

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 126 75-30

STABILITE STRUCTURELLE EQUIVARIANTE

(première partie)

par

V. POENARU

INTRODUCTION

Dans ce qui suit on va considérer des variétés C^∞ , compactes, sur lesquelles un groupe de Lie compact G , agit (différentiablement). Dans $C^\infty(X, Y)$, l'ensemble des applications G -équivariantes, c'est-à-dire telles que :

$$gf(x) = f(gx)$$

sera désigné par $C_G^\infty(X, Y)$. De même, $\text{Diff}_G(X)$ (respectivement $\text{Diff}_G(Y)$) va désigner l'ensemble des difféomorphismes C^∞ , G -équivariants de X (respectivement de Y).

On a une action naturelle :

$$\text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y) \times C_G^\infty(X, Y) \xrightarrow{\Phi} C_G^\infty(X, Y),$$

donnée par :

$$\Phi(h, g, f) = g \circ f \circ h^{-1}$$

Si f est fixée, Φ induit l'application

$$\text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y) \xrightarrow{\Phi_f} C_G^\infty(X, Y)$$

appelée orbite de f . L'espace $C_G^\infty(X, Y)$, en tant que partie de $C^\infty(X, Y)$ hérite de la topologie C^∞ .

Si A, B, C sont trois variétés lisses de dimension finie, on pose, par définition :

$$C^\infty(A, C^\infty(B, C)) = C^\infty(A \times B, C).$$

Si $N \subset C^\infty(A, B)$, $N' \subset C^\infty(A', B')$, une application de $\psi: N \rightarrow N'$ est dite faiblement différentiable, si pour toute variété lisse de dimension finie, elle induit, canoniquement, une application :

$$C^\infty(P, N) \xrightarrow{\psi_*} C^\infty(P, N').$$

Si Z' est un espace topologique et Z'' une variété lisse, une application de source $Z' \times Z''$ est dite $C^{0, \infty}$ si elle est continue, et ∞ -dérivable en Z'' avec toutes les dérivées continues (en Z', Z'').

Par définition $f \in C_G^\infty(X, Y)$ est STABLE s'il existe un voisinage $f \in N \subset C_G^\infty(X, Y)$ et une application Ψ rendant commutatif le diagramme ci-dessous, où i est l'inclusion canonique :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y) & \\
 & \nearrow \psi & \downarrow \bar{\phi}_f \\
 N & \xrightarrow{i} & C_G^\infty(X, Y) .
 \end{array}$$

Si, en plus ψ est continue, on dira que f est FORTEMENT STABLE.

On va définir, plus loin, la notion de stabilité infinitésimale.

Le but de ce mémoire est de prouver que :

$\text{Stabilité infinitésimale} \implies \text{Stabilité (forte)}$

Ceci est une généralisation du théorème de J. Mather [6] (voir aussi [10]).

Soit X un espace topologique sur lequel le groupe G agit, et $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. Par définition on a une structure de G -fibré, s'il existe une représentation

$$G \rightarrow \text{Aut}(E \rightarrow X)$$

$(g \rightarrow g')$ telle que :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g'} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

soit commutatif et que g' soit un automorphisme linéaire au niveau de chaque fibre.

Par exemple, $TX \rightarrow X$ est naturellement un G -fibré, avec $g' = Tg$ (la représentation tangentielle).

Pour un G -fibré, on peut considérer les sections invariantes :

$\xi \in \Gamma(E)^G \subset \Gamma(E)$, caractérisées par la propriété :

$$g' \xi(x) = \xi(gx) .$$

En particulier, on a les champs de vecteurs (C^∞) invariants :

$$\Gamma^\infty(TX)^G \subset \Gamma(TX) ,$$

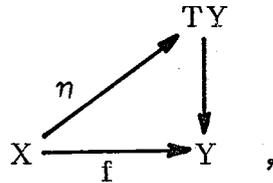
avec

$$Tg \cdot \xi(x) = \xi(gx) .$$

Si $f \in C_G^\infty(X, Y)$, le fibré induit

$$f^*TY \longrightarrow X$$

possède une structure naturelle de G -fibré. Si on pense à ses sections comme étant des flèches η :



les sections invariantes sont celles pour lesquelles

$$\underbrace{Tg \cdot \eta(x)} = \underbrace{\eta(gx)}$$

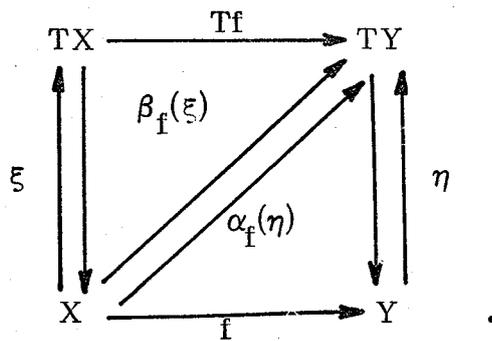
action de Tg dans TY action de G dans X .

On a des applications \mathbb{R} -linéaires :

$$\alpha_f : \Gamma^\infty(TY)^G \longrightarrow \Gamma^\infty(f^*TY)^G$$

$$\beta_f : \Gamma^\infty(TX)^G \longrightarrow \Gamma^\infty(f^*TY)^G$$

définies à partir du diagramme



Donc : $\alpha_f(\eta) = \eta \circ f$ et

$$\beta_f(\xi) = Tf \circ \xi.$$

Par définition, f est INFINITESIMALEMENT STABLE, si $\beta_f + \alpha_f$ est une surjection :

$$\Gamma^\infty(TX)^G + \Gamma^\infty(TY)^G \xrightarrow{\beta_f + \alpha_f} \Gamma^\infty(f^*TY)^G \longrightarrow 0.$$

On peut énoncer maintenant le

THEOREME DE STABILITE EQUIVARIANTE : - " Soit

$f \in C_G^\infty(X, Y)$, infinitésimalement stable.

i) Alors :

Soit (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique qui est ou bien métrisable ou bien compact et (Z_2, z_2^0) un germe de variété C^∞ .

Pour chaque germe d'application :

$$\psi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^\infty(X, Y))$$

tel que $\psi(z_1^0, z_2^0) = f$, il existe :

$$\Psi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, \text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y)) ,$$

tel que $\Psi(z_1^0, z_2^0) = (\text{id}_X) \times (\text{id}_Y)$ et que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y) \\ & \nearrow \Psi & \downarrow \Phi_f \\ Z_1 \times Z_2 & \xrightarrow{\psi} & C_G^\infty(X, Y) \end{array} .$$

ii) f est fortement stable . "

COROLLAIRE : - "Si $f \in C_G^\infty(X, Y)$ est stable dans le sens habituel

elle est stable dans le sens equivariant" .

Le point ii) résulte de i) vu que $C_G^\infty(X, Y)$ est métrisable.

Il y a, aussi, une version germifiée du théorème de stabilité équivariante, qui a été démontrée indépendamment par F. Ronga [13] .

La présente généralisation de la théorie de Mather est rendue possible par l'extension au cas C^∞ du théorème de finitude de la théorie des invariants de Hilbert ([2], [16]), due à G. Schwarz [14].

Ce travail continue le programme commencé dans [12] .

Je remercie J. Bochnak, P. Deligne, A. Douady et D. Spring pour les conversations très utiles que j'ai eues avec eux, de même que G. Schwarz, pour m'avoir envoyé [14], et C.T.C. Wall pour m'avoir posé le problème de la stabilité équivariante.

Dans des parties ultérieures de ce mémoire on espère prouver que

stabilité \implies stabilité infinitésimale.

(De toute façon dans une seconde partie on montre que la stabilité infinitésimale est une condition ouverte).

CHAPITRE 0 : - TOPOLOGIE ET ANALYSE DIFFERENTIELLES
EQUIVARIANTES.-

1) VOISINAGES TUBULAIRES :

Pour plus de détails concernant les notions de topologie différentielle utilisées dans ce mémoire, on renvoie à [1], [4] .

Si G est un groupe de Lie compact qui opère sur la variété X , on va considérer les fonctions G -invariantes sur X :

$$C^\infty(X)^G \subset C^\infty(X)$$

(c'est-à-dire les fonctions telles que $f(gx) = f(x)$) .

Si $d\mu(g)$ est la mesure de Haar sur G , on définit une retraction :

$$C^\infty(X) \xrightarrow{Av} C^\infty(X)^G$$

par :

$$Av.h(x) = \int_G h(gx) d\mu(g).$$

[D'une manière analogue on va introduire

$$\Gamma^\infty(TX) \xrightarrow{Av} \Gamma^\infty(TX)^G$$

par :

$$Av.\eta(x) = \int_G Tg^{-1}.\eta(gx) d\mu(g),$$

et des retractions analogues dans des G -fibrés quelconques.]

LEMME 1.1. : - "Soit $K \subset X$ un compact invariant. Il existe une sous-variété compacte, à bord $\neq \emptyset$: $Q \subset X$, telle que :

a) $K \subset \text{int } Q$

b) $\dim Q = \dim X$

c) Q est G -invariante. (Donc ∂Q est, aussi, une sous-variété G -invariante de X). "

Démonstration

On peut construire une application C^∞ , propre :

$$X \xrightarrow{\varphi} [0, \infty]$$

telle que $\varphi^{-1}(0) = K$.

On considère la fonction G -invariante, C^∞ :

$$\psi(x) = \int_G \varphi(gx) d\mu(g) .$$

On remarque que :

$$K = \psi^{-1}(0) .$$

Je dis que cette fonction est, aussi, propre.

En effet, si x_1, x_2, \dots sont des points de X , tendant vers l'infini, les G -orbites Gx_n sont, à partir d'un certain n , en dehors d'un compact donné, quelconque $L \subset X$.

En particulier, puisque φ est propre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \inf \varphi(Gx_m), m \geq n \} = \infty .$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n) = \infty$, donc ψ est propre.

Maintenant, on peut prendre une valeur régulière $\epsilon > 0$ de la fonction G -invariante ψ , et définir Q par :

$$Q = \psi^{-1}[0, \epsilon] .$$

Ceci finit la démonstration.

Soit maintenant, comme avant, X une variété sur laquelle G agit et $Y \subset X$ une sous-variété G -invariante. On peut construire une métrique riemannienne G -invariante sur X . Ceci fait du fibré normal $\nu(Y)$ un G -fibré (en fait muni d'une métrique euclidienne, avec action orthogonale de G) .

Disons que le fibré normal est :

$$Y \xrightarrow{i} \nu(Y) \xrightarrow{p} Y$$

(i et p sont G -equivariants) .

Le lemme suivant est classique :

LEMME 1.2. - "Il existe un $\epsilon > 0$ tel que si $N(Y, \epsilon)$ est l'espace total du fibré en disques de rayon ϵ , attaché à $\nu(Y)$, on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N(Y, \epsilon) & \xrightarrow{T} & X \\ & \swarrow i & \nearrow \\ & Y & \end{array}$$

où $T \in C_G^\infty(N(Y, \epsilon), X)$. (T est un plongement équivariant.)

(On remarque que $N(Y, \epsilon)$ possède une structure naturelle de G -variété à bord).

2) "PLONGEMENTS" :

Le résultat suivant est crucial pour ce mémoire :

LEMME 1.3. - ("Théorème de plongement") : "Soit X une variété C^∞ compacte, sur laquelle le groupe de Lie compact G , agit différemmentiellement. Il existe un entier positif N , tel que, si l'on considère l'espace euclidien R^N , avec l'action triviale de G , il existe :

$$F \in C_G^\infty(X, R^N)$$

tel que la flèche F^* :

$$0 \longleftarrow C^\infty(X)^G \xleftarrow{F^*} C^\infty(R^N) \equiv C^\infty(R^N)^G$$

est surjective".

Démonstration :

[On appelle le lemme 1.3 "théorème de plongement" parce que, heuristiquement parlant, il nous dit que "l'espace des orbites" X/G , muni de l'anneau $C^\infty(X)^G$ (qu'on interprète comme étant les fonctions C^∞ sur X/G) se "plonge d'une manière C^∞ "

dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande] .

Je rappelle qu'il y a un autre théorème de plongement, plus facile :

LEMME 1.3.1. (Palais [8], Mostow [7]) - : "Soit X une variété C^∞ compacte, sur laquelle opère un groupe de Lie compact G . Alors, il existe une représentation fidèle $G \subset O(n)$ (qu'on va interpréter comme action de G sur R^n) et un plongement équivariant :

$$e \in P\ell_G^\infty(X, R^n) = P\ell^\infty(X, R^n) \cap C_G^\infty(X, R^n).$$

Je rappelle maintenant le résultat fondamental de G. Schwarz [14] .

Dans un travail classique Hilbert avait montré que si $G \subset O(n)$ est compact, il existe une application polynomiale (donnée par un nombre fini de polynômes homogènes de degré > 0) :

$$x \in R^n \xrightarrow{\rho} R^k \ni y$$

telle que, si l'on écrit

$$\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_k(x)),$$

alors :

$$\begin{array}{ccc} \rho_1(x) \in R[x]^G, & \text{et } \rho^* : & \\ 0 \longleftarrow R[x]^G & \xleftarrow{\rho^*} & R[y] \end{array}$$

est surjective . (On pense ici à l'action triviale de G sur R^k , donc ρ est équivariante, et

$$R[y] \cong R[y]^G .)$$

Voir [2], [16] .

On a :

$$\text{LEMME 1.3.2. (Schwarz [14]). - : " } 0 \longleftarrow C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)$$

est surjective."

Ceci n'est rien d'autre que le lemme 1.3. pour le cas où $X = \mathbb{R}^n$.

Maintenant, si l'on applique à X le lemme 1.3.1., on voit que

$$0 \longleftarrow C^\infty(X)^G \xleftarrow{e^*} C^\infty(\mathbb{R}^n)^G$$

est surjective (comparer au lemme 1.5. ci-dessous).

Il suffit donc de prendre $k=N$, et $F = \rho \circ e$, ce qui prouve 1.3.

Avant d'aller plus loin on donne le lemme suivant :

LEMME 1.3.3.-: " Soit Z un espace topologique qui est ou bien compact ou bien métrisable . Soit F un E.V.T. localement convexe, fréchetique . On va considérer $C^0(Z, F)$, l'E.V.T. des applications continues $Z \rightarrow F$, muni de la topologie compacte-ouverte ; de même $C^0(Z)$ sera l'E.V.T. des applications continues $Z \rightarrow \mathbb{R}$ (muni de la même topologie).

Alors : $C^0(Z, F) = C^0(Z) \hat{\otimes}_\epsilon F$.

En particulier, si F est nucléaire , on a :

$$C^0(Z, F) = C^0(Z) \hat{\otimes} F ."$$

Démonstration : (d'après A. Douady)

Si Z est compact, le résultat est bien connu [15] .

On va donc s'occuper du cas où Z est métrisable. La démonstration résulte de plusieurs remarques :

$C^0(Z, F)$ et $C^0(Z)$ sont complets . [En effet, un sous-ensemble $E \subset Z$ est fermé, si et seulement si, son intersection avec chaque compact de Z est fermé.]

$C^0(Z) \otimes F$ est dense dans $C^0(Z, F)$. [Soit $f : Z \rightarrow F$ (continue), $K \subset Z$ un compact et $\epsilon > 0$. On peut recouvrir K par un nombre fini de petits ouverts $U_i \subset Z$ tels que {oscillation de f sur U_i } $< \epsilon$.

Soit η_i une partition de 1 sur K , subordonnée à U_i , et $x_i \in U_i$ fixés.

On considère : $\psi \in C^0(Z) \otimes F$ définie par $\psi(x) = \sum_i \eta_i(x) f(x_i)$. Sur K , ψ approche f à ϵ -près.]

Considérons maintenant une semi-norme de F , $p : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, un compact $K \subset Z$,

et la (semi)-norme de $C^0(Z, F)$ définie par :

$$\|f\|_{K,p} = \sup_{x \in K} p(f(x)).$$

Soit aussi $\|\dots\|_K$ la semi-norme attachée à K pour $C^0(Z)$.

Je dis que, sur $C^0(Z) \otimes F$ on a :

$$\|\cdot\|_{K \otimes_\epsilon p} = \|\cdot\|_{K,p},$$

et à partir de là, notre lemme est démontré.

[Je rappelle la définition de la norme $\|\dots\|_{\otimes_\epsilon} \|\dots\|$. Si F_1, F_2 sont deux espaces normés, on peut considérer le diagramme commutatif naturel :

$$\begin{array}{ccc} F_1 \otimes F_2 & \xrightarrow{\quad} & L(F_1', F_2') \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ L(F_2', F_1') & \xrightarrow{\beta} & B(F_1' \times F_2', R) \end{array}$$

où $B(F_1' \times F_2', R) = \{ \text{les formes bilinéaires sur } F_1' \times F_2' \} = L(F_1', F_2'')$. Par Hahn-Banach les applications α et β sont isométriques. Par définition, la norme (unique) induite sur $F_1 \otimes F_2$ à partir du diagramme commutatif ci-dessus est le produit \otimes_ϵ des deux normes initiales.]

Donc, pour $f \in C^0(Z) \otimes F$, on a, par définition :

$$\|f\|_{K \otimes_\epsilon p} = \sup_{\substack{\xi \in F' \\ p^*(\xi) \leq 1}} \|\xi \circ f\|_K.$$

En appliquant de nouveau Hahn-Banach, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} \|\xi \circ f\|_K &= \sup_{\xi} \sup_{x \in K} |\xi \circ f(x)| = \sup_x \sup_{\xi} |\xi \circ f(x)| = \\ &= \sup_{x \in K} p(f(x)) = \|f\|_{K,p}, \quad \text{ce qui prouve 1.3.3.} \end{aligned}$$

On aura besoin, aussi, du lemme suivant :

LEMME 1.3.4. - "Soit X une variété C^∞ compacte sur laquelle le groupe de Lie compact G agit différemment. Soit aussi Z_1 un espace topologique qui est, ou bien métrisable, ou bien compact, et Z_2 une variété C^∞

G agira (par définition), trivialement sur Z_1 et Z_2 .

Soit (avec F comme dans le lemme 1.3) :

$$f = \text{id}(Z_1) \times \text{id}(Z_2) \times F \in C_G^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X, Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R}^N) .$$

Alors, l'application f^* est surjective :

$$0 \longleftarrow C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X)^G \xleftarrow{f^*} C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R}^N) \cong C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R}^N)^G ."$$

[Cette version paramétrée du lemme 1.3, que l'on va démontrer ci-dessous, par un argument tiré de [14], est l'analogue du théorème standard qui dit que les plongements sont un ouvert dans l'espace des applications C^∞] .

Démonstration :

Si Y est une variété C^∞ , l'espace $C^\infty(Y)$ muni de la topologie C^∞ , compacte-ouverte est nucléaire (voir [3], [15]) .

Ceci a comme conséquence les faits suivants :

a) Les produits tensoriels $\dots \hat{\otimes}_\pi C^\infty(Y)$ ou $\dots \hat{\otimes}_\epsilon C^\infty(Y)$ sont identiques ; On a un seul produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$. En particulier :

$$C^\infty(X \times Y) = C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(Y) .$$

b) Si Z est un espace topologique compact, et $C^0(Z, C^\infty(X))$ est l'espace des applications continues $Z \rightarrow C^\infty(X)$ (muni de sa structure E.V.T. naturelle), alors :

$$C^0(Z, C^\infty(X)) = C^0(Z) \hat{\otimes} C^\infty(X) .$$

D'après le lemme 1.3.3, ceci est vrai, aussi, quand Z est métrisable.

Remarquons que $C^0(Z, C^\infty(X))$ s'identifie à notre $C^{0,\infty}(Z \times X)$ (muni de la topologie $C^{0,\infty}$ - compacte-ouverte) . Je rappelle aussi, que le produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ est exact à droite et qu'il est la solution d'un problème universel pour les E.V.T., localement convexes, analogue au problème universel qui définit le \otimes (produit tensoriel ordinaire.)

En revenant à notre lemme, on a donc :

$$C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R}^N) = C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2 \times \mathbb{R}^N) = C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbb{R}^N) .$$

On a une flèche naturelle :

$$C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2) \hat{\otimes} C^\infty(X)^G \xrightarrow{\alpha} C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X)^G$$

provenant de l'application multi-linéaire naturelle :

$$C^0(Z_1) \times C^\infty(Z_2) \times C^\infty(X)^G \longrightarrow C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X)^G .$$

Avec ceci on construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} F^*} & C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2) \hat{\otimes} C^\infty(X)^G & \xleftarrow{\text{id} \hat{\otimes} Av} & C^0(Z_1) \hat{\otimes} C^\infty(Z_2) \hat{\otimes} C^\infty(X) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \alpha & & \downarrow \approx \\ C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{(\text{id} \times F)^* = f^*} & C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X)^G & \xleftarrow{Av} & C^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X) . \end{array}$$

Les flèches Av sont surjectives . Donc $\text{Id} \hat{\otimes} Av$ est surjective, puisque $\hat{\otimes}$ est exact à droite . Donc α est surjectif. F^* est surjective (d'après le théorème de plongement), donc $\text{id} \hat{\otimes} F^*$ l'est aussi.

Donc f^* est surjective , ce qui finit la démonstration.

3) STRUCTURE DE MODULE :

On va considérer une G -variété compacte X (G étant un groupe de Lie compact) et un G -fibré

$$(\xi) \quad E \longrightarrow X .$$

LEMME 1.4. : " $\Gamma^\infty(\xi)^G$ est un $C^\infty(X)^G$ -module fini."

Démonstration :

Chaque G -orbite de X possède un voisinage tubulaire équivariant produit-tordu $G \times_H V \subset X$ (voir [1], [4]) . Par partition C^∞ , équivariante, de 1, il suffit donc de considérer le cas où $X = G \times_H V$ (où $H \subset G$ est un sous-groupe opérant linéairement sur l'espace vectoriel V .) On a des isomorphismes canoniques, induits par l'inclusion naturelle :

$$V \approx V \times \{H\} \hookrightarrow G \times_H V ,$$

(où $\{H\} \in G/H$ est la classe de 1), pour les fonctions et les sections :

$$\Gamma^\infty(\xi)^G \approx \Gamma^\infty(\xi|V)^H$$

$$C^\infty(G \times_H V)^G \approx C^\infty(V)^H .$$

Il suffit donc de prouver le lemme pour le H -fibré $\xi|V$. Mais les éléments de $\Gamma^\infty(\xi|V)^H$ ne sont rien d'autre que les applications équivariantes de V dans la fibre de ξ . On est donc réduit au lemme suivant :

LEMME 1.4.1. - "Soient V, W deux espaces vectoriels sur lesquels le groupe de Lie compact, G , agit linéairement.

$C_G^\infty(V, W)$ est un $C^\infty(V)^G$ -module fini. Une assertion analogue est valable au niveau des germes."

Démonstration :

[Une démonstration analogue a été donnée par B. Malgrange].

Soit $f : V \rightarrow W$ et $z \in W^*$. On considère $f_1 : V \times W^* \rightarrow R$ définie par $f_1(x, z) = \langle f(x), z \rangle$. Soient D', D'' les dérivées partielles de f_1 en x et z . Donc

$$V \times W^* \xrightarrow{D''f_1} \text{Hom}_R(W^*, R) \approx W.$$

On vérifie que, quelque soit z :

$$D''f_1(x, z) = f(x)$$

L'action de G sur W induit canoniquement une action sur W^* (voir par exemple [12]):

$$\langle \dots, g.z \rangle = \langle g^{-1} \dots, z \rangle.$$

On va considérer l'action-produit sur $V \times W^*$. [On remarque que si $f \in C_G^\infty(V, W)$ alors le f_1 considérée ci-dessus est dans $C^\infty(V \times W^*)^G$.] Soit $\psi \in C^\infty(V \times W^*)^G$, et

$$D''\psi \in C^\infty(V \times W^*, W).$$

On vérifie que

$$D''\psi \in C_G^\infty(V \times W^*, W)$$

ce qui implique que :

$$D''\psi(x,0) \in C_G^\infty(V,W) .$$

Considérons maintenant les polynômes invariants sur $V \times W^*$: $R[x,z]^G$.

Soit Q_1, \dots, Q_K un système de générateurs de l'algèbre $R[x,z]^G$. D'après le lemme 1.3.2, pour $f \in C_G^\infty(V,W)$, il existe une fonction

$$P(u_1, \dots, u_K) \in C^\infty(R^K)$$

telle que :

$$f_1(x,z) = P(Q_1(x,z), \dots, Q_K(x,z)) .$$

En dérivant en z , on trouve :

$$f(x) = \sum \frac{\partial P}{\partial u_i} (Q(x,0)) \cdot D''Q_i(x,0) .$$

Puisque $\frac{\partial P}{\partial u_i} (Q(x,0)) \in C^\infty(V)^G$ on trouve que les K éléments $D''Q_i(x,0) \in C_G^\infty(V,W)$ engendrent le $C^\infty(V)^G$ -module $C_G^\infty(V,W)$.

4) EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Soit X une variété C^∞ fermée ; On va considérer des systèmes dynamiques, dépendant du temps

$$\xi \in C^\infty(R, \Gamma(TX)) .$$

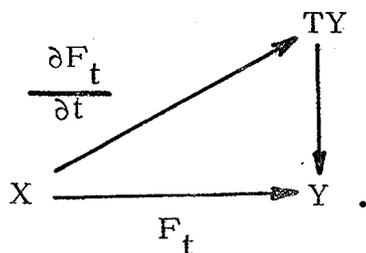
LE THEOREME FONDAMENTAL DES SYSTEMES DYNAMIQUES nous dit qu'il existe une correspondance biunivoque entre $C^\infty(R, \Gamma(TX))$ et $\{ \text{les sous-groupes à un paramètre } S_t \in \text{Diff}^\infty(X) \}$. (Ceci implique $S_0 = \text{id}(X)$). Cette correspondance attache à $\xi(x,t) = \xi_t(x)$ le sous-groupe $S_t(x)$, unique, tel que

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} \circ S_t^{-1} = \xi_t .$$

Ici, à toute application paramétrée

$$F_t \in C^\infty(X, Y) ,$$

on attache, d'une manière naturelle sa "dérivée temporelle" :



Supposons maintenant que le groupe de Lie compact G agisse sur X . A partir du THEOREME FONDAMENTAL que l'on vient de citer, on a une correspondance biunivoque :

$$\{\xi \in C^\infty(\mathbb{R}, \Gamma^\infty(TX)^G)\} \xleftrightarrow{\quad} \{\text{les sous-groupes à un paramètre } S_t \in \text{Diff}_G^\infty(X)\}.$$

Je laisse les détails au lecteur.

5) EXTENSION DES FONCTIONS :

On va utiliser le :

LEMME 1.5 : "Soit X une variété sur laquelle G agit, et $Y \subset X$ une sous-variété G -invariante. Il existe une application linéaire, $C^{0,\infty}$:

$$E : C^\infty(Y)^G \longrightarrow C^\infty(X)^G$$

telle que, si $\varphi \in C^\infty(Y)^G$, alors :

$$E(\varphi) | Y \equiv \varphi \text{ " .}$$

Démonstration :

D'après Seeley, il existe (sans aucune hypothèse sur G), une application linéaire, $C^{0,\infty}$:

$$E' : C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$$

telle que $E'(\varphi') | Y \equiv \varphi'$ (pour $\varphi' \in C^\infty(Y)$) (voir par exemple [10]).

On peut définir : ($x \in X$) :

$$E\varphi(x) = \int_G E'\varphi(gx) d\mu(g) \text{ , ce qui prouve 1.5.}$$

6) DIVISION DES FONCTIONS PAR DES POLYNÔMES :

On a le :

LEMME 1.6. : "Soit M une variété C^∞ sur laquelle le groupe de Lie

compact G agit (d'une manière C^∞) . On considère l'action triviale de G sur R et l'action naturelle induite sur $M \times R$. Soient :

$$u_0(x), \dots, u_{p-1}(x) \in C^\infty(M)^G ,$$

et

$$\Gamma(t, x) = t^p + \sum_{i=0}^{p-1} u_i(x) t^i \in C^\infty(M \times R)^G .$$

Il existe des applications R -linéaires, $C^{0, \infty}$:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M \times R)^G & \xrightarrow{q} & C^\infty(M \times R)^G \\ C^\infty(M \times R)^G & \xrightarrow{r} & (C^\infty(M)^G)^p \end{array}$$

$(r=r_0, \dots, r_{p-1})$ telles que, si

$$f(x, t) \in C^\infty(M \times R)^G ,$$

on ait :

$$f(x, t) = \Gamma(t, x) \cdot (qf)(x, t) + \sum_0^{p-1} (r_i f)(x) \cdot t^i . "$$

Démonstration :

Si l'on oublie l'action de G , et on travaille avec $C^\infty(M \times R)$ (à la place de $C^\infty(M \times R)^G$) , l'énoncé ci-dessus est tout simplement le théorème de division de Mather [6] , [5] . On obtient q et r comme ci-dessus, en appliquant l'opération Av au quotient et reste du théorème de division de Mather .

7) FONCTIONS IMPLICITES :

On a le :

LEMME 1.7. : " Soit G une groupe de Lie compact agissant sur Y et (trivialement) sur R^k .

Soit :

$$\Phi \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C_G^\infty(Y \times R^k, R^k)) ,$$

et pour $y \in Y$ fixé :

$$\Phi_y(u) = \Phi(z^0, y, u) \in C^\infty(R^k, R^k) .$$

On suppose que :

a) $\bar{\phi}(z^0, y, 0) \equiv 0$.

b) Pour tout y ,

$$D\bar{\phi}_y(0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$$

est inversible.

Il existe alors des :

$$\psi_i \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G) \quad (i=0, \dots, k-1) ,$$

telles que si l'on considère le

$$\psi \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C_G^\infty(Y, \mathbb{R}^k))$$

qu'elles induisent $(u_i = \psi_i(z, y))$, on ait :

$$\bar{\phi}(z, y, \psi(z, y)) \equiv 0 \in \mathbb{R}^k . "$$

Démonstration :

[Ici (Z, z^0) est un germe d'espace topologique quelconque.]

A partir de $\bar{\phi}$ on fabrique, canoniquement, un

$$\bar{\phi}_1 \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C_G^\infty(Y \times \mathbb{R}^k, Y \times \mathbb{R}^k))$$

(où il est entendu que l'on est dans la partie de $C_G^\infty(Y \times \mathbb{R}^k, Y \times \mathbb{R}^k)$ qui respecte la projection sur Y et qui transporte

$$(z^0, y, 0) \longrightarrow (y, 0) .$$

$$\bar{\phi}_1(z, y, u) = (y, \bar{\phi}(z, y, u)) .$$

Notre hypothèse, et le théorème classique des fonctions implicites (paramétré) nous assure que (au voisinage de la section nulle $Y \times 0$) , $\bar{\phi}_1$ possède une inverse (C^∞ , respectant la projection sur Y , et respectant $(z^0, y, 0)$).

Il est clair que l'inverse $\bar{\phi}_1^{-1}$ est aussi G -équivariante. Disons qu'elle a la forme :

$$(z, y, \lambda) \longrightarrow (z, y, \psi(z, y, \lambda)) .$$

On pose :

$$\psi(z, y) = \psi(z, y, 0) \in \mathbb{R}^k ,$$

ce qui prouve 1.7

8) CONTRACTIBILITE LOCALE DE $C_G^\infty(X, Y)$:

Dans tout ce paragraphe X, Y et G sont compacts.

LEMME 1.8. " Soit :

$$f \in C_G^\infty(X, Y).$$

Pour tout voisinage $f \in N_0 \subset C_G^\infty(X, Y)$, il existe un voisinage $f \in N_1 \subset N_0$

avec la propriété suivante :

Π existe :

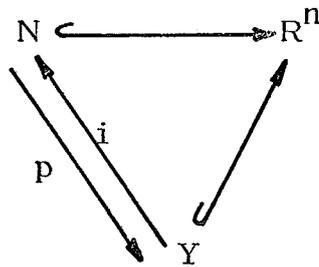
$$\Phi \in C^{0, \infty}(N_1 \times I, N_0)$$

telle que : 1) $\Phi(g, 0) = f$ ($g \in N_1$)

2) $\Phi(g, 1) = g$ ($g \in N_1$) ."

Démonstration :

D'après le théorème de plongement de Palais, énoncé ci-dessus, on a toujours une représentation fidèle $G \subset O(n)$ et un plongement équivariant $Y \subset \mathbb{R}^n$. Pour la sous-variété invariante Y , on a un voisinage tubulaire invariant :



où l'on remarque que la projection p est équivariante.

Sans perte de généralité, pour tout $g \in N_0$, $x \in X$, le segment qui joint $g(x), f(x)$ (points de \mathbb{R}^n) est dans N .

On peut définir (pour un N_1 convenablement choisi) :

$$\Phi(g, x, t) = p((1-t)f(x) + tg(x)).$$

[Puisque G agit linéairement sur \mathbb{R}^n , on a , pour tout $\gamma \in G$:

$$\gamma.((1-t)f(x) + tg(x)) = (1-t) \gamma.f(x) + t \gamma.g(x) = ((1-t)f + tg) (\gamma.x), \text{ e.a.d.s. }] .$$

Il est utile d'avoir une version un peu plus raffinée de la contractibilité locale

de $C_G^{\infty}(X, Y)$:

LEMME 1.8.1. : "Soit $f \in C_G^{\infty}(X, Y)$, (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique et (Z_2, z_2^0) un germe de variété C^{∞} (de dimension finie), et

$$F \in C_{z_0^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^{\infty}(X, Y)),$$

un germe tel que l'on ait : $F(z^0) = f$.

Il existe, alors, un germe

$$F_1 \in C_{z_0^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^{\infty}(X \times I, Y))$$

tel que

$$F_1(z, x, 1) = F(z, x) \in Y \quad , \quad F_1(z^0, x, t) = F_1(z, x, 0) = f(x) \quad . \quad "$$

La démonstration est laissée au lecteur.

9) STRUCTURES DE "VARIETES INFINIES" :

[Ce qui suit ne sera utilisé qu'au dernier paragraphe, en remarque].

Soit $S \subset C^{\infty}(X)$ une sous-R-algèbre et $M \subset C^{\infty}(X, Y)$ une partie. On dira que

M est une S-variété faible si les axiomes suivants sont vérifiés :

A-1) Toute application $\varphi \in C^{\infty}([0, \infty), M)$ s'étend en une application $\tilde{\varphi} \in C^{\infty}((-\infty, \infty), M)$.

A-2) Soit $\tilde{\varphi} \in C^{\infty}(R, M)$ et $\xi \in C^{\infty}(R, S) \subset C^{\infty}(R \times X, R)$. Soit

$$\psi \in C^{\infty}(R, C^{\infty}(X, Y))$$

défini par :

$$\psi(t, x) = \tilde{\varphi}(\xi(t, x), x) \quad .$$

Alors : $\psi \in C^{\infty}(R, M)$.

A-3) On va désigner par c_f^k l'application constante $I^k \xrightarrow{f} C^{\infty}(X, Y)$.

Soit $f \in M$ et $f \in V \subset M$ un voisinage de f .

Il existe un voisinage

$$c_f^1 \in U \subset C^{\infty}(I, M)$$

tel que si, $\psi_1, \dots, \psi_k \in U$, $\psi_i(0) = f$, il existe $\psi \in C^\infty(I^k, V)$ avec la propriété :

$$\psi(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = \psi_i(t_i) .$$

[Les axiomes A-1,2,3 font que l'ensemble des variations infinitésimales $T_f M \subset \Gamma^\infty(f^*TY) = T_f C^\infty(X, Y)$ possède une structure naturelle de S -module .

Par exemple si, $\phi(t, x)$ est une famille à 1-paramètre dans M , avec $\phi(0, x) = f$,

$$\sigma(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi \right|_{t=0} \in T_f M$$

et si $\eta(x)$ est dans S , alors l'élément

$$\eta\sigma \in T_f C^\infty(X, Y) = \Gamma^\infty(f^*TY)$$

est en fait dans $T_f M$ car :

$$\eta(x)\sigma(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(t\eta(x), x) \right|_{t=0}$$

et $\phi(t\eta(x), x)$ peut se lire comme une application $t \rightarrow M$] .

A-4) M est localement contractile (dans le sens du lemme 1.8.1)

A-5) (qui raffine la connexité locale). Si $f \in M$ et U est un voisinage

$$c_f^1 \in U \subset C^\infty(I, C^\infty(X, Y)),$$

il existe un voisinage

$$f \in V \subset M$$

tel que tout $g \in V$ peut être uni avec f par un arc dans $U \cap C^\infty(I, M)$.

A-6) (qui raffine A-3). Soient $f \in M$, $\psi \in C^\infty(I^k, M)$ avec $\psi(0) = f$ et

W un voisinage

$$\psi \in W \subset C^\infty(I^k, M) .$$

Il existe $U = U(W)$, voisinage de $c_f^1 \in U \subset C^\infty(I, M)$ tel que pour tout

$\psi \in U$ avec $\psi(0) = f$ il existe $\phi \in C^\infty(I \times I^k, M)$ tel que

a) $\phi(0, u) = \psi(u)$

b) $\phi(t, 0) = \psi(t)$

c) Pour t_0 fixé $\phi(t_0, \dots) \in W$.

Ces axiomes contiennent tout ce qu'il faut pour la théorie de la transversalité [11]

et peuvent servir, aussi, de cadre "variétés de dimension ∞ " pour une théorie à la Mather [9] .

PROPOSITION : "Si G est un groupe de Lie compact et X, Y deux G -variétés compactes, alors $C_G^\infty(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ est une $C^\infty(X)^G$ -variété faible".

La vérification des axiomes est facile. Par exemple, pour A-2 on a

$$\phi(t, g.x) = g.\phi(t, x) \text{ et } \xi(t, g.x) = \xi(t, x) .$$

Il en résulte :

$$\psi(t, g.x) = \phi(\xi(t, g.x), g.x) = \phi(\xi(t, x), g.x) = g.\phi(\xi(t, x), x) = g.\psi(t, x) .$$

Pour A-1 , on plonge $Y \subset \mathbb{R}^N$ d'une manière équivariante (Palais), on prend un voisinage tubulaire invariant de $Y : T \xrightarrow{\pi} Y$, on prolonge $X \times [0, \infty) \rightarrow Y$ à $X \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ (Seeley), on rend ceci invariant (par Av), on prend la projection π sur Y , et ainsi de suite

CHAPITRE I.- LE THEOREME DE PREPARATION EQUIVARIANT.-

1) L'ENONCE DU RESULTAT :

On considère deux variétés C^∞ , X et Y , X étant supposée compacte et un groupe de Lie compact G . X et Y seront munies, une fois pour toutes d'actions de G (à gauche) :

$$G \times X \longrightarrow X, \quad G \times Y \longrightarrow Y,$$

et on va considérer

$$C_G^\infty(X, Y) \subset C^\infty(X, Y),$$

où $C_G^\infty = \{ \text{l'ensemble des applications } G\text{-équivariantes, c'est-à-dire telles que } f(g.x) = g.f(x) \}$.

Soient (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique qui est ou bien métrisable ou bien compact, et (Z_2, z_2^0) un germe de variété C^∞ de dimension finie. On considère

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^\infty(X, Y)),$$

ensemble des germes d'applications $Z_1 \times Z_2 \rightarrow C_G^\infty(X, Y)$, différentiables en Z_2 et continues, ainsi que toutes leurs dérivées partielles, en $Z_1 \times Z_2$.

Pour la simplicité de l'écriture, on va désigner, quelquefois $(Z_1 \times Z_2, z_1^0 \times z_2^0)$ par (Z, z^0) .

On considère l'application d'évaluation évidente :

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G) \xrightarrow{\text{ev}(z^0)} C^\infty(X)^G,$$

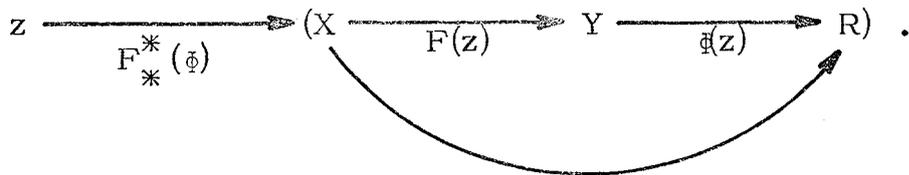
qui sera désignée, dorénavant par ev_X . L'application analogue pour $C^\infty(Y)^G$ sera désignée par ev_Y . Si

$$F \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C_G^\infty(X, Y))$$

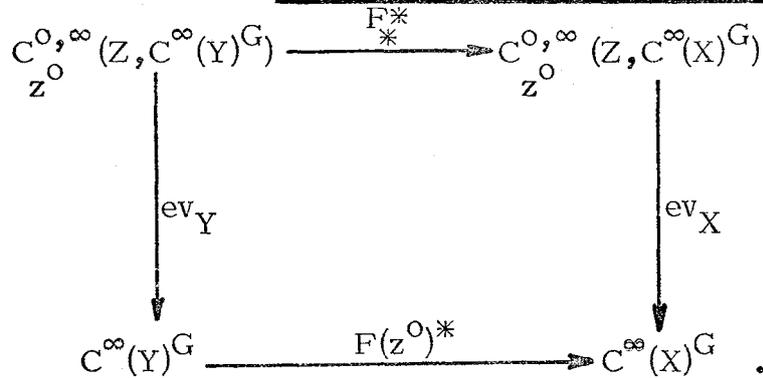
est donné, on construit un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres :

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G) \xrightarrow{F_*^*} C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G),$$

défini par :



THEOREME 1 : " Considérons le diagramme commutatif suivant :



Soient : C un $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G)$ -module fini, A un $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -module fini, et

$$A \xrightarrow{\alpha} C$$

un homomorphisme $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ linéaire .

Dans ces conditions, si :

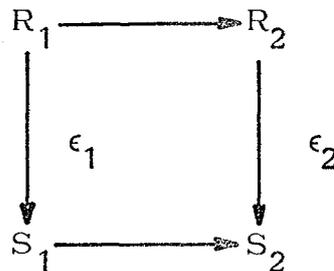
$$\alpha(A) + \text{Ker}(\text{ev}_X).C = C \ ,$$

alors : $\alpha(A) = C$. "

Le reste du chapitre sera occupé par la démonstration de ce théorème.

2) LA PROPRIETE DE WEIERSTRASS :

Soit :



un diagramme commutatif dans la catégorie des R-algèbres. Par définition, ce carré

possède la "propriété de Weierstrass" si la chose suivante est vraie :

(W) " Chaque fois que l'on se donne un R_2 -module fini C on a l'implication suivante :

$$C/\text{Ker}(\epsilon_1).C \text{ est } R_1 \text{ fini} \implies C \text{ est } R_1\text{-fini. "}$$

La propriété de Weierstrass est associative, dans le sens que si elle est vraie pour deux carrés commutatifs consécutifs, elle est vraie, aussi, pour le carré composé.

THEOREME 2 : " Le carré commutatif de l'énoncé du théorème 1 possède la propriété de Weierstrass" .

La démonstration du théorème 2 sera donnée dans les paragraphes suivants :

Pour le moment on va montrer comment le théorème 2 implique le théorème 1 .

LEMME 2.1. : "On a :

$$F_{*}^{*}(\text{Ker}(\text{ev}_Y)).C_{z_0}^{0,\infty}(Z, C^{\infty}(X)^G) = \text{Ker}(\text{ev}_X)$$

(égalité entre sous-ensembles de $C_{z_0}^{0,\infty}(Z, C^{\infty}(X)^G)$) .

Démonstration :

L'inclusion \subset est évidente. Pour prouver l'inclusion \supset on procède comme suit .

Soit (z_1, \dots, z_k) un système de coordonnées locales de Z_2 , telles que

$$z_i(z_2^0) = 0 \text{ .}$$

En d'autres termes, si z_i est considéré comme élément de $C_{z_0}^{0,\infty}(Z, C^{\infty}(Y)^G)$, il appartient à $\text{Ker}(\text{ev}_Y)$.

Soit $\psi(z^1, z^2, x) \in \text{Ker}(\text{ev}_X)$, donc

$$\psi(z_1^0, z_2^0, x) \equiv 0 \text{ .}$$

Dans l'anneau $C_{z_0}^{0,\infty}(Z, C^{\infty}(X)^G)$, l'élément $\psi(z^1, z^2, x) - \psi(z_1^0, z_2^0, x)$ appartient à l'idéal engendré par les z_1, \dots, z_k , donc il est dans $F_{*}^{*}(\text{Ker}(\text{ev}_Y)) C_{z_0}^{0,\infty}(Z, C^{\infty}(X)^G)$.

Pour finir la démonstration du lemme 2.1., il reste à montrer que :

$$\varphi(z^1, x) = \psi(z^1, z_2^0, x) \in F_*^*(\text{Ker}(\text{ev}_Y)) \cdot C_{z_0^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G) .$$

Maintenant, on va se donner, une fois pour toutes un système fini de cartes précompactes $h_i U_i$ recouvrant X :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \ni & U_i \xrightarrow{\quad} X \\ & & \downarrow h_i \uparrow \\ & & \end{array} ,$$

et pour chaque fonction $f \in C^\infty(X)$ on définira

$$\|f\|_m = \sup_{i, |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f \circ h_i\|$$

où α est un multi-indice $\alpha = (j_1, \dots, j_n)$, $\sum_k j_k = |\alpha|$.

Pour notre φ considéré ci-dessus, si $z^1 \in Z^1$, on a :

$$\varphi(z_1^0) \equiv 0 .$$

On peut définir le germe de fonction continue sur Z^1 , s'annulant en z_1^0 :

$$\rho(z^1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \min(1, \sqrt{\|\varphi(z^1)\|_m}) .$$

Il est clair qu'un tel $\rho(z^1)$ représente un élément de $\text{Ker}(\text{ev}_Y)$, ou de $F_*^*(\text{Ker}(\text{ev}_Y))$.

Il est clair, aussi, que :

$$\rho(z^1)^{-1} \varphi(z^1, x) \quad \text{a un sens et}$$

représente un élément de $C_{z_1^0}^0(Z^1, C^\infty(X)^G) \subset C_{z_0^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G)$.

Donc

$$\varphi(z^1, x) = \rho(z^1) (\rho(z^1)^{-1} \varphi(z^1, x)) \in F_*^*(\text{Ker}(\text{ev}_Y)) \cdot C_{z_0^0}^{0, \infty} \dots$$

et on a fini la démonstration.

Maintenant, en utilisant le théorème 2 et le lemme 2.1. on va prouver le théorème 1.

Le lemme 2.1. nous permet d'écrire l'hypothèse du théorème 1 sous la forme :

$$\alpha(A) + F_*^*(\text{Ker}(\text{ev}_Y)) \cdot C = C$$

Ceci veut dire que $C/\text{Ker}(\text{ev}_Y) \cdot C$ est $C^\infty(Y)^G$ -fini (puisque A l'est). Donc, d'après le théorème 2, C est $C^\infty(Y)^G$ -fini. La conclusion du théorème 1 résulte maintenant du lemme de Nakayama.

3) DEMONSTRATION DU THEOREME 2 :

On va commencer par prouver le théorème 2 dans un cas particulier .

LEMME 2.2. - "Soit Y une G -variété. On considère l'action triviale de G sur R , et la G -variété produit $Y \times R$. Soit $X \hookrightarrow Y \times R$ une sous-variété compacte (à bord pas nécessairement \emptyset), G -invariante.

On considère :

$$\begin{array}{ccc} Y \times R & \xleftarrow{i} & X \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi|_X \\ & Y & \end{array}$$

Ici : $\pi \in C_G^\infty(Y \times R, Y)$, donc :

$$\pi|_X \in C_G^\infty(X, Y) .$$

Dans ces conditions, le carré :

$$\begin{array}{ccc} C_{Z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G) & \xrightarrow{(\pi|_X)_*^*} & C_{Z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G) \\ \downarrow \text{ev}_Y & & \downarrow \text{ev}_X \\ C^\infty(Y)^G & \xrightarrow{(\pi|_X)_*^*} & C^\infty(X)^G \end{array}$$

possède la propriété de Weierstrass."

(Remarque : En se référant aux notations du théorème 1 ci-dessus, on considère ici

l'application constante :

$$Z \longrightarrow \pi|_X \in C_G^\infty(X, Y) .$$

Par abus de notation, on l'appelle encore $\pi|_X$.)

Démonstration :

On considère le diagramme commutatif d'homomorphismes de R -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} C_{Z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) & \xrightarrow{i_*^*} & C_{Z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X)^G) \\ \pi_*^* \swarrow & & \searrow (\pi|_X)_*^* \\ & C_{Z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G) & \end{array}$$

On considère, aussi, un $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(X)^G)$ -module fini, Θ , tel que $\Theta/\text{Ker}(\text{ev}_Y) \cdot \Theta$ est $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -fini.

Remarquons que d'après le lemme d'extension 1.5 (du chapitre précédent), le morphisme i_*^* est surjectif. Donc si l'on restreint les scalaires via i_*^* , Θ est un $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$ -module fini. C'est avec cet anneau de scalaires que l'on va travailler maintenant. (Les éléments de l'anneau sont des fonctions-germifiées là-bas où il faut et $C^{0,\infty}$ comme il faut :

$$f(z, y, t) = f(z_1, z_2, y, t) .$$

π_*^* est un injection qui consiste à considérer une fonction en (z, y) comme fonction en (z, y, t) .) En particulier, on va considérer

$$t \in C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) .$$

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Theta$ un système (fini) d'éléments qui engendrent

Θ en tant que $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$ -module et

$\Theta/\text{Ker}(\text{ev}_Y) \cdot \Theta$ en tant que $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -module.

On peut donc écrire :

$$t \alpha_i = \sum_j c_{ij}(z, y) \alpha_j + \sum_j \gamma_{ij}(z, y, t) \alpha_j$$

avec $c_{ij} \in C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$, $\gamma_{ij} \in C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$, et $\gamma_{ij}(z^0, y, t) \equiv 0$.

On considère :

$$\Delta(z, y, t) = \det(\delta_{ij} t - c_{ij}(z, y) - \gamma_{ij}(z, y, t)) = t^k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(z, y) t^i + \rho(z, y, t),$$

où $\rho(z^0, y, t) \equiv 0$. (λ et ρ sont G -invariantes donc $\Delta \in C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$.)

On introduit un paramètre auxiliaire :

$$u = (u_0, \dots, u_{k-1}) \in R^k$$

sur lequel G agit trivialement.

Soit :

$$\Gamma(y, u, t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i + \lambda_i(z^0, y)) t^i \in C^\infty(Y \times R^k \times R)^G .$$

En appliquant le lemme 1.6 (et en utilisant le caractère R -linéaire, $C^{0,\infty}$ des opérateurs quotient et reste), on peut écrire :

$$\rho(z, y, t) = \Gamma(y, u, t)q(z, y, u, t) + \sum_0^{k-1} H_i(z, y, u)t^i$$

avec $q \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R^k)^G)$, et :

$$q(z^0, y, u, t) \equiv 0 \equiv H_i(z^0, y, u) .$$

En regroupant les termes on trouve :

$$\Delta(z, y, t) = \Gamma(y, u, t)(1+q) + \sum_0^{k-1} E_i(z, y, u)t^i ,$$

avec

$$E_i(z, y, u) = \lambda_i(z, y) - \lambda_i(z^0, y) - u_i + H_i(z, y, u) .$$

On remarque que :

a) E_i est G -invariante .

b) $E_i(z^0, y, 0) \equiv 0$.

c) $\frac{\partial E_i}{\partial u_j}(z^0, y, u) = -\delta_{ij}$.

On peut appliquer le lemme 1.7, qui nous fournit des

$$u_i = \psi_i(z, y) \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$$

tels que :

$$E_j(z, y, \psi(z, y)) \equiv 0 .$$

Donc

$$\Delta(z, y, t) = (t^k + \sum_0^{k-1} (\psi_i(z, y) + \lambda_i(z^0, y))t^i) \cdot U(z, y, t)$$

où U est une unité de l'anneau

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) .$$

Une nouvelle application du lemme de division 1.6 . nous dit, maintenant que,

$$A = C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) / \Delta \cdot C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^{0, \infty}(Y \times R)^G)$$

est un $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -module fini.

D'autre part, d'après Cramer, on a :

$$\Delta \cdot \alpha_i = 0$$

donc l'action de $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$ sur le module Θ (la multiplication scalaire),

provient d'une structure de A -module de Θ et de la projection canonique

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) \longrightarrow A .$$

\mathcal{O} est manifestement A -fini, et comme A est $C_{Z_0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -fini, il résulte que \mathcal{O} est $C_{Z_0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(Y)^G)$ -fini.

Ceci finit la démonstration du lemme 2.2.

Pour finir la démonstration du théorème 2, on procède maintenant comme suit :

D'après le "théorème de plongement", il existe un espace euclidien R^n , avec action triviale de G , et une application équivariante :

$$\varphi \in C_G^\infty(X, R^n)$$

telle que

$$C^\infty(X)^G \xleftarrow{\varphi^*} C^\infty(R^n) \equiv C^\infty(R^n)^G$$

soit surjective. On considère, dans $C_{Z_1, Z_2}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^\infty(X, R^n))$, l'application constante, de valeur φ . On va la désigner, par abus de notation, avec φ , encore.

Comme conséquence du lemme 1.3.4. (vu que Z_1 est le germe d'un espace métrisable ou d'un espace compact), on voit que l'application φ_*^* est surjective :

$$0 \leftarrow C_{Z_1, Z_2}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)^G) \xleftarrow{\varphi_*^*} C_{Z_1, Z_2}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(R^n)).$$

Si F est comme dans le théorème 2, on considère

$$F_1 \in C_{Z_0}^{0,\infty}(Z, C_G^\infty(X, Y \times R^n)),$$

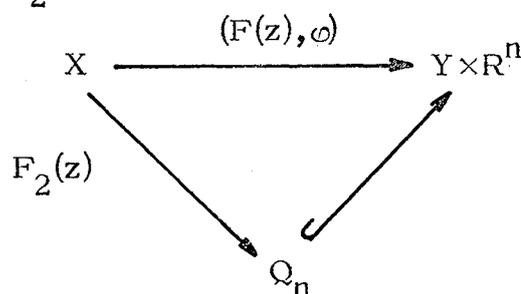
défini par :

$$F_1(z) = (F(z), \varphi).$$

Donc puisque φ_*^* est surjectif, $(F_1)_*^*$ l'est aussi. D'après le lemme 1.1, on peut trouver une sous-variété invariante, compacte-à-bord :

$$Q_n \subset Y \times R^n$$

telle que $\dim Q_n = \dim(Y \times R^n)$ et que $\text{Image } F_1 \subset Q_n$. En d'autres termes on a une factorisation (avec F_2 équivariante) :

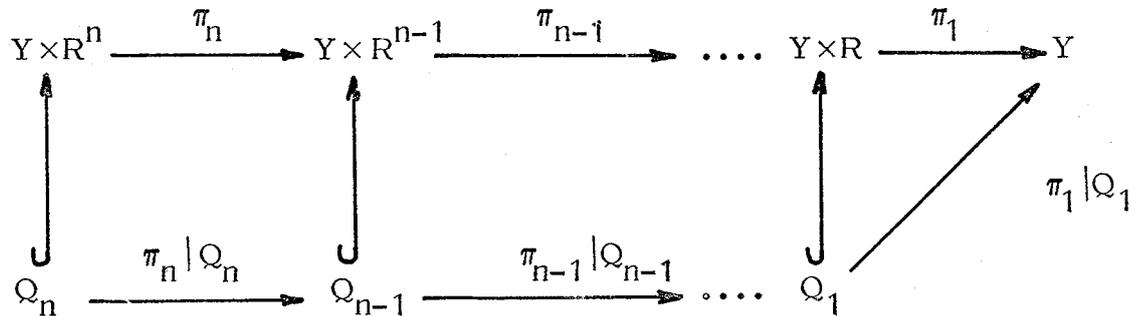


Manifestement, $(F_2)^*_{2^*}$ est surjective aussi.

Considérons les projections consécutives :

$$R^i = (y_1, \dots, y_i) \xrightarrow{\pi_i} (y_1, \dots, y_{i-1}) = R^{i-1} .$$

On peut construire un diagramme commutatif :



où : $Q_i \subset Y \times R^i$ est une sous-variété invariante, compacte-à-bord, avec :

- a) $\dim Q_i = \dim (Y \times R^i) .$
- b) $\pi_i(Q_i) \subset Q_{i-1} .$

On a

$$F = (\pi_1|Q_1) \circ \dots \circ (\pi_n|Q_n) \circ F_2 .$$

Vu que la propriété de Weierstrass est associative, elle est satisfaite pour F si elle l'est pour F_2 et les $\pi_i|Q_i$. Pour F_2 c'est immédiat, à cause de la surjectivité, pour $\pi_i|Q_i$ cela résulte du lemme 2.2.

Le théorème 2 (donc le théorème 1), se trouve ainsi démontré.

4) UNE AUTRE VARIANTE DU THEOREME DE PREPARATION :

[Ce paragraphe ne sera utilisé que dans la seconde partie de ce mémoire].

On va considérer un groupe de Lie compact G , opérant orthogonalement sur $R^D \ni y$. On considère des sous-groupes compacts $G_i \subset G$ ($i=1, \dots, N$), en nombre fini, opérant orthogonalement, respectivement, sur $R^{n_i} \ni x_i$. On considère

$$f = (f_1, \dots, f_N)$$

où f_i est un germe d'application C^∞ :

$$f_i \in C^\infty_{G_i} (R^{n_i}, R^D) \quad (f_i(0) = 0) .$$

On va considérer l'anneau produit : $\prod_i C^\infty_{G_i}(x_i)$ où $C^\infty(x_i)$ est l'anneau local des

germes de fonctions C^∞ dans R^{n_i} , autour de O .

Soit

$$ev_x : \prod_i C^\infty(x_i)^{G_i} \longrightarrow R^N$$

Le produit des évaluations :

$$O \longrightarrow \prod_i C^\infty(x_i)^{G_i} \longrightarrow C^\infty(x_i)^{G_i} \xrightarrow{ev(o)} R \longrightarrow O .$$

THEOREME 3 : "Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(y)^G & \xrightarrow{f^*} & \prod_i C^\infty(x_i)^{G_i} \\ \downarrow ev_y(o)=ev_y & & \downarrow ev_x \\ R & \xrightarrow{\text{diagonale}} & R^N \end{array}$$

possède la propriété de Weierstrass."

Démonstration :

Dans [12] on trouve la démonstration de ce théorème pour le cas $N=1$, $G_1 = G$. En se référant aux notations du paragraphe 6, chapitre I de [12], on peut passer au cas $N=1$, $G_1 \subset G$ comme suit : On considère :

$$C^\infty(Y \times R^k)^{G_1} \supset C^\infty(Y \times R^k)^G \supset C^\infty(R^k) .$$

Pour

$$(f, \rho) \in C_{G_1}^\infty(X, Y \times R^k)$$

on a que :

$$O \longleftarrow C^\infty(X)^{G_1} \xleftarrow{(f, \rho)^*} C^\infty(Y \times R^k)^G$$

est surjective. A partir de là, la démonstration (pour $N=1$), se fait exactement comme dans [12]. Le cas général (N quelconque) résulte immédiatement en travaillant composante par composante. (Un $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$ -module M est le produit des $C^\infty(x_i)^{G_i}$ -modules $M \otimes C^\infty(x_i)^{G_i}$.)

COROLLAIRE 2.3 : "Dans les conditions du théorème 3,
considérons un $C^\infty(y)^G$ -module fini A , et un $\prod C^\infty(x_i)^{G_i}$ -module
fini C . Soit $\varphi : A \rightarrow C$ un morphisme sur f^*_i et

$$k = \dim_R A/\mathfrak{m} C^\infty(y)^G \cdot A .$$

Alors, si

$$\varphi(A) + [f^*_i \mathfrak{m} C^\infty(y)^G + (\prod \mathfrak{m} C^\infty(x_i)^{G_i})^{k+1}] \cdot C = C$$

on a, aussi :

$$\varphi(A) = C . "$$

(Le k du corollaire n'est pas le même que le k d'avant).

5) DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.3 :

On commence par le :

LEMME 2.3.1. : " $\mathfrak{m} C^\infty(x)^G$ est un $C^\infty(x)^G$ -module fini."

Démonstration :

Soient ρ_1, \dots, ρ_k les générateurs homogènes, de degré >0 , de $R[x]^G$.

Si $f \in \mathfrak{m} C^\infty(x)^G$ il existe $g \in C^\infty(z)$ tel que ($z = \rho(x)$)

$$f(x) = g(\rho(x)) \quad (\text{lemme 1.3.2})$$

Puisque $f(0) = \rho(0) = 0$, il s'en suit que $g \in \mathfrak{m} C^\infty(z)$. On en déduit que ρ_1, \dots, ρ_k engendrent $\mathfrak{m} C^\infty(x)^G$ en tant que $C^\infty(x)^G$ -module. Le même argument montre que $C^\infty(x)^G / \mathfrak{m}^n C^\infty(x)^G$ est R -fini pour tout n .

LEMME 2.3.2. : "Soit C un

$$\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i} \text{-module fini,}$$

$\Gamma \subset C$ un sous-module, et $k \geq 0$, quelconque.

Alors $(\prod_i \mathfrak{m}^k C^\infty(x_i)^{G_i} \cdot C + \Gamma)$ est un module $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$ -fini."

Démonstration :

D'après le lemme précédent, $\prod_i \mathfrak{m}^k C^\infty(x_i)^{G_i} \cdot C$ est $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$ -fini.

On considère maintenant la suite exacte :

$$0 \rightarrow \prod_i \mathfrak{m}_i^k C^\infty(x_i)^{G_i} \cdot C \longrightarrow \prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C + \Gamma \rightarrow (\prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C + \Gamma) / \prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C \rightarrow 0 .$$

On a

$$(\prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C + \Gamma) / \prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C \hookrightarrow C / \prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C$$

et ce dernier terme est déjà R-fini. Donc

$$(\prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C + \Gamma) / \prod_i \mathfrak{m}_i^k \cdot C$$

est, aussi, R-fini, et ainsi de suite

LEMME 2.3.3. - "Dans les conditions du lemme précédent, si :

$$\dim_R(C / \prod_i \mathfrak{m}_i^{\ell+1} \cdot C + \Gamma) \leq \ell$$

alors

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^\ell \cdot C \subset \Gamma ."$$

Démonstration :

Notre hypothèse implique l'existence d'un $p \leq \ell - 1$ tel que :

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^p \cdot C + \Gamma = \prod_i \mathfrak{m}_i^{p+1} \cdot C + \Gamma$$

La conclusion résulte maintenant du lemme précédent et du lemme de Nakayama.

On revient maintenant au corollaire 2.3.

On a, par hypothèse :

$$C / (\mathfrak{m} C^\infty(y)^G + \prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1}) \cdot C = \omega(A) / \varphi(A) \cap (\mathfrak{m} C^\infty(y)^G + \prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1}) \cdot C .$$

Mais :

$$\omega(A) \cap (\dots) \cdot C \supset f^* \mathfrak{m} C^\infty(y)^G \cdot \omega(A) .$$

Donc :

$$\dim_R C / (\dots) \cdot C \leq \dim A / \mathfrak{m} C^\infty(y)^G \cdot A = k$$

D'après le lemme 2.3.3 :

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1} \cdot C \subset \mathfrak{m} C^\infty(y)^G \cdot C .$$

On est ainsi réduit au théorème 3 .

CHAPITRE II.- DEMONSTRATION DU THEOREME DE
STABILITE EQUIVARIANTE.-

1) FIBRES PARAMETRES.-

On va introduire une nouvelle variété C^∞ compacte, U , sur laquelle G agira trivialement. Z_1 et Z_2 sont comme au chapitre précédent.

On se donne

$$F \in C_{Z_0}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^\infty(X \times U, Y)).$$

On va considérer le fibré :

$$F^*TY \longrightarrow Z_1 \times Z_2 \times X \times U$$

dont les sections s'identifient aux flèches η qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & TY \\ & \nearrow \eta & \downarrow \\ Z_1 \times Z_2 \times X \times U & \xrightarrow{F} & Y \end{array} .$$

F^*TY est un G -fibré et on va considérer le $C_{Z_0}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X \times U)^G)$ -module $\Gamma_{Z_0}^{0,\infty}(F^*TY)^G = \{ \text{les sections } C^{0,\infty}, \text{ invariantes, du fibré } F^*TY \}$.

LEMME 3.1. : " $\Gamma_{Z_0}^{0,\infty}(F^*TY)^G$ est un $C_{Z_0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$ -
module fini."

Démonstration :

En utilisant le lemme 1.3.4, on peut généraliser la démonstration du lemme 1.4. On laisse les détails au lecteur.

On a une opération d'évaluation naturelle :

$$\text{Ev}(z^0) : \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(T^*TY)^G \longrightarrow \Gamma^{\infty}(F(z^0)^*TY)^G$$

(je rappelle que $F(z^0) \in C_G^{\infty}(X, Y)$.)

On considère aussi l'opération d'évaluation :

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^{\infty}(X \times U)^G) \xrightarrow{\text{ev}_X} C^{\infty}(X \times U)^G$$

du chapitre précédant .

LEMME 3.2.: " Dans $\Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G$ on a :

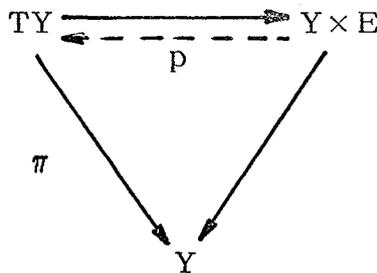
$$\text{Ker Ev}(z^0) = \text{Ker ev}_X \cdot \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G . "$$

Démonstration :

L'inclusion \supset est évidente.

Pour prouver \subset on procède comme suit :

D'après le théorème de plongement de Palais-Mostow, on a un espace \mathbb{R} -vectoriel $E \approx \mathbb{R}^n$, une représentation fidèle $G \subset O(n)$, donc une structure de G -fibré sur $Y \times E \rightarrow Y$ (avec la représentation $G \subset O(n)$), et un monomorphisme dans la catégorie des G -fibrés :



($Y \times E$ est obtenu en considérant un plongement équivariant $Y \subset E$ et en prenant $TE|_Y$.).

On va identifier dorénavant TY avec son image dans $Y \times E$.

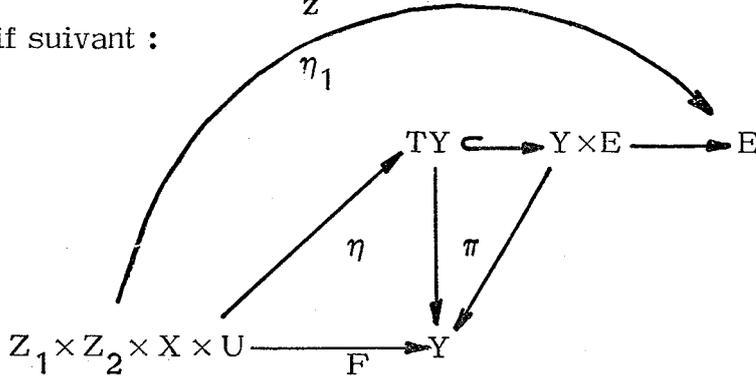
Pour $y \in Y$ on considère la projection orthogonale :

$$E \equiv y \times E \xrightarrow{p(y)} \pi^{-1}(y) .$$

$p(y)$ dépend, clairement, d'une manière C^∞ du point y . Aussi, si $\theta \in E$, on a :

$$p(g.y)(g.\theta) = g.p(y)(\theta) .$$

Soit $\eta(z,x,u) \in \Gamma_{z^0}^{0,\infty}(F^*TY)^G$. On définit $\eta_1(z,x,u)$ par le diagramme commutatif suivant :



Donc :

$$\eta(z,x,u) = [F(z,x,u), \eta_1(z,x,u)] \in Y \times E .$$

η_1 est manifestement G -équivariante, c'est à dire que :

$$\eta_1 \in C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C_G^\infty(X \times U, E)).$$

$C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C_G^\infty(X \times U, E))$ est un $C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$ -module.

Maintenant, supposons que $\eta \in \text{Ker Ev}(z^0)$.

On a donc : $\eta_1(z^0, x, u) \equiv 0$. En procédant comme dans le lemme 2.1. du chapitre précédent, on peut écrire η_1 sous la forme :

$$\eta_1(z,x,u) = \sum_1^m \psi_i(z,u,x) \cdot \chi_i(z,x,u)$$

avec

$$\psi_i \in \text{Ker ev}_X \subset C_{z^0}^{0,\infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$$

$$\chi_i \in C_z^{0,\infty}(Z, C_G^\infty(X \times U, E)).$$

Puisque p commute avec la multiplication scalaire, on peut écrire :

$$\eta(z,x,u) = p(F(z,x,u))(\eta(z,x,u)) = \sum_1^m \psi_i(z,u,x) \cdot p(F(z,x,u)) [F(z,x,u), \chi_i(z,x,u)] .$$

Maintenant, si $g \in G$, on remarque que :

$$\begin{aligned} & p(F(z,gx,u)) [F(z,gx,u), \chi_i(z,gx,u)] = \\ & = p(g.F(z,x,u)) [g.F(z,x,u), g.\chi_i(z,x,u)] = \\ & = g.p(F(z,x,u)) [F(z,x,u), \chi_i(z,x,u)] . \end{aligned}$$

Ceci finit la démonstration du lemme 3.2.

Maintenant, on considère l'homomorphisme de R-algèbres :

$$C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G) \xleftarrow{F^*} C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times U)^G),$$

l'homomorphisme (canoniquement défini) de $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$ -modules :

$$B = \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(Z, \Gamma^\infty((TX) \times U)^G) \xrightarrow{\beta_F} \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G$$

de même que l'homomorphisme (canoniquement défini) de $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(Y \times U)^G)$ -modules :

$$A = \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(Z, \Gamma^\infty((TY) \times U)^G) \xrightarrow{\alpha_F} \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G.$$

LEMME 3.3. : " Si l'application :

$$\Gamma^\infty((TX) \times U)^G + \Gamma^\infty((TY) \times U)^G \xrightarrow{\beta_{F(z^0)} + \alpha_{F(z^0)}} \Gamma^\infty(F(z_0)^*TY)^G$$

est surjective, alors :

$$B+A \xrightarrow{\alpha_F + \beta_F} \Gamma^\infty(F(z_0)^*TY)^G$$

est surjective ."

Démonstration :

Notre hypothèse peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\text{Image } \alpha_F + \text{Image } \beta_F + \text{Ker Ev}(z^0) = \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G,$$

ou, d'après le lemme 3.2. :

$$\text{Image } \alpha_F + \text{Image } \beta_F + (\text{Ker ev}_X) \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G = \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G.$$

On peut considérer le $C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$ -module fini :

$$C = \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G / \text{Image } \beta_F,$$

et le morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_F} & \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)^G & \longrightarrow & C \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \alpha \end{array}$$

Notre hypothèse devient, ainsi :

$$\alpha(A) + \text{Ker ev}_X \cdot C = C.$$

D'après le théorème 1 du chapitre précédent, ceci implique $\alpha(A) = C$, et notre lemme est démontré.

2) DEMONSTRATION DE i) (Théorème de Stabilité équivariante).-

On va commencer par deux corollaires du lemme que l'on vient de démontrer .

COROLLAIRE 3.3.1. : " Soit

$$f \in C_G^\infty(X, Y)$$

une application infinitésimalement stable.

Soit V une variété C^∞ compacte quelconque (avec action triviale de G) et

$$h \in C^\infty(V, \Gamma^\infty(TX)^G \oplus \Gamma^\infty(TY)^G) .$$

On considère :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & \Gamma^\infty(TX)^G \oplus \Gamma^\infty(TY)^G \xrightarrow{\beta_f + \alpha_f} \Gamma^\infty(f^*TY)^G \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \tau(h) \end{array}$$

L'application τ :

$$C^\infty(V, \Gamma^\infty(TX)^G \oplus \Gamma^\infty(TY)^G) \xrightarrow{\tau} C^\infty(V, \Gamma^\infty(f^*TY)^G)$$

est surjective."

Démonstration :

Soit $z_2^0 \in V$ un point arbitraire et Z_2 le germe de V au point z_2^0 .

On considère la situation du paragraphe précédent, avec :

$Z_1 = \text{pt}$, $U = \text{pt}$, $F =$ l'application constante de valeur f : Donc $F(z_2) \equiv f$.

L'hypothèse que f est infinitésimalement stable, veut dire, exactement, que $\alpha_{F(z_2^0)} + \beta_{F(z_2^0)}$ est surjective. Donc, d'après le lemme 3.3 :

$$C_{z_2}^\infty(Z_2, \Gamma^\infty(TY)^G) + C_{z_2}^\infty(Z_2, \Gamma^\infty(TX)^G) \xrightarrow{\tau_{z_2^0}} C_{z_2}^\infty(Z_2, \Gamma^\infty(f^*TY)^G)$$

est, aussi, surjective. Ici $\tau_{z_2^0}$ est le germe de τ en z_2^0 . En appliquant une partition C^∞ de l'unité, sur V on trouve q.e.d. [On utilise ici le fait que

$$C^\infty(V) \subset C^\infty(V \times X)^G .] .$$

COROLLAIRE 3.3.2 : " Soit

$$f \in C_G^\infty(X, Y)$$

une application infinitésimalement stable , (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique qui est ou bien métrisable ou bien compact et (Z_2, z_2^0) le germe d'une variété C^∞ . On considère un

$$F \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_G^\infty(X \times I, Y))$$

(où G agit trivialement sur $I = [0, 1]$), tel que :

$$F(z^0)(x, t) \equiv f(x) .$$

Alors $\alpha_F + \beta_F$ est surjective."

Démonstration :

D'après le lemme précédent, (appliqué avec $V=I$), l'application :

$$C^\infty(I, \Gamma^\infty(TX)^G + \Gamma^\infty(TY)^G) \xrightarrow{\tau} C^\infty(I, \Gamma^\infty(f^*TY)^G)$$

est surjective. Mais, on a :

$$\tau = \alpha_{F(z^0)} + \beta_{F(z^0)} .$$

Donc, on peut réappliquer le lemme 3.3 et on trouve c.q.f.à.d.

Soit maintenant

$$(Z, z^0) \xrightarrow{\psi} (C_G^\infty(X, Y), f) ,$$

comme dans l'énoncé du théorème de stabilité.

En utilisant la "contractibilité locale" de $C_G^\infty(X, Y)$ on peut attacher à ψ une application :

$$F \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C_G^\infty(X \times I, Y))$$

telle que

$$F(z_1, z_2, x, 1) = \psi(z_1, z_2, x)$$

$$F(z_1, z_2, x, 0) = f(x) = F(z_1^0, z_2^0, x, t) .$$

A F on associe :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Gamma_{z^0}^{0, \infty} (F^*TY)^G .$$

[Le lecteur remarquera ici, que si

$$H \in C_G^{\infty}(X \times I, Y) = C^{\infty}(I, C_G^{\infty}(X, Y)),$$

alors, l'application naturelle :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \in \Gamma^{\infty}(H^*TY)$$

est, en fait, dans $\Gamma^{\infty}(H^*TY)^G$.] .

D'après le corollaire 3.3.2, il existe :

$$\eta \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, \Gamma^{\infty}((TX) \times I)^G) \text{ et}$$

$$\xi \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, \Gamma^{\infty}((TY) \times I)^G)$$

tels que :

$$\alpha_F(\xi) + \beta_F(\eta) = \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Soient H_1 et H_2 des

$$H_1 \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, \text{Diff}_G(X)) \quad (H_1(z^0) = \text{id})$$

$$H_2 \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, \text{Diff}_G(Y)) \quad (H_2(z^0) = \text{id})$$

tels que :

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} \circ H_1^{-1} = -\eta \quad \frac{\partial H_2}{\partial t} \circ H_2^{-1} = \xi$$

(voir le paragraphe 4) du chapitre 0) .

On a :

$$F(z, x, t) = H_2(z, x, t) \circ f(x) \circ H_1^{-1}(z, x, t) ,$$

ce qui finit la démonstration du point i) .

3) REMARQUES FINALES ET QUESTIONS OUVERTES :

Dans le contexte du paragraphe 9, chapitre O ci-dessus, et de [9] les raisons abstraites qui ont fait marcher la théorie ci-dessus sont que :

- a) $C_G^\infty(X, Y)$ est une $C^\infty(X)^G$ - variété faible.
- b) $\text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y)$ est un "sous-groupe de Lie" de $\text{Diff } X \times \text{Diff } Y$ ([9]).
- c) $T_{\text{id}}(\text{Diff}_G(X) \times \text{Diff}_G(Y))$ se casse d'une manière naturelle en un $C^\infty(X)^G$ et un $C^\infty(Y)^G$ -module.
- d) Certaines conditions de finitude (de modules sur les anneaux respectifs) sont vérifiées.

On pourrait chercher d'autres situations où cette machine abstraite fonctionne.

Je signale quelques questions ouvertes :

- I) Soit G un groupe de Lie compact qui opère orthogonalement sur R^n .

On considère l'application de Hilbert

$$R^n \xrightarrow{\rho} R^n/G \approx \rho R^n \hookrightarrow R^k.$$

Existe-t-il une section $i : \rho R^n \rightarrow R^n$ "suffisamment régulière" pour qu'elle induise un $i^* : C^\infty(R^n) \rightarrow C^\infty(R^k | \rho R^n)$?

Par exemple, si $G = S(n)$ (le groupe symétrique qui permute les coordonnées) on peut trouver un i continu et semi-algébrique (ce qui redémontre le théorème de Glaeser). Mais dans le cas général il y a des obstructions topologiques à la continuité de i).

- II) D'après Hilbert, si $x \in R^n$, $y \in R^k$, l'application

$$R[x]^G \xleftarrow{\rho^*} R[y]$$

est surjective, donc admet une section.

Dans quelle mesure peut-on rendre cette section "continue" ?

- III) Dans le contexte du théorème de stabilité, peut-on construire une application Ψ qui soit continue et faiblement différentiable. ?

IV) Soit \mathcal{E} la catégorie des E.V.T. localement convexes (pas nécessairement fréchetiques), et de leurs applications linéaires continues.

Pour Z espace topologique, étudier les "foncteurs dérivés" du foncteur :

$$\mathcal{E} \xrightarrow{C^0(Z, \dots)} \mathcal{E} .$$

V) Démontrer la version paramétrée du théorème de stabilité équivariante (voir [11]) .

VI) Dans quelle mesure peut-on remplacer, dans la démonstration du lemme 3.3, le théorème de préparation par les produits tensoriels topologiques ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BREDON.- "Introduction to compact transformation groups". Acad. Press (1972).
- [2] J. DIEUDONNE, J. CARREL.- "Invariant theory, old and new". Adv. in Math (1970). -
- [3] A. GROTHENDIECK.- "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Mem. Amer. Math. Soc. 16(1955).-
- [4] K. JÄNICH.- "Differenzierbare G - Mannigfaltigkeiten
Springer Lecture Notes 59(1968).-
- [5] B. MALGRANGE.- "Idéals of differentiable functions". Oxford (1966).-
- [6] J. MATHER. - "Stability of C^∞ mappings".
I. Ann. of Math. 87 (1968) pp. 89-104 .
II. Ann. of Math. 89(1969) pp.254-291.
III. Publ. Math. IHES 35(1968)pp.279-308. -
- [7] G.D. MOSTOW .- "Equivariant embeddings in euclidean space". Ann.of Math. 65 (1957) pp. 432-446.-
- [8] R. PALAIS. - "Embedding of compact differentiable transformation groups in orthogonal representations ". J. Math. Mech. 6 (1957) pp.673-678. -
- [9] V. POENARU. - "Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞ ". Publ. Math. IHES 38(1970) pp.93-124.-
- [10] V. POENARU. - "Analyse différentielle". Springer Lecture Notes 371 (1974). -
- [11] V. POENARU.- "Lectures on the singularities of mappings". CIME (1974) (à paraître).
- [12] V. POENARU. - "Déploiement des fonctions G -invariantes". (à paraître)
- [13] F. RONGA. - "Stabilité locale des applications équivariantes".-(à paraître)
- [14] G. SCHWARZ. - "Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group". (à paraître).-
- [15] F. TREVES .- "Topological vector spaces, distributions and kernels". Ac . Press(1967).-
- [16] H. WEYL.- "The classical groups". Princeton (1946).-