UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 58

Pierre REID

Fonctions maxiamles associées aux fonctions de L^p à valeurs dans ℓ^r.

1974

Publications mathématiques d'Orsay

0. INTRODUCTION.

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la distance ordinaire et de la mesure de Lebesgue. Pour une fonction mesurable f, la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f est

$$f^*(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(u)|\,du$$

le sup étant pris sur tous les cubes Q contenant x. Voici le théorème classique sur la fonction maximale.

THEOREME A.

(1) $\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f^*(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{C}{\lambda} \cdot \|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(2) $\|f^*\|_p \leq C_p . \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty.$

Fefferman et Stein, dans [6], ont généralisé ces inégalités aux espaces $L^p(\ell^r)$ des suites (f_k) telles que $\|(\sum_k |f_k|^r)^{1/r}\|_p < \infty$.

THEOREME B (Fefferman et Stein).

(i) $$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\sum |f_k^*|^r)^{1/r} > \lambda\right\}\right| \leq \frac{A_r}{\lambda} \|(\sum |f_k|^r)^{1/r}\|_1 \qquad (1 < r < \infty)$$

(ii) $$\|(\sum |f_k^*|^r)^{1/r}\|_p \leq A_{r,p} . \|(\sum |f_k|^r)^{1/r}\|_p \qquad (1 < r,p < \infty)$$

(iii) Si $(\sum |f_k|^r)^{1/r} \in L^\infty$ et toutes les f_k ont leur support dans un même cube, il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\int_Q \mathrm{EXP}(\alpha . \sum |f_k^*|^r) dx < \infty$$

pour tout cube Q.

La preuve du théorème B suggère la comparaison entre deux types d'opérateurs maximaux pour les fonctions à valeurs dans ℓ^r :

- $(\sum (f_k^*)^r)^{1/r}$, opérateur relatif aux coordonnées
- $\left[(\sum |f_k|^r)^{1/r}\right]^*$ opérateur relatif au module (norme ℓ^r).

Pour faciliter l'écriture, $|(a_k)|_r$ sera la norme de la suite (a_k) dans ℓ^r, et nous supposerons toujours les fonctions f_k positives. Pour une fonction F à valeurs dans ℓ^r, $F = (f_1, f_2, \ldots)$ on écrira

$$|F|_r = (\sum f_k^r)^{1/r}.$$

Par abus de langage, nous noterons F^* la fonction maximale relative aux coordonnées :

$$F^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots).$$

Les deux opérateurs précédents s'écrivent donc

$$|F^*|_r \quad \text{et} \quad |F|_r^* .$$

(Pour éliminer la confusion possible entre les notations, les fonctions à valeurs dans ℓ^r seront toujours représentées par des lettres majuscules).

Nous avons établi une inégalité de type Burkholder-Gundy entre ces deux opérateurs, pour $1 < r < \infty$:

THEOREME C. Pour $\beta > 1$ et $\delta > 0$, $\lambda > 0$,

$$\left|\left\{ |F^*|_r > \beta\lambda \quad ; \quad |F|_r^* \leq \delta\lambda \right\}\right| \leq \varepsilon \left|\left\{ |F^*|_r > \lambda \right\}\right|$$

$\varepsilon \to 0$ lorsque $\beta \to \infty$ ou $\delta \to 1$.

Des inégalités semblables existent entre la fonction d'aire et la fonction maximale non-tangentielle ([2]), et entre la transformée de Hilbert maximale et la fonction maximale ([3]). Une telle inégalité entraîne deux types de résultats :

- <u>des inégalités</u> L_Φ : Si Φ est une fonction sur $[0 , \infty]$ satisfaisant de bonnes conditions (c'est le cas de $\Phi(t) = t^p$), alors

$$\int \Phi(|F^*|_r)\, dx \leq C. \int \Phi(|F|_r^*)\, dx$$

- <u>des résultats à poids</u> : si μ est une mesure satisfaisant de bonnes conditions,

$$\mu(|F^*|_r > \beta\lambda \quad ; \quad |F|_r^* \leq \delta\lambda) \leq \varepsilon\mu(|F^*|_r > \lambda)$$

et

$$\int \Phi(|F^*|_r)\, d\mu \leq C \int \Phi(|F|_r^*)\, d\mu .$$

La détermination de ε dans le théorème C revêt une grande importance, en particulier pour l'évaluation de la meilleure constante dans les inégalités L_Φ. L'emploi de résultats exponentiels, comme ceux de la partie (iii) du théorème B, permet d'écrire ε comme une exponentielle en β et δ. Le résultat le plus précis a été obtenu pour la fonction maximale f^{**} associée au découpage de R^n en cubes dyadiques

$$f^{**}(x) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \text{ dyadique}}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(u)|\, du.$$

THEOREME. Pour $1 < r < \infty$,

$$\left|\left\{|F^{**}|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|^{**} \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq 3.e^{-B_r(B^r-1)/\delta^r} . \left|\left\{|F^{**}|_r > \lambda\right\}\right|$$

B_r ne dépendant que de r et de la dimension. Ce résultat est le meilleur possible.

Nous avons également étudié les inégalités du théorème B en prenant des opérateurs maximaux plus généraux, pour lesquels l'analogue du théorème A est déjà connu. C'est le cas de l'opérateur maximal associé à un espace de nature homogène, et de l'opérateur maximal associé à une suite décroissante de rectangles de R^n.

Un espace de nature homogène est constitué d'un ensemble X, d'une pseudo-distance d(*), et d'une mesure borélienne μ sur X, ayant la propriété $\mu(B(x,R)) \leq A.\mu(B(x,R))$ pour tout $x \in X$ et $R > 0$. L'opérateur maximal associé est défini par

$$Mf(x) = \sup_{\substack{B \text{ boule} \\ \text{contenant } x}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(u)\, d\mu(u)$$

et le théorème A est vrai pour cet opérateur (voir [4], page 71, th. (2.1)).

Lorsqu'on a une suite décroissante $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de rectangles (ou pavés) symétriques dans R^n dont le diamètre tend vers 0, on définit l'opérateur maximal associé par

$$Mf(x) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|S_i|} \int_{x+S_i} |f(u)|\, du$$

et le théorème A est aussi vrai pour cet opérateur (voir Zygmund [8], chap. XVII, lemme 3.5).

(*) Une pseudo-distance est semblable à une distance, sauf pour l'inégalité triangulaire : $d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(y,z))$.

Dans le paragraphe 3, nous montrons l'analogue du théorème C pour les espaces de nature homogène. Nous obtenons les parties (i) et (ii) du théorème de Fefferman et Stein, et la partie (iii) dans certains cas particuliers.

Dans le paragraphe 4, nous montrons, en nous inspirant de la preuve de Fefferman et Stein, les parties (i), (ii) et (iii) du théorème B pour la fonction maximale associée à une famille de rectangles. Il ne semble pas exister d'analogue du théorème C pour cette fonction maximale.

Je tiens à remercier les gouvernements français et québécois pour leur aide financière pendant la préparation de cette thèse de 3ème cycle. J'exprime toute ma gratitude envers M. Jean-Pierre Kahane, qui a permis mon séjour à Orsay, et qui a toujours été compréhensif et bienveillant envers moi. Je ne saurais comment exprimer toute ma reconnaissance envers Mme A. Bonami, qui a guidé mes pas tout au long de la préparation de ce travail, et qui m'a suggéré de nombreuses idées développées ici. Je remercie enfin Mme Dumas qui a aimablement accepté de dactylographier ces pages.

1. LA FONCTION MAXIMALE DYADIQUE.

Les méthodes utilisées dans ce paragraphe sont typiques de celles utilisées par la suite. Elles s'inspirent largement de la démonstration de Fefferman et Stein de l'inégalité faible (i) et de la démonstration du théorème de R. Coifman sur la transformée de Hilbert maximale [3].

Le théorème (1.4) est conséquence du théorème B ; néanmoins nous en fournissons une preuve directe qui a comme intérêt d'une part de montrer la souplesse des inégalités de type Burkholder-Gundy, et d'autre part de montrer qu'on peut se passer, pour les résultats exponentiels, de l'inégalité des fonctions maximales à poids

$$\int (f^*)^r.\varphi \, dx \leq B_r \int f^r.\varphi^* \, dx$$

qui joue un rôle important dans la preuve de Fefferman et Stein.

Les lettres majuscules F, G, H sont réservées pour des fonctions à valeurs dans ℓ^r.

LEMME (1.1) (lemme de la "bonne fonction").

Soit K un cube dyadique ou l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, et soit $\Omega = \cup Q_j$ un ouvert inclus dans K recouvert par une famille de cubes dyadiques disjoints (Q_j). Si f est une fonction (positive) localement intégrable sur K, on définit la "bonne fonction" h associée à f sur K par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin K \\ f(x) & \text{si } x \in K \setminus \Omega \\ \dfrac{1}{|Q_j|} \displaystyle\int_{Q_j} f(u)du & \text{si } x \in Q_j \end{cases} .$$

Si on note $M_1 f$ la fonction maximale restreinte à K :

$$M_1f(x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\subset K}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(u)\,du$$

alors $M_1f = M_1h$ sur $K\setminus\Omega$.

Démonstration. Pour chaque cube Q_j il est évident que

$$\int_{Q_j} h\,dx = \int_{Q_j} f\,dx$$

et donc, pour une réunion quelconque $S = \bigcup_{j\in J} Q_j$ de ces cubes,

$$\int_S h\,dx = \int_S f\,dx.$$

Soit $x \in K\setminus\Omega$, et soit Q un cube dyadique inclus dans K et contenant x. L'intersection de Q avec Ω s'écrit comme une réunion de cubes Q_j : posons $S = Q\cap\Omega$.

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q h\,dx &= \frac{1}{|Q|}\Big(\int_{Q\setminus\Omega} h\,dx + \int_S h\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{|Q|}\Big(\int_{Q\setminus\Omega} f\,dx + \int_S f\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{|Q|}\int_Q f\,dx\,.\end{aligned}$$

En passant au sup en Q, $M_1h(x) = M_1f(x)$.

THEOREME (1.2). Soit $F = (f_1, f_2, \ldots)$ une fonction à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$, alors

$$\big|\{|F^{**}|_r \dot{>} \lambda\}\big| \le \frac{A_r}{\lambda}\int |F|_r\,dx$$

et A_r ne dépend que de r et de la dimension.

Remarque. Cette inégalité est contenue dans la partie (i) du théorème B. La preuve ci-après n'est pas nouvelle mais sa présentation donne une idée des méthodes employées par la suite.

<u>Démonstration</u>. Pour simplifier, nous écrirons simplement $|F|$ pour $|F|_r$. Soit $\Omega = \{|F|^{**} > \lambda\}$. En choisissant les plus grands cubes dyadiques sur lesquels la moyenne de $|F|$ est supérieure à λ, on écrit Ω comme réunion de cubes dyadiques disjoints (Q_j) tels que

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |F|\,du \leq 2^n.\lambda .$$

A chaque fonction coordonnée f_k de F, on associé une "bonne fonction" h_k sur R^n par le lemme précédent (avec $K = R^n$). Il en résulte une bonne fonction $H = (h_1, h_2, \ldots)$ telle que $H^{**} = F^{**}$ hors de Ω. De plus, $|H|$ est bornée par $2^n\lambda$: hors de Ω, c'est évident car $|H|(x) = |F|(x) \leq |F|^{**}(x) \leq \lambda$; et sur Q_j,

$$H(x) = \Big(\sum \Big(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f_k(u)\,du\Big)^r\Big)^{1/r}$$

$$= \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} \Big(\sum f_k^r\Big)^{1/r} du \quad \text{(par l'inégalité de Minkowski généralisée)}$$

$$= 2^n.\lambda .$$

Enfin, $\int |H|\,dx \leq \int |F|\,dx$: en effet,

$$\int_{R^n\setminus\Omega} |H|\,dx = \int_{R^n\setminus\Omega} |F|\,dx$$

et

$$\int_{Q_j} |H|\,dx = \int_{Q_j} \Big(\sum \Big(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f_k(u)du\Big)^r\Big)^{1/r} dx$$

$$\leq \int_{Q_j} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |F|(u)\,du\,dx \quad \text{(par l'inégalité de Minkowski généralisée)}$$

$$= \int_{Q_j} |F|\,du.$$

Maintenant nous pouvons montrer l'inégalité faible de l'énoncé pour H, et en déduire le théorème.

$$\left|\left\{|H^{**}|>\lambda\right\}\right| \le \frac{1}{\lambda^r}\int |H^{**}|^r\,dx \quad \text{(par l'inégalité de Tchebychev)}$$

$$= \frac{1}{\lambda^r}\sum \int (h_k^{**})^r\,dx$$

$$\le \frac{A_r}{\lambda^r}\sum \int h_k^r\,dx \quad \text{(par le théorème maximal ordinaire)}$$

$$= \frac{A_r}{\lambda^k}\int |H|^r\,dx \le \frac{A_r.2^{n(r-1)}}{\lambda}\int |H|\,dx.$$

Pour F,

$$\left|\left\{|F^{**}|_r>\lambda \quad ; \quad |F|^{**}\le\lambda\right\}\right| \le \left|\left\{|H^{**}|>\lambda\right\}\right|$$

$$\le \frac{A'_r}{\lambda}\int |H|\,dx$$

$$\le \frac{A'_r}{\lambda}\int |F|\,dx.$$

On en déduit $\left|\left\{|F^{**}|>\lambda\right\}\right| \le \left|\left\{|F|^{**}>\lambda\right\}\right| + \frac{A'_r}{\lambda}\int |F|\,dx$

$$\le \frac{A''_r}{\lambda}\int |F|\,dx.$$

LEMME (1.3). Si F est une fonction à valeurs dans ℓ^r $(1<r<\infty)$ et si $\beta>1$, $\delta>0$, alors pour tout $\lambda>0$

$$\left|\left\{|F^{**}|_r>\beta\lambda \quad ; \quad |F|_r^{**}\le\delta\lambda\right\}\right| \le C_r\left(\frac{\delta^r}{\beta^r-1}\right)\left|\left\{|F^{**}|_r>\lambda\right\}\right|$$

et C_r ne dépend que de r et de la dimension.

Démonstration. Soit $O_\lambda = \left\{|F^{**}|>\lambda\right\}$. O_λ est ouvert. En choisissant les plus grands cubes dyadiques inclus dans O_λ, on écrit O_λ comme réunion de cubes dyadiques disjoints

$$O_\lambda = \cup K_j .$$

On est ainsi ramené à montrer pour chaque j

$$\left|K_j \cap \left\{|F^{**}| > \beta\lambda \quad ; \quad |F|^{**} \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq C_r\left(\frac{\delta^r}{\beta^r - 1}\right) . |K_j| \,.$$

Prenons un cube fixé K_o dans la famille (K_j), et posons, pour $x \in K_o$:

$$M_1 f_k(x) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \subset K_o}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f_k(u)\,du$$

$$M_1 f_k(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin K_o$$

et
$$M_2 f_k(x) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \not\subset K_o}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f_k(u)\,du \,.$$

On a
$$f_k^{**}(x) = \max\left[M_1 f_k(x) \,,\, M_2 f_k(x)\right].$$

Par maximalité de K_o, il existe un point $a \notin O_\lambda$ tel que si $Q \not\subset K_o$ alors $a \in Q$. Il s'en suit que $M_2 f_k(x) \leq f_k^{**}(a)$ pour tout $x \in K_o$. Donc, si $x \in K_o$,

$$\sum (M_2 f_k)^r(x) \leq \sum (f_k^{**})^r(a) \leq \lambda^r.$$

On obtient

$$|F^{**}|_r^r(x) = \sum \left(\max\left[M_1 f_k(x) \,,\, M_2 f_k(x)\right]\right)^r$$

$$\leq \sum (M_1 f_k)^r + \sum (M_2 f_k)^r$$

$$\leq |M_1(F)|_r^r + \lambda^r \,.$$

L'ensemble $K_o \cap \left\{|F^{**}|_r > \beta\lambda \;;\; |F|_r^{**} \leq \delta\lambda\right\}$ est ainsi contenu dans l'ensemble $\left\{|M_1(F)|_r > \gamma\lambda \;;\; M_1(|F|_r) \leq \delta\lambda\right\}$ où $\gamma = (\beta^r - 1)^{1/r}$. C'est la mesure de cet ensemble que nous allons majorer grâce au lemme de la bonne fonction, en analogie avec la démonstration du théorème précédent.

Soit $\Omega = \left\{M_1(|F|) > \delta\lambda\right\}$. On peut supposer $\Omega \neq K_o$ sinon il n'y a rien à prouver. En choisissant les plus grands cubes dyadiques inclus dans K_o sur lesquels la moyenne de $|F|$ est supérieure à $\delta\lambda$, on écrit Ω comme réunion de cubes dyadiques disjoints (Q_j) tels que

$$\delta\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |F|\,du \leq 2^n\delta\lambda.$$

A chaque fonction coordonnée f_k on associe sur K_o une bonne fonction h_k par le lemme (1.1) et on obtient une fonction $H = (h_1, h_2, \ldots)$ telle que $M_1(H) = M_1(F)$ sur $K_o \setminus \Omega$. Ici, $|H|$ sera bornée par $2^n\delta\lambda$.

En procédant comme pour le théorème précédent,

$$\left|\left\{|M_1(F)|_r > \gamma\lambda \;;\; M_1(|F|_r) \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{|M_1(H)|_r > \gamma\delta\right\}\right|$$

$$\leq \left|\left\{|H^{**}|_r > \gamma\lambda\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\gamma^r\lambda^r}\int |H^{**}|_r^r\,dx \qquad \text{(inégalité de Tchebychev)}$$

$$\leq \frac{A_r}{\gamma^r\lambda^r}\int |H|_r^r\,dx \qquad \text{(théorème maximal ordinaire)}$$

$$\leq \frac{A_r(2^n\delta\lambda)^r}{\gamma^r\lambda^r}\,.\,|\text{support }(H)|$$

$$\leq 2^{nr}A_r\left(\frac{\delta^r}{\beta^r-1}\right)|K_o|.$$

THEOREME (1.4). Si H est une fonction à support dans un ensemble S de mesure finie, à valeurs dans ℓ^r, $(1 < r < \infty)$, et si $|H|_r(x) \leq A < \infty$ pour tout x, alors

(1) $$\int_S \exp(\alpha|H^{**}|_r^r(x))\,dx \;\dot{\leq}\; \frac{|S|}{1-\alpha A/2c_r} \quad \text{pour } \alpha \text{ assez petit}$$

(2) $$\left|\left\{|H^{**}|_r > \lambda\right\}\right| \leq 2.\,|S|\,.\,e^{-c_r\lambda^r/A^r}, \quad (\lambda > 0)$$

c_r ne dépendant que de r et de la dimension n.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer $A = 1$. Posons $\delta = \frac{1}{\lambda}$ dans l'inégalité du

théorème précédent :

$$\left|\left\{ |H^{**}|_r > \beta\lambda \right\}\right| \leq \frac{C_r}{(\beta^r - 1)} \cdot \frac{1}{\lambda^r} \left|\left\{ |H^{**}|_r > \lambda \right\}\right|.$$

Si l'on note D_g la fonction de distribution de la fonction g,

$$D_{|H^{**}|}(\beta\lambda) \leq \frac{C_r}{\beta^r - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^r} \cdot D_{|H^{**}|}(\lambda)$$

et, pour $m \geq 2$,

$$\int \lambda^{mr-1} D_{|H^{**}|}(\beta\lambda)\, d\lambda \leq \frac{C_r}{\beta^r - 1} \int \lambda^{mr-r-1} D_{|H^{**}|}(\lambda)\, d\lambda .$$

Par la méthode habituelle (intégrales de Stieltjes),

$$\frac{1}{\beta^{mr}} \int |H^{**}|^{mr}\, dx \leq \frac{C_r}{(\beta^r - 1)} \cdot \frac{mr}{(mr-1)} \cdot \int |H^{**}|^{(m-1)\,r} dx.$$

En choisissant $\beta^r = 1 + \frac{1}{m}$

$$\int |H^{**}|^{mr}\, dx \leq 2\, e\, C_r . M \int |H^{**}|^{(m-1)\, r}\, dx.$$

En itérant $(m-1)$ fois,

$$\int |H^{**}|^{mr} dx \;\leq\; (2\, e\, C_r)^{m-1}\, m! \int |H^{**}|^r\, dx.$$

La dernière intégrale s'écrit encore $\int \sum (h_k^{**})^r dx$, ou $\sum \int (h_k^{**})^r\, dx$, et elle est majorée, moyennant le théorème maximal ordinaire pour $L^r(\mathbb{R}^n)$, par

$A_r . \sum \int h^r dx = A_r \int |H|^r dx.$

Puisque $A_r \int |H|^r dx \leq A_r |S|$, on obtient

$$\int |H^{**}|^{mr}\, dx \leq \frac{m!\, |S|}{2^m . c_r^m}$$

en posant $c_r = \dfrac{1}{2 . A_r (2ec_r)}$.

Le théorème découlera du lemme suivant (voir Zygmund [8], tome II, p. 119).

LEMME. Si S est un ensemble de mesure finie, et w est une fonction satisfaisant

$$\int w^{mr} dx \leq m\,!\, \frac{|S|}{c^m}$$

alors

(1) $$\int_S e^{\alpha w^r} dx \leq \frac{|S|}{1-\alpha/c} \quad \text{pour} \quad \alpha < c$$

(2) $$\left|\left\{ w > \lambda \right\}\right| \leq 2.\, |S|.\, e^{-c\lambda^r/2}.$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\alpha > 0$.

$$\int_S e^{\alpha w^r} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \int_S w^{rm} dx$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{c^m} |S|$$

$$= \frac{|S|}{1-\alpha/c} \quad \text{pour} \quad \alpha < c.$$

Pour montrer (2), posons $\alpha = c/2$:

$$\int_S e^{cw^r/2} dx \leq 2\,|S|$$

et

$$\left|\left\{ w > \lambda \right\}\right| = \left|\left\{ e^{cw^r/2} > e^{c\lambda^r/2} \right\}\right|$$

$$\leq e^{-c\lambda^r/2} \int e^{-cw^r/2} dx \quad \text{(par l'inégalité de Tchebychev)}$$

$$\leq 2\,|S|\, e^{-c\lambda^r/2}.$$

THEOREME (1.5). Si F est une fonction à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$, et si $\beta > 1$, $\delta > 0$, alors

$$\left|\left\{ |F^{**}|_r > \beta\lambda \;;\; |F|_r^{**} \leq \delta\lambda \right\}\right| \leq 2.e^{B_r(\beta^r - 1)/\delta^r} . \left|\left\{ |F^{**}|_r > \lambda \right\}\right|$$

et B_r ne dépend que de r et de la dimension. ($B_r \to 0$ lorsque $r \to 1$).

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme (1.3) sauf pour un point : l'évaluation de la fonction de distribution de la bonne fonction. Ici, on utilise l'évaluation du théorème (1.4), avec $S = K_o$ (le support de H est dans K_o) :

$$\begin{aligned}
\left|\left\{|H^{**}| > \gamma\lambda\right\}\right| &\leq 2.e^{-c_r\gamma^r\lambda^r/\||H|\|_\infty^r} . |K_o| \\
&\leq 2.e^{-c_r\gamma^r/2^{nr}\delta^r} . |K_o| \\
&= 2.e^{-B_r(\beta^r-1)/\delta^r} . |K_o| .
\end{aligned}$$

Le théorème qui suit montre que le résultat (1.5) est le meilleur possible, du moins lorsque δ est choisi entre 0 et 1 (ce sont les petites valeurs de δ qui sont intéressantes pour les applications).

THEOREME (1.6). Soit $0 < \delta < 1$ et $\beta > 1$. Si pour toute fonction F à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$ on a

$$\left|\left\{|F^{**}|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|_r^{**} \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq \varepsilon \left|\left\{|F^{**}|_r > \lambda\right\}\right|$$

alors $\varepsilon \geq b.e^{-c(\beta^r-1)/\delta^r}$, b et c ne dépendant que de r.

Démonstration. Nous allons évaluer la mesure des deux ensembles de l'inégalité pour une fonction F particulière. La construction est faite ici pour $n = 1$, mais elle vaut pour $n > 1$.

Soit $I_j = \left\{2^{-j-1} < x \leq 2^{-j}\right\}$ .pour $j \in \mathbb{Z}$, et soit $f_k = \mathcal{X}_{I_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Si $F = (f_1, f_2, \ldots)$,

$$|F|_r = \Big(\sum_k (\mathcal{X}_{I_k})^r\Big)^{1/r} = \mathcal{X}_{]0,1]} .$$

Etudions f_k^{**} :

sur $]-\infty, 0]$, $f_k^{**} = 0$

sur I_k, $f_k^{**} = 1$

sur I_{k+m}, $(m \geq 1)$, $f_k^{**} = \frac{1}{2}$

sur I_{k-m}, $(m \geq 1)$, $f_k^{**} = \frac{1}{2^{m-1}}$.

Pour j fixé et $x \in I_j$,

$f_k^{**}(x) = \frac{1}{2}$ si $k < j$

$f_k^{**}(x) = 1$ si $k = j$

$f_k^{**}(x) = \frac{1}{2^{k-j+1}}$ si $k > j$.

Alors, si $j \geq 0$,

$$|F^{**}|_r^r(x) = \sum_{o}^{j-1} \frac{1}{2^r} + 1 + \sum_{j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{r(k-j+1)}}$$

$$= \frac{j}{2^r} + 1 + \frac{1}{2^r(2^r-1)}$$

et donc,

$$\frac{j}{2^r} + 1 \leq |F^{**}|^r(x) \leq \frac{j}{2^r} + 2.$$

Comme $x \in I_j$ implique

$$-1 - \log_2 x \leq j \leq -\log_2 x ,$$

alors pour $x \in]0,1]$,

$$\frac{-1-\log_2 x}{2^r} + 1 \leq |F^{**}|_r^r \leq \frac{-\log_2 x}{2^r} + 2.$$

Pour $x > 1$, $x \in I_j$ avec $j < 0$,

$$|F^{**}|_r^r(x) = \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2^{r(k-j+1)}} = \frac{2^{j-r}}{2^r - 1} < 1.$$

Evaluons la mesure de chacun des deux ensembles de l'inégalité, avec notre fonction F.

D'une part, si $\delta\lambda \leq 1$,

$$\left|\left\{ |F^{**}| > \beta\lambda \ ; \ |F|^{**} \leq \delta\lambda \right\}\right| = \left|\left\{ |F^{**}| > \beta\lambda \right\}\right|$$

$$\geq \left|]0,1] \cap \left\{ |F^{**}| > \beta\lambda \right\}\right|$$

$$\geq \left|\left\{ \frac{-1-\log_2 x}{g^r} + 1 > \beta^r \lambda^r \right\}\right|$$

$$= \left|\left\{ \log_2 x < -1 - 2^r(\beta^r\lambda^r - 1) \right\}\right|$$

$$= 2^{-1-2^r(\beta^r\lambda^r-1)} .$$

D'autre part, si $\lambda \geq 1$,

$$\left|\left\{ |F^{**}| > \lambda \right\}\right| = \left|]0,1] \cap \left\{ |F^{**}| > \lambda \right\}\right|$$

$$\leq \left|\left\{ \frac{-\log_2 x}{2^r} + 2 > \lambda^r \right\}\right|$$

$$= \left|\left\{ \log_2 x < -2^r(\lambda^r - 2) \right\}\right|$$

$$= 2^{-2^r(\lambda^r-2)} .$$

Si on pose $\lambda = \frac{1}{\delta}$, alors $\lambda\delta = 1$, et $\lambda \geq 1$, et l'inégalité de l'hypothèse devient

$$\left|\left\{ |F^{**}| > \frac{\beta}{\delta} \right\}\right| \leq \varepsilon . \left|\left\{ |F^{**}| > \frac{1}{\delta} \right\}\right| .$$

Alors, $$2^{-1-2^r((\beta^r/\delta^r)-1)} \leq \varepsilon . 2^{-2^r((1/\delta^r)-2)}$$

et $$\varepsilon \geq 2^{-1-2^r} . 2^{-2^r(\beta^r-1)/\delta^r}$$

$$= b . e^{-c(\beta^r-1)/\delta^r} .$$

Les résultats qui suivent sont des corollaires du théorème (1.5).

COROLLAIRE (1.7). Soit Φ une fonction continue croissante sur $[0,\infty]$ telle que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(2\lambda) = c\Phi(\lambda)$. Alors

$$\int \Phi(|F^{**}|_r)dx \leq C \int \Phi(|F|_r^{**})\, dx$$

pour toute fonction F à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$.

Démonstration. Etudions l'effet de Φ sur une somme finie de nombres positifs.

Posons $$\Psi(x) = \sup\left\{y \ ; \ \Phi(y) = x\right\}.$$

On a $$\Phi(\Psi(x)) = x \quad , \quad \text{et} \quad y \leq \Psi(\Phi(y)).$$

Soit (a_i) une suite de nombres positifs

$$\Phi(a_{i_o}) \leq \sum_1^{2^N} \Phi(a_i) \qquad \text{pour tout} \qquad i_o \leq 2^N, \qquad N \in \mathbb{N}$$

alors, $a_{i_o} \leq \Psi(\Phi(a_{i_o})) \leq \Psi(\sum_1^{2^N} \Phi(a_i))$ et en additionnant,

$$\sum_1^{2^N} a_i \leq 2^N \ \Psi(\sum_1^{2^N} \Phi(a_i))$$

et

$$\Phi(\sum_1^{2^N} \frac{a_i}{2^N}) \leq \sum_1^{2^N} \Phi(a_i).$$

Alors, $\Phi(\sum_1^{2^N} a_i) \leq \sum_1^{2^N} \Phi(2^N . a_i) \leq c^N . \sum_1^{2^N} \Phi(a_i).$

Revenons à l'inégalité de l'énoncé : il suffit de la prouver pour une suite finie $F = (f_1, f_2, \ldots f_{k_o}, 0, 0 \ldots)$ de fonctions. En effet, si on pose

$$F_{(N)} = (f_1, \ \ldots, \ f_{2^N}, \ 0, \ 0, \ldots)$$

alors $|F_{(N)}^{**}|_r \nearrow |F^{**}|_r$ et

$$\int \Phi(|F_{(N)}^{**}|_r)\, dx \nearrow \int \Phi(|F^{**}|_r)\, dx$$

par le théorème de la convergence monotone.

Supposons donc $F = (f_1, \ldots, f_{2^N}, 0, 0, \ldots)$, et supposons que

$$\int \Phi(|F|_r^{**})\, dx < \infty$$

sinon, il n'y a rien à prouver.

Pour chaque k, $\int \Phi(f_k^{**})\,dx \leq \int \Phi(|F|_r^{**})\,dx < \infty$. Alors, par les propriétés de Φ,

$$\int \Phi(|F^{**}|_r)dx \leq \int \Phi\Big(\sum_1^{2^N} f_k^{**}\Big)\,dx$$

$$\leq c^N.\sum_1^{2^N} \int \Phi(f_k^{**})\,dx < \infty .$$

Sachant que $\int \Phi(|F^{**}|_r)dx < \infty$, le corollaire est conséquence du théorème (1.5) par un lemme général dû à Burkholder et Gundy :

LEMME. Soit $\beta > 1$, $\delta > 0$. Supposons qu'il existe des nombres ξ et θ tels que $\Phi(\beta\lambda) \leq \xi\Phi(\lambda)$ et $\Phi(\frac{\lambda}{\delta}) \leq \theta\Phi(\lambda)$. (L'existence de ξ et θ est garantie par la condition $\Phi(2\lambda) \leq c\Phi(\lambda)$).

Si $$\int \Phi(f)\,dx < \infty$$

et si $$|(f > \beta\lambda\ ;\ g \leq \delta\lambda)| \leq \varepsilon.\,|(f > \lambda)|$$

alors $$\int \Phi(f)\,dx \leq \frac{\xi\theta}{1-\xi\varepsilon} \int \Phi(g)\,dx .$$

Démonstration du lemme. L'hypothèse implique

$$|(f > \beta\lambda)| \leq \varepsilon\,|(f > \lambda)| + |(g > \delta\lambda)|.$$

Si on note D_f et D_g les fonctions de distribution de f et g,

$$D_f(\beta\lambda) \leq \varepsilon\, D_f(\lambda) + D_g(\delta\lambda).$$

En prenant l'intégrale de Stieltjes-Lebesgue par rapport à la mesure $d\Phi$,

$$\int D_f(\beta\lambda)d\Phi \leq \varepsilon \int D_f(\lambda)\,d\Phi + \int D_g(\delta\lambda)\,d\Phi$$

et

$$\int \Phi(\tfrac{1}{\beta}f)\,dx \leq \varepsilon.\int \Phi(f)dx + \int \Phi(\tfrac{1}{\delta}\,g)\,dx.$$

Par les hypothèses sur Φ,

$$\begin{aligned}\int \Phi(f)\,dx &= \int \Phi(\beta\,.\,\tfrac{1}{\beta}f)\,dx \\ &\leq \xi \int \Phi(\tfrac{1}{\beta}f)\,dx \\ &\leq \xi\,\varepsilon \int \Phi(f)\,dx + \xi\,\theta \int \Phi(g)\,dx.\end{aligned}$$

Comme $\int \Phi(f) < \infty$,

$$(1 - \xi\varepsilon) \int \Phi(f)\,dx \leq \xi\theta \int \Phi(g)\,dx.$$

Remarques. 1. Comme $f^{**}(x) \geq \dfrac{A\|f\|_1}{|x|^n}$, les fonctions Φ telles que $\int_1^\infty \Phi(\frac{1}{t})\,dt = \infty$ sont exclues par la condition $\int \Phi(|F|_r^{**})\,dx < \infty$. Sont exclues en particulier les fonctions $\Phi(\lambda) = \lambda^p$ pour $0 < p \leq 1$, et $\Phi(\lambda) = \lambda \operatorname{Log}(1+\lambda)$.

2. Dans le cas où $\Phi(\lambda) = \lambda^p$ $(1 < p < \infty)$ on trouve

$$C = \frac{\beta^p}{\delta^p}\left(\frac{1}{1-\beta^p\varepsilon}\right).$$

En choisissant $\beta^r = 1 + \frac{1}{p}$ et $\delta^r = \frac{c_o}{p}$ pour c_o petit, on obtient :

COROLLAIRE (1.8). Si $1 < r < \infty$ et $1 < p < \infty$,

$$\|\,|F^{**}|_r\|_p \leq C_r . p^{1/r} . \|\,|F|_r^{**}\|_p$$

et C_r ne dépend que de r et de la dimension.

COROLLAIRE (1.9) (Inégalités à poids). Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition

$$\frac{\mu(E\cap Q)}{\mu(Q)} \leq C\left(\frac{|E\cap Q|}{|Q|}\right)^{\alpha}$$

pour un $C>0$ et un $\alpha>0$, et pour tout cube Q et tout ensemble mesurable E.

Alors

$$\mu(|F^{**}|_r > \beta\lambda \;;\; |F|_r^{**} \leq \delta\lambda) \leq \varepsilon.\mu(|F^{**}|_r > \lambda)$$

et comme conséquence,

$$\int \Phi(|F^{**}|_r)\, d\mu \leq C \int \Phi(|F|_r^{**})\, d\mu .$$

Démonstration. Revenons à la démonstration du théorème (1.5). L'ensemble $O_\lambda = \left\{|F^{**}|_r > \lambda\right\}$ est réunion du cubes dyadiques K_j disjoints tels que

$$\left|K_j \cap \left\{|F^{**}|_r > \beta\lambda \;;\; |F|_r^{**} \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq 2.\, e^{-B_r(\beta^r-1)/\delta^r} . |K_j| .$$

Si $E = \left\{|F^{**}|_r > \beta\lambda \;;\; |F|_r^{**} \leq \delta\lambda\right\}$,

$$\frac{\mu(K_j\cap E)}{\mu(K_j)} \leq C\left(\frac{|K_j\cap E|}{|K_j|}\right)^{\alpha}$$

$$\leq 2C.e^{-\alpha B_r(\beta^r-1)/\delta^r}$$

Le résultat est obtenu en additionnant les inégalités pour tous les K_j.

Pour les inégalités L_Φ, la démonstration du corollaire (1.7) est encore valable.

2. LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD.

Nous déduisons pour la fonction maximale ordinaire des résultats similaires à ceux obtenus au § 1 pour la fonction maximale dyadique. Leur démonstration fait appel à des techniques plus élaborées que les précédentes : ainsi le découpage de Whitney d'un ensemble ouvert joue un rôle central dans la démonstration du théorème (2.3).

Voici la version du lemme de la bonne fonction pour la fonction maximale ordinaire :

LEMME (2.1).

Soit K un cube ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit Ω un ouvert de K. Posons $V = \bar{K} \setminus \Omega$.

1) Il existe une collection $(Q_j)_j$ de cubes disjoints tels que $\Omega = \bigcup_j Q_j$ et diamètre $(Q_j) \leq$ distance $(Q_j, V) \leq 4$-diamètre (Q_j) pour chaque j.

2) Soit f une fonction localement intégrable sur K.

La bonne fonction associée à f est définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin K \\ f(x) & \text{si } x \in K \setminus \Omega \\ \dfrac{1}{|Q_j|} \displaystyle\int_{Q_j} f(u)du & \text{si } x \in Q_j \end{cases} .$$

Si $M_1 f$ est la fonction maximale partielle définie par

$$M_1 f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \notin K \\ \displaystyle\sup_{\substack{x \in Q \\ Q \subseteq K}} \frac{1}{|Q_j|} \int_Q f(u)du \quad \text{si } x \in K \end{cases}$$

alors $M_1 f(x) \leq 4^n . M_1 h(x)$ pour tout $x \in V$.

<u>Démonstration</u>. La partie (1) est une version locale du lemme de Withney. Il suffit

d'adapter la démonstration de Stein ([7] ch. VI, th. 1), en choisissant les cubes du découpage parmi les cubes obtenus en découpant K en 2^n cubes égaux, puis chaque cube obtenu en encore 2^n cubes, etc...

Montrons la partie (2).

Comme dans le cas dyadique, nous allons prendre un point $x \in K \setminus \Omega$ et un cube $Q \subset K$, contenant x. Si Q ne coupe pas Ω,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(u)du = \frac{1}{|Q|}\int_Q h(u)\,du.$$

Si Q coupe Ω, l'intersection est comprise dans la réunion $\bigcup_{j \in J} Q_j$ des cubes Q_j coupés par Q. Le diamètre de chacun de ces cubes Q_j est inférieur au diamètre de Q : en effet, il est inférieur, par la partie (1), à la distance de Q_j à V, et cette distance est inférieure au diamètre de Q puisque Q contient un point de V et des points de Q_j. Comme conséquence, chaque Q_j sera contenu dans le cube Q' de même centre que Q mais de côté quadruple

$$\bigcup_{j \in J} Q_j \subset Q' \cap K.$$

Et puisque $\displaystyle\int_{Q_j} f(u)\,du = \int_{Q_j} h(u)\,du$,

$$\int_Q f(u)\,du = \int_{Q\setminus\Omega} f(u)\,du + \int_{Q\cap\Omega} f(u)\,du \leq \int_{Q\setminus\Omega} h(u)\,du + \int_{Q'\cap K} h(u)\,du \leq \int_{Q'\cap K} h(u)\,du.$$

Pour faire apparaître la fonction maximale $M_1h(x)$, il faut intégrer sur un cube inclus dans K. On remplace donc Q' par Q'' un cube de même côté que Q', inclus dans K, et contenant $Q' \cap K$: cela est toujours possible.

On obtient ainsi

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(u)\,du \le \frac{1}{|Q|}\int_{Q''} h(u)\,du$$
$$\le \frac{4^n}{|Q''|}\int_{Q''} h(u)\,du$$
$$\le 4^n M_1 h(x).$$

En passant au sup sur tous les cubes Q contenant x on arrive finalement à

$$M_1 f(x) \le 4^n . M_1 h(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

Le résultat exponentiel (iii) du théorème B peut se déduire du cas dyadique (théorème (1.4)).

THEOREME (2.2). Si H est une fonction à support dans un ensemble S de mesure finie, à valeurs dans ℓ^r, $(1 < r < \infty)$, et si $|H|_r(x) \le A < \infty$ pour tout x, alors

(1) $$\int_S \exp(\alpha |H^*|_r^r (x))dx \le \frac{|S|}{1 - \alpha/2c'_r} \quad \text{pour } \alpha \text{ petit.}$$

(2) $$\left|\left\{|H^*|_r > \lambda\right\}\right| \le 2.\,|S|\,.\,e^{-c'_r \lambda^r / A^r}$$

c'_r ne dépend que de r et de la dimension.

<u>Démonstration</u>. Nous suivons une idée de Fefferman et Stein pour comparer la fonction maximale f^* et la fonction maximale dyadique. On peut supposer que le support de H est contenu dans un cube Q ; si le support de H n'est pas borné, on définit $H^{(m)}(x) = H(x)$ si $|x| \le m$ et 0 ailleurs, et (1) est obtenu par le théorème de la convergence monotone. Soit Q' le cube quadruple de Q et de même centre. Pour $t \in Q'$, soit M_t l'opérateur maximal associé au découpage dyadique de centre t (c'est-à-dire le découpage ordinaire translaté de t). Ainsi, $M_0 f = f^{**}$ et $M_t f(x) = (\tau_t f)^{**}(x+t)$ où $\tau_t f(x) = f(x-t)$. Le théorème (1.4) est vrai pour chaque

opérateur M_t. Plus précisément,

$$\int \exp(\alpha\, |M_t H|_r^r (x))\, dx \leq \frac{|S|}{1 - \alpha/2.c_r} .$$

Il est facile de constater géométriquement que

$$\left|\left\{t \in Q' \;|\; M_t f(x) > \frac{1}{4^n} f^*(x)\right\}\right| \geq \frac{1}{4^n} |Q'|$$

et donc que

$$f^*(x) \leq \frac{2^{4n}}{|Q'|} \int_{Q'} M_t f(x)\, dt .$$

Par l'inégalité de convexité de Jensen pour les mesures finies $(\psi(\lambda) = \lambda^r$ est convexe pour $r \geq 1)$,

$$f^{*r}(x) \leq 2^{4nr} \int (M_t f(x))^r \frac{dt}{|Q'|} .$$

Alors
$$|F^*|_r^r \leq \frac{2^{nr}}{|Q'|} \int |M_t F|_r^r(x)\, dt .$$

En appliquant une seconde fois l'inégalité de convexité de Jensen, avec la fonction exponentielle,

$$\exp(\alpha\, |F^*|_r^r (x)) \leq \exp\left[2^{4nr} \alpha \int_{Q'} |M_t F|_r^r(x) \frac{dt}{|Q'|}\right]$$

$$\leq \int_{Q'} \exp(2^{4nr} \alpha\, |M_t F|_r^r(x)) \frac{dt}{|Q'|} .$$

En posant $\alpha' = 2^{4nr}.\alpha$

$$\int_S \exp(\alpha\, |F^*|_r^r(x))\, dx \leq \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} \int_S \exp(\alpha'\, |M_t F|_r^r(x))dx\, dt$$

$$\leq \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} \frac{|S|}{1-\alpha'/2.c_r}\, dt$$

$$= \frac{|S|}{1-\alpha'/2.c_r} = \frac{|S|}{1-\alpha/2.c'_r}$$

(avec $c'_r = c_r/2^{4nr}$).

L'inégalité (2) se déduit de (1) en posant $\alpha = c'_r$ par l'inégalité de Tchebychev.

THEOREME (2.3).

Soit F une fonction à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$, alors pour $\beta > c$ et $\delta, \lambda > 0$,

$$\left|\left\{|F^*|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|_r^* \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq c_o e^{-B_r(\beta^r - c^r)/\delta^r} \left|\left\{|F^*|_r > \lambda\right\}\right| .$$

B_r ne dépend que de la dimension n et de r ; c et c_o ne dépendent que de la dimension (on peut choisir $c_o = 2 \times 3^n$ et $c = 4^n$).

<u>Démonstration</u>. Elle suit le même plan général que dans le cas dyadique : nous allons successivement

- nous ramener à une inégalité sur des cubes,

- "localiser" la fonction maximale sur ces cubes,

- prouver le théorème pour cette fonction maximale locale grâce au lemme de la bonne fonction.

Soit donc $O_\lambda = \left\{|F^*|_r > \lambda\right\}$. Nous voulons découper O_λ en une réunion de cubes qui ne soient pas trop loin (chacun propertionnellement à sa taille) du bord de O_λ. Une méthode naturelle serait d'utiliser le lemme de Withney. Dans le cas présent, il sera cependant plus simple de choisir les cubes dyadiques maximaux inclus dans O_λ. $O_\lambda = \bigcup_j K_j$ et tout cube dyadique supérieur à K_j coupe l'extérieur de O_λ. Nous sommes ainsi amenés à montrer pour chaque j

$$|K_j \cap \left\{|F^*|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|_r^* \leq \delta\lambda\right\}| \leq c_o e^{-B_r(\beta^r - c^r)/\delta^r} . |K_j| .$$

Prenons un cube fixé K_o dans la famille (K_j). Soit K_o le cube de même centre que

K_o mais de côté triple, comme dans le lemme (2.1). Par le choix de K_o, $\widetilde{K}_o$ contient un point a hors de O_λ, donc tel que $|F^*|_r(a) \leq \lambda$.

Nous allons couper la fonction maximale en deux parties, mais cette fois selon $\widetilde{K}_o$.

$$M_1 f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \widetilde{K}_o \\ \sup\limits_{\substack{x \in Q \\ Q \subseteq K_o}} \dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q f_k(u)\,du & \text{si } x \in \widetilde{K}. \end{cases}$$

$$M_2 f_k(w) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \not\subseteq K_o}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f_k(u)\,du .$$

M_2 est la "bonne partie" de la fonction maximale, et se majore directement sur K_o. Si Q est un cube contenant un point x de K_o sans être inclus dans $\widetilde{K}_o$, il suffit d'aggrandir un peu ce cube pour qu'il contienne $\widetilde{K}_o$. Le côté du cube Q' ainsi obtenu sera inférieur à la somme des côtés de Q et de $\widetilde{K}_o$:

$$\text{côté}(Q') \leq \text{côté}(Q) + \text{côté}(\widetilde{K}_o).$$

Alors,
$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q f_k(u)\,du &\leq \frac{|Q'|}{|Q|}.\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f_k(u)\,du \\ &\leq \frac{|Q'|}{|Q|} f_k^*(a) \\ &\leq \left(\frac{\text{côté}(Q)+\text{côté}(\widetilde{K}_o)}{\text{côté}(Q)}\right)^n . f_k^*(a) \\ &\leq 4^n . f_k^*(a) \cdot \quad \text{car} \quad \text{côté}(K_o) \leq \text{côté}(Q). \end{aligned}$$

En passant au sup, $M_2 f_k(x) \leq 4^n . f_k^*(a)$. En faisant la somme pour tous les k, on obtient

$$|M_2 F|_r(x) \leq 4^n . |F^*|_r(a) \leq 4^n . \lambda ,$$

et donc, sur K_o, $|F^*|_r^r \leq |M_1 F|_r^r + 4^{nr} . \lambda^r$.

Ainsi, l'ensemble $K_o \cap \left\{ |F^*|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|_r^* \le \delta\lambda \right\}$ est compris dans l'ensemble

$$K_o \cap \left\{ |M_1 F|_r > \gamma\lambda \ ; \ M_1 |F|_r \le \delta\lambda \right\}$$

où $\gamma = (\beta^r - 4^{nr})^{1/r}$. Et nous allons majorer la mesure de cet ensemble en nous servant du lemme (2.1), et du théorème (2.2).

Soit $\Omega = \left\{ x \in \widetilde{K}_o \ ; \ M_1 |F|_r > \delta\lambda \right\}$, et soit $V = \widetilde{\widetilde{K}}_o \setminus \Omega$.

Par le lemme (2.1), $\Omega = \bigcup Q_j$ avec

$$\mathrm{diam}(Q_j) \le \mathrm{dist}(Q_j, V) \le 4.\mathrm{diam}(Q_j).$$

Si h_k est la bonne fonction associée à f_k,

$$M_1 f_k \le 4^n . M_1 h_k \quad \text{sur} \quad V.$$

En posant $H = (h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots)$,

$$|M_1 F| \le 4^n . \, |M_1 H|_r \quad \text{sur} \quad V,$$

et alors

$$\left| \left\{ |M_1 F| > \gamma\lambda \ ; \ |F^*| \le \delta\lambda \right\} \right| \le \left| \left\{ |M_1 H|_r > \frac{\gamma\lambda}{4^n} \right\} \right| .$$

Si l'on veut appliquer l'estimé du théorème (2.2) à H, il faut d'abord montrer que $|H|_r$ est bornée sur son support $\widetilde{K}_o$.

Si $x \in \widetilde{K}_o \setminus \Omega$, $|H|_r(x) = |F|_r(x) \le M_1 |F|_r(x) \le \delta\lambda$.

Si $x \in Q_j$,

$$|H|_r(x) = \left(\sum_k \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f_k(u) \, du \right)^r \right)^{1/r}$$

$$\le \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |F|_r \, du \quad \text{(Inégalité de Minkowski)}.$$

La moyenne de $|F|_r$ sur Q_j est $\le (1 + 4 \ n)^n . \delta\lambda$. En effet, par le choix de Q_j,

$$\mathrm{dist}(Q_j, V) \le 4.\mathrm{diam}(Q_j).$$

Donc il existe un cube Q'_j, contenant Q_j, contenu dans $\tilde{K}_o$, et coupant V, dont le côté est inférieur à : $\text{côté}(Q_j) + \text{dist}(Q_j, V)$. Alors

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |F|_r \, du \leq \frac{|Q'_j|}{|Q_j|} \cdot \frac{1}{|Q'_j|}\int_{Q'_j} |F|_r \, du$$

$$\leq \frac{|Q'_j|}{|Q_j|} M_1 |F|_r(x_o) \quad \text{pour un} \quad x_o \in V$$

$$\leq \left(\frac{\text{côté}(Q_j) + 4\sqrt{n}.\text{côté}(Q_j)}{\text{côté}(Q_j)}\right)^n . \delta\lambda$$

$$= (1 + 4\sqrt{n})^n . \delta\lambda .$$

Donc, $|H|_r$ est borné sur tout $\tilde{K}_o$ par $(1 + 4\sqrt{n})^n . \delta\lambda$. En appliquant le théorème (2.2),

$$\left|\left\{|H^*|_r > \frac{\gamma\lambda}{4^n}\right\}\right| \leq 2\,|\tilde{K}_o|\, e^{-c'_r \gamma^r \lambda^r / 4^{nr} . \| |H|_r \|_\infty^r}$$

$$\leq 2.3^n . e^{-B_r(\beta^r - 4^{nr})/\delta^r} . |K_o| .$$

Ecrivons les analogues des corollaires du théorème (1.5) pour la fonction maximale ordinaire de R^n :

COROLLAIRE (2.4). Si Φ satisfait aux conditions du corollaire (1.7),

$$\int \Phi(|F^*|_r)\, dx \leq C \int \Phi(|F|_r^*)\, dx.$$

COROLLAIRE (2.5).

$$\| |F^*|_r \|_p \leq C_r . p^{1/r} . \| |F|_r^* \|_p \qquad \text{pour} \quad 1 < r, p < \infty.$$

COROLLAIRE (2.6). Si μ satisfait à la condition du corollaire (1.9), alors

$$\mu(|F^*|_r > \beta\lambda \ ; \ |F|_r^* \leq \delta\lambda)$$

$$\leq 2c_o e^{-B_r(\beta^r - c^r)/\delta^r} . \mu(|F^*|_r > \lambda)$$

et $$\int \Phi(|F^*|_r)\, d\mu \leq C. \int \Phi(|F|_r^*)\, d\mu .$$

REMARQUE. La fonction F qui a été construite dans la démonstration du théorème (1.6) peut également être utilisée ici pour démontrer que la constante ε telle que

$$\left|\left\{|F^*|_r > \beta\lambda \quad , \quad |F|_r^* \leq \delta\lambda\right\}\right| \leq \varepsilon \left|\left\{|F^*|_r > \lambda\right\}\right|$$

pour toute fonction F est minorée par $c_1 e^{-c_2(\beta^r - 1)/\delta^r}$. On aimerait améliorer en ce sens la constante du théorème (2.3). Nous avons seulement des résultats partiels à cet égard.

3. FONCTION MAXIMALE ASSOCIEE A UN ESPACE DE NATURE HOMOGENE.

Nous commençons par un lemme de la bonne fonction. Nous nous situons toujours dans un espace de nature homogène (X,d,μ), et Mf désigne la fonction maximale.

LEMME (3.1). Soit Ω un ouvert de X.

I) Il existe un recouvrement de type Whitney pour Ω :

(a) $\Omega = \bigcup B_j$ réunion de boules ouvertes.

(b) c_1 rayon$(B_j) \leq$ dist$(B_j, {}^c\Omega) \leq c$ rayon(B_j).

(c) un point $x \in X$ n'appartient pas à plus de L boules B_j (L dépendant de l'espace seulement).

2) Soit f une fonction localement intégrable sur $(X\ \mu)$. La bonne fonction h sera définie par

$h(x) = f(x)$ si $x \notin \Omega$

$$h(x) = \sum_j \frac{\mathcal{X}_j(x)}{\mu(B_j)} \int_{B_j} \xi_j(u) f(u) d\mu(u), \qquad \text{si} \qquad x \in \Omega$$

où $\mathcal{X}_j$ est la fonction caractéristique de B_j et $\xi_j(u) = \dfrac{\mathcal{X}_j(u)}{\sum_i \mathcal{X}_i(u)} > \dfrac{1}{L}$.

Alors $Mf(x) \leq c\, Mh(x)$ pour tout $x \notin \Omega$ et c dépend seulement de l'espace.

<u>Démonstration.</u> Nous admettrons l'existence du lemme de type Whitney pour les espaces de nature homogène, (voir [4], page 70, théorème (1.3)), et nous montrerons (2).

Ici, pour chaque i on aura

$$\int \xi_i f\, d\mu \leq L. \int \xi_i\, h\, d\mu\,.$$

En effet, $\displaystyle\int \xi_i(y)\, h(y)\, d\mu(y) = \int \xi_i(y) \sum_j \frac{\mathcal{X}_j(y)}{\mu(B_j)} \int \xi_j(u) f(u) d\mu(u) d\mu(y)$

$$\geq \int \xi_i(y) \frac{\mathcal{X}_i(y)}{\mu(B_i)} \int \xi_i(u)\, f(u)\, d\mu(u)\, d\mu(y)$$

$$\geq \frac{1}{L}. \int \xi_i(u)\, f(u)\, d\mu(u).$$

Soit $x \notin \Omega$, et B une boule contenant x. Comme pour la démonstration du lemme (2.1), la réunion des boules $(B_j)_{j\in J}$, qui rencontrent B, est contenue dans la boule $\tilde{B}$ de même centre que B et de rayon m fois plus grand (m dépend des constantes de l'espace). Alors,

$$\int_{B\cap\Omega} f\, d\mu = \int_B \left(\sum_J \xi_j\right) f\, d\mu \leq \sum_J \int \xi_j\, f\, d\mu$$

$$\leq L. \sum_J \int \xi_j\, h\, d\mu$$

$$\leq L. \int_{\bigcup_J B_j} h\, d\mu$$

$$\leq L. \int_{\tilde{B}\cap\Omega} h\, d\mu$$

d'où $\frac{1}{\mu(B)} \int_B f\, d\mu \leq \frac{L}{\mu(B)} \int_{\widetilde{B}} h\, d\mu \leq L \frac{\mu(\widetilde{B})}{\mu(B)}$ Mh(x).

Comme $\frac{\mu(\widetilde{B})}{\mu(B)}$ est majorée par une constante qui dépend seulement de l'espace,

$$M f(x) \leq c\, M\, h(x).$$

THEOREME (3.2). Si F est une fonction sur X, à valeurs dans ℓ^r, $(1 < r < \infty)$

$$\mu(|MF|_r > \lambda) \leq \frac{A_r}{\lambda} \int |F|_r\, d\mu$$

A_r ne dépend que de r et des constantes de l'espace.

Démonstration. Soit $\Omega = \left\{M |F|_r > \lambda\right\}$. $\Omega = \cup B_i$ comme dans le lemme précédent

A chaque fonction coordonnée f_k on associe une bonne fonction h_k. Il en résulte $H = (h_1, h_2, \ldots)$ telle que

$$|M F|_r \leq c\, |M H|_r \quad \text{hors de } \Omega.$$

Alors, comme d'habitude, $\mu(|M F|_r > \lambda \;;\; M|F|_r \leq \lambda)$

$$\leq \mu(|M H|_r > \frac{\lambda}{c}) \leq \frac{A_r}{\lambda^r} \int |H|_r^r\, d\mu .$$

$|H|_r$ est majorée par λ si $x \notin \Omega$, et si $x \in \Omega$

$$|H|_r(x) \leq \Sigma \frac{\chi_i(x)}{\mu(B_i)} \int \xi_i(u)\, |F|_r(u)\, d\mu(u) \quad \text{(par l'inégalité de Mink. gén.)}$$

$$\leq \Sigma \frac{\chi_i(x)}{\mu(B_i)} \int_{B_i} |F|_r(u)\, d\mu(u).$$

La boule $c_2 B_i$ de même centre que B_i mais de rayon c_2 fois plus grand (c_2 étant la constante du lemme de Whitney) rencontre le complémentaire de Ω, d'où

$$\frac{1}{\mu(c_2 B_i)} \int_{c_2 B_i} |F|_r(u)\, d\mu(u) \leq \lambda .$$

Il suit que $\sum \frac{\mathcal{X}_i(x)}{\mu(B_i)} \int_{B_i} |F|_r(u)\, d\mu(u) \leq \sum_i \mathcal{X}_i(x) \left(\frac{\mu(c_2 B_i)}{\mu(B_i)}\right).\lambda$

$$\leq \sum \mathcal{X}_i(x)\, c_o \lambda \leq L\, c.\lambda .$$

Donc $|H|(x) \leq Lc.\lambda$ sur tout X, et

$$\mu(|MH|_r > \lambda) \leq \frac{A'_r}{\lambda} \int |H|_r\, d\mu .$$

La démonstration sera terminée si $\int |H|_r d\mu \leq \int |F|_r\, d\mu$.

$$\int_\Omega |H|_r d\mu = \int_\Omega \Big(\sum_k \Big(\sum_i \frac{\mathcal{X}_i(x)}{\mu(B_i)} \int \xi_i(u) f_k(u)\, d\mu(u)\Big)^r\Big)^{1/r} d\mu(x)$$

$$\leq \int_\Omega \sum_i \frac{\mathcal{X}_i(x)}{\mu(B_i)} \int \xi_i(u) \Big(\sum_k f_k^r(u)\Big)^{1/r} d\mu(u)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_i \int \frac{\mathcal{X}_i(x)}{\mu(B_i)} d\mu(x). \int \xi_i(u)\, |F|_r(u)\, d\mu(u)$$

$$= \int \Big(\sum_i \xi_i(u)\Big) |F|_r(u)\, d\mu(u)$$

$$= \int_\Omega |F|_r\, d\mu .$$

THEOREME (3.3). Si F est une fonction sur X, à valeurs dans ℓ^r $(1<r<\infty)$,

$$\mu\Big(|MF|_r > \beta\lambda \ ;\ M|F|_r \leq \delta\lambda\Big) \leq K. \frac{\delta^r}{\beta^r - c^r} . \mu\Big(|MF|_r > \lambda\Big)$$

pour tout $\delta > 0$ et $\beta > c$; K et c ne dépendent que des constantes de l'espace et de la valeur de r.

<u>Démonstration</u>. Soit $O_\lambda = \{|MF|_r > \lambda\}$. O_λ est ouvert et on peut lui appliquer le lemme de Whitney pour les espaces homogènes. Il existe donc une famille de boules $(S_j)_j$ telles que

(a) $O_\lambda = \bigcup_j S_j$

(b) $c_1 \text{ rayon}(S_j) \leq \text{dist}(S_j, \complement O_\lambda) \leq c_2 \text{rayon}(S_j)$

(c) un point de O_λ n'appartient pas à plus de L boules S_j.

A cause de la propriété (c),

$$\sum \mu(S_j) \leq L.\mu(\bigcup_j S_j),$$

et donc, pour montrer le théorème, il suffira de montrer que, pour tout j :

$$\mu(S_j \cap \left\{ |MF|_r > \beta\lambda \ ; \ M|F|_r \leq \delta\lambda \right\}) \leq \varepsilon.\mu(S_j)$$

où $L\varepsilon$ est la constante recherchée.

Soit S_o une de ces boules, et $\tilde{S}_o$ la boule de même centre que S_o mais de rayon c_o fois plus grand, où c_o est choisi de telle sorte que $\tilde{S}_o$ contienne un point hors de O_λ. (c_o dépendra de c_2 et de la constante de la pseudo-distance).

On définit, comme au § 2, M_1F et M_2F, sur S_o, par

$$M_1 f_k(x) = \sup_{x \in B \subset \tilde{S}_o} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f_k(u) d\mu(u),$$

$$M_2 f_k(x) = \sup_{x \in B \not\subset \tilde{S}_o} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f_k(u)\, d\mu(u).$$

La majoration de $|M_2F|_r$ s'obtient comme dans les démonstrations des théorèmes (1.3) et (2.3) en se servant des propriétés de la pseudo-distance et de la mesure homogène : $|M_2F|_r \leq C\lambda$.

Posons $F_1 = F\chi_{\tilde{S}_o}$. Il découle de la définition de M_1F que $M_1F(x) \leq MF_1(x)$ pour tout $x \in S_o$. On en déduit $|MF|_r^r \leq |MF_1|_r^r + c^r\lambda^r$ et on est ramené à prouver, puisque $M|F_1|_r \leq M|F|_r$,

$$\mu(S_o \cap \{|MF_1|_r > \gamma\lambda \ ; \ M|F_1|_r \leq \delta\lambda\}) \leq \varepsilon.\mu(S_o)$$

où $\gamma^r = \beta^r - c^r$.

Soit $\Omega_o = \{x \in \tilde{S}_o \ ; \ M|F_1|_r > \delta\lambda\}$, et soit $\Omega = \Omega_o \cup \complement\tilde{S}_o$.

Appliquons le lemme de Whitney à cet ouvert et associons à chaque coordonnée f_k de F_1 la bonne fonction h_k. Posons $H = (h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots)$.

Soit J l'ensemble des indices j pour lesquels les boules B_j du découpage de Whitney coupent $\tilde{S}_o$. On peut toujours supposer que Ω_o n'est pas $\tilde{S}_o$ en entier, sinon l'ensemble dont on cherche la mesure serait vide. Dès lors les boules B_j, $j \in J$, qui ne peuvent contenir $\tilde{S}_o$, sont toutes contenues dans la boule $\approx S_o$, dont le rayon est c'_o fois celui de S_o (c'_o est une constante convenable, ne dépendant que des constantes de l'espace).

Le support de la bonne fonction H sera donc dans $\approx S_o$. De plus, $|H|_r$ est bornée par $C_o.\delta\lambda$: on le montre de la même manière qu'au théorème précédent. Enfin, $|MF_1|_r \leq C.|MH|$ sur $S_o \setminus \Omega$ et don c

$$\mu(S_o \cap \{|MF_1|_r > \gamma\lambda \ ; \ M|F_1|_r < \delta\lambda\})$$

$$\leq \mu\left(|MH|_r > \frac{\gamma\lambda}{C}\right)$$

$$\leq \frac{C^r}{\gamma^r \lambda^r} \int |MH|_r^r \, d\mu \qquad \text{(inégalité de Tchébychev)}$$

$$\leq \frac{C^r A_r}{\gamma^r \lambda^r} \int |H|_r^r \, d\mu \qquad \text{(inégalité maximale ordinaire)}$$

$$\leq \frac{C^r A_r C_o^r \delta^r \lambda^r}{\gamma^r \lambda^r} \mu(S_o)$$

$$\leq C' \frac{\delta^r}{\gamma^r} \mu(S_o)$$

$$= C' \frac{\delta^r}{\beta^r - c^r} \mu(S_o).$$

REMARQUE. Cette démonstration est légèrement plus simple que la démonstration que nous avons utilisée dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Nous avons préféré la démonstration "locale" dans le cas de $\mathbb{R}^n$, comme étant susceptible de généralisations.

COROLLAIRES.

(3.4) $\displaystyle\int \Phi\,(|MF|_r)\, d\mu \le C \int \Phi(M|F|_r)\, d\mu$.

(3.5) $\| \, |MF|_r \|_p \le A_{p,r} . \| \, |F|_r \|_p, \qquad 1 < p < \infty$.

Le corollaire (3.5) est l'analogue du théorème principal de [6] dans le cas des espaces de nature homogène.

REMARQUE. Le fait que nous n'ayons aucun résultat pour β proche de 1 dans le théorème (3.3) nous empêche de déduire des résultats exponentiels dans le cas général des espaces de nature homogènes. Néanmoins, une méthode permet d'obtenir des résultats dans des cas particuliers. Elle généralise la démonstration de Fefferman et Stein, et suppose une condition géométrique sur les boules de l'espace :

Il existe un nombre N tel qu'on ne puisse pas trouver plus de N boules $B(x_1,r_1),\ldots, B(x_n,r_n)$ satisfaisant aux deux propriétés : 1) $\bigcap_i B(x_i,r_i) \neq \emptyset$; 2) pour tout $i = 1, 2,\ldots,n$, $x_i \notin \bigcap_{j\neq i} B(x_j,r_j)$.

Cette propriété permet de montrer un lemme de recouvrement de type Besicovitch :

LEMME. Soit E un ensemble borné et pour $x \in E$, soit R_x un nombre > 0. Il existe une suite $B_i = B(x_i , R_{x_i})$ de boules telles que $E \subset \bigcup B_i$, et un point x

n'appartient pas à plus de N boules.

La démonstration de ce lemme suit le modèle de la démonstration du théorème (1.2), page 69 de [4].

Le lemme des fonctions maximales à poids, de Fefferman et Stein, et vrai pour ces espaces :

LEMME. $(Mf)^r \varphi d\mu \leq B_r \; f^r . M\varphi \; d\mu \qquad (1 < r \leq \infty)$.

Démonstration. Par le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, il suffit de montrer

$$\int_{Mf>\lambda} \varphi \; d\mu \leq \frac{B}{\lambda} \int f \; M\varphi d\mu \; .$$

Soit $\overline{M}f$ la fonction maximale centrée, et $E = \left\{\overline{M}f > \lambda\right\}$. Si $x \in E$, il existe une boule $B = B(x \; ; \; R_x)$ telle que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B f \; d\mu > \lambda \, .$$

Par le lemme précédent, $E \subset \cup B_i = \cup B(x_i, R_{x_i})$. Pour chaque i,

$$\int_{B_i} \varphi(x) \; d\mu(x) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} f(y) \; d\mu(y) \; . \int_{B_i} \varphi(x) \; d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{B_i} f(y) \left[\frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} \varphi(x) \; d\mu(x) \right] d\mu(y)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_{B_i} f(y) \; M\varphi(y) \; d\mu(y).$$

Alors, $\displaystyle\int_{\overline{M}f>\lambda} \varphi d\mu \leq \sum_i \int_{B_i} \varphi d\mu \leq \sum_i \frac{1}{\lambda} \int_{B_i} f \; M\varphi \; d\mu$

$$\leq \frac{N}{\lambda} \int f \; M\varphi \; d\mu \, .$$

La démonstration est terminée car $\overline{M}f \approx Mf$.

Ce lemme implique le résultat exponentiel

$$\int_S \exp\left[\alpha |Mf|_r^r\right] d\mu < \infty \quad \text{pour} \quad \alpha \quad \text{petit}$$

et une inégalité de type Burkholder-Gundy entre $|MF|_r$ et $M|F|_r$ avec un ε en exponentielle.

Il est intéressant, par contre, de voir que les résultats L^p pour la fonction maximale vectorielle (corollaire 3.4) sont obtenus comme une conséquence du lemme de Whitney, et donc des axiomes d'espace de nature homogène, et non comme une conséquence du lemme de Besicovitch, comme le laissait supposer le lecture de [6].

4. FONCTION MAXIMALE ASSOCIEE A UNE SUITE DECROISSANTE DE RECTANGLES.

Soit $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite décroissante de rectangles centrés en $0\in\mathbb{R}^n$, dont le diamètre tend vers 0 lorsque $i \to +\infty$. On suppose que la suite $|S_i|$ n'a pas d'autre point d'accumulation que 0. Le lemme fondamental suivant est dû à De Guzman [5].

LEMME. Si à chaque élément x d'un ensemble borné E de $\mathbb{R}^n$ on associe un rectangle $R_x = x + S_{i(x)}$, il existe une suite (R_{x_j}) de ces rectangles qui recouvre E, et telle que chaque point de E appartient au plus à 2^n rectangles.

Dans ce paragraphe, Mf désignera la fonction maximale de f par rapport à la suite (S_i).

Il existe une version du lemme de la bonne fonction pour les rectangles :

LEMME (4.1). Soit $K = \bigcup R_i$ réunion de rectangles tels que chaque point x

appartienne au plus à 2^n de ces rectangles. Notons $\widetilde{R}_j$ le rectangle de même centre que R_j mais de côtés quadruples. Posons $\widetilde{K} = \cup \widetilde{R}_j$.

Si f est une fonction localement intégrable, on définit la bonne fonction h par

$$h(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \notin K$$
$$h(x) = \sum \frac{\mathcal{X}_i(x)}{|R_i|} \int \xi_i(u)\, f(u)\, du \quad \text{si} \quad x \in K$$

où $\mathcal{X}_i$ est la fonction caractéristique de R_i et $\xi_i(x) = \frac{\mathcal{X}_i(x)}{\sum_j \mathcal{X}_j(x)} > \frac{1}{2^n}$. Alors $Mf(x) \leq 8^n \widetilde{M} f(x)$ pour tout $x \notin \widetilde{K}$, $\widetilde{M}$ étant l'opérateur associé à la suite $(\widetilde{S}_i)$.

Démonstration. Soit $x \notin \widetilde{K}$, et $R = x + S_{i_o}$ tel que $R \cap K \neq \emptyset$. Soit J l'ensemble des indices j tels que $R \cap R_j \neq \emptyset$. Comme pour le lemme (3.1), on montre que

$$\int_{R \cap K} f(u) du \leq 2^n \int_{\underset{J}{\cup} R_j} h(y)\, dy.$$

Supposons qu'on ait montré que $\underset{J}{\cup} R_j \subset \widetilde{R}$, alors

$$\frac{1}{R} \int_R f(u)\, du \leq \frac{2^n}{|R|} \int_{\widetilde{R}} h(u)\, du \leq 2^n . 4^n . \frac{1}{|\widetilde{R}|} \int_{\widetilde{R}} h(u)\, du$$
$$\leq 8^n . \widetilde{M} h(x).$$

Montrons que $R \cap R_j \neq \emptyset$ entraîne $R_j \subset \widetilde{R}$.

On a $R \cap R_j \neq \emptyset$

$x \notin \widetilde{R}_j$

x est le centre de R.

Il découle que le rectangle R a au moins un côté plus long que le côté correspondant du rectangle R_j.

En effet, prenons R_j centré en 0,

$$R_j = \left\{ y \mid |y_m| \le a_m , \quad 1 \le m \le n \right\}$$

et prenons

$$R = \left\{ y \mid |y_m - x_m| \le b_m, \quad 1 \le m \le n \right\}.$$

Si $x \in \tilde{R}_j$, il existe m_o tel que $|x_{m_o}| > 4a_{m_o}$. Si $R \cap R_j \neq \emptyset$ il existe y tel que $|y_m| \le a_m$ et $|y_m - x_m| \le b_m$ pour tout m. Alors

$$4a_{m_o} \le |x_{m_o}| \le |x_{m_o} + y_{m_o}| + |y_{m_o}| \le b_{m_o} + a_{m_o}$$

donc

$$b_{m_o} > 3a_{m_o} .$$

Les deux rectangles R et R_j étant des translatés de la même suite décroissante (S_i) on conclut que R est de format supérieur à R_j. Il est dès lors évident que $\tilde{R}$ contiendra R_j car les deux rectangles R et R_j se coupent, et R est le plus grand.

THEOREME (4.2). Si F est une fonction à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$

$$\left| \left\{ |MF|_r > \lambda \right\} \right| \le \frac{A_r}{\lambda} \int |F|_r \, dx.$$

A_r ne dépend que de la dimension et de r.

Démonstration. Nous supposerons, pour commencer, que $|S_{i+1}| > \frac{1}{2} |S_i|$ pour tout i.

Soit $\Omega = \left\{ M|F|_r > \lambda \right\}$. Pour chaque $x \in \Omega$ soit R_x le plus grand rectangle $x + S_i$ tel que

$$\frac{1}{|S_i|} \int_{x+S_i} |F|_r \, du > \lambda .$$

Par le lemme de De Guzman, il existe une suite $R_j = R_{x_j}$ telle que $\Omega \subset \cup R_j$, et chaque point x appartient au plus à 2^n rectangles R_j. Soit $K = \cup R_j$ et $\tilde{K} = \cup \tilde{R}_j$.

On a $|K| \le \sum |R_j| \le \sum \frac{1}{\lambda} \int_{R_j} |F|_r \, dx \le \frac{2^n}{\lambda} \int |F|_r \, dx$ et

$|\tilde{K}| \le 4^n |K| \le \frac{8^n}{\lambda} \int |F|_r \, dx$.

Il suffira donc d'évaluer

$$\left| \left\{ x \notin \tilde{K} \mid |MF|_r(x) > \lambda \right\} \right| .$$

On associe à chaque fonction coordonnée f_k une bonne fonction h_k. On pose

$H = (h_1, h_2, \ldots)$ et on a

$$|MF|_r \le 8^n |\tilde{M}H|_r \quad \text{hors de } \tilde{K} \text{ par le lemme (4.1).}$$

On voit facilement, comme pour le théorème (3.2), que

$$\int |H|_r \, dx \le \int |F|_r \, dx.$$

Pour majorer $|H|_r$ nous utilisons la maximalité des rectangles R_j. Si R_j' est le rectangle de même centre que R_j mais de "format" immédiatement supérieur dans la suite (S_i), alors la moyenne de $|F|_r$ n'est plus supérieure à λ sur R_j'. Par notre hypothèse sur la mesure des S_i, $|R_j'| \le 2 . |R_j|$, et conc

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} |F|_r \, dx \le 2.\lambda .$$

Donc, pour $x \in K$,

$$|H|_r(x) \le \sum \frac{\chi_i(x)}{|R_i|} \int_{R_i} \xi_i(u) \, |F|_r(u) \, du$$

(par l'inégalité de Minkowski généralisée)

$$\le \sum \chi_i(x) . \frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} |F|_r \, du$$

$$\le 2^n . 2\lambda .$$

Comme d'autre part, $|H|_r(x) = |F|_r(x) \leq M|F|_r(x) \leq \lambda$ pour x hors de K,

$$|H|_r \leq 2^{n+1}.\lambda \quad \text{partout.}$$

Alors $\left|\left\{x \notin \widetilde{K} \mid |MF|_r(x) > \lambda\right\}\right| \leq \left|\left\{|\widetilde{M}H|_r > \frac{\lambda}{8^n}\right\}\right|$

$$\leq \frac{8^{nr}}{\lambda^r} \int |\widetilde{M}H|_r^r \, dx$$

$$= \frac{8^{nr}}{\lambda^r} \sum_k \int (Mh_k)^r \, dx$$

$$\leq \frac{8^{nr}}{\lambda^r} \sum_k A_r \int h_k^r \, dx$$

(Ce passage est permis parce que l'inégalité maximale sur $L^r(R^n)$ est vraie pour l'opérateur $\widetilde{M} : (\widetilde{S}_i)$ est aussi une suite décroissante de rectangles dont la diamètre tend vers 0).

$$= \frac{8^{nr}.A_r}{\lambda^r} \int |H|_r^r \, dx$$

$$\leq \frac{8^{nr}.A_r}{\lambda^r} . 2^{(n+1)(r-1)} \lambda^{r-1} \int |H|_r \, dx$$

$$\leq \frac{A'_r}{\lambda} \int |F|_r \, dx.$$

Il reste à lever l'hypothèse $|S_{i+1}| > \frac{1}{2}|S_i|$. Si (S'_i) est une suite ne satisfaisant pas cette condition, on peut la plonger dans une telle suite (S_i) en ajoutant autant de rectangles qu'il faut entre les rectangles de la suite (S'_i). La fonction maximale associée à la suite (S_i) majore la fonction maximale associée à la suite (S'_i).

Les méthodes utilisées dans les paragraphes précédents ne permettent pas de prouver une inégalité de type Burkholder-Gundy entre $|MF|_r$ et $M|F|_r$.

Nous pouvons néanmoins montrer des résultats L^p et des résultats exponentiels en généralisant la méthode de Fefferman et Stein.

THEOREME (4.3). Si F est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans ℓ^r $(1 < r < \infty)$

(1) $\| |MF|_r \|_p \leq A_{r,p} . \| |F|_r \|_p$ $\quad 1 < r,p < \infty$ avec $A_{r,p} = O(p^{1/r})$ lorsque $p \to \infty$

(2) $\int_S \exp(\alpha |MF|_r^r) \, dx < \infty$ pour α assez petit et $|S| < \infty$.

Démonstration. (1) implique (2) par la méthode habituelle ([8], tome II, p. 119). Montrons (1).

Faisons d'abord la remarque suivante. La fonction maximale Mf, pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, est majorée par la composée des fonctions maximales ordinaires sur chaque variable

$$Mf(x) \leq M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_n f(x).$$

En appliquant le théorème de Fefferman et Stein à chacune des fonctions maximales partielles, on obtient trivialement :

$$\| \, |MF|_r \, \|_p \leq C^n_{p,r} . \| |F|_r \|_p \, .$$

Comme $C_{p,r} = O(p^{1/r})$ lorsque $p \to \infty$, on a

$$C^n_{p,r} = O(p^{n/r}).$$

Nous devons donc employer une autre méthode pour obtenir la croissance en $O(p^{1/r})$.

LEMME. Si $f, \varphi \geq 0$ sont localement intégrables,

$$\int (Mf)^r \varphi \, dx \leq B_r \int f^r \widetilde{M} \varphi \, dx \qquad (1 < r < \infty).$$

La démonstration de ce lemme est presque identique à celle exposée dans la conclusion du dernier paragraphe. On emploie ici le lemme de De Guzman à la place du lemme de recouvrement de type Besicovitch.

Montrons maintenant (1) avec la bonne croissance.

Pour $1 < p \leq r$, le résultat L^p s'obtient par la remarque précédente, ou encore directement, par interpolation entre l'inégalité faible L^1 du théorème (4.2) et l'inégalité triviale où $p = r$.

Supposons donc $p > r$: soit $q = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{q-1}$

$$\begin{aligned}\int |MF|_r^r \varphi\, dx &= \sum \int (Mf_k)^r \varphi\, dx \\ &\leq B_r \sum \int f_k^r . \tilde{M} \varphi\, dx \\ &= B_r \int |F|_r^r . \tilde{M} \varphi\, dx \\ &\leq B_r \Big(\int |F|_r^{rq}\, dx \Big)^{1/q} . \|\tilde{M} \varphi\|_{q'} \\ &\leq B_r \| \, |F|_r \, \|_p^r . A_{q'}^{q'} . \|\varphi\|_{q'} \, .\end{aligned}$$

En prenant φ sur la boule unité de $L^{q'}$ et en passant au sup,

$$\| \, |MF|_r \|_p \leq B_r^{1/r} . (A_{q'})^{q'/r} \| F \|_p$$

$A_{q'}$ est la constante obtenue par interpolation entre l'inégalité faible $\left| \left\{ \tilde{M} f > \lambda \right\} \right| \leq \frac{2^n}{\lambda} \int f\, dx$ et l'inégalité $\|\tilde{M} f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (Th. Marcinkiewicz).

On sait qu'alors, $A_{q'}^{q'} = O(\frac{1}{q'-1})$ lorsque $q' \to 1$. Pour r fixé, $\frac{1}{q'-1} = \frac{p-r}{r} = O(p)$ lorsque $p \to \infty$.

<u>Remarque</u>. Dans ce paragraphe 4, on peut remplacer la suite (S_i) par une famille continue $(R_t)_{t \in R}$

$$R_t = \left\{ y \mid |y_m| \leq k_m(t) \right\}$$

pour des fonctions $k_1, \ldots, k_n$ décroissantes sur $\mathbb{R}$.

En effet, si par exemple, les fonctions $k_1, \ldots, k_n$ sont continues, $N(t) = |R_t|$ est une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$. On choisit t_i $(i \in \mathbb{Z})$ tel que $N(t_i) = \frac{1}{2^i}$. L'opérateur maximal associé à la famille $(S_{t_i})_{i \in \mathbb{Z}}$ est équivalent à l'opérateur maximal associé à la famille $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Références

[1] D. BURKHOLDER Distribution function inequalities for martingales. Ann. Prob. vol. 1, n° 1.

[2] D. BURKHOLDER and R. GUNDY Distribution function inequalities for the area integral. Studia Math. 44, 527-544.

[3] R. COIFMAN Distribution function inequalities for singular integrals. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 69, n° 10, p. 2838.

[4] R. COIFMAN et G. WEISS Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture Notes in Math. 242. Springer-Verlag.

[5] de GUZMAN A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators. Studia Math. 34 (1970), p. 299.

[6] Ch. FEFFERMAN and E. STEIN Some maximal inequalities. Amer. J. Math. 93 (1972), p. 107.

[7] E. STEIN Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970)

[8] A. ZYGMUND Trigonometric series. Cambridge Univ. Press.