

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE



N° 113-75026

113-751

SUR UNE EQUATION D'EVOLUTION NON LINEAIRE LIEE

A LA THEORIE DE LA TURBULENCE

par P. PENEL

(Publication mathématique d'Orsay)

Je remercie tout particulièrement R.TEMAM et J.L. LIONS dont les enseignements m'ont donné goût à cette partie de l'Analyse mathématique et m'ont préparé à l'étude des problèmes de contrôle optimal et des problèmes non linéaires.

Qu'il me soit permis de ne pas séparer les résultats qui figurent dans ce travail, de l'amicale et fructueuse collaboration avec C.M.BRAUNER renforcée par les conseils et l'aide précieuse prodigués par R.TEMAM. Je leur exprime ici mon amitié et ma reconnaissance.

C'est en recherchant des contacts directs avec des laboratoires d'autres disciplines intéressées à la modélisation par des équations dérivées partielles, que C.M. BRAUNER et moi-même avons développé quelques études mathématiques sur ces modèles.

*Laboratoire de Biochimie Médicale (Hôpital Charles Nicolle de Rouen) ; Laboratoire de Technologie enzymatique (Université de Technologie de Compiègne) ; Groupe de Recherche sur la Turbulence et les Phénomènes Aléatoires (C.N.R.S.); en particulier l'équipe de l'Observatoire de Nice^{**} ; Equipe de mécanique statistique (C.N.R.S., Observatoire de Nice).*

*Aussi je voudrais remercier U.FRISCH^{***} et M.LESIEUR^{**} pour avoir inspiré l'objet de ce travail et pour les discussions fructueuses que nous avons eues.*

Je remercie bien vivement C.FOIAS pour avoir examiné en détail ce travail, et pour avoir contribué à améliorer des nouveaux résultats.

M.DEMAZURE m'a proposé le sujet de seconde thèse, aussi intéressant que vaste, bien que très éloigné de l'analyse des équations aux dérivées partielles, et je l'en remercie.

Mes remerciements vont enfin à Mesdames S.DAS CHAGAS, J.JARIEL et J.MAYNARD pour les soins qu'elles ont su apporter à la réalisation matérielle de ce document.

INTRODUCTION

A la suite des travaux de R. H. KRAICHNAN sur la turbulence (cf. par exemple [2]), U. FRISCH et M. LESIEUR introduisent et étudient en [1] un modèle de turbulence dit modèle MRCM (Markovian Random Coupling Model). Le MRCM est appliqué aux équations de Navier-Stokes décrivant le comportement de nombreux écoulements et applicable à de nombreux autres problèmes d'évolution non linéaire de la Physique mathématique.

Par l'introduction adéquate de coefficients de couplage aléatoires dans les termes non linéaires, on cherche à préserver la plupart des propriétés structurelles des équations (propriétés d'invariance, de conservation, ...) et à rendre le problème exactement "soluble" au niveau des moments d'ordre deux. Ainsi, la fonction de covariance des vitesses est la solution d'une équation maîtresse qui se présente sous la forme d'une équation d'évolution d'un type non classique.

Nous nous proposons d'étudier cette équation maîtresse dans le cas unidimensionnel où elle est associée au modèle simplifié de l'équation de Burgers:

$$(1) \quad u_t = L(u)$$

Les fonctions $u = u(t,x)$ étant définies par $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, et L étant l'opérateur aux dérivées partielles non linéaire .

$$(2) \quad L(u) = [u(.,0) - u]_{xx}^2$$

Il convient de noter qu'alors $u(.,0)$ joue le rôle de l'énergie et est une des non linéarités caractéristiques de cette équation.

Associé aux équations de Navier-Stokes, dans le cas tridimensionnel, l'équation maîtresse ne se prête pas au même formalisme explicite (cf. [4]).

Des résultats d'existence et de régularité de la solution de (1) (2) sont obtenus dans un cadre fonctionnel naturel que nous allons préciser et qui ne semble pas devoir être le cadre habituel.

Lorsque l'opérateur L est du type

$$(3) \quad L(u) = [f(u)]_x ,$$

l'étude de l'équation (1) correspondante relève de la classique méthode de viscosité: On introduit un terme de viscosité νu_{xx} et on fait tendre ν vers 0. On définit donc des solutions faibles généralisées, ainsi dans E. HOPF [5] , O.A. OLEINIK [6] [7], S.N. KRUŽKOV [8] ... En l'absence de phénomène de dissipation (ou de viscosité), même avec une condition initiale très régulière, il n'est pas possible de trouver (pour tout $t \geq 0$) des solutions régulières: le problème admet en effet des solutions pour lesquelles se développent des singularités.

Nous nous intéressons ici à la recherche des solutions généralisées pour l'équation (1) (2), vérifiant en outre les conditions aux limites et initiales.

$$(4) \quad \begin{cases} u(.,x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \longrightarrow \pm \infty \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

Il est intéressant de réécrire l'équation maîtresse avec viscosité sous la forme

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} (t,x) - \frac{\partial}{\partial x} \{ (\nu + 2(u(t,0) - u(t,x))) \frac{\partial u}{\partial x} (t,x) \} = 0$$

et il apparaît alors que cette équation est parabolique pour $v \geq 0$ tant que

$$u(t,0) \geq u(t,x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} .$$

Cette propriété est en fait liée au caractère physique intrinsèque de l'équation: La fonction u représente une covariance, elle est donc pour tout t une fonction de type positif et il est bien connu que telles fonctions atteignent leur maximum à l'origine. Nous établirons tout d'abord que le problème aux limites (5) (4) est un problème bien posé dans le cône des fonctions de type positif.

C'est l'objet du chapitre I, où nous construisons une solution approchée en utilisant une méthode de Galerkin pour l'équation transformée de Fourier de (5).

Le chapitre III est consacré à établir des résultats de différentiabilité de la solution de (4) (5) par rapport à x . Nous procédons par dérivation répétée des équations et nous en déduisons des résultats de régularité. La justification rigoureuse tient à une régularisation parabolique de l'équation (5): Nous considérons une équation maîtresse perturbée par l'introduction d'un terme d'ordre 4, $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^4}$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit) et nous étudions le comportement de ses solutions de type positif lorsque ε tend vers 0.

Les points abordés dans les autres chapitres sont l'existence et la régularité des solutions (4) (5) à viscosité nulle $v = 0$.

Au chapitre II, l'étude du comportement des solutions "visqueuses" lorsque v tend vers 0, permet de donner un résultat d'existence. Le passage à la limite est fondé sur un théorème de compacité dû à J.A. DUBINSKII [15].

Il est alors naturel de poser la question de l'existence de solutions plus régulières. La réponse est négative au chapitre IV, l'équation maîtresse

ne possède pas de solutions de classe C^∞ ni même C^4 , plus précisément nous établissons que ses solutions sont nécessairement irrégulières après un temps fini T_* : c'est la notion d'existence d'un seuil de singularité. Les singularités apparaissent alors et se développent en $x = 0$, les solutions ne sont plus différentiables par rapport à x et $u_{xx}(t, \cdot)$ devient infini. Le temps T_* est déterminé à partir des conditions initiales.

Les solutions sont en fait de classe C^∞ sur l'intervalle de temps $(0, T_*)$ et il y a conservation de l'énergie — Conservation de l'énergie donc pour les solutions différentiables —. Ensuite l'énergie n'est plus conservée: Du point de vue du modèle de turbulence, c'est la notion de "catastrophe énergétique" liée à l'apparition effective de la turbulence. Nous donnons une équation suivant $x = 0$ permettant de mieux cerner la propriété de discontinuité et apportant une précision supplémentaire relative à la dissipation d'énergie.

Au chapitre V enfin, nous étudions la régularité des solutions après la "catastrophe" et nous obtenons qu'en dehors de $x = 0$, elles restent très régulières en espace.

Nous donnons d'autre part une réponse partielle au problème de l'unicité: L'équation maîtresse admet une solution unique sous une hypothèse de type conservation de l'énergie et une hypothèse de régularité relative à $u_{xx}(t, \cdot)$. Ces hypothèses, naturellement, sont satisfaites sur $[0, T_*[\times \mathbb{R}$ et il est possible de donner alors un développement asymptotique de la solution (chapitre IV).

Des essais numériques ont permis de rendre compte avec une bonne précision de ces notions de seuil de singularité et de "catastrophe énergétique".

Le plan sera le suivant :

INTRODUCTION

CHAPITRE I. - Résultats d'existence à viscosité non nulle ($\nu > 0$ fixée) .

I.1 - Théorème d'existence .

I.2 - Fonctions de type positif et espaces $\mathcal{S}'H^p(\mathbb{R})$.

I.3 - Mise en oeuvre de la méthode de Galerkin .

I.4 - Estimations à priori .

I.5 - Passage à la limite .

I.6 - Remarque sur la dépendance en ν et principe de maximum .

CHAPITRE II. - Résultats d'existence à viscosité nulle ($\nu = 0$) .

II.1 - Résultats d'existence et estimations à priori ($\nu \rightarrow 0$) .

II.2 - Passage à la limite .

CHAPITRE III. - Unicité et régularité à viscosité $\nu > 0$ fixée .

III.1 - Premiers résultats de régularité ($\nu > 0$). Théorème d'existence et unicité .

III.2 - Unicité à viscosité $\nu > 0$ fixée .

III.3 - Régularité C^∞ à viscosité $\nu > 0$ fixée .

CHAPITRE IV. - Seuil de singularité et "catastrophe énergétique" à viscosité $\nu=0$

IV.1 - Non existence de solutions C^∞ sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

IV.2 - Premiers résultats de régularité à $\nu = 0$.

IV.3 - Discontinuité en $x = 0$.

IV.4 - Seuil de singularité . "Catastrophe énergétique" .

IV.5 - Démonstration du théorème IV.4 .

IV.6 - Unicité et développement asymptotique sur $(0, T_*) \times \mathbb{R}$.

CHAPITRE V. - Résultats de régularité globaux à viscosité $\nu = 0$.

V.1 - Nouveaux résultats globaux à $\nu = 0$.

V.2 - Régularité C^∞ en $x \neq 0$.

ANNEXE 1. - Illustration numérique .

ANNEXE 2. - Commentaires .

APPENDICE - Le modèle retenu par U. FRISCH et M. LESIEUR

I, 1 THEOREME D'EXISTENCE

A viscosité $\nu > 0$ fixée, $u = u_\nu = u_\nu(t, x)$ est donc défini sur $(0, \infty[\times \mathbb{R}$ par

$$(I.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\nu + 2(u(t, 0) - u(t, x)) \right] \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right\} = 0$$

$$(I.2) \quad u(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |x| \rightarrow \infty$$

$$(I.3) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

Théorème I.1 Pour tout $\nu > 0$ fixé, pour u_0 donné avec

$$(I.4) \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$(I.5) \quad u_0 \gg 0 \text{ c'est-à-dire } \hat{u}_0 \geq 0^{(1)},$$

Il existe u solution du problème (I.1)(I.2)(I.3) telle que :

$$(I.6) \quad u \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}),$$

$$(I.7) \quad u(t, \cdot) \gg 0, \quad \hat{u}(t, \cdot) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Si on suppose en outre que :

$$(I.8) \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

Alors :

$$(I.9) \quad u \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$$

et

$$(I.10) \quad \|u\|_{L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

(1) cf. § I.2

Certains caractères fondamentaux de l'équation considérée étant liés à la transformée de Fourier de u (en x , à t fixé), il est clair que l'équation transformée de Fourier de (I.1) sera intéressante à considérer. En fait la méthode que nous employons pour démontrer l'existence est la suivante : construction d'une solution approchée en utilisant une méthode de Galerkin pour l'équation transformée de Fourier de (I.1) et passage à la limite par compacité.

Dans ce qui suit nous commençons par quelques remarques sur les espaces $\mathcal{F}H^P(\mathbb{R})$, nous explicitons la transformée de Fourier de (I.1) et nous mettons ensuite en oeuvre la méthode de Galerkin.

I.2 FONCTIONS DE TYPE POSITIF ET ESPACES $\mathcal{F}H^P(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'une fonction σ est de type positif, notée $\sigma \gg 0$, si la forme quadratique

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N \longrightarrow \sum_{i,j=1}^N \sigma(x_i - x_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j$$

est semi-définie positive pour tout ensemble fini de points x_1, \dots, x_N dans \mathbb{R} .

Conséquences immédiates de la définition, on a les propriétés :

$$\overline{\sigma(-x)} = \sigma(x)$$

$\sigma(0)$ est réel positif

$$|\sigma(x)| \leq \sigma(0) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. (N=2, x_1=0, x_2=x, \lambda_1=1, \lambda_2=\lambda)$$

Ces fonctions sont bien connues en Analyse mathématique et ont fait l'objet de nombreuses études (cf. par exemple L.H. LOOMIS [1], BOCHNER [2])⁽¹⁾

Ainsi en particulier, les fonctions $f_\rho(x) = e^{-|x|^\rho}$ sont de type positif pour tout ρ tel que $0 < \rho \leq 2$ (la propriété n'étant plus vraie pour $\rho > 2$).

Plus généralement, lorsque σ est une fonction continue, si $\sigma(0)=0$ et $\sigma \gg 0$, alors nécessairement σ est identiquement nulle ; si $\sigma(0) = \sigma(x_0)$ et $\sigma \gg 0$, alors nécessairement σ est périodique de période x_0 .

D'autre part, en vertu du théorème de Bochner, une fonction $\sigma \gg 0$ peut être caractérisée par le fait que sa transformée de Fourier, notée $\hat{\sigma}$, est positive ou nulle.

(1) cf. aussi L. SCHWARTZ [13] pour des distributions de type positif.

En vue de l'étude du problème (I.1) (I.2) (I.3), nous introduisons donc l'espace $H^1(\mathbb{R})$ et son image, $\mathcal{F} H^1(\mathbb{R})$, par transformation de Fourier, qui sera l'espace naturel de travail (à t fixé). Nous utiliserons aussi parfois les espaces $H^p(\mathbb{R})$, p entier ≥ 0 , et leurs images de Fourier $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$. On rappelle que $H^p(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de carré sommable, ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq p$. On notera $u = u(x)$, $v = v(x)$ des fonctions appartenant par exemple à $L^2(\mathbb{R}_x)$ et $\phi = \phi(\xi)$ ou $\psi = \psi(\xi)$ des fonctions appartenant à l'espace des transformées de Fourier $L^2(\mathbb{R}_\xi)$. Ainsi l'espace $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions complexes ψ ,

$$(I.11) \quad \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}_\xi) \mid \overline{\psi(-\xi)} = \psi(\xi), \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^p |\psi(\xi)|^2 d\xi < +\infty \}.$$

Il est de Hilbert pour la norme :

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^p |\psi(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2}.$$

L'espace $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ contient d'après (I.11) toutes les fonctions étagées à support compact vérifiant $\overline{\psi(-\xi)} = \psi(\xi)$. Nous verrons que ces fonctions forment un sous-espace dense de $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ (cf. Lemme I.1), et nous mettrons en oeuvre la méthode de Galerkin, dans des sous-espaces de $\mathcal{F} H^1(\mathbb{R})$, formés de telles fonctions (cf. § I.3).

De manière plus précise nous introduisons les espaces ϕ_h suivants :

Soit N un entier > 0 , $h = 2^{-N}$ et soit ϕ_h le sous-espace de $\mathcal{F} H^1(\mathbb{R})$ formé des fonctions étagées, constantes sur des intervalles de longueur h centrés aux points jh , $|j| \leq M(h) = \frac{1}{2h} = 2^{2N-1}$ (1), et nulles en dehors de ces intervalles.

Désignant par χ la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, on définit ϕ_h comme l'espace des fonctions ϕ telles que :

$$(I.12) \quad \phi(\xi) = \sum_{j=-M(h)}^{M(h)} \phi_j \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right), \quad \phi_j = \phi(jh) \in \mathbb{C}$$

$$(I.13) \quad \overline{\phi(-\xi)} = \phi(\xi) \quad \forall \xi \quad \text{c'est-à-dire} \quad \phi_{-j} = \overline{\phi_j}.$$

Nous avons :

(1) On peut remplacer $M(h)$ par n'importe quel autre entier tel que $h M(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Lemme I.1

Pour tout entier $p \geq 0$ fixé ,

$$(I.14) \quad \bigcup_h \phi_h \text{ est dense dans } \mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$$

$$(I.15) \quad \mathcal{F}^{-1}(\bigcup_h \phi_h) \text{ est dense dans } H^p(\mathbb{R}) .$$

Démonstration

Il suffit de démontrer (I.14).

Pour tout $\psi \in \mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$, et pour tout h donné, on considère la fonction $\psi_h \in \phi_h$ définie par :

$$(I.16) \quad \psi_h(jh) = \frac{1}{h} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} \psi(\xi) d\xi \quad , \quad |j| \leq M(h) .$$

On vérifie que $\overline{\psi_h(-jh)} = \psi_h(jh)$. Ainsi l'application $\psi \rightarrow \psi_h$ est linéaire de $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ dans ϕ_h et on vérifie par un calcul élémentaire que :

$$(I.17) \quad \|\psi_h\|_{\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})} \leq C(p) \|\psi\|_{\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})} .$$

Le résultat sera établi si nous montrons que pour tout $\psi \in \mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$,

$$(I.18) \quad \psi_h \longrightarrow \psi \text{ dans } \mathcal{F} H^p(\mathbb{R}) \text{ , lorsque } h \rightarrow 0 .$$

D'après (I.17) , il suffit de démontrer (I.18) pour tous les ψ d'un sous-espace dense de $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$, donc pour $\psi \in C^\infty$ à support compact en vertu du lemme I.2 ci-après. Et pour de telles fonctions, on vérifie très aisément que:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^p |\psi_h(\xi) - \psi(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) .$$

Lemme I.2

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi) \text{ est dense dans } \mathcal{F} H^p(\mathbb{R}) .$$

Démonstration

Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$ est dense dans $H^p(\mathbb{R})$, par transformation de Fourier, les fonctions C^∞ sont denses dans $\mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$. On se ramène ensuite aux fonctions

à support compact par troncature :

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi)$, $0 \leq \theta \leq 1$, telle que :

$$\theta = 1 \text{ pour } |\xi| \leq 1 \text{ et } \theta = 0 \text{ pour } |\xi| \geq 2 ;$$

On vérifie que pour tout $\psi \in \mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\theta(\varepsilon \cdot) \psi(\cdot) \in \mathcal{F} H^p(\mathbb{R})$ et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(I.19) \quad \theta(\varepsilon \cdot) \psi(\cdot) \longrightarrow \psi \text{ dans } \mathcal{F} H^p(\mathbb{R}) .$$

I. 3 MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE GALERKIN

Soit $u = u(t, x)$ une solution de (I.1) et soit $\phi = \phi(t, \xi)$ la transformée de Fourier en x de u .

L'équation (I.1) s'écrit sous la forme :

$$(I.20) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, u) - (v + 2u(t, 0)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(u(t, x))^2] = 0$$

et devient après transformation de Fourier (on notera $u = \mathcal{F}^{-1} \phi = \tilde{\phi}$)

$$(I.21) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \xi) + 4 \pi^2 \xi^2 (v + 2 \tilde{\phi}(t, 0)) \phi(t, \xi) = 4 \pi^2 \xi^2 \phi * \phi(t, \xi) .$$

Pour ϕ et ψ donnés, on définit, lorsque ces intégrales ont un sens,

$$(I.22) \quad \begin{aligned} (\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi \\ \alpha(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \psi(\xi) \overline{\phi(\xi)} d\xi \\ \beta(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \phi * \phi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

Dans les espaces ϕ_h précédents, nous allons chercher une approximation de $\hat{u}(t, \cdot) = \phi(t, \xi)$ sous la forme :

$$\phi_h(t, \xi) = \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \phi_{jh}(t) \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right)$$

Les fonctions $\phi_h : (0, T_h) \longrightarrow \phi_h$ seront solutions de :

$$(I.23) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\phi_h(t), \psi_h) + (v + 2 \tilde{\phi}_h(t, 0)) \alpha(\phi_h(t), \psi_h) = \beta(\phi_h(t), \psi_h) \quad \forall \psi_h \in \phi_h$$

$$\phi_h(0) \in \phi_h \text{ donné}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\phi_h(t), \psi_h) &= \frac{4\pi^2}{h} \phi_{jh}(t) \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} \xi^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 h^2 (j^2 + \frac{1}{12}) \phi_{jh}(t) \end{aligned}$$

$$\beta(\phi_h(t), \psi_h) = \sum_{k, \ell=-M(h)}^{+M(h)} \frac{4\pi^2}{h} \phi_{kh}(t) \phi_{\ell h}(t) \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} \chi_{kh} * \chi_{\ell h}(\xi) \xi^2 d\xi$$

$$\text{où } \chi_{kh}(\xi) = \chi\left(\frac{\xi}{h} - k\right)$$

Mais :

$$\begin{aligned} \chi_{kh} * \chi_{\ell h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi\left(\frac{\xi-\eta}{h} - k\right) \chi\left(\frac{\eta}{h} - \ell\right) d\eta \\ &= h \int_{\mathbb{R}} \chi\left(\frac{\xi}{h} - k - \ell - \eta\right) \chi(\eta) d\eta \\ &= h \chi * \chi\left(\frac{\xi}{h} - k - \ell\right) \end{aligned}$$

et le résultat suit.

Pour démontrer l'existence d'une solution de (I.25), il suffit de montrer que l'application linéaire :

$$\psi_h \longrightarrow \tilde{\psi}_h(o) = (\mathcal{F}^{-1} \psi_h)(o)$$

est continue de \mathcal{O}_h dans \mathbb{C} , et cela est tout à fait élémentaire.

Pour montrer que (I.25) admet une solution réelle positive, on applique le raisonnement qui précède au système

$$\begin{aligned} \text{(I.25 bis)} \quad \frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) + 4\pi^2 h^2 (j^2 + \frac{1}{12}) (\nu + 2|\tilde{\phi}_h(t, o)|) \phi_{jh}(t) \\ = 4\pi^2 \sum_{k, \ell=-M(h)}^{+M(h)} \theta_{jkl} |\phi_{kh}(t)| \cdot |\phi_{\ell h}(t)| \end{aligned}$$

avec la même condition initiale.

Or toute solution de (I.25 bis) est réelle positive. Il est facile de voir qu'elle est nécessairement réelle. Pour vérifier qu'elle est positive, nous remarquons que les θ_{jkl} sont positifs et que :

$$\frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) + \rho_h(t) \phi_{jh}(t) \geq 0$$

où

$$\rho_h(t) = 4\pi^2 h^2 (j^2 + \frac{1}{12}) (\nu + 2|\tilde{\phi}_h(t, o)|) \geq 0$$

ceci implique

$$\phi_{jh}(t) \geq \phi_{jh}(o) \exp\left\{-\int_0^t \rho_h(\sigma) d\sigma\right\}$$

donc ≥ 0 .

Ayant observé qu'une solution de (I.25 bis) est réelle positive, nous affirmons que c'est aussi une solution de (I.25). En effet, les seconds membres sont identiques et dans le membre de gauche on a bien $|\tilde{\phi}_h(t,0)| = \tilde{\phi}_h(t,0)$: $\tilde{\phi}_h(t,.)$ est de type positif et $\tilde{\phi}_h(t,.) \in H^p(\mathbb{R})$, $\forall p \geq 0$, en particulier s'annule à l'infini en sorte que :

$$\tilde{\phi}_h(t,0) = \text{Sup } \tilde{\phi}_h(t,.) \geq 0.$$

I. 4 ESTIMATIONS A PRIORI

Nous allons établir à présent les estimations à priori qui nous permettront de montrer que $T_h = +\infty$ et qui permettront ensuite le passage à la limite $h \rightarrow 0$ (§ I.5).

Au préalable, nous donnons une autre forme de l'équation du système (I.23) :

Lemme I.4

Avec les notations :

$$\begin{aligned} u_h(t,.) &= \tilde{\phi}_h(t,.) = \mathcal{F}^{-1} \phi_h(t,.) \\ v_h(.) &= \tilde{\phi}_h(.) \end{aligned}$$

et

$$(I.28) \quad a(u_h(t), v_h) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u_h(t)}{\partial x} \cdot \frac{dv_h}{dx} dx$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} (I.29) \quad \frac{\partial}{\partial t}(u_h(t), v_h) + (v + 2 u_h(t,0)) a(u_h(t), v_h) \\ = 2 \int_{\mathbb{R}} u_h(t,x) \frac{\partial u_h(t,x)}{\partial x} \frac{dv_h(x)}{dx} dx \end{aligned}$$

Démonstration

Dans (I.23), il suffit de transformer l'équation à l'aide du théorème de Parseval.

En effet, nous avons successivement ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \phi_h(t), \psi_h\right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_h(t,\xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} u_h(t,x) v_h(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\phi_h(t), \psi_h) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \phi_h(t, \xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx \\
 \beta(\phi_h(t), \psi_h) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \phi_h * \phi_h(t, \xi) \overline{\psi_h(\xi)} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (2i\pi\xi \phi_h * \phi_h(t, \xi) \overline{(2i\pi\xi \psi_h(\xi))}) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \{ (u_h(t, x))^2 \} \frac{d}{dx} v_h(x) dx \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}} u_h(t, x) \frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \frac{dv_h}{dx}(x) dx
 \end{aligned}$$

Nous établissons maintenant les majorations a priori .

Lemme I.5

On a

(i) $T_h = +\infty$

et lorsque $h \rightarrow 0$

(ii) Les fonctions ϕ_h demeurent dans des ensembles bornés de

$$L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}_\xi)) \text{ et } L^2(]0, \infty[; \mathcal{F}H^1(\mathbb{R})).$$

(iii) Les fonctions $u_h = \psi_h$ demeurent dans des ensembles bornés de

$$L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et } L^2_{loc}(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R})).$$

Démonstration

Il convient de noter que (i) résulte immédiatement de (iii).

Soit d'abord t fixé, $0 < t < T_h$, nous prenons $v_h = u_h(t)$ dans (I.29), ce qui correspond à $\psi_h = \phi_h(t)$ dans (I.23) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_h(t)|^2 + v a(u_h(t), u_h(t)) + 2 \int_{\mathbb{R}} (u_h(t, 0) - u_h(t, x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = 0$$

Utilisant le fait que $u_h(t, \cdot) >> 0$, nous avons

$$u_h(t, 0) \geq u_h(t, x) \quad \forall x,$$

et nous obtenons alors en particulier

$$|u_h(t)|^2 \leq |u_h(0)|^2$$

Ce qui montre nécessairement $T_h = +\infty$. Intégrons maintenant de 0 à s (s > 0 quelconque) :

$$|u_h(s)|^2 + 2\nu \int_0^s a(u_h(t), u_h(t)) dt \leq |u_h(0)|^2$$

Le lemme I.1, (I.24) et le théorème de Parseval justifiant l'inégalité $|u_h(0)|^2 = |\hat{u}_{oh}|^2 \leq |\hat{u}_o|^2$, nous obtenons finalement

$$(I.30) \quad |u_h(s)|^2 \leq |u_o|^2 \quad \forall s > 0$$

$$(I.31) \quad \int_0^\infty \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} |u_o|^2$$

Le lemme est établi.

Il nous manque maintenant une estimation à priori sur la dérivée par rapport à t de u_h , ce qui est l'objet du lemme:

Lemme I.6

Lorsque $h \rightarrow 0$,

$\frac{\partial u_h}{\partial t}$ demeure dans un borné de $L_{loc}^{4/3} (]0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$

Démonstration

Soit $T > 0$ quelconque,

Nous considérons
$$I_h = \int_0^T \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(t) \right\|_{H^{-1}(\mathbb{R})}^{4/3} dt$$

Via la transformation de Fourier et parce que

$$\phi_h(t, \xi) = \hat{u}_h(t, \cdot) = \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \phi_{jh}(t) \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right),$$
 nous avons

$$\begin{aligned} I_h &= \int_0^T \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial t}(t, \xi) \right)^2 \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \right\}^{2/3} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \left(\frac{d\phi_{jh}}{dt}(t) \right)^2 \left(\int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \right) \right\}^{2/3} dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ \sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \gamma_j(h) \left(\frac{d\phi_{jh}}{dt}(t) \right)^2 \right\}^{2/3} dt \end{aligned}$$

où
$$\gamma_j(h) = \frac{h}{1 + (j - 1/2)^2 h^2}.$$

La recherche d'une équation "explicite" donnant $\frac{d\phi_{jh}}{dt}(t)$ en (I.25)

(la démonstration du lemme I.3) fut menée à bien par choix de

$$\psi_{jh}(\xi) = \frac{1}{h} \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right)$$

dans

(I.32)
$$\frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) = -(\nu + 2 u_h(t, 0)) \alpha(\phi_h(t), \psi_{jh}) + \beta(\phi_h(t), \psi_{jh})$$

Les formes α et β sont données en (I.22) et calculées dans la démonstration du lemme I.3. Procédant ici un peu différemment, nous avons d'après l'inégalité de Schwarz,

$$| \alpha(\phi_h(t), \psi_{jh}) |^2 \leq 4\pi^2 h (j^2 + \frac{1}{12}) \cdot \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} 4\pi^2 \xi^2 [\phi_h(t, \xi)]^2 d\xi$$

$$| \beta(\phi_h(t), \psi_{jh}) |^2 < 4\pi^2 h (j^2 + \frac{1}{12}) \cdot \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} 4\pi^2 \xi^2 [\phi_h * \phi_h(t, \xi)]^2 d\xi$$

Poursuivant le travail de majoration de I_h , nous regroupons les inégalités précédentes d'après (I.32), alors

(une constante sera notée indifféremment C)

$$\sum_{j=-M(h)}^{+M(h)} \gamma_j(h) \left(\frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) \right)^2$$

$$\leq C (1 + |u_h(t,0)|^2) \cdot \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 [\phi_h(t, \xi)]^2 d\xi$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 |\phi_h * \phi_h(t, \xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C (1 + |u_h(t,0)|^2) \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot u_h^2(t, x) \right)^2 dx$$

Il faut ensuite utiliser la majoration classique

$$(I.33) \quad |v|_{\mathcal{E}(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \quad |v|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \quad \left| \frac{dv}{dx} \right|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R})$$

et le fait que $u_h(t, \cdot) > 0$, c'est-à-dire $u_h(t,0) \geq u_h(t,x) \quad \forall x$.

$$I_h \leq \int_0^T \left\{ \sum_j \gamma_j(h) \left(\frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) \right)^2 \right\}^{2/3} dt$$

$$\leq \int_0^T \left\{ C \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 + C \left(|u_h(t)|^{1/2} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{1/2} \right)^2 \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 \right\}^{2/3} dt$$

$$\leq C \int_0^T \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{4/3} dt + C \int_0^T |u_h(t)|^{2/3} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^T \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^{4/3} dt + C \int_0^T |u_h(t)|^{2/3} \cdot \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 dt$$

Nous terminons avec le lemme I.5 (iii):

$I_h \leq C = C(T)$ indépendante de h .

I.5 PASSAGE A LA LIMITE

Il existe une suite $h' \rightarrow 0$,

Il existe $u \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$ avec $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$

tels que:

$$(I.34) \quad \begin{cases} u_{h'} \rightharpoonup u & \text{dans } L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ faible étoile} \\ \frac{\partial u_{h'}}{\partial x} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x} & \text{dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ faible} \end{cases}$$

En raison du lemme I.6 et d'un théorème de compacité d'Aubin, nous avons des propriétés de convergence forte de $u_{h'}$ vers u :

Nous savons que l'injection de $H^1([-M, +M])$ dans $H^s([-M, +M])$ est compacte pour tout $M > 0$, pour tout $s, 0 < s < 1$; alors nous avons par exemple

$$(I.35) \quad u_{h'} \longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T]; H^{3/4}([-M, +M])) \text{ fort } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

Or $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $C^0(\mathbb{R})$ si $s > 1/2$,

Donc

$$(I.36) \quad u_{h'} \longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T]; C^0([-M, +M])) \text{ fort } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

En particulier,

$$(I.37) \quad u_{h'}(\cdot, 0) \longrightarrow u(\cdot, 0) \text{ dans } L^2_{loc}([0, \infty[) \text{ fort}.$$

Comme d'habitude, partant des équations approchées (I.29), les convergences faibles données en (I.34) suffisent pour justifier le passage à la limite dans les termes linéaires, et les convergences fortes (I.36) (I.37) nous permettent de passer à la limite dans les termes non linéaires.

Plus précisément, soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi = \hat{v}$. Nous savons trouver pour tout h' des éléments $\psi_{h'} \in \mathcal{O}_{h'}$, tels que $\psi_{h'} \longrightarrow \psi$ dans $\mathcal{F}H^1(\mathbb{R})$ lorsque $h' \rightarrow 0$.

$$\text{On pose } v_{h'} = \mathcal{F}^{-1} \psi_{h'} = \hat{\psi}_{h'}$$

et par conséquent $v_{h'} \longrightarrow v$ dans $H^1(\mathbb{R})$

Avec ce choix de $v_{h'}$, nous déduisons de (I.34),

$$(I.38) \quad \begin{cases} (u_{h'}(t), v_{h'}) \longrightarrow (u(t), v) \\ a(u_{h'}(t), v_{h'}) \longrightarrow a(u(t), v) \end{cases}$$

Alors, grâce à (I.37),

$$(I.39) \quad u_{h'}(\cdot, 0) \text{ a } (u_{h'}(\cdot), v_{h'}) \longrightarrow u(\cdot, 0) \text{ a } (u(\cdot), v) \\ \text{dans } L^1_{loc}(\cdot, \infty[) \text{ faible}$$

et donc en particulier au sens des distributions sur $]0, \infty[$.

Il reste à justifier le passage à la limite dans les termes non linéaires du second membre de (I.29) :

Lemme I.7

Lorsque $h' \rightarrow 0$,

$$(I.40) \quad \int_{\mathbb{R}} u_{h'}(\cdot, x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u(\cdot, x) \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, x) \frac{dv}{dx}(x) dx \\ \text{au sens des distributions sur }]0, \infty[.$$

Démonstration

Le choix des fonctions $v_{h'}$, n'en fait pas nécessairement des fonctions à support compact, toutefois $\text{supp}(v) \subset [-M, +M]$, ($M > 0$ pour fixer les idées).

Nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x| \geq M} u_{h'}(t,x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(t,x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \right| \\ & \leq |u_{h'}(t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left| \frac{\partial u_{h'}}{\partial x} \right|_{L^2(\mathbb{R})} \left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^2(-M, +M)} \\ & \leq c(t) \left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^2(-M, +M)} \end{aligned}$$

La fonction $c(t)$ est localement bornée en t (cf. (iii) Lemme I.5)

étant donné que $v_{h'} \rightarrow v$ dans $H^1(\mathbb{R})$, nous avons

$$\left| \frac{dv_{h'}}{dx} \right|_{L^2(-M, +M)} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } h' \rightarrow 0$$

D'autre part,

$$\int_{|x| \leq M} u_{h'}(t,x) \frac{\partial u_{h'}}{\partial x}(t,x) \frac{dv_{h'}}{dx}(x) dx \longrightarrow \int_{|x| \leq M} u(t,x) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

(au sens des distributions). Cela résulte immédiatement des résultats de convergence (I.34) (I.36).

Fin de la démonstration du Théorème d'existence I.1

A la limite, u vérifie donc

$$(I.41) \quad u \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2_{loc}(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$\begin{aligned} (I.42) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (u(t), v) + (v + 2u(t,0)) a(u(t), v) \\ & = 2 \int_{\mathbb{R}} u(t,x) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \frac{dv}{dx}(x) dx = 0 \end{aligned}$$

$\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et par continuité, $\forall v \in H^1(\mathbb{R})$. ($\forall t > 0$)

ou encore l'équation (I.1).

La fonction $u(t, \cdot)$ est du type positif, puisqu'il en est ainsi des fonctions $u_h(t, \cdot) \forall t > 0$; d'où (I.7).

Nous avons également

$$(I.43) \quad u_h(0, \cdot) \longrightarrow u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \text{ dans } H^{-1}(\mathbb{R}) \text{ faible.}$$

Cela résulte aisément du lemme I.6 et du choix de ϕ_h en (I.23) (I.24) et cela termine la démonstration de l'existence d'une solution lorsque $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

I.6 REMARQUE SUR LA DEPENDANCE EN v et PRINCIPE DU MAXIMUM.

Il est intéressant pour la suite (cf. § II.1) de remarquer que les fonctions u_h , et donc la fonction u , vérifient des estimations indépendantes de v . En effet au cours de la démonstration du lemme I.5, nous avons,

$$1/2 \frac{d}{dt} |u_h(t)|^2 + v \left| \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \right|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}} (u_h(t,0) - u_h(t,x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx = 0$$

d'où

$$(I.44) \quad \begin{cases} |u_h(t)|^2 \leq |u_0|^2 \\ v \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right\|_{L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})} \leq 1/2 |u_0|^2 \\ 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u_h(t,0) - u_h(t,x)) \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx dt \leq 1/2 |u_0|^2 \end{cases}$$

Des inégalités analogues pour u sont obtenues par un passage à la limite utilisant la semi-continuité inférieure:

$$(I.45) \quad \begin{cases} |u(t)|^2 \leq |u_0|^2 \\ v \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})} \leq 1/2 |u_0|^2 \\ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(t,0) - u(t,x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx dt \leq 1/4 |u_0|^2 \end{cases}$$

Principe du maximum

Si on suppose en outre que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la démonstration de (I.9) (I.10) repose sur le principe du maximum.

On pose

$$(I.46) \quad \alpha_v(u)(t,x) = v + 2(u(t,0) - u(t,x)) \geq v > 0$$

Sachant que $u \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$

il vient (cf. (I.33)) ,

$$\int_0^T |u(t)|_{C^0(\mathbb{R})}^4 dt \leq \sqrt{2} \int_0^T |u(t)|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt < +\infty, \forall T > 0.$$

Ainsi,

$$(I.47) \quad \alpha_v(u) \in L^4([0, T]; C^0(\mathbb{R})), \forall T > 0.$$

Considérons l'équation (I.1) qui s'écrit simplement

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_v \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \text{ comme une équation linéaire en } u: \text{ Elle}$$

possède une solution unique u qui vérifie les conditions (I.2) (I.3) et

$$(I.48) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(t,x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx dt < +\infty$$

Cette solution est limite des fonctions u_η solutions de

$$(I.49) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\eta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right) = 0 \\ u_\eta(0) = u_{0\eta} \end{cases}$$

où a_η et $u_{0\eta}$ sont des approximations C^∞ de α_v et u_0

respectivement lorsque $\eta \rightarrow 0$:

$$(I.50) \quad a_\eta \geq v \text{ et } a_\eta \longrightarrow \alpha_v \text{ dans } L^4([0, T]; (\mathbb{R})) \quad \forall T > 0$$

$$(I.51) \quad \|u_{\text{on}}\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \|u_o\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \text{ et } u_{\text{on}} \longrightarrow u_o \text{ dans } L^2(\mathbb{R})$$

Comme il est clair que le principe du maximum classique est applicable à u_η , nous observons que u_η converge bien vers u lorsque $\eta \rightarrow 0$ et que

$$\|u_\eta\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})} \leq \|u_{\text{on}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_o\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

A la limite nous obtenons (I.9) (I.10) .

Remarque I.1

On peut aussi obtenir le principe du maximum pour u en utilisant d'autres régularisations de l'équation (cf. chapitre III).

CHAPITRE II Résultats d'existence à viscosité nulle ($\nu = 0$).

II.1 RESULTATS D'EXISTENCE ET ESTIMATIONS A PRIORI ($\nu \rightarrow 0$).

Pour $\nu > 0$, nous désignons désormais par u_ν une solution du théorème I.1. Le comportement de u_ν , lorsque $\nu \rightarrow 0$, est précisé par le théorème II.1 qui permet aussi de donner un résultat d'existence relatif au problème (I.1) (I.2) (I.3) à viscosité nulle.

Théorème II.1 Les hypothèses faites sont

$$(II.1) \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

$$(II.2) \quad u_0 > 0$$

Soit $\{u_\nu\}_{\nu>0}$ la famille des solutions données par le théorème I.1, il existe une suite $\nu' \rightarrow 0$ et une fonction u telles que

$$(II.3) \quad u_{\nu'} \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et } L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ faibles-étoile,}$$

$$(II.4) \quad u \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(II.5) \quad u(t, \cdot) > 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$(II.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(u(t, 0) - u(t, x)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] = 0$$

$$(II.7) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$(II.8) \quad \|u\|_{L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$(II.9) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(t, 0) - u(t, x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{4} \|u_0\|^2$$

Le choix de l'hypothèse (II.1) est essentiel. La démonstration du théorème II.1 résulte d'une part des remarques du § I.6 reprises dans le lemme II.1 (en particulier (I.9) et (I.10) nous donnent une majoration de u_v pour la norme uniforme) ; elle résulte d'autre part du lemme II.2 suivant qui donne une estimation de $\frac{\partial u_v}{\partial t}$ également indépendante de v .

Lemme II.1

Lorsque $v \rightarrow 0$, les u_v demeurent dans des ensembles bornés de $L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$ et de $L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$; $\sqrt{v} \frac{\partial u_v}{\partial x}$ demeure dans un ensemble borné de $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$; et enfin

$$(II.10) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u_v(t,0) - u_v(t,x)) \left(\frac{\partial u_v}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx dt \leq C .$$

Lemme II.2

Lorsque $v \rightarrow 0$,

$\frac{\partial u_v}{\partial t}$ demeure dans un ensemble borné de $L^2(]0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Démonstration

Dans l'équation (I.1) nous écrivons

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (u_v(t,0) - u_v) \frac{\partial u_v}{\partial x} \right\}$$

où ce membre de droite demeure borné dans $L^2(]0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

En effet nous avons:

$$v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} \quad \text{borné dans } L^2(]0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$$

$$\text{et } (u_v(t,0) - u_v) \frac{\partial u_v}{\partial x} \quad \text{borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

II.2 PASSAGE A LA LIMITE

Nous déduisons aisément du lemme II.1 qu'il existe une suite

$v' \rightarrow 0$ et une fonction u , avec

$$u \in L^\infty(|0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty(|0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$\|u\|_\infty \leq |u_0|_\infty$$

et

$$u_{v'} \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(|0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et } L^\infty(|0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ faibles-étoile}$$

Nous avons aussi,

Lemme II.3

La suite $v' \rightarrow 0$ peut être choisie en sorte que

$$(II.11) \quad u_{v'} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; C^0([-M, +M])) \text{ fort, } \forall T > 0, \forall M > 0.$$

Démonstration

Nous utilisons le théorème de compacité de J.A. Dubinskii [14] [15] sous la forme donnée dans J.L.Lions [9] (chap.1 §12).

Des notations analogues impliquent ici, pour M, T fixés :

$$B_0 = C^0([-M, +M])$$

$$B_1 = H^{-1}([-M, +M])$$

$$p_0 = 3, p_1 = 2,$$

$$\mathcal{M}(v) = \left\{ \int_{|x| \leq M} (v(x))^2 dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{|x| \leq M} |v(0) - v(x)| \cdot \left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2 dx \right\}^{1/3}$$

$$S = \{v \mid v \in B_0, \mathcal{M}(v) < +\infty\}$$

Il s'agit de démontrer que l'ensemble

$$(II.12) \quad \mathcal{B} = \{v \mid v \in B_0, \mathcal{M}(v) \leq 1\}$$

est relativement compact dans $B_0 = C([-M, +M])$.

Alors nous serons en mesure de conclure grâce au résultat de compacité mentionné: la suite extraite des $u_{v_m}(t, \cdot)$ restreints à $[-M, +M]$ sera relativement compacte dans $L^2(0, T; C^0(-M, +M))$, d'où (II.11).

Nous allons montrer qu'une suite $\{v_m\}$ telle que $\mathcal{M}(v_m) \leq 1$ contient une sous-suite fortement convergente dans $C^0([-M, +M])$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v_m) &= \left\{ \int_{|x| \leq M} (v_m(x))^2 dx \right\}^{1/2} \\ &+ \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[\frac{\partial}{\partial x} ((v_m(0) - v_m(x)) \sqrt{|v_m(0) - v_m(x)|}) \right]^2 dx \right\}^{1/3} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

La suite $\{v_m\}$ est donc dans $L^2(-M, +M)$ et il existe une suite $m' \rightarrow \infty$, telle que

$$v_{m'} \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(-M, +M) \text{ faible.}$$

La suite $\frac{\partial}{\partial x} [(v_m(0) - v_m) \sqrt{|v_m(0) - v_m|}]$ est également bornée dans $L^2(-M, +M)$; L'inégalité de Poincaré aidant, la suite $(v_m(0) - v_m) \sqrt{|v_m(0) - v_m|}$ est bornée dans $H^1(-M, +M)$ et par conséquent relativement compacte dans $H^{3/4}(-M, +M)$ et dans $C^0([-M, +M])$.

Alors il existe une suite $m' \rightarrow \infty$, telle que

$$(II.13) \quad \begin{cases} v_{m'} \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(-M, +M) \text{ faible} \\ (v_{m'}(0) - v_{m'}) \sqrt{|v_{m'}(0) - v_{m'}|} \rightarrow \psi \text{ dans } C^0([-M, +M]) \text{ fort.} \end{cases}$$

Nous savons que pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a|a|^{-1/3} - b|b|^{-1/3}| \leq C |a - b|^{2/3}$$

où $C =$ cste indépendante de a et b .

On en déduit que si $\psi_m = \phi_m \sqrt{|\phi_m|}$ converge uniformément vers ψ ,
alors $\phi_m = \psi_m |\psi_m|^{-1/3}$ converge uniformément vers $\phi = \psi |\psi|^{-1/3}$
et donc

$$(II.14) \quad \begin{cases} v_{m'}(0) - v_{m'} \longrightarrow \psi |\psi|^{-1/3} \text{ dans } C([-M, +M]) \text{ fort} \\ v_{m'}(0) \longrightarrow \lambda = v(0) \end{cases}$$

Ce dernier résultat découle de ce que la suite $\{v_m(0)\}$ est bornée,
sans quoi $v_m = (v_m - v_m(0)) + v_m(0)$ ne serait pas bornée dans $L^2(-M, +M)$.

De (II.13) et (II.14) on déduit que $\psi |\psi|^{-1/3} = \lambda - v$

avec $(\lambda - v)(0) = 0$ d'où $\lambda = v(0)$.

Finalement,

$$(II.15) \quad v_{m'} \longrightarrow -\psi |\psi|^{-1/3} + v(0) = v \text{ dans } C([-M, +M]) \text{ fort}$$

Nous avons établi que \mathcal{B} en (II.12) est relativement compact dans $C([-M, +M])$.

Appliquons le lemme II.3,

$$(II.16) \quad u_{v'}(\cdot, 0) \longrightarrow u(\cdot, 0) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ fort, } \forall T > 0$$

$$(II.17) \quad u_{v'}(\cdot, 0) \longrightarrow u(\cdot, 0) - u \text{ dans } L^2(0, T; C([-M, +M])) \text{ fort}$$

$$\forall T > 0, \forall M > 0$$

(II.10) donne à la limite lorsque $v \rightarrow 0$

$$(II.18) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(t, 0) - u(t, x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx dt \leq C$$

Il n'y a plus aucune difficulté dans l'équation (I.1) lorsque $v \rightarrow 0$. A la limite, on trouve:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u(t,0) - u \right\} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On voit facilement que:

$$u_{\nu}(0, \cdot) = u_0 \longrightarrow u(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } H^{-1}(\mathbb{R})$$

et par conséquent le théorème II.1 est complètement démontré.

CHAPITRE III Unicité et régularité à viscosité $\nu > 0$ fixée.

III.1 PREMIERS RESULTATS DE REGULARITE ($\nu > 0$). THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

Nous allons faire apparaître dans le théorème III.1 les premiers résultats de régularité sur u_ν solution du problème (I.1) (I.2) (I.3). Ils nous permettent en particulier de préciser le théorème d'existence du chapitre I dans le cas où la donnée initiale u_0 est de type positif et appartient à $H^1(\mathbb{R})$.

Poursuivant le raisonnement avec une donnée initiale très régulière, $u_0 >> 0$ et $u_0 \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R})$ ⁽¹⁾, nous obtiendrons une suite d'équations vérifiées par les dérivées spatiales successives de u_ν .

Théorème III.1 Soit $\nu > 0$ fixé et u_0 donné avec

$$(III.1) \quad u_0 \in H^1(\mathbb{R})$$

$$u_0 >> 0$$

Alors le problème (I.1) (I.2) (I.3) possède une solution u_ν unique, qui vérifie en outre:

$$(III.3) \quad \begin{cases} u_\nu \in L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \\ \frac{\partial u_\nu}{\partial x} \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \end{cases}$$

$$(III.4) \quad u(t, \cdot) >> 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$(III.5) \quad \phi_0(u_\nu) = 2(u_\nu(\cdot, 0) - u_\nu) \frac{\partial u_\nu}{\partial x} \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$(III.6) \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

⁽¹⁾ Espace des fonctions indéfiniment dérivables, dont toutes les dérivées appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration

La méthode de démonstration est fondée sur une régularisation parabolique de l'équation (I.1). Pour $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement petit, nous nous intéressons au problème approché:

$$(III.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$\text{où } \alpha(u)(t, x) = 2(u(t, 0) - u(t, x))$$

$$(III.8) \quad \begin{cases} u(t, x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

i Dans un premier temps, sous les hypothèses (I.4) (I.5) du théorème I.1, nous avons l'existence de $u = u_{\nu\varepsilon}$ solution de (III.7) (III.8) telle que

$$(III.9) \quad \begin{cases} u_{\nu\varepsilon}(t, \cdot) >> 0, \forall t \geq 0, \\ u_{\nu\varepsilon} \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \\ \frac{\partial u_{\nu\varepsilon}}{\partial x} \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \end{cases}$$

En effet, la démonstration du théorème I.1 s'adapte aisément à ce cas:

L'équation transformée de Fourier de (III.7) s'écrit (notant $\phi = \hat{u}_{\nu\varepsilon}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \xi) + 4\pi^2 \xi^2 (\nu + \varepsilon 4\pi^2 \xi^2 + 2\tilde{\phi}(t, 0)) \phi(t, \xi) \\ = 4\pi^2 \xi^2 \phi * \phi(t, \xi) \end{aligned}$$

Pour ϕ et ψ donnés, on pose comme précédemment

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) \cdot \overline{\psi(\xi)} d\xi \\ \alpha(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \phi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi \\ \beta(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 \phi * \phi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

et en outre

$$\alpha_2(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} 16\pi^4 \xi^4 \phi(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi$$

Nous construisons une solution approchée positive par la méthode de Galerkin (cf. chapitre I)

$$\phi_h(t, \xi) = \sum_j \phi_{jh}(t) \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right)$$

En particulier, cf. (I.23) et le lemme I.3, lorsque nous prenons $\psi_h = \frac{1}{h} \chi\left(\frac{\xi}{h} - j\right)$, il vient

$$\begin{aligned} \alpha_2(\phi_h(t), \psi_h) &= \frac{(4\pi^2)^2}{h} \phi_{jh}(t) \int_{(j+1/2)h}^{(j+1/2)h_4} \xi^4 d\xi \\ &= (4\pi^2)^2 \frac{2h^4}{5} \phi_{jh}(t) \sum_{k=0}^2 C_5^{2k} j^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2k} \end{aligned}$$

d'où le système différentiel approché

$$(III.10) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) + \{(\nu + 2\hat{\phi}_h(t,0) P_2(h) + \varepsilon P_4(h))\} \phi_{jh}(t) \\ = 4\pi^2 \sum_{k,l} \theta_{jkl} \phi_{kh}(t) \phi_{lh}(t) \\ \text{et la condition initiale } \phi_{jh}(0) = \hat{u}_{0h}(jh) \geq 0 \end{aligned} \right.$$

avec $P_2(h) = 4\pi^2 h^2 \left(j^2 + \frac{1}{12}\right)$

$$P_3(h) = 16\pi^4 h^4 \left(j^4 + \frac{1}{2} j^2 + \frac{1}{80}\right)$$

$$\theta_{jkl} \text{ donné en (I.26)}$$

Ce système approché est écrit sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \phi_{jh}(t) + \rho_h(t) \phi_{jh}(t) \geq 0$$

avec $\phi_{jh}(0) \geq 0$ et $\rho_h(t) \geq 0$, on a donc exactement comme au

chapitre I, l'existence d'une solution $\phi_{jh}(t) \geq 0$ définie sur un intervalle $[0, T_h[$ (1)

(1) Il était important de s'assurer aussi que le problème perturbé restait bien posé dans le cône des fonctions de type positif.

Comme au I.4, le théorème de Parseval ramène le travail de recherche d'estimations à priori sur l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_h(t), v_h) + \nu a(u_h(t), v_h) + \varepsilon a_2(u_h(t), v_h) + 2 \int_{\mathbb{R}} u_h(t,0) a(u_h(t), v_h) - 2 \int_{\mathbb{R}} u_h(t) \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \frac{dv_h}{dx} dx = 0$$

où $(1) \quad u_h = \mathcal{F}^{-1} \phi_h = \gamma_h$

$$a(u_h(t), v_h) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(t) \frac{dv_h}{dx} dx$$

$$a_2(u_h(t), v_h) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}(t) \frac{d^2 v_h}{dx^2} dx$$

Il est facile de voir que nous avons l'équivalent des lemmes I.5 et I.6, de plus les fonctions u_h demeurent, lorsque $h \rightarrow 0$, dans un ensemble borné de $L^2_{loc}]0, \infty[; H^2(\mathbb{R})$. Alors le passage à la limite lorsque $h \rightarrow 0$ se fait comme au §I.5. Le point \boxed{i} est acquis.

\boxed{ii} Il s'agit dans ce second temps de préciser, à l'aide de (III.1) la différentiabilité de u en la variable d'espace (on a seulement utilisé jusqu'à présent $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et $u_0 \gg 0$)

Nous posons $u_{\nu \varepsilon}^{(1)} = \frac{\partial u_{\nu \varepsilon}}{\partial x}$

et nous savons que

$$u_{\nu \varepsilon}^{(1)} \in L^2]0, \infty[; H^1(\mathbb{R})$$

Nous observons que $\alpha(u_{\nu \varepsilon}) u_{\nu \varepsilon}^{(1)}$ est dans $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$; pour cela nous utilisons le lemme

Lemme III.1

Pour tout v dans $H^2(\mathbb{R})$, on a la majoration

$$\|v\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^{3/4} \left\| \frac{d^2 v}{dx^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4}$$

(1) En fait une notation fidèle ferait trop chargée d'indices $u_{\nu \varepsilon h}(t, x)$

Démonstration

$$\begin{aligned} \left| \frac{dv}{dx} \right|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)| \xi^2 |\hat{v}(\xi)| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^4 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'où

$$(III.11) \quad \left| \frac{dv}{dx} \right|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq |v|_{L^2(\mathbb{R})} \left| \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Or, d'après (I.33)

$$|v|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} |v|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \left| \frac{dv}{dx} \right|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}$$

Donc

$$|v|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} |v|^{3/4} \left| \frac{d^2v}{dx^2} \right|^{1/4}$$

Nous appliquons ce lemme :

$$\begin{aligned} |\alpha(u_{v\varepsilon})(t, \cdot) u_{v\varepsilon}^{(1)}(t, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 4 |u_{v\varepsilon}(t)|_{C^0(\mathbb{R})} |u_{v\varepsilon}^{(1)}(t)|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq 4 \sqrt{2} X_\varepsilon(t) \end{aligned}$$

avec

$$X_\varepsilon(t) = |u_{v\varepsilon}(t)|^{3/4} \left| \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x}(t) \right|^{1/4} |u_{v\varepsilon}^{(1)}(t)|$$

De (III.1) et (III.11), on déduit immédiatement que

$$u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^4([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})).$$

D'autre part, de (III.9) nous déduisons,

$$|u_{v\varepsilon}(\cdot)|_{L^2(\mathbb{R})} \in L^\infty([0, \infty[)$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2}(\cdot) \right|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4} \in L^3([0, \infty[)$$

Donc

$$X_\varepsilon(\cdot) \in L^{8/3}([0, \infty)) \quad \left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \right)$$

et

$$\alpha(u_{v\varepsilon}) u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}), \quad \forall T > 0.$$

(III.12)

$$\alpha(u_{v\varepsilon}) u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^{8/3}([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})).$$

Par suite utilisant les résultats sur la régularité des solutions des équations paraboliques linéaires (cf. par exemple J.L. Lions, E. Magenes [1] chap. 4), nous trouvons :

$$(III.7 \text{ bis}) \quad \frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_{v\varepsilon}}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(u_{v\varepsilon}) \frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial x} \in L^2(H^{-1}(\mathbb{R}))$$

$$(III.13) \quad u_{v\varepsilon} \in L^2([0, T]; H^3(\mathbb{R})), \quad \forall T > 0.$$

En opérant la dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ dans l'équation (III.7 bis), nous obtenons que $u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^2([0, T]; H^2(\mathbb{R}))$, $\forall T > 0$ et vérifie

$$(III.14) \quad \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha(u_{v\varepsilon}) u_{v\varepsilon}^{(1)}]$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial t} \in L^2([0, T]; H^{-2}(\mathbb{R}))$ et qu'alors

$$(III.15) \quad u_{v\varepsilon}^{(1)}(0, \cdot) = \frac{du_0}{dx} \in L^2(\mathbb{R}),$$

et on a évidemment $u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2([0, T]; H^2(\mathbb{R})), \forall T > 0.$

Nous multiplions maintenant (III.7 bis) par $u_{v\varepsilon}(t, x)$ et (III.14) par $u_{v\varepsilon}^{(1)}(t, x)$; nous intégrons en espace et intégrons par parties: ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Il résulte aisément de (III.9) et du lemme III.1, que $u_{v\varepsilon}^{(1)} \in L^3([0, T] \times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$, et par ailleurs cette fonction étant impaire (puisque $u_{v\varepsilon}^{(1)}(t, \cdot) > > 0$),

l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (u_{v\varepsilon}^{(1)}(t, x))^3 dx$ est nulle. La régularité supplémentaire de $u_{v\varepsilon}$ par rapport à u_v est essentielle et nous permet de justifier l'élimination de cette intégrale.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ |u_{v\varepsilon}(t)|^2 + |u_{v\varepsilon}^{(1)}(t)|^2 \} + v \{ \left| \frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial x}(t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x}(t) \right|^2 \} \\
 & + \varepsilon \left\{ \left| \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2}(t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x^2}(t) \right|^2 \right\} \\
 \text{(III.16)} \quad & + 2 \int_{\mathbb{R}} (u_{v\varepsilon}(\cdot, 0) - u_{v\varepsilon}) \left(\frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2} \right)^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}} (u_{v\varepsilon}(\cdot, 0) - u_{v\varepsilon}) \left(\frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x} \right)^2 dx = 0
 \end{aligned}$$

Nous avons alors des estimations à priori indépendantes de ε :

$$\text{(III;17)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 u_{v\varepsilon} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) , \\
 \phi_0(u_{v\varepsilon}) \text{ et } \phi_1(u_{v\varepsilon}) = 2(u_{v\varepsilon}(\cdot, 0) - u_{v\varepsilon}) \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(1)}}{\partial x} \text{ demeurent dans} \\
 \text{des bornés de } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) , \\
 \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2} \text{ demeure dans un borné de } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) \\
 \text{(en fait } v^{1/2} \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2}, \text{ cf. la remarque III;3)} \\
 \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial^3 u_{v\varepsilon}}{\partial x^3} \text{ demeure dans un borné de } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}).
 \end{array} \right.$$

Il résulte de (III.17) que, $v > 0$ étant fixé et ε tendant vers 0, $(u_{v\varepsilon}^{(1)})^2$ reste dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et par voie de conséquence $\phi_0(u_{v\varepsilon})$ reste dans un borné ⁽¹⁾ de $L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$;

en effet

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi_0(u_{v\varepsilon}) = \phi_1(u_{v\varepsilon}) - 2(u_{v\varepsilon}^{(1)})^2$$

Enfin, il est clair d'après (III.7bis) que $\frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial t}$ demeure, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans un borné de $L^2([0, T]; H^{-1}(\mathbb{R}))$, $\forall T > 0$.

L'existence dans le théorème III.1 se déduit de ce qui précède par un passage à la limite facile lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

⁽¹⁾ On a aussi $\phi_0(u_{v\varepsilon})$ demeure dans un borné de $L^{8/3}([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$ et donc à la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi_0(u_v) \in L^{8/3}([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$.

A la limite on note que

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \phi_0(u_v) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

L'unicité dans le théorème III.1 fait l'objet du §III.2.

Remarque III.1

A $\varepsilon > 0$ fixé, la solution de (III.7) (III.8) est naturellement plus régulière:

$$\frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_{v\varepsilon}}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} \phi_0(u_{v\varepsilon}) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

Si $u_0 \in H^2$, alors $u_{v\varepsilon} \in L^2_{loc}([0, \infty[; H^4(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u_{v\varepsilon}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

Remarque III.2

Pour justifier l'écriture du "problème dérivé" (III.14) (III.15), le point important est (III.12). Il était nécessaire d'avoir recours au lemme III.1, puisque nous avons alors $u_{v\varepsilon}$ dans $L^4_{loc}([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ seulement, et non dans $L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$; ce dernier résultat est contenu dans les estimations (III.17).

Remarque III.3

Il est intéressant pour la suite (cf. §IV.1) de remarquer que les fonctions $u_{v\varepsilon}$, et donc à la limite les fonctions u_v , vérifient en raison de (III.17) des estimations indépendantes de v :

u_v demeure dans un borné de $L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$

$v^{1/2} \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}$ demeure dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$\phi_0(u_v)$ et $\phi_1(u_v)$ demeurent dans des bornés de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$\frac{\partial u_v}{\partial t}$ demeure dans un borné de $L^2_{loc}([0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Remarque III.4

La démonstration du théorème III.1 fait apparaître un raisonnement qu'on peut réitérer sous des initiales plus régulières. Nous obtiendrons toutes les équations gouvernant les dérivées successives de $u_{v\varepsilon}$ et nous montrerons aussi que $u_{v\varepsilon}$, respectivement u_v , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, sont indéfiniment différentiables. Il conviendra de noter le rôle privilégié joué par les formes $\phi_m(u) = 2(u(\cdot, 0) - u) \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}}$.

Avant de développer ce point, nous montrons le résultat d'unicité dans la classe des solutions du théorème III.1.

III.2 UNICITE A VISCOSITE $\nu \rightarrow 0$ FIXEE .

Comme en (I.46) notons $\alpha_\nu(u)(t,x) = \nu + 2(u(t,0) - u(t,x))$ avec $u = u_\nu$.

Soient u_1 et u_2 deux solutions du théorème III.1 et notons u leur différence $u_1 - u_2$, nous avons

$$(III.18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_\nu(u_1) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2(u(\cdot,0) - u) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\} = 0$$

Effectuons le produit de (III.18) par $u(t,x)$ et intégrons en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right|^2 + \int_{\mathbb{R}} 2(u_1(t,0) - u_1(t,x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx \\ + \int_{\mathbb{R}} 2(u(t,0) - u(t,x)) \frac{\partial u_2}{\partial x}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) dx = 0 \end{aligned}$$

Il nous suffit de majorer convenablement le module de cette dernière intégrale, noté $I(t)$

$$\begin{aligned} I(t) &\leq 2|u(t)|_\infty \left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(t) \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right| \\ &\leq 2\sqrt{2}|u(t)|^{1/2} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right|^{1/2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(t) \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right| \\ &\leq \quad (\text{par l'inégalité de Young}) \\ &\leq \nu \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right|^2 + C \left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(t) \right|^4 |u(t)|^2 \end{aligned}$$

Il vient

$$(III.19) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 \leq C \left| \frac{\partial u_2}{\partial x}(t) \right|^4 |u(t)|^2$$

Sachant notamment que $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ est dans $L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$, nous arrivons à

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 \leq C |u(t)|^2$$

Nous appliquons le lemme de Gronwall pour en déduire l'unicité dans le théorème III.1 et plus généralement:

Théorème III.2 Pour tout $\nu > 0$ fixé, soit u_0 donné avec $u_0 > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, le problème (I.1) (I.2) (I.3) admet au plus une solution dans $L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$.

Remarque III.5

Si donc $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et $u_0 > 0$, il y a existence et unicité de u solution de (I.1) (I.2) (I.3) dans $L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ (Théorème III.1). Il est intéressant d'observer alors qu'il n'existe d'autre solution qui vérifie (I.9) (I.10) : il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus, u_1, u_2 étant les solutions vérifiant (I.9) (I.10) d'une part, et (III.3) d'autre part.

III.3 REGULARITE C^∞ A VISCOSITE $\nu > 0$ FIXEE.

Nous nous proposons ici d'obtenir des résultats de régularité pour les dérivées de tous ordres de u_ν (jusqu'à la régularité C^∞). Nous procédons comme annoncé à la remarque III.4 par dérivations réitérées des équations.

Nous voulons au préalable systématiser les notations

$$u^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$$

$$\alpha(u) = 2(u(\cdot, 0) - u)$$

$$\alpha_\nu(u) = \nu + \alpha(u)$$

$$\phi_m(u) = \alpha(u) \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x}$$

$$\phi_{m,\nu}(u) = \alpha_\nu(u) \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x}$$

(E_v) , resp. (E) , désignera l'équation (I.1) avec $v > 0$, resp. avec $v = 0$.

$(E_{m,v})$, resp. (E_m) , désignera l'équation régissant $u_v^{(m)}$, resp. $u^{(m)}$, c'est-à-dire l'équation (E_v) , resp. (E) , dérivée m fois. cf. Lemme III.2.

$(E_{m,v,\epsilon})$ désignera cette même équation $(E_{m,v})$ où l'on a introduit un terme d'ordre 4, $\epsilon \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, c'est-à-dire l'équation (III.7) dérivée m fois.

Nous commençons par un lemme élémentaire qui décrit formellement les équations successivement vérifiées par les dérivées $u_v^{(m)}$. Ensuite nous établirons les estimations a priori et les propriétés de différentiabilité permettant de donner un sens à toutes ces quantités introduites. (cf. théorème III.3).

Lemme III.2

$u = u_v$ étant la solution de l'équation (E_v) , ses dérivées

$$u^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \text{ satisfont formellement aux équations:}$$

$$(E_{m,v}) \quad \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \phi_{m,v}(u) + f_m = 0$$

avec

$$f_m = 2 \sum_{p=1}^m C_{m+1}^p u^{(p)} u^{(m-p+2)}, \quad m \geq 1.$$

Démonstration

L'équation (III.14) avec $\epsilon = 0$ correspond très exactement à $(E_{1,v})$:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{0,v}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \phi_{1,v}(u) - 4 u^{(1)} u^{(2)}.$$

Il suffit donc de calculer les dérivations de (E_v) à l'aide de la formule de Leibniz.

$$(III.20) \quad \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \phi_{0,v}^{(m)}(u)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{0,v}^{(m)}(u) &= \frac{\partial^m}{\partial x^m} \{ [v + \alpha(u)] u^{(1)} \} \\
 &= [v + 2u(\cdot, 0)] u^{(m+1)} - 2(u \cdot u^{(m+1)}) + \sum_{p=1}^m C_m^p u^{(p)} \cdot u^{(m+1-p)} \\
 \text{(III.21)} \quad &= \phi_{m,v} - 2 \sum_{p=1}^m C_m^p u^{(p)} \cdot u^{(m+1-p)}
 \end{aligned}$$

Il reste à préciser f_m :

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_{0,v}^{(m+1)}(u) &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_{m,v}(u) - f_m \\
 &= \phi_{m+1,v}(u) - 2 u^{(1)} \cdot u^{(m+1)} - f_m \\
 &= \phi_{m+1,v}(u) - 2 \sum_{p=1}^{m+1} C_{m+1}^p u^{(p)} \cdot u^{(m+2-p)} \\
 &= \text{d'après (III.21) à l'ordre } m+1
 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(III.22)} \quad f_m = 2 \sum_{p=1}^m C_{m+1}^p u^{(p)} \cdot u^{(m+2-p)}$$

Portant cela dans (III.20), nous trouvons bien $(E_{m,v})$.

D'après (III.21) également, nous avons

$$\begin{aligned}
 f_m &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{p=1}^m C_m^p u^{(p)} \cdot u^{(m+1-p)} \\
 \text{(III.22 bis)} \quad &= \frac{\partial}{\partial x} f_{m-1} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \{ u^{(m)} \cdot u^{(1)} \} .
 \end{aligned}$$

Tous les résultats de régularité et différentiabilité sont maintenant contenus dans le théorème qui suit :

Théorème III.3 Pour tout $v > 0$ fixé, m entier ≥ 1 et $u_0 \gg 0$ donné avec

$$\text{(III.23)} \quad u_0 \in H^m(\mathbb{R})$$

Alors la solution u_v du problème associé à (E_v) donnée par le théorème III;1 vérifie

$$(III.24) \quad u_v^{(m)} \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$$

$$(III.25) \quad \Phi_{m,v}(u_v) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(III.26) \quad \frac{\partial u_v^{(m-1)}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

Démonstration

Pour $m = 1$, le résultat est celui du théorème III.1 .

Soit n entier > 2 donné, et supposons le résultat acquis pour $m \leq n - 1$. Nous montrons que le théorème vaut encore pour $m = n$.

Nous observons que $f_{n-1} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$, f_{n-1} étant donné par le lemme III.2.

En effet, tous les termes de f_{n-1} sont de la forme

$$u_v^{(p)} \cdot u_v^{(n-p+1)} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n - 1$$

et par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence⁽¹⁾, se trouvent toujours dans $L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$ pour $3 \leq p \leq n - 2$, et dans $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$ pour $p = 1, 2, n - 1$ ($u_v^{(1)} \cdot u_v^{(n)}$; $u_v^{(2)} \cdot u_v^{(n-1)}$)

Nous supposons u_0 donné dans $H^n(\mathbb{R})$ et nous considérons l'équation

($E_{n-1,v,\varepsilon}$):

$$\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^4 u^{(n-1)}}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \Phi_{n-1,v}(u) = -f_{n-1}$$

ou encore,

$$(III.27) \quad \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u^{(n-1)}}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \alpha(u) \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} = -f_{n-1}$$

avec

$$u^{(n-1)}(0, \cdot) = \frac{d^{n-1} u_0}{dx^{n-1}} \in H^1(\mathbb{R})$$

(en fait $u = u_{v\varepsilon}$, $v > 0$ fixé, $\varepsilon > 0$ arbitraire, est donné par (III.7)).

Nous allons dériver l'équation (III.27) et montrer par récurrence que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_{v\varepsilon}^{(n)}$ demeure dans un borné de $L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ et $\Phi_n(u_{v\varepsilon})$ demeure dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

(¹) très exactement (III.24) pour $m \leq n-1$.

Indispensable pour le travail avec $n = 1$, l'équation perturbée en ε l'est encore pour $n \geq 2$: En effet l'opérateur d'ordre 2 de l'équation $(E_{n-1, \nu})$ ne nous permettrait pas d'obtenir suffisamment de régularité sur u_{ν} , plus précisément sur $u_{\nu}^{(n-1)}$; (puisque'il apparaît dans l'équation $(E_{n-1, \nu})$ le terme $\frac{\partial}{\partial x} \phi_{n-1}(u_{\nu}) \in L^2([0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$).

La suite de la démonstration est à rapprocher du point (ii) de la démonstration du théorème III.1. Toutefois nous n'avons plus dans la récurrence de difficulté analogue à celle rencontrée alors pour justifier la première différentiabilité.⁽¹⁾

Nous savons de façon récurrente que

(III.28) $u_{\nu \varepsilon}^{(n)}$ est dans un espace borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et que $u_{\nu \varepsilon}^{(n)} \in L^2([0, \infty[; H^2(\mathbb{R}))$ puisque l'on a un résultat de régularité sur $u_{\nu \varepsilon}^{(n-1)}$ dans $L^2([0, \infty[; H^3(\mathbb{R}))$.

En opérant $\frac{\partial}{\partial x}$ sur l'équation (III.27), et d'après le lemme III.2, il est clair que $u_{\nu \varepsilon}^{(n)}$ vérifie l'équation $(E_{n, \nu, \varepsilon})$;

Alors en particulier

$$\frac{\partial u_{\nu \varepsilon}^{(n)}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[; H^{-2}(\mathbb{R}))$$

de sorte que

$$u_{\nu \varepsilon}^{(n)}(0, \cdot) = \frac{d^n u_0}{dx^n} \in L^2(\mathbb{R}).$$

$u_{\nu \varepsilon}^{(n)}$ solution du problème associé à $(E_{n, \nu, \varepsilon})$ est donc dans $L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2([0, \infty[; H^2(\mathbb{R}))$.

Nous multiplions maintenant $(E_{n, \nu, \varepsilon})$ par $u_{\nu \varepsilon}^{(n)}(t, x)$, et intégrant en espace, nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{\nu \varepsilon}^{(n)}(t)|^2 + \nu \left| \frac{\partial u_{\nu \varepsilon}^{(n)}}{\partial x}(t) \right|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial^2 u_{\nu \varepsilon}^{(n)}}{\partial x^2}(t) \right|^2$$

⁽¹⁾ cf. la remarque III.2, relative à $\phi_0(u_{\nu \varepsilon}) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

$$+ \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_{v\varepsilon}) \left(\frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 dx = (1) \int_{\mathbb{R}} f_{n-1} \cdot \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x} dx + 2 \int_{\mathbb{R}} u_{v\varepsilon}^{(2)} (u_{v\varepsilon}^{(n)})^2 dx$$

d'où, à cause de (III.28) et des hypothèses de récurrence,

$$(III.29) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{v\varepsilon}^{(n)}(t)|^2 + \frac{1}{2} v \left| \frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x} \right|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x^2} \right|^2 (t) \\ + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_{v\varepsilon}) \left(\frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 dx \leq C = C_v \quad (2)$$

Ces estimations sont indépendantes de ε ,

$u_{v\varepsilon}^{(n)}$ dans des bornés de $L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$ et de $L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$

$\varepsilon \frac{\partial^2 u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial x^2}$ dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

$\phi_n(u_{v\varepsilon})$ dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

et par retour à l'équation $(E_{n,v,\varepsilon})$

$\frac{\partial u_{v\varepsilon}^{(n)}}{\partial t}$ dans un borné de $L^2([0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Elles justifient parfaitement le passage à la limite dans $(E_{n,v,\varepsilon})$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$; nous avons donc

$$(III.30) \quad u_v^{(n)} \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

(1) cf. (III.22 bis), $f_n = \frac{\partial}{\partial x} f_{n-1} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[u^{(1)} u^{(n)} \right]$

(2) Insistons sur le fait que la viscosité $v > 0$ est fixée, dans toute cette partie.

$$(III.31) \quad \frac{\partial u_v^{(n)}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_v^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(u_v) + f_n = 0$$

$$\text{et } u_v^{(n)}(0, \cdot) = \frac{d^n u_0}{dx^n}$$

$$(III.32) \quad \phi_n(u_v) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ et } \phi_{n-1}(u_v) \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

Il faut revenir à l'équation $(E_{n-1, v})$ pour obtenir

$$(III.33) \quad \frac{\partial u_v^{(n-1)}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) .$$

Nous allons conclure ce paragraphe en montrant la régularité C^∞ , dans le théorème III.4 qui est un corollaire du théorème III.3 précédent.

Notation:

\mathcal{D}_{L^p} désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, dont toutes les dérivées appartiennent à L^p , $1 \leq p \leq +\infty$. ⁽¹⁾

Théorème III.4 Pour tout $v > 0$ fixé, si $u_0 \gg 0$ est donné dans $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R})$ alors la solution u_v du problème (I.1) (I.2) (I.3) est dans $\mathcal{D}_{L^2}([0, T] \times \mathbb{R})$, $\forall T > 0$ et dans $\mathcal{D}_{L^\infty}([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Démonstration

Il apparaît dans les théorèmes III.1 et III.3 que

$$u_v \in L^2_{loc}([0, \infty[; H^2(\mathbb{R})) ,$$

et pour tout $m \geq 1$,

$$u_v^{(m)} \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$\frac{\partial u_v^{(m-1)}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

⁽¹⁾ \mathcal{D} est dense dans \mathcal{D}_{L^p} ($p < +\infty$) et $\mathcal{D}_{L^q} \supset \mathcal{D}_{L^p}$, $q \geq p$.



d'où, pour tout $p \geq 0$, pour tout $m \geq 1$,

$$(III.34) \quad u_v \in L^2_{loc}([0, \infty[; H^p(\mathbb{R})) \text{ et } u_v^{(m)} \in L^2([0, \infty[; H^p(\mathbb{R}))$$

$$(III.35) \quad \frac{\partial u_v^{(m-1)}}{\partial t} \in L^2([0, \infty[; H^p(\mathbb{R}))$$

Donc, en particulier

$$(III.36) \quad u_v^{(m)} \in C^0([0, T]; C^\infty(\mathbb{R})) \quad \forall T > 0, \forall m \geq 0.$$

D'autre part, d'après le lemme III.2,

$$(III.37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_v^{(m)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_{m,v}(u_v) - f_m \\ &= 2(u_v(\cdot, 0) - u_v) u_v^{(m+2)} + v u_v^{(m+2)} - 2u_v^{(1)} u_v^{(m+1)} - f_m \end{aligned}$$

d'où

$$(III.38) \quad \frac{\partial u_v^{(m)}}{\partial t} \in C^0([0, T]; C^\infty(\mathbb{R})) \quad \forall T > 0, \forall m \geq 0 \quad (\text{en convenant que } f_0 \equiv 0)$$

et par conséquent,

$$(III.39) \quad u_v^{(m)} \in C^1([0, T]; C^\infty(\mathbb{R})) \quad \forall T > 0, \forall m \geq 0.$$

Il faut revenir en (III.37) pour voir que

$$u_v^{(m)} \in C^2([0, T]; C^\infty(\mathbb{R})) \quad \forall T > 0, \forall m \geq 0,$$

et itérant ce procédé, on a alors

$$(III.40) \quad u_v \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}) \quad \forall T > 0.$$

On termine aisément la démonstration en notant que

$$u_v^{(m)} \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}) \quad \forall m \geq 0.$$

CHAPITRE IV Seuil de singularité et "catastrophe énergétique" à viscosité $\nu = 0$.

INTRODUCTION.

Dans le §IV.1 nous démontrons par une méthode remarquablement simple, que l'équation maîtresse (E) ne possède pas de solution C^∞ , ni même C^4 , sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

Après ce résultat négatif, on établira des résultats de régularité: régularité des solutions de (E) sur un intervalle $[0, T_*[$ les solutions sont alors aussi régulières que les données.

C'est l'objet de ce chapitre qui établit donc l'existence d'un seuil de singularité pour (E), T_* parfaitement déterminé dans le texte.

L'étude de la régularité au-delà de T_* , ou ce qui revient au même pour $t \in [0, \infty[$, fait l'objet du chapitre V.

Il nous semble utile d'insister sur cette particularité importante de l'équation (E) qui, bien que essentiellement parabolique dans le cône des fonctions de type positif, "génère" obligatoirement au bout d'un temps fini, des solutions irrégulières. L'apparition d'une discontinuité est liée du point de vue du modèle de turbulence à la "catastrophe énergétique", et à l'apparition effective de la turbulence.

IV.1 Non existence de solution C^∞ sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

On a le théorème

Théorème IV.1 L'équation (E) ne possède pas de solution de type positif dans $C^4([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Démonstration

Supposons que (E) possède une solution $u \in C^4([0, \infty[\times \mathbb{R})$. On peut alors dériver deux fois en x l'équation (E);

on trouve :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \alpha(u) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = 0$$

On fait alors $x = 0$ et on pose

$$D(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) .$$

Comme $u(t, \cdot) > 0, D(t) > 0$ et comme les dérivées impaires $\frac{\partial^{2j+1} u}{\partial x^{2j+1}}(t, 0)$

s'annulent. Il reste

$$\frac{dD(t)}{dt} + 6D^2(t) = 0$$

d'où en intégrant

$$D(t) = \frac{D_0}{1 + 6tD_0}$$

$D(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $-\frac{1}{6D_0}$ ($D_0 < 0$). Il y a donc contradiction avec l'hypothèse que u est régulière pour tout t .

Remarque IV.1

Notons pour la suite le temps $T_* = -\frac{1}{6 \frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)}$. (cf. §IV.3).

IV.2 PREMIERS RESULTATS DE REGULARITE A $v = 0$.

Dorénavant u_v est la solution du problème associé à l'équation maîtresse (E_v) $v > 0$ avec une condition initiale donnée $u_0 > 0$, dans $H^1(\mathbb{R})$. Et u désigne une solution du problème associé à l'équation $(E)_{v=0}$ donnée par le théorème II.1.

Sous l'hypothèse faite que $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, nous pouvons améliorer le

théorème II.1 :

Théorème IV.2 Soit $u_0 > 0$ donné avec

$$(IV.1) \quad u_0 \in H^1(\mathbb{R}),$$

Alors il existe une solution u du problème (II.6) (II.7) telle que $u(t, \cdot) > 0, \forall t \geq 0$

$$(IV.2) \quad u \in L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$\phi_0(u) \text{ et } \phi_1(u) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

Si on suppose en outre que

$$(IV.3) \quad \frac{du_0}{dx} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

Alors

$$(IV.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(IV.5) \quad \phi_0(u) \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(IV.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

Démonstration

Nous reprenons certains points établis dans la démonstration du théorème III.1. Plus précisément, d'après la remarque III.3, nous avons

Lemme IV.1

Lorsque $v \rightarrow 0$,

u_v demeure dans un borné de $L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$

$v^{1/2} u_v^{(2)}$ demeure dans un borné de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$\phi_0(u_\nu)$ et $\phi_1(u_\nu)$ demeurent dans des bornés de $L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ demeure dans un borné de $L^2_{loc}([0, \infty[; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

La première partie du théorème IV.2 résulte alors du passage à la limite dans l'équation (E_ν) lorsque $\nu \rightarrow 0$.

A présent, lorsque la condition initiale est telle que

$$\frac{du_0}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

nous obtenons

$$\|u_\nu^{(1)}\|_{L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})} \leq \left| \frac{du_0}{dx} \right|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

par un raisonnement de principe du maximum (comparable à celui du § I.6) sur l'équation

$$(E_{1,\nu}) \quad \frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_\nu^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha(u_\nu) \frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial x} \right\} + 4 u_\nu^{(1)} \frac{\partial u_\nu^{(1)}}{\partial x} = 0$$

d'où (IV.4) et par suite (IV.5) (IV.6). ⁽¹⁾

Cela achève la démonstration du théorème.

Remarque IV.2

Le théorème IV.2 améliore de façon sensible le théorème d'existence du chapitre II:

On peut trouver une suite $\nu' \rightarrow 0$ et une fonction u solution du problème associé à l'équation maîtresse (E) telles que

$$u_{\nu'} \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et } L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ faibles-étoile}$$

$$\frac{\partial u_{\nu'}}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \text{ dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et } L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}) \text{ faibles-étoile}$$

⁽¹⁾ Noter que sous la seule hypothèse (IV.1) $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R})) + L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}))$.

IV.3 DISCONTINUITÉ EN $x = 0$.

Nous précisons la situation en $x = 0$, notamment la non-différentiabilité par rapport à x , en $x = 0$, des solutions obtenues et son interprétation en terme d'énergie. ⁽¹⁾ ⁽²⁾

La dissipation d'énergie s'exprime par

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(t,0)] \text{ puisque } u(t,0) \text{ joue le rôle de l'énergie (cf. Introduction)}$$

Nous avons le théorème:

Théorème IV.3 Les hypothèses sont celles du théorème IV.2 : (IV.1) et (IV.3).

Soit u une solution de l'équation maîtresse (E) (donnée par la remarque IV.2).

Alors, pour presque tout $t \geq 0$,

$$(IV.7) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R} - \{0\}$$

La discontinuité en $X = 0$ étant liée à l'énergie par l'équation

$$(IV.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} [u(t,0)] + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,0^+) \right]^2 = 0$$

et tant que $u(t, \cdot)$ est différentiable en $X = 0$, on a

$$(IV.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0 \text{ (conservation de l'énergie)}$$

Démonstration

Nous avons donc (cf. théorème IV.2) :

$$\Phi_0(u) = \alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})).$$

⁽¹⁾ cf. les paragraphes suivants et la remarque V.3.

⁽²⁾ 1949 : L. Onsager conjecture que les équations d'Euler pour un fluide parfait incompressible peuvent admettre des solutions "turbulentes" non régulières pour lesquelles l'énergie n'est pas conservée.
cf. M. Lesieur et U.Frisch [3] [4].

Tenant compte du type positif de u et $u(t, \cdot) \in H^1(\mathbb{R})$, on a $\alpha(u)(\cdot, x) \neq 0$
 $\forall x \neq 0$; on en déduit en particulier que, pour presque tout $t \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot)$
est une fonction continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$, soit $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, \infty; C^0(\mathbb{R} - \{0\}))$.

Nous démontrons maintenant (IV.8).

$\delta > 0$ étant donné, arbitrairement petit, nous posons.

$$m_{\delta v}(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} u(t, x) dx$$

$$m_{\delta}(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} u(t, x) dx$$

De l'équation maîtresse (E_v) que nous réécrivons sous la forme

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} - [v + 2u_v(\cdot, 0)] \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (u_v \frac{\partial u_v}{\partial x}) = 0$$

nous déduisons

$$(IV.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} m_{\delta v}(t) - \frac{1}{2\delta} [v + 2u_v(t, 0)] \left(\frac{\partial u_v}{\partial x}(t, \delta) - \frac{\partial u_v}{\partial x}(t, -\delta) \right) \\ + \frac{1}{\delta} (u_v(t, \delta) \frac{\partial u_v}{\partial x}(t, \delta) - u_v(t, -\delta) \frac{\partial u_v}{\partial x}(t, -\delta)) = 0$$

ou encore, vu que $u_v(t, \cdot)$ est une fonction paire ⁽¹⁾,

$$(IV.10 \text{ bis}) \quad \frac{\partial}{\partial t} m_{\delta v}(t) - \frac{v}{\delta} \cdot \frac{\partial u_v}{\partial x}(t, \delta) + 2 \frac{u_v(t, \delta) - u_v(t, 0)}{\delta} \cdot \frac{\partial u_v}{\partial x}(t, \delta) = 0$$

Rappelons des estimations a priori obtenues lorsque $v \rightarrow 0$ (cf. remarque III.3) :

$$u_v \text{ reste borné dans } L^\infty([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$v^{1/2} \frac{\partial u_v}{\partial x} \text{ reste borné dans } L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$\phi_0(u_v) \text{ reste borné dans } L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

⁽¹⁾ Si $\phi > 0$ et $\phi(0) = \phi(\xi)$, alors ϕ est périodique de période ξ , ce qui est impossible si ϕ est en outre dans $H^1(\mathbb{R})$.

Nous en déduisons que $m_{\delta\nu}(t)$, $\frac{\partial}{\partial t} m_{\delta\nu}(t)$ et $\phi_0(u_\nu)(t, \delta) = 2(u_\nu(t, 0) - u_\nu(t, \delta)) \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial x}(t, \delta)$ demeurent dans des bornes de $L^2([0, \infty[)$ ($\delta > 0$ fixé).

A la limite, lorsque $\nu \rightarrow 0$,

$$(IV.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} m_\delta(t) + \frac{2}{\delta} (u(t, \delta) - u(t, 0)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \delta) = 0$$

(IV.8) et le théorème en résultent en faisant à présent tendre δ vers 0 ; on a (IV.7), $\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot)$ est continué sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et évidemment $m_\delta(t) \rightarrow u(t, 0)$ pp. dans $\{t \geq 0\}$.

Remarque IV.3

Le résultat du théorème IV.3 vaut à viscosité nulle seulement.

Remarque IV.4

Quand on prend $x = 0$ dans l'équation maîtresse avec viscosité (E_ν),

on a

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t}(t, 0) - \nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2}(t, 0) = 0$$

d'où le phénomène de dissipation énergétique bien connu. ($\nu u_\nu^{(2)}(t, 0) < 0$)

Et lorsque $\nu \rightarrow 0$, on a

$$(IV.12) \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial t}(t, 0) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) \text{ pour la topologie vague de } \mathcal{M}(|0, \infty|)^{(1)}.$$

En effet

$$- \int_0^T \frac{\partial u_\nu}{\partial t}(t, 0) dt = u_0(0) - u_\nu(T, 0), \quad \forall T > 0$$

et par suite

$$\left| \nu \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2}(t, 0) \right|_{L^1(0, \infty)} \leq u_0(0).$$

IV.4 SEUIL DE SINGULARITE . "CATASTROPHE ENERGETIQUE."

Nous allons voir que les discontinuités en $x = 0$ (cf. (IV.9) et le théorème IV.3) apparaissent au bout d'un temps fini T_* et que les solutions de (E) sont très régulières sur $[0, T_*[\times \mathbb{R}$.

Les résultats sont les suivants:

Théorème IV.4 Soit u une solution de l'équation maîtresse (E) donnée par la remarque IV.2. On suppose la donnée initiale $u_0 \gg 0$ telle que

$$(IV.13) \quad u_0 \in H^2(\mathbb{R})$$

$$(IV.14) \quad \frac{\widehat{d^2 u_0}}{dx^2} \in L^1(\mathbb{R}_\xi)$$

Alors il existe $t_* > 0$ tel que

$$(IV.15) \quad u \in L^\infty([0, t_*[; H^2(\mathbb{R})).$$

Théorème IV.5 Les hypothèses (IV.13) (IV.14) étant satisfaites, on suppose en outre que

$$(IV.16) \quad u_0 \in H^4(\mathbb{R})$$

Alors il existe $t_* > 0$ tel que

$$(IV.17) \quad u \in L^\infty([0, t_*[; H^4(\mathbb{R})).$$

Théorème IV.6 Si la donnée initiale est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors il existe

$$T_* = - \frac{1}{6 \frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)} \quad \text{tel que}$$

$$(IV.18) \quad u \in C_0^\infty([0, T_*[\times \mathbb{R}).$$

Plus précisément si $u_0 \in \mathcal{D}_L^2(\mathbb{R})$, alors

$$(IV.19) \quad u \in \mathcal{D}_{L_{loc}}^\infty([0, T_*[\times \mathbb{R}).$$

Nous renvoyons au §IV.5 pour la démonstration du théorème IV.4.

L'ensemble des notations a été fixé au début du §III.3.

Nous donnons la démonstration des théorèmes IV.5 et IV.6. Pour ce faire nous étudions, lorsque $\nu \rightarrow 0$, le comportement de $u_\nu^{(2)}$ en $x = 0$, qu'il décrivent les quatre lemmes ci-après.

Lemme IV.2 A viscosité $\nu > 0$ fixée et sous les hypothèses de régularité du théorème IV.6 (en fait les hypothèses du théorème IV.5 suffisent), $u_\nu^{(2)}(.,0)$ satisfait à

$$(IV.20) \quad \frac{d}{dt} u_\nu^{(2)}(.,0) + 6 [u_\nu^{(2)}(.,0)]^2 - \nu u_\nu^{(4)}(.,0) = 0$$

$$(IV.21) \quad u_\nu^{(2)}(0,0) = \frac{d^2 u_0}{dx^2}(0) < 0$$

Si C est une constante réelle donnée avec $0 < C < -\frac{1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)}$, alors

$$(IV.22) \quad \exists t_* = t_*(u_0, C) \text{ tel que } 0 > u_\nu^{(2)}(t,0) > -\frac{1}{C} \text{ pour } 0 \leq t \leq t_* .$$

Démonstration.

Compte tenu des résultats de régularité du chapitre III, tous les termes de l'équation $(E_{2,\nu})$ sont parfaitement définis en $x = 0$. Nous avons donc (IV.20) et (IV.21).

Il suffit de remarquer que si $u_\nu(t,.)$, resp. u_0 , est du type positif, alors $-u_\nu^{(2)}(t,.)$, resp. $-\frac{d^2 u_0}{dx^2}$, est du type positif; de même $u_\nu^{(4)}(t,.)$ est du type positif, etc; et on a

$$(IV.23) \quad (-1)^i (u_\nu^{(2i)}(t,0) - u_\nu^{(2i)}(t,x)) \geq 0 \quad \forall x, \forall t \geq 0, \forall i$$

$$(IV.24) \quad (-1)^i u_\nu^{(2i)}(t,0) > 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Alors

$$(IV.25) \quad u_v^{(2)}(t,0) < 0 \quad \text{et} \quad u_v^{(4)}(t,0) > 0$$

et nous déduisons facilement de (IV.20)

$$(IV.26) \quad \frac{d}{dt} \left\{ - \frac{1}{u_v^{(2)}(t,0)} \right\} + 6 > 0$$

d'où

$$(IV.27) \quad - \frac{1}{u_v^{(2)}(t,0)} > - \frac{1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)} - 6t$$

$$\text{Soit } C > 0 \text{ donné tel que } C < - \frac{1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)},$$

$$\text{Soit } t \text{ tel que } - \frac{1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)} - 6t \geq C,$$

On déduit de (IV.27) la majoration (IV.22) du lemme pour

$$t \leq \frac{1}{6} \left\{ \frac{-1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)} - C \right\}$$

Lemme IV.3

(Estimation à priori (I))

Lorsque $v \rightarrow 0$, sous les hypothèses de régularité du théorème IV.6

(en fait $u_0 \in H(\mathbb{R})$ suffit), $t_* = t_*(u_0, C)$ étant donné par le lemme IV.2,

on a

$u_v^{(2)}$ demeure dans un borné de $L^\infty([0, t_*]; L^2(\mathbb{R}))$

$u_v^{(3)}$ demeure dans un borné de $L^\infty([0, t_*]; L^2(\mathbb{R}))$

$\Phi_2(u_v), \Phi_3(u_v)$ demeurent dans des bornés de $L^2([0, t_*] \times \mathbb{R})$

$\frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial t}$ demeure dans un borné de $L^2([0, t_*] \times \mathbb{R})$.

Démonstration

$$(E_{2,v}) \quad \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_v(u_v) \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x} \right\} + 6 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u_v^{(1)} u_v^{(2)} \right\} = 0$$

Effectuons le produit de $(E_{2,v})$ par $u_v^{(2)}$ puis intégrons sur \mathbb{R} ,

$$(IV.28) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(2)}(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) \left(\frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx + 3 \int_{\mathbb{R}} (u_v^{(2)}(t,x))^3 dx = 0$$

Puisque $u_v^{(2)}(t, \cdot)$ est du type négatif (cf. (IV.23)),

$$u_v^{(2)}(t,x) \geq u_v^{(2)}(t,0) \quad \forall x > 0, \quad \forall t \geq 0. \text{ Supprimant en outre}$$

la seconde intégrale dans (IV.28), nous déduisons

$$(IV.29) \quad \frac{d}{dt} |u_v^{(2)}(t)|^2 + 6 u_v^{(2)}(t,0) |u_v^{(2)}(t)|^2 \leq 0$$

et il résulte du lemme de Gronwall que

$$(IV.30) \quad |u_v^{(2)}(t)|^2 \leq \left| \frac{d^2 u_o}{dx^2} \right|^2 \times \exp. \left\{ -6 \int_0^t u_v^{(2)}(\sigma, 0) d\sigma \right\}.$$

Nous déduisons de (IV.30) et de (IV.22):

$$(IV.31) \quad |u_v^{(2)}(t)|^2 \leq \left| \frac{d^2 u_o}{dx^2} \right|^2 \times \exp. \left\{ \frac{6t_*}{c} \right\}, \quad \forall t \leq t_*.$$

Nous avons aussi l'inégalité (cf. (IV.28))

$$\int_0^{t_*} \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) (u_v^{(3)})^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \left| \frac{d^2 u_o}{dx^2} \right|^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{c} \exp \left\{ \frac{6t_*}{c} \right\} \right)$$

Donc $\Phi_{2,v}(u_v)$ reste borné dans $L^2([0, t_*] \times \mathbb{R})$.

Nous intégrons maintenant sur \mathbb{R} le produit de $(E_{3,v})$ par $u_v^{(3)}$

$$(E_{3,v}) \quad \frac{\partial u_v^{(3)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_v(u_v) \frac{\partial u_v^{(3)}}{\partial x} \right\} + 20 u_v^{(2)} u_v^{(3)} + 8 u_v^{(1)} \frac{\partial u_v^{(3)}}{\partial x} = 0$$

L'estimation sur $\|u_v^{(3)}\|_{L^\infty(L^2)}$ est obtenue en utilisant à nouveau le lemme de Gronwall: il suffit au préalable de majorer l'expression

$$\begin{aligned} F_{3,v}(t) &= 40 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)}(t,x) (u_v^{(3)}(t,x))^2 dx + 16 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)}(t,x) \frac{\partial u_v^{(3)}}{\partial x}(t,x) u_v^{(3)}(t,x) dx \\ &= 32 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)}(t,x) (u_v^{(3)}(t,x))^2 dx \end{aligned}$$

$$|F_{3,v}(t)| \leq 32 u_v^{(2)}(t,0) |u_v^{(3)}(t)|^2$$

Alors comme en (IV.29), il vient

$$\frac{d}{dt} |u_v^{(3)}(t)|^2 + 32 u_v^{(2)}(t,0) |u_v^{(3)}(t)|^2 \leq 0$$

et

$$(IV.32) \quad |u_v^{(3)}(t)|^2 \leq \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 \exp\left\{-32 \int_0^t u_v^{(2)}(\sigma,0) d\sigma\right\}$$

d'où

$$(IV.33) \quad |u_v^{(3)}(t)|^2 \leq \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 \exp\left\{\frac{32t_*}{C}\right\}, \quad \forall t \leq t_*.$$

Nous avons également

$$\int_0^{t_*} \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) (u_v^{(4)})^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 \left(1 + \frac{32}{C} \exp\left\{\frac{32t_*}{C}\right\}\right)$$

La dernière estimation du lemme IV.3 ; $\frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial t}$ dans un borné de $L^2([0,t_*] \times \mathbb{R})$ est immédiate en retournant à l'équation $(E_{2,v})$.

Lemme IV.4

(Estimations a priori (II))

Lorsque $v \rightarrow 0$, sous les hypothèses de régularité du théorème IV.6,

on a:

$u_v^{(4)}$ et $u_v^{(5)}$ demeurent dans des bornés de $L^\infty([0,t_*]; L^2(\mathbb{R}))$,

$t_* = t_*(u_0, C)$ étant donné par le lemme IV.2.

Démonstration

Ecrivons les équations $(E_{4,v})$ et $(E_{5,v})$

$$(E_{4,v}) \quad \frac{\partial u_v^{(4)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [\phi_{4,v}(u_v)] + 30 u_v^{(2)} u_v^{(4)} + 20 [u_v^{(3)}]^2 + 10 u_v^{(1)} \frac{\partial u_v^{(4)}}{\partial x} = 0$$

$$(E_{5,v}) \quad \frac{\partial u_v^{(5)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [\phi_{5,v}(u_v)] + 42 u_v^{(2)} u_v^{(5)} + 70 u_v^{(3)} u_v^{(4)} + 12 u_v^{(1)} \frac{\partial u_v^{(5)}}{\partial x} = 0$$

Nous continuons le travail de recherche d'estimations à priori, et pour cela nous intégrons sur \mathbb{R} le produit resp. par $u_v^{(4)}$, $u_v^{(5)}$ des équations $(E_{4,v})$, $(E_{5,v})$.

Il suffit d'estimer les expressions

$$\begin{aligned} F_{4,v}(t) &= 25 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)} [u_v^{(4)}]^2 dx + 20 \int_{\mathbb{R}} [u_v^{(3)}]^2 u_v^{(4)} dx \\ &= 25 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)} [u_v^{(4)}]^2 dx, \quad (\text{puisque } \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \{ [u_v^{(3)}]^3 \} dx = 0) \end{aligned}$$

$$F_{5,v}(t) = 36 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)} [u_v^{(5)}]^2 dx + 70 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(3)} u_v^{(4)} u_v^{(5)} dx$$

Nous avons

$$(IV.34 a) \quad |F_{4,v}(t)| \leq -25 u_v^{(2)}(t,0) \cdot |u_v^{(4)}(t)|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

$$(IV.34 b) \quad |F_{5,v}(t)| \leq \left(-36 u_v^{(2)}(t,0) + 35 |u_v^{(3)}(t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) |u_v^{(5)}(t)|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

et alors

$$(IV.35 a) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(4)}(t)|^2 \leq |F_{4,v}(t)|$$

$$(IV.35 b) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(5)}(t)|^2 \leq |F_{5,v}(t)|$$

Les estimations à priori (II) résultent de (IV.22) et du lemme de Gronwall, appliqué en (IV.35 a et b).

Remarque IV.5 En fait nous avons également des estimations relatives à $\Phi_{4,v}(u_v)$, $\Phi_{5,v}(u_v)$ et $\frac{\partial u_v^{(4)}}{\partial t}$, comme à la fin de la démonstration du lemme IV.3.

Remarque IV.6 On pourrait s'attendre à rechercher des informations sur les équations - dérivées $(E_{2i,v})$ prises en $x = 0$, pour poursuivre le travail de majoration à priori. Le lemme IV.4 prouve qu'il n'en est rien, et que les propriétés essentielles sont: $u_v^{(2)}(t, \cdot)$ du type négatif $\forall t \geq 0$ et (IV.22). Il est donc possible de donner le lemme:

Lemme IV.5 (Estimations à priori (III))

Lorsque $v \rightarrow 0$, sous les hypothèses du théorème IV.6, $t_* = t_*(u_0, c)$ étant donné par le lemme IV.2, on a pour tout m entier ≥ 4 :

$$u_v^{(m)} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty([0, t_*]; L^2(\mathbb{R}))$$

$$\Phi_m(u_v) \text{ et } \frac{\partial u_v^{(m)}}{\partial t} \text{ demeurent dans des bornés de } L^2([0, t_*] \times \mathbb{R}).$$

Démonstration

Rappelons le lemme III.2

$$(E_{m,v}) \quad \frac{\partial u_v^{(m)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{m,v}(u_v)] + f_{m,v} = 0$$

où

$$(IV.36) \quad f_{m,v} = 2 \sum_{p=1}^m C_{m+1}^p u_v^{(p)} u_v^{(m-p+2)}$$

Nous avons de façon standard,

$$(IV.37) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(m)}(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) [u_v^{(m+1)}]^2 dx + F_{m,v}(t) = 0$$

Nous procédons par récurrence sur m : le lemme est supposé acquis jusqu'à l'ordre $m - 1$.

D'après les lemmes d'estimations à priori (I) et (II), il suffit d'estimer $F_{m,v}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{m,v}(t,x) u_v^{(m)}(t,x) dx$. Or tous les termes intervenant dans $F_{m,v}(t)$ sont du type (i) ou (ii) suivant :

$$(i) \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)} \cdot [u_v^{(m)}]^2 dx ,$$

et alors puisque $u_v^{(2)}(t, \cdot)$ est du type négatif (cf. IV.23), et en raison de (IV.22) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} u_v^{(2)} \cdot [u_v^{(m)}]^2 dx \right| &\leq -u_v^{(2)}(t,0) \cdot |u_v^{(m)}(t)|^2 \\ &\leq \frac{1}{c} |u_v^{(m)}(t)|^2 \text{ pour } t \leq t_* . \end{aligned}$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}} u_v^{(k)} \cdot u_v^{(m+2-k)} u_v^{(m)} dx \quad \text{avec } 3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

et alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u_v^{(k)} u_v^{(m+2-k)} u_v^{(m)} dx \right| \leq \frac{1}{2} |u_v^{(k)}(t)|_{\infty} \{ |u_v^{(m+2-k)}(t)|^2 + |u_v^{(m)}(t)|^2 \}$$

Au type (i) correspondent, cf.(IV.36), les valeurs de p égales 1, 2, m , soit exactement $2 \{ C_{m+1}^2 + C_{m+1}^m - \frac{1}{2} C_{m+1}^1 \} = (m+1)^2$ termes.

Au type (ii) correspondent les valeurs de p , $3 \leq p \leq m-1$, soit pour chaque k , $3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$, exactement

$$2 \{ C_{m+1}^k + C_{m+1}^{m+k-2} \} = 2 \mathcal{N}_{(k,m)} \text{ termes .}$$

Nous déduisons en particulier de (IV.37) :

$$(IV.38 a) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(m)}(t)|^2 \leq |F_{m,v}(t)|$$

$$(IV.38 b) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(k)}(t)|^2 \leq -2(m+1)^2 u_v^{(2)}(t,0) |u_v^{(m)}(t)|^2 + \sum_{k=3}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1} \mathcal{N}_{(k,m)} |u_v^{(k)}(t)|_{\infty} |u_v^{(m)}(t)|^2$$

$$+ \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \mathcal{N}_{(k,m)} |u_v^{(k)}(t)|_\infty |u_v^{(m+2-k)}(t)|^2$$

Nous utilisons (IV.22), $0 < -u_v^{(2)}(t,0) < \frac{1}{C}$ pour $t \leq t_*$, et les estimations supposées établies dans la récurrence pour $t \leq t_*$, $|u_v^{(k)}(t)|_\infty \leq C$ et $|u_v^{(m+2-k)}(t)|^2 \leq C$, C designant des constantes dependant de $\exp\{\frac{t_*}{C}\}$ et de u_0 . Nous obtenons

$$(IV.38 c) \quad \frac{d}{dt} |u_v^{(m)}(t)|^2 \leq d_1 |u_v^{(m)}(t)|^2 + a_2$$

$$\text{où} \quad d_i = d_i(\exp\{\frac{t_*}{C}\}, m, u_0) \quad i = 1, 2 \quad .$$

A partir de (IV.38 c), le lemme de Gronwall fournira donc un résultat de la forme

$$|u_v^{(m)}(t)|^2 \leq C = C(u_0, m, t_*) \quad \text{pour } t \leq t_*$$

d'où

$$u_v^{(m)} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty([0, t_*]; L^2(\mathbb{R})) .$$

Revenant à (IV.37) nous avons

$$\int_0^{t_*} \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) [u_v^{(m+1)}]^2 dx dt \leq C$$

et par suite $\phi_m(u_v)$ demeure dans un borné de $L^2([0, t_*] \times \mathbb{R})$.

En retournant à l'équation $(E_{m-1,v})$ on déduit que $\frac{\partial u_v^{(m-1)}}{\partial t}$ reste borné dans $L^2([0, t_*] \times \mathbb{R})$.

Remarque IV.7

Il ne semble pas que l'on puisse s'affranchir du paramètre

$$C, \quad 0 < C < -\frac{1}{\frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)} \quad \text{dans } t_* = t_*(u_0, C) \text{ et dans les estimations (I)(II)(III),}$$

cela est lié à la convergence de l'intégrale (cf. (IV.30)(IV.32) etc...)

$$\int_0^{T_*} u_v^{(2)}(\sigma, 0) d\sigma \quad \text{où} \quad T_* = \frac{-1}{6 \frac{d^2 u_0}{dx^2}(0)}$$

Fin de la démonstration des théorèmes IV.5 et IV.6

Nous avons ainsi établi toutes estimations nécessaires pour justifier les passages à la limite, lorsque $v \rightarrow 0$ dans la suite d'équations $\{(E_{m,v})\}_m$.

Il existe une suite $v' \rightarrow 0$ telle que

$$(IV.39) \quad \begin{cases} u_{v'} \longrightarrow u \\ u_{v'}^{(1)} \longrightarrow \ddot{u}^{(1)} \end{cases} \quad \text{dans la situation du théorème IV.2 et de la remarque IV.2.}$$

$$(IV.40) \quad u_{v'}^{(m)} \longrightarrow u^{(m)} \quad \text{dans } L^\infty([0, t_*] ; L^2(\mathbb{R})) \text{ faible, } \forall m \geq 2.$$

$$(IV.41) \quad \frac{\partial u_{v'}^{(m)}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} \quad \text{dans } L^2([0, t_*] \times \mathbb{R}) \text{ faible, } \forall m \geq 1.$$

Un procédé itératif analogue à celui utilisé à la fin du §III.3 dans le théorème III.4, permet de conclure:

$$(IV.42) \quad u^{(m)} \in L^\infty([0, t_*] \times \mathbb{R}) \quad \forall m \geq 2$$

$$(IV.43) \quad u \in C^\infty([0, t_*] \times \mathbb{R}) \quad \text{où } t_* = t_*(u_0, C) \text{ est donné par le lemme IV.2.}$$

Donc, comme $t_* < T_*$ est arbitrairement voisin de T_* , on a aussi

$$(IV.44) \quad u \in C^\infty([0, T_*] \times \mathbb{R}).$$

IV.5 DEMONSTRATION DU THEOREME IV.4.

Les solutions u de (E) sont donc obtenues comme limite d'une suite $\{u_v\}$ extraite de la famille des solutions des équations (E_v) . A la suite des §IV.3 et IV.4, nous savons également que u vérifie

$$(IV.45) \quad \frac{\partial}{\partial t} [u(t, 0)] = 0 \text{ et } u(t, 0) = u_0(0) \quad \text{pour } 0 \leq t < T_*$$

$$(IV.46) \quad u \in L_{loc}^\infty([0, T_*] ; H^2(\mathbb{R}))$$

C'est ce dernier point qu'il nous faut préciser en donnant la démonstration du théorème IV.4.

Tout le travail essentiel au paragraphe précédent, lorsque la donnée initiale u_0 est du type positif et dans $H^4(\mathbb{R})$, est contenu dans les lemmes IV.2 et IV.3, et dans le lemme VI.4 dont il faudrait exhiber l'estimation a priori

$$v^{1/2} u_v^{(4)} \text{ demeure dans un borné de } L^2([0, t_*] ; C^0(\mathbb{R})) . \quad (1)$$

Supposons maintenant que u_0 donné de type positif dans $H^2(\mathbb{R})$ avec $\widehat{u_0^{(2)}} \in L^1(\mathbb{R}_\xi)$.

$\eta > 0$ étant un paramètre à préciser, si $u_{0\eta}$ est du type positif dans $H^3(\mathbb{R})$ ou $H^4(\mathbb{R})$, $u_{0\eta}^{(2)}(0)$ a un sens et d'après le lemme IV.2, nous avons

$$(0 < c < -\frac{1}{u_{0\eta}^{(2)}(0)})$$

$$(IV.47) \quad \begin{cases} \exists \tilde{t}_* = \tilde{t}_*(u_{0\eta}, c) = \frac{1}{6} \left\{ -\frac{1}{u_{0\eta}^{(2)}(0)} - c \right\} \text{ tel que} \\ 0 > u_{v\eta}^{(2)}(t, 0) > -\frac{1}{c} \text{ pour } 0 \leq t \leq \tilde{t}_* , \end{cases}$$

et d'après le lemme IV.3,

$$(IV.48) \quad |u_{v\eta}^{(2)}(t)|^2 \leq |u_{0\eta}^{(2)}|^2 \exp \left\{ \frac{6\tilde{t}_*}{c} \right\} , \quad 0 \leq t \leq \tilde{t}_* .$$

Précisément, nous choisissons $u_{0\eta}$ tel que, lorsque $\eta \rightarrow 0$,

$$(IV.49) \quad \begin{array}{ccc} u_{0\eta} & \longrightarrow & u_0 \text{ dans } H^2(\mathbb{R}) \\ \widehat{u_{0\eta}^{(2)}} & \longrightarrow & \widehat{u_0^{(2)}} \text{ dans } L^1(\mathbb{R}_\xi) \end{array}$$

par exemple,

$$(IV.50) \quad u_{0\eta} = \phi_\eta * u_0 \text{ avec } \phi_\eta(x) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x^2}{2\eta}}$$

Il est facile de voir qu'alors

$$\widehat{\phi}_\eta(\xi) = \phi(\eta\xi) \text{ où } \phi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

(1) cf. également la note (1) accompagnant la proposition IV.2 ci-après.

et par conséquent (théorème de Lebesgue) lorsque $\eta \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u_{0\eta}^{(2)}}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi_\eta}(\xi) \widehat{u_0^{(2)}}(\xi) d\xi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u_0^{(2)}}(\xi) d\xi .$$

Nous notons que $u_{0\eta} >> 0$, $-u_{0\eta}^{(2)} >> 0$ et $0 < -u_{0\eta}^{(2)}(0) = \widehat{|u_{0\eta}^{(2)}|}_{L^1}$

Alors nous avons, lorsque $\eta \rightarrow 0$,

$$(IV.51) \quad \tilde{t}_*(u_{0\eta}, C) \longrightarrow t_* = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{\widehat{|u_0^{(2)}|}_{L^1}} - C \right\} ,$$

et

$$(IV.52) \quad |u_v^{(2)}(t)|^2 \leq Cste. \exp\left\{ \frac{6t_*}{C} \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_* .$$

En faisant maintenant $v \rightarrow 0$, on finit la démonstration du théorème.

Le résultat (IV.15) est très exactement

$$u \in L^\infty([0, T_* - C]; H^2(\mathbb{R})) \text{ avec } T_* = \frac{1}{6 \widehat{|u_0^{(2)}|}_{L^1}} \quad (1)$$

IV.6 UNICITE ET DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE SUR $[0, T_*[\times \mathbb{R}$.

Proposition IV.1 Soit u_0 donné avec

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad u_0 >> 0 .$$

Le problème associé à l'équation maîtresse (E) admet au plus une solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ telle que

$$(IV.53) \quad u(t, 0) = u_0(0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq t \leq T .$$

Supposons que u_0 soit tel que

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \widehat{u_0^{(2)}} \in L^1(\mathbb{R}_\xi) ,$$

Alors les théorèmes IV.2 et IV.4 entraînent l'existence et l'unicité de u solution de (E) dans $L^\infty_{loc}([0, T_*[; H^2(\mathbb{R}))$.

(1) Dès que $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$, c'est le même T_* que dans le théorème IV.5.

Démonstration

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (E)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{u_i(\cdot, 0) - u_i\}^2 = 0 \quad i = 1, 2$$

d'où, en posant $u = u_1 - u_2$,

$$(IV.54) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{(u(\cdot, 0) - u) (u_1(\cdot, 0) - u_1 + u_2(\cdot, 0) - u_2)\} = 0$$

Sous les conditions (IV.53), il revient au même de faire apparaître l'unicité de $u(\cdot, 0) - u$. Nous réécrivons donc l'équation (IV.54) et la multiplions par $u(\cdot, 0) - u$, puis nous intégrons sur \mathbb{R} :

$$(IV.55) \quad \frac{\partial}{\partial t} (u(\cdot, 0) - u) - \frac{\partial}{\partial x} \{(u_1(\cdot, 0) - u_1 + u_2(\cdot, 0) - u_2) \frac{\partial}{\partial x} (u(\cdot, 0) - u)\} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \{(u(\cdot, 0) - u) \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2)\} = 0$$

$$(IV.56) \quad \frac{d}{dt} |u(t, 0) - u(t, \cdot)|^2 + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_1 + u_2) \left[\frac{\partial}{\partial x} (u(t, 0) - u(t, x)) \right]^2 dx \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x^2} (u_1 + u_2) (u(\cdot, 0) - u(t, x))^2 dx$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

Il vient en particulier

$$\frac{d}{dt} |u(t, 0) - u(t, \cdot)|^2 \leq \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_1 + u_2) (t, \cdot) \right|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u(t, 0) - u(t, \cdot)|^2$$

d'où le résultat d'unicité en appliquant le lemme de Gronwall.

La deuxième partie de la proposition est immédiate.

$$(IV.53) \text{ est vérifié pour } 0 \leq t < T_* = \frac{1}{6} \widehat{|u_0^{(2)}|}_L^{-1}$$

Proposition IV.2 (Résultat local sur $[0, T_*[$).

Si la donnée initiale u_0 est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors

(i) u solution de (E) est dans $C_0^\infty([0, T_*[\times \mathbb{R})$

(ii) la dérivée seconde en $x = 0$, $D(\cdot) = u^{(2)}(\cdot, 0)$, est la solution d'une équation différentielle de Ricatti ($0 \leq t < T_*$) :

$$(IV.57) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} D(t) + 6 D^2(t) = 0 \\ D(0) = D_0 = u_0^{(2)}(0) \end{cases}$$

(iii) On a le développement ($0 \leq t < T_*$) :

$$(IV.58) \quad u(t, x) = u(t, 0) + 2x^2 D(t) + \dots + O(x^{2p})$$

Démonstration

L'assertion (ii) confirme ce que nous avons au cours de la démonstration du théorème négatif de §IV.1. L'équation (IV.57) s'obtient en effet aisément en passant à la limite lorsque $v \rightarrow 0$ dans l'équation (IV.20) et en utilisant la notation $D(\cdot)$. ⁽¹⁾

D'autre part u est dans $C^\infty([0, T_*[\times \mathbb{R})$ (Théorème IV.6). Alors nous pouvons écrire un développement en série de Mac-Laurin ($0 \leq t < T_*$) :

$$u(t, x) = u(t, 0) + 2x^2 D(t) + \dots + \sum_{k \leq p} \gamma_k x^{2k} u^{(2k)}(t, 0) + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} u^{(2p+2)}(t, \xi) d\xi,$$

le type positif et la parité de $u(t, \cdot)$ faisant que $u^{(2k+1)}(t, 0) = 0$, $t < T_*$.

⁽¹⁾ Là encore dans le passage à la limite, il suffirait de supposer u_0 dans $H^4(\mathbb{R})$ pour justifier que

$$\begin{aligned} u_v^{(2)} &\longrightarrow u^{(2)} \text{ dans } L^\infty([0, t_*] ; H^2(\mathbb{R})) \\ v u_v^{(4)}(\cdot, 0) &\longrightarrow 0 \text{ comme } \sqrt{v} \text{ dans } L^2(0, t_*). \end{aligned}$$

Il n'y a aucune difficulté à observer que

$$\int_0^x (x - \xi)^{2p+1} u^{(2p+2)}(t, \xi) d\xi = O(x^{2p+2}) .$$

On notera enfin que le développement (I.58) vaut avec $p = 2$, si on suppose $u_0 \in H^5(\mathbb{R})$.

CHAPITRE V - Résultats de régularité globaux à viscosité $\nu = 0$.

V.1. NOUVEAUX RESULTATS GLOBAUX A $\nu = 0$.

Dans le théorème IV.2, précisé par la remarque IV.2, nous avons obtenu pour l'équation maîtresse (E), l'existence de solutions u dans la classe des fonctions de type positif appartenant à $L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ et telles que

$\frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \cap L^2(]0, \infty[; C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$: en fait il existe une suite $u_\nu \rightarrow 0$ et une fonction u dans la classe précédente, telles que $u_\nu \rightarrow u$ dans $L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ faible-étoile.

Recherchant des résultats de régularité globaux (relativement au temps), nous allons établir le théorème :

Théorème V.1. On suppose la donnée initiale $u_0 >> 0$ telle que $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, alors u vérifie : (cf. théorème IV.2 et remarques IV.2)

$$(V.1) \quad \begin{cases} u \in L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \cap L^2(]0, \infty[; C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \end{cases}$$

$$(V.2) \quad \begin{cases} \phi_0(u) \in L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \\ \alpha(u) \phi_2(u) \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$(V.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) .$$

La démonstration est fondée sur la nature des solutions qui sont donc limites de suites $\{u_\nu\}$ et sera décomposée dans les lemmes qui suivent.

Tout d'abord, nous nous reportons au théorème de régularité du chapitre III et à sa démonstration ; alors sous l'hypothèse faite ici, u_0 dans $H^2(\mathbb{R})$, nous avons le premier lemme d'estimations :

Lemme V.1. On a $u_v^{(2)} \in L^2(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u_v^{(1)}}{\partial t} \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$ et lorsque $v \rightarrow 0$,

- u_v borné dans $L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$
- $v^{1/2} u_v^{(2)}$ borné dans $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$
- $v u_v^{(2)}$ borné dans $L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$
- $v^{3/2} u_v^{(3)}$ borné dans $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$.

De même, on note que

- $\alpha(u_v)^{1/2} u_v^{(2)}$ borné dans $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$
- $v \alpha(u_v) u_v^{(3)}$ borné dans $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Démonstration.

Une partie de ces estimations est connue et n'est qu'un rappel de la remarque III.3 (cf. remarque III.3).

Les autres estimations se déduisent de (III.29) où nous prenons $n = 2$: ayant alors justifié l'écriture de l'équation $(E_{2,v})$, nous avons intégré sur \mathbb{R} le produit de $(E_{2,v})$ par $u_v^{(2)}$, de façon précise,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_v^{(2)}(t)|^2 + v \left| \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x}(t) \right|^2 + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v) \left(\frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx \\ = 6 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)}(t, x) u_v^{(2)}(t, x) \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x}(t, x) dx \\ \leq 6 |u_v^{(1)}(t)|_\infty \cdot |u_v^{(2)}(t)| \cdot \left| \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x}(t) \right| \\ \leq \frac{18}{v} |u_v^{(1)}(t)|_\infty^2 \cdot |u_v^{(2)}(t)|^2 + \frac{v}{2} \left| \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x}(t) \right|^2 \end{aligned}$$

d'où, en multipliant en outre par v^2 ,

$$\begin{aligned} (V.4) \quad v^2 \frac{d}{dt} |u_v^{(2)}(t)|^2 + v^3 \left| \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x}(t) \right|^2 + 2v^2 \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v) (u_v^{(3)})^2 dx \\ \leq 36 |u_v^{(1)}(t)|_\infty^2 \cdot v |u_v^{(2)}(t)|^2. \end{aligned}$$

Puisque $v^{1/2} u_v^{(2)}$ reste borné dans $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$, nous obtenons successivement

$$(V.5) \quad |v u_v^{(2)}(t)|^2 \leq C, \quad \forall t \geq 0$$

$$(V.6) \quad \int_0^\infty |v^{3/2} u_v^{(3)}(t)|^2 dt \leq C$$

$$(V.7) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} v^2 \alpha(u_v) (u_v^{(3)})^2 dx dt \leq C.$$

Il semble qu'il faille procéder différemment si l'on veut améliorer ces estimations. Nous nous fixons comme objectif une estimation de $\phi_1(u_v) = \alpha(u_v) u_v^{(2)}$ dans $L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$.

Lemme V.2.

$\phi_1 = \phi_1(u_v)$ vérifie l'équation suivante

$$(V.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_1] - 2v u_v^{(2)}(., 0) u_v^{(2)} = \psi_1$$

où

$$(V.9) \quad \psi_1 = -4 u_v^{(2)} \cdot \phi_1 - 4 [u_v^{(1)}]^2 \cdot u_v^{(2)} - v f_2$$

avec $f_2 = 6([u_v^{(2)}]^2 + u_v^{(1)} u_v^{(3)})$ (cf. lemme III.2).

Démonstration.

Sous l'hypothèse $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, la solution u_v de l'équation maîtresse (E_v) est "assez" régulière (cf. §.III.3) :

(i) $u_v^{(2)} \in L^2(0, \infty; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}))$.

(ii) Nous disposons des deux premières équations $(E_{1,v})$ et $(E_{2,v})$.

(iii) Nous savons donner un sens à l'équation (E_v) prise en $x = 0$.

Tout cela permet notamment de justifier le fait qu'on pourra différencier l'équation vérifiée par $\phi_{0,v}(u_v) = (v + \alpha(u_v)) u_v^{(1)}$, cf. (V.10).

En tenant compte des équations (E_v) , $(E_{1,v})$ et (E_v) prise en $x = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{0,v} &= \alpha_v(u_v) \frac{\partial u_v^{(1)}}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial u_v}{\partial t} (., 0) - \frac{\partial u_v}{\partial t} \right) \cdot u_v^{(1)} \\ &= \alpha_v(u_v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{0,v} + 2v u_v^{(2)}(., 0) u_v^{(1)} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \phi_{0,v} \cdot u_v^{(1)} \end{aligned}$$

d'où

$$(V.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_{0,v} = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_{0,v}] + 2v u_v^{(2)}(.,0) u_v^{(1)} .$$

En différentiant par rapport à x , nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi_{0,v} = \phi_{1,v} - 2[u_v^{(1)}]^2 \quad \text{et ,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi_{1,v} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha_v(u_v) \phi_{1,v}] - 2v u_v^{(2)}(.,0) u_v^{(2)} &= 2 \frac{\partial}{\partial t} [(u_v^{(1)})^2] \\ &- 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha_v(u_v) [u^{(1)}]^2] . \end{aligned}$$

$$(V.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{1,v} - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_{1,v}] - 2v u_v^{(2)}(.,0) u_v^{(2)} \\ = 4u_v^{(1)} \cdot \frac{\partial u_v^{(1)}}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) u_v^{(1)} u_v^{(2)}] + 4 \frac{\partial}{\partial x} [(u_v^{(1)})^3] . \end{aligned}$$

Isolons maintenant $\phi_1 = \phi_{1,v} - v u_v^{(2)}$, en ajoutant à (V.11) le produit par v de l'équation $(E_{2,v})$ et en introduisant $(E_{1,v})$ au second membre ; le calcul nous donne (V.8), (V.9).

Remarque V.1.

Nous avons déjà noté le rôle privilégié que joue la forme $\phi_0(u_v)$ au sein du présent travail. En (V.10), elle est donc solution d'une équation qui présente une certaine parenté avec l'équation maîtresse (E_v) .

Remarque V.2.

En poursuivant la démonstration du théorème V.1, nous allons faire apparaître un nouveau raisonnement pouvant être ré-itéré qui privilégie cette fois la forme $\alpha(u_v) \phi_2(u_v)$.

Lemme V.3.

Lorsque $v \rightarrow 0$ et indépendamment de v , on a

$$(V.12) \quad \phi_1(u_v) = \alpha(u_v) u_v^{(2)} \quad \text{borné dans } L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$$

$$(V.13) \quad \alpha(u_v) \phi_2(u_v) = [\alpha(u_v)]^2 u_v^{(3)} \quad \text{borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}) .$$

Démonstration.

Il s'agit donc d'un travail d'estimation a priori sur l'équation (V.8).

Multiplions (V.8) par $\phi_1 = \alpha(u_v) u_v^{(2)}$ et intégrons en espace. Au membre de gauche, utilisant le type négatif de $u_v^{(2)}(t, \cdot)$ c'est-à-dire $-u_v^{(2)}(t, 0) > 0 \quad \forall t \geq 0$ cf. (IV.23), il apparaît en particulier

$$\int_{\mathbb{R}} -v u_v^{(2)}(\cdot, 0) \alpha(u_v) \cdot [u_v^{(2)}]^2 dx \geq 0 .$$

Alors

$$(V.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\phi_1(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}} \alpha_v(u_v) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_1 \cdot \phi_1 dx \quad \text{avec (V.9)} .$$

Regardons successivement chaque terme du membre de droite de (V.14) :

$$(i) \quad - \int_{\mathbb{R}} v f_2 \cdot \phi_1 dx = - 6 \int_{\mathbb{R}} v \frac{\partial}{\partial x} (u_v^{(1)} u_v^{(2)}) \cdot \phi_1 dx \\ = 6 \int_{\mathbb{R}} v^{1/2} \cdot v^{1/2} u_v^{(2)} \cdot u_v^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 dx \\ \leq 18 |u_v^{(1)}(t)|_{\infty}^2 \cdot |v^{1/2} u_v^{(2)}(t)|^2 + \frac{v}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(t) \right|^2$$

$$(ii) \quad - 4 \int_{\mathbb{R}} [u_v^{(1)}]^2 \cdot \alpha(u_v) \cdot [u_v^{(2)}]^2 dx = - (\geq 0)$$

$$(iii) \quad - 4 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} u_v^{(1)} \cdot [\phi_1]^2 dx = 8 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)} \cdot \phi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 dx \\ = 8 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)} \cdot \alpha(u_v)^{1/2} u_v^{(2)} \cdot \alpha(u_v)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 dx \\ \leq 32 |u_v^{(1)}(t)|_{\infty}^2 \cdot |[\alpha(u_v)^{1/2} u_v^{(2)}](t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v) \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1\right)^2 dx .$$

Les termes $\frac{v}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(t) \right|^2$ et $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v) \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1\right)^2 dx$ rentrent dans le membre de gauche

Nous appliquons le lemme V.1 sur les termes restant en (i) et (iii), alors

$$(V.15) \quad \frac{d}{dt} |\phi_1(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}} (v + \alpha(u_v)) \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1\right)^2 dx \leq C \quad \text{indépendant de } v$$

$$(V.16) \quad \phi_1 \text{ borné dans } L^{\infty}(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$$

$$(V.17) \quad v^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 \text{ borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(V.18) \quad \alpha(u_v)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 \text{ et } \alpha(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 \text{ bornés dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}) .$$

On déduit aisément de (V.18)

$$(V.19) \quad \begin{cases} [\alpha(u_v)]^2 u_v^{(2)} = \alpha(u_v) \phi_1(u_v) & \text{borné dans } L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \\ [\alpha(u_v)]^2 u_v^{(3)} = \alpha(u_v) \phi_2(u_v) & \text{borné dans } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) . \end{cases}$$

Le théorème V.1 tire les conséquences du lemme précédent à la limite lorsque $v \rightarrow 0$:

$$(V.20) \quad \begin{cases} \phi_1(u) \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \\ \alpha(u) \phi_1(u) \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \\ \alpha(u) \phi_2(u) \in L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}) . \end{cases}$$

Et par conséquent, tenant compte du type positif de u , $\alpha(u)(., x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$ nous déduisons de (V.19) et (V.20) que pour presque tout $t \geq 0$,

$$(V.21) \quad \phi_1(u) \text{ et } u^{(2)}(t, .) \text{ sont continus sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Enfin, remarquons que nous avons (cf. théorème IV.2)

$$\phi_0(u) \in L^2([0, \infty[; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}) ,$$

de plus,

$$(V.22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \phi_0(u) = \phi_1(u) - 2[u^{(1)}]^2 \in L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) .$$

Cela achève la démonstration du théorème V.1.

Remarque V.3.

Esquisons un bilan :

Le théorème V.1 précise la classe des solutions de (E) obtenues à partir de la suite $\{u_v\}$ sous l'hypothèse d'une condition initiale u_0 donnée de type positif dans $H^2(\mathbb{R})$. Ces solutions sont nécessairement irrégulières au bout d'un temps fini : si en outre $\widehat{u_0^{(2)}} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^+)$, les résultats des théorèmes IV.3 et IV.4 déterminent ce temps et mettent en évidence la "catastrophe énergétique".

Les notations sont $\tau = \frac{d}{dt} u(., 0)$ pour la dissipation énergétique et $D = u^{(2)}(., 0)^{(1)}$. Nous avons donc

(1) $D(.)$ correspond à la notion de l'entrophie, notion habituelle pour les chercheurs travaillant en Géophysique et en Astrophysique (cf. [])

(i) Avant le "temps" de la "catastrophe" $T_* = \frac{1}{6 \widehat{|u_o^{(2)}|}_{L^1}}$:

- $\tau(.) \equiv 0$, l'énergie est conservée.
- $D(t) = \frac{D_o}{1+6D_o t}$ avec $D_o = \widehat{|u_o^{(2)}|}_{L^1}$
- $u \in L^\infty(0, \infty; H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, T_*; H^2(\mathbb{R}))$
- La solution u est unique et plus régulière (cf. les propositions IV.1 et IV.2).

(ii) Au "temps" de la "catastrophe",

- $D(t) \rightarrow -\infty$, lorsque $t \rightarrow T_*$.
- à $t = T_*$ apparaît une discontinuité de $\frac{\partial u}{\partial x}(t, .)$ en $x = 0$.

(iii) Après le "temps" de la "catastrophe",

- $\tau(.) \equiv -2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(., 0^+) \right]^2$, l'énergie se dissipe.
- $D(.) = -\infty$
- $u \in L^\infty(0, \infty; H^1(\mathbb{R}))$
- $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0, \infty; C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$, les singularités ne se développent qu'en $x = 0$.

V.2. REGULARITE C^∞ EN $x \neq 0$.

Nous avons obtenu précédemment, (cf. remarque V.1)

$$(V.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_{o,v} - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_{o,v}] - 2v u_v^{(2)}(., 0) u_v^{(1)} = 0$$

d'où, sous une donnée initiale très régulière, la suite d'équations-dérivées,

$$(V.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi_{o,v}^{(m)} - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_{o,v}^{(m)}] + \xi_m - 2v u_v^{(2)}(., 0) u_v^{(m+1)} = 0$$

avec

$$(V.24) \quad \begin{cases} \xi_m = 2 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{p=1}^m C_m^p u_v^{(p)} \phi_{o,v}^{(m-p+1)} \\ \phi_{o,v}^{(m)} = \phi_m(u_v) + v u_v^{(m+1)} - \tilde{\xi}_m \\ \tilde{\xi}_m = 2 \sum_{p=1}^m C_m^p u_v^{(p)} u_v^{(m-p+1)} \end{cases}$$

(V.23) (V.24) sont à rapprocher du lemme III.2, et résultent d'un calcul avec la formule de Leibniz .

Nous pourrions en déduire une nouvelle suite d'équations, régissant cette fois les formes $\phi_m(u_v) = \alpha(u_v) u_v^{(m+1)}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_m(u_v) - \frac{\partial}{\partial x} \{ \alpha_v(u_v) \frac{\partial}{\partial x} \phi_m(u_v) \} - 2v u_v^{(2)}(.,0) u_v^{(m+1)} = \psi_m$$

Nous n'expliciterons pas ψ_m car nous n'utilisons pas ici la formulation de ces équations. Le travail qui suit n'en est pas moins technique pour autant et reproduit le raisonnement du §.V.1. En fait, il nous conduit à des informations sur la régularité de $\alpha(u_v)^{\lambda(m)} u_v^{(m)}$ ($\lambda(m)$ à préciser) (cf. lemmes V.4, V.5 et V.6). Ces résultats de régularité permettent d'énoncer le théorème :

Théorème V.2. On suppose la donnée initiale $u_0 > 0$ telle que

$$(V.25) \quad u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) .$$

Alors u solution de l'équation maîtresse (E), donnée par la remarque IV.3 (cf. aussi le théorème V.1), vérifie

$$(V.26) \quad u \in L^\infty(]0, \infty[; H^1(\mathbb{R}))$$

$$(V.27) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(]0, \infty[; C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \cap L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(V.28) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) .$$

Plus précisément si $u_0 \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R})$, alors

$$(V.29) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(]0, \infty[; \mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})) .$$

Au paragraphe précédent, sachant que $\alpha(u_v)^{1/2} u_v^{(2)}$ demeure dans un borné de $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$, nous cherchions une estimation de $\phi_1(u_v) = \alpha(u_v) u_v^{(2)}$ dans $L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$, nous avons obtenu simultanément (V.17), (V.18), (V.19) et notamment $\alpha(u_v)^{3/2} u_v^{(3)}$ dans un borné de $L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$. [Il y a là la meilleure information obtenue en (V.18), (V.19)] .

Nous écrivons maintenant que $\alpha(u_v)^2 u_v^{(3)}$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \alpha(u_v)^2 u_v^{(3)} \} = 2 \alpha(u_v) u_v^{(3)} \left(\frac{\partial u_v}{\partial t}(\cdot, 0) - \frac{\partial u_v}{\partial t} \right) + \alpha(u_v)^2 \frac{\partial u_v^{(3)}}{\partial t}$$

et d'après les équations $(E_{1,v})$, $(E_{3,v})$ et (E_v) prise en $x = 0$,

$$(V.30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ \alpha(u_v)^2 u_v^{(3)} \} &= 2v u_v^{(2)}(\cdot, 0) \alpha(u_v) u_v^{(3)} + \alpha(u_v)^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ (v + \alpha(u_v)) u_v^{(4)} \} \\ &\quad - 2 \alpha(u_v) u_v^{(3)} \frac{\partial}{\partial x} \{ (v + \alpha(u_v)) u_v^{(1)} \} - \alpha(u_v)^2 f_3(u_v) \end{aligned}$$

avec $f_3(u_v) = 2 \sum_1^3 C_4^p u_v^{(p)} u_v^{(5-p)}$ (cf. lemme III.2).

Lemme V.4.

Lorsque $v \rightarrow 0$ est indépendamment de v ,

$$(V.31) \quad \alpha(u_v)^2 u_v^{(3)} \text{ reste borné dans } L^\infty(]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})),$$

$$(V.32) \quad \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)} \text{ reste borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

Démonstration.

Multiplions (V.30) par $\alpha(u_v)^2 u_v^{(3)}$ et intégrons en espace. Utilisant le type positif de $u_v(t, \cdot)$ et le type négatif de $u_v^{(2)}(t, \cdot)$, il apparaît en particulier :

$$\int_{\mathbb{R}} -v u_v^{(2)}(\cdot, 0) \alpha(u_v)^3 [u_v^{(3)}]^2 dx \geq 0.$$

Alors

$$(V.33) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} | \alpha(u_v)^2 u_v^{(3)} |^2 &+ \int_{\mathbb{R}} (v + \alpha(u_v)) [\alpha(u_v)]^4 [u_v^{(4)}]^2 dx \\ &\leq 8 \int_{\mathbb{R}} (v + \alpha(u_v)) [\alpha(u_v)]^3 u_v^{(1)} u_v^{(3)} u_v^{(4)} dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} (v + \alpha(u_v)) u_v^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{ [\alpha(u_v)]^3 [u_v^{(3)}]^2 \} dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} [\alpha(u_v)]^4 u_v^{(3)} f_3(u_v) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (V.34) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\alpha(u_v)^2 u_v^{(3)}|^2 + \nu |\alpha(u_v)^2 u_v^{(4)}|^2 + |\alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)}|^2 \\
 & \leq 4 \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v)^4 u_v^{(1)} u_v^{(3)} u_v^{(4)} dx + 12 \int_{\mathbb{R}} \nu \alpha(u_v)^3 u_v^{(1)} u_v^{(3)} u_v^{(4)} dx \\
 & \quad - 12 \int_{\mathbb{R}} \nu \alpha(u_v)^2 [u_v^{(1)}]^2 [u_v^{(3)}]^2 dx \\
 & \quad - 12 \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v)^3 [u_v^{(1)}]^2 [u_v^{(3)}]^2 dx \\
 & \quad - 20 \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v)^4 u_v^{(2)} [u_v^{(3)}]^2 dx
 \end{aligned}$$

(ce dernier terme, nous l'écrivons $\int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{ [\alpha(u_v)]^4 [u_v^{(3)}]^2 \} dx$)

$$\begin{aligned}
 & = 44 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)} \cdot \alpha(u_v)^{3/2} u_v^{(3)} \cdot \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)} \cdot dx \\
 & \quad + 12 \int_{\mathbb{R}} u_v^{(1)} \cdot \nu^{1/2} \alpha(u_v) u_v^{(3)} \cdot \nu^{1/2} \alpha(u_v)^2 u_v^{(4)} \cdot dx \\
 & \quad - 12 \int_{\mathbb{R}} [u_v^{(1)}]^2 \cdot [\nu^{1/2} \alpha(u_v) u_v^{(3)}]^2 \cdot dx \\
 & \quad - 172 \int_{\mathbb{R}} [u_v^{(1)}]^2 \cdot [\alpha(u_v)^{3/2} u_v^{(3)}]^2 \cdot dx .
 \end{aligned}$$

Tenant compte de ce que, (pour $\nu \rightarrow 0$)

- $u_v^{(1)}$ est borné dans $L^\infty(\cdot) [0, \infty[\times \mathbb{R}$,
- $\alpha(u_v)^{3/2} u_v^{(3)}$ est borné dans $L^2(\cdot) [0, \infty[\times \mathbb{R}$,
- $\nu^{1/2} \alpha(u_v) u_v^{(3)}$ est borné dans $L^2(\cdot) [0, \infty[\times \mathbb{R}$,

et faisant rentrer au membre de gauche

- $\nu^{1/2} \alpha(u_v)^2 u_v^{(4)}$,
- $\alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)}$,

il vient :

$$(V.35) \quad \frac{d}{dt} |\alpha(u_v)^2 u_v^{(3)}|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_v)^2 u_v^{(4)}|^2 + |\alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)}|^2 \leq C.M_\nu(t)$$

avec $\int_0^\infty M_\nu(t) dt \leq \text{Cte}$ indépendante de ν .

(V.31) et (V.32) se déduisent facilement de (V.35) ; nous avons en outre

$$(V.36) \quad \nu^{1/2} \alpha(u_v)^2 u_v^{(4)} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\cdot) [0, \infty[\times \mathbb{R} .$$

Lemme V.5.

Lorsque $v \rightarrow 0$ et indépendamment de v ,

$$(V.37) \quad \alpha(u_v)^{7/2} u_v^{(4)} \text{ reste borné dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R})),$$

$$(V.38) \quad \alpha(u_v)^4 u_v^{(5)} \text{ reste borné dans } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

Démonstration.

Elle est identique à celle du lemme V.4 :

$$(V.39) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{ \alpha(u_v)^{7/2} u_v^{(4)} \} - 7 v u_v^{(2)} (\cdot, 0) \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)} \\ - \alpha(u_v)^{7/2} \frac{\partial}{\partial x} \{ (v + \alpha(u_v)) u_v^{(5)} \} \\ = - 7 \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)} \frac{\partial}{\partial x} \{ (v + \alpha(u_v)) u_v^{(1)} \} - \alpha(u_v)^{7/2} f_4(u_v)$$

$$\text{avec } f_4(u_v) = 2 \sum_1^4 C_5^p u_v^{(p)} u_v^{(6-p)}.$$

Nous multiplions (V.39) par $\alpha(u_v)^{7/2} u_v^{(4)}$ et nous intégrons en espace.

Le traitement de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v)^7 u_v^{(4)} f_4(u_v) dx$ est un peu plus délicat que celui du terme correspondant en (V.33), (V.34) : de là vient que nous n'avons pas en (V.37) un résultat-amorce-de-réurrence du type $\alpha(u_v)^3 u_v^{(4)}$ borné dans $L^\infty(L^2)$ (cf. (V.12) et (V.31)).

Observons d'abord qu'avec (V.31), l'estimation suivante est immédiate :

$$(V.40) \quad \alpha(u_v)^2 u_v^{(2)} \text{ reste borné dans } L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

(V.40) nous permet ci-dessous de traiter l'intégrand $\alpha(u_v)^7 u_v^{(2)} [u_v^{(4)}]^2$. Il est également facile de voir qu'avec (V.32),

$$(V.41) \quad \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(3)} \text{ reste borné dans } L^2([0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R})).$$

(V.41) et V.31) nous permettent de traiter l'intégrand $\alpha(u_v)^7 [u_v^{(3)}]^2 u_v^{(4)}$.

De façon précise, l'inéquation de majoration est

$$\begin{aligned}
(V.42) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\alpha(u_\nu)^{7/2} u_\nu^{(4)}|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{7/2} u_\nu^{(5)}|^2 + |\alpha(u_\nu)^4 u_\nu^{(5)}|^2 \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_\nu)^7 u_\nu^{(1)} u_\nu^{(4)} u_\nu^{(5)} dx + C \int_{\mathbb{R}} \nu \alpha(u_\nu)^6 u_\nu^{(1)} u_\nu^{(4)} u_\nu^{(5)} dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} \nu \alpha(u_\nu)^5 [u_\nu^{(1)}]^2 [u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_\nu)^6 [u_\nu^{(1)}]^2 [u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_\nu)^7 u_\nu^{(2)} [u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_\nu)^7 [u_\nu^{(3)}]^2 u_\nu^{(4)} dx
\end{aligned}$$

(C désignant diverses constantes numériques)

$$\begin{aligned}
& = C \int_{\mathbb{R}} u_\nu^{(1)} \cdot \alpha(u_\nu)^{1/2} \cdot \alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)} \cdot \alpha(u_\nu)^4 u_\nu^{(5)} dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} u_\nu^{(1)} \cdot \alpha(u_\nu)^{1/2} \cdot \nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^2 u_\nu^{(4)} \cdot \nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{7/2} u_\nu^{(5)} dx \\
& \quad + C \nu \int_{\mathbb{R}} [u_\nu^{(1)}]^2 \cdot [\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_\nu) [u_\nu^{(1)}]^2 \cdot [\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} [\alpha(u_\nu)^2 u_\nu^{(2)}] \cdot [\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}]^2 dx \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}} [\alpha(u_\nu)^2 u_\nu^{(3)}] \cdot [\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(3)}] \cdot [\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}] dx
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
(V.43) \quad & \frac{d}{dt} |\alpha(u_\nu)^{7/2} u_\nu^{(4)}|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{7/2} u_\nu^{(5)}|^2 + |\alpha(u_\nu)^4 u_\nu^{(5)}|^2 \\
& \leq C \left[(1 + |u_\nu|_\infty) \cdot |u_\nu^{(1)}|_\infty^2 \{ |\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^2 u_\nu^{(4)}|^2 \} \right. \\
& \quad \left. + |\alpha(u_\nu)^2 u_\nu^{(2)}|_\infty |\alpha(u_\nu)^{5/2} u_\nu^{(4)}|^2 \right]
\end{aligned}$$

$$+ |\alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(3)}|_\infty \cdot |\alpha(u_v)^2 u_v^{(3)}| \cdot |\alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(4)}|.$$

De (V.43) nous déduisons (V.37), (V.38) et

$$(V.44) \quad v^{1/2} \alpha(u_v)^{7/2} u_v^{(5)} \text{ reste borné dans } L^2(\]0, \infty[\times \mathbb{R}),$$

ainsi que les estimations a posteriori :

$$(V.45) \quad \alpha(u_v)^{7/2} u_v^{(3)} \text{ reste borné dans } L^\infty(\]0, \infty[\times \mathbb{R}),$$

$$(V.46) \quad \alpha(u_v)^4 u_v^{(4)} \text{ reste borné dans } L^2(\]0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R})).$$

Lemme V.6.

Lorsque $v \rightarrow 0$ et indépendamment de v ,

$$(V.47) \quad \alpha(u_v)^{\lambda(m)} u_v^{(m)} \text{ reste borné dans } L^2(\]0, \infty[\times \mathbb{R}),$$

$$(V.48) \quad \alpha(u_v)^{\lambda(m)+1} u_v^{(m)} \text{ reste borné dans } L^\infty(\]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})),$$

avec pour tout $m \geq 5$,

$$(V.49) \quad \lambda(m) = \frac{3m - 7}{2}.$$

Démonstration.

Dans le passage récurrent de m à $m+1$, nous cherchons à estimer

$$\alpha(u_v)^{\lambda(m+1)+1} u_v^{(m+1)} = \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} u_v^{(m+1)} \text{ dans } L^\infty(\]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) \text{ et nous obtenons}$$

$$\text{simultanément } \alpha(u_v)^{\frac{3m-1}{2}} u_v^{(m+2)} \text{ dans un borné de } L^2(\]0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

Utilisant le lemme III.2 et l'équation maîtresse (E_v) prise en $x = 0$, nous écrivons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} u_v^{(m+1)} \right\} = (3m-2) \alpha(u_v)^{\frac{3m-4}{2}} u_v^{(m+1)} \cdot \left(\frac{\partial u_v}{\partial t}(\cdot, 0) - \frac{\partial u_v}{\partial t} \right)$$

$$+ \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} \frac{\partial u_v^{(m+1)}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
 (V.50) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} u_v^{(m+1)} \right\} - \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (v+\alpha(u_v)) u_v^{(m+2)} \right\} \\
 & - (3m-2)v u_v^{(2)}(.,0) \times \alpha(u_v)^{\frac{3m-4}{2}} u_v^{(m+1)} \\
 & = (3m-2) \alpha(u_v)^{\frac{3m-4}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (v+\alpha(u_v)) u_v^{(1)} \right\} u_v^{(m+1)} - \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} f_{m+1}(u_v)
 \end{aligned}$$

avec $f_{m+1}(u_v) = 2 \sum_{p=1}^{m+1} C_{m+2}^p u_v^{(p)} u_v^{(m-p+3)}$.

Nous multiplions (V.50) par $\alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} u_v^{(m+1)}$ et nous intégrons sur \mathbb{R}

De même que dans les lemmes V.4 et V.5, utilisant le type positif de $u_v(t,.)$ et le type négatif de $u_v^{(2)}(t,.)$, il apparaît en particulier

$$(3m-2) v \int_{\mathbb{R}} -u_v^{(2)}(.,0) \cdot \alpha(u_v)^{3m-3} [u_v^{(m+1)}]^2 dx \geq 0.$$

Et par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}
 (V.51) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \alpha(u_v)^{\frac{3m-2}{2}} u_v^{(m+1)} \right|^2 + \int_{\mathbb{R}} (v+\alpha(u_v)) u_v^{(m+2)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha(u_v)^{3m-2} u_v^{(m+1)} \right\} dx \\
 & \leq (3m-2) \int_{\mathbb{R}} (v+\alpha(u_v)) u_v^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha(u_v)^{3m-3} [u_v^{(m+1)}]^2 \right\} dx \\
 & \quad + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u_v)^{3m-2} f_{m+1}(u_v) u_v^{(m+1)} dx.
 \end{aligned}$$

Soit $\tilde{f}_{m+1}(u_v) = f_{m+1}(u_v) - 2(m+2) u_v^{(1)} u_v^{(m+2)} = 2 \sum_{p=2}^{m+1} C_{m+2}^p u_v^{(p)} u_v^{(m-p+3)}$

$$(V.52) \quad \alpha(u_v)^{\frac{3m}{2}} \tilde{f}_{m+1}(u_v) \text{ reste borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que

$$(V.53) \quad \alpha(u_v)^{\lambda(m+1)} u_v^{(m+1)} \text{ reste borné dans } L^2(]0, \infty[\times \mathbb{R})$$

et pour $p \leq m$,

$$(V.54) \quad \begin{cases} \alpha(u_v)^{\lambda(p)} u_v^{(p)} & \text{reste borné dans } L^2(\]0, \infty[\times \mathbb{R}) \\ \alpha(u_v)^{\lambda(p)+1} u_v^{(p)} & \text{reste borné dans } L^\infty(\]0, \infty[; L^2(\mathbb{R})) . \end{cases}$$

Nous savons aussi que

$$(V.55) \quad \begin{cases} \alpha(u_v)^2 u_v^{(2)} & \text{reste borné dans } L^\infty(\]0, \infty[\times \mathbb{R}) \\ \alpha(u_v)^{5/2} u_v^{(3)} & \text{reste borné dans } L^2(\]0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R})) \\ \alpha(u_v)^4 u_v^{(4)} & \text{reste borné dans } L^2(\]0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R})) \end{cases}$$

et pour $5 \leq p \leq m-1$,

$$(V.56) \quad \alpha(u_v)^{\lambda(p+1)} u_v^{(p)} \text{ reste borné dans } L^2(\]0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R})) .$$

En omettant volontairement les constantes numériques, écrivons \hat{f}_{m+1} sous la forme d'une somme de quatre termes

$$(V.57) \quad \tilde{f}_{m+1}(u_v) \# u_v^{(2)} u_v^{(m+1)} + u_v^{(3)} u_v^{(m)} + u_v^{(4)} u_v^{(m-1)} + \sum_{p=5}^m u_v^{(p)} u_v^{(m-p+3)} .$$

Alors l'assertion (V.52) résulte des estimations (V.53) à (V.56) et de l'arithmétique suivante corrélée aux quatre termes de (V.57) ⁽¹⁾ :

$$\begin{cases} \frac{3m}{2} = 2 + \lambda(m+1) \\ \frac{3m}{2} = \frac{5}{2} + [\lambda(m)+1] \\ \frac{3m}{2} = 4 + [\lambda(m-1)+1] \\ \frac{3m}{2} = \lambda(p+1) + [\lambda(m-p+3)+1] \end{cases}$$

(1) A titre d'exemple précisons le cas $p=6$ dans le quatrième terme de (V.57)
 $\lambda(p+1) = \lambda(7) = 7$ et $\alpha(u_v)^7 u_v^{(6)}$ reste dans un borné de $L^2(\]0, \infty[; L^\infty(\mathbb{R}))$

$\lambda(m-p+3) + 1 = \lambda(m-3) + 1 = \frac{3m}{2} - 7$ et $\alpha(u_v)^{\frac{3m}{2}-7} u_v^{(m-3)}$ reste dans un borné de $L^\infty(\]0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$; il s'ensuit que le produit $\alpha(u_v)^{\frac{3m}{2}} u_v^{(6)} u_v^{(m-3)}$ reste dans un borné de $L^2(\]0, \infty[\times \mathbb{R})$.

De (V.51) nous déduisons maintenant

$$(V.58) \quad \frac{d}{dt} \left| \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-2}{2}} u_\nu^{(m+1)} \right|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-2}{2}} u_\nu^{(m+2)}|^2 + \left| \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-1}{2}} u_\nu^{(m+2)} \right|^2 \\ \leq C \left[|u_\nu|_\infty \cdot |u_\nu^{(1)}|_\infty^2 \cdot \left\{ \left| \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-4}{2}} u_\nu^{(m+1)} \right|^2 + |\nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-5}{2}} u_\nu^{(m+1)}|^2 \right\} \right. \\ \left. + \left| \alpha(u_\nu)^{\frac{3m}{2}} \tilde{f}_{m+1}(u_\nu) \right| \cdot \left| \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-4}{2}} u_\nu^{(m+1)} \right| \right].$$

Par suite nous avons les estimations a priori :

$$(V.59) \quad \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-2}{2}} u_\nu^{(m+1)} = \alpha(u_\nu)^{\lambda(m+1)+1} u_\nu^{(m+1)} \quad \text{reste borné dans } L^\infty([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}))$$

$$(V.60) \quad \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-1}{2}} u_\nu^{(m+2)} = \alpha(u_\nu)^{\lambda(m+2)} u_\nu^{(m+2)} \quad \text{reste borné dans } L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

$$(V.61) \quad \nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{\frac{3m-2}{2}} u_\nu^{(m+2)} = \nu^{1/2} \alpha(u_\nu)^{\lambda(m+1)+1} u_\nu^{(m+1)} \quad \text{reste borné dans } \\ L^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$$

et les estimations a posteriori :

$$(V.62) \quad \alpha(u_\nu)^{\lambda(m+1)+1} u_\nu^{(m)} \quad \text{reste dans un borné de } L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

A la limite lorsque $\nu \rightarrow 0$ ⁽¹⁾, (V.18), (V.32), (V.38) et (V.47) donnent

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq C,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \alpha(u)^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 dx dt \leq C,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \alpha(u)^5 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^2 dx dt \leq C,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \alpha(u)^{2\lambda(m)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right)^2 dx dt \leq C \quad \text{avec } \lambda(m) = \frac{3m-7}{2} \quad \forall m \geq 5.$$

(1) Utilisant la semi-continuité inférieure comme au §.I.6 et au chapitre IV.

Alors, n étant un entier positif, nous avons obtenu :

$$(V.63) \quad \alpha(u) \bar{\lambda}(n) \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in L^2(0, \infty; H^{n-m}(\mathbb{R})) \quad (n \geq m)$$

où

$$(V.64) \quad \bar{\lambda}(n) = \lambda(n) \quad n \geq 5 ; \quad \bar{\lambda}(4) = \frac{5}{2} ; \quad \bar{\lambda}(3) = \frac{3}{2} ; \quad \bar{\lambda}(2) = \frac{1}{2} = \bar{\lambda}(1) .$$

Donc en particulier, ⁽¹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, \infty; C^{n-2}(\mathbb{R} \setminus \{0\})) .$$

Cela achève la démonstration du théorème V.2.

(1) Utilisant le type positif de $u(t, \cdot) \quad \forall t \geq 0$, comme au §.IV.3 et au §.V.1.

ANNEXE 1. Illustration numérique ($v = 0$)

Les essais numériques ont été effectués par R. Sadourny au Laboratoire de Météorologie Dynamique (ENS - Physique). Des résultats numériques figurent déjà dans [3] [4] .

Rappelons l'équation maîtresse :

$$(E) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{u(t,0) - u(t,x)\}^2 = 0 .$$

On se donne les conditions initiales avec $u(0,x) = u_0(x) = e^{-x^2}$.
 Avant de procéder aux discrétisations en temps et en espace, on "dilate" l'échelle de la variable d'espace x ⁽¹⁾ par un changement de variable en y où

$$y = \frac{1}{\theta} \text{Log}(1+\theta x) \quad (x>0) ,$$

θ étant choisi de sorte que l'on puisse "raffiner" suffisamment au voisinage de $x = 0$.

On a donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,y) + e^{\theta y} \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{\theta y} \frac{\partial}{\partial y} \{\tilde{u}(t,0) - \tilde{u}(t-y)\}^2 \right] = 0$$

On utilise un schéma aux différences finies, avec comme pas de temps et d'espace, respectivement $\Delta t = 0.5 \times 10^{-4}$ et Δy de l'ordre de 7×10^{-4} .

On observe l'apparition du point singulier à l'origine au "temps" de la "catastrophe" , $T_* = \frac{1}{12}$ (cf. Fig.II, III et IV).

(1) Ceci revient en fait à utiliser un schéma de discrétisation spatiale à pas variable.

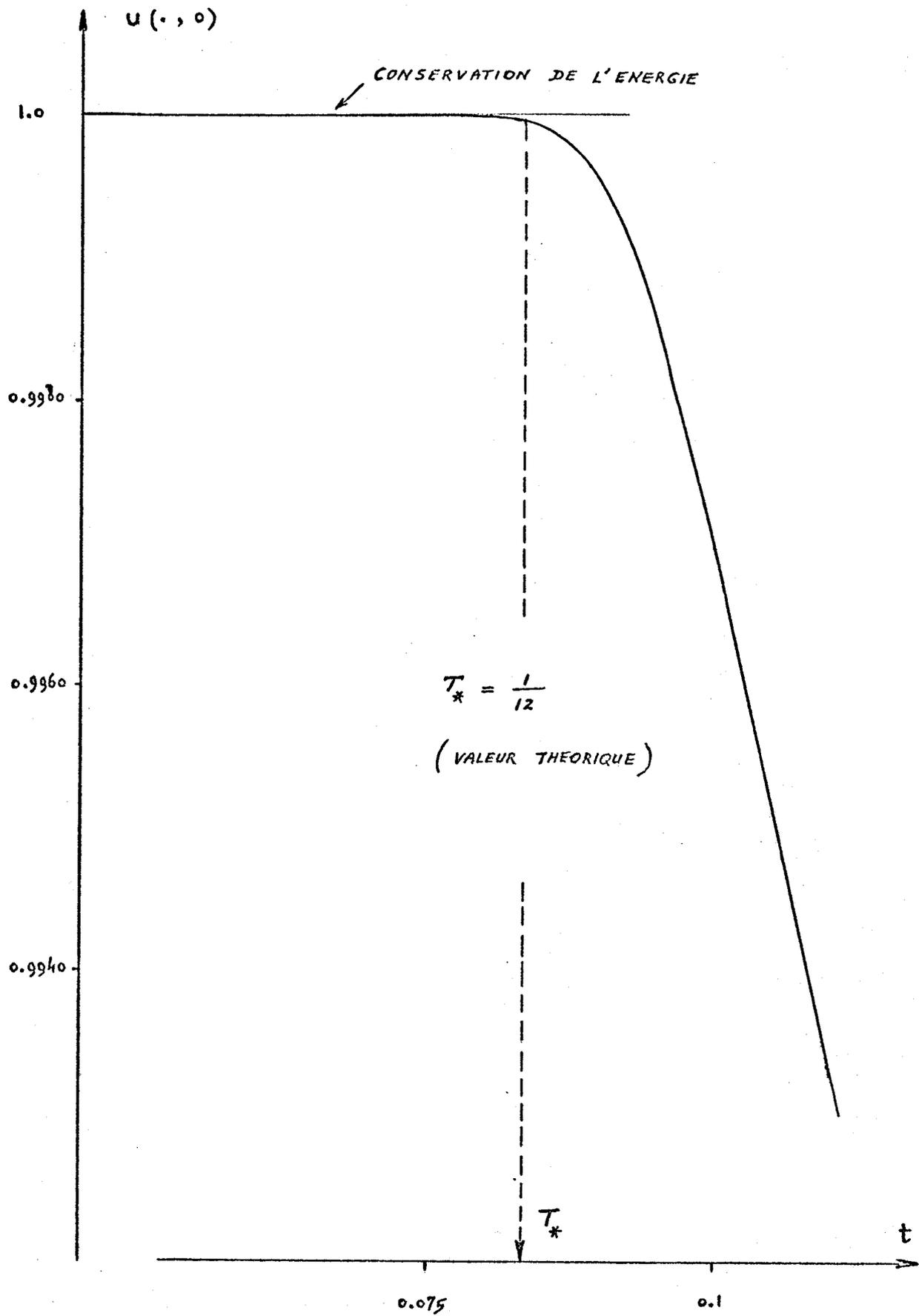


FIG. 1 LA "CATASTROPHE ENERGETIQUE".

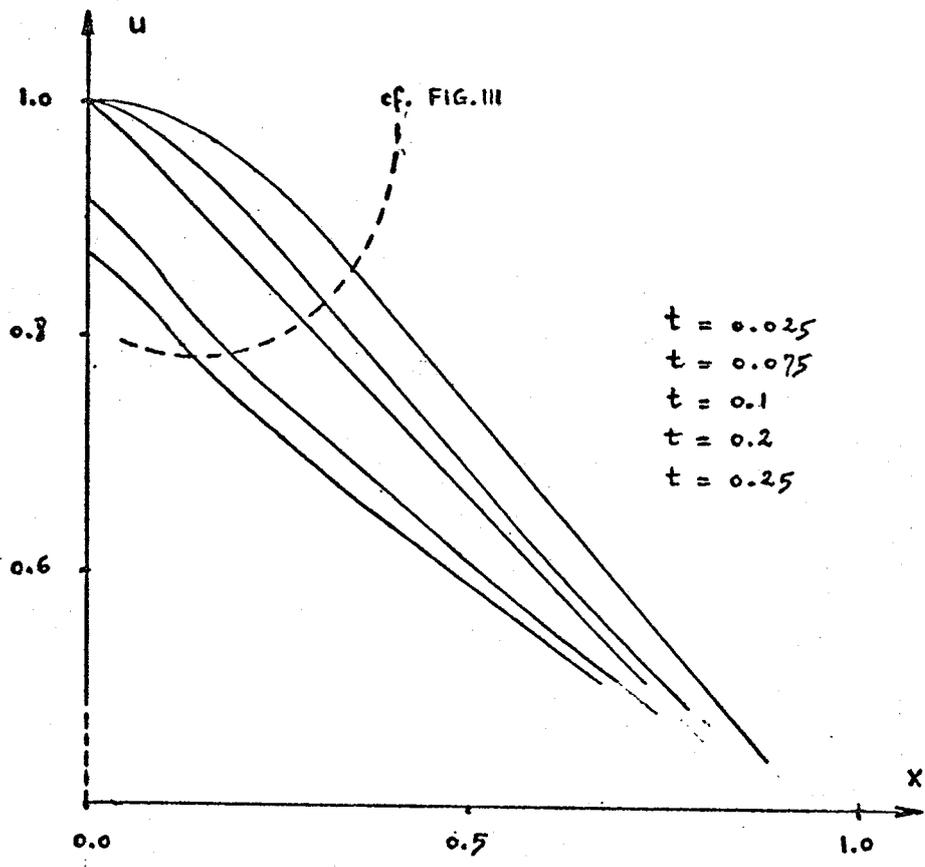


FIG. II EVOLUTION DE $u = u(t, x)$, $x \leq 1.0$

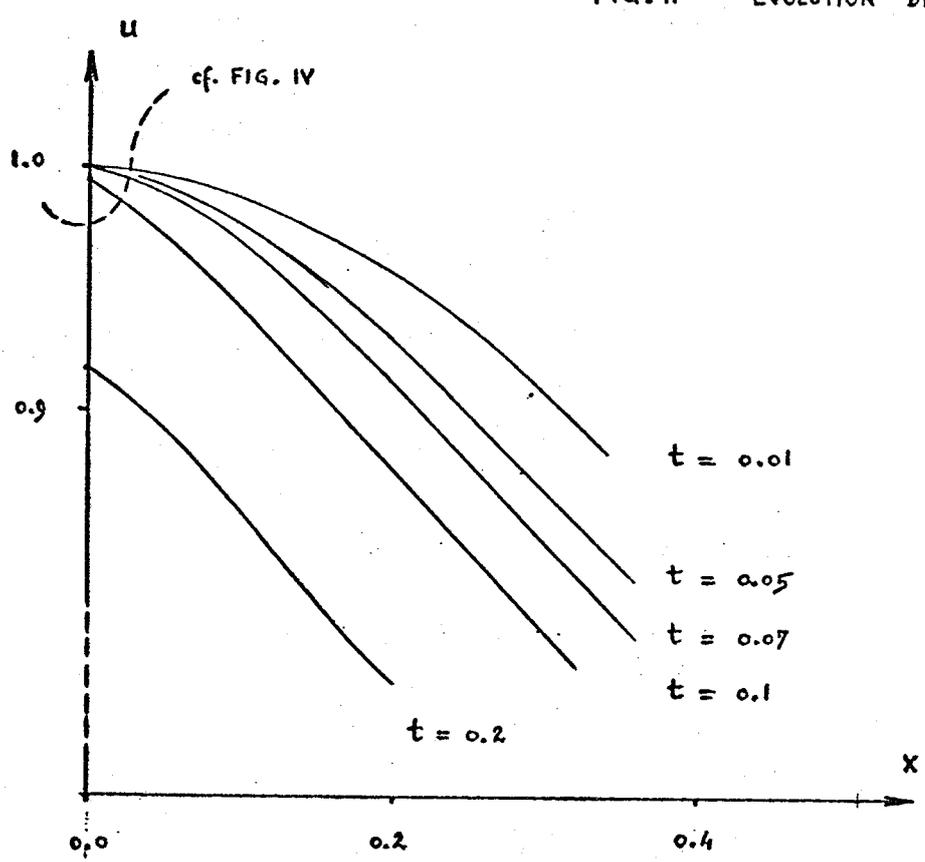


FIG. III EVOLUTION DE u , $x \leq 0.4$.

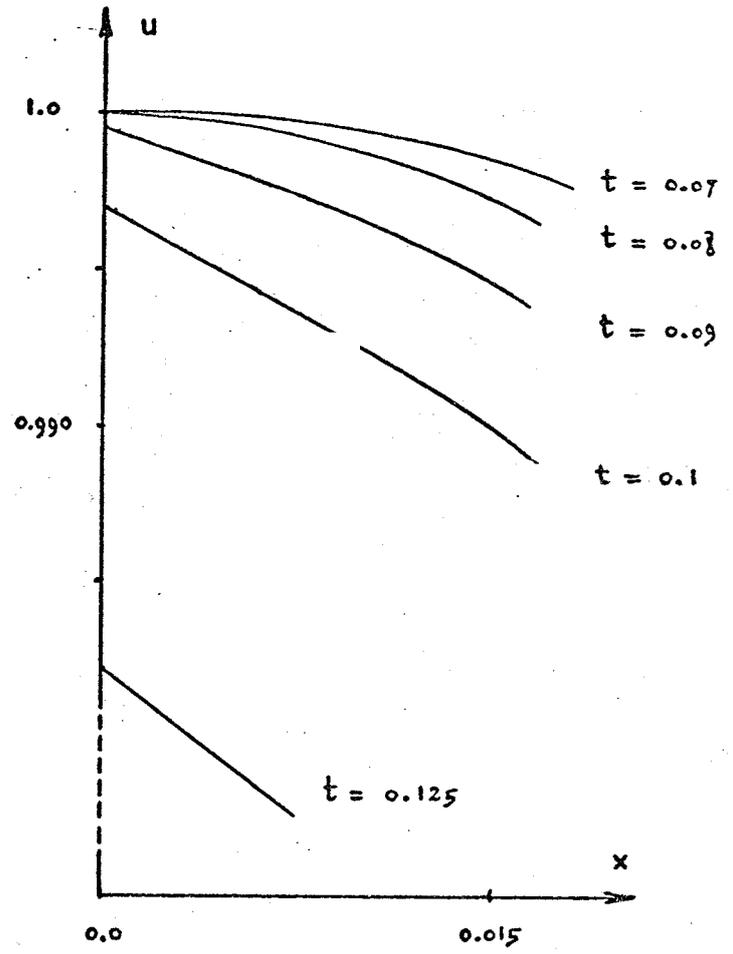


FIG. IV EVOLUTION DE u ,
 $x \leq 0.015$.

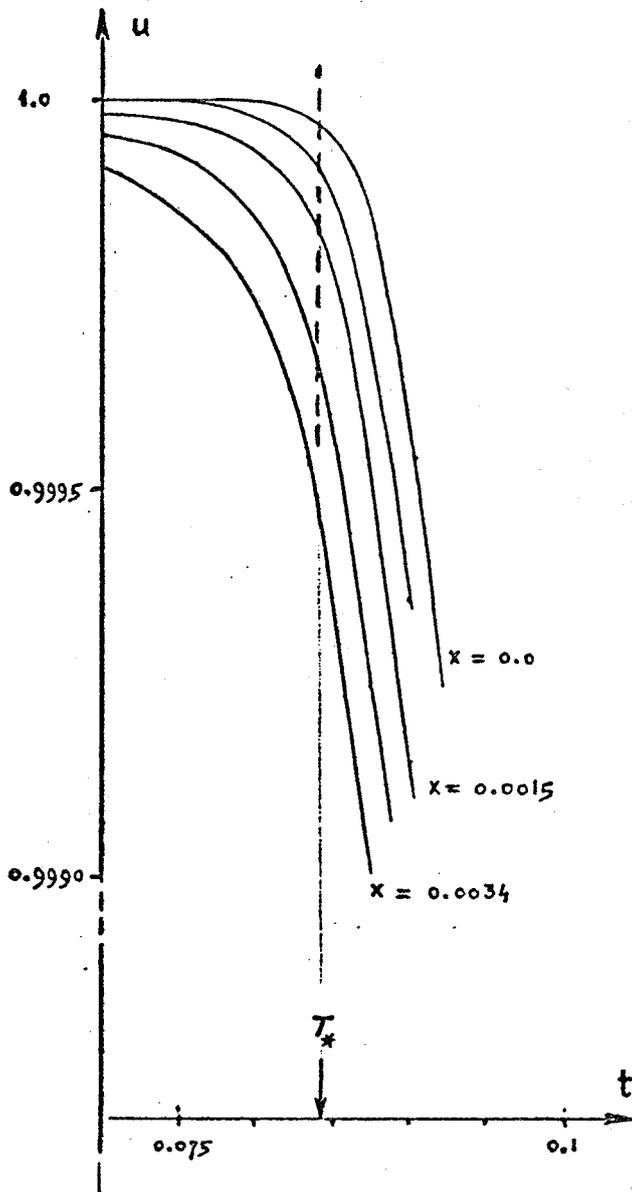


FIG. V u AU VOISINAGE DE $t = T_*$ ET $x = 0$.

ANNEXE 2. Commentaires

Continuité de u .

Il résulte du Théorème V.1 que $u \in C^0([0, T]; H^{3/2}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ pour tout $T > 0$. D'autre part, nous savons que (cf. Théorème IV.1) $u \in C^0([0, T]; H^{1/2}(\mathbb{R}))$. Il serait par conséquent intéressant de déterminer α_c , la plus grande valeur possible pour α telle que $u \in C^0([0, T]; H^\alpha(\mathbb{R}))$. Il y a tout lieu de penser que $\frac{1}{2} \leq \alpha_c \leq \frac{3}{4}$ et qu'un résultat du type suivant serait alors optimal : "Les solutions u de l'équation maîtresse (E), satisfaisant à une condition initiale même très régulière, ne peuvent avoir plus de $2\alpha_c$ dérivées bornées sur $[T_*, \infty[\times \mathbb{R}$ ".

Cadre fonctionnel.

La Remarque V.1 qui souligne la parenté de l'équation vérifiée par $\phi_0(u)$ avec l'équation maîtresse suggère qu'une étude affinée de la régularité de $\phi_0(u)$, peut-être étroitement liée à celle de u , pourrait confirmer et préciser le cadre fonctionnel.

Energie $u(., 0)$ et "catastrophe énergétique".

La décroissance de u_0 , condition initiale, quand $x \gg 0$, entraîne la décroissance de $u(t, .)$ solution de l'équation maîtresse (E) quand $x \gg 0$ pour tout $t \geq 0$. Alors certainement $\frac{\partial u}{\partial x}(t, .)|_{x=0}$ passe par un maximum et tend vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pourrait-on ensuite déterminer la situation limite $E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0)$? D'autre part il est difficile de savoir s'il existe ou non des "paliers" d'énergie après T_* , c'est-à-dire des intervalles de temps inclus dans $[T_*, +\infty[$ pendant lesquels l'énergie serait à nouveau conservée, et à l'extrémité droite desquels il ne manquerait pas de se produire une nouvelle "catastrophe" ?

On peut ajouter enfin qu'il serait intéressant de faire une étude locale approfondie des solutions de l'équation maîtresse, essentiellement dans le domaine $]T_* - c, T_* + c[\times]-\delta, +\delta[$, pour préciser le développement des singularités : cf. remarque V.3 (ii). (Cette étude est actuellement éclairée par les estimations du Chapitre V, le Théorème IV.3 et les résultats numériques de l'Annexe 1.)

Problème de l'unicité.

Comme l'indique l'introduction, la réponse donnée est partielle.

Dans quelle mesure peut-on adopter le point de vue suivant, selon lequel une étude locale de la "catastrophe" permettrait d'exhiber des solutions particulières après la "catastrophe", et par conséquent une non-unicité des solutions d'une part, des hypothèses supplémentaires assurant (dans une classe incluant ces hypothèses) l'unicité de la solution d'autre part ?

Additif à l'Annexe 2

(Décembre 1974 - Janvier 1975)

Correspondant aux principaux commentaires de l'Annexe 2 et les prolongeant, des résultats nouveaux nous permettent de surmonter les difficultés rencontrées : Ils seront l'objet de publications ultérieures ; nous pouvons mentionner

- C. FOIAS et P. PENEL

Dissipation totale de l'énergie dans l'Equation de Frisch-Kraichnan-Lesieur.
C.R.A.S. Paris, à paraître.

- U. FRISCH et P. PENEL, en collaboration avec C. BARDOS, C.M. BRAUNER et
P.L. SULEM

Articles à paraître.

APPENDICE Le modèle retenu par
 U. FRISCH et M. LESIEUR

On trouvera le problème-source dans les récents travaux de l'équipe de recherche sur la turbulence et les phénomènes aléatoires (GRETPA, Observatoire de Nice, cf. en particulier [1] [2] [3]).

Aux fins d'apporter une nouvelle explication sur la nature de la turbulence, cette équipe s'est notamment intéressée à la turbulence pleinement développée (*) qui constitue une bonne approximation pour étudier certains écoulements géophysiques et astrophysiques. Devant l'impossibilité, où l'on est actuellement, de résoudre directement le problème à partir des équations de Navier-Stokes, on est conduit à introduire des modèles stochastiques. Il s'agit de donner une description statistique du problème de Navier-Stokes avec des conditions initiales aléatoires, en s'intéressant tout particulièrement à des quantités moyennes telles que les moments du champ de vitesse.

Utilisation des modèles stochastiques

Le postulat de départ peut-être formulé de la façon suivante : les propriétés quantitatives de la turbulence ne seraient liées qu'aux propriétés structurelles des équations de Navier-Stokes et non pas à la forme explicite des mêmes équations. Alors l'étude de la turbulence homogène et isotrope passe par l'écriture et par l'étude d'autres équations possédant le plus grand nombre possible de propriétés structurelles en commun avec les équations de Navier-Stokes (même dimension, même type de non linéarité quadratique, mêmes propriétés d'invariance, translation d'espace ou de temps, transformation de Galilée, ...).

On suppose donc les conditions initiales aléatoires et caractérisées par une certaine distribution de probabilité, puis on fait les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie (invariance par translations et rotations d'espace). Suivant les travaux de R.H. KRAICHNAN sur la théorie de la turbulence sous la forme reprise par U. FRISCH et M. LESIEUR, on introduit des couplages pour N réalisations différentes d'un champ de vitesse régi par une équation de Navier-Stokes

(*) aux très grands nombres de Reynolds

(écrite sous forme symbolique

$$(A1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = L(v, v) + L_0(v)$$

où L est un opérateur bilinéaire représentant ici les termes non linéaires quadratiques $(v \cdot \nabla)v$ et ∇p , autrement dit,

$$(A2) \quad \frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = \frac{1}{N} \sum_{\beta, \gamma=1}^N \phi_{\alpha\beta\gamma} L(v^\beta, v^\gamma) + L_0(v^\alpha) \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Les couplages $\phi_{\alpha\beta\gamma}$ modifiant les termes non linéaires, sont aléatoires et choisis précisément de façon à préserver la plupart des propriétés structurales des équations de Navier-Stokes. Différents choix produiront différents modèles stochastiques : dans la limite $N \rightarrow \infty$, ces équations conduisent à des équations de fermeture, dites équations maîtresses, pour le tenseur des corrélations spatiales. Le MRCM - markovian Random Coupling Model for turbulence -, modèle stochastique introduit par U. FRISCH et M. LESIEUR (1973) est une version markovianisée des modèles proposés par R.H. KRAICHNAN (1961).

Ainsi en une dimension d'espace, partant de l'équation de Burgers

$$(A3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial v}{\partial x},$$

et ayant choisi pour les couplages des fonctions aléatoires gaussiennes (symétriques réelles) de valeur moyenne nulle, de variance unité et de covariance $\langle \phi_{\alpha\beta\gamma}(t), \phi_{\alpha\beta\gamma}(t') \rangle = \delta(t-t')$ (du type bruit-blanc), on introduit

$$(A4) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, y) v(t, x+y) dy$$

qui est la covariance spatiale du champ de vitesse et qui vérifie l'équation (cf. [1] [4])

$$(A5) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ (u(t, x) - u(t, 0))^2 \}$$

avec par exemple $u(0, x) = e^{-x^2}$.

L'équation maîtresse (A5) est établie par U. FRISCH et M. LESIEUR en collaboration avec A. BRISSAUD et J.C. ANDRE : Dans la limite N infini, ils observent que les v^α restent finis, statistiquement indépendants et identiquement distribués, que les fonctions de Green (*) solutions des équations (A2) linéarisées associées tendent vers des limites déterministes. En outre, le choix

(*) A ϕ solution de l'équation (sous forme symbolique) $\phi + L(\phi, \phi) = f$ on associe la fonction de Green g vérifiant l'équation linéarisée $g + 2L(\phi, g) = f$ (Identité). En effet la stabilité s'étudie sur l'équation linéarisée.

des $\phi_{\alpha\beta\gamma}$ aidant, ces limites déterministes s'expriment simplement avec la fonction de Green moyenne G . Ils démontrent ainsi que $u = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} v^{\alpha} \otimes v^{\alpha}$ d'une part et G d'autre part vérifient deux équations maîtresses qui se présentent comme le système fermé escompté (cf. [1]), la première équation étant très exactement (A5).

Remarque

Dans [4], M. LESIEUR présente simultanément les résultats relatifs au problème unidimensionnel du MRCM appliqué à l'équation de Burgers, soit (A5), et tridimensionnel (MRCM appliqué aux équations de Navier-Stokes), parce qu'ils sont de même nature. En outre, raisonnant sur les propriétés d'invariance, quantité de mouvement et énergie, il explique comment les équations de Navier-Stokes ont plus d'analogie structurelle avec l'équation maîtresse (A5), qu'avec l'équation de Burgers elle-même (A3). Paradoxalement, le modèle (A5) est ainsi plus proche de la turbulence tridimensionnelle isotrope que l'équation de Burgers.

Conjectures

Le problème de la turbulence pose essentiellement le problème de la limite de viscosité nulle : si l'on considère un fluide incompressible régi par les équations de Navier Stokes dans tout l'espace, il est bien connu que l'écoulement devient irrégulier lorsque la viscosité ν diminue.

Considérant maintenant l'équation d'Euler (cas inviscide $\nu = 0$), il y a tout lieu de penser que la solution ne reste pas régulière pendant des temps arbitrairement longs et qu'alors l'énergie ne sera pas nécessairement conservée. En un certain sens il y a "compétition" entre le phénomène de transfert d'énergie vers les grands nombres d'onde (influence des termes non linéaires de l'équation) et la dissipation visqueuse.

Les conjectures portent alors sur deux points :

. Relativement au taux de dissipation de l'énergie $\tau = - \frac{d}{dt} \int u^2$,

(A6) $\lim_{\nu \rightarrow 0} \tau_{\nu} = \tau \neq 0$

alors que $\tau = 0$ pour des solutions régulières des équations d'Euler.

. Toujours lorsque $\nu \rightarrow 0$, les singularités apparaissent après un certain temps (fini) (temps de catastrophe).

En 1949, L. ONSAGER conjecturait pour les équations d'Euler pour un fluide parfait incompressible peuvent admettre des solutions "turbulents" non régulières pour lesquelles l'énergie n'est pas conservée. U. FRISCH et M. LESIEUR ont reformulées les conjectures de L. ONSAGER pour y introduire la notion de catastrophe énergétique, caractérisée par le temps après lequel l'écoulement devient "turbulent".

Autre méthode de fermeture

On reprend le problème des moments du champ de vitesse pour un écoulement décrit par l'équation (A1). La traduction de la hiérarchie infinie des équations aux moments fait apparaître que, sous l'influence des termes non linéaires, les moments d'ordre m n'interviennent pas indépendamment des moments d'ordre $m+1$. Dans l'approximation quasi-normale (introduite par M. MILLIONSHCHIKOV (1941), mais physiquement difficile à retenir au vu de spectres d'énergie négatifs, comme l'observe Y. OGURA (1962-63)), les moments d'ordre 4 sont exprimés en fonction des moments d'ordre 2 et alors les produits de moments d'ordre 2 apparaissent comme des termes source de corrélations triples, sans qu'il y ait aucun mécanisme de relaxation : la hiérarchie d'équations aux moments est fermée sur 3 équations

$$(A6) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (\text{Navier-Stokes sous forme symbolique avec } \nu = 0)$$

$$(A7) \quad \frac{\partial \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle$$

$$(A8) \quad \frac{\partial \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \sum \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle$$

On peut établir que les moments d'ordre 4 s'expriment comme la somme de produits de moments d'ordre 2 et d'un terme, dit cumulante (qui est négligé dans l'approximation quasi-normale).

$$(A9) \quad \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \sum \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \mathcal{C}(\mathbf{v})$$

d'où

$$(A10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \sum \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \mathcal{C}(\mathbf{v})$$

Suivant la présentation de U. FRISCH aux "tables rondes sur la turbulence" de Villard-de-Lans (1974) et Boulder (Colorado 1974), on fait l'hypothèse que le cumulante, agissant sur les moments d'ordre 3, est linéaire :

$$(A11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \sum \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \mathcal{R} \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle$$

où \mathcal{R} est un opérateur linéaire (relaxation). (*)

Après avoir introduit quelques modifications (markovianisation, ...) pour assurer la "réalisabilité" des équations pour les moments d'ordre 2 (R.H. KRAICHNAN et U. FRISCH) , il en déduit ces équations "maîtresses" sous la forme

$$(A12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle v(t) v(t) \rangle = \theta(t) \sum \langle v(t) v(t) \rangle \langle v(t) v(t) \rangle .$$

Il est intéressant de noter l'analogie des équations d'évolution obtenues pour le spectre d'énergie avec celles des modèles stochastiques. Pour des spectres inertiels, elles conduisent à des résultats identiques.



(*) Il est possible de justifier ce type linéaire en considérant que la turbulence n'est pas très éloignée d'une turbulence à caractère gaussien.

Références Bibliographiques



- [1] U. FRISCH, M. LESIEUR, A. BRISSAUD et J. C. ANDRE
Qualitative problems in fully developed turbulence: a soluble model.
Observatoire de Nice, prépublication, 1973.
- [2] R. H. KRAICHNAN
Dynamics of non linear stochastic systems.
J. Math. Phys., 2, 1961, p. 124-148.
- [3] Publication collective du G.R.E.T.P.A. en collaboration avec R. SADOURNY.
Catastrophe énergétique et nature de la turbulence.
à paraître dans Ann. Géophys., Paris, 1973.
- [4] M. LESIEUR
Contribution à l'étude de quelques problèmes en turbulence pleinement
développée.
Thèse, Nice, 1973.
- [5] E. HOPF
The partial differential equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$.
Comm. Pure Appl. Math., 3, 1950, p. 201-230.
- [6] O. A. OLEINĚK
Discontinuous solutions of non-linear differential equations.
Amer. Math. Soc. Transl., 2, 26, 1963, p. 95-172.
- [7] O.A. OLEINĚK
Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy's
problem for a quasi-linear equation.
Amer. Math. Soc. Transl., 2, 33, 1963, p. 285-290.
- [8] S. N. KRUŽKOV
First order quasi-linear equations in several independent variables.
Math. USSR Sbornik, 10, 2, 1970, p. 217-243.

- [9] J. L. LIONS
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] J. L. LIONS et E. MAGENES
Problèmes aux limites non homogènes et applications (I) et (II).
Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [11] L. H. LOOMIS
An introduction to abstract harmonic analysis.
D. Van Nostrand Company, 1953.
- [12] S. BOCHNER
Lectures on Fourier integrals.
Princeton University Press, 1959.
- [13] L. SCHWARTZ
Théorie des distributions.
Hermann, Paris, 1966.
- [14] J. A. DUBINSKII
Certaines inégalités intégrales et résolution de systèmes d'équations
elliptiques quasi-linéaires dégénérées.
Math. Sbornik, 64, 106, 1964, p. 458-480.
- [15] J. A. DUBINSKII
Convergence faible dans les équations elliptiques paraboliques non linéaires.
Mat. Sbornik, 67, 109, 1965, p. 609-642.
- [16] C.M. BRAUNER, P. PENEL et R. TEMAM
Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence.
C.R.A.S., Paris, 279, série A, 1974, p. 65-68 et p. 115-118.
- [17] C.M. BRAUNER, P. PENEL et R. TEMAM
à paraître.
- [18] P. PENEL
"Threshold" of singularity for an equation of nonlinear evolution.
Anais da Academia Brasileira de Ciências, Brasil, 1974.
- [19] P. PENEL.- à paraître