

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

**ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS**

**ET PROBLÈME DE DIRICHLET**

par **Marc Rogalski**

année universitaire 1968-1969

Mathématique (425)  
(Service des Publications - Bibliothèque)

Faculté des Sciences  
91 - Orsay (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

**ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS**

**ET PROBLÈME DE DIRICHLET**

par **Marc Rogalski**

année universitaire 1968-1969

Mathématique (425)  
(Service des Publications - Bibliothèque)

Faculté des Sciences  
91 - Orsay (France)

ESPACES DE BANACH RETICULES  
ET PROBLEME DE DIRICHLET

par Marc ROGALSKI

INTRODUCTION.

A - Le but de ces notes est d'unifier, grâce à la théorie des convexes compacts et des simplexes de Choquet, deux secteurs de l'analyse fonctionnelle : la représentation des espaces de Banach réticulés, et le problème de Dirichlet abstrait pour un espace vectoriel de fonctions continues.

Bien que les démonstrations que nous donnons soient souvent inédites, beaucoup des résultats de cet exposé sont évidemment déjà connus, sauf ceux du paragraphe 2 (B, D, E et F), les théorèmes 6 (§.5) et 7 (§.7), et certains résultats du paragraphe 8.

Nous supposons que le lecteur possède une connaissance élémentaire de la théorie des espaces de Banach et de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques, et de la théorie de l'intégration sur les espaces compacts. Il est par contre utile de posséder une connaissance assez approfondie de la théorie des convexes compacts, des simplexes, et du théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET, d'une part, et de la théorie des espaces vectoriels ordonnés, en particulier réticulés et complètement réticulés, d'autre part.

Notations.

1°) Si  $X$  est un espace compact, nous noterons :

- $M(X)$  [resp.  $M^+(X); M_1^+(X)$ ] : l'ensemble des mesures de Radon [resp. positives ; positives de masse 1] sur  $X$ .
- $M_A(X)$  l'ensemble des mesures de Radon sur  $X$  portées par le borélien  $A$  de  $X$ .
- $C(X)$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $X$ .
- $\delta_x$  la masse unité au point  $x$  de  $X$ .

Si  $Y$  est un espace localement compact, nous noterons :

- $M_0(Y)$  l'ensemble des mesures bornées sur  $Y$ .
- $C_0(Y)$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $Y$ , tendant vers 0 à l'infini.

Si  $Z$  est un convexe, nous noterons :

- $A(Z)$  l'espace des fonctions réelles affines continues sur  $Z$ .
- $\mathcal{E}(Z)$  l'ensemble des points extrémaux de  $Z$ .

Si  $B$  est un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique, nous noterons :

- $\text{co}(B)$  [resp.  $\overline{\text{co}}(B)$ ] l'enveloppe convexe [resp. fermée] de  $B$ .

Si  $E$  est un espace vectoriel ordonné, nous noterons :

- $E^+$  le cône de ses éléments positifs.

Si  $E$  est de plus réticulé, nous noterons :

- $x^+$  et  $x^-$  les parties positives et négatives étrangères d'un élément  $x$  de  $E$ , et  $|x| = x^+ + x^-$  la valeur absolue de  $x$ .

Si  $H$  est un sous-espace de  $C(X)$  ( $X$  compact), nous dirons que  $H$  est un sous-espace réticulé de  $C(X)$  si pour toutes  $f, g$  de  $H$ ,  $\text{Inf}(f, g)$  et  $\text{Sup}(f, g)$  appartiennent à  $H$ . Nous dirons que

$H$  est réticulé pour son ordre propre si l'espace vectoriel  $H$ , ordonné par le cône  $H^+ = C^+(X) \cap H$ , est réticulé. Un sous-espace réticulé de  $C(X)$  est réticulé pour son ordre propre ; la réciproque est fautive (si  $X = [0,1]$ , prendre pour  $H$  l'espace des fonctions affines sur  $X$ ).

2°) Nous numérotions les propositions, corollaires, lemmes et remarques de manière uniforme, à la suite les uns des autres. Les théorèmes seront numérotés à part.

B - Soit  $X$  un espace compact. Si  $H$  est un sous-espace de  $C(X)$  séparant les points de  $X$ , on sait ([1], [2], [9]) qu'il existe un plus petit fermé  $S(H)$  de  $X$ , sur lequel toutes les fonctions de  $H$  prennent leur maximum. Ce fermé s'appelle la frontière de Šilov de  $H$ . Le problème de Dirichlet, posé par H. BAUER, est de reconnaître la nature, dans  $C[S(H)]$ , de l'espace  $H_0$  des restrictions à  $S(H)$  des fonctions de  $H$ , et en particulier de caractériser les espaces  $H$  tels que l'espace  $H_0$  soit d'un type remarquable donné.

Le cas où  $H_0 = C[S(H)]$  a été étudié par BAUER ([1], [2]). Nous donnerons une démonstration nouvelle de son résultat au §.4.

Pour aborder un cas plus général que celui de BAUER, nous serons amenés en fait à changer de frontière, et à utiliser, non plus la frontière de Šilov de  $H$ , mais celle de  $H^+$  ([1], [18]). Nous supposons  $H$  réticulé, et nous étudierons l'espace des restrictions des fonctions de  $H$  à  $S(H^+)$ .

L'instrument de l'étude sera une caractérisation d'une certaine classe d'espaces de Banach ordonnés comme espaces de fonctions continues sur un compact de leur dual. Les théorèmes obtenus préciseront des théorèmes de KAKUTANI ([15], [16], [24]), et leurs démonstrations s'appuieront essentiellement sur le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET ([9], [22]). Elles seront l'objet du paragraphe 2, où nous donnerons quelques compléments

sur les espaces de Banach ordonnés.

Ce sont ces théorèmes de KAKUTANI que nous appliquerons à  $H$ , en plongeant, selon une méthode utilisée par G. CHOQUET, l'espace  $X$  dans le dual  $H'$  de  $H$ . Ce sera l'objet des paragraphes 4, 5 et 7. Nous appliquerons aussi cette méthode au paragraphe 3, pour démontrer très simplement un résultat de BAUER sur les simplexes [1].

Une technique particulière, due à G. CHOQUET [7], sera utilisée au paragraphe 5 pour étudier le cas des espaces  $H$  vérifiant une condition de séparation linéaire (introduite par G. MOKOBODZKI [20])

Au paragraphe 8, nous appliquerons les résultats obtenus aux paragraphes précédents aux sous-espaces réticulés non séparants de  $C(X)$ . Nous commencerons, au paragraphe 1, par rappeler les notions fondamentales sur les frontières d'espaces vectoriels de fonctions continues. Nous établirons les résultats analogues pour les cônes de fonctions au paragraphe 6.

### C - Plan.

Paragraphe	Page
1. Frontière de Choquet et frontière de Šilov d'un espace de fonctions continues . . . . .	7
2. Représentation fonctionnelle d'espaces de Banach réticulés . . . . .	10
A. Applications linéaires positives . . . . .	11
B. Espaces de mesures . . . . .	12
C. La représentation fonctionnelle des espaces de Kakutani . . . . .	20
D. Le problème réciproque . . . . .	33
E. Le problème du meilleur quotient . . . . .	38
F. Un complément sur les espaces de Banach réticulés	43
3. Les simplexes de Bauer . . . . .	45
4. Le problème de Dirichlet lorsque $H$ contient les constantes . . . . .	48

5. Le problème de Dirichlet dans le cas linéairement séparant . . . . .	52
6. Frontières d'un cône convexe de fonctions continues .	57
7. Le problème de Dirichlet dans le cas général d'un espace réticulé . . . . .	61
8. Application à l'étude des sous-espaces réticulés non séparants de $C(X)$ . . . . .	69

Index des définitions essentielles

Bauer (simplexe de) . . . . .	définition 33
chapeau . . . . .	définition 7
cospectre . . . . .	définition 9
Dirichlet (problème de) . . . . .	définition 4
étrangement riche . . . . .	définition 29
frontière de Choquet . . . . .	proposition 1, définition 52
frontière linéaire . . . . .	définition 47
frontière de Šilov . . . . .	proposition 1, définition 52
harmonique (mesure $H^-$ ) . . . . .	définition 36
Kakutani (théorèmes de) . . . . .	théorèmes 2 et 3
K-canonique (espace) . . . . .	définition 23
L-espace . . . . .	définition 17
linéairement séparant . . . . .	définition 44
M-espace . . . . .	définition 16
module de domination . . . . .	définition 30
pseudo-frontière de Choquet . . . . .	définition 68
pseudo-frontière de Šilov . . . . .	définition 68
résolutive (fonction $H^-$ ) . . . . .	lemme 2
spectre . . . . .	proposition 22

Index des notations principales

$A_O(K)$	. . . . .	proposition 22
$B^+$	. . . . .	définition 16
$E(H)$	. . . . .	proposition 1
$S(H)$	. . . . .	proposition 1
$PE(H^+)$	. . . . .	définition 68
$PS(H^+)$	. . . . .	définition 68
$E(H^+)$	. . . . .	définition 52, proposition 57
$S(H^+)$	. . . . .	définition 52, proposition 57
$\mathcal{E}(Y)$	. . . . .	proposition 1
$D_H$	. . . . .	définition 4
$r_H$	. . . . .	lemme 2
$L(K)$	. . . . .	définition 7
$\Gamma$	. . . . .	lemme 10
$\lambda_K$	. . . . .	lemme 10
$u_K$	. . . . .	lemme 10
$\hat{H}$	. . . . .	proposition 38
$L(H)$	. . . . .	définition 47
$\mathcal{D}_H^S(\delta_x)$	. . . . .	définition 36
$C_X(B, \lambda, u)$	. . . . .	définition 23
$\mathcal{D}(K)$	. . . . .	lemme 53
$\mathcal{S}(K)$	. . . . .	lemme 53
$\tilde{H}$	. . . . .	définition 67
$\tilde{X}$	. . . . .	définition 67
$C_R^\perp$	. . . . .	corollaire 72
$M_Z(X) / C_R^\perp$	. . . . .	corollaire 72
$M_X(B)$	. . . . .	théorème 1

---



1. Frontière de Choquet et frontière de Šilov d'un espace de fonctions continues.

Soient  $X$  un espace compact, et  $H$  un sous-espace de  $C(X)$ . On dit qu'un fermé  $F$  de  $X$  est maximisant si :

$$\forall f \in H : \sup_F f = \sup_X f .$$

Il est facile de voir que l'ensemble des fermés maximisants est inductif vers le bas pour l'inclusion, et possède donc des éléments minimaux.

Si cet ensemble possède un élément minimum, on le nomme la frontière de Šilov de  $H$  :  $S(H)$ .

Soit  $M_1^+(X)$  l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur  $X$ . Nous définissons une relation d'équivalence  $R_H$  sur  $M_1^+(X)$  par :

$$\mu \sim \nu \iff \forall f \in H, \mu(f) = \nu(f) .$$

Nous noterons  $\mathcal{O}_H(\mu)$  la classe d'équivalence d'une mesure  $\mu$ .

On appelle frontière de Choquet de  $H$ , l'ensemble

$$E(H) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_H(\delta_x) = \{\delta_x\}\} .$$

Proposition 1.

(a) Si  $H$  sépare les points de  $X$  (nous dirons que  $H$  est séparable), la frontière de Šilov existe, et l'on a

$$S(H) = \overline{E(H)} ;$$

(b) Toute fonction de  $H$  atteint son maximum sur  $E(H)$  ;

(c) Si  $H'$  est le dual de  $H$  muni de la norme uniforme, l'application  $\phi$  de  $H$  dans  $H'$  définie par  $\phi(x) = \delta_x$  est, si on munit  $H'$  de la topologie faible  $\sigma(H', H)$ , un homéomorphisme de  $X$  sur son image  $\phi(X)$ . De plus, l'enveloppe convexe fermée  $Y$  de  $\phi(X)$  est compacte, et a pour ensemble de points extrémaux  $\mathcal{E}(Y)$  l'image par  $\phi$  de  $E(H)$ .

Démonstration : De l'assertion (c) on déduit en fait (a) et (b). En effet, toute forme linéaire continue sur  $H'$ , c.à.d. tout élément  $f$  de  $H$ , atteint son maximum sur  $Y$  en un point de  $\mathcal{E}(Y)$ . Donc  $\overline{E(H)}$  contient  $S(H)$ . D'autre part, si un point  $a$  appartient à  $\mathcal{E}(Y)$ , il appartient à tout fermé maximisant  $F$ , sinon  $C_Y F$  serait un voisinage de  $a$  dans  $Y$ , et, puisque  $a$  est extrémal, il existerait une fonction  $f$  de  $H$  ne prenant pas son maximum sur  $F$  (car tout point extrémal est extrémal fort). Donc  $S(H)$  et  $\overline{E(H)}$  sont identiques.

D'autre part, il est clair que l'on a l'égalité  $\mathcal{E}(Y) = \phi[E(H)]$ , car les points  $a$  de  $Y$  non extrémaux sont ceux qui sont barycentre d'une mesure de  $M_1^+[\phi(X)]$  différente de  $\delta_a$  (cf. [9])

C.Q.F.D.

Lemme 2. Soit  $r_H$  l'application restriction de  $C(X)$  dans  $C[S(H)]$ . Alors, si  $f$  est une fonction de  $H$ , on a la relation

$$\|f\|_\infty = \|r_H(f)\|_\infty$$

( $r_H$  est donc injective). De plus, il est équivalent de dire que  $f$  est positive ou que  $r_H(f)$  est positive ( $f \in H$ ).

Les fonctions de  $C[S(H)]$  qui appartiennent à  $r_H(H)$  sont dites H-résolutives : ce sont celles qui admettent un prolongement à  $X$  qui appartient à  $H$  (ce prolongement étant d'ailleurs unique)

Le lemme est immédiat. Il en est de même du lemme suivant :

Lemme 3. Les relations d'équivalence  $R_H$  et  $R_{\bar{H}}$  sont les mêmes. Par suite, on a les relations

$$E(H) = E(\bar{H}) , S(H) = S(\bar{H}) .$$

Soit  $D_H$  l'ensemble des sous-espaces fermés  $V$  de  $C(X)$  contenant  $H$  et ayant même frontière de Silov que  $H$ .

Nous n'étudierons pas ici la structure de  $D_H$ . Bornons-nous à remarquer que, ordonné par l'inclusion,  $D_H$  possède un plus petit élément :  $\bar{H}$ , et est inductif vers le haut. Il possède donc des éléments maximaux. On voit facilement sur des exemples simples qu'il peut en exister plusieurs. Il serait peut-être intéressant de savoir si on peut caractériser les éléments maximaux de  $D_H$ , ou, ce qui revient au même, caractériser les espaces  $H$  tels que  $D_H = \{\bar{H}\}$ . Nous n'aborderons pas ces questions ici.

Définition 4. A la suite de Bauer, nous appellerons problème de Dirichlet abstrait, pour un espace  $V$  de  $D_H$ , le problème de caractériser le sous-espace  $r_H(V)$  de  $C[S(H)]$ .

En particulier, on peut étudier à quelles conditions sur  $V$  l'espace  $r_H(V)$  est d'un type remarquable donné dans  $C[S(H)]$ , par exemple, et c'est le seul cas qui nous intéressera ici, si c'est un sous-espace réticulé de  $C[S(H)]$ .

L'étude des conditions sous lesquelles  $r_H(V) = C[S(H)]$  a déjà été faite par Bauer dans [1], [2].

Dans le cas où  $r_H(V)$  est réticulé, on peut déjà remarquer que, d'après le lemme 2,  $r_H$  transporte l'ordre de  $V$  à  $r_H(V)$ , et que, par suite,  $V$  devra être réticulé. On conçoit donc que nous ayons besoin de développer quelques préliminaires sur les espaces de Banach réticulés.

La situation est différente lorsque  $V$  n'est plus réticulé.

Une extension de la plupart des résultats peut se faire au cas où  $V$  est un "espace simplicial", c.à.d. lorsque son dual  $V'$  est réticulé, ou, ce qui revient au même, lorsque  $V$  est isomorphe (pour l'ordre et la norme) à l'espace  $A_0(Y)$  des fonctions affines continues sur un simplexe  $Y$ , nulles en un certain point extrémal  $x_0$  de  $Y$ .

Nous renvoyons pour ce cas le lecteur à [25].

Enfin, les relations entre frontières d'espaces vectoriels de fonctions continues et simplexes donnent lieu à d'autres développements qu'on trouvera dans [19], [22], [27].

## 2. Représentation fonctionnelle d'espaces de Banach réticulés.

Le but de cette partie est de démontrer et de préciser un théorème de Kakutani, datant de 1941 ([15]) :

Soit  $E$  un espace de Banach réticulé, vérifiant :

- (1)  $x \rightarrow \|x\|$  est croissante sur  $E^+$ , et  $\| |x| \| = \|x\|$  ;
- (2)  $\forall x, y \in E^+$ ,  $\| \sup(x, y) \| = \sup(\|x\|, \|y\|)$  .

Alors il existe un espace compact  $Z$  et une isométrie de  $E$  sur un sous-espace fermé réticulé de  $C(Z)$ , orthogonal d'une famille de mesures biponctuelles  $(\delta_{x_\alpha}, -\lambda_\alpha \delta_{x_\alpha})_{\alpha \in A}$ ,  $\lambda_\alpha \in [0, 1[$ , cette isométrie transportant l'ordre.

Nous en donnerons une démonstration nouvelle, s'appuyant sur le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET, ce qui nous permettra de beaucoup mieux caractériser le sous-espace  $E$  de  $C(Z)$ , ainsi que son dual  $E'$ , et de résoudre le problème réciproque.

Nous aurons besoin de résultats préliminaires portant sur la continuité des applications linéaires positives dans certains espaces ordonnés, puis nous démontrerons un théorème de représentation d'espaces localement convexes réticulés comme espaces de mesures sur un compact. Les théorèmes de Kakutani résulteront de ce théorème par dualité. Nous terminerons cette partie en étudiant dans quels cas on peut se ramener à l'espace de toutes les fonctions continues sur un compact, et en donnant en complément quelques propriétés de certains espaces de Banach réticulés.

#### A - Applications linéaires positives.

Lemme 5. Soit E un espace de Banach ordonné réticulé tel que

- (a)  $E^+$  est fermé,  
 (b) pour tout x de E, on a l'inégalité :  $\| |x| \| \leq \| x \|$  .

Soit F un espace normé réticulé tel que

- (a') pour tous x, y de F :  $0 \leq x \leq y \implies \| x \| \leq \| y \|$  .

Alors toute application linéaire positive T : E  $\rightarrow$  F est continue.

Démonstration : Il suffit de montrer que si une suite  $(x_n)$  tend vers 0 "vite", c.à.d. est telle que  $\sum_0^{\infty} \| x_n \| < +\infty$  , alors  $T(x_n)$  tend vers 0 .

Mais on a alors  $\sum \| |x_n| \| < +\infty$  . Soit  $(a_n)$  une suite de nombres strictement positifs, tendant vers l'infini avec n , et telle que l'on ait  $\sum a_n \| |x_n| \| < +\infty$  .

Posons  $y = \sum a_n |x_n|$  . Le point y appartient à  $E^+$  , et on peut écrire les inégalités :

$$|T(x_n)| \leq T(|x_n|) = \frac{1}{a_n} T(a_n |x_n|) \leq \frac{1}{a_n} T(y)$$

Or, si  $x$  appartient à  $F$ , on peut décomposer  $x$  en  $x^+$  et  $x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ . Donc, d'après la condition (a'),  $\|x^+\|$  et  $\|x^-\|$  sont majorés par  $\||x|\|$ .

Donc on a la relation  $\|x\| \leq 2\||x|\|$ .

On obtient alors les inégalités :

$$\|T(x_n)\| \leq 2\||T(x_n)|\| \leq \frac{2}{a_n} \|T(y)\|$$

Le dernier terme tendant vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, il en est de même pour  $\|T(x_n)\|$ .

C.Q.F.D.

Ce résultat nous suffira dans la suite. Donnons quand même l'énoncé d'un théorème plus fort ([17], [21], [24]) :

Proposition 6. Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable, ordonné par un cône  $E^+$  complet, et vérifiant les conditions :

- a)  $E = E^+ - E^+$
- b)  $E$  est un espace de Baire

Soit  $F$  un espace vectoriel topologique séparé ordonné tel que les conditions  $0 \leq u_n \leq v_n$  et  $v_n \rightarrow 0$  impliquent :  $u_n \rightarrow 0$ .

Alors :

- 1) Toute application linéaire positive  $T : E \rightarrow F$  est continue
- 2)  $E$  est complet.

B - Espaces de mesures.

Définition 7. Dans un espace vectoriel topologique séparé  $E$ , un chapeau d'un cône convexe  $P$  est un convexe compact de  $P$ , dont le complémentaire dans  $P$  est convexe. Le cône  $P$  est dit bien coiffé s'il est réunion de ses chapeaux. Un chapeau est universel s'il engendre le cône (cf. [4], [22]).

Si  $K$  est un chapeau du cône  $P$ , on appellera col de  $K$  l'ensemble :

$$L(K) = \{x \neq 0 \mid x \in K \text{ et } \forall \lambda > 1, \lambda x \notin K\} .$$

Lemme 8. Dans un espace vectoriel localement convexe séparé  $E$ , un cône  $P$  convexe bien coiffé possède des génératrices extrémales et, si  $P$  est fermé,  $P$  est l'enveloppe convexe fermée de la réunion  $\mathcal{E}(P)$  de ses génératrices extrémales.

On montre que si  $K$  est un chapeau de  $P$ , alors  $\mathcal{E}(K)$ , ensemble des points extrémaux de  $K$ , est inclus dans  $\mathcal{E}(P)$ , qui est donc non vide (la méthode pour étudier un chapeau consiste à couper par des sous-espaces vectoriels de dimension 2, et à étudier les chapeaux des cônes de  $\mathbb{R}^2$ ; cf. [22]).

Ensuite, on utilise le théorème de Krein et Milmann ([6]).

Définition 9. Soit  $E$  un espace localement convexe séparé ordonné. Si  $E^+$  possède un chapeau universel  $K$  (fixé dans la suite), on appellera cospectre de  $E$  l'ensemble :

$$X = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\} .$$

On a aussi la relation :

$$X = L(K) \cap \mathcal{E}(E^+)$$

Lemme 10.

(a) Soit  $E$  un espace vérifiant les hypothèses de la définition 9. Si

$$\Gamma = K \cap \mathcal{E}(E^+)$$

est fermé,  $L(K)$  est un  $G_\delta$  de  $K$ ,  $\mathcal{E}(K)$  et  $X$  sont des boréliens de  $K$  .

(b) La fonction affine  $\lambda_K$  définie sur  $E^+$  par

$$L(K) = \{x \in E^+ \mid \lambda_K(x) = 1\}$$

est semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur  $E^+$ .

(c) La fonction  $u$  définie sur  $E^+ \setminus \{0\}$  par

$$u(x) = \frac{x}{\lambda_K(x)}$$

est borélienne.

Démonstration : a) En effet, on a les relations :

$$L(K) = \bigcap_{n \geq 1} \left[ K \left(1 - \frac{1}{n}\right) K ; X = L(K) \cap \Gamma ; \xi(K) = X \cup \{0\} . \right.$$

b) On voit immédiatement que  $\lambda_K^{-1}([-\infty, a]) = aK$ , pour tout  $a \geq 0$ , et  $\lambda_K^{-1}([-\infty, a]) = \emptyset$  pour  $a < 0$ . Ces ensembles étant fermés,  $\lambda_K$  est semi-continue inférieurement.

c) Le caractère borélien de  $u$  résulte du lemme topologique suivant :

Lemme 11. Soient  $A, B, C$ , trois espaces topologiques, le dernier étant à base dénombrable. Soient  $v : A \rightarrow B$  et  $f : A \rightarrow C$  deux applications boréliennes. Alors l'application  $v \times f : A \rightarrow B \times C$  définie par

$$(v \times f)(x) = (v(x), f(x))$$

est borélienne.

On applique ce lemme avec  $A = E^+ \setminus \{0\}$ ,  $B = E^+$ ,  $C = \mathbb{R}$ , et  $v(x) = x$ ,  $f(x) = \frac{1}{\lambda_K(x)}$ . On en déduit que l'application  $x \rightsquigarrow (x, \frac{1}{\lambda_K(x)})$  est borélienne. Il suffit alors de composer cette application avec l'application  $(x, \mu) \rightarrow \mu x$  de  $E \times \mathbb{R}$  dans  $E$ , qui est continue.



Par ailleurs, pour démontrer le lemme 11, on remarque que, si  $(U_n)_n$  est une base des ouverts de  $C$ , et si  $O$  est un ouvert de  $B \times C$ , alors on peut écrire  $O = \bigcup_n (V_n \times U_n)$  où  $V_n$  est le plus grand ouvert de  $B$  tel que  $V_n \times U_n \subset O$ .

C.Q.F.D.

En fait le lemme 11 permet de montrer que, si  $v$  et  $f$  sont boréliennes de "quasi-première classe", c.à.d. si l'image réciproque par  $v$  et  $f$  d'un ouvert est de la forme  $\bigcup_n (O_n \cap F_n)$  où  $O_n$  est ouvert et  $F_n$  fermé, alors  $v \times f$  est encore de quasi-première classe (cf. [26]). Comme les applications numériques semi-continues sont de quasi-première classe, on voit ainsi que l'application  $u$  définie au lemme 10 est de quasi-première classe.

Lemme 12. Si  $E$  ordonné par  $E^+$  est réticulé,  $K$  est un simplexe.

Cela résulte de la caractérisation des simplexes (cf. [7], [9] ou [22]).

Théorème 1. Soit  $E$  un espace localement convexe séparé réticulé, vérifiant :

- (a)  $E^+$  possède un chapeau universel  $K$  ;
- (b)  $\Gamma = K \cap \xi(E^+)$  est fermé.

Alors :

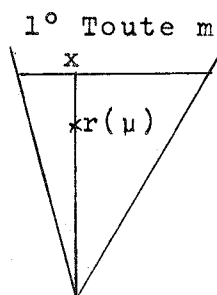
1° Les mesures positives de masse 1 sur  $K$ , maximales au sens de G. CHOQUET, sont les mesures de  $M_1^+(K)$  portées par  $\xi(K)$

2°  $E$  est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel réticulé, à l'espace  $M_X(\bar{X})$  des mesures sur le compact  $\bar{X}$ , portées par  $X$  ( $X$  est le cospectre de  $E$ ) ; de plus, si  $x \in E$ , on a :

$$\lambda_K(|x|) = \|\mu_x\|$$

où  $\mu_x$  est la mesure associée à  $x$ , et  $\|\mu_x\|$  sa masse totale.

Démonstration :



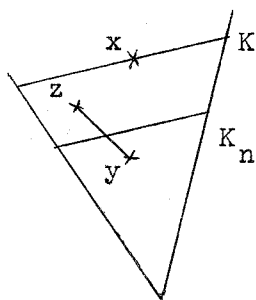
1° Toute mesure maximale est portée par  $\overline{\mathcal{L}(K)}$ , donc par  $\overline{X} \cup \{0\}$ , donc par  $\mathcal{L}(E^+) \cap K$ .

Soit  $\mu$  maximale, soit  $r(\mu)$  son barycentre. Ce point appartient à  $K$ . Donc il existe un point  $x$  de  $L(K)$  tel que  $r(\mu) = \lambda x + (1-\lambda)0$ . D'où, puisque  $K$  est un simplexe :

$$\mu = \lambda \mu_x + (1-\lambda) \delta_0,$$

où  $\mu_x$  est la mesure maximale de barycentre  $x$ . Elle est portée par  $\mathcal{L}(E^+) \cap K$ .

Or, soit  $K_n = (1-\frac{1}{n})K$ ,  $n \geq 1$ . Si il existe  $n \geq 1$  tel que  $\mu_x(K_n) > 0$ , le barycentre  $y$  de  $\mu_x|_{K_n}$  appartient à  $K_n$ . Le barycentre  $x$  de  $\mu_x$  s'obtient comme un barycentre de  $y$  et



d'un autre point  $z$  de  $K$  (le barycentre de  $\mu_x|_{K \setminus K_n}$ ), et ne saurait donc appartenir à  $L(K)$ , ce qui est absurde. Donc  $\mu_x(K_n) = 0$  pour tout  $n$ , et  $\mu_x$  est donc portée par  $X$  si  $x$  appartient à  $L(K)$ .

Donc  $\mu = \lambda \mu_x + (1-\lambda) \delta_0$  est portée par  $\mathcal{L}(K)$ .

La réciproque résulte du théorème de représentation intégrale.

2° Soit  $x \in E \setminus \{0\}$ . On peut écrire  $x = x^+ - x^-$ , et  $x^+ = \alpha x'$ ,  $x^- = \beta y'$ ,  $\alpha$  et  $\beta \geq 0$ ,  $x'$  et  $y' \in L(K)$ . De plus  $x'$ ,  $y'$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  sont uniques pour  $x$  donné, si on impose  $\inf(x', y') = 0$ .

Posons  $m(x) = \alpha \mu_{x'} - \beta \mu_{y'}$ , et  $m(0) = 0$ . Alors  $m(x)$  appartient à  $M_X(\overline{X})$ , et sa résultante est  $x$ . Considérons l'application

$$m : E \rightarrow M_X(\overline{X}) = \{\text{mesures sur } \overline{X}, \text{ portées par } X\}.$$

Elle est linéaire, car on voit, en coupant par le plan à deux

dimensions défini par  $0$ ,  $x$  et  $y$ , que si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $E^+$ ,  $m(x+y) = m(x) + m(y)$ .

De plus  $m$  est surjective : à toute  $\mu \in M_X(\bar{X})$ , on fait correspondre sa résultante, et si  $\mu \geq 0$ ,  $r(\mu) \in E^+$ .

D'autre part,  $m$  est injective : si  $m(x) = 0$ ,  $\alpha \mu_{x'} = \beta \mu_{y'}$ , d'où  $\alpha = \beta$ , d'où  $\mu_{x'} = \mu_{y'}$ , d'où  $x' = y'$  (unicité de la représentation intégrale), donc  $x = 0$ .

Enfin, il est clair que

$$m(E^+) = M_X^+(\bar{X}).$$

C.Q.F.D.

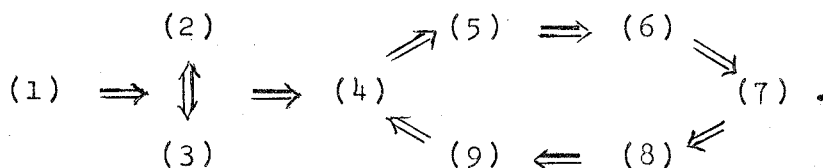
Proposition 13. Soit  $E$  un espace localement convexe séparé ordonné vérifiant

- (a)  $E^+$  possède un chapeau universel  $K$  ;
- (b)  $\Gamma = K \cap \mathcal{L}(E^+)$  est fermé.

Considérons les propriétés suivantes :

- (1)  $L(K)$  est une base compacte de  $E^+$  ;
- (2)  $L(K)$  est fermé ;
- (3)  $X$  est fermé ;
- (4)  $0 \notin \bar{X}$  ;
- (5)  $\inf_{x \in \bar{X}} \lambda_K(x) > 0$  ;
- (6)  $0 \notin \overline{L(K)}$  ;
- (7)  $E^+$  a une base compacte ;
- (8)  $\exists f \in E'$  telle que  $f > 0$  sur  $\bar{X}$  ;
- (9)  $K \neq \overline{L(K)}$ .

Alors on a les implications suivantes :



Démonstration : (1)  $\implies$  (2) est clair.

(2)  $\implies$  (3) résulte de l'hypothèse (b).

(3)  $\implies$  (2) : Soit  $x \in \overline{L(K)}$ . Cet ensemble est l'enveloppe convexe fermée de  $X$ .

Soit  $\mu$  une mesure  $\geq 0$  de masse 1, portée par  $\overline{X} = X$ , de résultante  $x$ .

La fonction  $\lambda_K$  étant affine et s.c.i. sur  $K$ , on a

$$\mu(\lambda_K) = \lambda_K(x) \quad (\text{cf. [9]}) .$$

Or  $\lambda_K = 1$  sur  $X$ . Donc  $\mu(\lambda_K) = 1$ , et  $\lambda_K(x) = 1$ . Donc

$$x \in L(K) = \{x \in E^+ \mid \lambda_K(x) = 1\} .$$

Donc  $L(K) = \overline{L(K)}$ .

(3)  $\implies$  (4) est clair.

(4)  $\implies$  (5). En effet,  $\lambda_K(x) = 0 \iff x = 0$  si  $x \in E^+$ . Donc, puisque  $\overline{X}$  est compact,  $\inf_{\overline{X}} \lambda_K$  est atteint, donc non nul si  $0 \notin \overline{X}$ .

(5)  $\implies$  (6). Soit  $x \in \overline{L(K)}$ . Ce point  $x$  est barycentre d'une mesure  $\mu \geq 0$  de masse 1 portée par  $\overline{X}$ . Soit  $m = \inf_{\overline{X}} \lambda_K > 0$ . Alors on a :

$$\lambda_K(x) = \mu(\lambda_K) \geq \mu(m) = m > 0 .$$

Donc  $\lambda_K(x) > 0$ , et  $x \neq 0$ . Donc  $0 \notin \overline{L(K)}$ .

(6)  $\implies$  (7).  $\overline{L(K)}$  est un convexe fermé qui ne contient pas 0. Soit  $H$  un hyperplan fermé séparant strictement 0 et  $\overline{L(K)}$ . Alors  $H \cap K$  est une base compacte de  $E^+$ .

(7)  $\implies$  (8). Soit  $f \in E'$  telle que  $\{x \mid f(x) = 1\} \cap E^+$  soit une base compacte  $D$  de  $E^+$ . Pour prouver (8), il suffit de montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $f$  soit  $\geq a$  sur  $L(K)$ . Or on a les équivalences :

$f \geq a > 0$  sur  $L(K) \iff f \geq a > 0$  sur  $\{x \mid \lambda_K(x) = 1\} \iff \lambda_K$  est bornée supérieurement sur  $D$ .

Ce dernier point résulte du fait bien connu suivant (cf. [9], [26]) toute fonction affine s.c.i. sur un compact convexe d'un espace localement convexe séparé est bornée.

(8)  $\implies$  (9). Si  $f \geq a > 0$  sur  $\bar{X}$ , alors  $f \geq a > 0$  sur  $\overline{L(K)}$  qui est l'enveloppe convexe fermée de  $X$ , donc  $0 \notin \overline{L(K)}$ , donc  $K \neq \overline{L(K)}$ .

(9)  $\implies$  (4). Soit  $x \in K \setminus \overline{L(K)}$ . Si  $x = 0$ ,  $0 \notin \overline{L(K)}$ , donc  $0 \notin \bar{X}$ . Si  $x \neq 0$ , la génératrice de  $x$  coupe  $\overline{L(K)}$  suivant un segment fermé qui ne contient pas  $x$ , donc qui ne contient pas  $0$ . Donc  $0 \notin \overline{L(K)}$ , donc  $0 \notin \bar{X}$ .

C.Q.F.D.

Remarque 14.

1) En fait, l'hypothèse (b) n'intervient que dans l'implication (2)  $\implies$  (3).

2) L'implication (4)  $\implies$  (3) est fautive en général.

Exemple.  $F = \{f \in C([0,1]) \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1)\}$ , muni de la norme uniforme.

Soit  $E$  le dual  $F'$  de  $F$ , muni de  $\sigma(F', F)$ . On pose  $E^+ = F'^+ = -(E^+)^0$ . Alors on a :  $K = \{\ell \in E^+ \mid \|\ell\| \leq 1\}$ .  $X$  est isomorphe à  $[0, \frac{1}{2}[U]\frac{1}{2}, 1]$ , et  $\bar{X}$  à  $[0, 1]$ , par l'application  $x \rightsquigarrow \delta_x$ .

Proposition 15. Sous les hypothèses du théorème 1, supposons de plus que  $\mathcal{E}(K)$  soit fermé. Alors deux cas seulement sont possibles

1°  $X = \bar{X}$ , et  $E$  est isomorphe à  $M(X)$ .

2°  $\bar{X} = X \cup \{0\}$ , et  $E$  est isomorphe à  $M_0(X)$ , espace des mesures bornées sur l'espace localement compact non compact  $X$ .

C'est évident.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas où  $E$  est le dual d'un espace de Banach réticulé. Nous en tirerons, par

dualité, la représentation de tels espaces comme espaces de fonctions continues sur un compact.

C - La représentation fonctionnelle des espaces de Kakutani.

Définition 16. On appelle M-espace de Kakutani, un espace de Banach  $E$  réticulé, vérifiant :

(NC) La norme est croissante sur  $E^+$  ;

(V)  $\| |x| \| = \| x \|$  ,  $\forall x \in E$  ;

(F)  $B^+ = \{x \mid \|x\| \leq 1\} \cap E^+$  est filtrante croissante.

On dit que  $E$  possède un élément unité si  $B^+$  possède un plus grand élément  $e$  . (F) est alors automatiquement vérifiée.

Exemples.  $C(X)$  , pour  $X$  compact ;  $C_0(X)$  , pour  $X$  localement compact non compact ; l'espace  $F$  de la remarque 14 ;  $L^\infty(X, \mu)$  ,  $\mu$  mesure  $\geq 0$  sur  $X$  ;  $C^K([0,1])$  pour l'ordre défini par :

$f \in C^{K+}$  si  $f^{(p)} \geq 0$  pour  $p = 0, 1, \dots, K$  , et la norme

$\|f\| = \text{Sup} [ |f(0)|, \dots, |f^{(K-1)}(0)|, \|f_K^{(K)}\|_\infty ]$  . Cet espace possède un élément unité, la fonction  $e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^K}{K!}$  .

Définition 17. On appelle L-espace de Kakutani, un espace de Banach  $E$  réticulé, vérifiant :

(A) La norme est additive sur  $E^+$  ;

(V)  $\| |x| \| = \| x \|$  ,  $\forall x \in E$  .

Exemples.  $L^1(X, \mu)$  ,  $\mu$  mesure  $\geq 0$  sur  $X$  ;  $M(X)$  , pour  $X$  compact ;  $M_0(X)$  ,  $X$  localement compact non compact ; l'espace  $E = F'$  de la remarque 14 (cf. la Proposition 18) ; l'espace  $M([0,1]) \times \underline{\mathbb{R}}^K$

pour la norme  $\| |\mu| \| + |x_1| + |x_2| + \dots + |x_K|$  et l'ordre défini par  $M^+([0,1]) \times \mathbb{R}^K$  (cet espace est le dual de  $C^K([0,1])$  ; cf. proposition 18).

Proposition 18. Si E est un M-espace de Kakutani, son dual topologique E' est, pour la norme et l'ordre duaux, un L-espace de Kakutani. De plus, si E\* est le dual algébrique de E, on a les relations :

$$E'^+ = E^{*+} \quad \text{et} \quad E' = E'^+ - E'^+ .$$

Démonstration : Remarquons d'abord que, dans E, les applications  $x \rightarrow |x|$ ,  $x \rightarrow x^+$ ,  $x \rightarrow x^-$  sont uniformément continues ; cela résulte des propriétés (NC) et (V) appliquées à la relation  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ , valable dans tout espace vectoriel réticulé, et des égalités  $x^+ = \frac{x + |x|}{2}$ ,  $x^- = \frac{|x| - x}{2}$ . Il en résulte que  $E^+ = \{x \mid x = |x|\}$  est fermé, donc que E vérifie les hypothèses du lemme 5. En prenant dans ce lemme  $F = \mathbb{R}$ , on voit que  $E^{*+} = E'^+$ .

L'égalité  $E' = E'^+ - E'^+$  résulte alors de ce que E' est le dual ordonné "relativement borné" de E (cf. [5]) : si  $\ell \in E'$ , et si  $x \in E^+$ , alors pour tout y tel que  $|y| \leq x$ , on a :  $|\ell(y)| \leq \|\ell\| \|y\| = \|\ell\| \| |y| \| \leq \|\ell\| \|x\|$ . On voit alors classiquement (cf. [5], [17]) que E', ordonné par  $E'^+$ , est réticulé, et que si  $\ell \in E'$ , on a la formule, pour  $x \in E^+$  :

$$|\ell|(x) = \sup_{|y| \leq x} \ell(y)$$

On en déduit que  $\| |\ell| \| = \|\ell\|$  de la façon suivante : on remarque d'abord que si  $\ell \in E'^+$ , on a :

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \ell(x) = \sup_{\|x\| \leq 1} \ell(|x|) = \sup_{y \in B} \ell(y) \leq \|\ell\|$$

donc :  $\|\ell\| = \sup_{y \in B} \ell(y)$  .

On a alors

$$\| |\ell| \| = \sup_{y \in B} |\ell|(y) = \sup_{y \in B^+} \sup_{|x| \leq y} \ell(x) = \sup_{z \in B} \ell(z) = \|\ell\|$$

Donc  $E'$  vérifie (V).

Enfin,  $B^+$  étant filtrante croissante, on peut écrire, si  $\ell \in E'^+$  :

$$\|\ell\| = \sup_{y \in B^+} \ell(y) = \lim_{B^+} \ell$$

Il en résulte alors que

$$\|\ell + \ell'\| = \lim_{B^+} (\ell + \ell') = \lim_{B^+} \ell + \lim_{B^+} \ell' = \|\ell\| + \|\ell'\| \quad \text{si}$$

$\ell$  et  $\ell'$  appartiennent à  $E'^+$ , c.à.d. la propriété (A)

C.Q.F.D.

Remarque 19. La propriété (A) impliquant la propriété (NC), on voit immédiatement que, si  $E$  est un L-espace de Kakutani,  $E^+$  est fermé, et les applications  $x \rightarrow |x|$ ,  $x \rightarrow x^+$  et  $x \rightarrow x^-$  sont uniformément continues.

D'ailleurs, pour un M-espace comme pour un L-espace, il résulte des relations  $x \vee y = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ ,  $x \wedge y = \frac{x+y-|x-y|}{2}$  que les applications  $x \rightarrow x \vee y$  (borne supérieure de  $x$  et  $y$ ) et  $x \rightarrow x \wedge y$  (borne inférieure de  $x$  et  $y$ ) sont uniformément continues.

Ceci permet de montrer facilement, par prolongement de ces applications, que, si un espace normé  $E$  réticulé vérifie (NC), (V) et (F) (resp. (A) et (V)), son complété  $\hat{E}$  est un M-espace de Kakutani (resp. un L-espace), et que  $(\hat{E})^+$  est l'adhérence dans  $\hat{E}$  de  $E^+$ . Ceci nous servira lors des démonstrations du théorème 7 et du corollaire 35.



Lemme 20. Soit  $E$  un  $M$ -espace, et soit  $E'$  son dual muni de la topologie faible  $\sigma(E', E)$  et de l'ordre dual. On pose

$$K = \{ \ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1 \} .$$

Alors  $K$  est un chapeau universel de  $E'^+$ , et  $E'$  vérifie donc les hypothèses de la définition 9. De plus, l'ensemble  $\Gamma = K \cap \mathcal{L}(E')$  est faiblement fermé.

Démonstration : L'additivité de la norme sur  $E'^+$  et la faible compacité de la boule unité de  $E'$  prouvent immédiatement que  $K$  est un chapeau universel de  $E'^+$ . Pour montrer que  $\Gamma$  est fermé, il suffit de montrer que  $\mathcal{L}(E'^+)$  est fermé, ce qui résulte du lemme classique suivant que l'on trouvera dans [17] :

Lemme 21. Si  $E$  est un espace vectoriel réticulé, et  $\ell$  un élément de son dual algébrique  $E^*$ , il est équivalent de dire que  $\ell$  est un homomorphisme d'espaces réticulés de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  ou que  $\ell$  appartient à  $\mathcal{L}(E'^+)$ .

En effet, la condition  $\ell \in \mathcal{L}(E'^+) = \mathcal{L}(E'^+)$  s'exprime alors au moyen des relations :  $x \geq 0 \implies \ell(x) \geq 0$ ,  $z = x \vee y \implies \ell(z) = \text{Sup}(\ell(x), \ell(y))$ , etc..., et ceci montre bien que  $\mathcal{L}(E'^+)$  est faiblement fermé.

C.Q.F.D.

Il résulte du lemme 20 que l'on peut définir, comme au lemme 10, les applications  $\lambda_K$  et  $u$ . En fait, on a ici, pour  $\ell$  dans  $E'^+$  :

$$\lambda_K(\ell) = \|\ell\|, \quad u(\ell) = \frac{\ell}{\|\ell\|} .$$

Le cospectre  $X = \mathcal{L}(K) \setminus \{0\}$  de  $E'$  s'appellera le spectre de  $E$ .

Proposition 22. Soit  $E$  un  $M$ -espace de Kakutani,  $K$  la partie positive de la boule unité de son dual  $E'$ ,  $L(K)$  la partie positive de la sphère unité de celui-ci,  $X = \mathcal{L}(K) \setminus \{0\}$  le spectre de  $E$ .

1) Alors  $E'$  est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel réticulé, à l'espace  $M_X(\bar{X})$  des mesures sur  $\bar{X}$  portées par  $X$ , et cet isomorphisme est une isométrie pour les normes.

2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $X$  est fermé (et alors  $E'$  est isomorphe à  $M(X)$ ).
- (b)  $L(K)$  est une base compacte de  $E'^+$ .
- (c) La norme de  $E'$  a sa restriction à  $K$  faiblement continue.
- (d)  $E$  possède un élément unité.

3)  $E$  est isomorphe pour l'ordre et isométrique à l'espace  $A_0(K)$  des fonctions affines continues sur  $K$ , nulles en  $0$ .

Démonstration : L'isomorphie et l'isométrie entre  $E'$  et  $M_X(\bar{X})$  résultent du théorème 1, et de la relation

$$\lambda_K(\ell) = \|\ell\|.$$

Montrons l'équivalence des conditions (a)...(d). Au cours de la démonstration, nous démontrerons l'isomorphisme de  $E$  et de  $A_0(K)$

(b)  $\implies$  (a) : résulte de la proposition 13.

(a)  $\implies$  (c) : D'après la proposition 13, (a) implique que  $L(K)$  est fermé. La fonction  $\lambda_K$ , qui est SCI sur  $K$ , y est alors SCS, car  $\lambda_K^{-1}([a, +\infty[) = K \setminus a[K \setminus L(K)]$  est un fermé de  $K$ . Donc  $\lambda_K$ , c.à.d. la norme de  $E'$ , a sa restriction à  $K$  continue.

(c)  $\implies$  (d) : Soit  $U$  la boule unité de  $E'$ . Par définition,  $K = U \cap E'^+ = U^+$ .

Montrons d'abord les relations suivantes, qui nous serviront ultérieurement :

$$U = \text{co}[K \cup (-K)] = \text{co}[L(K) \cup \{-L(K)\}] ; \mathcal{L}(U) = XU(-X) .$$

D'abord, il est clair que  $\text{co}[K \cup (-K)] \subset U$ .

Pour prouver l'inverse, il suffit de prouver que si  $\ell \in U$ , avec

$\|\ell\| = 1$ , alors  $\ell \in \text{co}[KU(-K)]$ . Puisque  $\|\ell\| = \|\ell^+\|$ , on a :  
 $\|\ell^+\| + \|\ell^-\| = 1$  (condition (A)). Donc

$\ell = \|\ell^+\| \frac{\ell^+}{\|\ell^+\|} + \|\ell^-\| \times \frac{-\ell^-}{\|\ell^-\|}$ , et  $\frac{\ell^+}{\|\ell^+\|}$  et  $\frac{\ell^-}{\|\ell^-\|}$  appartiennent à  $L(K)$ . D'où les deux premières égalités.

On en déduit immédiatement que  $\xi(U) = XU(-X)$ .

Si  $x$  et  $y$  sont maintenant deux points de  $E$  on a l'équivalence :

$$(\alpha) : \quad \boxed{x \leq y \iff \text{pour tout } \ell \in X, \ell(x) \leq \ell(y) .}$$

D'autre part, si  $x \in E^+$ , on a l'égalité  $\|x\| = \sup_{\ell \in X} \langle x, \ell \rangle$ , qui résulte de la condition (V). On en déduit que pour tout  $x$  de  $E$  on a :

$$(\beta) : \quad \boxed{\|x\| = \sup_{\ell \in X} \langle |x|, \ell \rangle}$$

Si il existe alors un élément  $e$  de  $E$  tel que  $\langle e, \ell \rangle = 1$  pour tout  $\ell$  de  $X$ , on aura nécessairement :  $e \geq 0$ ,  $\|e\| = 1$ , et  $x \leq e$  pour tout  $x$  de la boule unité de  $E$ . Donc  $e$  sera l'élément unité de  $E$ .

Donc tout revient à montrer qu'il existe  $e \in E$  tel que  $\langle e, \ell \rangle = \|\ell\|$  pour tout  $\ell$  de  $E^+$ .

Il existe une fonction linéaire  $e$  sur  $E'$ , d'ailleurs unique, qui coïncide avec la norme sur  $E^+$  :  $e$  est définie par  $e(\ell) = \|\ell^+\| - \|\ell^-\| = \lambda_K(\ell^+) - \lambda_K(\ell^-)$ .

Il faut montrer que cette fonction appartient à  $E$  (considéré comme sous-ensemble de son bidual). Pour cela, nous allons utiliser un critère de Ptak qui caractérise le complété  $\hat{E}$  d'un espace normé  $E$  :  $e$ , élément de  $E'^*$ , appartient à  $\hat{E}$  si et seulement si la restriction de  $e$  à la boule unité  $U$  de  $E'$  est faiblement continue (cf. [23] ; en fait Ptak donne un critère général

pour un espace localement convexe séparé, un résultat classique de Banach nous suffirait ici ; cf. [6]).

Nous allons montrer ici que  $e$  a bien sa restriction à  $U$  faiblement continue. Comme  $E$  est complet, on en déduira que  $e$  appartient à  $E$ . En fait, on va même montrer, ce qui nous servira au théorème 3, que pour toute fonction  $f$  de  $A_0(K)$ , espace des fonctions affines faiblement continues sur  $K$ , nulles en  $0$ , le prolongement linéaire à  $E'$  de  $f$  a sa restriction à  $U$  faiblement continue. Ceci prouvera donc que  $E$  est isomorphe pour l'ordre (d'après  $(\alpha)$ ) et isométrique (d'après  $(\beta)$ ) à l'espace  $A_0(K)$ .

Soit donc  $f \in A_0(K)$ . Soit  $(x_i)$  un ultrafiltre sur  $U$ , convergeant vers un point  $x$  de  $U$ . On peut écrire  $x_i = y_i - z_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  appartenant à  $K$ . Puisque  $K$  est compact,  $y_i$  et  $z_i$  convergent vers  $y$  et  $z$  dans  $K$ . Donc  $x = y - z$ . Alors,  $f(x_i) = f(y_i) - f(z_i) \rightarrow f(y) - f(z) = f(x)$ , puisque la restriction de  $f$  à  $K$  est continue. Donc  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ , et  $f$  est bien continue sur  $U$ .

(d)  $\implies$  (b) : Si  $e$  est l'élément unité de  $E$ , pour tout  $\ell$  de  $E'^+$  on a :  $\|\ell\| = \sup_{x \in B^+} \langle \ell, x \rangle = \ell(e)$ . Donc  $L(K) = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| = 1\}$  est l'intersection de  $E'^+$  avec l'hyperplan fermé  $e^{-1}(0)$ , donc c'est une base compacte de  $E'^+$ .

C. Q. F. D.

Ajoutons que l'existence de l'isomorphisme isométrique entre  $E$  et  $A_0(K)$  peut se généraliser aux espaces de Banach  $E$  tels que :

1.  $E^+$  est fermé.
2.  $E'$  est un  $L$ -espace de Kakutani

Ce sont les espaces "simpliciaux" introduits par Effros (cf. [13], [25]), et qui peuvent se représenter par une méthode analogue à celle que nous utiliserons pour les  $M$ -espaces, comme des sous-espaces d'espaces du type  $C(X)$  ( $X$  compact), définis par des relations de la forme

$$f(x_i) = \int f d\mu_i \quad (\mu_i \in M_1^+(X), x_i \in X) .$$

Nous allons déduire de la proposition 22 les deux théorèmes de Kakutani. On en trouvera d'autres démonstrations dans [15], [17].

Théorème 2. (1er théorème de Kakutani) - Soit E un M-espace à élément unité, soit X son spectre (compact). Alors l'application  $\gamma : E \rightarrow C(X)$  définie par

$$\gamma(x)(\ell) = \ell(x) \quad (\ell \in E')$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach réticulés, qui est une isométrie, et l'élément unité de E correspond à la fonction identique à 1 sur X.

Démonstration : En effet, par l'application  $\gamma$ , on peut identifier isométriquement (grâce à (B)) E à un sous-espace fermé de  $C(X)$ ,  $\gamma(E)$ .

Mais, d'après la proposition 22, le dual  $E'$  de E s'identifie à  $M(X)$  par l'application  $r : M(X) \rightarrow E' : \mu \mapsto r(\mu)$ , résultante de  $\mu$ , et on a :  $r(\mu)(x) = \int_X \gamma(x) d\mu \quad (x \in E)$ .

Si  $\gamma(E)$  est distinct de  $C(X)$ , par le théorème de Hahn-Banach on peut trouver une mesure  $\mu$  sur X, non nulle, et nulle sur  $\gamma(E)$ .

Donc il existe  $\ell \neq 0$  dans  $E'$ , telle que  $\ell(x) = 0$  pour tout x de E, ce qui est absurde.

Donc  $\gamma(E) = C(X)$ , et  $\gamma(e) = 1$ , bien sûr.

Enfin,  $\gamma$  est un isomorphisme d'ordre grâce à la relation (A).

C.Q.F.D.

La situation est un peu plus compliquée dans le cas où E n'a pas d'unité. Remarquons que, dans la démonstration précédente, on aurait pu, pour montrer que  $\gamma(E) = C(X)$ , utiliser le théorème de Stone-Weierstrass, car  $\gamma(E)$  est un sous-espace réticulé

séparant de  $C(X)$ , contenant les constantes. Il n'en ira plus de même si  $E$  n'a pas d'unité :  $\gamma(E)$  ne contiendra plus les constantes.

On pourrait alors utiliser un théorème de Kakutani généralisant le théorème de Stone-Weierstrass, mais nous préférons la présentation inverse, et nous obtiendrons ce théorème plus tard, au §.8 (théorème 8). De plus, la méthode que nous utilisons servira telle quelle pour démontrer la proposition réciproque du théorème 3, au paragraphe D (proposition 25 et corollaire 26).

C.Q.F.D.

Pour énoncer le deuxième théorème de Kakutani, introduisons une certaine classe d'espaces de fonctions continues.

Soient  $B$  un espace compact, et  $\lambda : B \rightarrow [0,1]$ , une application semi-continue inférieurement, nulle en au plus un point (noté  $a$  s'il existe). On suppose que  $X = \lambda^{-1}(\{1\})$  ( $G_\delta$  de  $B$ ) est dense dans  $B$ . On suppose de plus qu'on s'est donné une application  $u : B \setminus X \rightarrow X$ , borélienne ( $u : B \setminus (X \cup \{a\}) \rightarrow X$  si  $a$  existe).

Définition 23. On dit que le sous-espace de  $C(B)$  :

$$\{f \mid \forall y \in B \setminus X, f(y) = \lambda(y) f[u(y)] \text{ (et } f(a) = 0 \text{ si } a \text{ existe)}\}$$

est un espace  $K$ -canonique s'il sépare les points de  $B$ . On le note alors :

$$C_X(B, \lambda, u) .$$

C'est un sous-espace réticulé fermé de  $C(B)$ . On dit que c'est un espace  $K$ -canonique fort, s'il vérifie de plus une condition de séparation forte :

$$\forall x \in X, \exists f \in C_X(B, \lambda, u) \text{ telle que } 0 < f < 1 \text{ et } f(x) = 1 .$$

Il est clair que, pour la norme uniforme, un espace

$K$ -canonique est un  $M$ -espace de Kakutani. Nous verrons, comme corollaire d'une proposition du paragraphe D, qu'un espace  $K$ -canonique fort n'a un élément unité que si c'est  $C(B)$  tout entier ( $\lambda \equiv 1$ ).

Nous renforçons ici, grâce aux espaces  $K$ -canoniques, le théorème de Kakutani annoncé au début du paragraphe 2 :

Théorème 3. (2ème théorème de Kakutani) - Soit  $E$  un  $M$ -espace de Kakutani, et soit  $X$  son spectre,  $\bar{X}$  l'adhérence de celui-ci dans  $E'$ , et  $\lambda$  et  $u$  les fonctions introduites au lemme 10.

Alors l'application  $\gamma : E \rightarrow C(\bar{X})$  définie par

$$\gamma(x)(\lambda) = \lambda(x) \quad (\lambda \in E')$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés de  $E$  sur l'espace  $K$ -canonique fort  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ .

Si  $X$  est fermé,  $E$  est isomorphe à  $C(X)$  (Théorème 2).

Si  $X = \bar{X} \cup \{0\}$ ,  $E$  est isomorphe à  $C_0(X)$  ( $X$  est localement compact non compact).

Démonstration :

I. Le cas où  $X$  est fermé relève du Théorème 2, d'après la proposition 22. Si  $\bar{X} = X \cup \{0\}$ , il est clair que, comme pour le théorème 2,  $\gamma(E)$  est un sous-espace fermé de  $C_0(X)$  (ou, ce qui revient au même, de l'espace des fonctions continues sur  $\bar{X}$ , nulles en 0), et  $\gamma$  transporte l'ordre et la norme d'après les relations ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ).

Mais, d'après la proposition 22 et la proposition 15,  $E'$  est isomorphe à  $M_0(X)$ . On en déduit, en appliquant le théorème de Hahn-Banach, comme pour le théorème 2, que  $\gamma(E) = C_0(X)$ .

II. 1°) Supposons que  $\bar{X} \setminus (X \cup \{0\}) \neq \emptyset$ . Soit  $Y = \bar{X} \setminus X$ . Pour tout  $y \in Y \setminus \{0\}$ , il existe  $\lambda(y) = \|y\|$  et  $u(y) = \frac{y}{\|y\|}$  tels que  $y = \lambda(y)u(y)$ , et  $0 < \lambda(y) < 1$ ,  $u(y) \in X$ . Si  $0 \in Y$ , on peut poser

$\lambda(0) = 0$ . Alors, d'après le lemme 10,  $X$  est bien un  $G_\delta$  partout dense de  $\bar{X}$ , et pour tout  $x \in E$ , on a bien  $x(y) = \lambda(y) x[u(y)]$ . De plus  $\lambda$  est SCI, et  $u$  est borélienne (lemmes 10 et 20). Enfin, on a vu que  $E$  est isomorphe à  $A_0(K)$ , et  $K$  est un simplexe. Il résulte alors d'un théorème d'Edwards (cf. [11], [12], [13], [25]) que si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux faces fermées disjointes de  $K$ , il existe  $f$  dans  $A(K)$  telle que  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f = 0$  sur  $F_1$ ,  $f = 1$  sur  $F_2$ . Si on applique ceci à  $F_1 = \{0\}$  et  $F_2 = \{y\}$  où  $y \in X$ , on voit qu'il existe  $f \in A_0(K)$  telle que  $0 \leq f \leq 1$  et  $f(y) = 1$ . Donc il existe  $x \in E$ , tel que  $0 \leq x(\ell) \leq 1 \forall \ell \in \bar{X}$ , et  $x(y) = 1$ . De plus, il est clair que  $E$  sépare  $\bar{X}$ .

Donc  $\gamma$  est bien un isomorphisme isométrique de  $E$  sur un sous-espace fermé  $\gamma(E)$  de  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ , et ce dernier espace est un espace  $K$ -canonique fort.

2°) Posons  $F = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ .

Alors  $\gamma(E)$  est un sous-espace fermé de  $F$  qui est lui-même un sous-espace fermé de  $C(X)$ .

D'autre part,  $E'$  est isomorphe à  $M_X(\bar{X})$ .

Soit  $\phi : F' \rightarrow \gamma(E)'$  l'application restriction.

Soit  ${}^t\gamma : \gamma(E)' \rightarrow E'$  l'application transposée de  $\gamma$ .

Soit  $r : M_X(\bar{X}) \rightarrow E'$  l'isomorphisme du théorème 1.

Soit  $\theta : M_X(\bar{X}) \rightarrow F'$  l'application  $\mu \rightsquigarrow \theta(\mu)$  définie par  $\theta(\mu)(f) = \int f d\mu$ .

Posons  $\psi = \theta \circ r^{-1} \circ {}^t\gamma : \gamma(E)' \rightarrow F'$ .

a) Montrons que  $\phi \circ \psi =$  identité de  $\gamma(E)'$

Soit  $m \in \gamma(E)'$  et  $\gamma(x) \in \gamma(E)$ .

On a les égalités successives :

$$\begin{aligned} \langle \phi \circ \theta \circ r^{-1} \circ {}^t\gamma(m), \gamma(x) \rangle_{\gamma(E)', \gamma(E)'} &= \langle \theta \circ r^{-1} \circ {}^t\gamma(m), \gamma(x) \rangle_{F', F'} \\ &= \int \gamma(x) d[r^{-1} \circ {}^t\gamma(m)] = \langle {}^t\gamma(m), x \rangle_{E, E'} \\ &= \langle m, \gamma(x) \rangle_{\gamma(E)', \gamma(E)'} \end{aligned}$$



$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\gamma} & \gamma(E) \subset F \subset C(\bar{X}) \\
 E' & \xleftarrow{t\gamma} & \gamma(E)' \xleftarrow{\phi} F' \\
 & \searrow^{r-1} & \nearrow_{\theta} \\
 & & M_X(\bar{X})
 \end{array}$$

Donc  $\phi \circ \theta \circ r^{-1} \circ t\gamma(m) = m$  pour tout  $m$  de  $\gamma(E)'$ .

b) Nous allons montrer que  $\phi$  est injective. Puisque  $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\gamma(E)}$  il suffit de montrer que  $\psi$  est surjective. Pour cela, il suffit de montrer que  $\theta$  est surjective.

Soit  $\ell$  dans  $F'$ . Il existe  $\mu$  de  $M(\bar{X})$ , telle que  $\mu|_F = \ell$ , c.à.d. telle que pour toute  $f$  de  $F$  on ait  $\int f d\mu = \langle \ell, f \rangle_{F, F'}$ . Comme toutes les fonctions de  $F$  sont nulles en 0, si 0 appartient à  $\bar{X}$ , on peut toujours prendre  $\mu$  de telle sorte que  $\mu(\{0\}) = 0$ .

Si  $\mu$  est positive, définissons  $\tilde{\mu}$  comme suit : si  $g$  appartient à  $C(\bar{X})$ , on pose

$$\tilde{\mu}(g) = \int_X g d\mu + \int_{\bar{X} \setminus X} \lambda(y) g[u(y)] d\mu(y).$$

Ceci a un sens, puisque  $\lambda$  est SCI bornée et  $u$  borélienne. Il est clair que  $\tilde{\mu}$  appartient à  $M^+(\bar{X})$ . Si  $\mu$  n'est pas positive, on pose  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^+ - \tilde{\mu}^-$ , et  $\mu \in M(\bar{X})$ .

Si  $g$  appartient à  $F$ , on voit que l'on a

$$\tilde{\mu}(g) = \int_X g d\mu + \int_{\bar{X} \setminus X} g(y) d\mu(y) = \int_{\bar{X}} g d\mu = \langle \ell, g \rangle_{F, F'}.$$

Montrons que  $\tilde{\mu}$  est portée par  $X$ . Il suffit de montrer que, si  $\mu \in M^+(\bar{X})$ , avec  $\mu(\{0\}) = 0$ ,  $\tilde{\mu}$  est portée par  $X$ .

$$- \tilde{\mu}(1) = \int_X 1 d\mu + \int_{\bar{X} \setminus X} \lambda(x) d\mu(x) = \int_{\bar{X}} \lambda d\mu \quad (\text{car } \lambda = 1 \text{ sur } X)$$

- On a la relation  $\lambda(x) = \|x\| = \text{Sup}_{\alpha \in B^+} \langle x, \alpha \rangle = \text{Sup}_{\alpha \in B^+} \alpha(x)$ , si  $x \in E'^+$ .

Donc  $\int_{\bar{X}} \lambda \, d\tilde{\mu} = \sup_{B^+} \int_{\bar{X}} \alpha \, d\tilde{\mu}$  (car  $B^+$  est filtrante croissante).

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{\bar{X}} \alpha \, d\tilde{\mu} &= \int_X \alpha \, d\mu + \int_{\bar{X} \setminus X} \lambda(x) \alpha[u(x)] \, d\mu(x) \\ &= \int_X \alpha \, d\mu + \int_{\bar{X} \setminus X} \alpha(x) \, d\mu(x) = \int_{\bar{X}} \alpha \, d\mu \end{aligned}$$

Comme  $\sup_{B^+} \int_{\bar{X}} \alpha \, d\mu = \int_{\bar{X}} (\sup_{B^+} \alpha) \, d\mu$ , on voit que  $\int_{\bar{X}} \lambda \, d\tilde{\mu} = \int_{\bar{X}} \lambda \, d\mu$

- Donc  $\int_{\bar{X}} (1-\lambda) \, d\tilde{\mu} = 0$ . Comme  $\lambda < 1$ ,  $\tilde{\mu}$  est portée par  $\lambda^{-1}(1) = X$

Donc  $\tilde{\mu}$  appartient à  $M_X(\bar{X})$ .

Donc, pour toute  $\ell$  de  $F'$ , on a construit  $\tilde{\mu}$  dans  $M_X(\bar{X})$  telle que pour toute  $f$  de  $F$  on ait  $\int f \, d\tilde{\mu} = \langle f, \ell \rangle_{F, F'}$ , c.à.d. telle que  $\theta(\tilde{\mu}) = \ell$ . Donc  $\theta$  est surjective. Par suite  $\psi$  l'est aussi, et  $\phi$  est injective.

c) Il résulte alors du théorème de Hahn-Banach, comme au 1°), que, si  $\gamma(E)$  est un sous-espace fermé de  $F$ , et si l'application restriction  $\phi : F' \rightarrow \gamma(E)'$  est injective, alors  $\gamma(E) = F = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ .

C.Q.F.D.

On peut remarquer qu'il n'était pas a priori évident que  $\tilde{\mu}$  était portée par  $X$ , car l'application  $u$ , quoique borélienne, peut n'être pas  $\mu$ -mesurable au sens de Lusin.

#### Remarque 24.

1) Il résulte des travaux de Boboc et Cornéa ([3]) et de ceux de Daviès ([10]) que, si  $K$  est un simplexe métrisable, et si  $x_0$  et  $x$  sont deux points de  $\mathcal{E}(K)$ , il existe une fonction  $f$  de  $A(K)$ , nulle en  $x_0$ , valant 1 en  $x$ , et telle que  $0 < f < 1$  sur  $K \setminus \{x\}$ .

On voit alors, si  $E$  est séparable (et donc  $K$  et  $\bar{X}$  métrisables), en prenant  $x_0 = 0$  et  $x \in X$ , que l'espace

$C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  vérifie la propriété suivante :

$\forall x \in X, \exists f \in C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  telle que  $f(x) = 1$  et  $0 \leq f < 1$  sur  $\bar{X} \setminus \{x\}$ .

On dit alors que l'espace  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  est  $K$ -canonique strict.

2) Effros a montré très simplement (cf. [13]) que, si  $K$  est un simplexe, on a l'égalité

$$A(K) |_{\bar{\xi}(K)} = \{f \in C[\bar{\xi}(K)] \mid \forall x \in \bar{\xi}(K), f(x) = \mu_x(f)\}$$

où  $\mu_x$  est la mesure maximale de barycentre  $x$  (portée par  $\bar{\xi}(K)$ )

Remarquant qu'ici, si  $x \in \bar{X}$ ,  $\mu_x = \|x\| \delta_x + (1 - \|x\|) \delta_0$ , et que

$\delta_0(f) = 0$  si  $f \in A_0(K)$ , donc que  $\mu_x(f) = \lambda(x) f[u(x)]$ , on voit

qu'on peut démontrer par une autre méthode l'égalité

$\gamma(E) = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ , d'après la proposition 22, 3°).

Nous avons choisi la méthode utilisée parce qu'elle s'applique telle quelle à la réciproque que nous allons montrer maintenant.

#### D - Le problème réciproque.

Dans le théorème de Kakutani que nous citons au début de cette deuxième partie, le sous-espace  $E$  de  $C(Z)$ ,  $Z$  compact, était caractérisé comme suit :  $A$  est un ensemble d'indices quelconques, et on se donne une famille de triplets  $(x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ , où  $x_\alpha$  et  $x'_\alpha$  appartenant à  $Z$  et  $\lambda_\alpha$  à  $[0, 1[$ ; on a alors :

$$E = C(Z, x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha, A) = \{f \in C(Z) \mid \forall \alpha \in A : f(x'_\alpha) = \lambda_\alpha f(x_\alpha)\} \text{ (cf. [15])}$$

Nous avons vu que l'on pouvait préciser ce résultat (en utilisant les fonctions boréliennes  $\lambda$  et  $u$ ). Il était a priori

évident que  $Z$  et la famille  $(x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$  ne pouvaient être quelconques, puisque construits canoniquement à partir de l'espace  $E$  abstrait.

Exemple.  $Z = [0,1]$ ,  $A = \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_n = \frac{1}{n}$ ,  $(x_n)$  est une suite quelconque d'irrationnels, les  $x'_n$  forment une numérotation bijective des rationnels de  $[0,1]$ . On voit alors facilement que  $C(Z, x_n, x'_n, \frac{1}{n}, \mathbb{N}^*) = \{0\}$ . Or, si on pose  $X = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\lambda = 1$  sur  $X$ ,  $\lambda(x'_n) = \frac{1}{n}$ ,  $u(x'_n) = x_n$ , on a bien  $\bar{X} = Z$ ,  $u$  est borélienne,  $X = \lambda^{-1}(1)$  est un  $G_\delta$ , mais  $\lambda$  n'est pas SCI, et  $\{0\}$  ne sépare pas  $[0,1]$ .

Il peut même se faire que l'espace  $C(Z, x_\alpha, x'_\alpha, \lambda_\alpha, A)$  soit un espace du type  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ , où la seule condition non vérifiée soit la condition de séparation.

Exemple.  $\bar{X} = [0,1]$ ,  $X = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ . Soit  $a \in X$ , fixe. Soit  $\{x_n\}$  une numérotation des rationnels de  $[0,1]$ .

L'espace des fonctions continues sur  $[0,1]$  vérifiant

$$f(x_n) = (1 - \frac{1}{n}) f(a)$$

est un espace  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$ , où

$$u : \bar{X} \setminus X \rightarrow X \text{ est définie par } u(x_n) = a \quad \forall n,$$

$$\lambda : \bar{X} \rightarrow [0,1] \text{ est définie par } \lambda(x) = 1 \text{ si } x \in X, \\ \lambda(x_n) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors  $\lambda$  est SCI,  $\lambda^{-1}(1) = X$  est un  $G_\delta$  dense,  $u$  est borélienne. Mais l'espace  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  est réduit à  $\{0\}$  : en effet, de la densité des  $(x_n)$  on déduit que  $\forall x f(x) = f(a)$ , et de la relation  $f(x_2) = \frac{1}{2} f(a) = f(a)$  on déduit que  $f \equiv 0$ .

Les espaces du type  $C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  ne sont donc intéressants

que si on suppose l'hypothèse de séparation, c.à.d. si ce sont des espaces K-canoniques.

On peut alors se poser le problème suivant : soit  $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  un espace K-canonique. La construction du théorème 3, qui montre que  $E$  est isomorphe à un espace  $C_Y(\bar{Y}, \lambda', u')$ , redonne-t-elle la situation initiale, c.à.d. peut-on identifier  $X$  et  $Y$ ,  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$ ,  $u$  et  $u'$  ? Une forme équivalente de ce problème est : l'image de  $X$  par le plongement canonique de  $\bar{X}$  dans le dual de  $E$  est-elle le spectre de  $E$  ? Nous allons voir que la réponse affirmative équivaut au fait que  $E$  soit un espace K-canonique fort.

Il restera un problème ouvert : tout espace K-canonique est-il K-canonique fort ?

Proposition 25. Soit  $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  un espace K-canonique.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $E$  est un espace K-canonique fort ;
- (b)  $\sup_{f \in B^+} f(x) = \lambda(x)$  ( $B^+$  boule unité positive de  $E$ ) ;
- (c) Le spectre de  $E$  est isomorphe à  $X$  par le plongement canonique de  $\bar{X}$  dans  $E'$  ;
- (d)  $E'$  est isomorphe pour l'ordre et isométrique à l'espace  $M_X(\bar{X})$  par l'application "restriction des mesures".
- (e)  $\|\delta_x\|_{E'} = 1$  pour tout  $x$  de  $X$ .

Démonstration :

(a)  $\implies$  (b) : Soit  $x \in X$ . Il existe  $f_0 \in B^+$  telle que

$$f_0(x) = 1 = \lambda(x).$$

$$\text{Donc } \sup_{f \in B^+} f(x) = \lambda(x) = 1$$

Soit  $x \in \bar{X} \setminus (X \cup \{0\})$ . Alors  $u(x) \in X$ , et il existe  $f_0 \in B^+$  telle que  $f_0[u(x)] = 1$ . Alors  $f_0(x) = \lambda(x) f_0[u(x)] = \lambda(x)$ . Comme pour toute  $f$  de  $B^+$ ,  $f(x) = \lambda(x) f[u(x)] \leq \lambda(x)$ , on voit que

$$\sup_{f \in B^+} f(x) = \lambda(x) .$$

Enfin, pour toute  $f$  de  $B^+$ ,  $f(a) = 0$  si  $\lambda = 0$ .

(b)  $\implies$  (c) : Soit  $\theta : M_X(\bar{X}) \rightarrow E'$  l'application restriction définie par  $\theta(\mu)(f) = \mu(f)$ . Elle est linéaire positive.

Alors, la même démonstration qu'au point b) de la démonstration du théorème 3 (qui n'utilise que :  $\sup B^+ = \lambda$ , et  $B^+$  est filtrante croissante) prouve que  $\theta$  est surjective.

$$\text{Soit } K = E_1'^+ = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\}, \quad L(K) = E'^+ \cap \{\ell \mid \|\ell\| = 1\},$$

$Y = \mathfrak{E}(K) \setminus \{0\}$  le spectre de  $E$ .

Soit  $\delta : \bar{X} \rightarrow E'$  l'application  $x \rightsquigarrow \delta_x$ . Alors  $\bar{X}$  est homéomorphe à son image  $\delta(\bar{X})$ , qui est incluse dans  $K$ .

Chaque  $\delta_x$  étant un homomorphisme d'espace réticulé de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  appartient à  $\mathfrak{E}(E'^+)$  (cf. lemme 21). De plus, on a :

$$\|\delta_x\| = \sup_{f \in B^+} \delta_x(f) = \sup_{f \in B^+} f(x) = \lambda(x) .$$

Donc, si  $x \in X$ ,  $\|\delta_x\| = 1$ , et  $\delta_x \in L(K)$ .

$$\text{Donc } \delta(X) \subset L(K) \cap \mathfrak{E}(E'^+) = Y .$$

Il reste à montrer que  $Y \subset \delta(X)$ . Soit  $y \in Y$ . L'application  $\theta$  étant surjective, il existe  $\mu$  de  $M_X(\bar{X})$  telle que  $\theta(\mu) = y$ . En se plaçant dans  $E'$ , cela revient à dire qu'il existe  $\mu$  portée par  $\delta(X)$ , donc par  $Y$ , telle que pour toute  $f$  de  $A_0(K)$ ,  $\mu(f) = f(y)$ .

Soit  $\lambda'$  l'application  $\ell \rightarrow \|\ell\|$  définie sur  $E'$ . Sur  $Y$ ,  $\lambda' = 1$ .

Donc  $\mu(1) = \int \lambda' d\mu$ . Mais  $\sup_{f \in B^+} \langle f, \ell \rangle = \lambda'(\ell) = \|\ell\| \quad \forall \ell \in K$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \lambda' d\mu &= \int \lambda' d\mu^+ - \int \lambda' d\mu^- = \sup_{f \in B^+} \mu^+(f) - \sup_{f \in B^+} \mu^-(f) = \\ &= \lim_{\mathbb{B}} \mu^+(f) - \lim_{\mathbb{B}} \mu^-(f) = \lim_{\mathbb{B}} (\mu^+ - \mu^-)(f) = \lim_{\mathbb{B}} \mu(f) = \lim_{\mathbb{B}} f(y) \\ &= \|y\| = 1 \end{aligned}$$

(car  $B^+$  est filtrante croissante). Donc  $\mu(1) = 1$ , et par suite  $\mu(f) = f(y) \quad \forall f \in A(K)$ , c.à.d. que la résultante de  $\mu$  est  $y$ . Comme  $\mu$  et  $\delta_y$  appartiennent à  $M_Y(\bar{Y})$ , il résulte du théorème 1 que  $\mu = \delta_y$ . Comme  $\mu$  est portée par  $\delta(X)$ , il en résulte que  $\delta_y$  est portée par  $\delta(X)$ , donc que  $y \in \delta(X)$ .

Donc on a bien l'égalité  $\delta(X) = Y$ .

(c)  $\implies$  (d) : Si  $\delta(X) = Y$ , il est clair que  $\delta(\bar{X}) = \bar{Y}$ . Par suite, puisqu'on sait que  $E'$  est isomorphe et isométrique à  $M_Y(\bar{Y})$ , on voit que  $E'$  est isomorphe et isométrique à  $M_X(\bar{X})$ .

(d)  $\implies$  (e) : c'est évident.

(e)  $\implies$  (b) : Soit  $x$  dans  $X$ .  
Alors  $\lambda(x) = 1 = \|\delta_x\|_{E'} = \sup_{f \in B^+} \langle \delta_x, f \rangle = \sup_{f \in B^+} f(x)$ .

Soit  $x$  dans  $\bar{X}$ . Alors on a :

$$\lambda(x) = \|\lambda(x)\delta_{u(x)}\|_{E'} = \sup_{f \in B^+} \langle \lambda(x)\delta_{u(x)}, f \rangle = \sup_{f \in B^+} \lambda(x)f[u(x)] = \sup_{f \in B^+} f(x)$$

Donc on a bien  $\sup B^+ = \lambda$ .

(c)  $\implies$  (a) : Si  $X$  est isomorphe au spectre de  $E$ , on sait par le théorème 3 que pour tout  $x$  de  $X$  il existe  $f$  de  $B^+$  telle que  $f(x) = 1$ . Donc  $E$  est un espace  $K$ -canonique fort.

C.Q.F.D.

Dans [24], nous donnons une démonstration directe de (a)  $\implies$  (d) n'utilisant pas le théorème 3.

Corollaire 26. Soit  $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  un espace  $K$ -canonique fort.

Alors :

- a) le procédé de construction du théorème 3 redonne  $X, \bar{X}, \lambda$  et  $u$ .
- b)  $E$  est égal à  $C(\bar{X})$  tout entier si et seulement si il possède,

en tant que M-espace, un élément unité.

c) Si  $\bar{X}$  est métrisable, E est un espace K-canonique strict.

a) D'après la proposition 25 ; on sait que  $\delta(X) = Y$ , si Y est le spectre de E. E est isomorphe à  $C_Y(\bar{Y}, \lambda', u')$ . On a donc  $\bar{Y} = \delta(\bar{X})$ , et, sur  $\bar{Y}$ ,  $\text{Sup } B^+ = \lambda = \lambda'$ . Donc

$$u'(y) = \frac{y}{\lambda'(y)} = \frac{y}{\lambda(y)} = u(y), \text{ et par suite } u = u'.$$

b) résulte alors du théorème 3, et c) résulte de la remarque 24.

C.Q.F.D.

E - Le problème du "meilleur quotient".

Deux exemples.

1) Soit  $E_1 = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$ . Alors on voit que

$\delta_0 = \delta_1$ , et le procédé du théorème 3 consiste à faire le quotient de  $[0,1]$  par l'identification de 0 et 1. Il en résulte que  $E_1$  est isomorphe à  $C(\mathbb{T}_1)$ .

2)  $E_2 = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = \frac{1}{2}f(1)\}$ . Alors on obtient  $\delta_0 = \frac{1}{2} \delta_1$ ; le spectre X est  $]0,1]$ , et  $\bar{X} = [0,1]$ ,  $Y = \{0\}$ ,  $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ ,  $u(0) = 1$ .

Soit  $\psi : E_2 \rightarrow E_1 : \psi(f)(x) = f(x) - f(1) \times \frac{x}{2}$ ; c'est une bijection linéaire bicontinue de  $E_2$  sur  $E_1$ , et on obtient donc un isomorphisme de  $E_2$  sur  $C(\mathbb{T}_1)$ , et  $E_2$  est ainsi caractérisé comme un espace plus simple que celui fourni par le procédé du théorème 3. Plus généralement :

Proposition 27. Soit  $E = C_X(\bar{X}, \lambda, u)$  un espace K-canonique fort. Si u est injective et si  $\bar{X} \setminus X$  est fini, alors, si Z est l'espace compact obtenu en identifiant les points y et u(y),  $\forall y \in \bar{X} \setminus (X \cup \{0\})$ , il existe une application linéaire bijective



bicontinue de E sur C(Z) si  $0 \notin \bar{X}$ , sur  $C_0(Z)$  si  $0 \in \bar{X}$   
 ( $C_0(Z)$  est l'espace des fonctions continues sur Z nulles en 0).

Démonstration : Soit  $Y = \bar{X} \setminus X$ . Pour tout  $y \in Y \setminus \{0\}$ , soit  $\phi_y$  une fonction continue, telle que :  $0 \leq \phi_y \leq 1$ ,  $\phi_y[u(y)] = 1$ ,  $\phi_y(z) = 0 \quad \forall z \in Y$ , et  $\phi_y[u(z)] = 0 \quad \forall z \in Y \setminus \{0\}$ ,  $z \neq y$  (par exemple,  $\text{supp } \phi_y \subset V_y$  voisinage de  $u(y)$  qui ne coupe  $Y \cup u[Y \setminus \{0\}]$  qu'en  $u(y)$ , et  $\text{supp } \phi_y \cap \text{supp } \phi_z = \emptyset \quad \forall z \in Y \setminus \{0\}$ ,  $z \neq y$ ).

Pour toute  $f$  de  $E$  posons

$$\psi(f)(x) = f(x) - \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} [1 - \lambda(y)] \phi_y(x) f[u(y)] . \text{ Alors on a}$$

$$\psi(f)(y) = f(y) = \psi(f)[u(y)] .$$

Il est clair que  $\psi(f)$  appartient à  $C(\bar{X})$ , et que  $\psi(f)(0) = 0$  si  $0 \in \bar{X}$ . Donc  $\psi(f)$  passe au quotient par identification de  $y$  et  $u(y)$ , et définit  $\tilde{\psi}(f)$  de  $C(Z)$  ou de  $C_0(Z)$ .

L'application  $\tilde{\psi} : E \rightarrow C(Z)$  ou  $C_0(Z)$

est linéaire injective.

$\tilde{\psi}$  est continue :

$$\|\tilde{\psi}(f)\| \leq \|f\| \sup_x [1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \phi_y(x)] \leq 2\|f\| ,$$

donc  $\|\tilde{\psi}\| \leq 2$ .

$\tilde{\psi}$  est surjective : si  $g \in C(Z)$  ou  $C_0(Z)$ , on pose

$$f(x) = g(x) + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} [1 - \lambda(y)] \phi_y(x) \times \frac{g(y)}{\lambda(y)}$$

(on considère  $g$  comme fonction sur  $\bar{X}$ , égale en  $y$  et  $u(y)$ ). Alors  $f \in C(\bar{X})$ ,  $f(y) = \lambda(y) f[u(y)]$  pour  $y \in Y \setminus \{0\}$ ,  $f(0) = 0$  si  $0 \in \bar{X}$ , et  $\tilde{\psi}(f) = g$ .

Enfin,  $\psi^{-1}$  est continue. Cela résulte du théorème de Banach (cf. [6]), mais c'est évident directement :

$$\|\tilde{\Psi}^{-1}(g)\| \leq \|g\| \sup_x [1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \phi_y(x) \times \frac{1}{\lambda(y)}]$$

$$\|\tilde{\Psi}^{-1}\| \leq 1 + \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda(y)} < \infty .$$

C.Q.F.D.

Remarque 28. Bien entendu,  $\tilde{\Psi}$  ne conserve pas l'ordre.

Le problème se pose de savoir si l'on peut généraliser cette proposition. Si l'on conserve l'hypothèse de finitude pour  $Y$ , on peut supprimer l'injectivité pour  $u$ .

Exemple.  $E = \{f \in C[0,2] \mid f(0) = \frac{1}{2}f(1), f(2) = \frac{1}{3}f(1)\}$ .

$$u(0) = u(2) = 1, \lambda(0) = \frac{1}{2}, \lambda(2) = \frac{1}{3}.$$

On ramène d'abord  $g$  à avoir même valeur en 0 et 1 : on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\phi(x) f(1),$$

où  $\phi$  est une courbe en cloche autour de 1. Puis,  $\psi$  étant une courbe à deux cloches autour de 0 et 1, on pose :

$$h(x) = g(x) - \frac{1}{3}\psi(x) g(0),$$

et on obtient  $h(0) = h(1) = h(2)$ . La fonction  $h$  appartient à  $C(Z)$ , où  $Z$  est un espace compact "en 8"

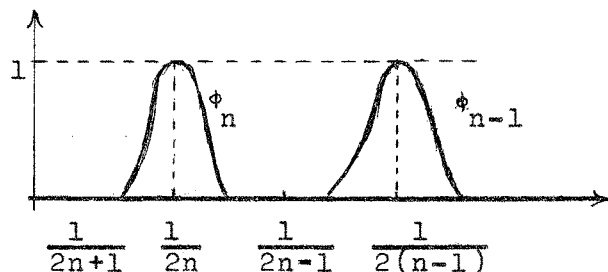
$$\bar{X} : \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \longrightarrow Z : \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad \infty \quad 0 \end{array}$$

On utilise donc le fait que  $u^{-1}(x)$  est fini si  $x \in u(Y \setminus \{0\})$ , pour procéder de proche en proche.

Par contre, la démonstration de la proposition 27 devient fausse si on supprime l'hypothèse de finitude pour  $Y$ .

Contre-exemple.  $E = \{f \in C[0,1] \mid \forall n \geq 1, f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n} f(\frac{1}{2n})\}$  .  
En particulier, si  $f \in E$ ,  $f(0) = 0$  .

Soit  $\phi_n$  une famille de fonctions en cloches, à supports disjoints deux à deux, autour des points  $\frac{1}{2n}$ , et nulles aux points  $\frac{1}{2n+1}$  :



Posons,  $\forall f \in E$  :

$$g(x) = \psi(f)(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) \phi_n(x) \times f(\frac{1}{2n}) , \text{ continue car } f(\frac{1}{2n}) \rightarrow 0 .$$

$$g(\frac{1}{2n+1}) = f(\frac{1}{2n+1}) = g(\frac{1}{2n})$$

$$ng(\frac{1}{2n}) = nf(\frac{1}{2n+1}) = f(\frac{1}{2n}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty .$$

Soit  $Z$  le quotient de  $[0,1]$  obtenu en identifiant  $\frac{1}{2n+1}$  et  $\frac{1}{2n}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Alors  $\psi : E \rightarrow C_0(Z)$  est linéaire injective continue :  $\|\psi\| \leq 2$ , comme dans la démonstration de la proposition 27. L'ensemble  $\text{Im } \psi$  est l'ensemble

$$F = \{g \in C_0(Z) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} ng(\frac{1}{2n}) = 0\} .$$

En effet, on a  $\text{Im } \psi \subset F$ , bien sûr. Si  $g \in F$ , posons

$f(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) \phi_n(x) ng(\frac{1}{2n})$ . Cette fonction est bien continue sur  $[0,1]$ , car  $ng(\frac{1}{2n}) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Donc  $f$  appartient à  $E$ , et  $\psi(f) = g$  évidemment.

Or dire que  $\psi^{-1} : F \rightarrow E$  est continue équivaut à dire que  $F$  est fermé.

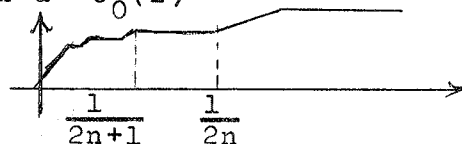
En effet, c'est évident dans un sens ( $F$  étant isomorphe à l'espace de Banach  $E$ ,  $F$  est complet, donc fermé), et dans l'autre c'est le théorème de Banach.

Identifions  $C_0(Z)$  à l'espace des fonctions continues sur  $[0,1]$ , nulles en  $0$ , et vérifiant  $f(\frac{1}{2n+1}) = f(\frac{1}{2n})$ .

Montrons que  $F$  n'est pas fermé.

$F$  est isomorphe à l'espace des fonctions continues sur  $[0,1]$ , vérifiant  $g(\frac{1}{2n+1}) = g(\frac{1}{2n})$  et  $ng(\frac{1}{2n}) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  (ceci  $\Rightarrow g(0) = 0$ ).

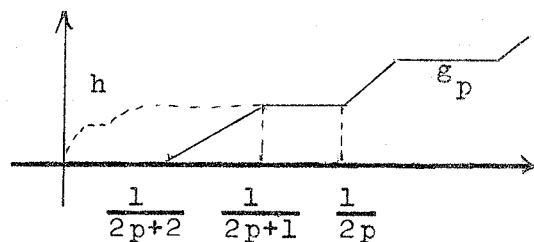
Soit  $h$  la fonction constante sur  $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ , égale à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  sur cet intervalle, et linéaire entre  $\frac{1}{2n+2}$  et  $\frac{1}{2n+1}$ . Cette fonction appartient bien à  $C_0(Z)$



Alors  $h$  n'appartient pas à  $F$ , car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh(\frac{1}{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Or soit  $g_p$  la fonction continue qui coïncide avec  $h$  sur  $[\frac{1}{2p+1}, 1]$ , qui est nulle sur  $[0, \frac{1}{2p+2}]$ , et linéaire sur  $[\frac{1}{2p+2}, \frac{1}{2p+1}]$  :



Alors  $g_p$  appartient à  $F$ , et  $\|h - g_p\| = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . Donc  $F$  n'est pas fermé, et  $\psi^{-1}$  n'est pas

continue. Pourtant  $\lambda$  et  $u$  sont injectives, et  $u[Y \setminus \{0\}] \cup [Y \setminus \{0\}]$  est un sous-espace discret de  $\bar{X}$ .

Donc, dans le cas général, il ne semble pas possible de trouver un "meilleur quotient" que celui fourni par le théorème 3, sur un espace compact résultant de l'identification des points  $x$  et  $u(x)$ .

D'autre part, si l'on veut conserver l'ordre de  $E$ , le "meilleur quotient" est évidemment celui fourni par ce théorème.

#### F - Complément sur les espaces de Banach réticulés.

Définition 29. Soit  $E$  un espace de Banach réticulé vérifiant (NC) et (V). Un sous-cône  $\Gamma$  de  $E^+$  est dit étrangement riche si  $\forall x \in E^+$ ,  $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in \Gamma$ ,  $\forall n$  et les  $x_n$  étrangers deux à deux, tels que :

$$\sum_0^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \text{et} \quad x = \sum_0^{\infty} x_n$$

(si (A) est vérifiée, on a alors  $\|x\| = \sum_0^{\infty} \|x_n\|$ ).

Définition 30. Soit  $E$  un espace réticulé. Un sous-cône  $\Gamma$  de  $E^+$  est dit module de domination si  $\forall x \in E^+$ ,  $\exists y \in E^+$  tel que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists z_\varepsilon \in \Gamma$  tel que  $0 \leq x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$ ; on dit que  $y$  domine  $x$  modulo  $\Gamma$  :  $x \ll y \pmod{\Gamma}$ .

Proposition 31. Soit  $E$  un espace de Banach réticulé vérifiant (NC) et (V). Tout sous-cône  $\Gamma$  de  $E^+$  étrangement riche est un module de domination.

Démonstration : Soit  $x \in E^+$ . Alors  $x = \sum x_n$ ,  $\sum \|x_n\| < \infty$ . Soit  $a_n > 0$ ,  $a_n \nearrow +\infty$ , telle que  $\sum a_n \|x_n\| < \infty$ . Soit  $y = \sum a_n x_n$ . Montrons que  $x \ll y \pmod{\Gamma}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $z_\varepsilon = (x - \varepsilon y)^+$ . Alors  $z_\varepsilon \in E^+$ ,  $z_\varepsilon \geq x - \varepsilon y$ , c'est-à-dire  $x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$ . Comme dans un espace réticulé  $x \rightarrow x^+$  est croissante,  $0 \leq x - z_\varepsilon$ . Il reste à montrer que  $z_\varepsilon$  appartient à  $\Gamma$ .

Or, grâce à (NC) et (V), l'application  $x \rightarrow x^+$  est continue dans  $E$ . Donc

$$z_\varepsilon = (x - \varepsilon y)^+ = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varepsilon a_n) x_n \right)^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n [(1 - \varepsilon a_p) x_p]^+$$

parce que les  $x_n$  sont étrangers deux à deux.

On a donc :

$$z_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n (1 - \varepsilon a_p)^+ x_p.$$

Or  $a_p \nearrow +\infty$ . Donc  $\exists n_\varepsilon$  tel que

$$p > n_\varepsilon \implies (1 - \varepsilon a_p)^+ = 0, \quad p \leq n_\varepsilon \implies 1 - \varepsilon a_p \geq 0.$$

D'où

$$z_\varepsilon = \sum_{p=0}^{n_\varepsilon} (1 - \varepsilon a_p) x_p \in \Gamma.$$

C.Q.F.D.

Proposition 32. Soit  $E$  un espace réticulé muni d'un sous-cône  $\Gamma$  de  $E^+$  qui est un module de domination. Si  $T$  est une application linéaire positive de  $E$  dans un espace vectoriel archimédien  $F$ , alors pour tout  $x$  de  $E^+$ , on a :

$$T(x) = \sup_{\substack{z \in \Gamma \\ z \leq x}} T(z).$$

Pour tout  $x$  de  $E^+$ , il existe  $y$  dans  $E^+$  tel que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists z_\varepsilon$  de  $\Gamma$  tel que  $0 \leq x - z_\varepsilon \leq \varepsilon y$ , donc  $T(x) - \varepsilon T(y) \leq T(z_\varepsilon) \leq T(x)$ .

Soit  $\alpha \in F$ ,  $\alpha \geq T(z)$ ,  $\forall z \in \Gamma$ ,  $z \leq x$ .  
 Alors  $\alpha \geq T(z_\varepsilon) \geq T(x) - \varepsilon T(y)$ , donc  $\alpha - T(x) \geq -\varepsilon T(y)$ ,  $\forall \varepsilon$ .  
 Donc  $\alpha \geq T(x)$ , car  $F$  est archimédien.

C.Q.F.D.

Exemples.

1°  $E = L^1(X, \mu)$ . Le cône  $\Gamma = L^{1+} \cap L^\infty$  est étrangement riche.  
 Si  $f \in L^1_+$ , on peut écrire

$$f = \sum f \times 1_{\{n \leq f < n+1\}} = \sum f_n.$$

2°  $E = M_0(X)$ , espace des mesures bornées sur  $X$  localement compact.  $\Gamma = M_K^+$ , cône des mesures  $\geq 0$  à support compact, est étrangement riche ; on a en effet :

$\mu = \sum \mu \times 1_{K_{n+1} \setminus K_n}$ , où  $(K_n)$  est une suite croissante de compacts.

3°  $E = C_0(X)$  ;  $\Gamma = C_K^+(X)$  est un module de domination : si  $f \in \Gamma$ , et si  $\varepsilon > 0$ , on pose :

$$h_\varepsilon = (f - \varepsilon \sqrt{f})^+ \in \Gamma.$$

3. Les simplexes de Bauer.

Nous allons appliquer les théorèmes de représentation fonctionnelle d'espaces de Banach réticulés à des espaces de fonctions continues sur un compact. Pour illustrer la méthode que nous suivrons, nous allons commencer par démontrer directement un théorème de H. BAUER sur les simplexes (cf. [1]).

Définition 33. Un convexe compact  $X$  d'un espace localement convexe séparé  $E$  est dit simplexe de Bauer si c'est un simplexe dont l'ensemble  $\mathcal{E}(X)$  des points extrémaux est fermé.

Théorème 4. (BAUER). Soit  $X$  un convexe compact d'un espace localement convexe séparé  $E$ , et soit  $H$  l'espace des fonctions affines continues sur  $X$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $X$  est un simplexe de Bauer ;
- (b)  $X$  est un simplexe, et l'application  $x \rightarrow \mu_x$  (mesure maximale de barycentre  $x$ ) est continue de  $X$  dans  $M(X)$  muni de la topologie vague ;
- (c) Pour tout  $x$  de  $X$ , il existe une mesure  $\geq 0$  de masse 1,  $\nu_x$ , unique, portée par  $\overline{\mathcal{E}(X)}$ , de barycentre  $x$  ;
- (d)  $H$  est réticulé pour son ordre propre défini par  $H^+ = \{f \in H \mid f(x) \geq 0, \forall x \in X\}$  ;
- (e) Toute fonction de  $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$  peut être prolongée en une fonction de  $H$ .

Démonstration :

(a)  $\implies$  (c) est bien clair.

(c)  $\implies$  (b). Pour tout  $x$  de  $X$ , il existe  $\mu_x$  maximale de barycentre  $x$ . Or  $\mu_x$  est portée par  $\overline{\mathcal{E}(X)}$ . Donc  $\mu_x = \nu_x$ , et  $\mu_x$  est unique. Donc  $X$  est un simplexe.

L'application  $x \rightarrow \mu_x : X \rightarrow M_1^+[\overline{\mathcal{E}(X)}]$  est bijective, et sa réciproque est continue (car, sur  $X$ , la topologie de  $E$  coïncide avec  $\mathcal{O}(E, E')$ ). Donc  $x \rightarrow \mu_x$  est continue.

(b)  $\implies$  (e). Soit  $f \in C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ . Soit  $x$  dans  $X$ . Posons  $\tilde{f}(x) = \mu_x(f)$ , où  $\mu_x$  est la mesure maximale de barycentre  $x$ , portée par  $\overline{\mathcal{E}(X)}$ . Alors  $\tilde{f} \in H$ , car  $x \rightarrow \mu_x$  est continue, et  $\tilde{f}$  prolonge  $f$ .

(e)  $\implies$  (d). Soit  $r_H : H \rightarrow C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$  l'application res-



-triction. Si  $f$  appartient à  $H$ , alors  $f \geq 0 \implies r_H(f) \geq 0$ .  
 Mais  $r$  est surjective d'après (e). Or  $\sup_X f = \sup_{\mathcal{E}(X)} f$  car

$F = \{x \in X \mid f(x) = \sup_X f\}$  est une face fermée de  $X$ , donc

$F \cap \mathcal{E}(X) \neq \emptyset$ . Donc  $r$  est injective, et  $f \geq 0 \iff r_H(f) \geq 0$ . Donc  
 l'ordre de  $H$  est celui de  $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ , qui est réticulé.

(d)  $\implies$  (a). Si on munit  $H$  de la norme uniforme,  $H$  est  
 un  $M$ -espace de Kakutani avec la fonction 1 comme élément unité.  
 Donc  $H$  est isomorphe à  $C(Z)$  où, si  $K$  est l'ensemble  
 $\{\lambda \in H^{'+} \mid \|\lambda\| \leq 1\}$ ,  $Z = \mathcal{E}[L(K)]$ , car  $L(K)$  est fermé, et est une  
 base compacte de  $H^{'+}$ :

$$L(K) = \{\lambda \in H^{'+} \mid \|\lambda\| = 1\} \quad (\text{cf. proposition 22}).$$

Soit  $\phi : X \rightarrow H' : x \rightarrow \delta_x$ . Alors  $X$  est homéomorphe à son  
 image  $\phi(X)$ , convexe compact pour  $\sigma(H', H)$ , inclus dans  $L(K)$ .  
 Mais, si  $f \in H$ ,  $f \geq 0$  sur  $\phi(X) \iff f \geq 0$  sur  $Z \iff f \geq 0$  sur  
 $L(K)$  (car  $L(K) = \overline{\text{co}}(Z)$ ).

Donc, d'après le théorème de HAHN-BANACH,  $\phi(X) = L(K)$ .

Donc  $X$  est isomorphe à  $\phi(X) = L(K)$  qui est un simplexe  
 de Bauer ( $H^{'+}$  réticulé, et  $Z$  fermé).

Donc  $X$  est un simplexe de Bauer, et  $Z = \phi[\mathcal{E}(X)]$

C.Q.F.D.

Remarque 34. Nous avons en fait démontré que la frontière de  
 Choquet de l'espace  $H$  des fonctions affines continues sur un  
 convexe compact  $X$  d'un espace localement convexe séparé  $E$ , est  
 $\mathcal{E}(X)$ , et prouvé l'équivalence :

$H$  est réticulé  $\iff$  toutes les fonctions de  $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$  sont  
 $H$ -résolutives  $\iff X$  est un simplexe de Bauer.

Nous utiliserons la même méthode au paragraphe suivant pour  
 un espace de fonctions continues sur un compact quelconque. On sait

d'autre part qu'un simplexe  $X$  tel que  $(X)$  soit non fermé est caractérisé par le fait que l'espace  $H$  est un espace simplicial (au sens d'EFFROS, cf. [13]), mais n'est pas réticulé.

4. Le problème de Dirichlet lorsque  $H$  contient les constantes.

Théorème 5. (BAUER). Soit  $X$  un espace compact. Soit  $H$  un sous-espace fermé séparant de  $C(X)$ , contenant les constantes. Soit  $S(H)$  sa frontière de Šilov.

1° Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a)  $H$  ordonné par  $H^+$  est réticulé ;

(b)  $r_H(H) = C[S(H)]$  ;

(c)  $r_H : H \rightarrow C[S(H)]$  est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

2° Si  $H$  vérifie ces propriétés, alors :

( $\alpha$ )  $D_H$  est réduit à  $\{H\}$  ;

( $\beta$ )  $E(H) = S(H)$  ;

( $\gamma$ )  $x \in S(H) \iff \forall f, g \in H, \inf[f(x), g(x)] = (f \wedge g)(x)$  ( $f \wedge g$  note la borne inférieure de  $f$  et  $g$  pour l'ordre de  $H^+$ .)

Démonstration :

1° Il est clair que  $(b) \implies (c) \implies (a)$  (cf. Lemme 2). Montrons que  $(a) \implies (b)$ . Si on note  $\|f\|$  la norme uniforme sur  $H$ ,  $H$  est, muni de cette norme, un  $M$ -espace de Kakutani à élément unité : la fonction  $1$ . On munit  $H'$  de  $\sigma(H', H)$ . Donc si

$L = \{f \in H^+ \mid \|f\| = 1\}$ ,  $\mathcal{E}(L) = Z$  est compact, et  $H$  est isomorphe à  $C(Z)$  (théorème 2).

Soit  $\phi : X \rightarrow L$  l'application  $x \rightarrow \delta_x$ . Alors  $X$  est isomorphe à  $\phi(X)$ . Soit  $Y$  l'enveloppe convexe fermée de  $\phi(X)$ , compacte. Si  $f \in H$ , on a :

$$f \geq 0 \text{ sur } L \iff f \geq 0 \text{ sur } Z \iff f \geq 0 \text{ sur } \phi(X).$$

Donc, d'après le théorème de HAHN-BANACH,  $Y = L$ , et  $Z = \mathcal{E}(Y) \subset \phi(X)$ .  
On a donc

$$Z = S(H) = E(H) \quad (\text{proposition 1}),$$

et puisque  $H$  est isomorphe à  $C(Z)$ ,  $r_H(H) = C[S(H)]$ .

2° (α) résulte du lemme 2.

(β) a été vu au cours de la démonstration du 1°.

(γ) résulte de ce que  $Z = \phi(X) \cap \mathcal{E}(H^+)$ , et du lemme 21.

C.Q.F.D.

Corollaire 35. (Théorème de Stone-Weierstrass).

1° Soit  $H$  un sous-espace séparant de  $C(X)$ , contenant les constantes ; si  $H$  est réticulé pour son ordre propre, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a)  $\bar{H} = C(X)$  ;

(b)  $S(H) = X$  ;

(c)  $E(H) = X$  ;

(d)  $H$  est un sous-espace réticulé de  $C(X)$ .

2° Inversement, un sous-espace réticulé de  $C(X)$ , séparant, et contenant les constantes, est dense dans  $C(X)$ .

Démonstration :

(c)  $\implies$  (b) d'après la proposition 1.

(b)  $\implies$  (a) d'après le lemme 3 et le théorème 5,1°).

(a)  $\implies$  (d) d'après la remarque 19, car  $\bar{H}$  est un M-espace pour l'ordre défini par  $H^+ = (\bar{H})^+ = C(X)^+$ , donc pour l'ordre ordinaire de  $C(X)$  qui prolonge celui de  $H$ .

(d)  $\implies$  (c) d'après le théorème 5,2°) ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ).

C.Q.F.D.

Bien entendu, on s'est servi déjà une fois de façon implicite, dans ce qui précède, du théorème de Stone-Weierstrass : pour établir le théorème de représentation intégrale de Choquet, on utilise le fait que l'espace S-S des différences de deux fonctions convexes continues sur un convexe compact  $Y$  est dense dans  $C(Y)$  ; ceci résulte directement du théorème de Stone-Weierstrass, précisément de l'implication (d)  $\implies$  (a) qui est classique.

Nous allons donner l'énoncé d'un autre critère, dû aussi à Bauer, pour qu'un espace  $H$  vérifie les conditions du théorème 5. Pour une démonstration, on se reportera à [1], [2].

Définition 36. Soit  $H$  un sous-espace séparant de  $C(X)$ . Si  $x$  appartient à  $X$ , on appelle mesures  $H$ -harmoniques du point  $x$  les mesures de  $\mathcal{M}_H^S(\delta_x)$  portées par  $S(H)$  (cf. §.1). On notera  $\mathcal{M}_H^S(\delta_x)$  leur ensemble.

Lemme 37. Sous les hypothèses de la définition 36, on a :

$$\mathcal{M}_H^S(\delta_x) \neq \emptyset \text{ pour tout } x \text{ de } X$$

Cela résulte immédiatement du théorème de Krein et Milman appliqué au convexe compact  $Y = \overline{\text{co}}[\phi(X)]$  introduit à la proposition 1.

Proposition 38. (BAUER). Soit  $X$  un espace compact, et  $H$  un sous-espace séparant de  $C(X)$ , contenant les constantes. Soit  $N$  le plus petit cône convexe fermé de  $C(X)$  stable par enveloppe inférieure et contenant  $H$  ; posons  $\hat{H} = N \cap (-N)$ . Alors on a l'équivalence des propriétés suivantes :

(a)  $H = \hat{H}$ , et tout point de X ne possède qu'une seule mesure H-harmonique.

$$(b) \quad C[S(H)] = r_H(H) .$$

On voit facilement que l'hypothèse  $H = \hat{H}$  est nécessaire en prenant comme exemple pour X le bord d'un carré de  $\mathbb{R}^2$  et pour H les traces sur X des fonctions affines sur  $\mathbb{R}^2$ .

L'espace  $\hat{H}$  est l'espace des fonctions sur X affines sur chaque côté du carré. Alors  $C[S(H)] = r_H(\hat{H})$ , mais  $r_H(H)$  est strictement plus petit que  $C[S(H)]$ ; pourtant chaque point de X ne possède qu'une seule mesure H-harmonique ( $S(H)$  est l'ensemble formé par les quatre sommets du carré).

Définition 39. Supposons que H vérifie les hypothèses de la proposition 38, et soit  $\mu_x$  la mesure harmonique d'un point x. Nous définissons la relation  $y \prec x$  sur X par :

$$y \prec x \iff \text{Support de } \mu_y \subset \text{Support de } \mu_x .$$

Alors  $y \prec x$  est une relation de préordre sur X.

On appellera part de x l'ensemble  $P(x) = \{y \mid y \prec x\}$ .

Lemme 40.

1° Pour tout x, P(x) est fermée.

2°  $P(x) = \{x\} \iff x \in S(H)$ .

3° Pour tout x,  $P(x) \cap S(H) \neq \emptyset$ .

Ce lemme résulte du lemme 42, ci-dessous.

Proposition 41. (Principe du maximum strict). Soit f dans H. Si f atteint son maximum en un point x, f est constante sur la part  $P(x)$  de x.

Cela résulte du fait suivant (lui-même facile à prouver) :

Lemme 42. Si  $Y$  est un convexe compact dans un espace localement convexe séparé  $E$ , notons  $F_x$  la plus petite face fermée de  $Y$  contenant un point  $x$ ; alors, si  $Y$  est un simplexe de Bauer, on a l'équivalence

$$y \in F_x \iff \text{Supp } \mu_y \subset \text{Supp } \mu_x,$$

où  $\mu_y$  et  $\mu_x$  sont les mesures maximales de barycentres  $y$  et  $x$

En effet, on plonge  $X$  dans  $Y \subset H^+$  (cf. proposition 1). Dans  $Y$ , l'ensemble

$$F = \{y | f(y) = f(x)\} = \{y | f(y) = \sup_X f\} = \{y | f(y) = \sup_Y f\}$$

est une face de  $Y$  contenant  $x$ , donc il contient  $F_x$ . Donc

$$\phi^{-1}[F \cap \phi(X)] = f^{-1}[f(x)] \supset \phi^{-1}[F_x \cap \phi(X)] = P(x), \text{ et par suite } f \equiv f(x) \text{ sur } P(x).$$

Le lemme 40 est alors immédiat.

C.Q.F.D.

Remarque 43. Si  $Y$  est un simplexe qui n'est pas un simplexe de Bauer ( $\mathcal{E}(Y)$  non fermé), alors le lemme 42 est en général faux.

## 5. Le problème de Dirichlet dans le cas linéairement séparant.

Dans cette partie,  $H$  est toujours un sous-espace séparant de  $C(X)$ , mais on ne suppose plus qu'il contienne les constantes. Mais s'il existe une fonction  $h$  de  $H$  strictement positive, l'espace  $H/h$  des  $f/h$ , pour  $f$  dans  $H$ , contient les constantes. Mais il ne sépare pas nécessairement  $X$ . D'où l'introduction de la

condition de séparation linéaire, plus forte que la séparation. Dans la suite nous noterons  $H/h$  et  $hH$  respectivement l'espace des  $f/h$  et celui des  $hf$  ( $f \in H$ ).

Définition 44. Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$ . Nous dirons que  $H$  est linéairement séparable si :

$$(LS) \quad \forall x \neq y, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists f \in H \text{ telle que } f(x) \neq \lambda f(y).$$

Si  $H$  est séparable, et si  $1 \in H$ , alors  $H$  est linéairement séparable.

Lemme 45. Si  $H$  est un sous-espace séparable de  $C(X)$ , soit  $\phi(X)$  l'image de  $X$  dans  $H'$  par l'application  $x \rightarrow \delta_x$ .

Si  $H'$  est muni de  $\sigma(H', H)$ , le cône convexe fermé engendré par  $\phi(X)$  est  $H'^+$ . C'est aussi celui engendré par  $Y$ , enveloppe convexe fermée de  $\phi(X)$ .

En effet,  $f \geq 0$  sur  $\phi(X) \iff f \geq 0$  sur  $H'^+$  (théorème de HAHN-BANACH).

Le premier problème qui se pose est de savoir si  $0$  appartient à  $\phi(X)$ .

Proposition 46. Sous les hypothèses du lemme 45, considérons les propriétés :

- (1)  $H = H^+ - H^+$  ;
- (2)  $H'^+$  est saillant ;
- (3)  $0 \notin \phi(X)$  ;
- (4)  $0 \notin Y$  ;
- (5) Les fonctions de  $H$  n'ont pas de zéro commun ;
- (6) Il y a dans  $H$  une fonction strictement positive ;
- (7)  $H'^+$  a une base compacte.

Alors, (1)  $\implies$  (2), et si (2) est vraie :

(3)  $\iff$  (4)  $\iff$  (5)  $\iff$  (6)  $\implies$  (7) (et (4)  $\iff$  (6) dans tous les cas).

Enfin, (6)  $\implies$  (1) .

(1)  $\implies$  (2), (5)  $\iff$  (3) et (4)  $\implies$  (3) sont évidents. D'autre part (4)  $\iff$  (6) grâce au théorème de HAHN-BANACH. Si (2) est vraie, et si  $0 \in Y$ , alors  $0 \in \mathcal{E}(Y)$  donc  $0 \in \Phi(X)$ . Donc (3)  $\implies$  (4) si (2) est vraie. Enfin (6)  $\implies$  (1) est facile, et (6)  $\implies$  (7) est clair : si  $h > 0$  sur  $X$ ,  $\{\ell \in H'^+ \mid \ell(h) = 1\}$  est une base compacte de  $H'^+$ .

C.Q.F.D.

Définition 47. Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$ , linéairement sépa-  
rant. On appelle frontière linéaire de  $H$  l'ensemble  $L(H)$  défini  
par :

$$L(H) = \{x \in X \mid \mu \in M^+(X) \text{ et } \mu(f) = f(x) \quad \forall f \in H \implies \mu = \delta_x\} .$$

Le résultat de base est dû à G. CHOQUET (cf. [7]) .

Proposition 48. (CHOQUET). Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$ , liné-  
airement séparant.

1°  $L(H) \subset E(H)$ , et si  $1 \in H$ ,  $L(H) = E(H)$  .

2° Pour tout  $h > 0$  de  $C(X)$ ,  $L(H) = L(hH)$  .

3°  $L(H) = \bigcap_{h > 0} E(hH)$  .

4° Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a)  $L(H) \neq \emptyset$  ;

(b) Il existe  $h > 0$  dans  $H$  ;

(c)  $H = H^+ - H^+$  ;

(d)  $H'^+$  est saillant.

5° Si  $L(H) \neq \emptyset$ , alors pour toute  $h > 0$ ,  $L(H) = E(\frac{H}{h})$  .



Démonstration :

1° Evident.

2° On a les équivalences suivantes :

$$(A) : \mu(f) = f(x) , \forall f \in H \iff (B) : \int gh(x) \frac{d\mu}{h} = g(x) , \forall g \in hH .$$

$$(A') : \mu = \delta_x \iff (B') : h(x) \frac{\mu}{h} = \delta_x .$$

$$x \in L(H) \iff \{(A) \implies (A')\} \iff \{(B) \implies (B')\} \iff x \in L(hH) .$$

3°  $L(H) \subset E(hH)$  ,  $\forall h > 0$  de  $C(X)$  , d'après 1° et 2°.

Soit  $x \notin L(H)$  . Alors  $\exists \mu_x > 0$  telle que  $\mu_x(f) = f(x)$  ,  $\forall f \in H$  , et  $\mu_x \neq \delta_x$  . Mais  $\exists h \in C(X)$  ,  $h > 0$  , telle que  $h(x) \times \int \frac{d\mu}{h} = 1$  .

Posons  $\nu_x = h(x) \times \frac{\mu}{h}$  . Alors  $\nu_x \in M_1^+(X)$  ,  $\nu_x \neq \delta_x$  . Si  $hf \in hH$  ,  $\nu_x(hf) = h(x) \mu(f) = (hf)(x)$  . Donc  $x \notin E(hH)$  .

4° et 5° L'hypothèse (LS) implique que  $H$  sépare  $X$  , et que les fonctions de  $H$  n'ont pas de zéro commun.

D'après la proposition 46,  $(b) \implies (c) \implies (d) \implies (b)$  . Si  $(b)$  est vraie,  $H/h$  sépare  $X$  , et contient 1 , donc, d'après 1° et 2° ,

$$L(H) = E\left(\frac{H}{h}\right) \neq \emptyset .$$

Donc  $(b) \implies (a)$  .

Supposons  $(b)$  fausse. Alors 0 appartient à  $Y$  . Or 0 n'appartient pas à  $\phi(X)$  . Donc  $\exists \mu > 0$  sur  $X$  , non ponctuelle, telle que  $\mu(f) = 0$  ,  $\forall f \in H$  . Donc,

$$\forall x \in X , (\mu + \delta_x)(f) = f(x) , \forall f \in H .$$

Donc  $L(H) = \emptyset$  . Donc  $(a) \implies (b)$  , et 5° est démontré.

C.Q.F.D.

Remarque 9. Il est facile de voir que, si  $L(H) \neq \emptyset$  , on a :

$$L(H) = \phi(X) \cap \mathcal{L}(H'^+) = Y \cap \mathcal{L}(H'^+)$$

(après plongement dans  $H'$ ).

Théorème 6. Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$ , fermé, linéairement séparant, et réticulé pour l'ordre de  $H^+$ . Alors :

- 1°  $L(H)$  est fermée, non vide ;
- 2° On a l'équivalence :  $x \in L(H) \iff (f \wedge g)(x) = \inf[f(x), g(x)]$   
 $\forall f \in H$  ;
- 3° L'application restriction :  $H \rightarrow C[L(H)]$  est bijective ;
- 4° Pour toute  $h > 0$  dans  $H$ ,  $L(H) = S(\frac{H}{h}) = E(\frac{H}{h})$ .

En effet, puisque  $H$  est réticulé, on a :  $H = H^+ - H^+$ .  
Donc  $L(H) \neq \emptyset$ . Soit  $h > 0$ ,  $h \in H$ . Alors  $\frac{H}{h}$  est réticulé, séparant, et contient 1. D'après le théorème 5, l'application

$$r_{H/h} : \frac{H}{h} \rightarrow C[S(\frac{H}{h})]$$

est bijective. D'où la conclusion.

C.Q.F.D.

Corollaire 50. (KAKUTANI). Soit  $X$  un espace compact. Tout "sous-espace réticulé" de  $C(X)$ , linéairement séparant, est dense dans  $C(X)$ .

Corollaire 51. (CHOQUET-DENY). Soit  $X$  un espace compact. Tout sous-cône convexe de  $C(X)$ , semi-réticulé inférieurement et linéairement séparant est total dans  $C(X)$ . (Cf. [8]).

## 6. Frontières d'un cône convexe de fonctions continues.

Définition 52. Soient  $X$  un espace compact,  $C$  un cône convexe de fonctions continues sur  $X$ .

On appelle frontière de Choquet de  $C$ , l'ensemble

$$E(C) = \{x \in X \mid \mu \in M_1^+(X) \text{ et } \mu(f) \geq f(x), \forall f \in C \implies \mu = \delta_x\}.$$

On appelle frontière de Šilov de  $C$ , le plus petit fermé maximisant pour  $C$ ,  $S(C)$ , s'il existe.

Un théorème de Bauer affirme l'existence de la frontière de Šilov dans un cas très général, pour un ensemble de fonctions semi-continues supérieurement (cf. [1], [11] ou [18]). Nous n'aurons besoin que d'un cas très particulier (et MOKOBODZKI a montré que le cas général pouvait se ramener à celui-ci). Nous utiliserons la méthode des convexes compacts ordonnés pour démontrer ce cas particulier.

Soient  $E$  un espace localement convexe séparé, et  $K$  un convexe compact de  $E$ . On suppose que  $E$  est ordonné par un cône convexe saillant fermé  $E^+$ .

Lemme 53.  $K$  ordonné par l'ordre induit est inductif vers le bas et vers le haut. On posera :

$$\mathcal{M}(K) = \{x \in K \mid x \text{ maximal}\} = \{x \in K \mid (x + E^+) \cap K = \{x\}\}$$

$$\mathcal{m}(K) = \{x \in K \mid x \text{ minimal}\} = \{x \in K \mid (x - E^+) \cap K = \{x\}\}.$$

C'est immédiat.

Proposition 54. Soient  $A$  le cône des traces sur  $K$  des fonctions

affines continues sur E, croissantes, et A<sub>0</sub> le cône des traces sur K des fonctions linéaires continues sur E, positives (A<sub>0</sub> = E<sup>+</sup>, A = A<sub>0</sub> + R). Alors on a :

$$E(A) = E(A_0) = \mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K) ; S(A) = S(A_0) = \overline{E(A)} .$$

Toute fonction de A ou de A<sub>0</sub> atteint son maximum sur E(A) .

Démonstration : D'abord, il est clair que les frontières sont les mêmes pour A et A<sub>0</sub> .

1° Soit f appartenant à A, et soit  $m = \max_{x \in X} f(x)$  ; la propriété

$$\{x | f(x) = m\} \cap \mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K) \neq \emptyset$$

se démontre de la façon suivante : on applique le lemme de Zorn à la famille  $\mathcal{F}$  des variétés d'appui de K définie par :

$$V \in \mathcal{F} \iff \begin{cases} (1) & V \subset \{x | f(x) = m\} \\ (2) & V \text{ est variété d'appui fermée de } K \\ (3) & \forall x \in V \cap K, (x + E^+) \cap K \subset V . \end{cases}$$

La variété  $\{x | f(x) = m\}$  appartient à  $\mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}$ , ordonnée par inclusion, est inductive vers le bas. Un élément V minimal est réduit à un point  $\{x\}$  (par l'absurde, avec le théorème de HAHN-BANACH). Alors x appartient à  $\mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K)$ . Donc f atteint son maximum sur  $\mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K)$  .

2°  $\overline{\mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K)}$  est donc maximisant.

Soit F un fermé de K maximisant, et soit  $a \in \mathcal{N}(K) \cap \mathcal{L}(K)$  . Supposons  $a \notin F$  . Alors  $a \notin G$ , enveloppe convexe fermée de F (car  $a \in \mathcal{L}(K)$ ) .

$$a \in \mathcal{N}(K) \implies (a + E^+) \cap K = \{a\} .$$

Donc  $(a+E^+) \cap G = \emptyset$ . Donc  $\exists f \in A$  telle que  $f(a) = 0$  et  $f < 0$  sur  $G$ , et  $G$  n'est pas maximisant. Donc  $a \in F$ . Donc  $\overline{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)} \subset F$ , et  $\overline{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)}$  est bien la frontière de Šilov  $S(A)$  de  $A$ .

3° (a)  $E(A) \subset \mathcal{E}(K)$  résulte de la définition de  $E(A)$ , et de la remarque 34.

(b) Si  $y \in K$ ,  $y > x$ , alors  $\forall f \in A$ ,  $\delta_y(f) \geq f(x)$ , et  $\delta_y \neq \delta_x$ .

Donc  $x \notin E(A)$ . Donc  $E(A) \subset \mathcal{M}(K)$ . Par suite,  $E(A) \subset \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)$ .

(c) Réciproquement, supposons que  $a \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)$ , et que  $a \notin E(A)$ .

Donc, il existe  $\mu \in M_1^+(K)$ ,  $\mu \neq \delta_a$ , telle que  $\mu(f) \geq f(a)$  pour tout  $f$  de  $A$ .

Soit  $b$  le barycentre de  $\mu$ . Alors  $b \in K$ ,  $\mu \neq \delta_a$  et  $a \in \mathcal{E}(K)$ ; donc  $b \neq a$ .

Or, si  $a \in \mathcal{M}(K)$ ,  $b \notin a+E^+$ .

Donc il existe  $f$  de  $A$  telle que  $f(a) = 0$ ,  $f(b) < 0$ , soit :  $\mu(f) < f(a)$ , ce qui est impossible. Donc on a

$$\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K) \subset E(A)$$

C.Q.F.D.

Remarque 55. On peut aussi appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des "faces croissantes" incluses dans l'ensemble  $\{x \mid f(x) = m\} \cap K$  :  $L$  est une face croissante de  $K$  si  $L$  est convexe fermée et vérifie

( $\alpha$ )  $L$  est une face ;

( $\beta$ )  $x_1 \in L$ ,  $x_2 \in K$  et  $x_2 \geq x_1 \implies x_2 \in L$ .

Cette méthode permettrait de montrer que la proposition 54 est aussi valable pour le cône  $A_{(K)}^C$  des fonctions définies sur  $K$ , affines continues et croissantes.

Proposition 56. Soient  $X$  un espace compact, et  $C$  un sous-cône convexe de  $C^+(X)$ , séparant, et vérifiant :

$$(C-C)^+ = C .$$

Alors la frontière de Choquet  $E(C)$  de  $C$  est non vide, toute fonction de  $C$  atteint son maximum sur  $E(C)$ , et  $\overline{E(C)}$  est la frontière de Šilov  $S(C)$  de  $C$ .

De plus,  $E(C) \subset E(C-C)$ .

Démonstration : On plonge  $X$  dans  $(C-C)^+$  par l'application  $\phi : x \rightarrow \delta_x$ , et on applique la proposition 54 à  $(C-C)^+$  et à l'enveloppe convexe fermée  $Y$  de  $\phi(X)$  dans  $(C-C)^+$  muni de la topologie de la dualité et ordonné par  $(C-C)^+$ .

C.Q.F.D.

On peut aussi énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Proposition 57. Soit  $H$  un sous-espace séparant de  $C(X)$ , vérifiant

$$H = H^+ - H^+ .$$

(a) Alors  $E(H^+) \neq \emptyset$ ,  $S(H^+) = \overline{E(H^+)}$ , toute fonction de  $H^+$  atteint son maximum sur  $E(H^+)$ .

(b)  $E(-H^+) \neq \emptyset$ ,  $S(-H^+) = \overline{E(-H^+)}$  est le plus petit ensemble fermé minimisant pour  $H^+$ , et toute fonction de  $H^+$  atteint son minimum sur  $E(-H^+)$ .

(c)  $E(H^+) \cup E(-H^+) \subset E(H)$ .

C'est à peu près évident : si  $Y$  est l'enveloppe convexe fermée de  $\phi(X)$  dans  $H^+$  :

$$E(H) = \mathcal{L}(Y) ; E(H^+) = \mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{D}(Y) ; E(-H^+) = \mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{N}(Y) .$$

C.Q.F.D.

Remarque 58. Si les fonctions de  $H$  ont un zéro commun  $a$ , alors

$$E(-H^+) = \{a\} .$$

Si une génératrice extrémale  $d$  de  $H^+$  coupe  $Y$ , suivant un segment  $[a,b]$ , alors  $b \in E(H^+)$  et  $a \in E(-H^+)$ .

Lemme 59. Soit  $E$  un espace localement convexe séparé, ordonné par un cône  $E^+$  fermé. Si  $K$  est un chapeau universel de  $E^+$ , alors :

$$\mathcal{M}(K) = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\} , \text{ co-spectre de } E \text{ (cf. définition 9), et}$$

$$\mathcal{X}(K) = \{0\} .$$

C'est immédiat.

7. Le problème de Dirichlet dans le cas général d'un espace réticulé séparant.

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent à un sous-espace de  $C(X)$  réticulé pour son ordre propre.

Théorème 7. Soit  $H$  un sous-espace fermé et séparant de  $C(X)$ , vérifiant :

(R)  $H$  est réticulé pour l'ordre de  $H^+$  ;

(F)  $B^+ = \{f \in H^+ \mid \|f\| \leq 1\}$  est filtrante croissante.

Alors :

1° La frontière de Choquet de  $H^+$  :  $Z = E(H^+)$  est non vide, c'est un  $G_\delta$  de  $\bar{Z} = S(H^+)$ , frontière de Šilov de  $H^+$ . De plus,  $Z$  est inclus dans  $E(H)$ , et

$$\forall x \in \bar{Z} , \forall f , g \in H \text{ on a : } (f \wedge g)(x) = \inf[f(x), g(x)] .$$

Toute fonction de  $H$  atteint le maximum de sa valeur absolue (ponctuelle) sur  $Z$ .

2° Les restrictions des fonctions de  $H$  à  $\bar{Z}$  forment un espace K-canonique fort

$$C_Z(\bar{Z}, \lambda, u)$$

et la restriction est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

3° Si les fonctions de  $H$  n'ont pas de zéro commun, alors  
 $\inf_{x \in \bar{Z}} \lambda(x) > 0$ .

4° Si  $X$  est métrisable, l'espace K-canonique de 2° est strict, c.à.d. vérifie de plus :

$$\forall x \in Z, \exists f \in H^+ \text{ telle que } f(x) = 1 \text{ et } f(y) < 1, \forall y \neq x.$$

Démonstration : 1° et 2° Si  $f \in H$ , notons  $f^+$  et  $f^-$  les fonctions  $f^+ = f \vee 0$ ,  $f^- = (-f) \vee 0$ . Posons

$$N(f) = \|f \vee (-f)\|_\infty.$$

Si  $|f|$  est la valeur absolue ponctuelle de  $f$ , on a  $0 \leq |f| \leq f \vee (-f)$ . Donc on a l'inégalité :

$$\|f\|_\infty \leq N(f).$$

D'autre part, on voit très facilement que la condition (F) est équivalente à :  $\forall f, g \in H^+, \|f \vee g\| = \sup(\|f\|, \|g\|)$ . D'où

$$N(f) = \sup(\|f^+\|, \|f^-\|).$$

$N$  est, sur  $H$ , une norme plus fine que la norme uniforme  $\|f\|$ .

Soit  $\bar{H}$  le complété de  $H$  pour la norme  $N$ . Il est facile de voir que c'est un M-espace de Kakutani (cf. remarque 19).



Dans  $\overline{H'}$ , on posera

$K = \{ \ell \in \overline{H'}^+ \mid \|\ell\| \leq 1 \}$ , et  $Z = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}$  ( $Z$  est le spectre de  $\overline{H}$ ).

D'après le théorème 3,  $\overline{H}$  est isomorphe à  $C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$  pour l'ordre, et c'est une isométrie (pour les normes :  $N$  sur  $\overline{H}$  et uniforme sur  $C(\overline{Z})$ ).

Soit  $x$  dans  $X$ . L'application  $\delta_x$  est linéaire continue sur  $H$  muni de la norme uniforme, donc sur  $H$  muni de  $N$ , donc se prolonge en  $\overline{\delta}_x \in \overline{H'}$ .

On a même  $\overline{\delta}_x \in \overline{H'}^+$ , et  $\|\overline{\delta}_x\| \leq 1$ , donc  $\overline{\delta}_x \in K$ . Soit  $\overline{\phi}$  l'application :  $x \rightarrow \overline{\delta}_x$ . Cette application  $\overline{\phi} : X \rightarrow K$  munie de  $\sigma(\overline{H'}, \overline{H})$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $\overline{\phi}(X)$ , car, comme  $H$  sépare  $X$ , elle est injective, et elle est continue. De plus, sur  $\overline{\phi}(X)$ ,  $\sigma(\overline{H'}, \overline{H})$  coïncide avec  $\sigma(\overline{H'}, H)$  (séparée sur  $\overline{\phi}(X)$ ).

Le cône  $\overline{H}^+$  est l'adhérence de  $H^+$  dans  $\overline{H}$  (cf. remarque 19) pour la norme  $N$ , donc pour la norme uniforme sur  $\overline{Z}$ , donc sur  $K$ . Donc, en tant que cônes de fonctions continues sur  $K$ , il est clair que  $\overline{H}^+$  et  $\overline{H}^+$  ont même frontière de Choquet dans  $K$ . Or celle de  $\overline{H}^+$  est  $Z$  (lemme 59 et proposition 54). Donc c'est celle de  $H^+$ .  
Or, si  $f \in H^+$ ,

$$N(f) = \sup_{x \in X} f(x) = \sup_{\overline{\delta}_x \in \overline{\phi}(X)} \langle f, \overline{\delta}_x \rangle = \sup_{\ell \in K} f(\ell).$$

Donc  $\overline{\phi}(X)$  est un fermé maximisant pour  $H^+$ . Donc  $\overline{Z} \subset \overline{\phi}(X)$ .

Soit  $f$  dans  $H$ . On a :  $N(f) = \sup(\|f^+\|, \|f^-\|) = \sup_Z(\max f^+, \max f^-)$

Or, sur  $Z$  :

$$(f \wedge g)(\overline{\delta}_x) = \inf[f(x), g(x)], \quad \forall f, g \in \overline{H}.$$

Donc, sur  $Z$  :

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0).$$

D'où :

$$N(f) = \sup_Z |f| = \max_Z |f| \leq \|f\|_\infty .$$

D'où  $N(f) = \|f\|_\infty$  , et  $H = \overline{H}$  ,  $\overline{H'} = H'$  , etc... autrement dit H est, pour la norme uniforme, un M-espace de Kakutani isomorphe à  $C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$  .

D'après la proposition 56 (ou la proposition 57), Z est donc frontière de Choquet de  $H^+$  dans X , et, de plus  $\forall f \in H$  , |f| atteint son maximum sur Z . Le reste de l'énoncé de 1° et 2° résulte du théorème 3.

3° Si les fonctions de H n'ont pas de zéro commun, il résulte de la proposition 13 que  $\inf_{x \in \overline{Z}} \lambda(x) > 0$  .

4° Enfin, de la remarque 24, on déduit que, si X est métrisable, l'espace  $C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$  vérifie la propriété de l'énoncé.

C.Q.F.D.

Remarque 60.

(a) Le sous-ensemble de  $C(X)$  :

$${}^*H = \{|h| \mid h \in H\}$$

possède une frontière de Silov :  $\overline{Z} = S({}^*H)$  .

(b) La réciproque de 3° est fausse.

Exemple :  $X = [\alpha, 1]$  ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  , et H est l'ensemble des traces sur X des formes linéaires sur  $\underline{\mathbb{R}}$  .

H' est isomorphe à  $\underline{\mathbb{R}}$  , K à  $[0, 1]$  ,  $\phi(X)$  à  $[\alpha, 1]$  ,  $\overline{Z} = Z$  à  $\{1\}$  , et H à  $C(Z)$  c.à.d. à  $\underline{\mathbb{R}}$  .

Donc  $\lambda \equiv 1$  . Pourtant, si  $\alpha = 0$  , les fonctions de H ont un zéro commun.

(c) En général,  $Z \neq E(H)$  et  $Z \neq E(-H^+)$  . Dans l'exemple précédent :

$$Z = E(H^+) = \{1\} , E(-H^+) = \{\alpha\} , E(H) = \{\alpha\} \cup \{1\} .$$

(d)  $\text{Inf}(f, g)$  et  $f \wedge g$  coïncident non seulement sur  $\bar{Z}$ , mais aussi sur tout point de  $\phi(X) \cap \mathcal{E}(H^+)$  (caractérisé par cette propriété). C'est la raison pour laquelle il est faux que, lorsque  $H$  est un sous-espace réticulé séparant,  $H$  soit un espace  $K$ -canonique sur  $X$ . Un contre-exemple est fourni par l'espace  $H$  de (b) (cf. à ce sujet la proposition 64 et la remarque 65)

Nous avons vu que toute fonction de  $*H = \{h \mid h \in H\}$  atteint son maximum sur  $Z$ , et a donc  $\bar{Z}$  pour frontière de Šilov. On a de même :

Proposition 61. (Principe du maximum positif). Toute fonction de  $H$  qui a un maximum  $> 0$  l'atteint en au moins un point de  $Z$ . Donc, si

$$H_* = \{h \in H \mid h^+ \neq 0\} ,$$

$H_*$  a une frontière de Šilov :

$$S(H_*) = \bar{Z} .$$

Démonstration : Soit  $h \in H_*$ ,  $h = h^+ - h^-$ . Soit  $m = \max h^+ > 0$ ; il existe  $x \in Z$  tel que  $h^+(x) = m$ . Or, sur  $Z$ , l'ordre propre et l'ordre ponctuel coïncident. Donc  $h^-(x) = 0$ ,  $h \leq h^+ \leq h^+(x) = h(x)$ .  
Donc

$$h(x) = \max h .$$

C.Q.F.D.

On peut préciser la nature de  $Z$  lorsque l'espace  $H$ , outre les hypothèses du théorème 7, vérifie l'hypothèse de séparation linéaire.

Proposition 62. Soit  $H$  un sous-espace fermé et séparant de  $C(X)$ , vérifiant les hypothèses (R) et (F) du théorème 7, et, de plus :

(LS)  $H$  est linéairement séparant.

Alors :

(a)  $Z$  est identique à la frontière linéaire de  $H$ .  
Cette frontière est fermée, et

$$x \in Z \iff [f \wedge g](x) = \inf[f(x), g(x)] .$$

(b) La restriction  $H \rightarrow C(Z)$  est un homomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés de  $H$  sur  $C(Z)$ .

C'est immédiat à partir de la proposition 48 et des remarques 49 et 60 (d).

Remarque 63.

(a) Sous les hypothèses de la proposition 62, il est faux que  $E(H) = E(H^+)$ , c'est-à-dire que la fonction  $1 \in H$ . Mais il existe  $h_0 \in H$  telle que  $h_0 \equiv 1$  sur  $Z$ .

Exemple :

$$X \subset \underline{\mathbb{R}}^2 : X = \{(1,0)\} \cup \{(0,1)\} \cup \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\} .$$

$H$  est l'ensemble des traces sur  $X$  des fonctions linéaires sur  $\underline{\mathbb{R}}^2$ .

$H'$  est isomorphe à  $\underline{\mathbb{R}}^2$  :  $K = \{|x| + |y| \leq 1\} \cap \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$ .

$Z = \{(1,0)\} \cup \{(0,1)\}$  est fermé, c'est  $L(H)$ . Mais  $1 \notin H$ .

(b) A partir de la proposition 62 on retrouve le corollaire 50 du théorème 6.

Exemple :  $X = [0,1]$ .  $H = \{f \in C(X) \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1)\}$  (exemple de la remarque 14). C'est un espace  $K$ -canonique fort, et  $H'$  est isomorphe à l'espace de mesures  $M_Z([0,1])$  où  $Z = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ . On voit alors que  $\bar{Z} = [0,1]$ ,  $E(-H^+) = [0,1[$ ,  $E(H) = S(H) = [0,1]$ .

Proposition 64. Soit  $H$  un sous-espace réticulé fermé et séparant de  $C(X)$ . Alors  $Z = E(H^+)$  existe, c'est un  $G_\delta$  de  $X$ , et la restriction

$$H \rightarrow C(\bar{Z})$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés de  $H$  sur un espace K-canonique fort

$$C_Z(\bar{Z}, \lambda, u) .$$

De plus,  $\lambda$  et  $u$  ont des prolongements à  $X$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} : X &\rightarrow [0,1] , \lambda < 1 \text{ sur } X \setminus \bar{Z} , \text{ semi-continue inférieurement,} \\ \tilde{u} : X \setminus Z &\rightarrow Z , \text{ borélienne,} \end{aligned}$$

tels que

$$H = \{f \in C(X) \mid \forall y \in X \setminus Z , f(y) = \tilde{\lambda}(y) f[\tilde{u}(y)] \text{ (et } f(a) = 0 \text{ si } \tilde{\lambda}(a) = 0)\},$$

et ce sont les seules "relations linéaires bi-ponctuelles" que vérifie  $H$  (hormis celles qui se déduisent algébriquement de celles-là).

Cela résulte de la remarque 61 (d) :  $\phi(X) \subset \mathcal{E}(H'^+)$  , donc  $\forall y \in \phi(X)$  ,  $y \neq 0$  ,  $\exists \tilde{\lambda}(y) \in ]0,1]$  et  $\tilde{u}(y) \in Z$  tels que  $y = \tilde{\lambda}(y) \tilde{u}(y)$  . Alors l'application  $y \rightarrow \tilde{\lambda}(y) = \lambda_K(y)$  (cf. lemme 10) est s.c.i., et l'application  $y \rightarrow \tilde{u}(y) = \frac{y}{\lambda_K(y)}$  est borélienne. Sur  $\bar{Z}$  ,  $\lambda = \tilde{\lambda}$  ,  $u = \tilde{u}$  . De plus  $Z$  est un  $G_\delta$  de  $X$  , et non seulement de  $Z$  , parce que  $\phi(X) \subset \mathcal{E}(H'^+)$  .

Enfin,  $H$  est bien l'ensemble des fonctions  $f$  de  $C(X)$  vérifiant les relations  $f(y) = \tilde{\lambda}(y) f[\tilde{u}(y)]$  , parce que la restriction à  $\bar{Z}$  établit une bijection entre  $H$  et  $C_Z(\bar{Z}, \lambda, u)$  .

Il n'y a pas d'autres relations du type  $f(y) = kf(z)$  parce que  $\phi(X) \subset \mathcal{L}(H^+)$  (cf. lemme 10).

C.Q.F.D.

Remarque 65.  $H$  n'est donc pas, en général, un espace  $K$ -canonique sur  $X$ . Ce serait vrai si  $X = \bar{Z}$ , c'est-à-dire si  $\forall x \in X, \forall V$  voisinage de  $x, \exists y \in V$  tel que :

$$\{f(z) \geq f(y), \forall f \in H^+\} \implies \{z = y\}.$$

Il y a de plus un moyen commode d'obtenir l'ensemble  $Z$  à partir de  $H$ . Ceci est important, car la détermination de  $Z$  permet de réaliser le dual de  $H$ .

Proposition 66. Soit  $H$  un sous-espace réticulé fermé et séparant de  $C(X)$ .

$$\text{Soit } \lambda(x) = \sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ f \in H}} f(x)$$

Alors la frontière de Choquet de  $H^+$  est exactement l'ensemble

$$Z = \lambda^{-1}(1),$$

et l'application restriction  $\theta$  de  $M_Z(X)$  dans  $H'$ , définie par

$$\langle \theta(\mu), f \rangle = \int f \, d\mu$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

Cela résulte immédiatement des propositions 25 et 64.

Nous allons voir maintenant comment on peut appliquer ce qui précède aux cas des sous-espaces réticulés fermés quelconques de  $C(X)$ , non nécessairement séparants. Nous serons amenés à utiliser une technique largement inspirée de [19].

8. Application à l'étude des sous-espaces réticulés non séparants de  $C(X)$ .

Théorème 8. (KAKUTANI). Soit  $X$  un espace compact, et  $H$  un sous-espace réticulé et fermé de  $C(X)$  (non nécessairement séparant)

Alors les éléments de  $H$  vérifient une famille de relations de la forme

$$f(x_i) = \lambda_i f(x'_i) \quad , \quad \lambda_i \in [0,1] \quad ,$$

et si on considère toutes les relations de cette forme qu'ils vérifient,  $H$  est exactement l'espace des fonctions continues vérifiant ces relations.

C'est ce théorème, qui généralise le théorème de Stone-Weierstrass, que nous annonçons au paragraphe 2,C.

Démonstration : Si  $H$  est séparant, c'est la proposition 64.

Sinon, soit  $R$  la relation d'équivalence sur  $X$  définie par :

$$xRy \iff \forall f \in H, f(x) = f(y) .$$

Soient  $\tilde{X} = X/R$  le quotient de  $X$  par  $R$ , et  $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$  l'application canonique sur le quotient. Toute fonction  $f$  de  $H$  passe au quotient en  $\tilde{f}$  sur  $\tilde{X}$ , continue, et  $\tilde{H} = \{\tilde{f} | f \in H\}$  est un sous-espace séparant réticulé et fermé de  $C(\tilde{X})$ . Le théorème sera démontré par la proposition 64 si on sait que  $\tilde{X}$  est compact. Pour cela, il suffit de montrer que  $\tilde{X}$  est séparé.

Soit  $\psi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{H}}$  l'application :  $\tilde{x} \mapsto (\tilde{f}(\tilde{x}))_{\tilde{f} \in \tilde{H}}$ . Cette application est continue injective,  $\mathbb{R}^{\tilde{H}}$  est séparé, donc  $\tilde{X}$  est séparé.

C. Q. F. D.

Bien entendu, si  $H$  n'est pas fermé,  $\bar{H}$  est l'espace des fonctions vérifiant toutes les relations de la forme  $f(x_i) = \lambda_i f(x_i')$  ( $\lambda_i \in [0,1]$ ) vérifiées par les éléments de  $H$ .

Nous allons étudier de plus près le compact  $\tilde{X}$  et le sous-espace  $\tilde{H}$  de  $C(\tilde{X})$  introduits dans la démonstration précédente. Nous nous plaçons d'abord dans le cas d'un sous-espace  $H$  quelconque, vérifiant seulement  $H = H^+ - H^+$ .

Définition 67. On pose, si  $x$  et  $y \in X$  :  $xRy \iff f(x) = f(y) \forall f \in H$ . C'est une relation d'équivalence sur  $X$ . On notera  $R(x)$  la classe d'équivalence d'un point  $x$  ; c'est un ensemble fermé.

Soit  $\tilde{X}$  l'espace compact quotient de  $X$  par la relation  $R$ ,  $\phi$  l'application canonique de  $X$  sur  $\tilde{X}$  ; soit  $\tilde{H}$  le sous-espace de  $C(\tilde{X})$  isomorphe à  $H$  par l'application  $\tilde{f} \rightsquigarrow f = \tilde{f} \circ \phi$ . C'est un sous-espace réticulé fermé et séparant de  $C(\tilde{X})$ .

Enfin, on notera  $C_R$  le sous-espace de  $C(X)$  isomorphe à  $C(\tilde{X})$  par l'application  $\tilde{f} \rightsquigarrow f = \tilde{f} \circ \phi$ . C'est un sous-espace fermé de  $C(X)$ , contenant les constantes.

Définition 68.

a) On appellera pseudo-frontière de Choquet de  $H^+$  l'ensemble  $PE(H^+)$  ainsi défini :

$$PE(H^+) = \{x \in X \mid \mu \in M_1^+(X), \mu(f) \geq f(x) \forall f \in H^+ \implies \mu \text{ est portée par } R(x)\}$$

b) L'ensemble des fermés saturés pour  $R$  et maximisants pour  $H^+$  est inductif vers le bas pour l'inclusion. On appellera pseudo-frontière de Šilov de  $H^+$  l'ensemble  $PS(H^+)$ , s'il existe, défini comme le plus petit fermé maximisant pour  $H^+$  et saturé pour  $R$ .

Lemme 69. Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$  tel que  $H = H^+ - H^+$ , et  $H \neq \{0\}$ . Alors on a l'égalité

$$PE(H^+) = \phi^{-1}[E(\tilde{H}^+)] .$$



Démonstration :

$$a) \quad \phi^{-1}[E(\tilde{H}^+)] \subset PE(H^+) .$$

Soit  $y$  un point de  $\phi^{-1}[E(\tilde{H}^+)]$ . Soit  $\mu \in M_1^+(X)$ , telle que  $\mu(f) \geq f(y)$  pour toute  $f$  de  $H^+$ . Soit  $\nu = \phi(\mu)$ , mesure de  $M_1^+(\tilde{X})$ . Alors, si  $\tilde{f} \in \tilde{H}^+$ , on a :

$$\nu(\tilde{f}) = \mu(\tilde{f} \circ \phi) = \mu(f) \geq f(y) = \tilde{f}[\phi(y)] \quad (\text{car } \tilde{f} \circ \phi = f \in H^+) .$$

Or  $\phi(y) \in E(\tilde{H}^+)$ . Donc  $\nu = \delta_{\phi(y)}$ . Le support de  $\nu$  étant l'image par  $\phi$  du support de  $\mu$  (cf. [5], b)), celui-ci est inclus dans  $\phi^{-1}[\phi(y)] = R(y)$ . Donc  $y$  appartient à  $PE(H^+)$ .

$$b) \quad PE(H^+) \subset \phi^{-1}[E(\tilde{H}^+)] .$$

Soit  $y$  dans  $PE(H^+)$ , et soit  $\phi(y)$ . Soit  $\nu$  dans  $M_1^+(\tilde{X})$ , telle que  $\nu(\tilde{f}) \geq \tilde{f}[\phi(y)] \quad \forall \tilde{f}$  de  $\tilde{H}^+$ . La mesure  $\nu$  définit une forme linéaire positive  $\ell$  sur le sous-espace  $C_R$  de  $C(X)$ , et la fonction 1 appartient à  $C_R$ . Donc il existe une mesure positive  $\mu$  sur  $X$  telle que  $\mu|_{C_R} = \ell$ . Comme  $\langle \ell, 1 \rangle = \nu(1) = 1$ ,  $\mu$  appartient à  $M_1^+(X)$ . Il est clair que  $\nu = \phi(\mu)$ .

Soit  $f = \tilde{f} \circ \phi$  dans  $H^+$ . Alors on a :  
 $\mu(f) = \nu(\tilde{f}) \geq \tilde{f} \circ \phi(y) = f(y)$ , pour toute  $f$  de  $H^+$ . Puisque  $y$  appartient à  $PE(H^+)$ , il en résulte que  $\mu$  est portée par  $R(y)$ . Il s'ensuit que  $\nu = \phi(\mu)$  est portée par  $\phi(y)$ , donc  $\nu = \delta_{\phi(y)}$ .  
 Donc  $\phi(y)$  appartient à  $E(\tilde{H}^+)$ .

C.Q.F.D.

Proposition 70. Soit  $H$  un sous-espace de  $C(X)$  tel que  $H = H^+ - H^+$  et  $H \neq \{0\}$ . Alors la pseudo-frontière de Šilov de  $H^+$  existe, c'est le plus petit fermé saturé pour  $R$  contenant la pseudo-frontière de Choquet de  $H^+$ . Celle-ci est donc non vide ; de plus, toute fonction de  $H^+$  atteint son maximum sur cette dernière.

Cela résulte immédiatement de la proposition 57 et du lemme 69.

Appliquons les résultats précédents au cas où  $H$  est un sous-espace réticulé.

Corollaire 71. Soit  $H$  un sous-espace réticulé fermé de  $C(X)$ ,  $H \neq \{0\}$ . Alors  $PE(H^+)$  existe, c'est un  $G_\delta$  de  $X$ , et si on pose

$$\lambda(x) = \sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ f \in H}} f(x)$$

alors  $PE(H^+)$  est exactement  $\lambda^{-1}(1)$ . De plus, pour tout  $x$  de  $PE(H^+)$ , il existe  $f$  de  $PE(H^+)$  telle que  $0 \leq f \leq 1$  et  $f(x) = 1$ .

Cela résulte des propositions 64 et du lemme 69, car si on pose  $\tilde{\lambda}(\tilde{x}) = \sup_{\substack{0 \leq \tilde{f} \leq 1 \\ \tilde{f} \in H}} \tilde{f}(x)$  ( $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ), il est clair que  $\lambda = \tilde{\lambda} \circ \phi$ .

On peut même voir que  $PE(H^+)$  est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts saturés pour  $R$ .

Nous allons, comme à la proposition 66, essayer de donner une représentation du dual  $H'$  de  $H$  en termes de mesures sur  $X$ .

Corollaire 72. Soit  $H$  un sous-espace réticulé fermé de  $C(X)$ , non réduit à  $\{0\}$ . Soit  $Z = PE(H^+)$ , soit  $C_R$  le sous-espace de  $C(X)$  formé des fonctions constantes sur chaque classe d'équivalence pour  $R$ , et soit  $C_R^\perp$  son orthogonal dans  $M(X)$ .

Alors il existe une bijection linéaire canonique

$$^a : M_Z(X) / C_R^\perp \rightarrow H'$$

qui est un isomorphisme d'ordre et une isométrie. Plus précisément  $M_Z(X) / C_R^\perp$  désigne l'image canonique de  $M_Z(X)$  par l'application  $p$  de  $M(X)$  sur l'espace quotient  $M(X) / C_R^\perp$ ; il est muni de l'ordre et de la norme quotients. L'isomorphisme  $\theta$  est alors défini par :

$$\langle \theta[p(\mu)], f \rangle = \int f d\mu \quad (f \in H).$$

Démonstration :

1) Notons encore  $\phi$  l'extension de l'application canonique de  $X$  sur  $\tilde{X}$  aux mesures :  $\phi : M(X) \rightarrow M(\tilde{X})$ . Sa transposée  $t\phi$  est définie par  $t\phi(\tilde{f}) = \tilde{f} \circ \phi$ . Elle induit un isomorphisme d'ordre et une isométrie de  $C(\tilde{X})$  sur  $C_R$ . L'application  $\phi$  est surjective, et si  $\mu$  appartient à  $M_1^+(\tilde{X})$ , il existe  $\nu$  de  $M_1^+(X)$  telle que  $\phi(\nu) = \mu$ .

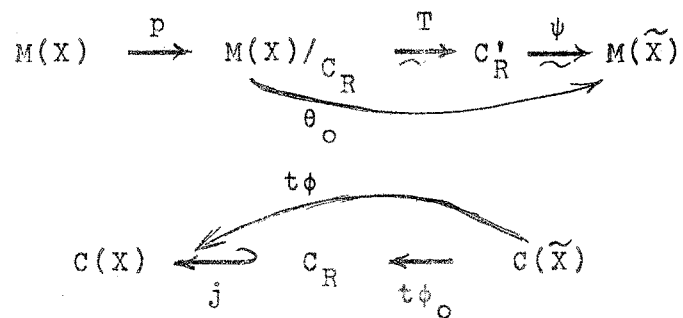
Soit  $\psi$  l'isomorphisme de  $C_R^i$  sur  $M(\tilde{X})$  transposée de  $t\phi$ , application  $t\phi$  considérée comme application à valeurs dans  $C_R$ . C'est un isomorphisme d'ordre et une isométrie.

Soit  $T$  l'isométrie canonique de  $M(X)/C_R^\perp$  sur  $C_R^i$ . Nous poserons  $\theta_0 = \psi \circ T$ . Soit  $p$  la surjection canonique de  $M(X)$  sur  $M(X)/C_R^\perp$ .

Alors, pour toute  $\mu$  de  $M(X)$ , on a :

$$\theta_0[p(\mu)] = \phi(\mu)$$

(car  $t(T \circ p) = j$ , injection canonique de  $C_R$  dans  $C(X)$ ).



- $\theta_0$  est linéaire, bijective, isométrique.
- $\theta_0$  est positive : soit  $\mu$  telle que  $p(\mu) \geq 0$ . Alors il existe  $\nu \geq 0$  telle que  $p(\mu) = p(\nu)$ , et  $\theta_0[p(\mu)] = \phi(\nu) \geq 0$ .
- $\theta_0^{-1}$  est positive : Soit  $\pi = \theta_0[p(\mu)] = \phi(\mu) \geq 0$ . La mesure  $\pi$  définit un élément de  $C_R^i$ . On peut le prolonger en une mesure  $\nu$  sur  $X$ , positive. Donc  $\phi(\mu) = \phi(\nu) = \pi$ , et  $p(\mu) = p(\nu)$ . Donc  $p(\mu) \geq 0$ .

2) L'espace  $M_Z(X)/C_R^\perp$  est par définition  $p[M_Z(X)]$ .

On a l'inclusion :  $\theta_0[p(M_Z(X))] \subset M_{\tilde{Z}}(\tilde{X})$  , où  $\tilde{Z}$  désigne l'ensemble  $\phi(Z)$  , frontière de Choquet de  $\tilde{H}$  .

En effet, soit  $p(\mu)$  , pour  $\mu$  portée par  $Z$  . Alors  $\theta_0[p(\mu)] = \phi(\mu)$  est portée par  $\phi(Z) = \tilde{Z}$  (cf. [5], b)).

3). a) Soit  $\mu \in M^+(X)$  , telle que  $\phi(\mu) \in M_{\tilde{Z}}(\tilde{X})$  . Alors  $\mu \in M_Z^+(X)$  .

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait  $\mu|_{X \setminus Z} > 0$  , donc  $\phi(\mu|_{X \setminus Z}) > 0$  et portée par  $\tilde{X} \setminus \tilde{Z}$  . Donc  $\phi(\mu)$  ne serait pas portée par  $\tilde{Z}$  .

b) Si  $\mu \in M_Z(X)$  ,  $\nu \in M^+(X)$  , et si  $\mu = \nu$  sur  $C_R$  , alors  $\nu \in M_Z^+(X)$  .

Cela résulte immédiatement de a) (ce serait faux si  $\nu$  n'était pas positive).

4) On a l'égalité  $\theta_0[p(M_Z(X))] = M_{\tilde{Z}}(\tilde{X})$  .

Il suffit, compte tenu de 2), de montrer que si  $\pi \in M_{\tilde{Z}}^+(\tilde{X})$  , il existe  $\mu \in M_Z(X)$  telle que  $\phi(\mu) = \pi$  .

La mesure  $\pi$  définit un élément  $\ell$  de  $C_R^{'+}$  . Puisque  $C_R$  contient les constantes, il existe  $\mu$  de  $M^+(X)$  telle que  $\mu = \ell$  sur  $C_R$  , donc telle que  $\phi(\mu) = \pi$  . D'après 3).a) ,  $\mu \in M_Z^+(X)$  .

5) Soit  $\theta_1 = \theta_0|_{p[M_Z(X)]} : p[M_Z(X)] \rightarrow M_{\tilde{Z}}(\tilde{X})$  . L'application  $\theta_1$  est linéaire, bijective, isométrique.

6)  $\theta_1$  est positive, c'est évident.

7)  $\theta_1^{-1}$  est positive : si  $\pi \in M_{\tilde{Z}}^+(\tilde{X})$  , on a vu en 4) qu'il existe  $\mu$  de  $M_Z^+(X)$  telle que  $\phi(\mu) = \pi$  . Donc  $p(\mu) = \theta_1^{-1}(\pi) \geq 0$  .

8)  $\theta_1$  est donc une isométrie qui est un isomorphisme pour l'ordre. Soit  $\tilde{\theta} : M_Z(\tilde{X}) \rightarrow \tilde{H}'$  l'isomorphisme isométrique de la proposition 66, et soit  $\beta : \tilde{H}' \rightarrow H'$  l'isomorphisme isométrique transposé de  $(t\phi_c|_{\tilde{H}})^{-1} : H \rightarrow \tilde{H}$  .

Alors  $\theta = \beta \circ \tilde{\theta} \circ \theta_1 : M_Z(X)/C_R^\perp \rightarrow H'$  est l'isomorphisme isométrique cherché.

Si  $\mu \in M_Z(X)$ , il est clair que  $\theta[p(\mu)]$  est défini par

$$\langle \theta[p(\mu)], f \rangle = \int f \, d\mu \quad (f \in H).$$

C.Q.F.D.

Remarque 73.

a) Il y a un isomorphisme canonique  $\gamma$  de  $M_Z(X)/M_Z(X) \cap C_R^\perp$  sur  $p[M_Z(X)]$ . Grâce au point 3)b) de la démonstration précédente, on voit facilement que  $\gamma$  est un isomorphisme pour l'ordre. Mais si on munit les espaces quotients des normes quotients,  $\gamma$  n'est pas en général une isométrie : on a seulement  $\|\gamma\| \leq 1$ .

b) Si  $\mu$  et  $\nu \in M_Z(X)$ , et si  $\mu = \nu$  sur  $H$ , alors  $\phi(\mu) = \phi(\nu)$  : en effet,  $\phi(\mu)$  et  $\phi(\nu)$  coïncident sur  $\tilde{H}$ , et sont portées par  $\tilde{Z}$  ; l'application  $\tilde{\theta} : M_Z(\tilde{X}) \rightarrow \tilde{H}'$  étant injective, on en déduit :  $\phi(\mu) = \phi(\nu)$ .

Il en résulte l'existence d'un isomorphisme naturel  $\delta$  de  $M_Z(X)/C_R^\perp$  sur  $M_Z(X)/H^\perp$ . Cet isomorphisme est positif, mais il n'y a, a priori, aucune raison que  $\delta^{-1}$  le soit.

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (Heinz) -  $\checkmark$  Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.11, 1961, p. 89-136.
- [2] BAUER (Heinz) - Frontière de  $\checkmark$  Silov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t.3, 1958/59, n°7, 23 p.
- [3] BOBOC (N.) et CORNEA (A.) - Cônes des fonctions continues sur un espace compact, C.R.Acad.Sc. Paris, t.261, 1965, p. 2564-2567.
- [4] BONY (Jean-Michel) - Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.3, 1964, N°5, 7 p.
- [5] BOURBAKI (Nicolas) - a) Intégration, Chap.2 : Espaces de Riesz. Paris, Hermann 1952 (Act. scient. et ind. 1175; Bourbaki, 13).  
b) Intégration, ch.5 : intégration des mesures - Paris, Hermann, 1956 (Act.Scient. et ind. 1244 ; Bourbaki 21).
- [6] BOURBAKI (Nicolas) - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2, 3-5 - Paris, Hermann, 1953-1955 (Act. scient. et ind. 1189, 1229 ; Bourbaki, 15, 18).
- [7] CHOQUET (Gustave) - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, Proceedings of the international congress of mathematicians [1962. Stockholm], p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.
- [8] CHOQUET (G.) et DENY (J.) - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., Série 9, t.36, 1957, p. 179-189.
- [9] CHOQUET (G.) et MEYER (P.A.) - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.13, 1963, p. 139-154.

- [10] DAVIES (E.B.) - A generalized theory of convexity, Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967), p. 644-652.
- [11] EDWARDS (David Albert) - Minimum-stable wedges of semicontinuous functions, Math. Scand. 19 (1966), 15-26
- [12] EDWARDS (David Albert) - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C.R.Acad. Sc. Paris, t.261, 1965, p. 2798-2800.
- [13] EFFROS (Edward G.) - a) Structure in simplexes, I Acta Math. 117 (1967), p. 103-121.  
b) Structure in simplexes, II, J. Funct. Anal., 1, 1967, p. 379-391.
- [14] KADISON (Richard V.) - Transformations of states in operator theory and dynamics, Topology, t.3, 1965, suppl. 2, p. 177-198.
- [15] KAKUTANI (Shizuo) - Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Math., Series 2, t.42, 1941, p. 994-1024.
- [16] KAKUTANI (Shizuo) - Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Annals of Math., Series 2, t.42, 1941, p. 523-537.
- [17] KELLEY (J.L.) and NAMIOKA (I.) - Linear topological spaces - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1963 (The University Series in higher Mathematics).
- [18] KREE (Paul) - Frontière de Šilov, d'après H. Bauer, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.1, 1962, n°3 bis, 12 p.
- [19] LION (Georges) - Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.162, 1966, p. 389-453.
- [20] MOKOBODZKI (Gabriel) - Principe de balayage, principe de domination, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.1, 1962, n°1, 11 p.
- [21] NACHBIN (Leopoldo) - Topology and order - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 4).
- [22] PHELPS (Robert R.) - Lectures on Choquet's theorem - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

- [23] PTAK (V.) - Čeh. Mat. Žur.3, (78), p. 301-364 (1953) (en russe avec sommaire en anglais).
- [24] ROGALSKI (Marc) - Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.5, 1965/66, n°2.
- [25] ROGALSKI (Marc) - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet ; Initiation à l'analyse, 5ème année, 1965/66, n°12.
- [26] ROGALSKI (Marc) - Quotient d'un simplexe par une face fermée. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel), 1967/68, n°2.
- [27] ROGALSKI (Marc) - Opérateurs de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, Journal of functional analysis, v.2, n°4, 1968, p. 458-488.
-