k \in K$, $\mu \in M$; on peut supposer k radiale et $\|\mu\| \leq 1$

$$|n!\, b_n| = |F^{(n)}(0)| = \left|\int t^n\, d\nu(t)\right| \qquad \text{d'où}$$

$$|n!\, b_n| \leq \int |t|^n k(t)\, |d\mu(t)| \leq \operatorname{Sup}_{0<t} [t^n k(t)]$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) de manière évidente

(iii) ⇒ (i) Dans (iii) on peut supposer k radiale et $B = 1$. Posons $k_1(t) = 2\,k(\frac{t}{2A})$; alors $n!\,|b_n| \leq 2^{n+1} \sup_{0<t} [t^n k_1(t)]$. Soit t_n un point où $\sup_{0<t} [t^n k_1(t)]$ est atteint. Soit μ_n la mesure portée par $\Gamma_n = \{t \,;\, |t| = t_n\}$ et $\mu_n = \frac{n!\,b_n}{2i\pi} \frac{dt}{t^{n+1}\,k_1(t)}$.

Posons $\mu = \sum_{n\in N}^{\infty} \mu_n$ et $\nu = k_1\,\mu$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,b_n}{t_n^n\,k_1(t_n)} \leq \sum \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, μ est une mesure bornée et ν appartient à $M^*(K)$.

Alors $\overset{*}{\nu}{}^{(n)}(0) = \int t^n\,d\nu(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!\,b_p}{2\pi i} \int_{\Gamma_p} \frac{dt}{t^{p+1-n}} = n!\,b_n$ donc $\overset{*}{\nu} = F$ et (i) est démontré.

2.2.9. $M^*(K)$ est une algèbre.

<u>Preuve</u> : comme $F_1\,F_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2 - \frac{1}{2}F_1^2 - \frac{1}{2}F_2^2$, il suffit de prouver que F^2 appartient à $M^*(K)$ dès que F y appartient. On peut même, d'après la propriété précédente, se limiter aux fonctions de la forme $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,z^n$ avec $b_n = \frac{1}{n!} \sup_{0<t} [t^n\,k(t)]$, où k est dans K.

Alors $F^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,z^n$ avec $d_n = \sum_{j=0}^{n} b_j\,b_{n-j}$ et il nous suffit de montrer que $n!\,d_n = 0\,[A^n \sup t^n\,k_1(t)]$ pour une certaine fonction k_1 de K. Nous allons montrer en fait que $d_n = 0(3^n\,b_n)$.

Définissons $h(a) = \sup_{0<t} [a \log t + \log k(t)] = \operatorname{Log} [\sup_{0<t} t^a\,k(t)]$ $a \geq 0$; h est convexe et la fonction $a \to h(a) + h(n-a)$ est convexe sur le segment $0 \leq a \leq n$. Donc $\sup_{0\leq a\leq n} [h(a) + h(n-a)] = h(0) + h(n)$.

D'autre part, $2^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$ d'où $\sup_{0\leq j\leq n} \frac{1}{j!\,(n-j)!} \leq \frac{2^n}{n!}$

Mais $b_j = \frac{1}{j!} \exp h(j)$, on a donc :

$$\sup_{0\leq j\leq n} b_j\,b_{n-j} = \sup_{0\leq j\leq n} \frac{1}{j!\,(n-j)!} \exp [h(j) + h(n-j)] \leq \frac{2^n}{n!} \exp [h(0) + h(n)]$$

Soit encore :

$$\sup_{0\leq j\leq n} b_j\,b_{n-j} \leq 2^n\,b_n \exp[h(0)] = 0(2^n\,b_n)$$

alors :

$$d_n = 0(n\,2^n\,b_n) = 0(3^n\,b_n)$$

3. Rappels sur la dualité dans les espaces vectoriels topologiques.

3.1. Soit E un espace vectoriel topologique (e.v.t.) sur $\mathbb{C}$.
Une partie A de E est :

3.1.1. équilibrée si elle est invariante par multiplication par un nombre complexe de module au plus égal à un.

3.1.2. absorbante $\Leftrightarrow \forall x \in E \; \exists \varepsilon$ tel que $\forall \delta \; 0 < \delta < \varepsilon \; \delta x \in E$.

3.1.3. bornée si tout voisinage de zéro contient un homothétique de A.

3.2. Le dual de E est l'espace des formes linéaires continues sur E.

3.3. Deux espaces vectoriels E et F sont mis en dualité s'il existe une forme bilinéaire B vérifiant les deux conditions :

(i) Pour tout x de E non nul, il existe y de F tel que $B(x,y) \neq 0$.

(ii) Pour tout y de F non nul, il existe x de F tel que $B(x,y) \neq 0$

On note alors $B(x,y) = \langle x, y\rangle$.

Exemple un e.v.t. localement convexe et son dual sont deux espaces en dualité.

3.4. Par cette dualité, on peut définir plusieurs topologies sur E et F.

3.4.1. la topologie faible $w(E, F)$ sur E est la topologie de la convergence ponctuelle sur F ; c'est la moins fine rendant continues toutes les applications $x \to \langle x, y\rangle$.

3.4.2. la topologie forte $s(E, F)$ sur E est la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de F.

3.4.3. la topologie de Mackey $m(E, F)$ sur E est la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes, équilibrées et $w(F, E)$-compactes de F.

On peut définir les topologies analogues sur F, toutes localement convexes.

3.5. Si E et F sont mis en dualité, on dit qu'une topologie τ localement convexe est admissible (relativement à la dualité entre E et F) si F s'identifie au dual topologique de l'espace localement convexe obtenu en munissant E de la topologie τ.

La topologie $w(E, F)$ est la topologie admissible la plus forte.

La topologie $m(E, F)$ est la topologie admissible la plus fine.

Toutes les topologies admissibles sur E ont les mêmes parties bornées et les mêmes parties convexes fermées.

3.6. Si B est une partie non vide de E, on définit le polaire B^{o} de B :

$$B^{o} = \left\{ y \in F \,;\, |\langle x, y\rangle| \leqslant 1 \ \forall x \in B \right\}$$

B^{o} est convexe, équilibrée, $w(F, E)$-fermé et contiant 0.

Si B est une partie de E convexe, équilibrée, $w(E, F)$-fermée et contenant 0, alors $B^{oo} = B$.

3.7. On note E^* le dual d'un e.v.t. localement convexe E. Une partie B de E^* est équicontinue si et seulement si B^{o} est un voisinage de zéro dans E.

3.8. On appelle tonneau T toute partie convexe équilibrée absorbante fermée de E.

$T = T^{oo}$ et T^{o} est borné pour toutes les topologies admissibles sur E^*.

Si tout tonneau est un voisinage de zéro, E est dit <u>tonnelé</u>

- E est tonnelé si et seulement si la topologie initiale, la topologie $m(E, E^*)$, la topologie $s(E, E^*)$ sont identiques.
- E est tonnelé si et seulement si toute partie de E^* qui est $w(E^*, E)$-bornée est équicontinue.

Si E est complet et métrisable, E est tonnelé.

3.9. E est dit de Montel s'il est tonnelé et si toute partie bornée est relativement compacte.

Si E est de Montel, alors E^* dans la topologie $s(E^*, E)$ est aussi un espace de Montel.

Notons E^*_w (resp. E^*_s) le dual de E muni de la topologie faible (resp. forte).

On a toujours $(E^*_w)^* = E$

E est dit réflexif si $(E^*_s)^* = E$

Tout espace de Montel est réfléxif.

4. Etude de certains ensembles de $M^*(K)$.

4.1. Définition : pour toute k dans K, définissons :

$$B_k = \left\{ F \ ; \ \exists \mu \in M, \ ||\mu|| \leq 1, \ F(z) = \int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu(t) \right\}$$

4.2. Proposition. B_k est une partie de $M^*(K)$ convexe, équilibrée, faiblement fermée, faiblement équicontinue et compacte pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{C}$. Son polaire B_k^o est :

$$B_k^o = \left\{ f \ ; \ f \in E(K), \ ||f||_k \leq 1 \right\}$$

Preuve : B_k est évidemment une partie de $M^*(K)$ convexe, équilibrée. Si f est dans $E(K)$ et $F = (k\mu)^*$ est dans B_k, on a

$$|\langle f, F \rangle| = \left| \int f(t)\ k(t)\ d\mu(t) \right| \leq ||f||_k$$

donc si $||f||_k \leq 1$, f appartient à B_k^o.

Réciproquement, considérons δ_a mesure de Dirac au point a. Alors pour la fonction F correspondante, on a :

$\langle f, F \rangle = f(a)\ k(a)$. Donc si f appartient à B_k^o on a $||f||_k \leq 1$.

Nous avons donc bien caractérisé le polaire de B_k qui est manifestement un voisinage de zéro dans $E(K)$, donc B_k est équicontinu.

Sur B_k, la topologie faible étant plus fine que la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{C}$, pour prouver que B_k est fermé pour la première et compact pour la seconde, il suffit de prouver que B_k est compact pour la seconde.

Or z étant fixé, l'application $\mu \mapsto \int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu(t)$ est continue si on met sur M la topologie faible de dual de C_o. Mais l'ensemble $\left\{ F(z) \ ; \ F \in B_k \right\}$ est l'image par cette application de la boule unité qui est faiblement compacte dans M. Pour tout z c'est donc un ensemble compact et B_k est compact pour la topologie de la convergence ponctuelle.

4.3. Proposition . Si B est un ensemble de fonctions entières, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $B \subset M^*(K)$ et B équicontinu

(ii) $\exists\, k \in K$ telle que $B \subset B_k$

(iii) $\exists\, G \in M^*(K)$ $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. telle que $\forall F \in B$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ et $|c_n| \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Preuve</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) B étant équicontinu, B^o est un voisinage de zéro, il existe donc k dans K telle que $B^o \supseteq \left\{ f \;;\; \|f\|_k \leqslant 1 \right\} = B_k^o$.

Alors $B \subseteq B^{oo} \subseteq B_k^{oo} = B_k$ car B_k est faiblement fermé, convexe, équilibré et contient zéro.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) il n'est pas restrictif de supposer k radiale telle que $B \subset B_k$ Si $F \in B \subset B_k$, $\exists\, \mu$, $\|\mu\| \leqslant 1$ telle que $F(z) = \int \exp(zt)\, k(t)\, d\mu(t)$ mais alors

$$|c_n| = \left|\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right| = \frac{1}{n!}\left|\int t^n\, k(t)\, d\mu(t)\right| \leqslant \frac{1}{n!} \operatorname*{Sup}_{0\leqslant t} t^n\, k(t)$$

Posons alors $b_n = \frac{1}{n!} \operatorname*{Sup}_{0\leqslant t} t^n\, k(t)$, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Alors G a la propriété voulue et appartient à $M^*(K)$ d'après 2.2.8. .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ appartient à $M^*(K)$, il existe d'après 2.2.8. une fonction k de K, radiale, telle que $b_n = \frac{1}{n!} \operatorname*{Sup}_{0\leqslant t} t^n\, k(t)$. Posons $k'(t) = 2\, k(\frac{t}{2})$, k' appartient à K.

Si $F \in B$ et $f \in E(K)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\|f\|_{k'} \leqslant 1$ alors

$$|\langle f, F\rangle| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n\, b_n\right| \leqslant \sum |a_n|\, n!\, b_n$$

mais

$$n!\, |a_n|\, b_n \leqslant \left[\operatorname*{Inf}_{0\leqslant r} \frac{M(r, f)}{r^n}\right] \times \operatorname*{Sup}_{0\leqslant t} t^n\, k(t) = 2^{-(n+1)} \left[\operatorname*{Inf}_{r>0} \frac{M(r, f)}{r^n}\right]\left[\operatorname*{Sup}_{t>0} t^n\, k'(t)\right]$$

d'où

$$n!\, |a_n| b_n \leqslant 2^{-(n+1)} \operatorname*{Sup}_{t>0} \left[\frac{M(t, f)}{t^n}\, t^n\, k'(t)\right] \leqslant 2^{-(n+1)} \|f\|_{k'} \leqslant 2^{-(n+1)}$$

donc $|\langle f, F\rangle| \leqslant 1$ et $f \in B^o$. Alors B^o contient un voisinage de l'origine dans $E(K)$ et B est équicontinu.

5. <u>Introduction de</u> K^*.

5.1. <u>Définition</u>. Etant donné K classe de poids, on défini K^* "classe duale" par :

$$K^* = \left\{ k^* \;;\; k^* \in C^+ \;\; \forall k \in K,\; \operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\exp(t\omega)\, k(t)\, k^*(\omega)| < +\infty \right\}$$

5.2. <u>Propriétés</u> :

5.2.1. K^* est une classe de poids se vérifie aisément.

5.2.2. $K^* = K^{***}$

car $K \subset K^{**}$ d'où $K^* \subset K^{***}$ et aussi $K^* \supset K^{***}$
car $K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_1^* \supset K_2^*$.

5.3. <u>Définition</u>. K est dit parfait si $K = K^{**}$.

5.4. <u>Propriété</u>. $E(K^{**}) \subset E(K)$ d'où $M^*(K) \subset M^*(K^{**})$.

5.5. <u>Proposition</u>. Si $k^* \in K^*$, alors $\sqrt{k^*} \in K^*$

<u>Preuve</u> : $k \in K \subset C_0 \Rightarrow \exists A$ tel que $k^2(t) \leq A\, k(t) \Rightarrow k^2(\frac{t}{2}) \in K$

si $k^* \in K^*$, $\sup\limits_{t,\omega} |\exp(t\omega)\, k(t) \sqrt{k^*(\omega)}| = \sup\limits_{t,\omega} \left[\exp(2t\omega)\, k^2(t)\, k^*(\omega)\right]^{1/2} = \sup\limits_{t,\omega} \exp t\omega\, k^2(\frac{t}{2})\, k^*(\omega)$.

5.6. <u>Proposition</u>. $E(K^*)$ est une algèbre topologique.

<u>Preuve</u> : si $k^* \in K^*$, posons $k_1^* = \sqrt{k^*}$

alors si $f, g \in E(K^*)$, $||fg||_{k^*} = \sup\limits_{z} |f(z)\, g(z)\, k^*(z)| \leq ||f||_{k^*} \cdot ||g||_{k^*}$,
d'où le résultat.

5.7. <u>Proposition</u>. $M^*(K)$ est dense dans $E(K^*)$
$M^*(K^*)$ est dense dans $E(K)$

<u>Preuve</u> : Si $F \in M^*(K)$, $\exists\, k \in K$ et $\exists\, \mu \in M$ telles que

$$F(z) = \int \exp(tz)\, k(t)\, d\mu(t)$$

alors

$$||F||_{k^*} = \sup_z \int \exp(tz)\, k(t)\, k^*(z)\, d\mu(t) \leq ||\mu|| \sup_{z,t} |\exp(tz)\, k(t)\, k^*(z)| < +\infty$$

il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour prouver que $\lim\limits_{|z| \longrightarrow +\infty} F(z)\, k^*(z) = 0$ donc $M^*(K) \subset E(K^*)$.

De plus la fonction F correspondant à la mesure de Dirac au point a appartient à $M^*(K)$: $F(z) = \exp(az)\, k(a)$. Donc $M^*(K)$ contient les exponentielles qui sont elles-mêmes denses dans $E(K^*)$.

B II COMPARAISON des TOPOLOGIES.

1. Topologie relative et topologies admissibles sur $M^*(K)$.

1.1. Théorème. La topologie forte s et la topologie m de Mackey sur $M^*(K)$ sont identiques et plus fines que la topologie i induite par $E(K^*)$.

Preuve : D'après I.1.6., les parties bornées sont relativement compactes, donc les topologies m et s coïncident.

Pour montrer que la topologie s est plus fine que la topologie i, montrons que pour chaque k^* de K^* il existe un ensemble $B = B_{k^*}$ borné dans $E(K)$ tel que $B^o \subset N_{k^*} = \left\{F \in M^*(K) \ ; \ \|F\|_{k^*} \leq 1\right\}$.

Prenons $B = \left\{ f \ ; \ f(z) = \int \exp(zt) \ k^*(t) \ d\mu(t) \quad \|\mu\| \leq 1 \right\}$. On prouve comme dans I.5.7. que B est contenu dans $E(K)$, ce qui montre en même temps que B est borné dans $E(K)$ car $f \in B \Rightarrow \|f\|_k \leq \sup\limits_{t,z} |\exp(zt) \ k(t) \ k^*(z)|$.

Si $f \in B$ et $F \in M^*(K)$, $F(z) = \int \exp(zt) \ k(t) \ d\nu(t)$, alors :

$$\langle f, F\rangle = \int f(t) \ k(t) \ d\nu(t) = \int k(t) \left(\int \exp(zt) \ k^*(z) \ d\mu(z)\right) d\nu(t).$$

L'intégrale double converge absolument, on peut utiliser Fubini

$$\langle f, F\rangle = \int F(z) \ k^*(z) \ d\mu(z)$$

Alors :

$$\sup_{f\in B} |\langle f, F\rangle| = \sup_{\|\mu\|\leq 1} \left| \int F(z) \ k^*(z) \ d\mu(z)\right| = \|F\|_{k^*} \quad \text{d'où } B^o \subset N_{k^*}$$

1.2. Définitions.

1.2.1. Une fonction λ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est K-admissible si et seulement si : $\forall \ k \in K$, $\sup\limits_{r\geq 0} \lambda(r) \ k(r) < +\infty$.

1.2.2. Un ensemble de poids K est dit hypo-convexe si :
quelle que soit λ K-admissible telle que $x \mapsto \lambda(e^x)$ est convexe, il existe λ_1 $\lambda_1 \geq \lambda$, λ_1 K-admissible et $r \mapsto \operatorname{Log} \lambda_1(r)$ convexe.

Démontrons d'abord trois lemmes qui nous servirons dans la démonstration du théorème 1.6.

1.3. Lemme. Si λ est une fonction non décroissante, convexe sur $[0, +\infty[$ à dérivée première continue non bornée, il existe une fonction g non décroissante convexe sur $[0, +\infty[$ et une constante $A > 0$ telles que :

(i) $\sup\limits_{r>0} [n \operatorname{Log} r - g(r)] \geqslant n \operatorname{Log} n - n - A + \inf\limits_{r>0} [\lambda(r) - n \operatorname{Log} r] \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $rt - g(r) - \lambda(t) \leqslant 0$ pour tout $r, t \geqslant A$.

Nous pouvons supposer $\lambda(1) = 0$, $\lambda'(1) = 1$.

Soit $g(r) = \int_1^r (\lambda')^{-1}(t)\, dt$ où $(\lambda')^{-1}$ est la fonction réciproque de λ' (g est la fonction complémentaire de λ au sens d'Young, au choix de l'origine près

Alors (ii) n'est rien d'autre que l'inégalité d'Young avec $A = (\lambda')^{-1}(1) = 1$ ici.

Pour montrer (i), calculons le second membre de l'inégalité :

$\inf\limits_{r>0} [\lambda(r) - n \operatorname{Log} r]$ est atteint pour r vérifiant $\lambda'(r) - \frac{n}{r} = 0$.

Soit $u(t)$ la fonction inverse de $t\,\lambda'(t)$ qui est continue strictement croissante.

$$B = \inf_{r>0} [\lambda(r) - n \operatorname{Log} r] = \lambda[u(n)] - n \operatorname{Log}[u(n)] = \int_1^{u(n)} \lambda'(t)\, dt - n \operatorname{Log}[u(n)]$$

En intégrant par parties en faisant le changement $t = u(s)$ on obtient

$$B = -\int_1^n \operatorname{Log} u(s)\, ds$$

mais $\quad n \operatorname{Log} n - n = \int_1^n \operatorname{Log} s\, ds - 1$

donc le second r de (ii) vaut :

$$\int_1^n \operatorname{Log} \frac{s}{u(s)}\, ds - A - 1.$$

Un calcul analogue montre que le premier membre vaut $\int_1^n \operatorname{Log} v(s)\, ds$ où $v(s)$ est la fonction réciproque de $t \to t\, g'(t) = t\, (\lambda')^{-1}(t)$.

Montrons que $\frac{s}{u(s)} = \sigma(s) = v(s)$, c'est-à-dire $(\sigma \circ v^{-1})(t) = t$

$$(\sigma \circ v^{-1})(t) = \frac{t(\lambda')^{-1}(t)}{u[t(\lambda')^{-1}(t)]} = \frac{s\,\lambda'(s)}{u[s\,\lambda'(s)]} \quad \text{si} \quad t = \lambda'(s)$$

alors $\quad (\sigma \circ v^{-1})(t) = \frac{s\,\lambda'(s)}{s} = \lambda'(s) = t$ $\qquad$ q.e.d.

1.4. <u>Lemme.</u> Si λ est une fonction convexe non décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\sup_{r>0} k(r)\exp[\lambda(r)] < +\infty$ pour toute k dans K, alors il existe k^* dans K^* telle que :

$$B = \left\{f \ ; \ f \text{ entière}, \ \operatorname{Log} M(r,f) \leq \lambda(r)\right\} \subset B_{k^*} = \left\{f \ ; \ f(z) = \int \exp(zt)\, k^*(t)\, d\mu(t), \ \|\mu\| \leq 1\right\}$$

<u>Preuve</u> : on peut supposer que λ' existe et est continue car entre λ et $\lambda + 1$ il existe une fonction λ_1 possédant toutes ces propriétés.

D'après I.4.3., il suffit de montrer :

$$\exists\ G \in M^*(K^*),\ G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ telle que } \forall f \in B,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

on ait $|a_n| \leq b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

ⓐ <u>Si λ' n'est pas bornée</u> : il existe la fonction g du lemme précédent, définissons k^* par $k^*(r) = \exp\left[A - g(\frac{r}{e})\right]$ et $k^*(z) = k^*(|z|)$. Il est clair que k^* est dans C_0^+ ; montrons que k^* est dans K^*.

Soit k dans K, k radiale

$$S = \sup_{t,z} |\exp(tz)\, k(t)\, k^*(z)| = \sup_{t,z} |\exp(tz)\, k(\tfrac{t}{e})\, k^*(ez)| =$$
$$\sup_{r,t\geq 0} |\exp[rt - \lambda(t)]\, k^*(er)\, k(\tfrac{t}{e})\, \exp\lambda(t)|$$

$$S \leq [\exp A]\left\{\sup_{r,t\geq 0} |\exp[rt - \lambda(t) - g(r)]|\right\}\left\{\sup_{t\geq 0}\left[k(\tfrac{t}{e})\exp\lambda(t)\right]\right\}$$
$$S \leq [\exp A]^2 \left\{\sup_{t\geq 0}\left[k(\tfrac{t}{e})\exp\lambda(t)\right]\right\} < +\infty.$$

Posons $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ où $b_n = \frac{1}{n!}\sup_{t\geq 0} t^n k^*(t)$

$G \in M^*(K^*)$ d'après I.2.2.8.

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\operatorname{Log} M(r, f) \leq \lambda(r)$ alors :

$$|a_0| \leq \exp(\lambda(0)) \leq \exp[A - g(0)] = k^*(0) \leq \sup_{t\geq 0} k^*(t) = b_0$$

De plus :

$$|a_n| \leq \inf_{r\geq 0} \frac{M(r,f)}{r^n} \leq \inf_{r\geq 0} \exp[\lambda(r) - n\operatorname{Log} r] = \exp \inf_{r\geq 0} [\lambda(r) - n \operatorname{Log} r]$$

Mais d'après le lemme précédent :

$$|a_n| \leqslant n^{-n} e^n \exp [A + \sup_{r>0}(n \operatorname{Log} r - g(r))] \leqslant n^{-n} e^n \sup_{r\geqslant 0} [r^n k^*(er)] = n^{-n} \sup_{t>0} t^n k^*(r)$$

et comme $n^n \geqslant n!$ on a bien $|a_n| \leqslant b_n$.

ⓑ <u>Si λ^* est bornée</u> : alors il existe deux constantes positives C et D telles que $\lambda(r) \leqslant C r + D$.

Soit k^* une fonction de C_0^+ à support compact telle que $k^*(t) \geqslant \exp D$ pour $|t| \leqslant e.C$ et prenons $b_n = \frac{1}{n!} \sup_{t\geqslant 0} t^n k^*(t)$, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Alors $k^* \in K^*$ et $G \in M^*(K^*)$.

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ avec $\operatorname{Log} M(r, f) \leqslant \lambda(r)$.

Alors :

$$|a_n| \leqslant \inf_{r>0} \frac{\exp \lambda(r)}{r^n} \leqslant \inf_{r>0} \frac{\exp (Cr + D)}{r^n} \leqslant \frac{\exp(Cr + D)}{r^n} \quad \forall \ r > 0$$

Prenons $Cr = n$, d'où

$$|a_n| \leqslant \exp D. \left(\frac{Ce}{n}\right)^n \leqslant \exp D \frac{(Ce)^n}{n!} \leqslant \frac{(Ce)^n k^*(Ce)}{n!} \leqslant b_n$$

1.5. <u>Lemme</u>. Si $\lambda(r)$ est une fonction non décroissante convexe de $\operatorname{Log} r$ sur $]0, +\infty[$, il existe une fonction f entière telle que :

$$\frac{1}{r} \exp \lambda(r) \leqslant M(r, f) \leqslant 2 \exp \lambda(2r) \qquad \text{pour tout} \quad r \geqslant 1$$

<u>Preuve</u> : Nous pouvons supposer $\lambda(1) = 0$.

Alors $\lambda(r) = \int_1^r \frac{u(t)}{t}\, dt$ où u est positive non décroissante.

Définissons $A_n = \inf_{r\geqslant 0} \frac{\exp(\lambda(r))}{r^n}$ et $f(z) = \sum A_n z^n$.

D'une part $A_n r^n \leqslant \exp \lambda(r) \Rightarrow M(r, f) \leqslant \sum A_n (2r)^n 2^{-n} \leqslant 2 \exp [\lambda(2r)]$

D'autre part, pour tout $r \geqslant 1$, il existe x tel que :

$$\frac{\exp \lambda(r)}{r^x} = \inf_{t>0} \frac{\exp \lambda(t)}{t^x}$$

Si $n = [x]$ (partie entière de x), $r\ M(r, f) \geqslant A_n r^{n+1} \geqslant A_n r^x$

La fonction $x \longrightarrow \inf_{t>0} \frac{\exp\lambda(t)}{t^x}$ étant décroissante, on a de plus :

$$A_n r^x \geqslant r^x \inf_{t\geqslant 0} \frac{\exp \lambda(r)}{t^n} \geqslant r^x \inf_{t>0} \frac{\exp \lambda(t)}{t^x} = \exp \lambda(r)$$

d'où $r\, M(r, f) \geqslant \exp \lambda(r)$.

1.6. Théorème. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Sur $M^*(K)$ la topologie induite par $E(K^*)$ est identique à la topologie de Mackey et à la topologie forte de dual de $E(K)$.

(ii) Sur $M^*(K)$ la topologie induite est admissible.

(iii) $E(K) = M^*(K^*)$.

(iv) K est hypoconvexe.

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : car la topologie de Mackey est admissible

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : nous savons que $M^*(K^*)$ est dense dans $E(K)$ d'après I.5.7.

montrons que $E(K) \subset M^*(K^*)$ dans ce cas. Soit f dans $E(K)$; définissons la forme linéaire L_f sur $M^*(K)$ par :

$$L_f(F) = \langle f, F \rangle = \int f(t)\, k(t)\, d\mu(t)$$

si
$$F(z) = \int \exp(zt)\, k(t)\, d\mu(t).$$

Par hypothèse cette forme linéaire est continue pour la topologie induite. $M^*(K)$ étant dense dans $E(K^*)$, L_f a une extension unique continue sur $E(K^*)$; alors il existe ν^* dans $M(K^*)$ telle que $L_f(F) = \int F(t)\, d\nu^*(t)$ pour toute F de $E(K^*)$.

Prenons en particulier $F(t) = \exp zt$.

Alors $\int \exp(zt)\, d\nu^*(t) = \langle f, \exp zt \rangle = f(z)$ et $f \in M^*(K^*)$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit $\lambda(r)$ une fonction convexe de $\operatorname{Log} r$ telle que :

$$\sup_{r>0} [k(r) \exp \lambda(r)] < +\infty \quad \text{pour toute } k \text{ dans } K.$$

Il n'est pas restrictif de supposer que λ est non décroissante.

D'après le lemme 1.5., il existe f entière telle que :

$$\frac{1}{r} \exp \lambda(r) \leqslant M(r, f) \leqslant 2 \exp [\lambda(r)] \qquad \text{pour } r \geqslant 1$$

D'après I.1.1. et les hypothèses faites sur λ, $f \in E(K)$.

Considérons $g(z) = z\, f(z)$. Comme $E(K) = M^*(K^*)$ et que $M^*(K^*)$ est une algèbre, $g \in M^*(K^*)$ donc il existe $k^* \in K^*$ et $\mu \in M$, $||\mu|| \leqslant 1$ telle que :

$g(z) = \int \exp zt\ k^*(t)\ d\mu(t)$, et on peut supposer k^* radiale.

Prenons alors $\lambda_1(r) = \text{Log}\left\{\sup\limits_{t>0} [k^*(t) \exp(rt)]\right\}$

Il est clair que λ_1 est convexe.

De plus λ_1 majore λ car

$$\exp \lambda(r) \leqslant r\, M(r, f) = M(r, g) \leqslant \sup_{t\geqslant 0} [k^*(t) \exp(rt)] = \exp \lambda_1(r)$$

enfin :

$$\sup_{r>0} k(r) \exp[\lambda_1(r)] \leqslant \sup_{t,z} |\exp(tz)\ k(z)\ k^*(t)| < +\infty \text{ pour tout } k \text{ de } K.$$

Donc k est hypoconvexe.

(iv) $\Rightarrow$ (i) D'après 1.1., la topologie forte et la topologie de Mackey coïncident et sont plus fines que la topologie induite. Il suffit donc de montrer que si B est une partie bornée de $E(K)$ alors B^o est un voisinage de zéro dans $M^*(K)$ pour la topologie induite par $E(K^*)$.

Si B est borné dans $E(K)$, il existe d'après I.1.4. une fonction g de $E(K)$ telle que $M(r, f) \leqslant M(r, g)$ pour toute f de B.

Prenons $\lambda(r) = \text{Log}\, M(r, g)$. Alors $\lambda(r)$ est une fonction convexe de $\text{Log}\, r$ d'après le théorème des trois cercles d'Hadamard.

K étant hypoconvexe, il existe $\lambda_1 \geqslant \lambda$, convexe et telle que pour toute k de K $\sup\limits_r k(r) \exp \lambda_1(r)$ soit fini.

Alors d'après 1.4., il existe k^* dans K^* telle que $B \subset B_{k^*}$ où

$$B_{k^*} = \left\{f\ ;\ f(z) = \int \exp(zt)\ k^*(t)\ d\mu(t),\ ||\mu|| \leqslant 1\right\}$$

Donc $B^o \supset B^o_{k^*} = \left\{F\ ;\ F \in M^*(K),\ |\langle f, F\rangle| \leqslant 1 \quad \forall f \in B_{k^*}\right\}$

Mais si, f appartient à B_{k^*}, $f(z) = \int \exp(zt)\ k^*(t)\ d\mu(t)$ avec $||\mu|| \leqslant 1$.

Alors $\langle f, F\rangle = \int F(t)\ k^*(t)\ d\mu(t)$ en utilisant le théorème de Fubini.

Il en résulte que :

$$\sup_{f\in B_{k^*}} |\langle f, F\rangle| = \sup_{||\mu||\leqslant 1} \left|\int F(t)\ k^*(t)\ d\mu(t)\right| = ||F||_{k^*}$$

Il en résulte que si $||F||_{k^*} \leqslant 1$, alors $F \in B^o_{k^*}$, donc $B^o_{k^*}$ contient un voisinage de l'origine et le théorème est démontré.

2. <u>Conditions suffisantes pour que $E(K)$ soit tonnelé</u>.

Cette question se pose naturellement dans de nombreux exemples. On ne connait pas d'exemple où $E(K)$ n'est pas tonnelé.

Examinons d'abord le cas où K est hypoconvexe.

2.1. <u>Théorème.</u> Si K est hypoconvexe, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E(K)$ est tonnelé
(ii) $M^*(K)$ est un espace de Montel pour la topologie induite par $E(K^*)$
(iii) $M^*(K) = E(K^*)$

<u>Preuve</u> :

(i) ⇒ (ii) $E(K)$ est tonnelé donc, d'après I.1.6., $E(K)$ est de Montel; alors son dual $M^*(K)$ est aussi un espace de Montel pour la topologie forte qui, d'après 1.6., coïncide avec la topologie induite par $E(K^*)$ puisque K est hypoconvexe.

(ii) ⇒ (iii) d'après I.5.7. $M^*(K)$ est dense dans $E(K^*)$.

Soit f de $E(K^*)$; f est limite dans $E(K^*)$ des sommes partielles de sa série de Taylor d'après I.1.8. Ces sommes partielles sont dans $M^*(K)$ et forment un ensemble borné dans $E(K^*)$, donc borné dans $M^*(K)$ pour la topologie induite. Mais $M^*(K)$ étant un espace de Montel pour cette topologie, cet ensemble est relativement compact.

On peut donc extraire une sous suite convergeant dans $M^*(K)$ vers une fonction g de $M^*(K)$. Mais, bien entendu, comme la suite convergeait ponctuellement vers f, on a $f = g \in M^*(K)$. Donc f appartient à $M^*(K)$ et $E(K^*) = M^*(K)$.

(iii) ⇒ (i) Soit N un tonneau de $E(K)$; alors N^o est borné dans $M^*(K) = E(K^*)$ pour toutes les topologies admissibles, en particulier pour la topologie de $E(K^*)$ puisque K est hypoconvexe (cf. 1.6.).

D'après I.1.4., il existe une fonction G de $E(K^*) = M^*(K)$ $G_{(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ telle que pour toute fonction f de N^o, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ on ait $|b_n| \leq B_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

N^o est donc équicontinue d'après 1.4.3. et $N^{oo} = N$ est un voisinage de zéro dans $E(K)$, donc $E(K)$ est tonnelé.

2.2. Remarque. Ehrenpreis a étudié des espaces de fonctions entières en introduisant la notion d'espace analytique uniforme. Dans le langage d'Ehrenpreis, le théorème précédent dit que si $E(K)$ est tonnelé et K hypoconvexe alors $E(K)$ est analytique uniforme.

2.3. Définition. K a une base dénombrable s'il existe une suite $\left\{k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de K telles que :

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ k_n \leq k_{n+1}$
(ii) $\forall\, k \in K,\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $k = O(k_n)$

2.4. Définition. K est déterminé par une suite, s'il existe une suite $\left\{\varphi_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives, continues, non décroissantes sur $[0, +\infty[$ telles que :

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$
(ii) $K = \left\{k \,;\, k \in C_o^+,\ \sup_{z\in\mathbb{C}} [k(z) \exp \varphi_n(|z|)] < +\infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}\right\}$

2.5. Théorème. Si K est à base dénombrable, $E(K)$ est métrisable et tonnelé.

Preuve : si $\left\{k_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la base de K, le système dénombrable de semi-normes $\left\{\|\ \|_{k_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ définit la même topologie sur $E(K)$ que la famille de semi-normes $\left\{\|\ \|_k\right\}_{k\in K}$. $E(K)$ est donc métrisable ; comme il est complet, il est tonnelé.

2.6. Théorème. Si K est déterminé par une suite; $E(K)$ est tonnelé.

Pour cela nous avons besoin du lemme:

Lemme : Si K est déterminé par une suite, alors :

(i) $E(K)$ est réunion dénombrable d'ensembles bornés.
(ii) Pour toute suite $\left\{b_n\right\}$ telle que $\sum n!\, |a_n|\, |b_n| < +\infty$ dès que

$\sum a_n z^n$ appartient à $E(K)$, il existe k dans K telle que :

$$n! \, |b_n| \leqslant \sup_{t>0} t^n k(t)$$

<u>Preuve</u> : posons $\psi_n = \exp \varphi_n$ où $\{\varphi_n\}$ est la suite qui détermine K. Montrons que pour toute fonction f de $E(K)$ il existe n tel que

$$M(r, f) \leqslant n^2 \psi_n(r)$$

Sinon, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et telle que :

$$M(r_n, f) > n^2 \psi_n(r_n).$$

Considérons alors k radiale, définie sur $[0, +\infty[$ par les conditions $k(r_n) = \frac{1}{n\,\psi_n(r_n)}$ et linéaire par morceau.

Alors k appartient à K.

Mais alors $M(r_n, f)\, k(r_n) > n$ et f ne peut appartenir à $E(K)$.

Il en résulte que : $E(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ où $B_n = \{f \,;\, f$ entière $M(r, f) \leqslant n\, \psi_n(r)\}$ mais B_n est borné d'après I.1.3. et (i) est démontré.

Soit maintenant $\{b_n\}$ une suite vérifiant l'hypothèse de (ii), nous allons construire une fonction k de K telle que : $n!\, b_n \leqslant \sup_{t>0} t^n k(t)$.

Il n'est pas restrictif de supposer les φ_n continûment dérivables.

D'après K_5, K ne peut contenir les fonctions $r \to r^{-n}$; k étant déterminé par la suite φ_m, il en résulte que $\lim_{r\to+\infty} \frac{\psi_m(r)}{r^n} = +\infty$ pour tout m et tout n.

Posons $\lambda_{n,m} = \sup_{r>0} \frac{r^n}{\lambda_m(r)}$.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{\lambda_{n,m}} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\psi_m(2r)}{2^n} = 2\, \psi_m(2r)$ et la fonction $f_m(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{\lambda_{n,m}}$ appartient à $E(K)$ car

$$\sup_{r\geqslant 0} M(r, f_m)\, k(r) \leqslant 2 \sup_{r\geqslant 0} \psi_m(2r)\, k(r) < +\infty.$$

Donc par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! \frac{|b_n|}{\lambda_{n,m}} < +\infty$

En particulier, il existe un entier N_m tel que $\lambda_{n,m} \geqslant n!\, |b_n|$ dès que $n \geqslant N_m$.

Soit $\rho_{n,m}$ le plus petit nombre non négatif où $\sup\limits_{r\geq 0} \frac{r^n}{\psi_m(r)}$ est atteint ; alors $\rho_{n,m} \leqslant \rho_{n+1,m}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{n,m} = +\infty$.

Soit $\{n_m\}_{m\in N}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que

$n_m > N_{m+1}$ et $\rho_{n_m,m} > 2\rho_{n_{m-1},m-1} > 1$.

Définissons alors $r_m = \rho_{n_m,m}$ si $m \geqslant 1$ et $r_o = 0$. La suite $\{r_m\}$ est strictement croissante et tend vers l'infini.

Posons $k_1(r) = \frac{1}{\psi_m(r)}$ si $r_{m-1} < r \leqslant r_m$

k_1 est une fonction décroissante, tendant vers zéro à l'infini et continue sauf aux points r_m.

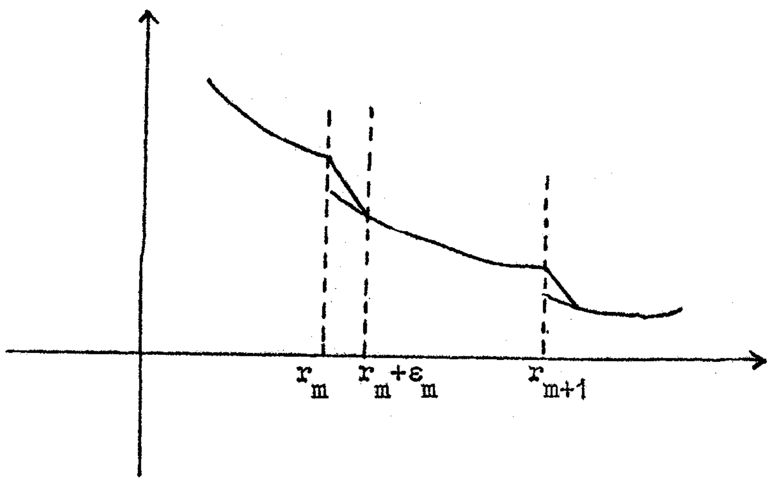
Si $n_{m-1} < n \leqslant n_m$ alors $\rho_{n,m} \leqslant \rho_{n_m,m} = r_m$ et $n > n_{m-1} \geqslant N_m$ alors

$$\sup_{r>0} r^n k_1(r) \geqslant (\rho_{n,m})^n k_1(\rho_{n,m}) \geqslant (\rho_{n,m})^n \frac{1}{\psi_m(\rho_{n,m})} = \lambda_{n,m} \geqslant n! \, |b_n| \; .$$

Nous allons rendre k_1 continue : considérons une suite ε_m tendant vers zéro assez rapidement pour que le segment joignant

$$k_1(r_m) = \frac{1}{\psi_m(r_m)} \quad \text{et} \quad k_1(r_m + \varepsilon_m) = \frac{1}{\psi_{m+1}(r_m + \varepsilon_m)}$$

soit situé tout entier au-dessus de k_1



Définissons enfin la fonction k :

$$k(z) = k(|z|) \quad ; \quad k(r) = k_1(r) \text{ si } r_m + \varepsilon_m \leqslant r \leqslant r_{m+1}$$
$$k(r) \text{ linéaire si } r_m \leqslant r \leqslant r_m + \varepsilon_m$$

Alors k est continue, tend vers zéro à l'infini, et

$$\operatorname*{Sup}_z |k(z)\, \psi_m(|z|)| < +\infty$$

De plus $k_1(r) \leqslant k(r)$, d'où $\operatorname*{Sup}_r r^n\, k(r) \geqslant n!\, |b_n|$.

Revenons alors au théorème 2.6. :

Si N est un tonneau, N^o est borné dans $M^*(K)$ pour toutes les topologies admissibles en particulier pour la topologie de Mackey qui coïncide avec la topologie forte. Alors pour tout ensemble B borné dans $E(K)$ il existe A telle que $|\langle f, F\rangle| \leqslant A$ pour toute f dans B et toute F dans N^o.

Soit $b_n = \operatorname*{Sup}_{F \in N^o} \dfrac{|F^{(n)}(0)|}{n!}$.

Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction de $E(K)$ et

$B = \left\{ g \;;\; g(z) = \sum c_n z^n \,,\, |c_n| \leqslant 2^n |a_n| \right\}$. Alors B est borné dans $E(K)$.
Mais $g(z) = 2^n a_n z^n$ appartient à B, donc pour toute F de N^o

$$A \geqslant |\langle g, F\rangle| = |2^n a_n F^{(n)}(0)| \Rightarrow A \geqslant n!\, 2^n\, |a_n| \cdot |b_n|$$

d'où il résulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, |a_n b_n| \leqslant A \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2A.$$

D'après le lemme, il existe k de K telle que $b_n \leqslant \frac{1}{n!} \operatorname*{Sup}_{t>0} t^n\, k(r) = d_n$.

La fonction $G(z) = \sum d_n z^n$ appartient à $M^*(K)$ d'après I.2.2.8. et d'après I.4.3. N^o est équicontinu donc $N^{oo} = N$ est un voisinage de zéro dans $E(K)$.

2.7. <u>Remarque</u> : Il semble que B.A. Taylor vient de démontrer que K parfait $\Rightarrow$ $E(K)$ tonnelé.

C II ALGEBRES d'HADAMARD.

1. Définitions et propriétés.

1.1. Définition : Soit A un e.v.t. localement convexe de fonctions entières, qui est de plus une algèbre pour la multiplication ponctuelle (cette multiplication n'étant pas nécessairement continue).

On dit que A est une algèbre d'Hadamard si on a de plus les propriétés suivantes :

1.1.1. A contient les polynômes.

1.1.2. $f \in A$, $f(z_o) = 0 \Rightarrow \frac{f(z)}{z-z_o} \in A$.

1.1.3. Quelle que soit g non identiquement nulle de A, il existe h dans A et $g_n = P_n e_n$ où P_n est un polynôme et e_n une unité de A telles que $\frac{gh}{g_n} \in A$ et telles que, quelle que soit f dans A, $\frac{fgh}{g_n} \longrightarrow f$ dans A lorsque n tend vers l'infini dans $\mathbb{N}$.

1.2. Définitions.

1.2.1. Soit I un idéal de A, $Z(I)$ désigne l'ensemble des zéros communs, avec leur multiplicité, des fonctions de I.

1.2.2. Z étant une suite, avec multiplicité, de nombres complexes sans autre point d'accumulation éventuel que l'infini, $I(Z)$ désigne l'idéal des fonctions de A qui s'annulent sur Z.

1.2.3. I idéal fixé $\Leftrightarrow$ $I = I[Z(I)]$.

1.2.4. A est saturée $\Leftrightarrow$ tout idéal fermé est fixé.

1.3. Lemme. Soient A une algèbre d'Hadamard, I un idéal de A, a de multiplicité p dans $Z(I)$, f dans I, $f(a) = 0$ avec multiplicité $m > p$, alors $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^j}$ est dans I, pour $j = 1, 2, \dots, m-p$.

Preuve : il est évidemment suffisant de montrer que $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$ est dans I. a ayant la multiplicité p dans $Z(I)$, il existe g dans I telle que

$g(z) = (z-a)^p\, h(z)$ où h est dans A et $h(a) \neq 0$.

Alors $z \to \frac{h(z)\, f(z)}{z-a} = g(z) \frac{f(z)}{(z-a)^{p+1}}$ est dans I car g est dans I et $z \to \frac{f(z)}{(z-a)^{p+1}}$ est dans A car $m \geq p+1$.

$z \to f(z) \frac{h(z)-h(a)}{z-a}$ est dans I car f est dans I et 1.1.2.

Alors $z \to h(a) \frac{f(z)}{z-a} = \frac{h(z)\, f(z)}{z-a} - f(z) \frac{h(z) - h(a)}{z-a}$ est dans I, d'où le résultat car $h(a) \neq 0$.

1.4. Théorème. Toute algèbre d'Hadamard est saturée.

Preuve : Posons $I' = I[Z(I)]$; où I est idéal fermé de A.

Il est clair que $I \subset I'$, montrons $I' \subset I$.

Soient $f \in I'$, $g \in I$, $g \neq 0$ (si $I = \{0\}$ $I' = I$ bien sur). Alors il existe h, $g_n \in A$, $g_n = P_n e_n$ où P_n est un polynôme et e_n une unité de A, telles que $f \frac{gh}{g_n}$ tendvers f dans A lorsque n tend vers l'infini.

Comme I est fermé dans A, il suffit de montrer que pour tout n $f \frac{gh}{g_n}$ est dans I.

$fgh \in I$ car $g \in I$

f et g s'annulent sur $Z(I)$, $\frac{gh}{P_n}$ est entière, donc $\frac{fgh}{P_n}$ est dans I d'après le lemme.

Alors $\frac{fgh}{g_n} = \frac{1}{e_n} \frac{fgh}{P_n}$ est dans I.

2. Conditions suffisantes pour que $E(K)$, $E(K^*)$, $M^*(K)$ soient des algèbres d'Hadamard.

2.1. Théorème. si $E(K)$ est une algèbre, $E(K)$ est une algèbre d'Hadamard.

Preuve : Il est clair que $E(K)$ satisfait à 1.1.1. et 1.1.2., reste 1.1.3.

Soit g dans $E(K)$, g non identiquement nulle.

Prenons $G(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ avec $n!\, a_n = |g^{(n)}(0)|$. G est dans $E(K)$ d'après B.I.1.2. et $G(0) = 2 > 1$

Posons $\lambda(r) = \operatorname{Log} M(r, G) \geq \operatorname{Log} M(r, g)$.

Alors, d'après A.IV.3. qui concerne les produits d'Hadamard généralisés il existe h, g_n, C, D, $g_n = P_n e_n$ où P_n est un polynôme et e_n ne s'annule pas telles que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{gh}{g_n} = 1$ ponctuellement et $\mathrm{Log}\, M(r, H) \leqslant C.\lambda(Dr)$ pour $H = h, g, gh, g_n, \frac{gh}{g_n}$.

Il en résulte que $\mathrm{Log}\, M(r, \frac{fgh}{g_n}) \leqslant \mathrm{Log}\, M(r, f) + C\, \lambda(Dr)$.

Prenons $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant C$; alors $M(r, \frac{fgh}{g_n}) \leqslant M(r, F)$ où $F(z) = f(z)\, G^m(Dz)$.

Comme $E(K)$ est une algèbre, F appartient à $E(K)$. Alors $\left\{\frac{fgh}{g_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $E(K)$ et comme il y a convergence ponctuelle il y a convergence dans $E(K)$ d'après B.I. 1.7..

Il ne reste donc plus qu'à prouver que e_n est une unité dans $E(K)$.

Mais si f est dans $E(K)$ et ne s'annule pas, $M(r, \frac{1}{f}) \leqslant M^3(2r, f)$ alors $M^3(2r, f) = M(r, g)$ où $g(z) = f^3(2z)$.

$E(K)$ étant une algèbre, g est dans $E(K)$ et $\frac{1}{f}$ aussi d'après B.I.1.1..

2.2. <u>Corollaire</u>. $E(K^*)$ est une algèbre d'Hadamard.

<u>Preuve</u> : en effet, d'après B.I.5.6., $E(K^*)$ est une algèbre.

2.3. <u>Théorème</u>. K hypoconvexe, $E(K)$ tonnelé $\Rightarrow M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard dans la topologie faible $w[M^*(K), E(K)]$.

<u>Preuve</u> : d'après B.II.2.1. $M^*(K) = E(K^*)$ et d'après B.II.1.6. la topologie forte de $M^*(K)$ coïncide avec la topologie induite par $E(K^*)$. Il en résulte que $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie forte, donc pour la topologie faible de dual de $E(K)$.

Les deux dernières conditions (2.7. et 2.9.) résultent des lemmes :

2.4. <u>Lemme</u> : Si E_1, E_2 sont des parties équicontinues de $M^*(K)$ alors $E_1 . E_2 = \left\{F_1\, F_2 \,;\, F_1 \in E_1,\ F_2 \in E_2\right\}$ est une partie équicontinue de $M^*(K)$.

<u>Preuve</u> : d'après B.I.4.3. , il existe G_i de $M^*(K)$, $G_i(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} z^n$ telles que pour toute F_i de E_i, $F_i(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} z^n$ on ait $|c_n^{(i)}| \leqslant b_n^{(i)}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

Posons alors $G(z) = G_1(z)\, G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. $M^*(K)$ étant une algèbre, G appartient à $M^*(K)$. Mais il est clair que pour toute F de $E_1 E_2$, $F = F_1 . F_2$, $F(z) = \sum c_n z^n$ on a $|c_n| \leq d_n \ \forall n \in \mathbb{N}$; alors d'après B.I.4.3. , $E_1 E_2$ est une partie équicontinue de $M^*(K)$.

2.5. <u>Lemme</u> : Soit Γ une partie de $\mathbb{C}$ ayant un point d'accumulation à distance finie. Soient $\{G_\alpha\}$ une suite généralisée formant une partie équicontinue de $M^*(K)$, G une fonction entière et supposons que G_α tende vers G sur Γ ; alors G appartient à $M^*(K)$ et G_α tend vers G dans la topologie faible $w[M^*(K), E(K)]$

<u>Preuve</u> : Soit V le sous espace engendré par les fonctions $f_z(t) = \exp(zt)$ pour z dans Γ. Alors d'après Hahn-Banach, il n'est pas difficile de voir que V est dense dans $E(K)$.

Si f est dans V, $\lim\limits_{\alpha} \langle f, G_\alpha \rangle$ existe et il en résulte qu'il existe G_1 dans $M^*(K)$ telle que G_α tend vers G_1 dans la topologie faible. Mais si z est dans Γ, $G_1(z) = \lim \langle \exp zt, G_\alpha(t) \rangle = \lim G_\alpha(z) = G(z)$ et G et G_1 coïncidant sur Γ, coincident partout.

2.6. <u>Lemme</u> : Soient F dans $M^*(K)$ et $B_F = \{ f \ ; \ f \text{ entière}, \ M(r, f) \leq M(r, F) \}$
Si pour toute F de $M^*(K)$ B_F est une partie équicontinue de $M^*(K)$, alors $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie $w[M^*(K), E(K)]$.

<u>Preuve</u>. - $M^*(K)$ contient toujours les polynômes
- si F est dans $M^*(K)$ et $F(a) = 0$, posons $G(z) = \dfrac{F(z)}{f-a}$.
Alors il existe $A > 0$ tel que $M(r, G) \leq A.M(r, F) = M(r, AF)$. Donc $G \in B_{AF} \subset M^*(K)$.

-reste à prouver que $M^*(K)$ satisfait 1.1.3.. La démonstration est à peu près la même qu'en 2.1.

Soit G dans $M^*(K)$, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, posons $g(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$; d'après B.I.2.2.8., g appartient à $M^*(K)$.

Posons $\lambda(r) = \operatorname{Log} M(r, g) \geq \operatorname{Log} M(r, G)$.

Alors d'après A.IV.3., il existe des constantes C, D et des fonctions entières H, G_n telles que $G_n = P_n e_n$ où P_n est un polynôme et e_n ne s'annule pas, $\frac{GH}{G_n}$ tend vers 1 ponctuellement lorsque n tend vers l'infini et $\mathrm{Log}\, M(r, f) \leqslant C\,\lambda(Dr)$ pour $f = H, HG, G, \frac{HG}{G_n}, G_n$. Soit m un entier supérieur ou égal à C, et $g_1(z) = g^m(Dz)$ alors g_1 appartient à $M^*(K)$ et les fonctions $H, HG, G_n \frac{HG}{G_n}$, appartiennent à $B_{g_1} = \left\{ f \ ;\ f \text{ entière}, \ M(r, f) \leqslant M(r, g_1) \right\}$.

Il en résulte que H, HG, G_n, $\frac{HG}{G_n}$ sont toutes dans $M^*(K)$ et que la suite $\frac{HG}{G_n}$ est une partie équicontinue de $M^*(K)$.

Alors pour toute F de $M^*(K)$, la suite $\frac{FGH}{G_n}$ est une partie équicontinue de $M^*(K)$ d'après 2.4..

Mais $\frac{FGH}{G_n}$ converge ponctuellement vers F, alors d'après 2.5., $\frac{FGH}{G_n}$ converge vers F dans la topologie $w[M^*(K), E(K)]$.

Reste à prouver que les e_n sont des unités dans $M^*(K)$, c'est-à-dire que si e_n ne s'annule pas, alors $\frac{1}{e_n}$ est dans $M^*(K)$.

D'abord e_n est dans $M^*(K)$ car G_n est dans $M^*(K)$ et $e_n = \frac{G_n}{P_n}$.

De plus, comme en 2.1., $M(r, \frac{1}{e_n}) \leqslant M^3(2r, e_n) = M(r, F)$ où $F(z) = e_n^3(2z)$; alors $F \in M^*(K)$ et $e_n \in B_F \subset M^*(K)$.

2.7. <u>Théorème</u>. Si K est parfait $(K = K^{**})$, alors $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie $w[M^*(K), E(K)]$.

<u>Preuve</u> : d'après 2.6., il nous suffit de montrer que dans ce cas, si F appartient à $M^*(K)$, B_F est une partie équicontinue de $M^*(K)$.

Soit F dans $M^*(K)$, alors il existe k radiale dans K et une mesure μ, avec $||\mu|| \leqslant 1$ telles que $F(z) = \int \exp(zt) \cdot k(t)\, d\mu(t)$.

Posons $\lambda(r) = \mathrm{Log} \sup\limits_{t>0} k(t) \exp(rt)$.

Alors $M(r, F) \leqslant \exp \lambda(r)$ et λ est convexe, non décroissante.

De plus, si k^* appartient à K^*, on a :

$$\sup_{r\geqslant 0} k^*(r) \exp\lambda(r) \leqslant \sup_{r,t\geqslant 0} k^*(r)\, k(t) \exp(rt) < +\infty.$$

D'après B.II.1.4., il existe k^{**} dans $K^{**} = K$ telle que $B_F \subset B_{k^{**}}$; alors d'après B.I.4.3. B_F est équicontinue car k^{**} est dans K.

2.8. Définition.

K est hyperconvexe si pour toute k dans K il existe une majorante radiale k' de k telle que $r \to -\mathrm{Log}\, k'(r)$ soit convexe non décroissante sur le complémentaire de $(k')^{-1}(0)$.

2.9. Théorème. Si K est hyperconvexe, $M^{*}(K)$ est une algèbre d'Hadamard dans la topologie faible.

Preuve : Il suffit de démontrer que les hypothèses du lemme 2.6. sont satisfaites. Cette propriété résulte des deux lemmes techniques suivants que nous citons sans démonstration.

Lemme 1. Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients de Taylor d'une fonction entière. Supposons que pour tout n dans $\mathbb{N}$, c_n ne soit pas nul, posons $|c_n| = \exp(-g_n)$ et supposons $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Si de plus la fonction g définie par les conditions $g(n) = g_n$ et g linéaire ailleurs est convexe, alors pour chaque n il existe $r_n > 0$ tel que

$$|c_n|\, r_n^n = \sup_{m\in\mathbb{N}} |c_m|\, r_n^m$$

Lemme 2. Soit k dans K, k radiale, k continûment dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que la fonction $t \to -\mathrm{Log}\, k(t)$ soit convexe, non décroissante sur le complémentaire de $k^{-1}(0)$. Soient $c_n = n^{-n} e^n \sup_{t\geq 0} t^n k(t)$ et $B(r) = \sup_n c_n r^n$. Alors pour chaque n dans $\mathbb{N}$ il existe $r_n > 0$ tel que

$$B(r_n) = c_n r_n^n.$$

Démonstration de 2.9. Soit F dans $M^{*}(K)$. Comme K est hyperconvexe, il existe une fonction radiale k de K telle que $-\mathrm{Log}\, k(t)$ soit une fonction convexe non décroissante de r sur le complémentaire de $k^{-1}(0)$ et $F(z) = \int \exp(zt)\, k(t)\, d\mu(t)$ où μ est une mesure telle que $||\mu|| \leq 1$. Il n'est pas restrictif de supposer que k est continûment dérivable.

Soient $c_n = n^{-n} e^n \operatorname{Sup}_{t \geq 0} t^n k(t)$ et $A = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^n e^{-n}}{n!} < +\infty$.

Alors $\left|\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \left| \int t^n k(t) \, d\mu(t) \right| \leq A c_n$.

Définissons $F_1(z) = 2A \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n z^n$ et $B(r) = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}} c_n r^n$.

D'après B.I.2.2.8., F_1 appartient à $M^*(K)$.

Nous avons aussi :

$$M(r, F) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n \leq A \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \leq 2 A B(2r)$$

Soit maintenant f dans B_F, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Soit r_n tel que $B(r_n) = c_n r_n^n$; (r_n existe d'après le lemme 2).

Alors $|a_n| \leq \operatorname{Inf}_{r \geq 0} \left[\frac{M(r, f)}{r^n}\right] \leq \operatorname{Inf}_{r \geq 0} \left[\frac{M(r, F)}{r^n}\right]$

d'où

$$|a_n| \leq 2^n \frac{M(\frac{r_n}{2}, F)}{r_n^n} \leq A \, 2^{n+1} \frac{B(r_n)}{r_n^n} = 2^{n+1} A c_n$$

comme F_1 appartient à $M^*(K)$, il résulte de B.I.4.3. que B_F est une partie équi continue de $M^*(K)$.

C II SYNTHESE SPECTRALE dans $E(K)$.

1. Définitions.

1.1. Soit E un espace de fonctions entières ; une variété dans E est un sous espace fermé, invariant par les translations c'est-à-dire :

$$f \in V \Rightarrow \forall t \in \mathbb{C} \quad f_t \in V \quad \text{où} \quad f_t(z) = f(z+t).$$

1.2. f dans E est moyenne périodique $\Leftrightarrow$ la variété engendrée par f, soit $V(f)$, est distincte de E.

1.3. Une exponentielle monôme est une fonction $z \mapsto z^j \exp(az)$ où $j \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.

1.4. Synthèse spectrale : nous adopterons la formulation suivante : on dit que la synthèse spectrale a lieu dans E si toute variété V est identique à la variété engendrée par les exponentielles monômes qui sont dans V.

2. Conditions suffisantes de synthèse spectrale dans $E(K)$.

2.1. Lemme. Variété de $E(K) \Rightarrow V^{\perp}$ (orthogonal de V) est un idéal faiblement fermé de $M^{\wedge}(K)$.

I idéal de $M^{\wedge}(K) \Rightarrow I^{\perp}$ est une variété de $E(K)$.

Preuve : Si $f \in E(K)$, $F \in M^{\wedge}(K)$ et $w \in \mathbb{C}$, on a :

2.1.1. $\langle f(z+w), F(z)\rangle = \langle f(z), F(z) \exp(zw)\rangle$.

– Soit I un idéal de $M^{\wedge}(K)$, Il résulte de 2.1.1. que $I^{\perp}$ est un sous espace invariant par les translations. I est aussi faiblement fermé dans $E(K)$. Mais toutes les topologies admissibles ont les mêmes ensembles fermés, donc $I^{\perp}$ est fermé dans $E(K)$.

– Si V est une variété, il résulte de 2.1.1. que $V^{\perp}$ est un sous espace faiblement fermé de $M^{\wedge}(K)$ qui est invariant par multiplication par les exponentielles. Reste à voir que $V^{\perp}$ est un idéal. Soient alors F dans $V^{\perp}$ et G dans $M^{\wedge}(K)$.

Supposons que $G(z) = \int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu(t)$ où k est dans K et μ dans M (espace des mesures bornées que l'on munit de la topologie faible de dual de C_o).

Soit alors (μ_α) une suite généralisée de mesures de M telles que $\forall\ \alpha \quad ||\mu_\alpha|| \leqslant ||\mu||$, μ_α est une combinaison linéaire finie de mesures de Dirac et μ_α tend vers μ dans M.

Soit $P_\alpha(z) = \int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu_\alpha(t)$.

Alors chaque P_α est une combinaison linéaire finie d'exponentielles, donc chaque $P_\alpha\ F$ appartient à $V^\perp$.

De plus $\{P_\alpha\} \subset \mathcal{L}_k = \{H\ ;\ H \in M^*(K),\ H(z) = \int \exp(zt)\ k(t)\ d\gamma(t) \quad ||\gamma|| \leqslant ||\mu||\}$
Alors (P_α) est équicontinu d'après B.I.4.3. et il en résulte que $(P_\alpha\ F)$ est équicontinu (cf. I.2.4.).

Enfin, pour tout z dans $\mathbb{C}$, $P_\alpha(z) = \int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu_\alpha(t)$ tend vers $\int \exp(zt)\ k(t)\ d\mu(t) = G(z)$ car $k(t) \exp(zt)$ est dans C_o et (μ_α) tend vers μ vaguement ; il en résulte que pour tout z dans $\mathbb{C}$, $P_\alpha(z)\ F(z)$ tend vers $G(z)F(z)$.

Il en résulte alors de I.2.5. que $P_\alpha\ F$ tend vers GF dans $M^*(K)$ muni de la topologie faible.

Comme $V^\perp$ est faiblement fermé et que $P_\alpha\ F$ est dans $V^\perp$, GF est dans $V^\perp$ et $V^\perp$ est un idéal.

2.2. <u>Lemme</u>. V une variété dans $E(K)$ et $V^\perp = I$.

Alors l'exponentielle monôme $z^j \exp(az)$ est dans V si et seulement si a est dans $Z(I)$ avec une multiplicité $m > j$.

<u>Remarque</u> : $Z(I)$ est parfois appelé le spectre de V.

<u>Preuve</u> : $F \in M^*(K)$, alors.

2.2.1. $\langle z^j \exp(az),\ F(z)\rangle = F^{(j)}(a)$

Supposons d'abord que l'exponentielle monôme $z^j \exp(az)$ soit dans V.

Pour chaque k tel que $0 \leqslant k \leqslant j$, $z^k \exp(az)$ est une combinaison linéaire finie de translatés de $z^j \exp(az)$. Il résulte alors de 2.2.1. que pour toute F

dans I, $F^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, j$. Alors la multiplicité de a dans $Z(I)$ est au moins $j + 1$.

-Supposons maintenant que a a la multiplicité $m > j$, dans $Z(I)$; alors pour toute F dans $I = V^{\perp}$, $\langle z^j \exp(az), F\rangle = 0$ d'après 2.2.1. et l'exponentielle monôme $z^j \exp(az)$ est dans $V^{\perp\perp}$; mais $V^{\perp\perp} = V$.

2.3. __Théorème.__ Si $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard dans la topologie faible alors la synthèse spectrale a lieu d ns $E(K)$.

__Preuve__ : Soit V_1 la variété engendrée par les exponentielles monômes qui sont dans V ; soient $I = V^{\perp}$ et $I_1 = V_1^{\perp}$.

V et V_1 étant des variétés, I et I_1 sont des idéaux faiblement fermés de $M^*(K)$ d'après 2.1..

V et V_1 contiennent les mêmes exponentielles monômes, donc $Z(I) = Z(I_1)$ d'après 2.2..

Mais comme $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard, $I = I[Z(I)] = I[Z(I_1)] = I_1$ d'après I.1.4..

Alors $V_1 = V_1^{\perp\perp} = I_1^{\perp} = I^{\perp} = V^{\perp\perp} = V$. q.e.d.

2.4. __Corollaires__ :

2.4.1. si K est hypoconvexe et $E(K)$ tonnelé , alors la synthèse spectrale a lieu d ns $E(K)$.

2.4.2. si K est hyperconvexe, la synthèse spectrale a lieu dans $E(K)$.

2.4.3. si K est parfait, la synthèse spectrale a lieu dans $E(K)$.

__Preuves__ : car dans chacun de ces cas $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie faible d'après I.2.3. , I.2.7. et I.2.9..

C III SERIES CANONIQUES pour les FONCTIONS MOYENNES-PERIODIQUES.

Nous supposerons dans tout ce chapitre que $M^{\wedge}(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie faible.

1. Notations et résultats préliminaires.

1.1. Notations.

- V désigne une variété de $E(K)$ et $I = V^{\perp}$.

- $Z(I)$ désigne la suite, avec multiplicité, des zéros communs des fonctions de I.

- On désigne par $a_o, a_1, \dots, a_n$, les élements distincts de $Z(I)$, $p_o, p_1, \dots, p_n, \dots$ leur multiplicité respective.

- Si F est dans $M^{\wedge}(K)$ et si p est une exponentielle monôme $p(z) = z^j \exp az$, alors $F(p) = \langle p, F\rangle = F^{(j)}(a)$.

- Si p et q sont des exponentielles monômes $p(z) = z^j \exp az$, $q(z) = z^k \exp(bz)$ on définit la relation d'ordre :

$$(p \leqslant q) \Leftrightarrow (a = b \text{ et } j \leqslant k).$$

1.2. Lemme. si $p(z) = z^j \exp az$, $(p \in V) \Leftrightarrow (\exists\, u$ tel que $a = a_n$ et $0 \leqslant j < p_n)$.

Preuve : Il ne s'agit de rien d'autre que du lemme II.2.2..

1.3. Lemme : étant donnée p exponentielle monôme de V, il existe une forme linéaire continue unique L_p définie sur V telle que pour toute q exponentielle monôme de V on ait $L_p(q) = \delta_{p;q}$ où $\delta_{p,q} = 1$ si $p = q$ et $\delta_{p,q} = 0$ sinon :

Preuve : nous ne démontrons pas ce lemme (cf. Taylor).

1.4. Définition. Pour f dans V, on définit la série canonique de f par $f \sim \sum_{p \in V} L_p(f) \cdot p$, où p désigne une exponentielle monôme.

Bien entendu, il s'agit d'une série formelle pour le moment.

Cette série dépend d'ailleurs, a priori, à la fois de f et de V et n'a donc encore rien de canonique.

1.5. Lemme. $f \in V$, $f \sum_{p\in V} d_p\, p$, $F \in M^{\wedge}(K)$, $F(p) = 0$ sauf pour un nombre fini ; alors $\langle f, F\rangle = \sum_{p\in V} d_p\, F(p)$.

Preuve : nous ne démontrons pas ce lemme (c.f. Taylor).

2. Procédés de sommation pour les séries canoniques et conséquences.

2.1. Définition. nous appellerons Z- suite une famille de nombres complexes $\bar{c} = \{c_p\}_{p\in V}$ où p est une exponentielle monôme.

2.2. Définition. nous appellerons φ l'espace vectoriel des Z-suites telles que $c_p = 0$ sauf pour un nombre fini.

2.3. Définition. Soient $\bar{c} = \{c_p\}_{p\in V}$, $\bar{c} \in \varphi$, $f \in V$ $f \sim \sum_{p\in V} d_p\, p$.

Alors

$$S(f, \bar{c}) = \sum_{p\in V} d_p \sum_{q \leqslant p} C_{m(p)}^{m(q)}\, c_q\, q \quad \text{est la } \bar{c} \text{ moyenne de } f.$$

2.4. Propriété. supposons $\bar{c} \in \varphi$, $G \in M^{\wedge}(K)$ et $G(p) =$; alors $\forall f \in V$, $\forall F \in M^{\wedge}(K)$, $\langle S(f,\bar{c}), F\rangle = \langle f, FG\rangle$.

2.5. Propriété. dans ces conditions, S est une application linéaire continue de V dans V.

2.6. Propriété. nous appellerons procédé de sommation pour V une suite $(\bar{c}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de φ telle que pour toute f de V $\lim_{k \to +\infty} S(f, \bar{c}^k) = f$ dans $E(K)$.

2.7. Théorème. si $M^{\wedge}(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie faible et si V est une variété de $E(K)$, il existe un procédé de sommation pour V.

Idées de la démonstration.

Les parties fermées bornées de $E(K)$ étant compactes, toute suite faiblement convergente est convergente. Il suffit donc d'exhiber un procédé de sommation tel que pour toute f de V, et toute F de $M^*(K)$ $\lim_{k \to +\infty} \langle S(f,\bar{c}^k), F\rangle = \langle f, F\rangle$.

Soit G non identiquement nulle dans $I = V^\perp$. $M^*(K)$ étant une algèbre d'Hadamard, il existe H dans $M^*(K)$, des polynômes P_k et des unités e_k telles que $G_k = \frac{GH}{P_k e_k}$ et $\lim_{k \to +\infty} G_k F = F$ pour toute F dans $M^*(K)$.

Définissons alors pour $p(z) = z^j \exp az$, $p \in V$, $\bar{c}^k_p = G^j_k(a)$. Il est clair que $\bar{c}^k$ est dans φ .

Si $f \in V$, posons $S(f, \bar{c}^k) = S(f, k)$.

Alors $\lim_{k \to \infty} \langle S(f, k), F\rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle f, G_k F\rangle = \langle f, F\rangle$.

2.8. Corollaire. la série canonique détermine f, c'est-à-dire que si f et g sont dans V et $f \sim \sum_{p \in V} d_p\, p$ et $g \sim \sum_{p\in V} d_p\, p$ alors $f = g$.

2.9. Corollaire. f moyenne périodique, $f \in V \cap V'$

$$f \sim \sum_{p \in V} d_p\, p$$

$$f \sim \sum_{p' \in V'} d'_{p'}\, p'$$

Alors

si $p \notin V \cap V'$, $d_p = 0$, si $p' \notin V \cap V'$, $d'_{p'} = 0$

et si $p = p' \in V \cap V'$, alors $d_p = d'_{p'}$.

3. Convergence de la série canonique.

Nous nous préoccupons ici de la convergence absolue dans $E(K)$ des séries canoniques et de problèmes qui se rattachent à cette convergence.

Nous ne donnerons aucune démonstration . (cf. Taylor).

3.1. Définition. p désignant une exponentielle monôme et V une variété,

$$S = \left\{ \bar{b} = (b_p)_{p\in V} \,;\exists\, k \in K, \exists\, A > 0 \text{ tel que } \forall\, p \in V\ |b_p| \leq A\,||p||_k \right\}$$

3.2. Propriété. il est clair que si F est dans $M^*(K)$, la Z-suite $\{F(p)\}_{p\in V}$ est dans S.

3.3. Définition. Soient V une variété et $Z = Z(V^\perp)$. Z est dite une suite d'interpolation pour $M^*(K)$ si, étant donnée n'importe quelle Z-suite de S soit $\bar{b} = \{b_p\}_{p\in V}$, il existe F dans $M^*(K)$ telle que $\bar{b} = \{F(p)\}_{p\in V}$.

3.4. Définition. Soit E un e.v.t. localement convexe dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $\{\|\ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Une suite x_n d'éléments de E sera dite une base absolument convergente de E si les deux conditions suivantes sont remplies :

3.4.1. tout x de E s'écrit d'une manière unique $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ et pour tout α dans Λ, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|x_n\|_\alpha$ converge.

3.4.2. pour tout α dans Λ, l'application $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|x_n\|_\alpha$ est continue.

3.5. Théorème. Nous supposons toujours que $M^*(K)$ est une algèbre d'Hadamard pour la topologie faible.

3.5.1. Si les exponentielles monômes forment une base absolument convergente de V, alors Z est une suite d'interpolation pour $M^*(K)$.

3.5.2. Si Z est une suite d'interpolation pour $M^*(K)$, alors pour toute f dans V la série canonique de f converge absolument dans $E(K)$ (c'est-à-dire $f \sim \sum_{p\in V} d_p\, p$ et $\sum_{p\in V} |d_p| \|p\|_k < +\infty$ pour toute k dans K.)

3.6. Théorème. Supposons de plus V tonnelé. Alors Z est une suite d'interpolation pour $M^*(K)$ si et seulement si pour toute f de V la série canonique de f converge absolument.

3.7. Théorème. Supposons de plus que K a une base dénombrable ; alors les exponentielles monômes forment une base absolument convergente de V si et seulement si Z est une suite d'interpolation pour $M^*(K)$.

Remarque. K a une base dénombrable, donc $E(K)$ est métrisable et complet donc V aussi, donc V est tonnelé.

C IV APPLICATION. EXEMPLES.

Nous citons ici les résultats sans démonstration.

1. Equation de Convolution.

1.1. Définition. f dans $E(K)$, ν dans $M^{\wedge}(K)$, on définit

$$(f * \nu) = \int f(z-t)\, d\nu(t).$$

1.2. Propriété. $f * \nu$ est entière.

1.3. Propriété. L'application $f \longrightarrow f * \nu$ pour ν dans $M^{\wedge}(K)$ envoie $M^{\wedge}(K^*)$ dans $M^{\wedge}(K^*)$.

1.4. Corollaire. si K est hypoconvexe et ν dans $M^{\wedge}(K)$, l'application $f \longrightarrow f * \nu$ envoie $E(K)$ dans $E(K)$.
(car dans ce cas $E(K) = M^{\wedge}(K^*)$).

1.5. Théorème. si $\hat{\nu}$ n'est pas identiquement nulle et si (i), (ii), ou (iii) a lieu :

(i) K hypo convexe
(ii) K déterminée par une suite et parfait.
(iii) K déterminé par une suite et hypoconvexe.

alors quelle que soit g dans $E(K)$, il existe f dans $E(K)$ telle que $f * \nu = g$.

1.6. Théorème. si $\hat{\nu}$ n'est pas identiquement nulle, alors quelle que soit g dans $M^{\wedge}(K^*)$ il existe f dans $M^{\wedge}(K^*)$ telle que $f * \nu = g$.

Quelques mots sur la démonstration de 1.5. et 1.6.: ces théorèmes dépendent des lemmes :

- $T(r, \frac{f}{g}) \leq T(r, f) + T(r, g)$
- $\{G_\alpha\} \subset E(K^*)$, $\exists F \in E(K^*)$, $F \neq 0$, tel que $F G_\alpha \longrightarrow 0$ dans $E(K^*)$ alors $G_\alpha \longrightarrow 0$ dans $E(K^*)$.
- $E(K)$ tonnelé, K parfait ou hypoconvexe, $(G_n) \subset M^{\wedge}(K)$, $\exists F \in M^{\wedge}(K)$, $F \neq 0$ tel que $F G_n \longrightarrow 0$ faiblement alors $G_n \longrightarrow 0$ faiblement.

2. Exemples.

2.1. Fonctions complémentaires au sens d'Young : deux fonctions convexes s'annulant à l'origine Φ et Ψ sont dites complémentaires (au sens d'Young) si dans la représentation $\Phi(\lambda) = \int_0^{\lambda} \varphi(t)\, dt$ et $\Psi(\lambda) = \int_0^{\lambda} (t)\, dt$ où les fonctions φ et ψ sont strictement croissantes et non bornées, les fonctions φ et ψ sont réciproques.

2.2. Lemme. Soit (φ_n) une suite de fonctions convexes, continûment dérivable, non décroissante sur $[0, +\infty[$ et telles que $\varphi_n(0) = 0$ et :

(a) $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots\ldots \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \ldots.$

(b) $\forall\, n > 0$, $\varphi_n(2r) = 0\,[\varphi_{n+1}(r)]$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$

(c) $\dfrac{\varphi_1(r)}{r} \longrightarrow +\infty$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$

Définissons $K = \left\{ k \in C_0^+ \,;\, \forall\, n, \ \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} k(z) \exp \varphi_n(|z|) < +\infty \right\}$

Alors :

2.2.1. K est un ensemble de poids

2.2.2. K est déterminé par une suite et hypoconvexe

2.2.3. $K^* = \left\{ k^* \in C_+ \,;\, \exists\, n > 0 \text{ tel que } k^* = 0\,[\exp(-\psi_n(z))] \text{ où } \varphi_n \text{ et } \psi_n \text{ sont complémentaires} \right\}$

2.2.4. K^* a une base dénombrable et est hyperconvexe.

2.2.5. K est parfait.

2.2.6. $E(K) = \left\{ f \,;\, f \text{ entière}, \exists\, n \text{ tel que } M(r, f) = 0[\exp \varphi_n(r)] \right\}$

2.2.7. $E(K^*) = \left\{ F \,;\, F \text{ entière}, \forall\, n > 0,\ M(r, F) = 0[\exp \Psi_n(r)] \right\}$

2.2.8. $M^{\wedge}(K) = E(K^*)$ et $M^{\wedge}(K^*) = E(K)$, la topologie de Mackey et la topologie induite coïncident.

2.2.9. $E(K)$ et $E(K^*)$ sont deux espaces de Montel et sont duals l'un de l'autre.

2.3. Exemples classiques. Ils résultent de ce lemme 2.2. : par exemple, $1 < p \leq +\infty$ et $\{p_n\}$ strictement croissante tendant vers p. Prenons $\varphi_n(r) = r^{p_n}$

Alors $E(K) = \left\{ f \ ; \ f \ \text{entière, d'ordre inférieur ou égal à} \ p \right\}$

$E(K^*) = \left\{ F \ ; \ F \ \text{entière, d'ordre inférieur ou égal à} \ q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\}$

2.4. Contre exemple. Il existe φ convexe sur $[0, +\infty[$ telle que si l'on définit $K = \left\{ k \ ; \ k \in C_0^+ \ , \ \forall B > 0, \ \sup_{z \in \mathbb{C}} k(z) \exp \varphi(B|z|) < +\infty \right\}$ alors :

2.4.1. K est un ensemble de poids.

2.4.2. $E(K)$ n'est pas une algèbre.

2.4.3. K n'est pas hypoconvexe.

2.4.4. K n'est pas parfait car $E(K^{**})$ est un sous espace propre de $E(K)$.

3. Problèmes.

Voici quelques problèmes ouverts :

3.1. Est-ce-que $M^*(K)$ est toujours une algèbre d'Hadamard pour une certaine topologie admissible?

3.2. $E(K)$ est-il toujours tonnelé?

3.3. Si F est dans $M^*(K)$ et G entière telle que $M(r, G) \leqslant M(r, F)$, est-ce-que G est dans $M^*(K)$?

3.4. Si K est parfait, est-ce-que K est hypoconvexe ?

3.5. K^* est-il toujours hypoconvexe ?

3.6. Si $E(K)$ est tonnelé, est-ce-que $M^*(K)$ est toujours une algèbre d'Hadamard ?

3.7. Que se passe-t-il dans le cas de plusieurs variables ?

Bibliographie.

[1] Haymann W.K. Meromorphic Functions.
Oxford University Press; Amen House, London E.C.4. 1964.

[2] Nevanlinna Rolf Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris. Gauthier-Villars.

[3] Nevanlinna Rolf Eindeutige Analistische Funktionen
die Grundlehren Mathematischen Wissenschaften.
Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg.

[4] Rubel L.A. A Fourier series method for entire fonctions.
Duke Mathematical Journal 30. 437-442 1963.

[5] Taylor B.A. Ph. D. Thesis.
University of Illinois.

[6] Kelley J.L. Namioka I, and Others Linear Topological Spaces.
Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1963.