

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

Opérateurs de Lion,

Projecteurs boréliens,

et Simplexes analytiques

par Marc ROGALSKI

année 1967-1968

Mathématique
- Service des Publications -
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

Opérateurs de Lion,

Projecteurs boréliens,

et Simplexes analytiques

par Marc ROGALSKI

année 1967-1968

1604



Mathématique
- Service des Publications -
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

OPERATEURS DE LION, PROJECTEURS BORELIENS ET
SIMPLEXES ANALYTIQUES

par Marc Rogalski

Faculté des Sciences d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques
Orsay
(Essonne)
France

→ 1. Introduction et définitions.

Dans sa thèse [12], G. Lion étudie les familles résol-
vantes $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ sur un espace compact X , telles que $\lambda V_\lambda 1 = 1$.
Il a eu l'idée, pour cela, d'introduire la frontière de Choquet de
l'espace $H = V_\lambda [C(X)]$.

En fait, un grand nombre des résultats qu'il obtient ne
dépendent pas de la famille résolvente elle-même, et s'interprètent
beaucoup plus naturellement au moyen de ce que l'on peut appeler un
"opérateur de Lion". Ce point de vue permet d'introduire et d'utiliser
les simplexes de Choquet, et de préciser les résultats de Lion. Il
met aussi en évidence le lien entre la théorie de Lion et certains
"projecteurs boreliens" dans $C(X)$. Enfin, il débouche naturelle-
ment sur l'étude d'une classe particulière de simplexes, générali-
sant l'étude faite par Alfsen dans [2], des simplexes métrisables.

Notations.

Si X est un espace compact, on notera :

- $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X .
- $\mathcal{B}or(X)$ l'espace des fonctions réelles bornées boréliennes sur X .
- $\mathcal{B}(X)$ l'espace des fonctions réelles bornées boréliennes de Baire, c'est-à-dire le plus petit espace de fonctions réelles bornées sur X , contenant $C(X)$, et stable par limites simples de suites.
- $M^+(X)$ (resp. $M_1^+(X)$) l'ensemble des mesures de Radon ≥ 0 sur X (resp. de masse 1).

DEFINITION 1. Soit X un espace compact, et soit H un sous-espace de $C(X)$, séparant, contenant les constantes. On appelle H -opérateur de Lion sur X une application linéaire positive :

$$L : C(X) \rightarrow \mathbb{R}^X$$

telle que :

- (a) $L(f) = f \quad \forall f \in H$
- (b) L vérifie la "condition de Lion" : Il existe un sous-espace dense de $C(X)$, V , tel que $\forall f \in V \exists M > 0$ et $\{f_n\} \subset H$ tels que :

$$\|f_n\| \leq M \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = L(f)(x) .$$

Si $V = C(X)$, on dira que L est un H -opérateur de Lion fort.

Exemples fondamentaux.

1) Soit $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ une famille résolvente sur X (c'est-à-dire une famille d'opérateurs $V_\lambda : C(X) \rightarrow C(X)$ linéaires positifs vérifiant $V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu \quad \forall \lambda, \mu > 0$), telle que $\forall \lambda > 0 \quad \lambda V_\lambda 1 = 1$. On suppose que l'espace $V_\lambda [C(X)]$ (indépendant de λ) sépare X .

Alors G. Lion a montré que $\forall f \in C(X)$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda V_\lambda f(x)$ existe $\forall x \in X$. Soit $\hat{f}(x)$ cette limite. Si on pose $L(f) = \hat{f}$ et $H = V_\lambda [C(X)]$, l'opérateur L est un H -opérateur de Lion fort ($\forall f \in C(X)$, on pose $f_n = n V_n f$, et $M = \|f\|$)

2) Soit $(P_t)_{t > 0}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs markoviens positifs sur X , espace compact métrisable, et

supposons que H , l'espace fermé engendré par $\bigcup_{t>0} P_t [C(X)]$, sépare X . Alors G. Lion a montré (cf. [12]) que $\forall f \in C(X)$ et $\forall x \in X$, $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x)$ existe. Soit $L(f)(x)$ cette limite.

Alors L est un H -opérateur de Lion fort sur X .

3) Soit L un projecteur continu positif de $C(X)$ sur un sous-espace fermé H de $C(X)$, séparant, contenant les constantes.

Alors L est un H -opérateur de Lion fort sur X .

→ 2. Deux lemmes sur les ensembles ordonnés.

LEMME 2. Soit E un ensemble ordonné, semi-réticulé supérieurement (on note $\text{sup}(x,y)$ la borne supérieure de x et y). Soit F un sous-ensemble de E . S'il existe un projecteur croissant L de E sur F , alors F est semi-réticulé supérieurement pour l'ordre induit, et si $x,y \in F$:

$$x \vee_F y = L[\text{Sup}(x,y)] .$$

Posons $u = L[\text{Sup}(x,y)] \in F$, pour x et $y \in F$. $u \geq x$ et y . Soit $z \in F$, $z \geq x$ et y . Donc $z \geq \text{Sup}(x,y)$. Donc $z = L(z) \geq L[\text{Sup}(x,y)] = u$, et on a bien $u = x \vee y$

C.Q.F.D.

LEMME 3. Soit G un groupe ordonné, réticulé, muni d'une "notion de convergence", "séparée", compatible avec l'ordre, et telle que l'application $(x,y) \rightarrow \text{Sup}(x,y)$ soit "continue".

Soit G' un sous-groupe "fermé" de G tel que, si $x,y \in G'$, alors $\text{Sup}(x,y) \in G'$.

Soit $L : G' \rightarrow G$ une application additive, telle que $L(0) = 0$, positive et "continue".

Soit enfin Γ un sous-ensemble de G' , stable par somme, semi-réticulé supérieurement, tel que $L(\Gamma) \subset G'$, $L(x) \geq x \forall x \in \Gamma$, et $L(y) = y \forall y \in L(\Gamma)$.

Alors $H = \overline{L(\Gamma - \Gamma)}$ (c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de G contenant $L(\Gamma - \Gamma)$ et stable par la notion de convergence)

est invariant par L , réticulé pour l'ordre induit, et si $x, y \in H$:

$$x \vee y = L \left[\underset{G}{\text{Sup}}(x, y) \right]$$

La démonstration se fait en plusieurs points ; si $A \subset G$, on notera $Q(A)$ l'ensemble des "limites", pour la notion de convergence, d'éléments de A .

Pour tout ordinal α , on définit $A_\alpha = Q \left[\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \right]$ par récurrence, en posant $A_0 = A$. $\bigcup_{\alpha \geq 0} A_\alpha$ est "l'adhérence" " \bar{A} " de A pour la notion de convergence utilisée.

.1. $\overline{L(\Gamma-\Gamma)}$ est ponctuellement invariant par L .

Posons $L(\Gamma-\Gamma) = A$, invariant par L . Puisque L est continu, on voit que A_1 , et, par récurrence, A_α , $\forall \alpha > 0$, est invariant. Donc \bar{A} est invariant par L .

.2. Si $f, g \in L(\Gamma)$, $f \vee g$, borne supérieure de f et g dans \bar{A} , existe, et c'est $L[\text{Sup}(f, g)]$

Soient $f = L(\phi)$, $g = L(\psi)$, ϕ et $\psi \in \Gamma$. Soit $u = \text{Sup}(\phi, \psi) \in \Gamma$. $L(u) \geq f$ et g , et $L(u) \in L(\Gamma) \subset \bar{A}$.

Soit $h \in \bar{A}$, $h \geq f$ et g . $f = L(\phi) \geq \phi$, et $g = L(\psi) \geq \psi$, donc $h \geq \phi$ et ψ , donc $h \geq u$. Donc $h = L(h) \geq L(u)$. Donc $L(u) = f \vee g$ dans \bar{A} .

Soit $v = L[\text{Sup}(f, g)]$. $f \geq \phi$, $g \geq \psi$, donc $\text{Sup}(f, g) \geq u$, donc $v \geq L(u)$. D'autre part, $f \vee g \geq \text{Sup}(f, g)$, donc

$$L[f \vee g] = L[L(u)] = L(u) = f \vee g \geq L[\text{Sup}(f, g)] = v.$$

Donc $L(u) = v$

.3. Si $u, v \in L(\Gamma-\Gamma) = A$, $u \vee v$ existe dans \bar{A} , et c'est $L[\text{Sup}(u, v)]$

Soient $u = f - f'$, $v = g - g' \in L(\Gamma-\Gamma)$, f, f', g et $g' \in L(\Gamma)$.

Soit $w = (f + g') \vee (g + f') - (f' + g')$, qui existe d'après 2.



On a $w \geq u$ et v , bien sûr. Soit $h \geq u$ et v , $h \in \bar{A}$,
 $h+f'+g' \geq f+g'$ et $g+f'$, donc $h+f'+g' \geq (f+g') \vee (g+f')$, donc
 $h \geq w$.

Donc $w = u \vee v$ qui existe.

D'autre part, $(f+g') \vee (g+f') = L[\text{Sup}\{(f+g'), (g+f')\}]$ d'après 2.
 Donc $w = L[\text{Sup}\{(f+g'), (g+f')\} - (f'+g')] = L(f') \vee L(g')$ car $L(f') = f'$ et
 $L(g') = g'$.

Donc $w = L[\text{Sup}\{(f-f'), (g-g')\}] = L[\text{Sup}(u, v)]$

4. Si $u, v \in \bar{A}$, $u \vee v$ existe dans \bar{A} , et c'est
 $L[\text{Sup}(u, v)]$.

Montrons, par récurrence sur α , que $u \vee v$ existe dans
 $\bar{A} \forall u, v$ de Λ_α . C'est vrai pour $\alpha=0$ d'après 3.

Supposons que ce soit vrai $\forall \beta < \alpha$, et soient $u, v \in \Lambda_\alpha$.
 Soient $(u_i), (v_i) \subset \bigcup_{\beta < \alpha} \Lambda_\beta$, $u_i \rightarrow u$, $v_i \rightarrow v$. Alors
 $\text{Sup}(u_i, v_i) \rightarrow \text{Sup}(u, v)$, donc $L[\text{Sup}(u_i, v_i)] \rightarrow L[\text{Sup}(u, v)] = w$,
 c'est-à-dire $u_i \vee v_i \rightarrow w$. Donc $w \geq u$ et v , et $w \in \bar{A}$.
 Soit $h \in \bar{A}$, $h \geq u$ et v . Alors $h \geq \text{Sup}(u, v)$, et
 $h = L(h) \geq L[\text{Sup}(u, v)] = w$.

Donc $w = u \vee v = L[\text{Sup}(u, v)]$. La récurrence est donc
 démontrée, et le lemme en résulte

C.Q.F.D.

REMARQUE 4. a) En fait, en regardant de plus près la démonstration, on s'aperçoit que si $u, v \in \Lambda_\alpha$, $u \vee v$ dans \bar{A} est en fait dans Λ_α , c'est-à-dire que chaque Λ_α est un sous-ensemble réticulé de \bar{A} .

b) Bien entendu, si la "notion de convergence" correspond à une topologie, la démonstration se simplifie.

Nous appliquerons ce lemme à des espaces de fonctions bornées ; la notion de convergence sera, soit la convergence uniforme, soit la convergence simple de suites bornées.

3. Opérateurs de Lion et projecteurs.

Nous allons voir que le 3ème exemple fondamental est presque le plus général, pour H-opérateur de Lion L sur l'espace compact X .

LEMME 5. L envoie en fait $C(X)$ dans $\mathcal{B}(X)$, et, pour la norme uniforme, L est continu de norme 1.

Pour tout $x \in X$, l'application $f \rightarrow L(f)(x)$ ($f \in C(X)$), est une mesure positive de masse 1, que l'on notera μ_x .

LEMME 6. $\bar{H} = \{f \in C(X) \mid L(f) = f\}$.

Soit $A = \{f \in C(X) \mid L(f) = f\}$. A est fermé, donc $A \supset \bar{H}$. Soit μ une mesure nulle sur \bar{H} , et soit $f \in A$.

Soit $\{g_p\}_p \subset V$, $g_p \rightarrow f$ uniformément. Alors, d'après le lemme 5, $L(g_p) \rightarrow L(f)$ uniformément. Donc $\mu[L(g_p)] \rightarrow \mu[L(f)]$

Or, $\forall p$, $\exists \{h_n^p\}_n \subset H$ et $M_p > 0$ tels que $\|h_n^p\| \leq M_p$ et

$L(g_p)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^p(x)$. Donc, d'après le théorème de Lebesgue,

$\mu[L(g_p)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(h_n^p)$. Donc, puisque μ est nulle sur H ,

$\mu[L(g_p)] = 0$. Donc $\mu[L(f)] = 0$. or $f = L(f)$. Donc $\mu(f) = 0$.

Donc μ est nulle sur A .

Donc $A \subset \bar{H}$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 7. On obtient une extension naturelle de L à $\mathcal{Bor}(X)$ en posant, $\forall f \in \mathcal{Bor}(X)$:

$$L(f)(x) = \mu_x(f)$$

L est encore linéaire, positif, de norme 1, à valeur dans l'espace des fonctions bornées.

DEFINITION 8. On appelle \mathcal{K} l'adhérence, pour la norme uniforme, de l'espace

$$C(X) + L[C(X)]$$

$\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(X)$, d'après le lemme 5.

PROPOSITION 9. La restriction de L à \mathcal{K} est un projecteur continu positif de \mathcal{K} dans \mathcal{K} , tel que $L(1) = 1$, et vérifiant

$$L(\mathfrak{X}) = \overline{L[C(X)]} \supset \bar{H}$$

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $L(\mathfrak{X}) = \bar{H}$; (b) $\mathfrak{X} = C(X)$; (c) $L[C(X)] \subset C(X)$; (d) L est un projecteur continu positif de $C(X)$ sur \bar{H} .

Si $f = L(\phi) \in L(V)$, $L(f)(x) = \mu_x(f) = \mu_x \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right]$, où $\{f_n\} \subset H$, $\|f_n\| \leq M$, $f_n \rightarrow f = L(\phi)$ simplement.
 Donc $L(f)(x) = \lim_n \mu_x(f_n) = \lim_n f_n(x) = L(\phi)(x) = f(x)$.

Donc $L \circ L = L$ sur V . Or $L \circ L$ et L envoient $C(X)$ dans l'espace des fonctions bornées, et sont continues pour la norme uniforme.

Donc $L \circ L = L$ sur $\bar{V} = C(X)$. Donc $L[C(X) + L[C(X)]] = L[C(X)] \supset \bar{H}$, et L est un projecteur de $C(X) + L[C(X)]$ sur $L[C(X)]$.

Donc $L(\mathfrak{X}) \subset \overline{L[C(X)]} \subset \mathfrak{X}$. si L est l'identité sur $L[C(X)]$, il l'est sur $\overline{L[C(X)]}$, donc L est un projecteur de \mathfrak{X} sur $L(\mathfrak{X}) = \overline{L[C(X)]} \supset \bar{H}$.

L'équivalence des assertions (a), (b), (c), (d) est alors évidente.

C.Q.F.D.

REMARQUE 10.

a) En fait, l'espace \mathfrak{X} est formé de fonctions de 2ème classe de Baire, puisque si $f + L(g) \in C(X) + L[C(X)]$, on peut écrire $f + L(g) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \text{uniforme} [f + L(g_p)]$, $g_p \in V$; d'où :

$$f + L(g) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \text{uniforme} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{simple} (f + h_n^p) \right] , \quad h_n^p \in H .$$

Enfin, $\mathfrak{X} = \overline{C(X) + L[C(X)]}$, donc $f \in \mathfrak{X} \implies \exists \phi_q \in C(X) + L[C(X)]$ telles que

$$f = \lim_{q \rightarrow +\infty} \text{uniforme} \phi_q .$$

b) On peut montrer aisément que $L(\mathfrak{B}(X)) \subset \mathfrak{B}(X)$, en utilisant la continuité de L pour le passage à la limite simple de

suites bornées. Mais on verra plus loin (§.7) que L est un projecteur de \mathfrak{B} dans \mathfrak{B} , dans un cas plus général.

c) Il est clair que \mathfrak{H} est le plus petit espace de fonctions bornées contenant $C(X)$, fermé pour la norme uniforme, et sur lequel L est un projecteur. Lorsque $\mathfrak{H} = C(X)$, on est dans la situation du 3ème exemple fondamental.

Citons, dans le même ordre d'idée, le résultat suivant :

PROPOSITION 11. Soit X un espace compact, et H un sous-espace séparant de $C(X)$, fermé, contenant les constantes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) Il existe un projecteur continu positif L (unique) de $C(X)$ sur H .

(β) H est réticulé pour son ordre propre.

(α) \implies (β) : c'est une application immédiate du lemme 2. L est alors unique, car si $f_1, \dots, f_n \in H$, $L[\text{Sup}(f_1, \dots, f_n)] = f_1 \vee \dots \vee f_n$, et l'ensemble des $\text{Sup}(f_1, \dots, f_n)$ est total dans $C(X)$.

(β) \implies (α) : si H est réticulé, on peut résoudre le problème de Dirichlet sur la frontière de Silov $S(H)$ de H (cf. [4]) $\forall \phi \in \mathcal{C}[S(H)]$, $\exists h_\phi$ unique dans H qui prolonge ϕ , et $\phi \rightarrow h_\phi$ est linéaire, positive et continue. Si $f \in C(X)$,

$$f \rightarrow L(f) = h_{f/S(H)}$$

est le projecteur cherché.

C.Q.F.D.

La question se pose alors naturellement de savoir si, dans le cas d'un H -opérateur de Lion L sur X , l'espace $L(\mathfrak{X}) = L[C(X)]$ est réticulé pour son ordre propre. La réponse est affirmative :

THEOREME 12. Si L est un H -opérateur de Lion sur l'espace X , l'espace $L[C(X)] = L(\mathfrak{X})$ est réticulé pour son ordre propre, et si $f, g \in L(\mathfrak{X})$, $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$.

On ne peut appliquer le lemme 2, car on ne sait si \mathfrak{C} est réticulé. On va donc utiliser le lemme 3. G sera l'espace des fonctions bornées, G' sera $\mathcal{C}(X)$, où l'on prendra l'ordre naturel.

On pose $\Gamma = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \leq L(f)\}$. Γ est un sous-cône convexe fermé de $\mathcal{C}(X)$, semi-réticulé supérieurement, et $\Gamma \supset H$. Donc Γ est séparant, et $\overline{\Gamma - \Gamma} = \mathcal{C}(X)$. On utilise la convergence uniforme pour appliquer le lemme 3.

On obtient : $\overline{L(\Gamma - \Gamma)}$ est réticulé, avec $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$. Mais $L[\Gamma - \Gamma] \subset L(\Gamma - \Gamma) \subset L[\mathcal{C}(X)]$, donc :

$$\overline{L(\Gamma - \Gamma)} = \overline{L[\mathcal{C}(X)]} = L(\mathfrak{X})$$

C.Q.F.D.

REMARQUE 13.

a) Il résulte du théorème 12 que $L(\mathfrak{X})$ est un M -espace de Kalkutani pour son ordre naturel et la norme uniforme, donc que $(u, v) \rightarrow u \vee v$ est continue pour cette norme (cf. [9], [10], [15]).

b) L'espace $L[\mathcal{C}(X)]$ lui-même n'est pas en général réticulé.

4. Représentation simpliciale d'un opérateur de Lion.

Dégageons les propriétés du cône Γ introduit dans la démonstration du théorème 12 :

LEMME 14. Soit $\Gamma = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \leq L(f)\}$. Γ est un sous-cône convexe fermé de $\mathcal{C}(X)$, semi-réticulé supérieurement.

$$\bar{H} = \Gamma \cap (-\Gamma), \text{ et } W = \Gamma - \Gamma \text{ est dense dans } \mathcal{C}(X).$$

DEFINITION 15. Si μ et $\nu \in M^+(X)$, on pose par définition :

$$\mu \prec \nu \iff \mu(f) \leq \nu(f) \quad \forall f \in \Gamma$$

LEMME 16.

a) La relation $\mu \prec \nu$ est un ordre sur $M^+(X)$.

b) $\mu \prec \nu \implies \mu$ et ν ont même masse, et coïncident sur H .

$$c) \forall x \in X, \delta_x \prec \mu_x$$

$$d) \mu \prec \nu \implies \forall f \in C(X), \mu[L(f)] = \nu[L(f)]$$

a), b) et c) sont évidents (car W est dense dans $C(X)$).

d) Soit $f \in V$, et soit $\{f_n\} \subset H$, $M > 0$, tels que $\|f_n\| \leq M$ et $L(f)(x) = \lim_n f_n(x)$.

$$\mu[L(f)] = \lim_n \mu(f_n) = \lim_n \nu(f_n) = \nu[L(f)] \quad (\text{grâce à b}).$$

Soit maintenant $f \in C(X)$, et $\{g_n\} \subset V$, $g_n \rightarrow f$ uniformément. Alors $L(g_n) \rightarrow L(f)$ uniformément. En passant à la limite, on obtient donc $\mu[L(f)] = \nu[L(f)]$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 17. Pour toute $f \in C(X)$, on pose

$$A_f = \{x \in X \mid f(x) = L(f)(x)\}. \quad A_f \text{ est un borélien.}$$

PROPOSITION 18.

a) L'ordre $\mu \prec \nu$ sur $M^+(X)$ est inductif vers le haut. Toute mesure est majorée pour \prec par une mesure maximale.

$$b) \mu \text{ est maximale} \iff \forall f \in C(X), \mu(f) = \mu[L(f)].$$

$$c) \mu \text{ est maximale} \iff \forall f \in \Gamma, \mu \text{ est portée par } A_f.$$

d) $\forall \mu \in M^+(X)$, il existe une seule mesure maximale majorant μ pour \prec .

$$e) \forall x \in X, \text{ la mesure maximale majorant } \delta_x \text{ est } \mu_x.$$

a), b) et c) se démontrent classiquement en utilisant le lemme 16, la compacité vague de $M_1^+(X)$, et la densité de W (cf. [5], [6]).

d) Soit $\mu \in M^+(X)$, et soit ν une mesure maximale majorant μ . Si $f \in C(X)$, $\nu(f) = \mu[L(f)]$ d'après b) et $\nu[L(f)] = \mu[L(f)]$ d'après le lemme 16. Donc $\nu(f) = \mu[L(f)]$ est uniquement déterminée par μ , et ν est donc unique.

e) Si $\mu = \delta_x$, la mesure maximale ν majorant μ est définie par $\nu(f) = \mu[L(f)] = L(f)(x) = \mu_x(f) : \nu = \mu_x$

C.Q.F.D.

REMARQUE 19. En utilisant la densité de W , il est facile de voir qu'on a aussi : μ est maximale $\iff \forall f \in C(X)$, μ est portée par A_f .

COROLLAIRE 20. Soit \mathcal{M} l'ensemble des mesures maximales. \mathcal{M} est un sous-cône convexe de $M^+(X)$, héréditaire à gauche, stable par intégration.

DEFINITION 21. Si $x \in X$, on pose $M_x = \{\mu \geq 0 \mid \mu \succ \delta_x\}$
 $M_x = \{\mu \geq 0 \mid \mu_x \{ \mu \succ \delta_x \} = \{\mu \in M_1^+(X) \mid \forall f \in \Gamma, \mu(f) \geq f(x)\}\}$
 On pose $E(\Gamma) = \{x \in X \mid M_x = \{\delta_x\}\}$. C'est la frontière de Choquet de Γ .

PROPOSITION 22. $E(\Gamma) \neq \emptyset$. $E(\Gamma) = \bigcap_{f \in \Gamma} A_f$
 $\overline{E(\Gamma)}$ est la frontière de Silov de Γ .

C'est là un résultat classique (cf. [6], [14])

PROPOSITION 23. Soient \overline{H}^* et \overline{H}' les duaux algébrique et topologique de \overline{H} , \overline{H}^{*+} et \overline{H}'^+ leurs cônes positifs pour l'ordre dual de celui de \overline{H} .

Soit δ l'application $x \rightarrow \delta_x$ de X dans \overline{H}'^+ , et soit $Y = \overline{\text{co}}[\delta(X)]$ l'enveloppe convexe fermée de $\delta(X)$ pour $\sigma(\overline{H}', \overline{H})$. Alors :

a) $\overline{H}'^+ = \overline{H}^{*+}$, et $\overline{H}' = \overline{H}'^+ - \overline{H}'^+$

b) Y est un convexe compact pour $\sigma(\overline{H}', \overline{H})$, base du cône \overline{H}'^+ , formée des formes linéaires continues sur \overline{H} , positives, de norme 1. De plus, $\mathcal{E}(Y) \subset \delta(X)$ (où $\mathcal{E}(Y)$ est l'ensemble des points extrémaux de Y).

c) \overline{H} s'identifie, pour l'ordre et la norme (isométrie), à l'espace $A(Y)$ des fonctions affines continues sur Y .

a) résulte de théorèmes classiques sur les espaces normés ordonnés ([10], [16]).

b) et c) sont aussi classiques (cf. [6], [10], [15], [16]).

THEOREME 24. Soit L un H-opérateur de Lion sur X . Alors l'espace \bar{H} , muni de la norme uniforme et de son ordre naturel, est un espace simplicial, c'est-à-dire que les propriétés suivantes, d'ailleurs équivalentes, sont vérifiées :

- a) \bar{H} vérifie le lemme de Riesz.
- b) \bar{H}' est réticulé.
- c) Y est un simplexe.

On connaît l'équivalence de ces propriétés (cf. [6], [7], [8], [16]).

Démontrons b) :

- Soit $\ell \in \bar{H}'^+$. $1 \in \bar{H}$, donc $C(X) = \bar{H} + C^+(X)$. D'après un théorème de prolongement, il existe une mesure $\mu \geq 0$ qui prolonge ℓ à $C(X)$.

- Soit $f \in V$. Soit $\{f_n\} \subset H$, $f_n \rightarrow L(f)$ simplement, $\|f_n\| \leq M$.
 $\mu[L(f)] = \lim_n \mu(f_n) = \lim_n \ell(f_n)$. Donc, $\forall f \in V$, $\lim_n \ell(f_n)$ existe pour toute suite $\{f_n\}$ donnée par la condition de Lion, et toutes les limites relatives aux différentes suites $\{f_n\}$ sont égales à $\mu[L(f)]$. Mais comme ceci est vrai pour toute mesure μ prolongeant ℓ , il en résulte que pour toutes ces mesures μ , $\mu[L(f)]$ a même valeur.

- Or, parmi ces mesures μ , il en existe au moins une maximale, ν . Mais elle vérifie alors $\nu(f) = \nu[L(f)] \quad \forall f \in V$. Donc, il existe une seule mesure maximale ν_ℓ prolongeant ℓ , et elle est définie sur V par $\nu_\ell(f) = \lim_n \ell(f_n)$ pour toute suite $\{f_n\}$ donnée par la condition de Lion.

- L'application ainsi définie :

$$\ell \rightarrow \nu_\ell : \bar{H}'^+ \rightarrow \mathcal{M}$$

est évidemment linéaire, bijective, et croissante, de par la forme même de ν_ℓ sur V .

Or \mathcal{M} , sous-cône convexe héréditaire à gauche de $M^+(X)$, est réticulé. Donc, \bar{H}'^+ est réticulé.

(l'idée de cette démonstration se trouve en fait dans [12])

C.Q.F.D.

DEFINITION 25. Nous appellerons $E(H)$ la frontière de Choquet convexe de H (cf. [4]), et ξ_0 le plus petit cône fermé semi-réticulé supérieurement de $C(X)$, contenant H . $\xi_0 \subset \Gamma$, $\xi_0 \cap (-\xi_0) = \bar{H}$, $\overline{\xi_0 - \xi_0} = C(X)$. Pour toutes $\mu, \nu \in M^+(X)$, on pose $\mu \ll \nu$ si $\forall f \in \xi_0$, $\mu(f) \leq \nu(f)$.

LEMME 26.

a) Soit S l'ensemble des fonctions convexes continues sur Y . Alors ξ_0 s'identifie, par δ , à l'ensemble des traces sur $\delta(X)$ des fonctions de S .

b) La relation $\mu \ll \nu$ est la restriction à $M^+[\delta(X)]$ de l'ordre de Choquet sur $M^+(Y)$ (cf. [6]).

c) $E(H)$ est non vide, et $\delta[E(H)] = \xi(Y)$.

d) Pour toute $\mu \in M^+(X)$, il existe une mesure maximale ν et une seule qui majore μ pour \ll .

Si $x \in X$, on notera ν_x la mesure maximale pour \ll majorant δ_x .

La démonstration est classique (cf. [4], [6], [16]), en utilisant la proposition 23 et le théorème 24, et en remarquant qu'on a l'égalité :

$$\xi_0 = \{f \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists h_1, \dots, h_n \in H \text{ telles que } f \geq \text{Sup}(h_1, \dots, h_n) \geq f - \varepsilon\}$$

L'introduction de $E(H)$ permet d'énoncer le corollaire suivant au théorème 24 :

COROLLAIRE 27. Soit K un compact inclus dans $E(H)$, et $\phi \in C(K)$, $0 < \phi < 1$. Alors il existe $h \in \bar{H}$ telle que $0 < h < 1$ et $h = \phi$ sur K .

Ceci résulte facilement du théorème d'Edwards ([7], [16]) appliqué au simplexe Y .

REMARQUE 28. Bien entendu, $\xi_0 \neq \Gamma$, et $\prec \neq \ll$ (il suffit de regarder le cas où $X = [0,1]$, et L défini par $L(f)(x) = xf(1) + (1-x)f(0)$).

Nous allons comparer les mesures μ_x et ν_x associées à un point x .

LEMME 29. Soit $\phi \in \mathcal{E}_0$. Pour tout $x \in X$, posons :

$$a(x) = \inf_{\substack{\psi \geq \phi \\ \psi \in H}} \psi(x) ; \quad b(x) = \sup_{\substack{v \in M^+(X) \\ v = \delta_x \text{ sur } H}} v(\phi)$$

alors $a(x) = b(x) = \nu_x(\phi)$

Ce lemme est classique, une fois traduit en termes de convexe compact dans \bar{H}^+ (cf. [6]).

PROPOSITION 30. Pour tout $x \in X$, $\mu_x = \nu_x$

Soit $\phi \in \mathcal{E}_0$, et soit $\psi \geq \phi$, $\psi \in H$. $\mu_x(\phi) = L(\phi)(x)$.

$\alpha)$ $\psi = L(\psi) \geq L(\phi)$. Donc $\inf_{\substack{\psi \geq \phi \\ \psi \in H}} \psi(x) \geq L(\phi)(x) \quad \forall x \in X$.

$\beta)$ D'autre part, soit v telle que $v = \delta_x$ sur H , $v \in M^+(X)$. Alors d'après le théorème de Lebesgue, $v = \delta_x$ sur $L(V)$, donc $v = \delta_x$ sur $L[C(X)]$ (continuité de L).

Donc, si $\phi \in \mathcal{E}_0 \subset \Gamma$, $v[L(\phi)] = L(\phi)(x)$

Mais $L(\phi) \geq \phi$. Donc $L(\phi)(x) \geq v(\phi)$.

$$\text{Donc } L(\phi)(x) \geq \sup_{v = \delta_x \text{ sur } H} v(\phi)$$

$\gamma)$ En comparant $\alpha)$ et $\beta)$, il vient, par le lemme 29 :
 $\nu_x(\phi) = a(x) \geq \mu_x(\phi) = L(\phi)(x) \geq b(x) = \nu_x(\phi)$. Donc $\mu_x = \nu_x$ sur \mathcal{E}_0 .
 Comme $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0$ est dense dans $C(X)$, $\mu_x = \nu_x$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 31. $E(H) = E(\Gamma)$

En effet, $x \in E(\Gamma) \iff \delta_x = \mu_x \iff \delta_x = \nu_x \iff x \in E(H)$.

Nous allons maintenant donner la représentation simpliciale d'un opérateur de Lion. Pour cela, nous avons besoin d'une définition.

DEFINITION 32. Soit Y un simplexe, et, $\forall x \in Y$, soit v_x la mesure maximale de barycentre x . Soit $A(Y)$ l'espace des fonctions affines continues sur Y .

Pour toute $f \in C(Y)$, on pose :

$$P(f)(x) = v_x(f)$$

On dira que Y est un simplexe de Lion (resp. un simplexe de Lion fort) si P est un $A(Y)$ -opérateur de Lion (resp. un $A(Y)$ -opérateur de Lion fort).

REMARQUE 33. On sait que pour tout simplexe Y , et toute $f \in C(Y)$, la fonction $P(f)$ est affine borélienne, limite uniforme de différences de deux fonctions affines semi-continues supérieurement (cf. [6]). Ce fait sera exploité au §.6.

Voici alors le théorème de représentation simpliciale.

THEOREME 34. La donnée d'un H-opérateur de Lion L sur un espace compact X est équivalente à la donnée d'un simplexe de Lion Y .

Plus précisément, X , H et L étant donnés, Y est le simplexe défini dans l'énoncé de la proposition 23. Si L est un H-opérateur de Lion fort, Y est un simplexe de Lion fort.

Nous avons juste à démontrer que le simplexe Y de la proposition 23 est de Lion. Pour simplifier les notations, on considèrera X comme un sous-ensemble de Y .

Soit $V_1 = \{f \in C(Y) \mid f|_X \in V\}$. Il est facile de voir que V_1 est dense dans $C(Y)$.

Soit $f \in V_1$, et soit $g = f|_X \in V$.

Soient $\{h_n\} \subset H \subset A(Y)$, et $M > 0$, tels que $\|h_n\| \leq M$, et, $\forall x \in X$: $h_n(x) \rightarrow L(g(x)) = \mu_x(g) = v_x(g)$. v_x est portée par X , donc $v_x(g) = v_x(f)$, donc $h_n \rightarrow P(f)|_X = L(g)$ simplement sur X . Or les h_n sont affines continues sur Y , donc "vérifient le calcul barycentrique", et il en est de même de $P(f)$, d'après la remarque 33 (cf. [6]).

Soit $y \in Y$, quelconque. $P(f)(y) = v_y [P(f)]$. Or v_y est portée par X , et, sur X , $P(f) = \lim_n h_n$, avec $\|h_n\| \leq M$. D'après le théorème de Lebesgue, on a donc :

$$P(f)(y) = v_y [P(f)] = \lim_n v_y(h_n) = \lim_n h_n(y).$$

Donc $h_n \rightarrow P(f)$ simplement sur tout Y , et $\|h_n\| \leq M$. Y est donc un simplexe de Lion, et L et P sont reliés par :

$$P(f) = L(f|_X) \quad \forall f \in C(Y).$$

De plus, si $V = C(X)$, $V_1 = C(Y)$. Donc si L est un H -opérateur de Lion fort, Y est un simplexe de Lion fort.

C.Q.F.D.

Le simplexe associé à un H -opérateur de Lion L va nous permettre de caractériser le cas où L envoie $C(X)$ dans $C(X)$.

THEOREME 35. Soit L un H -opérateur de Lion sur X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $x \rightarrow \mu_x$ est vaguement continue.
- (b) $L[C(X)] \subset C(X)$.
- (c) \bar{H} est réticulé pour son ordre propre.
- (d) L est un projecteur sur \bar{H} .
- (e) $E(H)$ est fermée.
- (f) Pour toute $f \in C[\overline{E(H)}]$, $\exists h \in \bar{H}$ telle que $h=f$ sur $\overline{E(H)}$.
- (g) Y est un simplexe de Bauer.

(a) \iff (b) : $x \rightarrow \mu_x$ vaguement continue $\iff \forall f \in C(X)$,
 $x \rightarrow \mu_x(f) = L(\hat{f})(x)$ continue $\iff L[C(X)] \subset C(X)$.

(b) \iff (d) : c'est la proposition 9.

(d) \implies (c) : c'est le lemme 2 (ou la proposition 11).

(c) \implies (d) : il suffit de montrer que $L[C(X)] \subset H$. Soit ξ'_0 le

cône formé des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de \bar{H} . $\mathcal{E}'_0 - \mathcal{E}_0 = C(X)$. Donc il suffit de montrer que $L(\mathcal{E}'_0) \subset \bar{H}$. Soit $\phi = \text{Sup}(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{E}'_0$. D'après le lemme 29 (car $\mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}_0$) : $L(\phi) = \text{Inf} \psi = \text{Inf} \psi$. Comme \bar{H} est réticulé, cette dernière fonction est $f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n$, qui appartient à \bar{H} . Donc $L(\phi) \in \bar{H}$.

(c) \iff (e) \iff (f) \iff (g) : c'est un résultat de Baner sur les simplexes (cf. [4], [16]).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 36. Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe markovien fortement continu d'opérateurs positifs sur un espace compact métrisable X , tel que H , l'espace fermé engendré par $\bigcup_{t>0} P_t[C(X)]$, sépare X . Soit, $\forall f \in C(X)$:

$$P_0 f = \lim_{t \rightarrow 0} P_t f$$

Alors P_0 envoie $C(X)$ dans $C(X)$ si et seulement si l'espace H est réticulé pour son ordre propre, et alors, si $f, g \in H$:

$$f \vee_H g = \lim_{t \rightarrow 0} P_t [\text{Sup}(f, g)] = P_0 [\text{Sup}(f, g)] .$$

- 5. Deux exemples importants de simplexes de Lion.

Un simplexe de Lion est donc un simplexe X , muni d'un espace dense V de $C(X)$, tel que $\forall f \in V \exists \{f_n\} \subset A(X)$ telle que :

1° Pour tout x , $\lim_n f_n(x) = \mu_x(f)$ (où μ_x est la mesure maximale de barycentre x)

2° Il existe $M > 0$ tel que, $\forall n$, $\|f_n\| \leq M$.

(en fait, 2° résulte de 1° d'après un résultat de Choquet : cf. lemme 48).

THEOREME 37.

- a) Tout simplexe métrisable est un simplexe de Lion.
- b) Un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ (réunion dénombrable de compacts) est un simplexe de Lion fort.

a) En effet, $\forall f \in S$, cône des fonctions convexes continues, la fonction $L(f) : x \rightarrow \mu_x(f)$ est affine semi-continue supérieurement. D'après un théorème de Mokobodzki ([13]), $\exists \{g_n\} \subset A(X)$, la suite $\{g_n\}$ étant décroissante, telle que $g_n(x) \geq L(f)(x) \forall x$, et $\inf_n g_n = L(f)$ (on peut se ramener à une suite parce que X est métrisable).

On peut donc vérifier la condition de Lion pour le sous-espace dense de $C(X) : V = S - S$

b) On suppose que $\mathcal{E}(X) = \bigcup_{n \geq 1} K_n$, $K_n \uparrow$, compacts.

Soit $f \in C(X)$. D'après le théorème d'Edwards ([7]), $\forall n \exists h_n \in A(X)$ telle que $\|h_n\| \leq \|f\| = M$, et $h_n|_{K_n} = f|_{K_n}$.

Soit $x \in X$. μ_x est portée par $\mathcal{E}(X)$ (cf [6]). Posons $\mu_x|_{K_n} = \nu_n$. Pour toute $f \in C(X)$, $\mu_x(f) = \lim_n \nu_n(f)$.

$\nu_n(f) = \nu_n(h_n) = h_n(x_n)$ où x_n est la résultante de ν_n (on suppose que X est plongé dans l'espace $A(X)'$, dual de $A(X)$).

$$|h_n(x_n - x)| \leq M \|x_n - x\|_{A(X)'} = M \sup_{\substack{h \in A(X) \\ \|h\| \leq 1}} |h(x_n - x)| = M \sup_{\|h\| \leq 1} |(\mu_x - \nu_n)(h)|$$

$$\leq M \|\mu_x - \nu_n\|_{K_n} = M \mu_x[\mathcal{E}(X) \setminus K_n].$$

Or $\mu_x[\mathcal{E}(X) \setminus K_n] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. D

Donc $h_n(x_n) - h_n(x) \rightarrow 0$. Comme $h_n(x_n) = \nu_n(f) \rightarrow \mu_x(f)$, on en déduit que :

$$L(f)(x) = \mu_x(f) = \lim_n h_n(x).$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 38.

a) Tout simplexe de Bauer X (c'est-à-dire avec $\xi(X)$ fermé) est un simplexe de Lion fort.

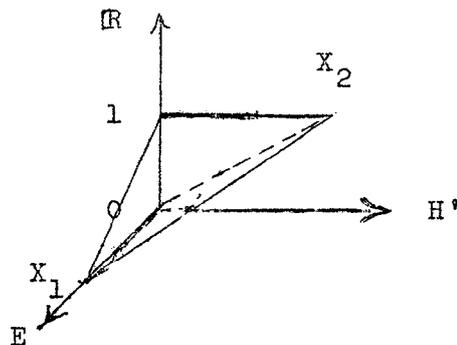
b) Tout simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est dénombrable est un simplexe de Lion fort.

REMARQUE 39. Il existe des simplexes non métrisables dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ non fermé.

Exemple. Soit $J = [0,1]^I$, I non dénombrable, soit $E = M(J)$, et $X_1 = M_1^+(J)$, simplexe de Bauer non métrisable.

Soit $H = \{f \in C([0,1]) \mid \int_0^1 f(t) dt = f(1)\}$. H est isomorphe à l'espace des fonctions affines continues sur un simplexe X_2 : $X_2 = \{\ell \in H' \mid \ell \geq 0 \text{ et } \|\ell\| = 1\} \subset H'$. $\xi(X_2) \cong [0,1[$ est un K_σ . $H' \cong \{\mu \in M([0,1]) \mid \mu(\{1\}) = 0\}$.

Dans $E \times H' \times \mathbb{R}$, soit $X = \text{co}[(X_1 \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times X_2 \times \{1\})]$. Alors X est un simplexe non métrisable, et $\xi(X) \cong J \cup [0,1[$, est un K non fermé.



- 6 . Opérateurs simpliciaux et simplexes.

Nous allons généraliser la notion d'opérateur de Lion, pour étudier quelques propriétés des simplexes quelconques, en introduisant les "opérateurs simpliciaux". Nous restreindrons ensuite notre étude aux "opérateurs analytiques", dont les opérateurs de Lion sont, en apparence, un cas particulier (bien qu'en fait il n'en soit rien : cf. corollaire 64).

DEFINITION 40. Soit X un espace compact, et soit H un sous-espace de $C(X)$, séparant, contenant les constantes.

On appellera $\gamma_H(X)$ le sous-espace de $\mathcal{B}or(X)$ formé des fonctions f qui "vérifient la calcul barycentrique modulo H ", c'est-à-dire telles que :

$$\forall \mu, \nu \in M^+(X) : \{\mu = \nu \text{ sur } H\} \implies \{\mu(f) = \nu(f)\}$$

On appellera H -opérateur simplicial sur X une application linéaire positive

$$L : C(X) \longrightarrow \gamma_H(X)$$

telle que, $\forall f \in H$, $L(f) = f$.

Si \mathcal{D} est un sous-espace de $\gamma_H(X)$, stable par limites simples de suites bornées, on dira que L est subordonné à \mathcal{D} si $L[C(X)] \subset \mathcal{D}$. Alors, nécessairement $\mathcal{D} \supset H$.

Nous gardons les mêmes notations :

$\mathfrak{X} = \overline{C(X) + L[C(X)]}$, $\Gamma = \{f \in C(X) \mid f \leq L(f)\}$, $\mu \leq \nu \iff \mu(f) \leq \nu(f)$
 $\forall f \in \Gamma$ ($\mu, \nu \in M^+(X)$), $Y = \overline{co}[\delta(X)]$, $E(H)$ = frontière de Choquet de H , μ_x définie par $\mu_x(f) = L(f)(x)$.

Nous allons résumer en un énoncé les propriétés des opérateurs de Lion qui s'étendent aux opérateurs simpliciaux, et nous indiquerons seulement les démonstrations qui sont changées.

THEOREME 41. Soit L un H -opérateur simplicial sur X , subordonné à \mathcal{D} .

a) $\bar{H} = \{f \in C(X) \mid L(f) = f\}$

b) L'espace $L[C(X)]$ est réticulé pour son ordre propre, et invariant par L ; si $f, g \in L[C(X)]$, $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$. L induit un projecteur de \mathfrak{X} sur $L[C(X)]$.

c) \bar{H} est un espace simplicial (c'est-à-dire vérifie le lemme de Riesz).

d) $Y = \overline{\text{co}}[\delta(X)]$ est un simplexe.

e) Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. \bar{H} est réticulé ; 2. $L[C(X)] \subset C(X)$; 3. L est un projecteur continu positif sur \bar{H} ; 4. $x \rightarrow \mu_x$ est vaguement continue ;
5. Y est un simplexe de Bauer ; 6. $E(H)$ est fermée ; 7. Pour toute $f \in C[\overline{E(H)}]$, $\exists h \in \bar{H}$ telle que $h=f$ sur $\overline{E(H)}$.

f) $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$; $\mathcal{B} \cap \gamma_H \subset \mathcal{D}$.

L'esprit des démonstrations est analogue à celui des démonstrations des paragraphes précédents. Démontrons, par exemple, a), c) et f).

a) $A = \{f | L(f) = f\} \supset \bar{H}$. Soit μ une mesure nulle sur \bar{H} . Alors, μ est nulle sur γ_H , donc sur \mathcal{D} . Soit $f \in A$. $L(f) \in \mathcal{D}$, donc $\mu[L(f)] = 0$. Comme $L(f) = f$, $\mu(f) = 0$. Donc μ est nulle sur A , et $A \subset \bar{H}$.

c) Démontrons simplement que $\forall \ell \in \bar{H}^+$, $\exists \mu_\ell$ maximale pour \prec , unique, telle que $\ell(f) = \mu_\ell(f) \forall f \in H$.

Soient deux mesures μ, ν , coïncidant avec ℓ sur H . Alors $\mu = \nu$ sur $\gamma_H(X)$, donc sur \mathcal{D} . Donc on peut définir $\tilde{\ell}$ sur \mathcal{D} par $\tilde{\ell}(f) = \mu(f) \forall \mu$ coïncidant avec ℓ sur H , et $\tilde{\ell}$ ne dépend que de ℓ . Soit alors μ maximale coïncidant avec ℓ sur H , et soit $f \in C(X)$. $\mu(f) = \mu[L(f)] = \tilde{\ell}[L(f)]$, ne dépend que de ℓ (car $L(f) \in \mathcal{D}$).

f) $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$ se démontre par récurrence transfinie, de façon évidente, à partir de l'inclusion $L[C(X)] \subset \mathcal{D}$ et de la "continuité" de L pour la convergence simple de suites bornées (qui résulte du théorème de Lebesgue).

Soit alors $x \in X$. $\mu_x = \delta_x$ sur H , donc $\mu_x = \delta_x$ sur $\gamma_H(X)$. Donc $L(f) = f \forall f \in \gamma_H$, donc $\forall f \in \mathcal{B} \cap \gamma_H$.

Donc

$$\mathcal{B} \cap \gamma_H = L(\mathcal{B} \cap \gamma_H) \subset L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}.$$

C.Q.F.D.

Si \mathcal{F} est un ensemble de fonctions bornées sur X , on notera $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ l'ensemble des limites simples de suites bornées de fonctions de \mathcal{F} .

DEFINITION 42. On pose $B_0 = C(X)$, et, pour tout ordinal α , on définit par récurrence transfinie B_α par $B_\alpha = Q(\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta)$. C'est l'espace des fonctions bornées de classe α de Baire. On a $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \geq 0} B_\alpha$. On pose de même $L_0 = L[C(X)]$, et, $\forall \alpha$, $L_\alpha = Q[\bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta]$. Alors $\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha \geq 0} L_\alpha$ est le plus petit ensemble de fonctions contenant $L[C(X)]$ et stable par limites simples de suites bornées.

THEOREME 43. Soit L un opérateur H-simplicial sur X . Alors il est subordonné à \mathcal{L} , et $L(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} \cap \gamma_H$ sont inclus dans \mathcal{L} . Pour toute $f \in \mathcal{L}$, $L(f) = f$. De plus, \mathcal{L} est réticulé pour son ordre propre, et chaque L_α , $\alpha \geq 0$, est un sous-espace réticulé de \mathcal{L} . Enfin, si $f, g \in \mathcal{L}$, $f \vee_{\mathcal{L}} g = L[\text{Sup}(f, g)]$.

La seule chose à démontrer est que \mathcal{L} et les L_α sont réticulés.

\mathcal{L} est "l'adhérence", pour la notion de convergence simple de suites bornées, de $L(\Gamma-\Gamma)$. Donc \mathcal{L} est réticulé d'après le lemme 3, et si f, g sont dans \mathcal{L} , $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$. L_0 est réticulé d'après le théorème 41, b). Enfin, si on remplace L_0 par $L(\Gamma-\Gamma)$, L_α est le même $\forall \alpha \geq 1$. Donc chaque L_α est un sous-espace réticulé de \mathcal{L} , d'après la remarque 4.

C.Q.F.D.

On peut se poser le problème de savoir si la donnée de l'espace H ne détermine pas complètement un opérateur H-simplicial qui lui serait éventuellement associé. La réponse est affirmative :

PROPOSITION 44. Soit H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes. Alors il existe au plus un opérateur H-simplicial L associé.

En effet, soit \mathcal{E}'_0 le cône des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de H . Si L est un H-opérateur simplicial, alors on a, pour $\phi = \text{Sup}(f_1, \dots, f_n) \in H$:

$$L(\phi) = \text{Inf}_{\substack{h \in H \\ h \geq \phi}} h \quad (\text{cf. lemme 29})$$

Donc $L(\phi)$ est parfaitement déterminée par H .

Comme \mathcal{E}'_0 est total, L est unique.

C.Q.F.D.

A un opérateur simplicial L on a associé, par le théorème 41, d), un simplexe Y tel que $\bar{H} \xrightarrow{\sim} A(Y)$. Nous allons voir inversement, qu'à un simplexe on peut associer canoniquement un opérateur simplicial, et que pour le procédé du théorème 41, d) on retrouve le simplexe initial.

DEFINITION 45. Soit X un simplexe. On note A_S le cône des fonctions affines semi-continues supérieurement sur X , et on prend $H = A(X)$.

On pose : $D_0 = \overline{A_S - A_S}$; $\forall \alpha$ ordinal, $D_\alpha = \overline{Q[\bigcup_{\beta < \alpha} D_\beta]}$; et $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \geq 0} D_\alpha$. $\gamma_A(X)$ n'est autre, ici, que l'espace des fonctions affines boréliennes vérifiant le calcul barycentrique. Il est facile de voir que $\mathcal{D} \subset \gamma_A(X)$ car $A_S \subset \gamma_A(X)$, et \mathcal{D} est le plus petit espace de fonctions affines boréliennes stable par limites simples de suites bornées et contenant A_S .

PROPOSITION 46. Soit X un simplexe, et $\forall x \in X$, soit μ_x la mesure maximale de barycentre x . Alors l'application L définie par

$$L(f)(x) = \mu_x(f) \quad \forall f \in C(X), \quad \forall x \in X$$

est un $A(X)$ -opérateur simplicial, subordonné à \mathcal{D} , et le simplexe associé à cet opérateur est isomorphe à X .

Soit $f \in S$, cône des fonctions convexes continues sur X . Alors $L(f)$ est affine semi-continue supérieurement : $L(f) \in A_S$. Donc $L(S-S) \subset D_0$, donc $L[C(X)] \subset D_0 \subset \mathcal{D}$.

Le reste est évident.

C.Q.F.D.

THEOREME 47. Soit H un sous-espace fermé séparant de $C(X)$, contenant les constantes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un opérateur H -simplicial L est que H vérifie le lemme de Riesz. Cet opérateur est alors unique.

La condition nécessaire résulte du théorème 41,c).

Supposons inversement que H vérifie le lemme de Riesz. Alors on sait que $H \xrightarrow{\sim} A(Y)$ pour un certain simplexe Y [16].

Posons, si $f \in H : L(f)(x) = \mu_x(f)$ (X étant considéré comme sous-ensemble de Y). Alors L est bien un opérateur H -simplicial (proposition 46). L'unicité résulte de la proposition 44.

C.Q.F.D.

Il convient de rappeler ici un résultat de Choquet (cf. [5]):

LEMME 48. Soit X un convexe compact quelconque, et soit $\mathcal{A}(X)$ l'espace des fonctions affines boréliennes sur X . Toutes les fonctions de $\mathcal{A}(X)$ sont bornées, et si une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{A}(X)$ converge simplement, les f_n sont bornées en norme dans leur ensemble.

Il en résulte qu'il sera inutile de supposer, dans le cas de fonctions affines boréliennes, qu'on se limite à des suites bornées.

THEOREME 49. Soit X un simplexe, et L l'opérateur associé défini à la proposition 45. Alors :

- a) Pour tout ordinal $\alpha \geq 0$, $L(B_\alpha) \subset D_\alpha$; $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$.
- b) Pour tout ordinal $\alpha \geq 0$, $\gamma_A \cap B_\alpha \subset D_\alpha$; $\gamma \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.
- c) $L[C(X)]$, ainsi que \mathcal{L} , le plus petit sous-espace de fonctions boréliennes affines contenant $L[C(X)]$ et stable par limite simple de suites, sont reticulés pour leur ordre propre, et si $f, g \in \mathcal{L}$, $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$.

a) le cas $\alpha=0$ est trivial. Regardons le cas $\alpha=1$. On sait que $L(S-S) \subset D_0$. Comme $\overline{S-S} = C(X)$, si $f \in B_1$, alors $f = \lim_n f_n$, $f_n \in S-S$, et $\|f_n\| \leq M$. Donc $L(f) = \lim_n L(f_n)$ (appliquer le théorème de Lebesgue), et $L(f) \in Q(D_0) = D_1$.

La propriété est donc vraie pour $\alpha=1$. Supposons-la vraie pour tout $\beta < \alpha$. Soit $f \in B_\alpha$. Alors $f = \lim_n f_n$, $\|f_n\| \leq M$, $f_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$. Donc $L(f) = \lim_n L(f_n) \in Q[\bigcup_{\beta < \alpha} L(B_\beta)] \subset Q[\bigcup_{\beta < \alpha} D_\beta] = D_\alpha$
D'où $\beta < \alpha$:

$L(B_\alpha) \subset D_\alpha$. Donc $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$.

b) Sur γ_A , L est l'identité.

Donc

$$\gamma_A \cap B_\alpha = L[\gamma_A \cap B_\alpha] \subset L(B_\alpha) \subset D_\alpha.$$

D'où

$$\gamma_A \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$$

c) résulte des théorèmes 41 et 43.

C.Q.F.D.

Evidemment, en général \mathcal{D} n'est pas inclus dans $\mathcal{B}(X)$ (mais dans $\mathcal{B}or(X)$), donc, même si $L(\mathcal{B}) = \mathcal{D}$, on ne pourra pas appliquer le lemme 2, et en déduire que \mathcal{D} est réticulé. Néanmoins, \mathcal{D} est toujours réticulé. Pour le montrer, nous utiliserons le lemme 3.

PROPOSITION 50. Soit X un simplexe. Alors l'espace \mathcal{D} est réticulé pour son ordre propre, et $\forall \alpha \geq 0$, D_α est un sous-espace réticulé de \mathcal{D} . De plus, si $f, g \in \mathcal{D}$, $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$.

Nous allons appliquer le lemme 3 avec :

G = l'espace des fonctions bornées.

G' = $\mathcal{B}or(X)$

Γ = le cône des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de A_S .

L envoie G' dans G . L est l'identité sur A_S .

Soient $f, g \in A_S$. $L[\text{Sup}(f, g)](x) = \mu_x[\text{Sup}(f, g)] = \widehat{\text{Sup}(f, g)}(x) \in A_S \subset G'$

Par récurrence, on voit que $L(\Gamma) \subset A_S$.

En utilisant le lemme 3 pour la convergence uniforme et pour la convergence simple de suites bornées, on en déduit le résultat.

C.Q.F.D.

REMARQUE 51. On voit, au cours de la démonstration, que A_S est réticulé supérieurement, donc que $A_S - A_S$ est réticulé pour son ordre propre (ce qui est un résultat classique).

Rappelons le résultat suivant, dû à G; Choquet ([5], [14]) :

LEMME 52. Soit X un convexe compact. Alors toute fonction affine sur X , de première classe de Baire, vérifie le calcul barycentrique. C'est faux en général pour les fonctions affines de deuxième classe de Baire, même si X est un simplexe de Bauer métrisable.

Le théorème 49 admet alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 53. Soit X un simplexe. Alors toute fonction f, affine sur X, de première classe de Baire, est limite simple d'une suite de différences de deux fonctions affines semi-continues supérieurement :

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n - g_n), \quad f_n, g_n \in A_S$$

En effet, le lemme 52 dit que $\mathcal{A} \cap B_1 \subset \gamma_A$.

Donc $\mathcal{A} \cap B_1 = \gamma_A \cap B_1 \subset D_1$ d'après le théorème 49.

C.Q.F.D.

Le problème se pose de savoir si, pour un simplexe quelconque, on peut obtenir un meilleur résultat, par exemple :

$$f = \lim_n f_n, \quad \text{où } f_n = \lim_p g_p^n, \quad g_p^n \in A(X).$$

- 7 . Les opérateurs analytiques.

DEFINITION 54. Soit X un espace compact, et H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes. On pose $H_0 = \bar{H}$, et on définit par récurrence, pour tout ordinal α , $H_\alpha = Q(\bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta)$. C'est l'espace des fonctions de H-classe α . On appelle $\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha \geq 0} H_\alpha$ l'espace des fonctions H-analytiques.

Un opérateur H-analytique sur X est une application linéaire positive :

$$L : C(X) \rightarrow \mathcal{H}$$

telle que, pour toute $f \in H$, $L(f) = f$.

Un opérateur H-analytique est donc un opérateur H-simplicial subordonné à \mathcal{H} . En effet, il est facile de voir que $\mathcal{H} \subset \gamma_H(X)$, et \mathcal{H} est stable par limites simples de suites bornées.

LEMME 55. Soit L un opérateur H-analytique sur X. Alors on

a

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}.$$

En effet, $H \subset L[C(X)] \subset \mathcal{H}$. Donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$.

Si L est un opérateur H -analytique sur X , il est H -simplicial, donc vérifie les théorèmes 41 et 43. Mais on a des résultats supplémentaires.:

THEOREME 56. Soit L un opérateur H -analytique sur X . Alors:

a) $\mathcal{H} = \gamma_H \cap \mathcal{B}$

b) L est un projecteur continu positif de \mathcal{B} sur \mathcal{H}

c) \mathcal{H} est réticulé pour son ordre propre, et si $f, g \in \mathcal{H}$, $f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$.

D'abord, L est l'identité sur \mathcal{H} , car $\mathcal{H} \subset \gamma_H$. Comme $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{H} \cap \gamma_H \cap \mathcal{B}$ est clair. D'après le théorème 41 (où $\mathcal{D} = \mathcal{H}$), $L(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}$ et $\gamma_H \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. D'où a) et b). c) résulte alors, soit du lemme 2 (car \mathcal{B} est réticulé), soit du théorème 43 et du lemme 55.

C.Q.F.D.

Nous allons particulariser certaines classes d'opérateurs H -analytiques.

DEFINITION 57. Un opérateur L , H -analytique sur X , est dit de H -classe σ , si il existe un sous-espace dense V de $C(X)$ tel que $L(V) \subset H_\sigma$.

Les opérateurs de H -classe 0 sont les projecteurs positifs sur \bar{H} . Les opérateurs de H -classe 1 sont les H -opérateurs de Lion.

PROPOSITION 58. Soit L un opérateur de H -classe σ sur X . Alors pour tout ordinal $\alpha \geq 1$: $L(B_\alpha) \subset H_{\alpha+\sigma}$, et $\gamma_H \cap B_\alpha \subset H_{\alpha+\sigma}$.

Soit V dense dans $C(X)$ tel que $L(V) \subset H_\sigma$. Soit $f \in B_1$. Alors $f = \lim_n f_n$, $f_n \in V$, $\|f_n\| \leq M$. Donc $L(f) = \lim_n L(f_n) \in Q(H_\sigma) = H_{\sigma+1}$.

Il est donc vrai pour $\alpha=1$ que $L(B_\alpha) \subset H_{\alpha+\sigma}$. On le montre pour tout $\alpha \geq 1$ par une récurrence évidente.

Soit alors $\gamma_H \cap B_\alpha \cdot \gamma_H \cap B_\alpha = L[\gamma_H \cap B_\alpha] \subset L(B_\alpha) \subset H_{\alpha+\sigma}$

C.Q.F.D

Nous verrons plus loin que ce résultat peut être notablement amélioré (cf. corollaire 63).

Nous allons maintenant étudier des "simplexes analytiques",

qui seront ceux associés à des opérateurs analytiques. Nous étendons à ces simplexes des résultats que Alfsen a montré dans le cas des simplexes métrisables ([1],[2]).

- 8 Les simplexes analytiques.

DEFINITION 59. Soit X un simplexe, et $\forall f \in C(X)$ $L(f)$ la fonction définie par :

$$L(f)(x) = \mu_x(f) \quad (\mu_x \text{ mesure maximale de barycentre } x).$$

Posons $A_0 = A(X)$, espace des fonctions affines continues sur X , et pour tout ordinal α , définissons A_α par récurrence par $A_\alpha = \mathcal{Q}[\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta]$. A_α sera l'espace des fonctions de classe affine α . $\mathcal{A} = \bigcup A$ est l'espace des fonctions affines analytiques. Il est clair $\alpha \geq 0$ que $\mathcal{A} \subset \gamma_A(X)$.

X est dit analytique si L est un opérateur A -analytique sur X , c'est-à-dire si $L[C(X)] \subset \mathcal{A}$.

X est dit simplexe de la classe S_σ si L est un opérateur de A -classe σ , c'est-à-dire si $\exists V$ sosu-espace dense de $C(X)$ tel que $L(V) \subset A_\sigma$.

S_0 est la classe des simplexes de Bauer.

S_1 est la classe des simplexes de Lion.

Le théorème 54 nous fournit immédiatement le résultat suivant :

THEOREME 60. Soit X un simplexe analytique. Alors :

- \mathcal{A} est exactement l'espace des fonctions bornées de Baire, vérifiant le calcul barycentrique : $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \gamma_A$.
- L est un projecteur continu positif de \mathcal{B} sur \mathcal{A} .
- \mathcal{A} est réticulé pour son ordre propre, et si $f, g \in \mathcal{A}$:

$$f \vee g = L[\text{Sup}(f, g)]$$

De plus, $L[C(X)]$ est un sous-espace réticulé de \mathcal{A} .

Le théorème de représentation simpliciale que nous avons montré pour les opérateurs de Lion s'étend aux opérateurs analytiques:

THEOREME 61. Si L est un opérateur H-analytique (resp. de H-classe σ) sur X , le simplexe Y associé est analytique (resp. de la classe S_σ), et sa donnée est équivalente à celle de l'opérateur.

Nous considérons, comme pour la démonstration du théorème 34, que X est un sous-ensemble de Y .

1 - $\bar{H} = H_0 = A(Y)|_X$. Supposons que $\forall \beta < \alpha$, $H_\beta = A_\beta|_X$.

Soit $f \in H_\alpha$. $f = \lim f_n$, $f_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$, $\|f_n\| \leq M$.

Donc $f_n = g_n|_X$, $g_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ (et il est facile de voir que $\|g_n\| \leq M$, mais c'est inutile). Soit $y \in Y$; μ_y est portée par X , donc, d'après le théorème de Lebesgue :

$$g_n(y) = \mu_y(g_n) = \mu_y(g_n|_X) = \mu_y(f_n) \rightarrow \mu_y(f) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc $g_n(y) \rightarrow \mu_y(f) = g(y) \forall y \in Y$. La fonction g appartient donc à $\mathcal{Q}[\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta]$, c'est-à-dire à A_α , et $g|_X = f$ (on utilise le lemme 46).

$$\text{Donc } \forall \alpha \quad H_\alpha = A_\alpha|_X.$$

$$\text{Donc } \mathcal{H} = \mathcal{A}|_X.$$

De plus, si $f \in \mathcal{A}$, et $f|_X = 0$, alors $f \equiv 0$, car si $y \in Y$, $f(y) = \mu_y(f) = \mu_y(f|_X) = \mu_y(0) = 0$. Donc, $\forall f \in \mathcal{H}$, \exists g unique dans \mathcal{A} qui prolonge f à X , et g est donnée par $g(y) = \mu_y(f)$.

2 - Supposons que L est H-analytique. Soit $f \in C(X)$.

$L(f)(y) = \mu_y(f) = \mu_y(f|_X)$. $f|_X \in \mathcal{H}$, et la fonction $L(f)$ appartient donc à \mathcal{A} . Donc X est un simplexe analytique.

3 - Supposons que L est de H-classe σ , c'est-à-dire qu'il existe V dense dans $C(X)$ tel que $L(V) \subset H_\sigma$.

$V_1 = \{f \in C(Y) | f|_X \in V\}$ est dense dans $C(Y)$.

Soit $f \in V_1$. $L(f)(y) = \mu_y(f) = \mu_y(f|_X)$. Or $f|_X \in H_\sigma$; donc la fonction $L(f)$ appartient à A_σ . Donc X est un simplexe de la classe S_σ .

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant démontrer un résultat assez surprenant au premier abord : il n'y a pas d'autres simplexes analytiques que les simplexes de Lion, ni d'autres opérateurs analytiques que les opérateurs de Lion. On a même mieux :

THEOREME 62. Soit X un espace compact, et H un sous-espace séparant de C(X) contenant les constantes. Alors, tout opérateur L H-simplicial sur X, tel que $L[C(X)] \subset \mathcal{B}(X)$, est un H-opérateur de Lion.

COROLLAIRE 63. Tout opérateur H-analytique L est un H-opérateur de Lion. Pour tout ordinal $\alpha > 1$, $L(B_\alpha) \subset H_{\alpha+1}$ et $\gamma_H \cap B_\alpha \subset H_{\alpha+1}$. Ce dernier point améliore la proposition 58.

COROLLAIRE 64. Tout simplexe analytique est un simplexe de Lion.

Démonstration du théorème.

Nous allons raisonner en terme de simplexe. Tout revient à montrer que, X étant un simplexe, la condition :

(B) : $\forall f \in C(X)$, la fonction $x \rightarrow \mu_x(f) = L(f)$ appartient à $\mathcal{B}(X)$

implique que, $\forall f$ d'un sous-espace dense de $C(X)$, $L(f) \in A_1$.

Soit S^+ le cône des fonctions convexes continues positives sur X. Pour toute $f \in S^+$, $\hat{f} = L(f) \in A_S$. D'après (B), $L(f) \in \mathcal{B}(X)$.

Il en résulte que l'ensemble $R_f = \{(x, \lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq \hat{f}(x)\}$ est un ensemble de la tribu de Baire de $X \times \mathbb{R}^+$ (cf. lemme ci-dessous).

Comme R_f est compact, R_f est donc un G_δ de $X \times \mathbb{R}^+$.

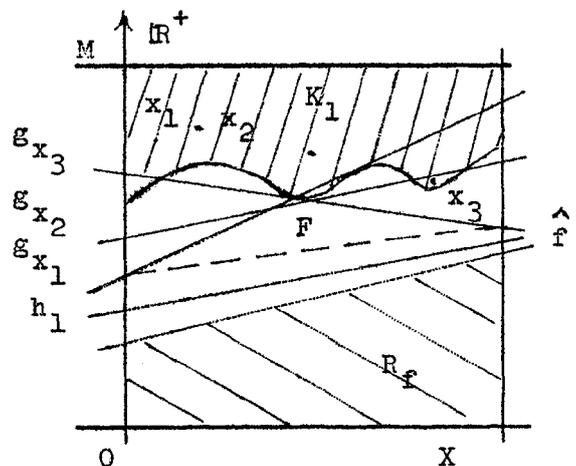
Soit U_n une suite décroissante d'ouverts de $X \times \mathbb{R}^+$, tels que $R_f = \bigcap_{n \geq 1} U_n$, et $U_n \subset X \times [0, M]$ (où $M > \sup_X \hat{f}$).

Nous nous plaçons, pour la suite de la démonstration, dans $X \times [0, M]$.

Posons $K_n = \bigcup U_n$. Si ϕ est une fonction numérique sur X, à valeur dans $[0, M]$, nous poserons

$S_\phi = \{(x, \lambda) \mid \lambda > \phi(x)\}$, et

$S_\phi^* = \{(x, \lambda) \mid \lambda \geq \phi(x)\}$.



Pour tout $x \in K_1$, $\exists g_x$ affine continue sur X , bornée par M , telle que $g_x > \hat{f}$ et $x \in S_{g_x}$ (appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à R_f et $\text{co}[\{x\} \cup X \times \{M\}]$).

Alors $\bigcup_{x \in K_1} S_{g_x} \supset K_1$. Donc $\exists x_1, \dots, x_n \in K_1$ tels que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^n S_{g_{x_i}}^*$, et de plus $(\bigcup_{i=1}^n S_{g_{x_i}}^*) \cap R_f = \emptyset$.

Soit $F = \text{co}[\bigcup_{i=1}^n S_{g_{x_i}}^*]$, F est convexe compact, $F \supset K_1$, et $F \subset R_f$ qui est un ensemble convexe.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe h_1 affine continue sur X , telle que $M \geq h_1 > \hat{f}$, et $F \subset S_{h_1}^*$. Donc $K_1 \subset S_{h_1}^*$.

Supposons trouvées h_1, h_2, \dots, h_n affines continues, telles que : $M \geq h_1 \geq h_2 \dots \geq h_n > \hat{f}$, et $\forall p \leq n, K_p \subset S_{h_p}^*$.

Alors, en refaisant la démonstration précédente pour l'ensemble $K'_{n+1} = K_{n+1} \cup S_{h_n}^*$, on obtient h_{n+1} affine continue, telle que :

$$h_n \geq h_{n+1} > \hat{f}, \text{ et } K_{n+1} \subset S_{h_{n+1}}^* .$$

On peut ainsi construire une suite h_n par récurrence. Il est alors clair que $\inf h_n = \lim h_n = \hat{f}$. Donc $\hat{f} \in A_1$.

Donc $L(S^+) \subset A_1$, et $L(S^+ - S^+) = L(S - S) \subset A_1$: X est un simplexe de Lion, avec $V = S - S$ l'espace dense de la condition de Lion.

C.Q.F.D.

Démontrons le lemme dont nous nous sommes servi :

LEMME 65. Soit f une fonction numérique sur un espace topologique séparé X . Si f est une fonction de Baire, alors $\{(x, \lambda) \mid \lambda \leq f(x)\}$ est un ensemble de la tribu de Baire de $X \times \mathbb{R}$.

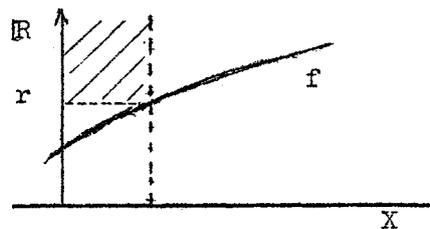
$R_f = \{(x, \lambda) \mid \lambda \leq f(x)\}$ est le complémentaire de l'ensemble $S_f = \{(x, \lambda) \mid \lambda > f(x)\}$.

Soit r un rationnel.

L'ensemble $\{x \mid f(x) < r\}$ est un ensemble de la tribu de Baire de X .

Soit

$$A_r = \{x \mid f(x) < r\} \times]r, +\infty[\subset X \times \mathbb{R} .$$



Alors $A_r \subset S_f$. Donc $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r \subset S_f$.

Soit $(x, \lambda) \in S_f$: $f(x) < \lambda$. Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) < r < \lambda$. Alors $(x, \lambda) \in A_r$. Donc $S_f = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$.

Or chaque A_r appartient à la tribu de Baire de $X \times \mathbb{R}$. Donc il en est de même de S_f , et par suite, aussi, de R_f .

C.Q.F.D.

Si X est un simplexe analytique, on peut espérer des renseignements sur la "nature" des fonctions affines boréliennes sur X .

La question naturelle que l'on se pose est :

a-t'on : (1) $\mathcal{A} \cap B_{\alpha+1} = \mathcal{Q}[\mathcal{A} \cap B_{\alpha}]$?

ou même a-t'on :

(2) $\mathcal{A} \cap B_{\alpha} = A_{\alpha}$?

Un contre-exemple de Choquet montre que, pour $\alpha=2$, (1) est faux (et (2) à fortiori), même si X est un simplexe de Bauer métrisable : $M_1^+([0,1])$ (cf. [5], [14]).

On obtient le résultat suivant, plus faible :

THEOREME 66. Si X est un simplexe analytique, et $\alpha > 1$, toute fonction bornée de classe α de Baire sur X , vérifiant le calcul barycentrique, est de classe affine $\alpha+1$, c'est-à-dire $\gamma_A \cap B_{\alpha} \subset A_{\alpha+1}$.

C'est la traduction du corollaire 63.

COROLLAIRE 67. Si X est un simplexe de Lion, toute fonction affine sur X , de lère classe de Baire, est de seconde classe affine.

Nous allons utiliser les propriétés des simplexes analytiques pour généraliser un résultat de Alfsen sur la face supplémentaire d'une face fermée dans un simplexe.

Rappelons le théorème de Alfsen (cf. [1], [17]) :

PROPOSITION 68. Soit X un simplexe, et F une face fermée de X . Il existe une plus grande face F' disjointe de F (non fermée en général), et telle que tout point x de X s'exprime d'une façon et d'une seule sous la forme $x = \lambda y + (1-\lambda)y'$, $0 < \lambda < 1$, $y \in F$, $y' \in F'$.

De plus, si 1_F est la fonction caractéristique de F , alors :

$$L(1_F)(x) = 0 \iff x \in F' .$$

F' s'appelle la face supplémentaire de F .

DEFINITION 69. Soit X un simplexe analytique. On appellera \mathcal{A} -face de X une face de la forme

$$F = f^{-1}(0) , \text{ pour } f \in \mathcal{A}^+ = \{g \in \mathcal{A} \mid g > 0\} .$$

Si $F = f^{-1}(0)$, pour $f \in A_\sigma^+ = \{g \in A_\sigma \mid g > 0\}$, on dira que F est une A_σ -face.

THEOREME 70. Soit X un simplexe analytique, et soit F une face fermée de X , telle que $1_F \in \mathcal{B}$ (resp. $1_F \in B_\pi$) .

Alors la face F' supplémentaire de F est une \mathcal{A} -face (resp. une $A_{\pi+1}$ -face), donc un ensemble de la tribu de Baire de X (resp. un borélien de classe de Baire $\pi+1$ multiplicative, c'est-à-dire un $K_{\sigma\delta \dots \delta}$ ou un $G_{\delta\sigma \dots \sigma}$ suivant la parité de π) .

En effet, si $1_F \in \mathcal{B}$ (resp. B_π), $L(1_F) \in \mathcal{A}$ (resp. $A_{1+\pi}$), et on utilise l'égalité $F' = L(1_F)^{-1}(0)$.

COROLLAIRE 71. Si X est un simplexe de Lion, et F une face fermée de X qui est un G_δ , alors la face supplémentaire F' est un $K_{\sigma\delta}$. Si, de plus, $\mathcal{E}(X)$ est fermé, F' est un G_δ .

COROLLAIRE 72. Si X est un simplexe métrisable, et F une face fermée de X , alors la face supplémentaire F' est un $K_{\sigma\delta}$.

C'est ce corollaire qu'Alfsen a démontré dans [1] .

REMARQUE 73. On peut en fait montrer, dans un autre cadre, que pour tout simplexe X et toute face fermée F , la face supplémentaire F' est un G_δ , et montrer que la décomposition de X suivant F et F' est "borélienne" en un sens convenable (cf. [17]).

- 9. Les simplexes analytiques réguliers.

DEFINITION 74. Un simplexe X est dit régulier s'il vérifie :

- a) $\mathcal{E}(X)$ est universellement mesurable et porte $\mu_x \forall x \in X$.
 b) Pour toute fonction continue bornée f sur $\mathcal{E}(X)$, $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{B}$ telle que :

$$\|f_n\| \leq M, \text{ et } f_n(x) \xrightarrow{\text{pas}} f(x) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \forall x \in \mathcal{E}(X).$$

Si de plus, $\forall f$ continue bornée sur $\mathcal{E}(X)$, on peut choisir $\{f_n\}$ dans B_π , on dira que X est régulier de type π .

On notera $B_\alpha^\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions bornées de classe de Baire α sur $\mathcal{E}(X)$, et $\mathcal{B}^\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha \geq 0} B_\alpha^\mathcal{E}$. $B_0^\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathcal{E}(X)$.

Le théorème suivant étend un résultat de Alfsen ([2]) :

THEOREME 75. Si X est un simplexe analytique régulier,
alors $\mathcal{B}^\mathcal{E} = \mathcal{A}|_{\mathcal{E}(X)}$. Plus précisément, $\forall f \in \mathcal{B}^\mathcal{E}$ la fonction $P(f)$,
définie sur X par $P(f)(x) = \mu_x(f)$, appartient à \mathcal{A} , et
 $P : \mathcal{B}^\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ est une isométrie bijective linéaire positive inverse
de la restriction.

Si de plus X est régulier de type π , alors $\forall \alpha \geq 0$
 $P(B_\alpha^\mathcal{E}) \subset A_{\alpha+\pi+2}$.

Il est clair que la récurrence donne le résultat, dès qu'on montre que $P(f) \in \mathcal{A}$ si $f \in B_0^\mathcal{E}$. D'après l'hypothèse b) de la définition 74, $f = \lim f_n$, $f_n \in \mathcal{B}$ ($f_n \in B_\pi$ si X est régulier de type π)

$$P(f) = \lim P(f_n) = \lim L(f_n) \in \mathcal{Q}[L(\mathcal{B})] = \mathcal{A}(P(f) \in \mathcal{Q}[L(B_\pi)]) \subset A_{\pi+2}$$

si $\pi \geq 1$, $P(f) \in \mathcal{Q}[L(V)] \subset A_2$ si $\pi=0$, car on peut alors choisir $\{f_n\} \subset V$).

P est évidemment linéaire positive, et $P(f)|_{\mathcal{E}(X)} = f$. Donc P est bijective. $\|P(f)\| \geq \|f\|$. Si $\|P(f)\| > \|f\|$, $\exists y \in X \setminus \mathcal{E}(X)$ tel que, par exemple, $P(f)(y) = \mu_y(f) > \|f\|$. Or $\mu_y(f) \leq \|f\|$. D'où contradiction. Donc $\|P(f)\| = \|f\|$, et P est une isométrie.

C.Q.F.D.

Voici deux exemples importants de simplexes réguliers :

THEOREME 76. Si X est un simplexe métrisable, ou si X est un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ , alors X est régulier de type 0.

1) Si $\mathcal{E}(X) = \bigcup_{n \geq 0} K_n$, (K_n) suite croissante de compacts, $\forall f \in B_0^{\mathcal{E}}$, $\forall n \geq 0$, $\exists f_n \in C(X) = B_0$, telle que $\|f_n\| \leq M = \|f\|$, et $f_n|_{K_n}$. En fait, on peut même prendre $f_n \in A(X)$, et $\lim f_n = g \in A_1$.

Donc $P(B_0^{\mathcal{E}}) \subset A_1$, (ce qui est mieux que ce que donne le théorème 75).

2) Si X est métrisable, $\mathcal{E}(X)$ est un G_δ . Un théorème de Kuratowski (cf. [11]) affirme que toute fonction f de $B_0^{\mathcal{E}}$ admet un prolongement \tilde{f} à X , $\tilde{f} \in B_1$. Donc $\tilde{f} = \lim f_n$, $\{f_n\} \subset B_0$, $\|f_n\| \leq M$, et $f_n \rightarrow f$ sur $\mathcal{E}(X)$.

C.Q.F.D.

REMARQUE 77. $B_0^{\mathcal{E}}$ étant évidemment réticulé, on retrouve, dans un cas particulier, le fait que \mathcal{A} est réticulé. Dans [2], Alfsen utilise, dans le cas métrisable, un argument direct pour montrer que $\mathcal{A}|_{\mathcal{E}(X)} = B_0^{\mathcal{E}}$, sans utiliser le résultat de Kuratowski que nous citons.

Généralisons enfin un théorème de Alfsen sur les simplexes métrisables ([2]), qui relie les \mathcal{A} -faces et la structure borélienne de $\mathcal{E}(X)$.

THEOREME 78. Si X est un simplexe analytique régulier, la tribu de Baire $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}(X)$ est exactement formée des ensembles de la forme $\mathcal{E}(X) \cap F$, où F est une \mathcal{A} -face, et l'application

$$F \rightarrow F \cap \mathcal{E}(X)$$

est une bijection de l'ensemble des \mathcal{A} -faces sur $\mathcal{T}_\mathcal{E}$.

La démonstration est la même que celle d'Alfsen dans le cas métrisable.

Si F est une \mathcal{A} -face, $\mathcal{E}(X) \cap F \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$, évidemment. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$. $1_{C_\mathcal{E} A} \in B_0^{\mathcal{E}}$ ($1_{C_\mathcal{E} A}$ est la fonction

caractéristique de C_{ξ}^A). Soit $F_A = P(1_{C_{\xi}^A})^{-1}(0)$ (où P est définie comme dans le théorème 75). $F_A \cap \xi(X) = A$ de façon évidente, et $P(1_{C_{\xi}^A}) \in \mathcal{A}^+$.

Montrons que F_A est la seule \mathcal{A} -face vérifiant cette condition : Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^+$, telles que $f_1^{-1}(0) \cap \xi(X) = f_2^{-1}(0) \cap \xi(X) = A$. Soit $x \in X$. $f_i(x) = 0 \iff \mu_x(f_i) = 0 \iff \mu_x$ portée par A (car X est régulier). La dernière condition étant indépendante de $i=1,2$, $f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0)$.

Il reste donc juste à montrer que pour toute \mathcal{A} -face $F \neq \emptyset$, $F \cap \xi(X) \neq \emptyset$.

Soit $F = f^{-1}(0) \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{A}^+$. Soit $x \in F$. Si $\mu_x[\{y \mid f(y) > 0\}] > 0$ alors $\mu_x(f) = f(x) > 0$, ce qui n'est pas. Donc μ_x est portée par F . Comme elle est aussi portée par $\xi(X)$, $\mu_x[F \cap \xi(X)] = 1$. donc $F \cap \xi(X) \neq \emptyset$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALFSEN (Erik). - On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, *Math. Scand.* 17 (1965), p. 169-176.
- [2] ALFSEN (Erik). - A note on the Borel structure of a metrizable Choquet simplex and of its extreme boundary, *Math. Scand.* 19 (1966), p. 161-171.
- [3] ALFSEN (Erik). - Boundary values for homomorphisms of compact convex sets, *Math. Scand.* 19 (1966), p. 113-121.
- [4] BAUER (Heinz). - Frontière de Silov et problème de Dirichlet, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel*, t.3, 1958/59, n°7, 23 p.
- [5] CHOQUET (Gustave). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.A. Meyer, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel*, t.6, 1961/62, n°8, 13 p.
- [6] CHOQUET (G.) et MEYER (P.A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t.13, 1963, p. 139-154.
- [7] EDWARDS (David Albert). - Minimum-stable wedges of semicontinuous functions, *Colloquium on convexity 1965*. [Copenhagen].
- [8] EFFROS (Edward G.). - Structure in simplexes, Aarhus University, 1965 (multigr.).
- [9] KAKUTANI (Shizuo). - Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Annals of Math., Series 2*, t.42, 1941, p. 994-1024.
- [10] KELLEY (J.L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1963 (The University Series in higher Mathematics).
- [11] KURATOWSKI (Casimir). - Topologie. - Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

- [12] LION (Georges). - Familles d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1966, p.389-453.
- [13] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (S.C.I. ou S.C.S.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t.6; 1961-1962, n°9, 3 p.
- [14] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton D. Van Nostrand Comp. 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 4).
- [15] ROGALSKI (Marc). - Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.5, 1965-1966, n°2, 31 p.
- [16] ROGALSKI (Marc). - Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t.5, 1965-1966, n°12, 62 p.
- [17] ROGLASKI (Marc). - Quotient d'un simplexe par une face fermée ; application à un théorème d'Alfsen (à paraître).

