# PUBLICATIONS

# MATHEMATIQUES

# D'ORSAY

79.06


CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER PLANCHEREL DES GROUPES DE LIE


par

NGHIEM XUAN HAI



Université de Paris-Sud

Département de Mathematique

Bât. 425

91405 ORSAY France

# PUBLICATIONS

# MATHEMATIQUES

# D'ORSAY

79.06


CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER PLANCHEREL DES GROUPES DE LIE


par

NGHIEM XUAN HAI

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

# CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER PLANCHEREL DES GROUPES DE LIE.

Le but de ce cours est de construire des représentations d'un groupe de Lie simplement connexe sur $\mathbb{R}$ par des méthodes infinitésimales (et nouvelles) et d'obtenir la Transformation de Fourier Plancherel de manière globale. On a évité de supposer connue la notion d'Algèbre de Lie dans la partie 0.

Le cours sera organisé suivant le plan suivant :

## 0. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : LE GROUPE DIAMANT.

1°)- Le groupe : Produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par le groupe de Heisenberg : Réalisation matricielle du groupe, application exponentielle et algèbre de Lie ; algèbre enveloppante et sous-algèbres abéliennes.

2°)- Représentation de l'Algèbre de Lie par des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$.

3°)- Réalisation de la représentation du groupe par intégration de la représentation précédente : groupes à un paramètre et leurs représentations, représentations unitaires irréductibles et transformation de Fourier Plancherel. Caractères associés.

4°)- Prolongement analytique sur un domaine dense, résultats du type de Paley-Wiener.

# I. LE CAS GENERAL : Détermination analytique de la Transformation de Fourier Plancherel.

On se restreint au cas des Groupes de Lie résolubles G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

La Transformation de Fourier Plancherel s'obtient en deux étapes.

## 1. Etape algébrique :

On met en évidence, après une localisation par un semi-invariant, une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, qui est caractéristique et du type de Heisenberg et un supplémentaire algébrique $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ telle que les dérivations définies par $\mathfrak{l}$ sur le centre de la première algèbre soient indépendantes. On peut alors, en se servant du spectre d'une algèbre commutative maximale de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, représenter fidèlement $\mathfrak{g}$ par des opérateurs différentiels formellement antisymétriques. Cette étape se décompose en cinq parties

I. Préliminaires algébriques.

II. Constructions algébriques.

II.1. La décomposition adjointe.

II.2. Construction et propriétés des bases $q_{p,i}$ pour $p \leqslant i$.

II.3. Construction et propriétés des bases $q_{p,i}$ pour $i < p$.

II.4. La partie non nilpotente.

II.5. Le cas des algèbres réelles.

## 2. Etape analytique.

En exponentiant la représentation de $\mathfrak{g}$, on obtient une représentation unitaire continue (non irréductible) de $G$. On démontre alors qu'elle permet de réaliser la Transformation de Fourier Plancherel :

III. Transformation de Fourier Plancherel par le cas nilpotent.

IV. Transformation de Fourier Plancherel dans le cas résoluble (en projet seulement).

# 0. ANALYSE DE FOURIER SUR LE GROUPE DIAMANT.

## 1°)- LE GROUPE DIAMANT.

On appelle groupe de Heisenberg le groupe unipotent $H$ de dimension trois sur $\mathbb{R}$ formé des matrices $3 \times 3$ triangulaires supérieures et à diagonale constituée par des $1$ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ . \right\}$$

Le centre $Z$ de $H$ est constitué par les éléments $(a,0,0)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $H/_Z$ est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

La loi de groupe est donnée par

$$(a,b,c)(a',b',c') = (a + a' + bc' \ , b + b' \ , c + c').$$

Dans $H/_Z \simeq \mathbb{R}^2$, il existe un groupe d'automorphisme isomorphe au tore, à savoir le groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$ et le groupe $\mathbb{R}$ agit dans $H/_Z$ suivant ce groupe des rotations. On en déduit une action de $\mathbb{R}$ dans $H$ lui-même (c'est-à-dire un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans le groupe des automorphismes de $H$) que l'on peut décrire comme suit :

Réalisons $H$ comme le groupe des matrices de la forme

$$(\alpha,z) = \begin{pmatrix} 1 & z & 2\alpha + i\,\frac{z\bar{z}}{2} \\ 0 & 1 & i\bar{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad z = \beta + i\gamma \in \mathbb{C},$$

avec le produit des matrices, il vient

$$(\alpha,z)(\alpha',z') = (\alpha + \alpha' + \tfrac{i}{4}(z\bar{z}' - \bar{z}z'), z + z').$$

Alors, en notant exponentiellement l'automorphisme de $H$ défini par $\delta \in \mathbb{R}$, on peut prendre

$$(\alpha,z)^{\delta} = (\alpha, ze^{-i\delta}).$$

Exercice.

1) Démontrer que les réalisations $(a,b,c)$ et $(\alpha,z)$ de $H$ sont isomorphes et un isomorphisme donné par :

$$\alpha = a - \frac{bc}{2}$$
$$z = \beta + i\gamma = b + ic$$

2) Vérifier que $(\alpha,z) \longrightarrow (\alpha,z)^{\delta}$ est un automorphisme de $H$ et que $((\alpha,z)^{\delta})^{\delta'} = (\alpha,z)^{\delta+\delta'}$

(on dit alors que l'application $\delta \longrightarrow (?)^{\delta}$ est une représentation de $\mathbb{R}$).

Le groupe Diamant $G$ est le produit semi-direct $H \times \mathbb{R}$, où $H$ est un sous-groupe normal et $\mathbb{R}$ agit dans $H$ par la représentation précédente ; la loi de groupe est donc :

$$((\alpha,z),\delta)((\alpha',z'),\delta') = ((\alpha,z)(\alpha',z')^{\delta},\delta+\delta').$$

Avec $z = \beta+i\gamma$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = ((\alpha,z),\delta)$ elle devient

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(\alpha',\beta',\gamma',\delta') = (\alpha+\alpha' +(\beta\gamma'-\gamma\beta')\cos\delta+(\beta\beta'+\gamma\gamma')\sin\delta,\beta+\beta'\cos\delta-\gamma'\sin\delta,$$
$$\gamma+\beta'\sin\delta+\gamma'\cos\delta,\delta+\delta')$$

Exercice.

Montrer que

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\beta+i\gamma)e^{i\delta} & \frac{i}{2}(\beta^2+\gamma^2)+2\alpha \\ 0 & 0 & e^{i\delta} & (i\beta+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une réalisation matricielle du groupe diamant.

Dans la suite, nous allons utiliser cette réalisation matricielle, en particulier pour introduire heuristiquement l'application exponentielle et l'algèbre de Lie, alors que dans une théorie normale, on fait le chemin inverse. Le groupe Diamant s'identifie à $\mathbb{R}^4$ comme variété.

Groupes à un paramètre.

On vérifie sans peine que les éléments $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ où l'une seulement des composantes (et toujours la même) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ est non nulle forment un groupe à un paramètre et ce paramétrage est celui du groupe additif $\mathbb{R}$. En tant que sous-groupe du groupe des matrices $GL(4,\mathbb{R})$, c'est une courbe analytique (réelle).

Notons $G_1 = \{(\alpha,0,0,0)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

$G_2 = \{(0,\beta,0,0)\ ;\ \beta \in \mathbb{R}\}$

$G_3 = \{(0,0,\gamma,0)\ ;\ \gamma \in \mathbb{R}\}$

$G_4 = \{(0,0,0,\delta)\ ;\ \delta \in \mathbb{R}\}$

Définissons

$$e_1 = \frac{d}{d\alpha}(\alpha,0,0,0)\Big|_{\alpha=0}, \quad q_1 = \frac{d}{d\beta}(0,\beta,0,0)\Big|_{\beta=0}$$

$$p_1 = \frac{d}{d\gamma}(0,0,\gamma,0)\Big|_{\gamma=0}, \quad h_1 = \frac{d}{d\delta}(0,0,\delta,0)\Big|_{\delta=0}$$

et on a alors explicitement

$$(1) \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&i\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&i&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&i&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

et en utilisant l'application exponentielle (définie sur les matrices, c'est-à-dire dans $GL(4,\mathbb{R})$), on peut écrire

$$(\alpha,0,0,0) = \exp \alpha e_1 = 1 + \alpha e_1 + 0\ .$$

$$(0,\beta,0,0) = \exp \beta q_1 = 1 + \beta q_1 + \frac{\beta^2}{2!} q_1^2 + 0\ .$$

$$(0,0,\gamma,0) = \exp \gamma p_1 = 1 + \gamma p + \frac{\gamma^2}{2} p_1^2 + 0\ .$$

$$(0,0,0,\delta) = \exp \delta h_1 = 1 + \delta h_1^1 + \frac{\delta^2}{2} h_1^2 + \frac{\delta^3}{3!} h_1^3 + \dots$$

et

$$(1') \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \exp \alpha e_1 \exp \beta q_1 \exp \gamma p_1 \exp \delta h_1 .$$

Algèbre de Lie.

Dans $GL(4,\mathbb{R})$, on peut faire le produit des éléments $e_1, p_1, q_1, h_1$ et on a

$$(2)\qquad \begin{aligned} p_1q_1 - q_1p_1 &= e_1 \\ h_1p_1 - p_1h_1 &= -q_1 \\ h_1q_1 - q_1h_1 &= p_1 \end{aligned}$$

et les autres commutateurs sont nuls.

Nous allons introduire rapidement (mais sans aucune rigueur) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ :

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est formée par $(e,p,q,h)$, dans lequel on a défini un crochet qui est une loi interne:

$(x,y) \longrightarrow [x,y]$ et elle est antisymétrique et bilinéaire par rapport à la variable $x$ et la variable $y$.

Cette loi satisfait à l'identité de Jacobi :

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$$

et est entièrement déterminée par les relations

$$(3)\qquad \begin{aligned} [p,q] &= e \\ [h,p] &= -q \\ [h,q] &= p \end{aligned}$$

les crochets non écrits étant nuls.

On vérifie facilement que le prolongement linéaire de (2) est une réalisation de ces propriétés algébriques en posant $[x,y] = x_1y_1 - y_1x_1$ (calculé dans $GL(4,\mathbb{R})$). (En fait, on a déterminé $G$ en exponentiant $e_1$, $p_1$, $q_1$, $h_1$ dans $GL(4,\mathbb{R})$).

Les éléments de base $e$, $p$, $q$, $h$ engendrent une algèbre sur $\mathbb{R}$ lorsque l'on impose les conditions (et ce sont les seules)

$$pq - qp = e$$

$$hp - ph = -q$$

$$hq - qh = p$$

et les commutateurs non écrits sont nuls.

Cette algèbre s'appelle algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et se note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Les relations (2) permettent d'obtenir "une représentation" de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $GL(4,\mathbb{R})$.

De plus, on démontre que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ admet un corps des Fractions formé d'éléments de la forme $ab^{-1}$ (ou $b^{-1}a$) où $a,b \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ce corps s'appelle le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ et se note $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$. La donnée de $\mathfrak{g}$ détermine (à un isomorphisme près) un unique groupe de Lie $G$ qui est une variété simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux références classiques [1,2].

Algèbres abéliennes.

La relation

$$[p,q] = e \quad \text{(les autres crochets sont nuls)}$$

qui est celle de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg sera très importante pour nous dans la suite.

Dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on a

$$hp - ph = -q$$

$$hq - qh = p$$

c'est-à-dire que l'action de $h$ (infinitésimale) qui est celle de la rotation, peut se réaliser par la commutation avec un polynôme en $p$ et $q$ de degré $\leqslant 2$. En effet, on a

$$\frac{1}{2}(p^2+q^2)p - p \cdot \frac{1}{2}(p^2+q^2) = -qe$$

$$\frac{1}{2}(p^2+q^2)q - q \cdot \frac{1}{2}(p^2+q^2) = +pe.$$

Donc $w = 2h - \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ commute à $p$, $q$, $e$ et est un élément central de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ; par construction, $e$ est aussi central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Une sous-algèbre abélienne est engendrée par $e, w = eh - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ et $q$. On peut montrer qu'elle est maximale. On peut aussi remplacer $q$ par toute combinaison linéaire non nulle de $p$ et $q$.

Ces relations permettent d'obtenir la

## 2°)- REPRESENTATION DE $\mathcal{G}$ PAR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR $\mathbb{R}^3$.

Le nombre de variables correspond au nombre de générateurs agébriquement indépendants de notre sous-algèbre abélienne de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Soit $(x,z,t)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. On considère les opérateurs $iz$, $izx$, $\frac{d}{dx}$, $it$
agissant par exemple sur les fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ par multiplication ou dérivation.

On a alors

$$\left(\frac{d}{dx}\right) \circ (izx) - (izx) \circ \left(\frac{d}{dx}\right) = iz \quad ,$$

à comparer avec $pq - qp = e$ ,
et on peut représenter $\mathcal{G}$ par les applications

$$e \longrightarrow iz$$

$$q \longrightarrow izx$$

$$p \longrightarrow \frac{d}{dx}$$

$$h \longrightarrow it + \frac{i}{2}\left(zx - \frac{1}{z}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right).$$

(On a réalisé $h - \frac{1}{2e}(p^2 + q^2)$ par $it$ et comme $h - \frac{1}{2e}(p^2 + q^2)$ contient $e$ en dénominateur, il a fallu se mette dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ !).

* Les opérateurs différentiels utilisés sont de degré $\leqslant 2$ et à coefficients rationnels. Ceci peut se faire pour beaucoup de groupes résolubles, comme on le verra dans le cas général, et pour tous les groupes résolubles si l'on se permet une multiplication par une fonction analytique).

* On a introduit le nombre complexe $i$ pour que les opérateurs correspondants soient "antihermitiens", de manière à obtenir des exponentielles unitaires.

* La représentation de $[p,q]=e$ par $p \to \frac{d}{dx}$, $q \to izx$, $e \to iz$ est bien connue des physicients et s'appelle la représentation de Schrödinger des relations de commutation canoniques.

## 3°)- REPRESENTATION DU GROUPE G.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $G$ admet pour base $(e,p,q,h)$ et $(e,p,q)$ est la base d'un idéal de $\mathcal{G}$ correspondant au sous-groupe normal $H$ de $G$. L'application exponentielle permet de passer de $\mathcal{G}$ à $G$ et on a la formule

$$(5) \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \exp \alpha e \exp \beta q \exp \gamma p \exp \delta h$$

qui est conservée dans la réalisation explicite de $G$ comme un sous-groupe de $GL(4,\mathbb{R})$ (vour les formules (1) et (1')).

Comme nous avons trouvé dans les formules (4) une représentation de l'algèbre de Lie, c'est-à-dire des éléments de base $e$, $p$, $q$, $h$ où les relations de commutations (3) sont conservées, il nous suffit de prendre les exponentielles dans l'espace de la représentation pour en déduire une représentation du groupe.

On appelle $V$ la variété $\mathbb{R}^3$ que l'on paramètre par $(x,z,t)$. On choisit sur $V$ la mesure $|dz.dzx.dt|$ ; et on appelle $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $V$ avec cette mesure. Les opérateurs définis par les formules (4) sont non bornés dans $\mathcal{H}$ et à domaine dense : par exemple, on peut prendre comme domaine commun l'ensemble $\mathfrak{D}$ des fonctions $C^\infty$ à support compact dans $V$ et dont le support est disjoint de la sous-variété définie par $z=0$.

On vérifie sans peine que ces opérateurs sont antisymétriques sur $\mathfrak{D}$ :

En ce qui concerne $iz$, $izx$ et $\frac{d}{dx}$, cela est clair car bien connu et facile à vérifier (pour $\frac{d}{dx}$ il faut intégrer une fois par partie et les termes de bord sont nuls car les fonctions sont dans $\mathfrak{D}$)

Soit $L = \frac{i}{2}\,(zx^2 - \frac{1}{z}\,(\frac{d}{dx})^2)$.

L'opérateur $-iL$ n'est autre que celui de l'équation différentielle des fonctions de Hermite. Il est bien connu en particulier des physiciens dans l'étude de l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire d'une masse soumise à une force de rappel proportionnelle à la distance ou à un potentiel attractif proportionnel au carré de la distance.

On sait que $iL$ est un opérateur positif et que les fonctions propres sont les fonctions de Hermite avec les valeurs propres égales à $n+1/2$ où $n \in \mathbb{N}$. Nous allons expliciter ces propriétés un peu plus loin bien qu'elles sont classiques. En particulier, les fonctions de Hermite forment une base orthonormale de l'espace des fonctions de carré sommable sur $\mathbb{R}$ et $L$ est bien antisymétrique (on peut aussi démontrer ceci directement).

Il est bon de faire ici une remarque géométrique avant de continuer les calculs. Les éléments $e$, $q$ et $w = he + \frac{1}{2}\,(p^2 + q^2)$ sont représentés par les opérateurs $iz$, $izx$, $-tz$. On a en quelque sorte pu les "diagonaliser" ensemble car ils commutent ensemble. Mais pour ce faire, on a dû introduire une intégrale hilbertienne d'espaces de Hilbert de dimension 1, i.e. $\mathbb{C}$ qui est justement $L^2(V, dz \otimes dt \otimes |z| dx)$ et dans chaque espace de Hilbert $\mathbb{C}$ les opérateurs correspondants à $e$, $q$, $w$ sont diagonaux, i.e. opèrent par multiplication (par $iz$, $izx$, $it$ !).

Par ailleurs, la mesure $dz \otimes dt \otimes |z|\, dx$ correspond à la "mesure spectrale" de $e$, $h$, et $q$.

Avant de donner les calculs explicites, il est bon de savoir que les opérateurs définis par les formules (4) étant antisymétriques et à domaine dense, on peut alors définir leur exponentielles [3,4] et obtenir ainsi des groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires opérant dans $\mathcal{H}$ et que la représentation correspondante, au vu des formules (5) est

(5') $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow \exp i\alpha z \exp i\beta zx \exp \gamma \frac{d}{dx} \exp i\delta(t+\frac{1}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2}))$

Calcul des exponentielles.

* Il est clair que $\exp i\alpha z$ et $\exp i\beta zx$ ne sont autres que les opérateurs unitaires agissant dans $\mathcal{H}$ par multiplications par les fonctions $e^{i\beta z}$ et $e^{i\alpha zx}$ qui sont de module 1.

* En ce qui concerne $\exp \gamma \frac{d}{dx}$, il est bien connu aussi que le groupe correspondant est celui des translations

$$T_{-\gamma} : f \longrightarrow T_{-\gamma}f \quad \text{où} \quad T_{-\gamma}f(x) = f(x+\gamma).$$

Pour le voir, il suffit de prendre la Transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi\xi x} f(x)dx.$$

Si $f$ est dans $\mathcal{D}$, $(\frac{d}{dx} f)\hat{}\,(\xi) = -2i\pi\xi\hat{f}(\xi)$ d'où $(\exp \gamma \frac{d}{dx}.f)\hat{} = e^{-2i\pi\xi\gamma}\hat{f}(\xi) = (f(?+\gamma))\hat{}$

Remarque : Ceci est la démonstration classique de l'existence du groupe unitaire à un paramètre défini par son générateur infinitésimal $A$ qui est anti-hermitien à domaine dense ; on fait la décomposition spectrale de $iA$ (qui admet une fermeture auto-adjointe) et on peut alors calculer $\exp \gamma A$.

* Calcul de $\exp \delta\ (it+\frac{i}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2}))$.

On pose $L = \frac{i}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2})$.

Comme $L$ commute à $t$, il vient

$$\exp \delta(it+L) = e^{i\delta t} \exp \delta L.$$

Pour le calcul de $\exp \delta L$, on fait la décomposition spectrale de $L$ c'est-à-dire que l'on se met dans une base de vecteurs propres de $L$, dans ce cas $\exp \delta L$ est un opérateur diagonal.

On fait d'abord $z = 1$.

Fonction génératrice :

$$\Phi(u,x) = e^{-u^2+2ux-x^2/2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{u^n}{n!} H_n =$$

$$(x^2 - \frac{d^2}{dx})\Phi(u,x) = x^2\Phi - \frac{d}{dx}(+2u - x)e^{-u^2+2ux-x^2/2} =$$

$$= (x^2 + 1 - (2u-x)^2)\Phi = (-4u^2 + 4ux + 1)\Phi = (2u\frac{d}{du} + 1)\Phi$$

d'oū en dēveloppant

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{u^n}{n!} (x^2 - \frac{d^2}{dx^2})H_n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{u^n}{n!} (2n+1)H_n \quad .$$

On a donc $(x^2 - \frac{d}{dx^2})H_n = (2n+1)H_n$ .

Par ailleurs $H_n = (\frac{d}{du})^n_{u=o} e^{-u^2+2ux-\frac{x^2}{2}} = e^{+\frac{x^2}{2}} (\frac{d}{du})^n_{u=o} e^{-(u-x)^2} = e^{+\frac{x^2}{2}} (-\frac{d}{dx})^n e^{-x^2} =$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} Q_n(x)$$

oū $Q_n(x)$ est un polynôme de degrē $n$ et de paritē $n$.

* Normalisation :

$$\int e^{-u^2+2ux-\frac{x^2}{2}} e^{-v^2+2vx-\frac{x^2}{2}} dx = \int e^{-x^2+2(u+v)x-(u+v)^2+2uv} dx = \sqrt{\pi}\, e^{2uv}$$

d'oū

$$\sqrt{\pi} \sum_n \frac{(2uv)^n}{n!} = \int \sum_{m,n} \frac{H_m}{m!}(x)\frac{H_n}{n!}(x)u^n v^m dx \quad \text{i.e}$$

$$\int H_m(x)H_n(x)dx = \sqrt{\pi}\, n!2^n \delta_{m,n}$$

$$\text{et} \quad \|H_n\|_2^2 = C_n^2 = 2^n\sqrt{\pi}.n!$$

* On rappelle que les fonctions $H_n/C_n$ forment une base orthonormale de $L^2(dx)$ et elles permettent la dēcomposition spectrale de $L_1 = \frac{i}{2}(x^2 - \frac{d^2}{dx^2})$ :

$$L_1 H_{n/C_n} = i(n+1/2)H_{n/C_n}$$

$$\exp \delta L_1 \; H_{n/C_n} = e^{i\delta(n+1/2)} H_{n/C_n}$$

et on peut exprimer $\exp i\delta L_1$ par l'intēgrale :

$$(\exp i\delta L_1.f)(x) = \int \sum_n H_n(y)f(y) \quad e^{i(n+1/2)\delta} H_n(x)/C_n^2 dy$$

$$= \int K_1^\delta(x,y)f(y)dy$$

$$\text{où} \quad K_1^\delta(x,y) = \sum_{n=o}^{\infty} e^{i(n+1/2)\delta} \frac{H_n(x)H_n(y)}{C_n^2} .$$

Ce noyau est bien connu [5] en particulier des physiciens:

$$K_1^\delta(x,y) = e^{i\delta/2}\sqrt{\frac{ie^{-i}}{2\pi \sin \delta}} \; \frac{i}{e \; 2\sin \delta} \; (-(x^2+y^2)\cos \delta + 2xy)$$

où par définition $\omega \longrightarrow \sqrt{\omega}$ est la racine carrée à partie réelle positive.

On vérifie que $f \longrightarrow \int K_1^\delta(x,y)f(y)dy = \exp \delta L_1.f(x)$ est unitaire car composée de trois applications unitaires :

$$f(y) \longrightarrow e^{-\frac{i}{2\sin\delta}y \cos \delta} f(y)$$

$$g(y) \longrightarrow \int \sqrt{\frac{i}{2\pi \sin \delta}} e^{i \frac{xy}{\sin \delta}} g(y)\, dy \quad \text{(transformation de Fourier)}$$

$$h(x) \longrightarrow e^{-\frac{i}{2\sin \delta} x \cos \delta} h(x).$$

Enfin, pour s'assurer de l'exactitude de cette formule, on calcule l'opérateur sur la fonction génératrice $\Phi(u,x) \in L^2(dx)$

$$I = \int e^{i\delta/2}\sqrt{\frac{ie^{-i\delta}}{2\pi\sin \delta}} \; e^{\frac{i}{2\sin \delta}} (-(x^2+y^2)\cos \delta + 2xy) \; e^{-u^2+2uy-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Cette intégrale est convergente et se calcule par un changement de contour classique se ramenant à une intégrale $\int e^{-\omega^2y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega}$ où $\mathrm{Re}\,\omega^2 > 0$ et $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ :

$$-\omega^2y^2 = -(\frac{1}{2} + \frac{i\cos \delta}{2\sin \delta})y^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\cos \delta}{2\sin \delta} = \frac{ie^{-i\delta}}{2\sin \delta} \; ; \; 2\omega y a = 2y\omega \; \frac{1}{\omega} \; (\frac{ix}{2\sin \delta} + u)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\omega}(\frac{ix}{2\sin \delta} + u) \; ; \; a^2 = \frac{1}{\omega^2} \; (\frac{ix}{2\sin} + u)^2.$$

$$I = e^{\frac{i\delta}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \sqrt{\frac{ie^{-i\delta/2}}{2\pi\sin\delta}} . e^{-u^2(1-\frac{1}{\omega^2}) + \frac{iux}{\omega^2\sin\delta} - \frac{x^2}{2}(\frac{i\cos\delta}{\sin\delta} + \frac{1}{2\omega^2\sin^2\delta})}$$

. $1 - \frac{1}{\omega^2} = 1 + 2i\sin\delta e^{i\delta} = 1 + (e^{i\delta} - e^{-i\delta})e^{i\delta} = e^{2i\delta}$

. $\frac{i}{2\omega^2\sin\delta} = e^{i\delta}$

. $i\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + \frac{1}{2\omega^2\sin^2\delta} = i\frac{\cos\delta}{\sin\delta} - i\frac{e^{i\delta}}{\sin\delta} = 1$

d'où

$$I = e^{i\delta/2} \sqrt{\frac{ie^{-i\delta}}{2\pi\sin\delta}} \sqrt{\frac{2\pi\sin\delta}{ie^{-i\delta}}} \; e^{-u^2e^{2i\delta}+2uxe^{i\delta}-x^2/2}$$

c'est-à-dire

$$I = \sum_{n=o}^{\infty} e^{i\delta/2}\frac{(ue^{i\delta})^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{u^n}{n!} e^{i\delta(n+\frac{1}{2})} H_n(x).$$

Ce qui montre que l'on a bien la relation cherchée :

$$\int K_1^\delta(x,y)H_n(y)dy = e^{i\delta(n+1/2)}H_n(x) .$$

Pour obtenir le noyau dans le cas général $z \neq 0$, il suffit de faire le changement de variable $x \longrightarrow \sqrt{|z|}.x$ pour voir que

$$(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2})H_n(\sqrt{|z|}\; x) = \frac{z}{|z|}.(2n+1)\; H_n(\sqrt{|z|}\; x)$$

et les fonctions normalisées correspondantes sont

$$|z|^{1/4}H_n(\sqrt{|z|}\; x)/_{C_n}$$

d'où l'expression du noyau en posant $\varepsilon$ = signe de $z$

$$K_z^\delta(x,y) = \sum_{n=o}^{\infty} e^{i\delta\varepsilon(n+1/2)}|z|^{1/2}\, H_n(\sqrt{|z|}\; x)\; H_n(\sqrt{|z|}\; y)/_{C_n^2}$$

$$= e^{i\frac{\delta\varepsilon}{2}} \sqrt{\frac{ie^{-i\delta\varepsilon}z}{2\pi\sin\delta}} \; e^{\frac{iz}{2\sin\delta}(-(x^2+y^2)\cos\delta + 2xy)}$$

$$= \sqrt{\frac{iz}{2\pi\sin\delta}} \; e^{\frac{iz}{2\sin\delta}(-(x^2+y^2)\cos\delta + 2xy)}$$

où on a posé $\sqrt{\dfrac{iz}{2\pi\sin\delta}} = e^{i\frac{\delta z}{2|z|}} \sqrt{\dfrac{ize^{-i\frac{\delta z}{|z|}}}{2\pi\sin\delta}}$ (racine carrée à partie réelle positive).

On a donc le Théorème suivant :

*THEOREME 1.*

> *L'opérateur* $\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ *agissant par le noyau*
>
> $$K(\alpha,\beta,\gamma,\delta\ ;\ z,t,x,y) = e^{i(\alpha z+\beta zx+\delta t)}\sqrt{\frac{iz}{2\pi\sin\delta}}\ e^{\frac{iz}{2\sin\delta}(-((x+\gamma)^2+y^2)\cos\delta+2(x+\gamma)y)}$$
>
> *sur les fonctions* $f\in\mathcal{H} = L^2(dz\otimes|z|dx\otimes dt)$ *selon la formule*
>
> $$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(z,t,x) = \int K(\alpha,\beta,\gamma,\delta\ ;\ z,t,x,y)f(z,t,y)dy$$
>
> *est unitaire et l'application* $\pi$ *de* $G$ *dans l'ensemble* $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ *des opérateurs unitaires de* $\mathcal{H}$ *définie par*
>
> $$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$
>
> *est une représentation unitaire continue (fortement) de* $G$.

On a par construction des exponentielles

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \pi(\alpha,0,0,0)\pi(0,\beta,0,0)\pi(0,0,\gamma,0)\pi(0,0,0,\delta)$$

et chacune des exponentielles du second membre est fortement continue, ce qui donne la continuité de $\pi$, compte tenu du fait que chacune des exponentielles est unitaire.

En effet, si $A_n$ et $B_n$ convergent fortement vers $A$ et $B$ et si $f\in\mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}\|A_nB_nf - ABf\| &\leq \|A_n(B_n-B)f\| + \|(A_n-A)Bf\| \\ &\leq \|(B_n-B)f\| + \|(A_n-A)Bf\|\end{aligned}$$

d'où la convergence en norme de $A_nB_nf$ vers $ABf$.

PROPOSITION 1

*Pour chaque $z$ et $t$ fixés ($z \neq 0$) la transformation de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ définie par*

$$f \longrightarrow \int K(\alpha,\beta,\gamma,\delta\ ;\ z,t,x,y) f(y) dy = \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\ ;\ z,t) f(x)$$

*est un opérateur unitaire dans $\mathcal{H}_{z,t} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta; z,t)$ est une représentation unitaire irréductible continue de $G$.*

*On a alors l'identification*

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \mathcal{H}_{z,t} |z| dz\, dt$$

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\ ;\ z,t) |z|\ dz\, dt.$$

Cette proposition est facile

La représentation $\pi(\alpha,\beta,\gamma\ ;\ z,t)$ est irréductible de manière évidente : soit $f \in \mathcal{H}_{z,t}$ non nul. Alors l'ensemble des $\pi(0,\beta,\gamma,0\ ;\ z,t)f$ pour $(\beta,\alpha) \in \mathbb{R}^2$ est déjà total. En effet soit $g$ appartenant à son orthogonal :

$$0 \equiv \int e^{i\beta zx} f(x+\gamma)\bar{g}(x) dx \equiv \int e^{-i\beta z} e^{i\gamma zy} f(y)\bar{g}(y-\gamma) dy$$
$$\equiv \int e^{i\beta zy} f(y)\bar{g}(y-\gamma) dy.$$

Comme $y \longrightarrow f(y)\bar{g}(y-\gamma)$ est dans $L^1(dy)$, on déduit de l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1$ que $f(y)\bar{g}(y-\gamma)$ est nul presque partout pour tout $\gamma$, d'où la nullité presque partout de $g$.

THEOREME 2.

*Pour toute fonction $\varphi$ continue à support compact sur $G$.*
*On définit l'opérateur borné*

$$\pi(\varphi) \int_{\mathbb{R}^4} \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

*agissant dans $\mathcal{H}$.*

*Alors $\pi(\varphi)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt dont la norme vérifie*

$$\|\pi(\varphi)\|_2^2 = Tr\ \pi(\varphi)^+\pi(\varphi) = (2\pi)^3\int_G |\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)|^2 d\alpha d\beta d\gamma d\delta.$$

*En conséquence, l'application* $\varphi \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\pi(\varphi)$ *s'étend en isométrie de* $L^2(G, d\alpha d\beta d\gamma d\delta)$ [(1)] *dans l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de* $\mathcal{H}$ *.*
*(Th. de Fourier Plancherel).*

Comme $\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est un opérateur unitaire fonction fortement continue de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, la définition de $\pi(\varphi)$ ne pose aucune difficulté pour $\varphi$ continue à support compact.

L'opérateur $\pi(\varphi)^+\pi(\varphi)$ est alors auto-adjoint et positif. Pour calculer sa trace dans $\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_{z,t}|z|dzdt$, il suffit de calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} |z|dzdt \sum_n < \xi_n, \pi^+(\varphi)\pi(\varphi)\xi_n >$$

où $\xi_n = |z|^{1/4}H_n(|z|^{1/2}x)/C_n$ est la $n^{e}$ fonction de Hermite normalisée et les $\xi_n$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}_{z,t}$. Comme $\xi_n$ est fonction propre de L, il vient

$$\pi(\varphi)\xi_n = \int d\alpha d\beta d\gamma d\delta\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)e^{i(\alpha z+\beta zx+\delta t)}e^{i\frac{\varepsilon\delta}{2}(2n+1)}\xi_n(x+\gamma) \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{z}{|z|}.$$

On voit apparaître des transformations de Fourier ordinaires sur les variables $\alpha$, $\beta$ et $\delta$ que l'on notera au moyen de variables accentuées :

$$\pi(\varphi)\xi_n = \int \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{zx}, \gamma, \hat{t+\varepsilon(n+1/2)})\xi_n(x+\gamma)d\gamma.$$

Il vient

$$\sum_n < \xi_n, \pi^+(\varphi)\pi(\varphi)\xi_n > = \sum_n \int dx \int \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{zx}, \gamma_1, \hat{t+\varepsilon(n+1/2)})\xi_n(x+\gamma_1)d\gamma_1 \times$$

$$\times \int \bar{\hat{\varphi}}(\hat{z}, \hat{zx}, \gamma_2, \hat{t+\varepsilon(n+1/2)})\bar{\xi}_n(x+\gamma_2)d\gamma_2.$$

Soit

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_n < \xi_n, \pi^+(\varphi)\pi(\varphi)\xi_n > |z|dzdt.$$

(1) *Par sa construction,* $d\alpha d\beta d\gamma d\delta$ *est une mesure de Haar de G.*

Comme la fonction à intégrer est positive, on peut écrire

$$A = \sum_m \sum_n \int_{\mathbb{R}} |z| dz \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma_1, t+\widehat{m+\varepsilon(n+1/2)})\xi_n(x+\gamma_1)d\gamma_1$$
$$\int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{\varphi}}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma_2, t+\widehat{m+\varepsilon(n+1/2)})\xi_n(x+\gamma_2)d\gamma_2$$

et on peut faire un changement d'indice de sommations :

$$m + \varepsilon(n+1/2) = p$$

$$n = q$$

ce qui nous donne après permutation des sommations

$$A = \sum_p \int_{\mathbb{R}} |z| dz \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}} dx \sum_q \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma_1, \widehat{t+p})\xi_q(x+\gamma_1)d\gamma_1$$
$$\int \bar{\hat{\varphi}}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma_2, \widehat{t+p})\bar{\xi}_q(x+\gamma_2)d\gamma_2 =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |z| dz \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma, \hat{t})\bar{\hat{\varphi}}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma, \hat{t})d\gamma$$

(on a tenu compte du fait que les $\xi_q$ forment une base orthonormale), d'où

$$A = \int_{\mathbb{R}^4} |(\hat{\varphi}(z, zx, \gamma, t)|^2 dz dzx d\gamma dt = (2\pi)^3 \|\varphi\|_2^2$$

cqfd.

Sur la base des $\xi_n$, la Transformation de Fourier Plancherel a une expression simple.

$$\pi(\varphi)\xi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma - x, \widehat{t+\varepsilon(n+1/2)})\xi_n(\gamma)d\gamma$$

faisant intervenir une transformation de Fourier Plancherel ordinaire $\hat{\varphi}(\hat{z}, \hat{z}x, \gamma, \widehat{t+\varepsilon(n+1/2)})$ par rapport aux variables $\alpha, \beta, \delta$ et $\varepsilon$ = signe de $z$.

*PROPOSITION 2.*

*Soient $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^*$. Pour toute fonction $\varphi$ $C^\infty$ à support compact sur $G$, l'opérateur*

$$\pi(\varphi\,;\, z,t) = \int \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;\, z,t)\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

*est traçable et l'application*

$$\varphi \longrightarrow Tr\ \pi(\varphi\,;\, z,t)$$

*est une distribution sur $G$ d'ordre au plus un.* On a

$$Tr\ \pi(\varphi;z,t) = \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta z > 0}} \int i\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, e^{i(\alpha z+\delta t) - \frac{iz}{4}((\gamma^2+\beta^2)\operatorname{cotg}\frac{\delta+i\eta}{2} + 2\beta\gamma)}\, d\alpha d\beta d\delta d\gamma$$

et, par une intégration par partie, on obtient une densité localement intégrable.

On fait les calculs seulement $z > 0$.

$$\pi(\varphi\ ; z,t)\xi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\gamma,t\hat{+}x+1/2)\xi_n(\gamma+x)d\gamma.$$

La fonction $\varphi$ étant $C^\infty$ à support contenu dans un compact $K$ fixe, par des intégrations par parties, on obtient une majoration

$$|\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\gamma,t\hat{+}n+1/2)| \leqslant M_K(\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2}\|_\infty + \|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\delta^2}\|_\infty)\frac{\chi(\gamma)}{|1+izx|(t+n+1/2)^2}$$

où $M_K$ est une constante dépendant de $K$ et $\chi$ la fonction caractéristique de la projection sur l'axe des $\gamma$ de $K$. Grâce à l'inégalité de Schwartz, on en déduit

$$\|\pi(\varphi,z,t)\xi_n\|_2 \leqslant \frac{M'}{(t+n+1/2)^2}(\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2}\|_\infty + \|\frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta\partial\delta^2}\|)$$

où $M'$ est une constante dépendant de $K$.

Les $\xi_n$ constituent une base orthonormale de $\mathcal{H}_{z,t}$ et cette relation montre que $\pi(\varphi\ ; z,t)$ est traçable ; elle montre aussi que $\varphi \longrightarrow \mathrm{Tr}\ \pi(\varphi;z,t)$ est une distribution d'ordre $\leqslant 3$.

Utilisant le fait que $L = \frac{i}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2})$ a pour valeurs propres $i(n+1/2)$ (où $n \in \mathbb{N}$), on fait un prolongement analytique de $\exp \delta L$ :

L'opérateur $\exp(\delta+i\eta)L$ avec $\eta > 0$ possède les valeurs propres $\exp\cdot(i\delta(n+1/2) - \eta(n+1/2))$ qui forment une série absolument convergente. Il est donc traçable. Comme précédemment, $\exp(\delta+i\eta)L$ est toujours donné par le noyau continu en $(x,y)$ :

$$e^{i\frac{\delta+i\eta}{2}}\sqrt{\frac{ie^{-i(\delta+i\eta)}}{2\pi\sin(\delta+i\eta)}}\ e^{\frac{iz}{2\sin(\delta+i\eta)}(-(x^2+y^2)\cos(\delta+i\eta)+2xy)}$$

L'opérateur

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta+i\eta\ ; z,t)$$

est encore traçable et est donné par le prolongement analytique du noyau $K(\alpha,\beta,\gamma\ ; z,t,x,y)$ du Théorème 1 à $\delta+i\eta$. Ce noyau étant encore continue, sa trace est donnée par l'intégrale diagonale [6].

$$A = \mathrm{Tr}\ \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta+i\eta\ ;z,t) = \int e^{i(\alpha z+\beta zx+(\delta+i\eta)t)}e^{i\frac{\delta+i\eta}{2}}\sqrt{\frac{ize^{(\delta+i\eta)/2}}{2\pi\sin\frac{\delta+i\eta}{2}}}\ .$$

$$e^{\frac{iz}{2\sin(\delta+i\eta)}(-((x+\gamma)^2+x^2)\cos(\delta+i\eta)+2x(x+\gamma))}dx.$$

Figure ici une intégrale gaussienne convergente dont le calcul est classique :

$$A = e^{i\frac{\delta+i\eta}{2}}\sqrt{\frac{ize^{\frac{\delta+i\eta}{2i}}}{2\sin\frac{\delta+i\eta}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{iz\mathrm{tg}\frac{\delta+i\eta}{2}}}\ e^{i(\alpha z+(\delta+i\eta)t)-\frac{iz}{4}(2\beta\gamma+(\beta^2+\gamma^2)\mathrm{cotg}\frac{\delta+i\eta}{2})}.$$

Les racines carrées sont des déterminations à partie réelle positive et le coefficient de l'exponentielle vaut $\pm i/2\sin\frac{\delta+i\eta}{2}$.

Comme le produit des racines carrées est de période $2\pi$, il suffit de le calculer pour $\delta\in\,]-\pi,+\pi[$, le prolongement aux autres valeurs de $\delta$ est évident grâce à la périodicité de
de $e^{i(\delta+i\eta)/2}$ et de $\sin\frac{\delta+i\eta}{2}$. Le signe de $A$ se calcule alors assez facilement et on a

$$A = \frac{i}{2\sin\frac{\delta+i\eta}{2}}\ e^{i(\alpha z+(\delta+i\eta)t)-\frac{iz}{4}(2\beta\gamma+(\gamma^2+\beta^2)\mathrm{cotg}\frac{\delta+i\eta}{2})}$$

Comme $\varphi$ est continue à support compact, l'opérateur

$$\int \pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta+i\eta\ ;z,t)\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)dxd\beta d\gamma d\delta$$

est encore traçable et de trace

$$\int \frac{i}{2\sin\frac{\delta+i\eta}{2}}\ e^{i(\alpha z+(\delta+i\eta)t)-\frac{iz}{4}(2\beta\gamma+(\gamma^2+\beta^2)\mathrm{cotg}\frac{\delta+i\eta}{2})}\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\alpha d\beta d\gamma d\delta =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\gamma,\delta)e^{i(\delta+i\eta)(t+n+1/2)}\xi_n(\gamma+x)\xi_n(x)dxd\gamma d\delta.$$

On justifie alors le passage à la limite $\eta=0$ par une majoration similaire à celle obtenue auparavant.

Le premier membre est la limite figurant dans la proposition et le second membre n'est autre que $\mathrm{Tr}\pi(\varphi\ ;z,t)$.

Par ailleurs, le premier membre n'a pas de sens pour $\eta=0$ car la fonction $\frac{1}{\sin \delta/2}$ n'est pas localement sommable. On peut effectuer une intégration par parties en $d\beta$, et on fait intervenir $\frac{\partial}{\partial\beta}\, e^{-\frac{iz}{2}}$ et une primitive en $\beta$ de la fonction $\frac{i}{2\sin\frac{\delta+i\eta}{2}}\, e^{i(\alpha z+(\delta+i\eta)t) - \frac{iz}{4}(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{cotg}\frac{\delta+i\eta}{2})}$

Cette primitive est localement intégrable, et cela montre que la distribution qui définit le caractère est d'ordre au plus un.

4°)- PROLONGEMENTS ANALYTIQUES.

Précédemment, faisant usage de la positivité de $iL = \frac{1}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2})$ nous avons défini $\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta+i\eta\,;z,t)$ pour $\eta z \geqslant 0$ et $\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)$ en est la limite au bord.

Le sujet de ce qui suit est de trouver un prolongement à $z$ et $t$ complexes et d'en obtenir des propriétés d'analyticité.

D'abord, rappelons les représentations infinitésimales.

$$e \longrightarrow iz$$

$$q \longrightarrow izx$$

$$p \longrightarrow \frac{d}{dx}$$

$$h \longrightarrow it + \frac{i}{2}(zx^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2}{dx^2}).$$

Si l'on complexifie $z$ et $t$, clairement les opérateurs correspondant à $\exp \alpha e$ et $\exp \delta h$ ne seront plus bornés et ne seront pas partout définis. Il se pose donc le problème de choisir un domaine dense où ces opérateurs puissent être définis et composés. Ensuite, nous voulons obtenir une certaine analycité en $z$ et $t$, ce qui voudrait dire que l'on doit choisir les vecteurs dans $\mathcal{H}_{z,t}$ de "manière analytique". Pour nous, fort heureusement, la structure analytique en $z$, $x$, et $t$ est déjà sous-jacente à la construction de la variété $V$ et l'analyciticité en est une propriété naturelle.

On rappelle que si l'on pose $\varepsilon = z/|z|$ et

$$\xi_n(x) = \frac{(\varepsilon z)^{1/4}}{c_n} H_n(\sqrt{\varepsilon z}\; x) \quad \text{avec} \quad c_n = (\sqrt{\pi}.2^n n!)^{1/2}$$

on obtient une fonction propre normalisée de l'opérateur

$$L = \frac{i}{2}\left(zx^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right)$$

avec la valeur propre $i\varepsilon(n+1/2)$

On prolongera analytiquement ces fonctions aux valeurs complexes de $z$ en posant $\varepsilon = \text{signe Re}\, z$.

PROPOSITION 3.

Soit $\varphi$ une fonction de carré sommable sur $G$ à support compact. Pour tout $n \geq 0$, la fonction

$$\pi(\varphi\,; z,t)\xi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\gamma,t+\hat{n}+1/2)\xi_n(x+\gamma)d\gamma$$

est une fonction analytique de $z$, $x$ et de $t$ définie dans l'ensemble des $z$ à partie réelle $\neq 0$.

Pour presque tout $\beta$, on a

$$\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\beta-x,\hat{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(\varphi\,; z,t-n-1/2)\xi_n(x)\xi_n(\beta)$$

où le second membre converge dans $L^2(d\beta)$ et le type de la fonction $\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\beta,\hat{t})$ est entièrement déterminé par le support de $\varphi$ et réciproquement.

Cette proposition ne présente aucune difficulté et résulte directement du théorème de Paley-Wiener classique. Elle n'est pas tout à fait satisfaisante en ce sens que le support de la fonction est caractérisé par le comportement de type exponentiel, non pas de $\pi(\varphi\,; z,t)\xi_n(x)$, mais du noyau $\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},?,\hat{t})$ qui vérifie

$$\pi(\varphi\,; z,t)\xi_n(x) = (\hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},?,\hat{t}) * \xi_n)(-x).$$

Par ailleurs, elle est aussi le début d'une formule d'inversion permettant de calculer $\varphi$ en fonction de $\pi(\varphi\,;z,t)$.

Dans cette proposition, on a choisi des fonctions propres normalisées $\xi_n$ de $L$ comme domaine des prolongements des opérateurs exponentiels. Un autre choix est possible, à savoir les fonctions génératrices

$$\Phi_z(u,x) = e^{-\varepsilon z(u^2-2ux+\frac{x^2}{2})}$$

où $\varepsilon = \text{signe Re}z$ et $u \in \mathbb{C}$

qui forment un ensemble dense de fonctions de $L^2(dx)$ et qui dépendent analytiquement de $z$ et de $u$.

Les fonctions génératrices vérifient

$$(\varepsilon zx + \frac{d}{dx})\Phi_z(u,x) = 2\varepsilon zu\Phi_z(u,x)$$

c'est-à-dire que l'on fait un développement en "fonctions propres" de $(\varepsilon zx + \frac{d}{dx})$ qui représente $p - i\varepsilon q$.

On a la

PROPOSITION 4.

Pour tout $u \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)\Phi_z(u,x) = e^{i(\alpha z+\beta zx+\delta(t+\frac{\varepsilon}{2}))}\, e^{-\varepsilon z(u^2e^{2i\delta}-2ue^{i\delta}(x+\gamma)+\frac{(x+\gamma)^2}{2})}$$

est analytique en $z,x,t$ pour $\text{Re}\, z \neq 0$.

Pour toute fonction $\varphi$ continue à support compact sur $G$, on a

$$\pi(\varphi\,;z,t)\Phi_z(u,x) = e^{-\varepsilon z\frac{x^2}{2}} \int \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)e^{\varepsilon z\{i\alpha\varepsilon-u^2e^{2i\delta}+2ue^{i\delta}\gamma-\gamma^2/2\}}$$

$$.\ e^{\varepsilon zx(i\varepsilon\beta+2ue^{i\delta}-\gamma)}\, e^{i(t+\varepsilon/2)\delta}\, d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

$$= e^{-\varepsilon z\frac{x^2}{2}} \int \hat{\varphi}(\hat{z},\hat{zx},\gamma,\delta)e^{\varepsilon z(-u^2z^{2i\delta}+2ue^{i\delta}\gamma-\frac{\gamma^2}{2})}$$

$$e^{\varepsilon zx(2ue^{i\delta}-\gamma)}e^{i(t+\varepsilon/2)\delta}\, d\gamma d\delta.$$

La fonction $e^{\varepsilon z \frac{x^2}{2}} \pi(\varphi\,;z,t)\Phi_z(u,x)$ est une fonction analytique de $z$, $t$, $u$, $zx$, définie pour $\mathrm{Re}\, z > 0$ par exemple, admet un prolongement analytique à tout $z$ qui est de type exponentiel en $z$, $t$, $zx$ à $n$ fixé.

## 5°)- REPRESENTATIONS HOLOMORPHES.

La fonction

$$\Phi_z(u,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\varepsilon z}\; u)^n}{n!} H_n(\sqrt{\varepsilon z}\; x) = e^{-\varepsilon z(u^2-2ux+\frac{x^2}{2})}$$

est fonction propre de $(\varepsilon zx + \frac{d}{dx})$ avec la valeur propre $2\varepsilon zu$. Elle permet aussi de définir un opérateur d'entrelacement entre l'espace $L^2(dx)$ des fonctions de carré sommable en $dx$, dont les éléments $\frac{(\varepsilon z)^{1/4}}{c_n} H_n(\sqrt{\varepsilon z}\; x)$ forment une base orthonormale et l'espace $\mathcal{O}_z(u)$ des fonctions antiholomorphes de la variable complexe $u$ et de carré sommable pour la mesure

$d\mu(u) = e^{-2\varepsilon z|u|^2}(\frac{\varepsilon z}{\pi})^{3/2}$ idudu.

En effet, dans $\mathcal{O}_z(u)$, les fonctions $(\sqrt{\varepsilon z}\; \bar{u})^n$ sont orthogonales entre elles pour $n \in \mathbb{N}$, de norme $d_n = (\varepsilon z)^{1/4}\, n!/2^n$ et elles forment une base orthogonale.

La transformation $T$ définie par

$$\frac{(\varepsilon z)^{1/4}}{c_n} H_n \longrightarrow (\varepsilon z\bar{u})^n/d_n$$

sur les éléments de base est donc une isométrie de $L^2(dx)$ sur $\mathcal{O}_z(u)$ et se réalise alors par

$$g(u) = Tf(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon z(\bar{u}^2-2\bar{u}x+\frac{x^2}{2})} f(x)\, dx$$

$$f(x) = T^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{C}} e^{-2\varepsilon z|u|^2} g(u) e^{-\varepsilon z(u^2-2ux+\frac{x^2}{2})}\, d\mu(u).$$

La première intégrale est convergente au sens de Lebesgue, alors que la deuxième est à prendre comme une limite dans $L^2(dx)$ des fonctions

$$\int_{|u|\leq R} e^{-2z\varepsilon|u|^2}\, g(u) e^{-\varepsilon z(u^2-2ux+\frac{x^2}{2})}\, d\mu(u).$$

Compte tenu de l'action de $\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)$ sur les fonctions génératrices $\Phi_z(u,x)$, on calcule sans peine la représentation dans l'espace $\mathcal{O}_z(u)$ :

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)T^{-1}g(x) =$$

$$\int_{\mathbb{C}} g(u)e^{-2|u|^2\varepsilon z} e^{i(\alpha z+\beta zx+\delta(t+\varepsilon/2))} e^{-\varepsilon z(u^2e^{2i\delta\varepsilon}-2ue^{i\delta\varepsilon}(x+\gamma)+(\frac{x+\gamma}{2})^2)} (\frac{\varepsilon z}{\pi})^{3/2}\, idu\, d\bar{u}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} g(u)e^{-\varepsilon z(2|u|^2+u^2e^{2i\delta\varepsilon})} e^{2\varepsilon zx(ue^{i\delta\varepsilon}+\frac{i\varepsilon\beta}{2}-\frac{\gamma}{2})} e^{-\varepsilon z(\frac{x^2}{2}+\frac{\gamma^2}{2}-2ue^{i\delta\varepsilon}\gamma)} e^{i(\alpha z+\delta(t+\frac{\varepsilon}{2}))} (\frac{\varepsilon z}{\pi})^{3/2}\, idu\, d\bar{u}.$$

On fait le changement de variable :

$$v = ue^{i\delta\varepsilon} - \zeta \quad \text{où} \quad \zeta = \frac{\gamma-i\varepsilon\beta}{2}\ ;\ \zeta\bar{\zeta} = \frac{\gamma^2+\beta^2}{4}\ ;\ \bar{\zeta} = \frac{\gamma+i\varepsilon\beta}{2},$$

$$2|v|^2 = 2|u|^2 + 2\zeta\bar{\zeta} - 2ue^{i\delta}\bar{\zeta} - 2\bar{u}e^{-i\delta} = 2|u|^2 - 2ue^{i\delta}\bar{\zeta} - 2\bar{v}\zeta,$$

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)T^{-1}g(x) = \int g((v+\zeta)e^{-i\delta\varepsilon})e^{-2\varepsilon z|v|^2} e^{-\varepsilon z(v^2-2vx+\frac{x^2}{2})}\,.$$

$$e^{\varepsilon z(-2\bar{v}\zeta-2ue^{i\varepsilon\delta}\bar{\zeta}-2ue^{i\varepsilon\delta}\zeta+\zeta^2-\frac{(\zeta+\bar{\zeta})^2}{2}+2ue^{i\delta\varepsilon}(\zeta+\bar{\zeta}))} e^{i(\alpha z+\delta(t+\frac{\varepsilon}{2}))} .(\frac{\varepsilon z}{\pi})^{3/2}.$$

$$.idv\, d\bar{v}$$

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)T^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{C}} e^{iz(\alpha+\varepsilon\frac{i}{2})(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}^2))} e^{i\delta(t+\varepsilon/2)} g((v+\zeta)e^{i\delta\varepsilon}).$$

$$.\, e^{-\varepsilon z(v^2-2vx+\frac{x^2}{2})} e^{-2\varepsilon z\bar{v}\zeta}\, d\mu(v).$$

On a donc l'expression de la transformation dans l'espace $\mathcal{O}_z(u)$ :

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)g(u) = e^{iz(\alpha+\frac{i}{2}(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}\ ))+i\ (t+\varepsilon/2)}$$

$$e^{-2\varepsilon z\bar{u}\zeta}\, g((u+\zeta)e^{-i\delta\varepsilon})$$

où $\qquad \zeta = \frac{\gamma-i\varepsilon\beta}{2}.$

On peut aussi obtenir directement cette représentation avec notre méthode d'exponentiation comme suit :

On prend la réalisation explicite du groupe G donnée précédemment et on complexifie, ce qui donne la formule

$$(10)\qquad \begin{aligned}&\exp \alpha e \exp \beta q \exp \gamma p \exp \delta h = \\ &\exp(\alpha+\tfrac{i\varepsilon}{2}(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}^2)) \exp \zeta(p+i\varepsilon q) \exp \delta h \exp \bar{\zeta}e^{\varepsilon i\delta}(p-i\varepsilon q).\end{aligned}$$

(Elle peut aussi s'obtenir à partir des formules de Campbell-Hausdorf).

On réalise les opérateurs infinitésimaux par :

$$(11)\qquad \begin{aligned}&e \longrightarrow iz \\ &p+i\varepsilon q \longrightarrow -2\bar{u}\varepsilon z \\ &p-i\varepsilon q \longrightarrow \frac{d}{d\bar{u}} \\ &h \longrightarrow it+\frac{1}{2e}(p^2+q^2) = it+\frac{1}{2e}((p+i\varepsilon q)(p-i\varepsilon q)+i\varepsilon e)\end{aligned}$$

i.e

$$h \longrightarrow i(t+\tfrac{\varepsilon}{2})+i\varepsilon\bar{u}\,\frac{d}{d\bar{u}}$$

et on les fait opérer dans l'espace des fonctions antiholomorphes de $u \in \mathbb{C}$ et de carré sommable pour la mesure $d\mu(u)$.

On peut choisir comme domaine l'ensemble des fonctions antiholomorphes de type exponentiel et on vérifie assez facilement que les opérateurs

$$p = -\varepsilon z\bar{u}+\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\bar{u}}$$

$$q = +iz\bar{u}+\frac{i\varepsilon}{2}\,\frac{d}{d\bar{u}}$$

sont antisymétriques sur ce domaine.

Par exemple, vérifions le pour $q$ :

Si $f$ et $g$ sont antiholomorphes, de type exponentiel, on a

$$d(f(u)e^{-2\varepsilon zu\bar{u}}\,\overline{g(u)}du) = 2i(\frac{\partial f}{\partial\bar{u}} - f.2\varepsilon zu)e^{-2\varepsilon zu\bar{u}}g(\bar{u})\ idu\wedge d\bar{u}$$

$$d(f(u)e^{-2\varepsilon zu\bar{u}}\,\overline{g(u)}d\bar{u}) = -2if(u)e^{-2\varepsilon zu\bar{u}}(\overline{\frac{\partial}{\partial\bar{u}}(g) - 2\varepsilon z\bar{u}\bar{g}})idu\wedge d\bar{u}$$

$$d(fe^{-2\varepsilon zu\bar{u}}\,\bar{g}(du-d\bar{u})) = \left[2i(\frac{\partial f}{\partial\bar{u}}+2\varepsilon z\bar{u}f)\bar{g} - 2f(\overline{i\frac{\partial}{\partial\bar{u}}\,g+2iz\bar{u}g})\right]e^{-2\varepsilon zu\bar{u}}\,i\,du\wedge d\bar{u}.$$

Compte tenu du fait que $f$ et $g$ sont antiholomorphes de type exponentiel, on peut appliquer le théorème de Stokes sur un disque de rayon $R$ et passer à la limite $R=+\infty$, les termes de bord disparaissent et il vient

$$2<qf,g> - 2<f,qg> = 0$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le calcul est immédiat à partir de (10) et (11) pour obtenir les exponentielles et la représentation :

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)g(u) = e^{iz(\;+\frac{i\varepsilon}{2}(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}^2))}\,e^{-2\bar{u}\varepsilon z\zeta}e^{i\delta(t+\varepsilon/2)}\exp i\varepsilon\delta\bar{u}\,\frac{d}{d\bar{u}}\;.$$

$$\cdot\, g(u+\zeta e^{-i\varepsilon\delta})$$

$$= e^{iz(\alpha+\frac{i\varepsilon}{2}(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}^2))-2\bar{u}\varepsilon z\zeta}\,e^{i\delta(t+\varepsilon/2)}g((u+\zeta)e^{-i\varepsilon\delta}).$$

La représentation peut aussi se réaliser par le noyau

$$K_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t,u,v) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon z}}\,e^{iz(\alpha+\frac{i\varepsilon}{2}(2\xi\bar{\xi}+\xi^2-\bar{\xi}^2))\,-\,2\bar{u}\varepsilon z\zeta+i\delta(t+\frac{\varepsilon}{2})}\,e^{2\varepsilon ze^{-i\varepsilon\delta(\bar{u}+\bar{\zeta})v}}$$

où l'action est donnée par

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t)g(u) = \int_{\mathbb{C}} K_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z,t,u,v)g(v)\,d\mu(v).$$

Preuve : on décompose sur les éléments de base $(\sqrt{\varepsilon z}\,\bar{u})^n$ dont l'image est $e^{iz(\alpha+i\varepsilon(2\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2-\bar{\zeta}^2)-2\bar{u}\varepsilon z\zeta+i\delta(t+\varepsilon/2)}((\bar{u}+\bar{\zeta})e^{-i\varepsilon\delta}\sqrt{\varepsilon z})^n$ et il suffit de raisonner en tenant compte des normalisations. Cette expression analytique est assez simple. La représentation obtenue est bien connue sous le nom de représentation induite antiholomorphe [6].

## REFERENCES POUR LA PARTIE 0.


1. N. BOURBAKI. Groupes et Algèbres de Lie. Chap. 1 Hermann Paris.

2. M. HAUSNER, J.T. SCHWARTZ.
   Lie Groups, Lie Algebras. Gordon and Breach (1968).

3. F. RIESZ, B.SZ. NAGY.
   Leçons d'analyse fonctionnelle. Académie des Sciences de Hongrie. Budapest. (1968).

4. B. SIMON. Quantum Mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms. Princeton Series in Physics. Princeton. New Jersey (1971).

5. R.P.FEYNMAN, A.R. HIBBS.
   Quantum Mechanics and Path Integrals. Mc Graw Hill (1965).

6. P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHAS, M. RAIS, P. RENOUARD, M. VERGNE. Représentations des groupes de Lie résolubles. Dunod-Paris. (1972).

# I. PRELIMINAIRES

I.1. Dans tout ce travail, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble sur un corps k de caractéristique zéro. Si $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

I.2. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$. On munit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de sa filtration naturelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$. Un <u>sous-ensemble de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ est dit caractéristique</u> lorsqu'il est globalement invariant par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\tau$ l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

I.3. Soient $N\subset M$ deux $\mathfrak{g}$-modules. Un élément X de M est dit <u>"$\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo N dans M de poids $\lambda(X)$"</u> lorsque

$\lambda(X)\in\mathfrak{g}^{*(1)}$

$Y.X\in<\lambda(X),Y>X+N$ pour tout $Y\in\mathfrak{g}$.

<u>On définit alors la fonction</u> $\mu(?,?)$ à valeurs dans N par

$\mu(X,Y)=Y.X-<\lambda(X),Y>X$ ;

la linéarité par rapport à la seconde variable se lit sur cette formule.

I.4. Un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo 0 est appelé un <u>semi-invariant</u>. On note E l'ensemble des semi-invariants de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ (muni de l'action adjointe de $\mathfrak{g}$). Les $\mathfrak{g}$-modules considérés dans la suite sont des sous-ensembles de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ ; ils seront de plus des algèbres, des corps etc...

I.5. On note $A^{\#}$ le centre de l'algèbre A ; pour $A\subset\mathcal{K}(\mathfrak{g})$, on note $A^E=A\cap E$ et $A_E$ le localisé de A par $A^E$.

I.6. <u>Une algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est dite 2-nilpotente si</u> $[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]]=0$ et une <u>base de $\mathfrak{n}$ est dite orthogonale</u> et écrite sous la forme

$(Z_0,Z_1,\dots,Z_r\,;P_1,\dots,P_s\,;Q_1,\dots,Q_s)$

lorsque les seuls commutateurs non nuls de ses éléments sont les $[P_i,Q_i]$ pour $i=1,\dots,s$ et ces commutateurs sont colinéaires à $Z_0$ (2) [1].

I.7. Sur les bases, nous ferons les conventions suivantes.

Si $\ell_1, \ell_2,\dots,\ell_r$ sont des bases de sous-espaces vectoriels formant une somme directe, la base correspondante de la somme directe est notée $(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_r)$.

Si $\ell_i$ est une base, ses éléments seront notés $L_{i,j}$ et ordonnés suivant l'ordre des $j$ croissants ; on note encore $\ell_i=(L_{i,j})$.

Parfois, on oublie la structure d'ordre de $(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_r)$ pour l'identifier à $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_r$. Certaines bases orthogonales pour une sous-algèbre 2-nilpotente sont notées $(Z_0,q_1,q_2,\dots,q_r\,;\,q_{r+1},\dots,q_{r+p})$ lorsque les seuls commutateurs non nuls sont ceux des éléments deux à deux du type de I.6.

I.8. Soit $M$ un $\mathfrak{g}$-module complètement trigonalisable. On dit que

$0=M_0\subset M_1\subset \dots \subset M_n=M$

est une <u>suite de composition semi-simple minimale</u> lorsque pour tout $i=0,1,\dots,n-1$, $M_{i+1}$ est engendré par $M_i$ et par tous les $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $M_i$ dans $M$. On dit qu'une <u>base $\ell$ de $M$ est semi-simple et associée à cette suite</u> lorsque

$\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$

où chaque $\ell_i$ est formée de $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $M_{i-1}$ dans $M$.

I.9. Le produit symétrisé de deux éléments $a,b$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ est noté $a \vee b=\frac{1}{2}(ab+ba)$.

Soient $A$ une sous-algèbre de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ et $\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n \subset\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

(1) On utilise le symbole * pour désigner l'espace dual et < , > pour noter la forme bilinéaire canonique correspondant

(2) Dans tout ce texte, on a $Z_0=1\in\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

On note

$A[\ell_1,\dots,\ell_n]$ la sous-algèbre de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ engendrée par $A$ et $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$

$A(\ell_1,\dots,\ell_n)$ le sous-corps engendré par $A[\ell_1,\dots,\ell_n]$

$A\{\ell_1,\dots,\ell_n\}$ le A-module à gauche engendré par $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$

$A \vee \{\ell_1,\dots,\ell_n\}$ le A-module symétrique engendré par $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$ i.e. l'ensemble des combinaisons A-linéaires symétrisées des éléments de $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$.

I.10. <u>Notations matricielles.</u>

Soient $\ell_1,\dots,\ell_r$, $b_1,\dots,b_s$, $h_1,\dots,h_t$ des sous-ensembles ordonnés et finis de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

On note

$$[\ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s] = ([L_i,B_j])$$

la matrice des commutateurs des éléments $L_i \in (\ell_1,\dots,\ell_r)$ et $B_j \in (b_1,\dots,b_s)$, l'ordre de $(\ell_1,\dots,\ell_r)$ correspondant aux lignes et celui de $(b_1,\dots,b_s)$ aux colonnes de la matrice.

Le symbole $\mathfrak{D}[\ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s]$ désigne alors le déterminant de cette matrice (supposée carrée) développé suivant sa première colonne, les mineurs étant considérés comme des coefficients et les produits avec les éléments correspondants de la première colonne étant des produits symétrisés. Par récurrence sur le rang de la matrice, ceci détermine tous les déterminants.

Si $H \in (h_1,\dots,h_t)$, on note

$$[H \,;\, \ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s]$$

la matrice dont la première colonne est formée par $(H,\ell_1,\dots,\ell_r)$ (dans cet ordre) et le reste par la matrice $[H,\ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s]$.

En particulier, si $[\ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s]$ est carrée, $[H \,;\, \ell_1,\dots,\ell_r \,;\, b_1,\dots,b_s]$ est encore une matrice carrée dont le déterminant

$$\mathfrak{D}[H\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_1,\dots,b_s]$$

sera calculé comme précédemment.

On utilise la notation

$$\mathfrak{D}\,[h_1,\dots,h_t\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_1,\dots,b_s]$$

pour désigner l'ensemble ordonné des $\mathfrak{D}[H\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_n,\dots,b_s]$ où $H$ parcourt $(h_1,\dots,h_t)$. Dans la suite, cet ensemble sera dite une base "transformée" de $(h_1,\dots,h_t)$.

## I.11. Application : Diagonalisation symplectique.

Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie 2-nilpotente et $(Z_0,\mathfrak{h},\ell)$ une base de $\mathfrak{n}$ sur un corps $K$ telle que $(Z_0,\mathfrak{h})$ soit une base du centre de $\mathfrak{n}$ et que la restriction du crochet à $K\{\ell\}$ soit une forme bilinéaire alternée non dégénérée à valeurs dans $K\,Z_0$.

Par un choix convenable de l'ordre de $\ell=(L_1,\dots,L_{2n})$, on obtient une base orthogonale de $\mathfrak{n}$ sous la forme $(Z_0,h\,;q)$ en définissant $q=(Q_1,\dots,Q_{2n})$ où

$$Q_1=L_1,\quad Q_2=L_2$$

et plus généralement pour $i=1,\dots,n-1$ et $k=1,2$

$$Q_{2i+k}=\ [L_{2i+k}\,;L_1,\dots,L_{2i}\,;L_1,\dots,L_{2i}]$$

(la condition sur le choix de l'ordre de $\ell$ étant :

$$[Q_{2i+1},Q_{2i+2}]\neq 0)\ .$$

On désignera cette construction comme "la diagonalisation symplectique" de la base $\ell$.

## I.12. Le degré et l'antiautomorphisme principal.

Dans les applications de I.10 (dont on garde les notations) on a la situation suivante :

$\{H_1\}$, $\ell_1,\dots,\ell_r\subset\mathfrak{G}$ et $b_1,\dots,b_r$ sont formées d'éléments homogènes $B_i$ d'un corps commutatif gradué $K$ qui est invariant sous l'action de $\mathfrak{G}$ (donc le degré est conservé par l'action de $\mathfrak{G}$). Soit $d(B_i)$ le degré de $B_i$.

Alors $\mathfrak{D}[H\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_1,\dots,b_s]$ est une combinaison K-linéaire symétrisée d'éléments de $\mathfrak{g}$, dont les coefficients sont homogènes de degré $d = \sum_{i=1}^{p} d(B_i)$ où $(B_1,\dots,B_p) = (b_1,\dots,b_r)$. Le degré de $\mathfrak{D}[H\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_1,\dots,b_s]$ (ou de toute combinaison K-linéaire symétrique d'éléments de $\mathfrak{g}$, à coefficients homogènes de degré d) sera alors pris égal à d+1.

De plus, dans la suite les éléments $B_i$ de la base $(b_1,\dots,b_r)$ sont des vecteurs propres de l'antiautomorphisme principal $\tau$ de $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ avec $(-1)^{d(B_i)}$ comme valeur propre. On voit qu'alors $\mathfrak{D}[H\,;\ell_1,\dots,\ell_r\,;b_1,\dots,b_s]$ est vecteur propre de $\tau$ avec la valeur propre $(-1)^{d+1}$ grâce à la symétrisation introduite en I.10.

I.13. $\mathfrak{g}$-homogénéité.

Soient $A \subset \mathcal{H}(\mathfrak{g})$, $a_i \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ et $L_i \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo A. On dit que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \vee L_i \quad \left(\text{ou } \sum_{i=1}^{m} L_i a_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_i L_i\right)$$

est une combinaison $\mathfrak{g}$-homogène (modulo A) lorsque tout $a_i$ est un semi-invariant tel que

$$\lambda(a_i) + \lambda(L_i) \in \mathfrak{g}^*$$

ne dépend pas de $i=1,\dots,m$.

I.14. Modules et bases symétriques.

Dans la suite, on a une sous-algèbre commutative A de $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ et un A-module à gauche $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ tel que $1 = Z_0 \in \tilde{\mathfrak{h}}$ et $[\tilde{\mathfrak{h}},A] \subset A$. Alors $\tilde{\mathfrak{h}}$ est aussi un A-module à droite.

Mais $\tilde{\mathfrak{h}}$ a aussi une structure de A-module symétrique lorsque l'on définit le produit d'un élément $a \in A$ et d'un élément $H \in \tilde{\mathfrak{h}}$ par

$$a \vee H = \frac{1}{2}(aH + Ha)$$

On vérifie facilement l'associativité de ce produit.

Pour la commodité, nous dirons que l'on a un A-module, puisque dans les autres cas on dit déjà explicitement s'il s'agit d'un A-module à gauche ou à droite.

Une base à gauche contenant $Z_o$ est en même temps une base à droite ou une base (symétrique) et réciproquement. Par exemple, si $X = \sum_{i=o}^{m} a_i' Z_i \in \tilde{h}$ où $(Z_o, Z_1, \ldots, Z_m)$ est une base à gauche de $\tilde{h}$, on a aussi

$$X = \sum_{i=o}^{m} Z_i \cdot a_i'' = \sum_{i=o}^{m} a_i \vee Z_i$$

avec

$$a_i = a_i' = a_i'' \quad \text{pour} \quad i=1,\ldots,m$$

$$a_o = a_o' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} [Z_i, a_i] = a_o'' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} [Z_i, a_i].$$

Comme le produit symétrisé permet d'avoir une structure de A-module symétrique, on peut parfaitement faire les changements de base avec les règles habituelles de l'algèbre linéaire, avec de plus la licence complète d'écrire les produits avec les scalaires à gauche ou à droite.

# II. CONSTRUCTIONS ALGEBRIQUES

Les objets et les notions abordés ici sont déjà présents dans [2], en particulier pour les sous-algèbres 2-nilpotentes(3) caractéristiques et pour les constructions afférentes aux algèbres nilpotentes. La construction exposée dans ce chapitre est plus globale et donne des résultats plus précis, ce dont nous avons besoin pour la suite.

Dans un premier temps, nous groupons tous les résultats dans un long énoncé de quatre parties, correspondant aux quatres étapes de la construction. En vue des applications aux groupes résolubles réels, nous insérons aussi le cas du corps $\mathbb{R}$.

La première partie du théorème concerne les algèbres de Lie résolubles sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro. Les trois autres parties concernant le cas où $\mathbb{k}$ est algébriquement clos, ou, lorsqu'il s'agit de $\mathbb{R}$, du passage à la clôture $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ et du retour final à $\mathbb{R}$.

(3) C'est-à-dire telles que $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] = 0$.

## II. THEOREME. 1. Décomposition adjointe.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro.

1.1. Il existe un diagramme canonique $\mathfrak{D}$ d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 = \mathfrak{h}_{0,1} & \subset & \mathfrak{h}_{1,1} & \subset & \mathfrak{h}_{2,1} & \subset & \cdots & \subset & \mathfrak{h}_{n-1,1} & \subset & \mathfrak{h}_{n,1} & = & \mathfrak{g} \\ \| & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \\ 0 = \mathfrak{h}_{0,2} & \subset & \mathfrak{h}_{1,2} & \subset & \mathfrak{h}_{2,2} & \subset & \cdots & \subset & \mathfrak{h}_{n-1,2} & \subset & \mathfrak{h}_{n,2} & = & \mathfrak{g}_n \end{array}$$

déterminé par les deux conditions suivantes

$\mathcal{C}_1$. La suite des idéaux caractéristiques

$$0 = \mathfrak{h}_{0,1} \subset \mathfrak{h}_{1,1} \subset \mathfrak{h}_{2,1} \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_{n-1,1} \subset \mathfrak{h}_{n,1} = \mathfrak{g}$$

est semi-simple [(4)] et minimale [(5)] pour l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{C}_2$. $\mathfrak{g}_n$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire l'intersection des noyaux des sous-quotients simples de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$) et pour $p=0,1,2,\ldots,n$, $\mathfrak{h}_{p,2} = \mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{h}_{p,1}$.

1.2. Pour toutes les inclusions écrites du diagramme $\mathfrak{D}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ sur le quotient correspondant est semi-simple.

De plus :

(i) $\mathfrak{h}_{p,2}$ est le transporteur dans $\mathfrak{h}_{p,1}$ de $\mathfrak{h}_{q,1}$ dans $\mathfrak{h}_{q-1,1}$ pour $q=p-1,\ldots,1$, c'est-à-dire l'intersection de $\mathfrak{h}_{p,1}$ avec les noyaux des sous-quotients simples de la représentation adjointe dans $\mathfrak{h}_{p-1,1}$.

(ii) $[\mathfrak{h}_{p,1},\mathfrak{h}_{p,1}] \subset \mathfrak{h}_{p-1,1}$

(iii) Si $L \in \mathfrak{h}_{p,1}$ est un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo $\mathfrak{h}_{p-1,1}$ linéairement

---

(4) ie telle que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}_{p,1}/\mathfrak{h}_{p-1,1}$ est semi-simple pour $p=1,2,\ldots,n$

(5) minimale pour la longueur et telle que $\mathfrak{h}_{p,1}$ soit le plus grand possible.

indépendant de $\mathfrak{h}_{p-1,1} + \mathfrak{h}_{p,2}$, alors $[\mathfrak{g},L] \subset \mathfrak{h}_{p-1,2}$ .

## 1.3. Données de base.

Associée au diagramme $\mathfrak{D}$ , une base de $\mathfrak{g}$ est formée par la réunion des bases partielles choisies pour chaque indice $p=1,\dots,n$ comme suit :

- On choisit une base $\ell_{p,1}$ d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}_{p,2} + \mathfrak{h}_{p-1,1}$ dans $\mathfrak{h}_{p,1}$ formée de $\mathfrak{g}$-vecteurs propres [6] modulo $\mathfrak{h}_{p-1,2}$.

- On forme une base $\ell_p^2$ d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}_{p-1,2}$ dans $\mathfrak{h}_{p,2}$ avec des représentants des éléments de bases de $\mathfrak{g}$-modules simples dont la somme directe est $\mathfrak{h}_{p,2}/\mathfrak{h}_{p-1,2}$.

Dans le cas où $k=\mathbb{C}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est le complexifié d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$, on constitue $\ell_i^2$ de manière plus précise comme suit : Dans la construction précédente pour $\mathfrak{g}_0$ :

- On incorpore des $\mathfrak{g}_0$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{h}_{i-1,2}$ pour obtenir la somme directe des $\mathfrak{g}_0$-modules simples de dimension 1.

- On choisit une décomposition d'un supplémentaire en somme directe de $\mathfrak{g}_0$-modules simples de dimension 2. En complexifiant, chacun de ces $\mathfrak{g}_0$-modules se décompose en deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension un, et donnent deux $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{h}_{p-1,2}$ qui sont de la forme $L_1 + iL_2$ et $L_1 - iL_2$ où $L_1, L_2 \in \mathfrak{g}_0$. On met alors $L_1 + iL_2$ et $L_1 - iL_2$ dans $\ell_p^2$ pour $\mathfrak{g}$ et $L_1$ et $L_2$ dans la base $\ell_p^2$ correspondante pour $\mathfrak{g}_0$.

Les bases partielles $\ell_p^2$ et $\ell_{p,1}$ sont invariantes par le groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

---

(6) Ce qui est possible puisque tous les poids sont nuls d'après I.2 (iii)

Preuve de II.1.

1.1. Sous l'action adjointe, $\mathfrak{g}$ se décompose en une suite strictement croissante d'idéaux caractéristiques et canoniques :

$$(\mathfrak{h}_{i,1}) : \qquad 0 = \mathfrak{h}_{o,1} \subset \mathfrak{h}_{1,1} \subset \mathfrak{h}_{2,1} \subset \dots \subset \mathfrak{h}_{n-1,1} \subset \mathfrak{h}_{n,1} = \mathfrak{g}$$

qui est la suite simi-simple minimale de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathfrak{g}$, définie par la condition : $\mathfrak{h}_{p+1,1}/\mathfrak{h}_{p,1}$ est la plus grande représentation semi-simple de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_{p,1}$.

On a alors la propriété 1.2 (ii) :

(1) $$[\mathfrak{h}_{p,1}, \mathfrak{h}_{p,2}] \subset \mathfrak{h}_{p-1,1}.$$

En effet, $\mathfrak{h}_{p-1,1}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$ . Passant à la clôture algébrique $\bar{\mathbb{k}}$ de $\mathbb{k}$, on note par le symbole $\bar{}$ l'algèbre obtenue par extension des scalaires. Alors $\bar{\mathfrak{h}}_{p+1,1}$ est engendré par $\bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$ et les $\bar{\mathfrak{g}}$- vecteurs propres modulo $\bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}$ . Pour deux tels vecteurs propres $X$ et $Y$ on a

$$[X,Y] = <\lambda(Y),X>Y + \mu(Y,X) = -<\lambda(X),Y>X - \mu(X,Y)$$

et il suffit de démontrer que $[X,Y] \in \bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$ dans le cas où $X$ et $Y$ sont linéairement indépendants modulo $\bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$. Dans ce cas, nécessairement $<\lambda(Y),X>Y = <-\lambda(X),Y>X = 0$ et notre énoncé est vrai.

On peut encore définir une nouvelle suite décroissante d'idéaux caractéristiques et canoniques de $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}_n$$

par :

$\mathfrak{g}_p$ est l'ensemble des éléments $X$ de $\mathfrak{g}$ tels que pour tout $q=1,\dots,p$

$$[X, \mathfrak{h}_{q,1}] \subset \mathfrak{h}_{q-1,1}.$$

Passant à la clôture algébrique, on voit que $\bar{\mathfrak{g}}_p$ n'est autre que l'intersection des noyaux des formes linéaires correspondant aux sous-quotients simples pour l'action de $\bar{\mathfrak{g}}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$, c'est-à-dire des poids d'une base semi-simple de $\bar{\mathfrak{h}}_{p,1}$. En particulier $\mathfrak{g}_n$ est l'idéal de nilpotence de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ . Comme $[\mathfrak{h}_{n,1}, \mathfrak{h}_{n,1}] \subset \mathfrak{h}_{n-1,1}$ on a $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n-1}$. On a évidemment $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_n$.

1.2. Le premier énoncé est évident et (ii) est déjà prouvé.

(i) On a $\mathfrak{h}_{p,2} = \mathfrak{h}_{p,1} \cap \mathfrak{g}_n = \mathfrak{h}_{p,1} \cap \mathfrak{g}_{p-1}$.

En effet, on sait que

$$[\mathfrak{h}_{p,1}, \mathfrak{h}_{p,1}] \subset \mathfrak{h}_{p-1,1}$$

et

$$[\mathfrak{h}_{p,1}, \mathfrak{h}_{p+r,1}] \subset \mathfrak{h}_{p,1} \quad \text{pour tout } r \geqslant 1$$

donc $\mathfrak{h}_{p,1}$ est annulé par tous les poids provenant de $\bar{\mathfrak{g}} / \bar{\mathfrak{h}}_{p-1,1}$ et

$$\mathfrak{h}_{p,2} = \mathfrak{h}_{p,1} \cap \mathfrak{g}_{p-1}.$$

(ii) Soit $L$ un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo $\mathfrak{h}_{p-1,1}$ dans $\mathfrak{h}_{p,1}$.

Supposons $L \notin \mathfrak{h}_{p,2} + \mathfrak{h}_{p-1,1}$. On a

$$[\mathfrak{g}, L] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_n$$

et

$$[\mathfrak{g}, L] \subset kL \oplus \mathfrak{h}_{p-1,1}$$

d'où

$$[\mathfrak{g}, L] \subset (kL \oplus \mathfrak{h}_{p-1,1}) \cap (\mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{h}_{p,1}).$$

Ce qui implique

$$[\mathfrak{g}, L] \subset \mathfrak{h}_{p-1,1} \cap \mathfrak{g}_n = \mathfrak{h}_{p-1,2} \quad .$$

## II.2. Construction et propriété des bases $q_{p,i}$ pour $1 \leqslant p \leqslant i \leqslant n+1$.

Dans la suite, on suppose $\mathfrak{g}$ complètement résoluble (ou $\mathbb{k}$ algébriquement clos).

Il existe des partitions $\ell_p^2 = (\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,n+1})$ pour $p=1,2,\ldots,n$ satisfaisant à la condition $\mathscr{C}_3$ annoncée ci-dessous. De plus, lorsque $\mathfrak{g}$ est le complexifiée de $\mathfrak{g}_0$, on peut même choisir chacune des "parties" $\ell_{p,i}$ invariantes par le groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

Pour toute telle partition, il existe un algorithme de "substitutions linéaires triangulaires" permettant de calculer les bases $q_{p,i}$ pour $p=1,2,\ldots,n$ et $i=p,p+1,\ldots,n+1$. Les propriétés suivantes sont vraies. Dans ce qui suit, sauf mention contraire, $p=1,2,\ldots,n$ et $p \leqslant i \leqslant n+1$. On pose

$$q^{p,i,\varepsilon} = (q_{j,k})_{2 \leqslant j \leqslant p\,;\, j+\varepsilon \leqslant k \leqslant i} \quad (\text{où } \varepsilon = 0,1) \ ^{(7)},$$

$$\ell^{i,p,\varepsilon} = (\ell_{k,j})_{2 \leqslant j \leqslant p\,;\, j+\varepsilon \leqslant k \leqslant i} \ ^{(7)},$$

$$\Delta_{i,p,\varepsilon} = \mathfrak{D}[\ell^{i,p,\varepsilon}\,;\, q^{p,i,\varepsilon}],$$

$$A_{p,i} = A_{p-1,i}[q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,i}] \ ^{(8)} \quad (i > p),$$

$$K_{p,i} = \operatorname{Fract} A_{p,i},$$

$$A_p = A_{p-1}[q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,p+1}] \ ^{(8)},$$

$$K_p = \operatorname{Fract} A_p \quad \text{et}$$

$$\tilde{\mathfrak{h}}_p = K_{p-1}\{Z_0, q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,p+1}, q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots\ldots, q_{p,p}\}$$

où $Z_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

(8) On a donc $A_{p,i} = \mathbb{k}[q^{p,n+1,1} \smallsetminus q^{p,i-1,1}]$
et $A_p = \mathbb{k}[q^{p,p+1,1}] = A_{p,p+1}$.

(7) On utilise l'ordre lexicographique sur le couple $(j,k)$ pour $q^{p,i,\varepsilon}$ et $\ell^{i,p,\varepsilon}$.

$\mathcal{P}_1$. Pour $i > p$, les sous-ensembles $A_{p,i} \subset A_p$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_{p,2})$ sont des anneaux commutatifs et $\mathfrak{g}$-stables. Ils sont engendrés par les éléments des bases qui sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{k}$ et qui sont munis chacun d'un degré égal à leur filtration dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Le degré que l'on peut munir ainsi $A_p$ est conservé par l'action de $\mathfrak{g}$ [9] et on notera ce degré par d( ? ).

$\mathcal{P}_2$. Pour $i > p$, les sous-corps $K_{p,i} \subset K_p$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{h}_{p,2})$ sont commutatifs et caractéristiques. Le crochet dans $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ définit par restriction une application $K_p$-linéaire sur le premier facteur et $\mathbb{k}$-linéaire sur le deuxième de $K_p \vee \mathfrak{h}_{i,2} \times \mathbb{k}\{q^{p,n+1,1}\}$ dans $K_p$ et une représentation de $K_p \vee \mathfrak{h}_{i,2}$ dans l'algèbre des dérivations de $K_p$. Un conoyau de cette représentation ( = un $K_p$-espace vectoriel de dimension maximale où la représentation est injective = un supplémentaire dans $K_p \vee \mathfrak{h}_{i,2}$ du noyau de la forme bilinéaire) est donné par $K_p\{\ell^{i,p,1}\}$. De plus, on a

$$\Delta_{i,p,1} \in A^E_{p-1,n+1} \setminus \{0\}.$$

$\mathcal{P}_3$. Le commutant de $K_{p-1}$ dans $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur $K_{p-1}$ égale à $\tilde{\mathfrak{h}}_p$. Elle est caractéristique et admet

$(Z_0, q_{p,n+1}, q_{p,n}, \dots, q_{p,p+1} ; q_{p,p}, q_{p-1,p-1}, \dots, q_{2,2})$

comme base orthogonale, avec tous les commutateurs appartenant à $A^E_{p-1,n+1}$. Son centre engendre $K_p$ sur $K_{p-1}$.

Le crochet définit une application $K_{p-1}$- linéaire par rapport au premier facteur et $\mathbb{k}$-linéaire par rapport au deuxième de $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{i,2} \times \mathbb{k}\{q^{p,n+1,o}\}$ dans $K_{p-1}$ et une représentation de $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{i,2}$ dans l'algèbre des dérivations de $\tilde{\mathfrak{h}}_p$.

(8) i.e. transforme les éléments homogènes en éléments homogènes de même degré.

$(\mathcal{C}_3)$. Un conoyau de cette représentation est donné par $K_{p-1} \vee \{\ell^{i,p,o}\}$ et $\Delta_{i,p,o} \neq 0$.

En fait $\Delta_{i,p,o} \in A^E_{p-1,n+1}$.

$\mathcal{P}_4$. L'ensemble $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ est une algèbre de Lie bilatère [3] sur $K_{p-1}$, caractéristique et incluse dans $\mathcal{K}(\mathfrak{h}_{p,2})$ et elle admet pour base

$$(Z_o, q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,p+1}, q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{p,p}, \ell^{p,p-1,1})$$

Le commutant de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ dans $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ est une algèbre 2-nilpotente caractéristique sur $K_{p-1}$ et admet pour base orthogonale

$$(Z_o, q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,p+1} \; ; q_{p,p})$$

$\mathcal{P}_5$. Soit $Q_{p,i,k} \in q_{p,i}$ $(p \leqslant i)$. Alors

1. $Q_{p,i,k}$ est homogène de degré égal à sa filtration dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et est vecteur propre de $\tau$ de même parité que son degré.

2. $Q_{p,i,k}$ est un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo

$$A'_{p-1,i+1} = A_{p-2,i+1}[q_{p-1,n+1}] \vee \{Z_o, q_{p-1,n}, q_{p-1,n-1}, \ldots, q_{p-1,i+1}\}$$

3. $Q_{p,i,k}$ commute à $\ell_{r,j}$ si $r<i$ ou si $r=i$ et $1<j<p$.

4. $Q_{p,i,k}$ transporte $\ell^2_i$ dans $A^E_{p-1}$. (10)

5. On a

(4) $$Q_{p,i,k} = D_{p,i,k} \vee L_{p,i,k} + R_2 + R_1 + R_o$$

où

$D_{p,i,k} \in A^E_{p-1,n+1}$ s'exprime comme un produit de déterminants du type $\Delta_{r,j,\varepsilon}$.

$$R_o \in A''_{p-1,i} = (A_{p-2}[q_{p-1,n+1}] \vee \{Z_o, q_{p-1,n}, q_{p-1,n-1}, \ldots, q_{p-1,p+1}\}) \vee \{Z_o, q_{p-1,i}, q_{p-1,i-1}, \ldots, q_{p-1,p+1}\}$$

(10) Donc pour tout $j=p,p+1,..,n$, $[q_{p,i} \; ; \ell_{i,j}] \subset A^E_{p-1}$ et pour $j=2,3,..,p-1$ tous les coefficients de cette matrice s'annulent d'après $\mathcal{P}_5$.3. La matrice $[\ell^{p,p,1} \; ; q^{p,p,1}]$ est donc triangulaire par blocs et les blocs diagonaux sont à coefficients semi-invariants.

$$R_1 \in A_{p-2}[q_{p-1,n+1}] \vee \{q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{p-1,p-1}, \ell^{p-1,p-1,1}\}$$

$$R_2 \in A^E_{p-1} \vee \{Q_{p,p,1}, Q_{p,p,2}, \ldots, Q_{p,p,k-1}, \ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,p-1}\}^{(11)}$$

si $i=p$ et

$$R_2 \in A^E_{p-1} \vee \{q_{p,i-1}, q_{p,i-2}, \ldots, q_{p,p}, \ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,p-1}\} \quad \text{si } i>p.$$

L'élément

$$D_{p,i,k} \vee L_{p,i,k} + R_2$$

est $\mathcal{G}$-homogène de même poids et de même degré que $Q_{p,i,k}$, et son poids s'annule sur $\mathcal{G}_n$ ; $R_o$ et $R_1$ sont aussi homogènes de même degré.

$\mathcal{P}_6$. Les bases partielles $\ell_{p,i}$ étant ordonnées ainsi que $\ell^2_p = (\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,n+1})$, les bases $q_{p,i}$ s'en déduisent donc par une transformation triangulaire donnée par (4).

En particulier, on a

$$(A_{p-1})_E \vee \mathfrak{h}_{p,2} = (A_{p-1})_E \vee \{Z_o, q_{p,n+1}, \ldots, q_{p,p+1},$$
$$q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{p,p}, \ell^{p,p,1}\}$$

où le changement de base est homogène et conserve le degré.

$\mathcal{P}_7$. Le commutant de $\mathfrak{h}_{i,2}$ dans $A_p$ (resp. $K_p$) est $A_{p,i+1}$ (resp. $K_{p,i+1}$) et

$$K^E_p = K^E_{p,n+1}$$
$$A^E_p = A^E_{p,n+1}$$

$\mathcal{P}_8$. Les anneaux $(A_p)_E$ et $(A_{p,i})_E$ et les algèbres de Lie bilatères

$$(A_{p-1})_E \vee \mathfrak{h}_{p,2}$$

$$(A_{p-1})_E \vee \{Z_o, q_{p,n+1}, {}_{p,n}, \ldots, q_{p,p+1}\}$$

---

(11) L'élément $Q_{p,p,k-1}$ ne figure pas si $k-1$ est impair (ceci est dû à la diagonalisation symplectique I.12)

$$(A_{p-1,i})_E \vee \{Z_o, q_{p,n+1}, q_{p,n}, \ldots, q_{p,i}\}$$

sont caractéristiques [12]

Preuve de II.2.

Cas $p=1$.

On a $\ell_{1,1} = \emptyset$ et on pose $q_{1,n+1} = \ell_1^2$, $q_{1,i} = \emptyset$ si $i \leqslant n$.

On obtient

$$A_1 = A_{1,n+1} = \mathbb{k}[q_{1,n+1}]$$
$$K_1 = K_{1,n+1} = \mathbb{k}(q_{1,n+1})$$

Cas $p=2$. On expose succintement la construction dans ce cas.

L'algèbre $\mathfrak{h}_{2,1}$ agit dans $\mathfrak{h}_{1,1}$ par les poids d'une base semi-simple de $\mathfrak{h}_{1,1}$, (par exemple $\ell_1^2$) et $\mathfrak{h}_{2,2}$ étant dans le noyau de tous ces poids commute à $\mathfrak{h}_{1,1}$.

L'algèbre $\tilde{\mathfrak{h}}_2 = K_1\ \mathfrak{h}_{2,2} = K_1 \vee \mathfrak{h}_{2,2}$ est donc 2-nilpotente sur $K_1$ et admet $(Z_o, \ell_2^2)$ comme $K_1$-base. Le crochet est une forme $K_1$-bilinéaire alternée et on choisit $\ell_{2,2} \subset \ell_2^1$ tel que $K_1 \vee \{\ell_{2,2}\}$ soit un supplémentaire du noyau de cette forme. Sur $K_1 \vee \{\ell_{2,2}\}$, la forme est donc non dégénérée et on peut supposer l'ordre sur $\ell_{2,2}$ choisi pour que la diagonalisation symplectique de I.11 s'applique. On note $2n_2$ le cardinal de $\ell_{2,2}$.

D'une manière générale, le crochet définit une forme $K_1$-bilinéaire sur $K_1\ \mathfrak{h}_{i,2} \times K_1\ \mathfrak{h}_{2,2}$. Les commutants dans $K_1\mathfrak{h}_{2,2}$ des algèbres $\mathfrak{h}_{i,2}$ sont des $K_1$-algèbres de Lie qui sont caractéristiques et qui s'identifient aux noyaux dans $K_1\mathfrak{h}_{2,2}$ de cette forme bilinéaire. On choisit une partition de $\ell_2^2$ sous la forme

$$\ell_2^2 = (\ell_{2,2}, \ell_{2,3}, \ldots, \ell_{2,n}, \ell_{2,n+1})$$

et des parties $\ell_{i,2} \subset \ell_i^2$ $(i=1,\ldots,n)$ telles que le crochet soit une forme

---

(12) On a aussi des analogues de $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.

$K_1$-bilinéaire non dégénérée sur

$$K_1\{\ell_{2,2},\ell_{3,2},\dots,\ell_{i,2}\} \times K_1\{\ell_{2,2},\ell_{2,3},\dots,\ell_{2,i}\}$$

et tels que les sous-espaces facteurs soient de dimension maximale dans $K_1\,\mathfrak{h}_{i,2}$ et $K_1\,\mathfrak{h}_{2,2}$ respectivement.
La matrice

$$[\ell_{2,2},\ell_{3,2},\dots,\ell_{i,2}\,;\,\ell_{2,2},\ell_{2,3},\dots,\ell_{2,i}]$$

est donc régulière à coefficients dans $A_1$.

Pour tout $L\in \ell_2^2$, il existe une unique combinaison $K_1$-linéaire (symétrisé) $R(L)\in K_1\{\ell_{2,2},\ell_{2,3},\dots,\ell_{2,i}\}$ telle que $L-R(L)$ commute à $\mathfrak{h}_{i,2}$. Au facteur $\Delta_{i,2,o}$ près, on retrouve le déterminant introduit en I.10 :

$$\Delta_{i,2,o} \vee (L-R(L)) = \mathfrak{D}\,[L\,;\,\ell^{i,2,o}\,;\,\ell^{2,i,o}].$$

On peut alors poser

$$q_{2,i+1} = \mathfrak{D}\,[\ell_{2,i+1}\,;\,\ell^{i,2,o}\,;\,\ell^{2,i,o}]$$

et on voit que $q_{2,i+1}$ commute à $\ell^{i,2,o}$, donc à $\mathfrak{h}_{i,2}$.
Au lieu de vérifier les propriétés annoncées, nous allons aborder le cas général par une récurrence, qui peut débuter à $p=1$.

<u>Le cas général : récurrence sur $p\geq 2$.</u>

On suppose déjà déterminés les $q_{r,j}$ pour $r<p$, $r\leq j\leq n+1$ et fixés les choix des $\ell_{r,j}$, $\ell_{j,r}$ vérifiant II.2.

On choisit ici les $\ell_{p,j}\subset\ell_p^2$, $\ell_{j,p}\subset\ell_j^2$ et on détermine les $q_{p,j}$ pour $j=p,p+1,\dots,n,n+1$.

L'ensemble $K_{p-1}\vee\mathfrak{h}_{p,2}=K_{p-1}\,\mathfrak{h}_{p,2}$ (*) est une algèbre de Lie bilatère sur $K_{p-1}$ qui est caractéristique et qui contient

$$K_{p-1}\,\mathfrak{h}_{p-1,2}=K_{p-1}\{Z_o,q_{2,2},q_{3,3},\dots,q_{p-1,p-1},\ell^{p-1,p-1,1}\}.$$

(*) Dans la suite, on omet le signe $\vee$ lorsqu'il ne joue pas comme ici.

On a

$$K_{p-1}\mathfrak{h}_{p,2} = K_{p-1}\mathfrak{h}_{p-1,2} \oplus K_{p-1} \vee \{\ell_p^2\}.$$

L'algèbre $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ admet $\{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p} ; q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1}\}$ comme base orthogonale sur $K_{p-2}$ et l'algèbre $K_{p-1}\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ admet $\{Z_o ; q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1}\}$ comme base orthogonale sur $K_{p-1}$.

a). <u>Le commutant de</u> $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ <u>dans</u> $K_{p-1}\mathfrak{h}_{p,2}$.

Comme $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ contient $K_{p-2}$ et $q_{p-1,p}, q_{p-1,p+1}, \dots, q_{p-1,n+1}$, le commutant de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ commute à $K_{p-1}$ et est une algèbre de Lie sur $K_{p-1}$.

Le crochet donne une forme $\mathbb{k}$-bilinéaire notée $\mathcal{B}_{p,p-1}$ sur

$$K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2} \times \mathbb{k}\{q^{p-1,n+1,o}\}$$

à valeurs dans $K_{p-1}$ et $\mathcal{B}_{p,p-1}$ est de plus $K_{p-1}$-linéaire sur la première variable puisque $K_{p-1}$ commute à $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$.

Le commutant de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ est donc un espace vectoriel sur $K_{p-1}$ et c'est le noyau dans $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ de la forme $\mathcal{B}_{p,p-1}$.

Par hypothèse, $K_{p-1} \vee \{\ell^{p,p-1,o}\}$ est un conoyau dans $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ de $\mathcal{B}_{p,p-1}$ et $\Delta_{p,p-1,o} \neq 0$. En conséquence, pour tout $L \in \ell_p^2$, l'élément

$$Y = \mathfrak{D}[L ; \ell^{p,p-1,o} ; q^{p-1,p,o}]$$

commute à $q^{p-1,p,o}$. En effet, notons

$$\ell^{p,p-1,o} = (L_i)_{i=1,\dots,m}$$

$$q^{p-1,p,o} = (Q_i)_{i=1,\dots,m}$$

On a alors

$$Y = \begin{vmatrix} L & [L,Q_1] & [L,Q_2] & \dots & [L,Q_m] \\ L_1 & [L_1,Q_1] & [L_1,Q_2] & \dots & [L_1,Q_m] \\ L_2 & [L_2,Q_1] & [L_2,Q_2] & \dots & [L_2,Q_m] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_m & [L_m,Q_1] & [L_m,Q_2] & \dots & [L_m,Q_m] \end{vmatrix}$$

Les commutateurs sont dans $A_{p-2}$ car tous les poids s'annulent et

$$Y \in \Delta_{p,p-1,o} \vee L + A_{p-2} \vee \{\ell^{p,p-1,o}\}.$$

Par construction du déterminant, $Y$ commute à $q^{p-1,p,o}$ et il appartient au noyau dans $K_{p-1} \vee \tilde{h}_{p,2}$ de $\mathcal{B}_{p,p-1}$, i.e. il commute à $\tilde{h}_{p-1}$.

b. Semi-invariance et $\mathcal{G}$-homogénéité.

Supposons par exemple

$$(L_1, L_2, \ldots, L_q) = (\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,p-1})$$

et notons

$$Y = \Delta \vee L + \sum_{i=1}^{q} \Delta_i \vee L_i + R$$

le développement de $Y$, où $\Delta_i$ et $\Delta$ sont les mineurs et $R$ la somme des termes restants.

Par un calcul, on montre que $\Delta$ est un semi-invariant et que la combinaison $\Delta \vee L + \sum_{i=1}^{q} \Delta_i \vee L_i$ est $\mathcal{G}$-homogène. Cette démonstration est typique et se répète de même pour les cas généraux, aussi on l'omettra dans la suite. Elle se décompose en quatre parties.

b.1. Soit $T \in \mathcal{G}$. La matrice dont le déterminant est $\Delta$ est à coefficients dans $K_{p-1}$ (donc commutant ensemble). L'action de $T$ sur $K_{p-1}$ est une dérivation et se traduit sur $\Delta$ de manière classique par une dérivation "colonne par colonne ". Or, on a de plus

$$[T,[L_i,Q_j]] = [[T,L_i],Q_j] + [L_i,[T,Q_j]]$$

et en notant l'action de $T$ exponentiellement, on obtient facilement

$$[T,\Delta] = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{D}[L_1,\ldots,L_i^T,\ldots,L_m ; Q_1,\ldots,Q_m] + $$
$$+ \mathcal{D}[L_1,\ldots,L_m ; Q_1,\ldots,Q_i^T,\ldots,Q_m].$$

Autrement dit, tout se passe comme si on a dérivé dans chaque ligne la variable $L_i$ et dans chaque colonne la variable $Q_i$.

b.2. Par ailleurs, on a pour tout $T \in \mathcal{G}$ :

$$[T,L_i] = \langle \lambda(L_i), T \rangle L_i + \mu(L_i,T)$$

et

$$\mathfrak{D}[L_1,\dots,L_i^T,\dots,L_q\,;Q_1,\dots,Q_m] = <\lambda(L_i),T>\Delta +$$
$$[L_1,\dots,\mu(L_i,T),\dots,L_m\,;Q_1,\dots,Q_m].$$

Si $L_i \in \mathfrak{h}_{k,2} \setminus \mathfrak{h}_{k-1,2}$, $\mu(L_i,T) \in \mathfrak{h}_{k-1,2}$ et l'action de $\mu(L_i,T)$ est dépendante de l'action de $\ell^{k-1,p-1,o}$ qui "représente" toute l'action de $\mathfrak{h}_{k-1,2}$ dans $K_{p-1}$. Par conséquent, la ligne des commutateurs où figure $\mu(L_i,T)$ est dépendante des autres lignes du déterminant, ce qui annule $\mathfrak{D}[L_1,\dots,\mu(L_i,T),\dots,L_n,Q_1,\dots,Q_m]$.

De même, on a

$$[T,Q_i] = <\lambda(Q_i),T>Q_i + \mu(Q_i,T)$$

et si $Q_i \in q_{k,\ell}$, $\mu(Q_i,T) \in A_{k-1}$. Il vient dans ce cas

$$[L_j,\mu(Q_i,T)] = \sum_s [L_j,Q_s]\,\frac{\partial}{\partial Q_s}\,\mu(Q_i,T)$$

et la sommation porte seulement sur les indices $s$ où $Q_s \in A_{k-1}$. La colonne des commutateurs où figure $\mu(Q_i,T)$ est donc $K_{k-1}$-linéairement dépendante des autres colonnes restantes et la correction dûe à $\mu(Q_i,T)$ ne contribuera pas non plus.

b.3. Tous calculs faits, on voit que $\Delta$ est un semi-invariant de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et son poids est égal à

$$\lambda(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(L_i) + \lambda(Q_i)$$

qui n'est autre que la somme des poids des éléments figurant dans $\mathfrak{D}[\ell^{p,p-1,o}\,;q^{p-1,p,o}]$.

b.4. <u>$\mathfrak{g}$-homogénéité.</u>

Comme $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ est caractéristique, $[T,Y]$ commute encore à $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$.

On a

$$[T,Y] \in (<\lambda(\Delta),T> + <\lambda(L),T>)\Delta \vee L +$$
$$\sum_{i=1}^{q} (<\lambda(L_i),T>\Delta_i + [T,\Delta_i]) \vee L_i + A_{p-2} \vee \mathfrak{h}_{p-1,2}.$$

Or, les dérivations définies par $L_1,L_2,\dots,L_q$ sont $K_{p-1}$-linéairement indépendantes de celles définies par $\mathfrak{h}_{p-1,2}$ . donc la combinaison linéaire est nécessairement proportionnelle à celle de Y , i.e.

$$( <\lambda(\Delta),T>+<\lambda(L),T>)\Delta = c\Delta$$

$$( <\lambda(\Delta_i),T>\Delta_i+[T,\Delta_i]) = c\Delta_i .$$

Cette relation montre que $\Delta_i$ est encore un semi-invariant et que son poids vérifie

$$\lambda(\Delta_i)+\lambda(L_i) = \lambda(\Delta)+\lambda(L),$$

autrement dit, on a la $\mathcal{G}$-homogénéité.

Par ailleurs, comme les éléments $Q_j$ sont homogènes dans $K_{p-1}$ , $[L_i,Q_j]$ est encore homogène de même degré. Tous les mineurs du développement de

$$Y = \mathcal{D}\,[L;\ell^{\,p,p-1,o};q^{p-1,p,o}]$$

sont donc homogènes de degré égal à la somme des degrés des éléments de la base $q^{p-1,p,o}$ .

c. <u>$\mathcal{G}$-vecteur propre modulo</u> $A^{(1)}_{p-1,p}$ <u>et homogénéité</u>.

On a

$$[T,Y] = <\lambda(\Delta)+\lambda(L),T>(\Delta \vee L + \sum_{i=1}^{q} \Delta_i \vee L_i) + R$$

avec $R \in A_{p-2} \vee \mathfrak{h}_{p-1,2}$.

Par $\mathcal{P}_6$, il existe un semi-invariant $\pi \in A_{p-3}$ (par exemple le produit des $D_{r,j,k}$) tel que

$$\pi \vee \mathfrak{h}_{p-1,2} \subset A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1},\ldots,q_{p-1,p},q_{2,2},\ldots,$$
$$q_{p-1,p-1},\ell^{p-1,p-1,1}\}$$

et en conséquence

$$\pi \vee \mathfrak{h}_{p-2,2} \subset A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1},\ldots,q_{p-1,p},\ell^{p-1,p-1,o}\}.$$

On a encore

$$[T,\pi \vee Y] = <\lambda(\Delta)+\lambda(L)+\lambda(\pi),T>(\pi\Delta \vee L + \sum_{i=1}^{q} \pi\Delta_i \vee L_i) + R_o + R_1$$

avec

$$R_o \in A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1},\ldots,q_{p-1,p}\} = A^{(1)}_{p-1,p}$$

$$R_1 \in A_{p-2} \vee \{\ell^{p-1,p-1,o}\}.$$

Ici encore, $\pi \vee Y$ commute à $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ et pour la même raison qu'en b.4 on obtient $R_1 = 0$ et

$$[T,\pi \vee Y] = <\lambda(\pi)+\lambda(\Delta)+\lambda(L),T> \pi \vee Y + R_o$$

i.e. que $\pi \vee Y$ est un $\mathcal{G}$-vecteur propre modulo $A^{(1)}_{p-1,p}$. Les formules de changement de base (4) et $\mathcal{P}_6$ montrent que $R_o$ est homogène de degré $d(\pi \vee Y)$.

d) <u>Commutation à $\ell^{p,p-1,o}$</u>.

La commutation à $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ est déjà acquise. On calcule un polynôme $\nu \in A_{p-1}$ tel que $\pi \vee Y - \nu$ commute à $\ell^{p,p-1,1}$, ce qui suffira puisque $\ell^{p,p-1,o} \subset \tilde{\mathfrak{h}}_{p-1} + K_{p-1} \vee \{\ell^{p,p-1,1}\}$.

Le déterminant $\delta$ de la matrice $[\ell^{p,p-1,1} ; q^{p-1,p,1}]$ est un semi-invariant non nul et ses coefficients sont dans $A_{p-2}$. La matrice inverse a ses coefficients dans $A_{p-2}\delta^{-1}$ d'où l'existence de $P_1,\ldots,P_q \in A_{p-2}\delta^{-1} \vee \{\ell^{p,p-1,1}\}$ tels que si l'on pose $(Q_1,\ldots,Q_q) = q^{p-1,p,1}$, on ait

$$[P_i, Q_j] = \delta_{i,j} \quad (i,j=1,\dots,q).$$

De plus, $(A_{p-2})\delta^{-1} \vee \{\ell^{p,p-1,1}\} + A_{p-2}\delta^{-1} \vee \mathfrak{h}_{p-1,2}$ est une algèbre de Lie bilatère sur $(A_{p-2})$ et admet $\{Z_o, q_{2,2}, \dots, q_{p-1,p-1}, \ell^{p,p-1,1}\}$ comme base. Comme $[P_i, P_j]$ commute à $q^{p-1,p,1}$, il n'a aucune composante sur $\ell^{p,p-1,1}$ (qui est formé d'éléments dont l'action sur $K_{p-1}$ sont indépendantes). Donc $[P_i, P_j]$ appartient à $A_{p-2}\delta^{-1} \vee \{Z_o, q_{2,2}, \dots, q_{p-1,p-1}\} \subset \tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ et commutera à $\pi \vee Y$.

Les $P_i$ se calculent à partir de l'inverse de $[\ell^{p,p-1,1} ; q^{p-1,p,1}]$ et il est aisé de voir que chaque $P_i$ est une combinaison $(A_{p-2})_E$-linéaire symétrique des éléments de $\ell^{p,p-1,1}$ avec des coefficients homogènes de degré opposé à celui de $Q_i$.

Grâce à la symétrisation, chaque $P_i$ est aussi un vecteur propre de $\tau$ de parité $(-1)^{-d(Q_i)+1}$, puisque ses coefficients sont vecteurs propres de $\tau$ de parité $(-1)^{-d(Q_i)}$.

Par ailleurs, les $P_i$ commutent à $q_{r,j}$ si $j > p$ et l'action adjointe de $P_i$ dans $K_{p-1}$ n'est autre que la dérivation $\frac{\partial}{\partial Q_i}$ ($i=1,\dots,q$, correspondant à $(Q_1,\dots,Q_q) = q^{p-1,p,1}$).

Soit $C_i = [P_i, \pi \vee Y]$ ; d'après c), $\pi \vee Y$ est un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo $A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p}\}$, donc, grâce à la nullité des poids sur $P_i$, $C_i \in A_{p-2}\delta^{-1} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p}\}$. La forme $\omega = \sum_{i=1}^{q} C_i dQ_i$ admet alors une primitive polynômiale donnée par une formule de "Taylor-Poincaré"

$$\nu = \sum_{i=1}^{q} C_i Q_i - \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{q} \frac{\partial C_i}{\partial Q_j} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{q} \frac{\partial^2 C_i}{\partial Q_j\, Q_k} Q_i Q_j Q_k \cdots$$

que l'on peut vérifier en partant de la primitive donnée par la formule intégrale de Poincaré et en calculant sur les parties homogènes de $\sum_{i=1}^{q} C_i Q_i$.

On vérifie facilement que $\nu$ est homogène de même degré que $\pi \vee Y$ : puisque chaque $P_i$ a ses coefficients de degré $-d(Q_i)$, $C_i$ est homogène de degré $d(\pi \vee Y) - d(Q_i)$ et $C_i Q_i$ est homogène de degré $d(\pi \vee Y)$.

On vérifie aussi que $\nu$ est vecteur propre de $\tau$ de parité $(-1)^{d(\pi \vee Y)}$ soit en décomposant $\Sigma\, C_i Q_i$ en ses parties de même degré en $Q_1,..,Q_q$, soit en utilisant la relation $\mathrm{ad} P_i = \frac{\partial}{\partial Q_i}$, qui permet de voir que $\frac{\partial}{\partial Q_i}$ fait intervenir un changement de parité vis à vis de $\tau$ qui est égal à $(-1)^{d(Q_i)}$.

Comme l'intégrale de Poincaré multiplie chaque terme de degré $d$ par le coefficient $1/d$, $\nu$ comporte les mêmes degrés que $\Sigma\, C_i Q_i$ et $C_i \in A_{p-2}\delta^{-1} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p}\}$ ; on a alors $\delta\nu \in A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,p}\} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p}\} = A^{(2)}_{p-1,p}$. L'élément $\delta\pi \vee Y - \delta\nu = Q$ commute aux $P_i$, donc à $\ell^{p,p-1,o}$. Il est homogène de degré $d(\delta\pi \vee Y)$ et est un vecteur propre de $\tau$ de même parité que $d(\delta\pi \vee Y)$. On a aussi $A^{(2)}_{p-1,p} \subset A''_{p-1,p}$.

On sait que $\delta\pi \vee Y$ est un $\mathcal{G}$-vecteur propre modulo $A_{p-2} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p}\}$ et que $A^{(2)}_{p-1,p}$ est $\mathcal{G}$-stable.
Pour tout $T \in \mathcal{G}$, on a donc

$$[T,Q] = [T, \delta\pi \vee Y - \delta\nu] = <\lambda(\delta\pi \vee Y), T> Q + \mu(Q,T)$$

où

$$\mu(Q,T) \in A^{(2)}_{p-1,p}.$$

Comme $P_i \in A_{p-2}\ \delta^{-1} \vee \{\ell^{p,p-1,1}\} + (A_{p-2})_E \vee \mathfrak{h}_{p-1,2} = \mathfrak{b}$ qui est stable sous l'action de $\mathcal{G}$ puisque $[\ell^{p,p-1,1}, \ell^{p,p-1}] \subset \mathfrak{h}_{p-1,2}$. On aura $[[T,P_i],Q] = 0$ (car $[\mathfrak{b},Q] = 0$) et par suite $0 = [T,[P_i,Q]] = [P_i,[T,Q]] = [P_i, \mu(Q,T)]$ et $\mu(Q,T)$ commute aux $P_i$.

Comme chaque $P_i$ agit comme $\frac{\partial}{\partial Q_i}$, il en résulte que $\mu(Q,T) \in A^{(2)}_{p-1,p}$ ne peut pas être fonction de $(Q_1, \dots, Q_q) = q^{p-1,p,1}$. On obtient donc

$$\mu(Q,T) \in A_{p-1,p+1} \vee \{Z_o, q_{p-1,n+1}, \dots, q_{p-1,p+1}\} \subset A'_{p-1,p+1}$$

et $Q$ est un $\mathfrak{G}$-vecteur propre modulo $A'_{p-1,p+1}$.

e) Choix de $\ell_{p,p}$ et construction de $q_{p,p}$.

Pour chaque $L \in \ell_p^p$, on note $\theta(L) = Q = \delta\pi \vee Y - \delta\nu$ l'élément précédemment construit et on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} \theta(L) \in \delta\pi\Delta \vee L + A^E_{p-2} \vee \{\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \dots, \ell_{p,p-1}\} + \\ + A_{p-2} \vee \{\ell^{p-1,p-1,o}\} + A^{(2)}_{p-1,p} \end{aligned}$$

ce qui correspond à une substitution triangulaire.

Compte-tenu de $\mathcal{P}_3$, $(\theta(\ell_p^p), Z_o)$ est une base sur $K_{p-1}$ du commutant $\tilde{\mathfrak{h}}$ de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ dans $K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{p,2}$. Or $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur $K_{p-1}$, et on peut choisir une base $\ell_{p,p} \subset \ell_p^p$ telle que $K_{p-1} \vee \{\theta(\ell_{p,p})\}$ soit un supplémentaire du noyau de la forme bilinéaire définie par le crochet.

On peut, en changeant éventuellement l'ordre de $\ell_{p,p}$, appliquer la diagonalisation symplectique, d'où la base $q_{p,p} = \theta\ (\ell_{p,p})$.

La diagonalisation symplectique n'utilise ici que des semi-invariants de $A_{p-1}$. En effet, compte tenu de (5) on a pour $L, L' \in \ell_p^p$

$$[\theta(L'), \theta(L)] = \delta\pi\Delta \vee [L', \theta(L)] \in A^{(1)}_{p-1,p+1}$$

et si $T \in \mathfrak{G}$, il vient

$$\begin{aligned} [T,[\theta(L'),\theta(L)]] &= \langle \lambda(\theta(L')) + \lambda(\theta(L)), T \rangle [\theta(L'),\theta(L)] \\ &+ [\mu(\theta(L'),T),\theta(L)] + [\theta(L'),\mu(\theta(L),T)] \\ &= \langle \lambda(\theta(L')) + \lambda(\theta(L)), T \rangle [\theta(L'),\theta(L)]. \end{aligned}$$

Les déterminants mineurs que l'on utilise comme coefficients sont donc dans $A^E_{p-1,n+1}$ et les éléments de base de $\theta_p(\ell_{p,p})$ commuteront encore à $\ell^{p,p-1,o}$. Ils seront encore des vecteurs propres de $\tau$, dont la parité est la même que celle de leur degré (car ils seront encore homogènes). Ils sont aussi $\mathfrak{G}$-homogènes, et aussi des $\mathfrak{G}$-vecteurs propres, mais seulement modulo $A^E_{p-1,n+1} \vee A^{(1)}_{p-1,p+1} \subset A'_{p-1,p+1}$.

f) Hypothèses de récurrence.

Nous allons construire les bases $q_{p,j}$ pour $j=p+1,\dots,n+1$ par récurrence sur l'indice j. Soit $\theta_p = \theta$.

Supposons déterminés pour tout $i \in \{p,p+1,\dots,j-1\}$ les objets $\ell_{p,i}$, $\ell_{i,p}$, $q_{p,i}$ et $\theta_i$. On pose

$$\ell_p^{i+1} = \ell_p^2 \setminus (\ell_{p,2},\ell_{p,3},\dots,\ell_{p,i})$$

$$\ell_{i+1}^p = \ell_{i+1}^2 \setminus (\ell_{i+1,2},\ell_{i+1,3},\dots,\ell_{i+1,p-1}).$$

Les hypothèses suivantes sont faites :

($f_1$) $\theta_i(L_{p,i,k}) = Q_{p,i,k}$ vérifie $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ .

($f_2$) $\theta_i(L) = Q$ vérifie aussi $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_6$ pour tout $L \in \ell_p^{i+1}$ .

($f_3$) La forme bilinéaire $\mathcal{B}_{i,p}$ définie par le crochet sur

$$K_{p-2} \vee \mathfrak{h}_{i,2} \times \mathbb{k}\{q^{p-1,n+1,1}, q_{p,p+1},\dots,q_{p,i},\theta_i(\ell_p^{i+1})\}$$

admet les sous-espaces $K_{p-1} \vee \{\ell^{i,p,1}\}$ et $\mathbb{k}\{q^{p,i,1}\}$ comme conoyaux (i.e. des sous-espaces maximaux en dualité séparante par $\mathcal{B}_{i,p}$).

En particulier, on a $\Delta_{i,p,1} = [\ell^{i,p,1} ; q^{p,i,1}] \neq 0$ et c'est un semi-invariant de $A_{p-1}$.

g) Commutation à $\mathfrak{h}_{j-1,2}$ (Voir $\mathcal{P}_5$.3)

On sait que $\theta_{j-1}(L)$ commute à $\mathfrak{h}_{j-2,2}$ et à $\ell_{j-1,2},\dots,\ell_{j-1,p-1}$. Par ailleurs, compte-tenu de $f_3$, il suffit de le rendre commutant aussi à $\ell_{j-1,p}$ (on vérifie facilement que toute dérivation de $\mathfrak{h}_{j-1,2}$ est $K_{p-1}$ dépendante de celles définies par $\ell^{j-1,p,1}$ si ($f_3$) est satisfait).

D'après $f_2$ et $\mathcal{P}_5$.5, la matrice $[\theta_{j-1}(L), q_{p,j-1} ; \ell_{j-1,p}]$ a ses coefficients dans $A_{p-1}^E$, donc commutants à $\ell_{j-1,p}$. L'élément

$$\theta'_{j-1}(L) = \mathfrak{D}[\theta_{j-1}(L) ; q_{p,j-1} ; \ell_{j-1,p}] \in A_{p-1}^E \vee \{\theta_{j-1}(L), q_{p,j-1}\}$$

est un déterminant dont seulement la première colonne est non semi-invariante. Sous l'action de tout $L' \in \mathcal{l}_{j-1,p}$, elle reproduit une autre colonne du déterminant, ce qui annulera le déterminant. Ainsi $\theta'_{j-1}(L)$ commute à $\mathcal{l}_{j-1,p}$. Compte tenu de son appartenance, il commutera encore à $\mathfrak{h}_{j-2,2}, \mathcal{l}_{j-1,2}, \dots, \mathcal{l}_{j-1,p-1}$ et par suite, il commutera à $\mathfrak{h}_{j-1,2}$.
Une démonstration similaire à b) donnera encore la $\mathcal{G}$-homogénéité et $\theta'_{j-1}(L)$ est un $\mathcal{G}$-vecteur propre modulo $A'_{p-1,j}$.

h) <u>Commutation à</u> $\ell_{j,2}, \ell_{j,3}, \dots, \ell_{j,p-1}$ <u>et définition de</u> $\theta_j$.

Comme $[\ell_{j,p-1}, \ell_{j,p-2}, \dots, \ell_{j,2} \,;\, q_{p-1,j}, q_{p-2,j}, \dots, q_{2,j}]$ est une matrice carrée à éléments dans $A^E_{p-2}$ dont le déterminant $\delta_j \in A^E_{p-2}$ est non nul, on peut calculer son inverse et les éléments $P_1, \dots, P_m \in A^E_{p-2}\delta_j^{-1} \vee \{\ell_{j,p-1}, \dots, \ell_{j,2}\}$ tels que si l'on écrit $(Q_1, \dots, Q_m) = (q_{p-1,j}, \dots, q_{2,j})$, ils vérifient $[P_k, Q_\ell] = \delta_{k,\ell}$.

Par ailleurs, $[P_k, P_\ell] \in A^E_{p-2}\delta_j^{-1} \vee \{\ell_{j,p-1}, \dots, \ell_{j,2}\} + A^E_{p-2}\delta_j^{-1} \vee \mathfrak{h}_{j-1,2}$.
Comme $[P_k, P_\ell]$ commute à $Q_1, \dots, Q_m$, nécessairement $[P_k, P_\ell] \in A^E_{p-2}\delta_j^{-1} \vee \mathfrak{h}_{j-1,2}$ et $[P_k, P_\ell]$ commutera à $\theta'_{j-1}(L)$.

On sait que $\theta'_{j-1}(L)$ est un $\mathcal{G}$-vecteur propre modulo

$$A'_{p-1,j} = A_{p-2,j}[q_{p-1,n+1}] \vee \{Z_o, q_{p-1,n}, \dots, q_{p,j}\}$$

donc

$$C_k(L) = [P_k, \theta'_{j-1}(L)] \in A'_{p-1,j}\delta_j^{-1}.$$

L'action des $P_\ell$ sur $C_k(L)$ n'est donc que la dérivation $\frac{\partial}{\partial Q_\ell}$ ; l'égalité $[[P_k, P_\ell], \theta'_{j-1}(L)] = 0$ assume que la forme $\sum_{\ell=1}^{m} C_\ell(L)dQ_\ell$ est fermée. Sa primitive

$$\nu_j(L) = \sum_{\ell=1}^{m} C_k(L)Q_k - \frac{1}{2!} \sum_{k,\ell} \left(\frac{\partial}{\partial Q_\ell} C_k(L)\right)Q_\ell Q_k \cdots$$

s'écrit encore par un polynôme de Taylor-Poincaré.

On pose alors

$$\theta_j(L) = \delta_j(\theta'_j(L) - \nu_j(L))$$

et $\theta_j(L)$ commutera à $\ell_{j,2}, \ell_{j,3}, \dots, \ell_{j,p-1}$.

(i) <u>$\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo</u> $A'_{p-1,j+1}$.

Par ailleurs

$$\delta_j \nu_j(L) \in A_{p-2,j}[q_{p-1,n+1}] \vee \{Z_o, q_{p-1,j}\} \vee \{Z_o, q_{p-1,n}, \dots, q_{p-1,j}\}.$$

Si $T \in \mathfrak{g}$,

$$[T, \theta_j(L)] = \langle \lambda(\theta_j(L)), T \rangle \theta_j(L) + \mu(\theta_j(L), T)$$

où

(6) $\mu(\theta_j(L), T) \in A'_{p-1,j} + A''_{p-1,j} = A''_{p-1,j}$.

Comme $P_k \in A_{p-1} \delta_j^{-1} \vee \{\ell_{j,p-1}, \dots, \ell_{j,2}\} + A_{p-1} \delta_j^{-1} \vee \mathfrak{h}_{j-1,2}$ qui est stable sous l'action de $\mathfrak{g}$, $[T, P_k]$ commutera encore à $\theta_j(L)$. En conséquence on a

$$0 = [T, [\theta_j(L), P_k]] = [[T, \theta_j(L)], P_k] = [\mu(\theta_j(L), T), P_k]$$

ce qui implique, compte tenu de (6), que

$$\mu(\theta_j(L), T) \in A'_{p-1,j+1}.$$

(j) <u>Choix de</u> $\ell_{p,j}$, $\ell_{j,p}$ <u>et vérification des hypothèses de récurrence</u>.

Le crochet définit la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{j,p}$ sur

$$K_{p-1} \vee \mathfrak{h}_{j,2} \times \mathbb{k}\{q^{p-1,n+1,1}, q_{p,p+1}, \dots, q_{p,j-1}, \theta_j(\ell_p^j)\}.$$

On choisit alors $\ell_{j,p} \subset \ell_j^p$ et $\ell_{p,j} \subset \ell_p^j$ pour compléter les conoyaux donnés dans $f_3$ avec $i=j-1$, ce qui est possible puisque $\theta_j(\ell_p^j)$ commute à $\mathfrak{h}_{j-1,2}$ et à $\ell_{j,2}, \dots, \ell_{j,p-1}$. On pose $q_{p,j} = \theta_j(\ell_{p,j})$.

Les hypothèses $(f_1)$, $(f_2)$, $(f_3)$ sont alors vérifiées pour $i = j$, sauf $\mathcal{P}_5.4$ que nous verrons plus tard.

(k) <u>Procédons à la vérification des énoncés de II.2.</u>

$\mathcal{P}_1$. Par leur construction, les ensembles $A_{p,i}$ et $A_p$ sont des sous-anneaux commutatifs de $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_{p,2})$ et ils sont $\mathfrak{g}$-stables compte-tenu de (i).

L'indépendance algébrique résulte facilement du théorème de Poincaré Birkhoff-Witt et elle se conservera dans les substitutions triangulaires.

Chaque générateur $Q_{p,i,k}$ a un degré défini en I.12, la conservation de ce degré sous l'action de $\mathcal{G}$ est constatée en c) et en d).

$\mathcal{P}_2$ : Les sous-corps $K_p$ sont caractéristiques car ils ont une caractérisation intrinsèque : ils s'identifient aux corps engendrés sur $K_{p-1}$ par le centre de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ (voir $\mathcal{P}_3$). La première assertion résulte donc de $\mathcal{P}_3$.

La deuxième assertion a été vérifiée lors de la construction même. L'appartenance de $\Delta_{i,p-1,1}$ à $A^E_{p-1}$ résulte de la même démonstration que celle donnée en b). On démontrera plus loin en $\mathcal{P}_7$ que $A^E_{p-1} = A^E_{p-1,n+1}$.

$\mathcal{P}_3$ : Cette assertion se vérifie lors de la construction même. Elle ne présente aucune difficulté.

$\mathcal{P}_4$ : On a reproduit encore ici des propriétés obtenues lors de la construction.

$\mathcal{P}_5$ : 1, 2, 3 et 5 reproduisent les propriétés de récurrence qui ont été vérifiées.

$\mathcal{P}_5.4$: Soient $L \in \ell^2_i$, $Q \in q_{p,i}$ et $T \in \mathcal{G}$. On a

$$[T,[L,Q]] = \langle \lambda(L) + \lambda(Q), T \rangle [L,Q] + [\mu(L,T),Q] + [L,\mu(Q,T)].$$

Par construction, $Q$ commute à $\mathfrak{h}_{i-1,2}$ (voir $(f_2)$), donc à $\mu(Q,T)$. Comme $\mu(Q,T) \in A'_{p-1,i+1}$ (voir $\mathcal{P}_5.2$) on a aussi $[L,\mu(Q,T)] = 0$, d'où la semi-invariance de $[L,Q]$.

$\mathcal{P}_6$ : L'énoncé décrit encore une propriété de la construction même. Il faut remarquer qu'il entraîne en particulier que dans une transformation inverse déduite par la formule (4), $L_{p,i,k}$ s'exprimera comme un élément homogène de degré 1, et ceci permet de vérifier les assertions de c).

$\mathcal{P}_7$. Les propriétés énoncées sont purement fonctionnelles.

On a $K_p = \mathbb{k}(q^{p,n+1,1})$ et tout élément de la base $q_{r,j}$ est un $\mathcal{G}$-vecteur propre modulo $A_{r-1}$. Comme $\mathcal{G}_n$ s'annule sur tous les poids des éléments de base, tout semi-invariant de $K_p$ est de poids nul. On se ramène en effet au problème suivant :

Soient $x_1,\ldots,x_m$ des indéterminées et

$$D = P_m \frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{m-1} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} = P_m \frac{\partial}{\partial x_m} + D_1$$

un opérateur différentiel où pour tout $i$, $P_i$ est un polynôme en $x_1,\ldots,x_{i-1}$. Alors $D$ annule toute fonction rationnelle qui est une fonction propre de $D$.

Par récurrence, on peut supposer cette propriété vraie pour $m-1$ variables (elle est triviale pour une variable). Soit $F$ une fonction propre rationnelle, que l'on peut supposer non indépendante de $x_m$. On peut développer $F$ en une série de Laurent en $x_m$ :

$$F(x_1,\ldots,x_m) = a_r x_m^r + a_{r-1} x_m^{r-1} + \ldots$$

où chaque $a_r$ est une fraction rationnelle de $x_1,\ldots,x_{m-1}$ et $a_r \neq 0$. On a alors, en notant $\lambda$ la valeur propre de $D$ :

$$\lambda F = DF = x_m^r D_1 a_r + x_n^{r-1}(rP_m a_r + D_1 a_{r-1}) + \ldots$$

et par unicité du développement de Laurent, on a en identifiant le coefficient de $x_m^r$

$$\lambda a_r = D_1 a_r$$

ce qui entraîne $\lambda = 0$ par hypothèse de récurrence.

Donc $F$ est un élément central de $\mathcal{K}(\mathcal{G}_n)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier qu'un élément de $A_p$ ou de $K_p$ qui commute à $\mathfrak{h}_{i,2}$ ne peut être fonction de $(q^{p,i,1})$. Comme $\ell^{i,p,1} \subset h_{i,2}$, on a vu qu'il existe $P_1,\ldots,P_m \in K_{q-1} \vee \{\ell^{i,p,1}\}$ tels que leur action dans $K_p$ s'identifie à $\frac{\partial}{\partial Q_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial Q_m}$ où $(Q_1,\ldots,Q_m) = q^{p,i,1}$.

Tout élément de $K_p$ qui commute à $\mathfrak{h}_{i,2}$ commute aussi à $P_1,\dots,P_m$ et ne dépend pas de $Q_1,\dots,Q_m$.

$\mathcal{P}_8$. Cette propriété se vérifie par récurrence sur l'indice p. Supposons $(A_{p-1})_E$ caractéristique ; $(A_p)_E$ étant engendré sur $(A_{p-1})_E$ par $(q_{p,n+1},\dots, q_{p,p+1})$, il suffit de montrer que sous un automorphisme de $\mathfrak{g}$, $(A_{p-1})_E \vee \{q_{p,n+1},\dots,q_{p,p+1}\}$ est invariant, ou encore que tout élément de cette base reste dans ce même espace. Les éléments de base sont des éléments de $(A_{p-1})_E \vee \mathfrak{h}_{p,2}$ qui commutent à $\mathfrak{h}_{p,2}$, et ces propriétés sont invariantes par automorphisme de $\mathfrak{g}$.
D'après $\mathcal{P}_6$, un tel élément appartient à

$$(A_{p-1})_E \vee \{Z_o,q_{p,n+1},\dots,q_{p,p+1},q_{2,2},\dots,q_{p,p},\ell^{p,p,1}\}.$$

Comme il doit commuter à $K_p \subset \mathcal{K}(\mathfrak{h}_{p,2})$, il ne peut avoir de composantes sur $(\ell^{p,p,1})$ ; comme il doit commuter à $q_{2,2},\dots,q_{p,p} \subset \mathcal{K}(\mathfrak{h}_{p,2})$, il appartient en fait à

$$(A_{p-1})_E \vee \{Z_o,q_{p,n+1},\dots,q_{p,p+1}\}$$

ce que nous voulions.

Les assertions restantes sont faciles.

II.3. <u>La base des</u> $q_{p,i}$ <u>pour</u> $2 \leqslant i < p$.

On note $(q_{1,n+1}, q_{2,n+1}, \dots, q_{n,n+1}) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_R)$

$$q^{n,n,1} = q^{n-1,n,1} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

$$\ell^{n,n,1} = \ell^{n,n-1,1} = (L_1, L_2, \dots, L_N)$$

$$[L_j, Q_k] = a_{j,k} \in A_{n-2}.$$

La matrice $(a_{j,k})_{j,k=1,\dots,N} = [\ell^{n,n,1} ; q^{n,n,1}]$ est triangulaire par blocs et son déterminant est un semi-invariant de $A_{n-2,n+1}$. Son inverse est encore triangulaire par blocs, à coefficients appartenant à $(A_{n-2})_E$ et on la note $(b_{j,k})_{j,k=1,\dots,N}$.

Pour tout $p=2,3,\dots,n$, on écrit explicitement la base

$$q_{p,p} = (Q_{p,p,1}, Q_{p,p,2}, \dots, Q_{p,p,2n_p})$$

et on pose $\ell_{p,+} = (L_{p,p,2}, L_{p,p,4}, \dots, L_{p,p,2n_p})$ , $\ell_{p,-} = \ell_{p,p} \setminus \ell_{p,+}$ .

$$c_{p,j} = [Q_{p,p,2j-1}, Q_{p,p,2j}] \in A^E_{p-1}$$

$$q_p = (Q_{p,p,2}, Q_{p,p,4}, \dots, Q_{p,p,2n_p})$$

$$p_p = (c^{-1}_{p,1} Q_{p,p,1}, c^{-1}_{p,2} Q_{p,p,3}, \dots, c^{-1}_{p,n_p} Q_{p,p,2n_p-1})$$

$$(q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = (Q_{N+1}, Q_{N+2}, \dots, Q_M, P_{N+1}, P_{N+2}, \dots, P_M).$$

1. Dans tout ce numéro, $L_j \in \ell_{p,i}$ et $J > j$ est l'entier tel que $(L_1, \dots, L_J) = (\ell^{p-1,p-1,1}, \ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \dots, \ell_{p,i})$ [15].

i. Il existe un unique élément $L''_j \in K_n \vee \{q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{n,n}\} = K_n \vee \{P_{N+1}, \dots, P_M, Q_{N+1}, \dots, Q_M\}$ tel que $L'_j = L_j - L''_j$ commute aux $P_k, Q_k$ pour $k=N+1,\dots,M$. En fait

(7) $\qquad L''_j \in (A_{p-1})_E \vee \{q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{p-1,p-1}\}.$

---

(15) On a abusivement pris ici l'ordre lexicographique pour $\ell^{n,n,1}$ et l'ordre opposé pour $q^{n,n,1}$, ce qui contredit la note (7). Toutefois, ceci ne cause pas de confusion et donne un exposé plus clair.

ii. L'élément $P'_j = \sum_{k=1}^{N} b_{j,k} \vee L'_k$ est un vecteur propre de l'antiautomorphisme principal $\tau$ avec la valeur propre $(-1)^{d_j+1}$ où $d_j$ est la valeur commune des degrés des $b_{j,k} \neq 0$ pour $k=1,\ldots,N$ et de $Q_j^{-1}$.

On a

$$P'_j \in (A_{p-1})_E \vee \{\ell^{p-1,p-1,o}, \ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,i}\}$$

et il existe $\nu_j \in (A_{p-1})_E$ homogène de degré $d_j+1$, vecteur propre de $\tau$ avec la valeur propre $(-1)^{d_j+1}$ tel que tous les

$$P_j = P'_j - \nu_j$$

commutent entre eux pour $j=1,2,\ldots,N$.

iii. On a une formule d'inversion :

$$L_j = \sum_{k=1}^{J} a_{j,k} \vee (P_k + \nu_k) + L''_j \tag{8}$$

où $a_{j,k} \in A_{\ell-1,m+1}$ si $Q_k \in q_{\ell,m}$ et s'annule pour $\ell < i$ ou $\ell = i$ et $m<p$.

2. Avec les nouveaux éléments de base $P_1,\ldots,P_N$ définis en 1, on a les relations de commutation canoniques

$$\begin{aligned} &[P_j,P_k] = Q_j,Q_k = 0 \\ &[P_j,Q_k] = \delta_{j,k} \end{aligned} \tag{9}$$

pour $j,k=1,2,\ldots,M$

et on peut écrire sur cette nouvelle base

$$\begin{aligned} &(A_n)_E \mathcal{G}_n = (A_{n,n+1})_E[Q_1,Q_2,\ldots,Q_N] \vee \{Q_{N+1},\ldots,Q_M,P_1,\ldots,P_M,Z_o\} \\ &(A_{n-1})_E \mathcal{G}_n = (A_{n-1,n+1})_E[Q_1,Q_2,\ldots,Q_N] \vee \{q_{n,n+1},Q_{N+1},\ldots,Q_M, \\ &P_1,\ldots,P_M,Z_o\}. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Rappelons que $K_{n,n+1} = \mathbb{k}(Z_1,Z_2,\ldots,Z_R)$ et $K_n = K_{n,n+1}(Q_1,\ldots,Q_N)$ sont des extensions pures de $k$ qui sont caractéristiques. L'algèbre de Lie bilatère $K_n \mathcal{G}_n$ admet pour base $(Z_o, q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{n,n}, \ell^{n,n,1})$ et nous avons "diagonalisé" cette base pour obtenir

$(Z_0,Q_{N+1},Q_{N+2},\dots,Q_M,P_1,\dots,P_M)$.

Soient $z_1,z_2,\dots,z_R$, $x_1,x_2,\dots,x_M$ des indéterminées.

Compte tenu des relations (8) et (9), on peut définir algébriquement une représentation $\pi$ de $K_n\mathcal{G}_n$ par des opérateurs différentiels en imposant les conditions :

$$\pi(Z_j) = \sqrt{-1}^{\,d(Z_j)}\, z_j \qquad (j=1,\dots,R)$$

$$\pi(Q_j) = \sqrt{-1}^{\,d(Q_j)}\, x_j \qquad (j=1,\dots,M)$$

$$\pi(P_j) = \sqrt{-1}^{\,-d(Q_j)}\, \frac{d}{dx_j} \quad (j=1,\dots,M).$$

On a alors

$$\pi(\mathcal{G}_n) \subset \Bbbk(z_1,\dots,z_R)[x_1,\dots,x_N] \vee \{1,x_{N+1},\dots,x_M,\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_M}\}$$

et l'image de $\mathcal{G}_n$ est constituée par des opérateurs différentiels formellement antisymétriques de degré $\leqslant 1$, à coefficients fractions rationnelles dont les dénominateurs sont des éléments "semi-invariants" $\in \pi(A^E_{n-1,n+1})$.

4. Le centre de $\mathcal{U}(\mathcal{G}_n)$ contient $A_{n,n+1}$ et celui de $\mathcal{K}(\mathcal{G}_n)$ est égal à $K_{n,n+1}$. L'algèbre $(A_{n,n+1})_E\,\mathcal{U}(\mathcal{G}_n)$ s'identifie à

$$(A_{n,n+1})_E[P_1,\dots,P_M\,,Q_1,\dots,Q_M]$$

qui est isomorphe à une algèbre de Weyl à $2M$ générateurs sur $(A_{n,n+1})_E$.

5. Soit $L\in\mathcal{G}$. On pose

$$a_j = [L,Q_j] = \langle\lambda(Q_j),L\rangle Q_j + \mu(Q_j,L).$$

Il existe un élément $\Phi'(L)\in(A_{n-1,n+1})_E[Q_1,\dots,Q_M]$ de degré $\leqslant 2$ en $Q_{N+1},\dots,Q_M$ uniquement déterminé modulo $(A_{n-1,n+1})_E$ tel que

$$\theta'(L) = L - \sum_{j=1}^{M} a_j\ P_j - \Phi'(L)$$

commute à $P_1,\dots,P_M, Q_1,\dots,Q_M$.

On pose

$$[L,P_i] = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial a_i}{\partial Q_k} \vee P_k + e_i$$

et on choisit

$$(11) \qquad \Phi'(L) = \sum_{j=1}^{M} e_j Q_j - \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^{M} \frac{\partial e_j}{\partial Q_k} Q_j Q_k + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,\ell=1}^{M} \frac{e_j}{Q_k\, Q} Q_j Q_k Q_\ell \dots$$

Alors $\theta'(L)$ est homogène de degré $1$ et fonction propre de $\tau$ de parité $-1$.

Preuve de II.3.

Chaque élément $Q_{p,p,j}$ est une combinaison $\mathcal{G}$-homogène de la base $\{\ell_{p,2},\ell_{p,3},\dots,\ell_{p,p}\}$, à un élément de $A_{p-1} \vee \{Z_o,\ell^{p-1,p-1,o}\}$ près.

Les propriétés 2, 4 et 5 de $\mathcal{P}_5$ permettent de vérifier que $c_{p,j}$ est bien un semi-invariant de $A_{p-1}$. Divisant $Q_{p,p,2j-1}$ par $c_{p,j}$, on obtient une base orthonormale symplectique.

1.i. Par construction, $L_j$ commute déjà à $q_{p,p},q_{p+1,p+1},\dots,q_{n,n}$.

On vérifie que $L_j''$ est unique et donné par

$$L_j'' = \sum_{k=N+1}^{M} [L_j,Q_k] \vee P_k - [L_j,P_k] \vee Q_k$$

et que $L_j''$ possède les propriétés annoncées.

1.ii. Par la définition, on a $[P_j',Q_k] = \delta_{j,k}$ pour $j,k=1,2,\dots,N$.

Tous les éléments de $q^{n,n,1}$ sont homogènes et vecteurs propres de $\tau$, par suite la matrice $[\ell^{n,n,1} ; q^{n,n,1}]$ a toutes ses colonnes homogènes de même degré et vecteurs propres de $\tau$, avec la même valeur propre sur chaque colonne. La matrice inverse possèdera encore la même propriété ; de plus, elle sera triangulaire par blocs comme la matrice dont on est parti. En ce qui concerne les degrés, la $j^e$ colonne de la matrice inverse sera de degré opposé au degré de la $j^e$ ligne de la matrice initiale, le produit des deux matrices étant la matrice identique.

On peut aussi calculer l'inverse en utilisant le fait que $[\ell^{n,n,1} ; q^{n,n,1}]$ est triangulaire par blocs, ce qui donne

$$P'_j \in (A_{p-1})_E \vee \{\ell^{p-1,p-1,o}, \ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,i}\}.$$

Détermination des $\nu_j$.

Les $\nu_j$ se calculent pour les valeurs sucessives de $p=2,3,..,n$. Supposons les $\nu_j$ déterminés pour tous les indices $j$ tels que $L_j \in \ell^{p-1,p-1,1}$, c'est-à-dire pour les $\ell_{q,i}$ où $q \leqslant p-1$, $2 \leqslant i < q$. Les éléments $(P_1, \ldots, P_{J_{p-1}})$ correspondants sont donc déterminés, et ensemble avec $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{J_{p-1}}) = q^{p-1,p-1,1}$, ils satisfont aux relations de commutation canoniques. Notons $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{J_p}) = q^{p,p,1}$ et $(L_1, L_2, \ldots, L_{J_p}) = \ell^{p,p,1}$. Comme tout $Q_j$ pour $j > J_p$ appartient à un $q_{k,\ell}$ où $k > p$, $Q_j$ commute déjà à $\ell^{p,p,1}$ et la diagonalisation au niveau de $\ell^{p,p,1}$ ne fait pas intervenir les $L_j$ pour $j > J_p$. Nous allons calculer les $\nu_j$ pour $j = J_{p-1}+1$, $J_{p-1}+2, \ldots, J_p$, c'est-à-dire correspondants aux $L_j \in (\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,p-1})$.

a. Un calcul similaire à 1.i nous donne un élément

$$L'''_j \in (A_{p-2})_E \vee \{P_1, \ldots, P_{J_{p-1}}, Q_1, \ldots, Q_{J_{p-1}}\}$$

tel que $L_j - L'_j - L''_j$ commute à $q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{n,n}$ et aux $P_k$, $Q_k$ pour $k \leqslant J_{p-1}$. Comme $L''_j$ commute à $Q_{J_{p-1}+1}, \ldots, Q_{J_p}$, en inversant la matrice de commutation qui n'a pas changé, on obtient des éléments $P''_j = P'_j - \nu'_j$ où $\nu'_j \in (A_{p-1})_E$ (on peut remarquer par exemple que les relations $[P'_j, Q_k] = \delta_{j,k}$ déterminent les éléments $P'_j \in K_n \vee \{Z_o, \ell^{n,n,1}\}$ à un élément de $K_n$ près, et l'examen de ce "terme constant" $-\nu'_j$ donne immédiatement son appartenance).

b. On a $P''_j \in (A_{p-1})_E \vee \{\ell_{p,2}, \ell_{p,3}, \ldots, \ell_{p,p-1}, q_{2,2}, \ldots, q_{n,n}, P_1, \ldots, P_{J_{p-1}}, Z_o\}$ et cet ensemble est une algèbre de Lie bilatère sur $(A_{p-1})_E$ que l'on note $\tilde{\mathfrak{h}}$. Donc $C_{j,k} = [P''_j, P''_k] \in \tilde{\mathfrak{h}}$. Comme les $P''_j$ commutent à $q_{2,2},\dots,$ $q_{n,n}$, $P_1,\dots,P_{J_{p-1}}$, $Q_1,\dots,Q_{J_{p-1}}$, il en sera de même pour les $C_{j,k}$. Des relations $[P''_j, Q_k] = \delta_{j,k}$ pour $k=1,\dots,J_p$ les identités de Jacobi nous donnent $[C_{j,k}, Q_\ell] = 0$ pour $\ell=1,\dots,J_p$ et par suite $C_{j,k}$ n'a aucune composante sur $(q_{2,2}, q_{3,3},\dots,q_{n,n}, P_1,\dots,P_{J_{p-1}}, \ell_{p,2},\dots,\ell_{p,p-1})$ et $C_{j,k} \in (A_{p-1})_E$ ; commutant de plus à $P_1,\dots,P_{J_{p-1}}$, $C_{j,k}$ commute à $\mathfrak{h}_{p-1,2}$ et appartient à $(A_{p-1,p})_E$ d'après $\mathcal{P}_7$.

La dérivation définie par $P''_j$ s'identifie à $\frac{\partial}{\partial Q_j}$, l'identité de Jacobi fournit

$$[P'', C_{j,k}] + [P''_j, C_{k,\ell}] + [P''_k, C_{\ell,j}] = 0$$

et la deux forme

$$\omega = \sum_{j,k=J_{p-1}+1}^{J_p} C_{j,k}\, dQ_j \wedge dQ_k$$

est fermée, à coefficients polynômes (les dénominateurs sont des semi-invariants et ne dépendent pas des $Q_j$).

Par une formule de Taylor Poincaré, on obtient sa primitive :

$$2\nu''_j = \sum_k C_{j,k} Q_k - \frac{1}{2!} \sum_{k,\ell} [P''_\ell, C_{j,k}] Q_k Q_\ell + \frac{1}{3!} \sum_{k,\ell,m} [P''_m, [P''_\ell, C_{j,k}]] Q_k Q_\ell Q_m \cdots$$

On vérifie que $\nu_j = \nu'_j + \nu''_j$ est le terme constant cherché :
l'homogénéité et la valeur propre de $\tau$ proviennent du calcul même de $\nu'_j$ et $\nu''_j$ qui se fait par des commutateurs "invariants" par essence ! Les relations de commutations sont vraies car on a calculé une primitive de $\omega$ sous la forme $\sum_j \nu''_j\, dQ_j$.

1.iii. La formule d'inversion est celle de l'algèbre linéaire, avec en plus les conditions de nullité des commutateurs. Elle peut s'appliquer d'après I.14. Par ailleurs, si $Q_k \in q_{\ell,m}$, $[L_j, Q_k] = 0$ si $L_j \in \mathfrak{h}_{m-1,2}$ ou, ce qui revient au même, $[L_j,Q_k]=0$ si $L_j \in \ell_{p,i}$ et $Q_k \in q_{\ell,m}$ avec $m>p$. Par ailleurs, si $m=p$, les valeurs $\ell=p+1,p+2,\dots,p-1$ donnent encore zéro d'après $\mathcal{P}_5.4$.

D'après $\mathcal{P}_5.2$ et du fait de la nullité sur $\mathcal{G}_n$ de tous les poids, on a de plus $[L_j,Q_k] \in A_{\ell-1,m+1}$ si $Q_k \in q_{\ell,m}$.

2. Ce sont des formules de changement de base.

3. La représentation $\pi$ s'obtient par prolongement algébrique et ceci est possible grâce à l'indépendance algébrique des générateurs $Z_1,\dots,Z_R$, $Q_1,\dots,Q_M$, $P_1,\dots,P_M$.

Sous l'action de $\tau$, les générateurs sont des vecteurs propres et leurs images sous $\pi$ sont aussi des vecteurs propres pour le passage à l'adjoint formel, avec la même valeur propre.
Comme tout élément de $\mathcal{G}_n$ est vecteur propre de $\tau$ de valeur propre $-1$, on conclut facilement que $\pi(\mathcal{G}_n)$ est formé d'opérateurs différentiels antisymétriques. Le reste de l'assertion s'obtient par inspection des formules algébriques de prolongement.

4. Cette assertion est facile. On prendra garde au fait que le centre de $\mathcal{U}(\mathcal{G}_n)$ n'est pas toujours égal à $A_{n,n+1}$ car on doit localiser par un semi-invariant. En fait, $(A_{n,n+1})_E$ contient le centre de $\mathcal{U}(\mathcal{G}_n)$ et on peut même se contenter de localiser par les multiples d'un même élément semi-invariant.

5. L'algèbre

$$(A_{n-1})_E\,\mathcal{G}_n = (A_{n-1,n+1})_E[Q_1,\dots,Q_N] \vee \{q_{n,n+1},Q_{N+1},\dots,Q_M\,,\,P_1,\dots,P_M,Z_o\}$$

est caractéristique. Sous l'action de $L \in \mathcal{G}$, on a

$$[L,P_i] = \sum_{k=1}^{M} a_{i,k} \vee P_k + e_i$$

où $e_i, a_{i,k} \in (A_{n-1,n+1})_E[Q_1,\dots,Q_N] \vee \{Q_{N+1},\dots,Q_M,Z_o\}$.

En effet, d'après (10), l'algèbre $(A_{n-1,n+1})_E[Q_1,\dots,Q_N] \vee \{Q_{N+1},\dots,Q_M, P_1,\dots,P_M, Z_o\}$ est $\mathcal{G}$-stable, d'où l'assertion.

On a $a_j = [L,Q_j] \in (A_{n-1,n+1})_E[Q_1,\dots,Q_M]$ et d'après l'identité de Jacobi

$$0 = [L,[P_i,Q_j]] = [\sum_{k=1}^{M} a_{i,k} \vee P_k + e_i , Q_j] + [P_i,a_j]$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} a_j = a_{i,j}$$

On a encore

$$0 = [L,[P_i,P_j]] = [\sum_{k=1}^{M} a_{i,k} \vee P_k + e_i , P_j] + [P_i , \sum_{k=1}^{M} a_{j,k} \vee P_k + e_j] =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \left( - \frac{\partial a_{i,k}}{\partial Q_j} + \frac{\partial a_{j,k}}{\partial Q_i} \right) \vee P_k + \frac{\partial e_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial e_i}{\partial Q_j}$$

et compte tenu des identités de Schwarz

$$\frac{\partial e_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial e_i}{\partial Q_j} = 0 ,$$

la 1-forme $\sum_{i=1}^{M} e_i dQ_i$ admet donc une primitive donnée par (11).

L'unicité modulo le centre du polynôme $R'(L)$ en $P_i$ et $Q_i$ tel que $\theta'(L) = L - R(L)$ commute aux $P_i, Q_i$ est bien connue pour les algèbres de Weyl.

Enfin, la vérification de l'homogénéité et du comportement sous l'action de $\tau$ se fait comme auparavant.

Compte tenu du fait que les $e_i$ sont des fonctions affines de $Q_{N+1},\dots, Q_M$ la primitive est au plus fonction quadratique de $Q_{N+1},\dots,Q_M$.

## II.4. La partie non nilpotente.

On prolonge l'application $\theta'$ de II.3.5 par $K_{n,n+1}$-linéarité à $K_{n,n+1}\mathcal{G}$. On a

1. $\theta'(\mathcal{G}_n) \subset (A_{n-1,n+1}) \vee \{Z_o, q_{n,n+1}\}$

2. $\theta'((A_{n-1,n+1})_E \mathcal{G})$ est une algèbre de Lie bilatère sur $(A_{n-1,n+1})_E$ qui est égale au commutant de $P_1,\ldots,P_M, Q_1,\ldots,Q_M$ dans $(A_{n-1,n+1})_E \vee \mathcal{G} + (A_{n-1,n+1})_E[P_1,\ldots,P_M, Q_1,\ldots,Q_M]$. Elle admet pour base

$$(Z_o, q_{n,n+1}, \theta'(\ell_{2,1}), \theta'(\ell_{3,1}), \ldots, \theta'(\ell_{n,1}))$$

et tous les commutateurs des éléments de cette base appartiennent à

$$(A_{n-1,n+1})_E \vee \{q_{n,n+1}, Z_o\} \subset K_{n,n+1}.$$

3. Le commutant de $K_{n,n+1}$ dans $\theta'(K_{n,n+1}\mathcal{G})$ est une algèbre de Lie sur $K_{n,n+1}$ et $K_{n,n+1}$ contient son algèbre dérivée. La forme bilinéaire $\mathcal{B}$ à valeurs dans $K_{n,n+1}$ définie par le crochet sur $\theta'(K_{n,n+1}\mathcal{G}) \times \mathbb{k}\{Z_1,..,Z_R\}$ est $K_{n,n+1}$ linéaire en la première variable. On choisit $(S_1,..,S_s) \subset (\ell_{2,1},\ldots,\ell_{n,1})$ telle que $(\theta'(S_1),\ldots,\theta'(S_s))$ soit une base d'un conoyau de $\mathcal{B}$ dans le premier espace. Pour tout $S \in (\ell_{2,1},\ldots,\ell_{n,1})$ on note $\theta''(S)$ l'unique élément de $\theta'(S) + K_{n,n+1} \vee \{\theta'(S_1),\ldots,\theta'(S_s)\}$ qui commute à $K_{n,n+1}$. Alors $\theta''(S)$ est homogène de degré 1 et vecteur propre de $\tau$ de parité $-1$.

Une base du commutant de $K_{n,n+1}$ est $(Z_o, \theta''((\ell_{2,1},\ldots,\ell_{n,1}) \setminus (S_1,..,S_s)))$ et par diagonalisation symplectique au sens de I.12 (16) on obtient une base

$$(Z_o, Z_{R+1},\ldots,Z_r \,;\, P_{M+1}, Q_{M+1},\ldots,P_m, Q_m)$$

du commutant qui est symplectique, $(Z_o, Z_{R+1},\ldots,Z_r)$ étant une base du centre et tous les vecteurs de base étant homogènes et vecteurs propres de $\tau$ avec la même parité que leur degré .

On a $d(P_i) + d(Q_i) = 1$.

(16) Il n'est pas nécessaire d'étendre le corps de base puisque l'algèbre dérivée est $K_{n,n+1}$.

4. On note $R'(S_i) = S_i - \theta'(S_i)$ et $R(S_i)$ l'unique élément de $R'(S_i) + K_{n,n+1} \vee \{P_{M+1},\dots,P_m,Q_{M+1},\dots,Q_m\}^{(17)}$ tel que

$$\theta(S_i) = S_i - R(S_i)$$

commute à $P_1,\dots,P_m$, $Q_1,\dots,Q_m$.

Alors, pour tout $i,j=1,\dots,s$

$$[\theta(S_i),\theta(S_j)] \in K_{n,n+1}$$

et $\theta(S_1),\dots,\theta(S_s)$ définissent des dérivations de $K_{n,n+1}$ qui sont indépendantes et qui commutent entre elles.

Les éléments $\theta(S_1),\dots,\theta(S_s)$ sont homogènes de degré 1 et vecteurs propres de $\tau$ de parité -1.

5. On prend des indéterminées supplémentaires $z_{R+1},\dots,z_r,x_{M+1},\dots,x_m$. On prolonge $\pi$ définie en II.3.3 en posant

$$\pi(Q_i) = \sqrt{-1}^{\,d(Q_i)}\, x_i \qquad (i=1,\dots,m)$$

$$\pi(P_i) = \sqrt{-1}^{\,-d(Q_i)}\, \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\pi(Z_i) = \sqrt{-1}^{\,d(Z_i)}\, z_i .$$

On note

$$\delta(S_i) = \sum_{j=1}^{k} \pi([S_i,Z_j])\, \sqrt{-1}^{\,-d(Z_j)}\, \frac{\partial}{\partial z_i}$$

le champs de vecteurs à coefficients rationnels défini par $S_i$.

Alors les champs $\delta(S_1),\dots,d(S_s)$ sont homogènes de degré 0, commutent entre eux et définissent des opérateurs différentiels formellement antisymétriques.

6. On note $\mathbb{C}_{i,j} = \pi[\theta(S_i),\theta(S_j)] \in K_{n,n+1}$. On suppose $k = \mathbb{C}$. En position générale, $(\delta(S_1),\ldots,\delta(S_s))$ définit localement une variété intégrale de dimension $s$ et les équations

$$\delta(S_i)\sigma_j - \delta(S_j)\sigma_i = \mathbb{C}_{i,j} \qquad (i,j=1,\ldots,s) \;^{(17)}$$

admettent localement des solutions $\sigma_1,\ldots,\sigma_s$ fonctions analytiques de $z_1,\ldots,z_R$.

On peut alors prolonger $\pi$ en une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$ en posant

$$\pi(S_i) = \sigma_i + \pi(R(S_i)) + \delta(S_i), \qquad (i=1,\ldots,s)$$

et $\pi$ représente $\mathfrak{g}$ par des opérateurs différentiels de degré au plus 2 et ces opérateurs sont formellement antisymétriques lorsque les "fonctions $\sigma_i$ sont des fonctions propres de $\tau$ avec la parité -1", ou, ce qui revient au même, lorsque les "fonctions $\sigma_i$ sont antisymétriques".

7. On note $(S_1,\ldots,S_{s+2(m-M)+r-R}) = (\ell_{2,1},\ell_{3,1},\ldots,\ell_{n,1})$.

Soit $\pi_1(S_i)$ l'unique élément de $\delta(S_i) + \pi(K_{n,n+1}) \vee \{z_{R+1},\ldots,z_r,x_{M+1},\ldots,x_m, \frac{\partial}{\partial x_{M+1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}\}$ tel que $\pi(S_i) - \pi_1(S_i)$ soit un opérateur différentiel en $z_1,\ldots,z_R,x_1,\ldots,x_M$.

Pour toute combinaison $\mathbb{k}(z_1,\ldots,z_R)$-linéaire des $\pi_1(S_i)$ qui annule les dérivations $\delta(S_i)$, les coefficients des termes restants sont invariants sous l'action des $\delta(S_i)$.

La représentation linéaire $\pi_1$ est fidèle sur $K_{n,n+1} \vee \{\ell_{2,1},\ldots,\ell_{n,1}\}$.

---

(17) Les fonctions $\sigma_i$ sont calculées pour que les $\theta(S_i) - \sigma_i$ commutent ensemble. Sur l'exemple de l'algèbre de Dixmier [4], on voit que les $\sigma_i$ ne peuvent pas toujours être pris rationnels ou algébriques.

Preuve de II.4.

1. On voit que $\theta'$ s'obtient encore par les mêmes formules de II.3.5 lorsque l'on prolonge à $K_{n,n+1}$ et la linéarité est évidente.
Comme $\theta'$ s'annule sur $P_1,\dots,P_M, Q_1,\dots,Q_M$, l'assertion résulte de (10).

2. Toutes les assertions, sauf la dernière, sont faciles.

Soient $S_i, S_j \in (\ell_{2,1},\dots,\ell_{n,1})$. On sait que $[S_i,S_j] \in \mathcal{G}_n$.
On a donc en notant $\theta'(S_i) = S_i - R'(S_i)$

$$[\theta'(S_i),\theta'(S_j)] = [S_i,S_j] - [S_i,R'(S_j)] + [S_j,R'(S_i)] + [R'(S_i),R'(S_j)] \in$$
$$\in K_{n,n+1}[P_1,\dots,P_M, Q_1,\dots,Q_M]$$

et commutant à $P_1,\dots,P_M, Q_1,\dots,Q_M$, l'élément $[\theta'(S_i),\theta'(S_j)]$ appartient nécessairement à $K_{n,n+1}$.
Notons $(S_1,\dots,S_t) = (\ell_{2,1},\dots,\ell_{n,1})$ et prenons pour $i=1,2$

$$T_i = \sum_{j=1}^{t} \lambda_{i,j} \vee \theta'(S_j) \qquad (\lambda_{i,j} \in K_{n,n+1})$$

deux éléments du commutant de $K_{n,n+1}$.
On a

$$[T_1,T_2] = \sum_{j,k=1}^{t} \lambda_{1,j}\lambda_{2,k} \vee [\theta'(S_j),\theta'(S_k)] + \sum_{j,k=1}^{t} \lambda_{1,j}[\theta'(S_j),\lambda_{2,k}] \vee$$
$$\theta'(S_t) - \lambda_{2,k}[\theta'(S_k),\lambda_{1,j}] \vee \theta'(S_j)$$

et la dernière somme s'annule puisque $T_1$ et $T_2$ commute à $K_{n,n+1}$.
On conclut que $[T_1,T_2] \in K_{n,n+1}$.

La forme $\mathcal{B}$ et l'application $\theta''$ vérifient bien les propriétés de linéarité énoncées.

La diagonalisation symplectique dans notre cas n'utilise que des coefficients dans $K_{n,n+1}$ et partant d'une base convenablement ordonnée, donnera directement $P_{M+1},Q_{M+1},\dots,P_m,Q_m$ puis $Z_{R+1},\dots,Z_m$ en dernier. Elle conservera comme auparavant les propriétés d'homogénéité et de $\tau$-variance.

La relation $d(P_i)+d(Q_i)=1$ est générale et résulte de la conservation du degré par $\mathcal{G}$ et de $[P_i,Q_j]=1$.

4. Pour tout $S \in \ell = (\ell_{2,1},\ell_{3,1},\dots,\ell_{n,1})$ rappelons que

$$\theta''(S) = \theta'(S) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j(S) \vee \theta'(S_j)$$

et les coefficients $\mu_j(S) \in K_{n,n+1}$ sont uniques lorsque l'on impose à $\theta''(S)$ de commuter à $K_{n,n+1}$. Pour tout $S_i \in \ell$, on a

$$[\theta'(S_i),\theta''(S)] = [\theta'(S_i),\theta'(S)] + \sum_{j=1}^{s} [\theta'(S_i),\mu(S)] \vee \theta'(S_j) + \mu(S_j) \vee [\theta'(S_i),\theta'(S_j)]$$

$$\in K_{n,n+1} + \sum_{j=1}^{s} [\theta'(S_i),\mu(S)] \vee \theta'(S_j)$$

et la commutativité avec $K_{n,n+1}$ impose alors

(12) $$[\theta'(S_i),\theta''(S)] \in K_{n,n+1}.$$

Il en résulte immédiatement que si $S$ et $S' \in \ell$, on a

(13) $$[\theta'(S_i),[\theta''(S),\theta''(S')]] = 0$$

et la diagonalisation symplectique utilisée pour déterminer

$$Z_{R+1},\dots,Z_r \,,\, P_{M+1},\dots,P_m \,,\, Q_{M+1},\dots,Q_m$$

ne fait intervenir que des coefficients qui commutent à $\theta'(S_j)$.

En conséquence, puisque (12) a lieu, on aura aussi

$$[\theta'(S_i),P_j] \in K_{n,n+1}$$

$$[\theta'(S_i),Q_j] \in K_{n,n+1}$$

et

(14) $$R(S_i) = R'(S_i) + \sum_{j=M+1}^{m} [\theta'(S_i),Q_j] \vee P_j - [\theta'(S_i),P_j] \vee Q_j$$

convient. L'unicité est évidente.

Comme $\theta(S_j) = S_j - R(S_j) \in \theta'(S_j) + K_{n,n+1} \vee \{P_{M+1},\dots,P_m \,,\, Q_{M+1},\dots,Q_m\}$

on voit que

$$[\theta(S_i),\theta(S_j)] \in [\theta'(S_i),\theta'(S_j)] + K_{n,n+1}\{Z_o,P_{M+1},\dots,P_m,Q_{M+1},\dots,Q_m\}$$

et commutant à $P_{M+1},\dots,P_m$, $Q_{M+1},\dots,Q_m$, cet élément doit appartenir à $K_{n,n+1}$.

L'identité de Jacobi donne à partir de

$$[[\theta(S_i),\theta(S_j)],K_{n,n+1}] = 0$$

la commutativité des dérivations définies par $\theta(S_i)$ et $\theta(S_j)$.

La dernière assertion ne présente pas de difficulté parce que $R(S_j)$ se calcule avec des commutateurs.

5. Ces propriétés se démontrent à partir de la transformation sous l'action de $\tau$ comme auparavant.

6. Les $\theta(S_i)$ définissent des dérivations $K_{n,n+1}$ indépendantes de $K_{n,n+1}$, donc les champs de vecteurs $\delta(S_1),\dots,\delta(S_s)$ sont localement indépendants. On peut donc trouver un changement de coordonnées locales.

$$(z_1,\dots,z_r) \longrightarrow (y_1,\dots,y_r)$$

qui est analytique localement et qui transforme $\delta(S_i)$ en $\frac{\partial}{\partial y_i}$.

Les relations de Jacobi donnent alors

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\pi(C_{i,j}) + \frac{\partial}{\partial y_i}\pi(C_{j,k}) + \frac{\partial}{\partial y_j}\pi(C_{k,i}) = 0$$

et la forme

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{s} \pi(C_{i,j})\, dy_i \wedge dy_j$$

est fermée.

Soit $\Omega = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i dy_i$ une primitive locale de $\omega$.

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\sigma_j - \frac{\partial}{\partial y_j}\sigma_i = \pi(C_{i,j}).$$

Vérifions que $\pi$ se prolonge alors en une représentation de $\mathcal{G}$ :

On a

$$C_{i,j} = [S_i - R(S_i), S_j - R(S_j)] = [S_i - R(S_i), R(S_j)] + [S_i - R(S_i), S_j]$$
$$= -[S_i - R(S_i), R(S_j)] + [S_i, S_j] - [R(S_i), S_j - R(S_j)] - [R(S_i), R(S_j)].$$

Comme $\theta(S_i) = S_i - R(S_i)$ commute aux $P_i, Q_i$, la seule action de $\theta(S_i)$ sur $R(S_j)$ provient de l'action de $S_i$ sur les coefficients de $R(S_j) \in K_{n,n+1}$ $[P_1,\ldots,P_m, Q_1,\ldots,Q_m]$ et s'identifie avec la dérivation définie par $\theta(S_i)$ dans $K_{n,n+1}$, et cette dérivation est justement représentée par $\delta(S_i)$. On a donc

$$\pi([S_i - R(S_i), T(S_j)]) = \delta(S_i).\pi(R(S_i))$$

d'où

$$\pi([S_i, S_j]) = \pi(C_{i,j}) + \delta(S_i).\pi(R(S_j)) - \delta(S_j).\pi(R(S_i)) +$$
$$+ \pi([R(S_i), R(S_j)])$$
$$= [\pi(R(S_i)) + \delta(S_i) + \sigma_i,\ \pi(R(S_j)) + \delta(S_j) + \sigma_j]$$

et $\pi$ est bien une représentation de $\mathfrak{g}$ .

Que $\pi$ soit fidèle, on s'en convaint facilement.

Tous les autres termes étant déjà formellement antisymétriques, pour que $\pi(S_i)$ le soit, il faut et il suffit que les fonctions $\sigma_i$ le sont.

7. La première assertion résulte de (13) et (14).

   La deuxième assertion résulte des changements de bases de II.4.3.

## II.5. Cas des algèbres réelles.

Dans les constructions précédentes, on peut, en utilisant un changement de base à coefficients semi-invariants, d'obtenir les bases $\ell_{i,p}$ et $q_{p,i}$ globalement invariantes par le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Reprenons la démonstration de II.2.

Le paragraphe a) introduit

$$Y = [L ; \ell^{p,p-1,o} ; q^{p-1,p,o}]$$

Si $L \neq \bar{L}$, on a

$$\bar{Y} = [\bar{L} ; \overline{\ell^{p,p-1,o}} ; \overline{q^{p-1,p,o}}]$$

et $Y$ sera conjugué de $\pm\bar{Y}$ si $\ell^{p,p-1,o}$ et $q^{p-1,p,o}$ sont globalement invariants par conjugaison complexe.

Les corrections de commutations (voir d) et h)) se faisant par intermédiaire des polynômes de Taylor-Poincaré n'altèreront pas cette propriété.

Le point central de la construction est donc le choix de $\ell_{p,p}$ en e) des $\ell_{p,j}$ et $\ell_{j,p}$ en (j) et il faut pouvoir prendre $\ell_{p,j}$ et $\ell_{j,p}$ globalement invariants par le groupe de Galois. Ceci pourra se faire lorsque l'on se permet des changements de base utilisant des coefficients semi-invariants.

e') Choix de $\ell_{p,p}$.

Par hypothèse de récurrence, supposons que la construction a été possible pour $q^{p-1,n+1,o}$ et $\ell^{n+1,p-1,o}$.

Il nous faut trouver une base sur $K_{p-1}$ du commutant de $\tilde{\mathfrak{h}}_{p-1}$ invariante par conjugaison et plus précisément, une base d'un conoyau de la forme bilinéaire définie par le crochet et une base de son noyau, toutes deux invariantes par conjugaison.

On l'obtient comme suit :

Choisissons un sous-ensemble $\{Q_1,\dots,Q_\alpha\}$ provenant de $\{L_1,\dots,L_\alpha\}$, stable par conjugaison complexe et engendrant un sous espace où le crochet est non dégénéré, et prenons le maximal pour ces deux propriétés.

Si l'espace engendré n'est pas un conoyau de la forme bilinéaire il existe $Q$ et $Q'$ tel que $(Q,Q',Q_1,\dots,Q_\alpha)$ soit encore une base d'un sous-espace symplectique. Par une diagonalisation symplectique, on peut supposer que $Q$ et $Q'$ commutent à $Q_1,\dots,Q_\alpha$. On sait que $(Q,Q',\bar{Q},\bar{Q}')$ n'est pas la base d'un sous espace symplectique, i.e.

$$\begin{vmatrix} [Q,Q'] & [Q,\bar{Q}'] \\ [\bar{Q},Q'] & [\bar{Q},\bar{Q}'] \end{vmatrix} = 0$$

et que $Q$ et $Q'$ ne sont pas tous réels ou imaginaires purs.

Posons $\qquad Q = Q_1 + iQ_2$

$\qquad\qquad Q' = Q_1' + iQ_2'$

et $\qquad [Q_i,Q_j'] = a_{i,j}$.

Notons $\lambda$ le poids de $Q$ et $\lambda'$ le poids de $Q'$.

On a
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons $Q_1$ et $Q_2 \neq 0$, avec par exemple $a_{11} \neq 0$. On a alors

$$\frac{a_{11}+ia_{21}}{a_{11}-ia_{21}} = \frac{i}{i}\,\frac{a_{12}+ia_{22}}{a_{21}-ia_{22}} = \frac{a_{11}+ia_{12}+i(a_{21}+ia_{22})}{a_{11}+ia_{12}-i(a_{21}+ia_{22})} = \frac{[Q,Q']}{[\bar{Q},Q']}$$

et cet élément est un semi-invariant de poids $\lambda-\bar{\lambda}$.

On peut écrire

$$a_{11} + ia_{21} = AC$$
$$a_{11} - ia_{21} = \bar{A}C$$

où $A,C$ sont des polynômes homogènes en $q^{p-1,n+1}$ tels que

$$(A,\bar{A}) = 1 \quad \text{et} \quad C = \bar{C}.$$

Alors

$$\frac{A}{\bar{A}} \text{ est de poids } \lambda - \bar{\lambda}$$

et en fait $A$ est un semi-invariant. En effet, si $T \in \mathfrak{g}$ on a

$$[T, \frac{A}{\bar{A}}] = <(\lambda - \bar{\lambda}), T> \frac{A}{\bar{A}} \Rightarrow \bar{A}[T,A] - A[T,\bar{A}] = <(\lambda - \bar{\lambda}), T> A\bar{A}.$$

Comme $A$ divise le second membre, il divise aussi $[T,A]$ .

Comme $[T,A]$ est homogène de même degré que $A$, nécessairement

$$[T,A] = \alpha A \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$[T, \frac{A}{\bar{A}}] = (\alpha - \bar{\alpha}) \frac{A}{\bar{A}} = <\lambda - \bar{\lambda}, T> \frac{A}{\bar{A}}$$

et $T \longrightarrow \alpha$ est une forme linéaire ayant la même partie imaginaire que $\lambda$.

En conséquence, $\bar{A}Q$ est de poids réel. De même, on peut choisir $A'$ tel que $\bar{A}'Q$ soit de poids réel, ce qui nous permet de compléter notre base en une base d'un conoyau de la forme bilinéaire alternée (avec $\mathrm{Re}\,\bar{A}Q, \mathrm{Im}\,\bar{A}Q \dots$ ).

Une base du noyau s'obtient alors par diagonalisation symplectique.

Cette démonstration se transpose facilement au cas de $\ell_{p,j}$ et $\ell_{j,p}$ et nous omettrons cette traduction.

Exemples et Applications.

1°) Le Groupe de Mautner [4] : Base : $(e_1, e_2, \dots, e_5)$

$$[e_1,e_2]=e_3 \qquad [e_1,e_4]=\theta e_5 \qquad \theta \text{ irrationnel}$$
$$[e_1,e_3]=-e_2 \qquad [e_1,e_5]=-\theta e_4$$

$\mathfrak{h}_{1,2} : (e_2,e_3,e_4,e_5) = \mathfrak{q}_{1,n+1} \longrightarrow (ix_2, ix_3, ix_4, ix_5)$

$\mathfrak{h}_{2,1} : \quad \emptyset \quad ; \quad \ell_{2,1} = (e_1)$

$$\pi(e_1) := x_3 \frac{d}{dx_2} - x_2 \frac{d}{dx_3} + \theta\, x_5 \frac{d}{dx_4} - \theta\, x_4 \frac{d}{dx_5}.$$

Orbites : On pose $x_2 + ix_3 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ , $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_3}{x_2}$ ; $d\varphi_1 = \frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{x_3^2 + x_2^2}$

$x_4 + ix_5 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ , $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_5}{x_4}$

$$\pi(e_5) = -\left(\frac{d}{d\varphi_1} + \theta \frac{d}{d\varphi_2}\right).$$

Orbites : $\exp t\, \pi(e_1)\, f(\rho_1,\rho_2,\theta_1,\theta_2) = f(\rho_1,\rho_2,\theta_1 - t, \theta_2 - \theta t)$

$\Rightarrow$ Courbe spirale sur le tore $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ ; partout dense puisque $\theta$ est irrationnel.

2°) Le Groupe de Dixmier [4] : Base : $(e_1, e_2, \dots, e_7)$

$$[e_1,e_4]=e_5 \qquad [e_2,e_6]=e_7 \qquad [e_1,e_2]=e_3$$
$$[e_1,e_5]=-e_4 \qquad [e_2,e_7]=-e_6$$

$\mathfrak{h}_{1,2} : (e_3,e_4,e_5,e_6,e_7) = \mathfrak{q}_{1,n+1}$

$\mathfrak{h}_{2,1} : \quad \emptyset \quad \ell_{2,1} = (e_1, e_2)$

$\pi : (e_3,e_4,e_5,e_6,e_7) \longrightarrow (ix_3,ix_4,ix_5,ix_6,ix_7)$

$$e_1 \longrightarrow x_5 \frac{d}{dx_4} - x_4 \frac{d}{dx_5} + \lambda_1$$

$$e_2 \longrightarrow x_7 \frac{d}{dx_6} - x_6 \frac{d}{dx_7} + \lambda_2.$$

Passant en polaires : $x_4 + ix_5 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ $\qquad e_1 \longrightarrow -\frac{d}{d\varphi_1} + \lambda_1$

$x_6 + ix_7 = \ _2 e^{i\varphi_2}$ $\qquad e_2 \longrightarrow -\frac{d}{d\varphi_2} + \lambda_2$

Pour avoir $[e_1,e_2] = e_3$ il faut prendre $\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\lambda_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\lambda_2 = ix_3$ et la solution avec $\lambda_1,\lambda_2$ rationnels n'existe pas. Par exemple, si $\lambda_1$ est rationnel (i.e. fonction rationnelle de $\rho_1\cos\theta_1$, $\rho_1\sin\theta_1$ , $\rho_2\cos\theta_2$ , $\rho_2\sin\theta_2$) $\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varphi_2}=R$ est aussi rationnelle , donc

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial\varphi_1} = -ix_3 + R$$

$$\lambda_2 = -ix_3\varphi_1 + \int R\,d\varphi_1$$

et $\lambda_2$ ne peut pas être périodique de période $2\Pi$ en $\varphi_1$ .

En effet, intégrant sur une période, on a

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\lambda_2}{\partial\varphi_1}\,d\varphi_1 = -i2\,x_3 + \int_0^{2} R\,d\varphi_1$$

d'où

$$ix_3 4\pi^2 = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial\lambda_2}{\partial\varphi_1}\,d\varphi_2\,d\varphi_1 = 0.$$

( ce raisonnement laisse à désirer à cause des problèmes de divergences ).

Une solution non rationnelle est possible avec : $\lambda_1 = ix_3\,\varphi_1$ et $\lambda_2 = 0$ .

3° <u>Le groupe de Pukanszky</u> [4]. Base: $(e_1,e_2,\ldots,e_{12})$

$[e_1,e_2]=e_3$ , $[e_1,e_5]=e_6$ , $[e_2,e_5]=e_6$ , $[e_4,e_5]=e_6$ , $[e_1,e_7]=e_8$ , $[e_1,e_8]=-e_7$ , $[e_2,e_9]=e_{10}$, $[e_2,e_{10}]=-\lambda e_9$ , $[e_4,e_{11}]=e_{12}$ , $[e_4,e_{12}]=-e_{11}$ .

$$\mathfrak{h}_{1,2} \ : \ q_{1,n+1} = (e_3,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}) \to (ix_3,ix_6,\ldots,ix_{12})$$

$$\mathfrak{h}_{2,1} \ : \ q_{2,n+1} = (e_5) \to (ix_5) \quad ; \quad {}_{2,1} = (e_1,e_2,e_4).$$

On pose $x_7+ix_8=\rho_1 e^{i\varphi_1}$ , $x_9+ix_{10}=\rho_2 e^{i\varphi_2}$ , $x_{11}+ix_{12}=\rho_4 e^{i\varphi_4}$ ,

$$e_1 \to x_6\frac{\partial}{\partial x_7} - x_7\frac{\partial}{\partial x_8} + x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_1 = -\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_1$$

$$e_2 \to \lambda\Big(x_{10}\frac{\partial}{\partial x_9} - x_9\frac{\partial}{\partial x_{10}}\Big) + x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_2 = -\lambda\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_2$$

$$e_4 \to x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}} - x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_4 = -\frac{\partial}{\partial\varphi_4} - x_6\frac{\partial}{\partial x_5} + \lambda_4 \ ;$$

La présence de la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_5}$ ne permet pas non plus de trouver une solution rationnelle; On peut prendre $\lambda_2 = -ix_3\varphi_1$, $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ pour représenter la relation

$[e_1,e_2] = e_3$ .

## III. Transformation de Fourier Plancherel dans le cas nilpotent [5]

III.1. Soit $G$ un groupe nilpotent réel connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La construction II s'applique pour $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$.

Soit $\ell = (\ell^+, \ell^-)$ où

$$\ell^+ = (\ell_{n,n+1}, \ell_{n,+}, \ell_{n-1,n+1}, \ell_{n-1,n}, \ell_{n-1,+}, \dots, \ell_{2,n+1}, \dots, \ell_{2,+}, \ell_{1,n+1})$$

$$\ell^- = (\ell_{n,-}, \ell_{n,n-1}, \dots, \ell_{n,2}, \ell_{n-1,-}, \dots, \ell_{n-1,2}, \dots, \ell_{2,-}).$$

Elle permet le paramétrage de $G$ par $t \in \mathbb{R}^\ell$ comme suit :

si $t = (t_L)_{L\in\ell} \in \mathbb{R}^\ell$, on pose

$$g(t) = \prod_{L\in\ell} \exp t_L . L$$

où le produit $\prod_{L\in\ell}$ dans $G$ est ordonné par l'ordre de $\ell$ et $t_L \longrightarrow \exp t_L . L$ est le groupe à un paramètre de générateur $L$.

Le paramétrage $t \longrightarrow g(t)$ est un difféomorphisme et la mesure invariante de $G$ peut être prise égale au produit extérieur

$$\bigwedge_{L\in\ell} dt_L$$

III.2. Les opérateurs différentiels $\pi(L)$ sont formellement antisymétriques, du premier degré par rapport aux variables $x_1, \dots, x_M$, à coefficients polynômes en $x_1, \dots, x_M$ et fractions rationnelles en $z_1, \dots, z_R$.

Soit $\Delta$ le jacobien du changement de base triangulaire $\ell \longrightarrow (Z_1, \dots, Z_R, Q_1, \dots, Q_M, P_1, \dots, P_M)$.
On sait que $\Delta$ est un semi-invariant (donc fonction rationnelle de $Z_1, \dots, Z_R$) qui est égal au produit des facteurs $D_{p,i,k}$ des formules (4) et du déterminant $\Delta_{n,n,o}$ ; $\Delta$ est donc en fait un polynôme en $Z_1, \dots, Z_R$ et $\delta = \pi(\Delta)$ est un dénominateur commun des $\pi(L)$.

Pour tout $L \in \mathcal{G}$, $\pi(L)$ est antisymétrique à domaine dense agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des fonctions de carré sommables en les variables $z_1,\ldots,z_R$, $x_1,\ldots,x_M$ pour la mesure

$$|\delta|\, dz_1 \ldots dz_R dx_1 \ldots dx_M .$$

Comme $\pi(L)$ ne comporte pas de dérivation en $z_1,\ldots,z_R$, pour tout $z=(z_1,\ldots,z_R)$ qui n'annule pas $\delta$, on peut aussi considérer $\pi(L)$ comme agissant à $z$ fixé dans

$$\mathcal{H}_z = L^2(\mathbb{R}^M, dx_1 \ldots dx_M)$$

et nous le noterons $\pi_z(L)$.

Dans les deux cas, $\pi(L)$ et $\pi_z(L)$ définit un groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires que l'on notera

$$\exp t_L \pi(L) \quad \text{ou} \quad \exp t_L \pi_z(L).$$

Ces groupes seront donnés explicitement plus loin.

On a alors les identifications

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^R}^{\oplus} \mathcal{H}_z \, d\mu(z)$$

et

$$\exp t_L \pi(L) = \int_{\mathbb{R}^R}^{\oplus} \exp t_L \pi_z(L) \, d\mu(z)$$

où la mesure $d\mu(z)$ est égale à $|\delta|\, dz_1 \ldots dz_R$.

Comme $\pi$ est une représentation de $\mathcal{G}$, on obtient une représentation de $G$ en exponentiant, d'où la définition de

$\pi(g(t))$ (noté encore abusivement $\pi(t)$ en identifiant $t$ et $g(t)$) comme le produit ordonné des $\exp t_L \pi(L)$ pour $L \in \ell$.

III.3. Théorème.

Pour tout $z$ tel que $\delta(z) \neq 0$, $\pi_z$ est une représentation unitaire, continue et irréductible.

Si $\varphi$ est une fonction sur $G$ qui est $C^\infty$ à support compact, l'opérateur

$$\pi_z(\varphi) = \pi_z(t)\varphi(t)dt$$

opérant dans $\mathcal{H}_z = L^2(\mathbf{R}^M, dx)$
est donné par un noyau $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide et à support compact en $y$ pour tout $x$ fixé.

En particulier, $\pi_z(\varphi)$ est traçable et on a la formule de Fourier Plancherel.

$$(2\pi)^{M+R}\varphi(0) = \int_{\mathbf{R}^R} d\mu(z)\ \mathrm{Tr}\ \pi_z(\varphi)$$

III.4. <u>Calcul des opérateurs</u> $\exp t_L \pi(L)$.

Les bases partielles $\ell_{p,i}$ sont affectées de l'indice $p$ que nous désignerons comme indice de ligne et de l'indice $i$ que nous désignerons comme indice de colonne, alors que $(p,i)$ sera désigné comme hauteur. Ces mêmes termes seront utilisés pour les éléments de la base, pour les paramètres indexés par ces éléments comme en III.1, et même pour les variables correspondantes grâce à la transformation triangulaire (voir formule (4)).

La relation d'ordre lexicographique sur les transposées des hauteurs sera désignée en terme de hauteur : plus basse, plus haute, de même hauteur etc..

La forme générale de $\pi(L)$ lorsque $L \in \ell_{p,i}$ provient de II.2 et II.3 :

$$\pi(L) = a_L + \sum_j^{(p,i)} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où chaque $a_j$ $(j \neq L)$ est un polynôme en les variables $x_k$ de ligne plus petite que la ligne de $x_j$ et de colonne plus grande que celle de $x_j$.

a) Lorsque $p>i$, $\sum_j^{(p,i)}$ est une sommation sur les indices $j$ dont la variable $x_j$ est non plus haute que $(i,p)$ et $a_L$ est un polynôme en les variables $x_k$ de ligne $<p$. (Bien entendu, on omet abusivement de mentionner un dénominateur en les variables $z_k$ de ligne $<p$ (et semi-invariant)).

b) Lorsque $L \in \ell_{p,-}$, $\sum_j^{(p,-)}$ est une sommation sur les indices $j$ tel que $x_j$ ne soit pas plus haut que $(p,-)$ et pour les variables $x_j$ de hauteur $(p,-)$, seulement sur les indices $j$ dont la variable $x_j$ précède $L$[19] pour l'ordre de $\ell_{p,p}$ ; $a_L$ contient de plus éventuellement un terme linéaire en ces mêmes variables, à coefficients rationnels en $z_k$ de ligne $<p$.

c) Lorsque $L \in \ell_{p,+}$, $\sum_j^{(p,+)}$ est le même que pour $\sum_j^{(p,-)}$,

(19) On dira encore que $x_j$ est plus basse que $L$.

mais $a_L$ contient un terme linéaire en les variables $x_j$ de même hauteur que L et qui précèdent L, avec un terme non nul en x, variable correspondant à L.

d) Lorsque $i > p$, $\sum_j^{(i,p)}$ est égal à $\sum_j^{(p,p)}$, seul $a_L$ change par adjonction d'un terme linéaire en les variables $x_j$ de colonne $\leqslant i-1$ et de ligne $\leqslant p$ et d'un terme non nul en la variable x qui correspond à L.

Les cas a et b sont désignés par le qualificatif "de type 1" et les cas c et d par celui "de type 2". Dans ce dernier cas, la forme de $\pi(L)$ traduit la substitution triangulaire de II.2.

L'action de $\exp t\,\pi(L)$ se traduit par le champs de vecteurs $D = \sum_j^{(p,i)} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Ce champs, que nous dirons de ligne p et de colonne i comme L, laisse invariant les variables plus hautes que L.

Dans le cas de type 1, on sait de plus que pour tout $x_j$ de colonne i, $a_j$ est un semi-invariant.

Ces considérations permettent de calculer facilement le groupe à un paramètre de déplacement sur la variété définie par D, que nous noterons $\gamma_D(t)$.

Soit $x = (x_j)$ (sous entendu : l'indice j varie de 1 à M).
Sur les variables $x_j$ qui sont de colonne i, la transformation est une pure translation (car $a_j$ semi-invariant, donc invariant)

$$(\gamma_D(t)x)_j = x_j + t\,a_j.$$

Sur les variables $x_j$ de colonne $> i$, le groupe n'agit pas.
Comme pour les variables $x_k$ de colonne i-1, les coefficients $a_k$ ne dépendent que des variables de colonne $> i$, $a_k(\gamma_D(t)x)$ est un polynôme en t déjà déterminé qu'on note $a_k(t)$ et on a alors

$$(\gamma_D(t).x)_k = x_k + ta_k(t) - \frac{t^2}{2!}\frac{d}{dt}a_k(t) + \frac{t^3}{3!}\frac{d^2}{dt^2}a_k(t)\dots$$

et cette même formule, toujours valable, permet de déterminer l'action de $\gamma_D(t)$ sur les variables de colonne de plus en plus petite, et finalement de calculer $\gamma_D(t)$.

On vérifie que l'on a pour tout $f \in L^2(dx)$

$$\exp t\, D\, f(x) = f(\gamma_D(t).x)$$

(on a noté $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_M$).

On calcule facilement l'action supplémentaire dûe à $a_L$.

Soit $\Phi(x,t) = \int_0^t a_L(\gamma_D(s)x)ds$. Elle vérifie $\frac{d}{dt}\Phi(x,t) = a_L(\gamma_D(t)x)$

d'où finalement

$$\boxed{\exp t(a_L+D)f(x) = e^{\Phi(x,t)} f(\gamma_D(t).x).} \qquad (20)$$

On peut vérifier par un simple calcul de dérivation, que ce groupe à un paramètre a bien pour générateur $a_L + D$.

Un cas particulier qui sert pour la suite est celui où le point $x = x^o$ annule le champs de vecteurs D. Alors $x^o$ est un point fixe pour $\gamma_D(t)$ et $\Phi(x,t)$ devient $a_L.t$ d'où

$$\exp t(a_L + D)f(x^o) = e^{a_L t} f(x^o).$$

(20) Nous noterons aussi $\gamma_D(t) = \gamma_L(t)$.

III.5. Forme générale de $\pi_z(t)$.

L'opérateur $\pi_z(t)$ est la composition des opérateurs unitaires $\exp t_L\, \pi(L)$ suivant l'ordre de $\ell$. On voit immédiatement qu'il est de la forme

$$\pi_z(t)f(x) = e^{\psi(z,x,t)}f(\gamma(t).x)$$

où $\psi(z,x,t)$ est obtenue par additions des phases partielles (sur lesquelles des $\gamma_L(t)$ agissent) et $\gamma(t).x$ est le point obtenu par action successive des groupes à un paramètre :

$$\gamma(t).x = \prod_{L\in\ell} \gamma_L(t_L).x.$$

i. Changements de repères et de paramétrages.

Pour séparer les deux types d'action : déplacement sur la variété et multiplication par une phase, nous allons faire un changement de variable (de base et de paramétrage) que nous dirons lié au point $(z^o,x^o) \in \mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^M$ fixé, vérifiant $\delta(z^o) \neq 0$.

Soit $L \in \ell_{p,i}$.

Si $L$ est du premier type, on pose $L' = L$

Si $L$ est du second type, il existe une unique combinaison $\mathbb{k}_{p-1}$-linéaire d'éléments de base $L''$ de ligne $\leqslant p$ et de premier type tel que

$$L - \sum_{L''} a_{L''} \vee L''$$

commute à $K_p$. Evaluant en $(z^o,x^o)$, on obtient

$$L' = L - \sum_{L''} a_{L''}(z^o,x^o)L'' \in \mathfrak{h}_{p,2}.$$

On dit encore que $L'$ est du second type.

Le changement de base de $\ell$ en $\ell'$ défini par $L \longrightarrow L'$, qui est lié au point $(z^o,x^o)$, définit aussitôt un changement de paramétrage de $G$ au sens de III.1. Pour tout $t' \in \mathbb{R}^{\ell'}$, posons de même

$$g'(t') = \prod_{L'\in\ell'} \exp t_{L'}.L'.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{\ell}$, il existe un unique $t' \in \mathbb{R}^{\ell'}$ tel que $g'(t') = g(t)$. La correspondance $t \longrightarrow t'$ est analytique ; en fait, elle est polynômiale et définie par

$$t' = \beta(z^o, x^o, t)$$

où $\beta$ est un polynôme en $z^o, x^o, t$, hormis un dénominateur multiple de $\delta(z^o)$.

ii. L'élément $g(t)$ s'écrivant $g'(t')$, on peut alors calculer facilement $\pi_z(g'(t'))$ au point $x^o$.

En effet, puisque tout $L'$ de type 2 induit un champs de vecteurs qui est nul en $x^o$, l'action de $\exp t_{L'}\, \pi(L')$ est simplement un changement de phase. Comme tous ces exponentielles agissent en dernier, compte tenu de l'ordre de $\ell$ (ou de $\ell'$), on a décomposé l'action de $g(t)$ en un déplacement sur l'espace des variables $x$ suivi d'une multiplication par une phase.

Compte tenu de la forme spéciale des groupes à un paramètres de déplacement, l'application

$$t'^{(1)} \longrightarrow \prod_{L' \in \ell'}^{(1)} \gamma_{L'}(t'_{L'})x^o = \gamma^{(1)}(t'^{(1)})x^o$$

définie pour $t'^{(1)}$ = partie de type 1 de $t'$ et avec $\prod_{L' \in \ell'}^{(1)}$ = produit ordonné seulement sur les composantes de type 1,

est un difféomorphisme quel que soit $x^o$ vérifiant $\delta(x^o) \neq 0$. Comme chaque $\exp t_{L'}\, \pi(L')$ pour $L'$ de type (2) introduit en plus un facteur, le résultat final s'écrit

$$\boxed{\pi_{z^o}(g(t)).f(x^o) = e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'}.t'_{L'} + \Phi_1} \, f(\gamma^{(1)}(t'^{(1)})x^o)}$$

où $\Sigma_{L'}^{(2)}$ est une sommation seulement sur les $L'$ de type 2 et $\Phi_1$ est la phase provenant des $\exp t_{L'}\, \pi(L')$ de type 1.

Les fonctions qui interviennent ici sont toutes polynômiales en $z^0, x^0, t$, hormis un dénominateur multiple de $\delta(z^0)$.

Remarquons enfin que $\gamma^1(t'^{(1)})x^0 = \gamma(t).x$ traduit l'action de $g(t)$ sur la variété $\mathbb{R}^M$.

## III.5. Preuve du Théorème.

Soit $\varphi$ une fonction $C^\infty$ à support compact sur $G$.

L'action de $\pi_{z^0}(\varphi)$ est donné par

$$\pi_{z^0}(\varphi).f(x^0) = \int_G e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'} t'_{L'} + \Phi_1} f(\gamma^{(1)}(t'^{(1)})x^0).\varphi(t)\,dt.$$

Notons $t' = (t'^{(1)}, t'^{(2)})$ en séparant les parties de type 1 et 2 et posons $y = \gamma^{(1)}(t'^{(1)})x^0$.

On fait le changement de variable

$t \longrightarrow (t, t'^{(2)})$, d'où $t = (t^{(1)}, t^{(2)})$ fonction de $(y, t'^{(2)})$ dans l'intégrale, d'où

$$\pi_{z^0}(\varphi)f(x^0) = \int_G e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'} t'_{L'} + \Phi_1} f(y)\varphi(t^{(1)}, t^{(2)}) \frac{D(t^{(1)}, t^{(2)})}{D(y, t'^{(2)})}\,dy\,dt'^{(2)}$$

et cette formule donne l'expression du noyau définissant $\pi_{z^0}(\varphi)$.

$$K_\varphi(z^0, x^0, y) = \int e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'} t_{L'} + \Phi_1} \frac{D(t^{(1)}, t^{(2)}}{D(y, t'^{(2)})} \varphi(t^{(1)}, t^{(2)})dt'^{(2)}.$$

Les changements de variables sont analytiques hors de $\delta(z_0) = 0$ et le Jacobien aussi, car il fait au plus intervenir des dénominateurs multiples de $\delta(z^0)$.

Puisque $\varphi$ est $C^\infty$ à support compact, le noyau sera $C^\infty$ en dehors de $\delta(z^0) = 0$.

La décroissance rapide en les variables $x^0$ et $z^0$ (loin de $\delta(z^0) = 0$) provient du fait que les éléments $Q_i$ et $Z_j$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sont diagonaux dans la représentation et de "valeur propre" $\sqrt{-1}^{\,d(Q_i)} x_i$ et $\sqrt{-1}^{\,d(Z_j)} z_j$, et on obtient au moyen d'integrations par parties convenables

$$K_{Q_i\varphi}(z^o,x^o,y) = \sqrt{-1}^{\,d(Q_i)} x_i^o\, K_\varphi(z^o,x^o,y). \ \ldots$$

Revenant à l'expression initiale

$$\pi_z(\varphi)f(x) = \int_G e^{\psi(z,x,t)} f(\gamma(t)x)\varphi(t)\, dt$$

on voit que pour $x = x^o$ fixé, les points $\gamma(t)x$ pour $t$ dans le support de $\varphi$ appartiennent à un compact dépendant de $x^o$. Le noyau $K_\varphi(z^o,x^o,y)$ est donc nul si $y$ n'appartient pas à ce compact.

Donc $\pi_z(\varphi)$ est traçable et sa trace est égale à l'intégrale diagonale de son noyau.

Cette intégrale s'évalue facilement :

$$K_\varphi(z^o,x^o,x^o) = \int e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'} t'_{L'} + \Phi_1} \left.\frac{D(t^{(1)},t^{(2)})}{D(y,t'^{(2)})}\right|_{y=x^o} \varphi(t^{(1)},t^{(2)})dt'^{(2)}$$

Si l'on fait $y = x^o$, la relation $x^o = \gamma^{(1)}(t'^{(1)})x^o$ implique alors $t'^{(1)} = 0$, donc tous les opérateurs $\exp t'_{L'}\, \pi(L')$ qui sont de type 1 se réduisent à l'identité et en conséquence, $\Phi_1$, qui est la phase dûe à ces opérateurs, s'annule. Il vient ainsi

$$K_\varphi(z^o,x^o,x^o) = \int e^{\sum_{L'}^{(2)} a_{L'} t'_{L'}} \left.\frac{D(t^{(1)},t^{(2)})}{D(y,t'^{(2)})}\right|_{y=x^o} \varphi(t^{(1)},t^{(2)})dt'^{(2)}$$

et ceci n'est, à peu de chose près, qu'une transforamtion de Fourier ordinaire en les variables $t'^{(2)}$, de la fonction

$\left.\frac{D(t^{(1)},t^{(2)})}{D(y,t'^{(2)})}\right|_{y=x^o} \varphi(t^{(1)},t^{(2)})$ où $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$ sont des fonctions analytiques de $(y,t'^{(2)})$.

La forme spéciale des fonctions $a_{L'}$ a été rappelée en III.4.a) c) et d). En particulier, $a_{L'}$ est une fonction linéaire des variables de ligne la plus grande.

Pour les variables de ligne $n$, on a donc une transformation de Fourier ordinaire, d'autant plus que le jacobien et les fonctions $t^{(1)}, t^{(2)}$ ne sont pas fonctions de ces variables. En prenant l'intégrale sur les $dx_i$ pour $x_i$ de ligne $n$ on peut donc utiliser les théorèmes de transformation de Fourier ordinaire, ce qui donnera la valeur de $\varphi$ aux points $t$ avec les paramètres de ligne $n$ nuls. On se ramène alors au même problème avec le groupe nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{n-1,2}$ ce qui permet de terminer la démonstration par une récurrence sur l'indice de ligne.

Le facteur $(2\pi)^{M+R}$ provient des formules d'inversion de Fourier classiques et le jacobien disparait à cause des changements de variables du type $a_L' = D_L^{-1}.x$ + termes correctifs plus bas où $x$ correspond à $L$ par la formule (4) où $D_L$ est le facteur semi-invariant que l'on a dû introduire. Le produit des $D_L$ figure dans $\delta$ par construction et son inverse apparaît dans le jacobien, ce qui permet justement de retrouver la formule d'inversion.

Les autres facteurs du jacobien correspondent au changement de variable $t'^{(1)} \longrightarrow y$ et se retrouvent dans $\delta$.

## REFERENCES

[2] NGHIEM-XUAN-HAI.
Algèbre de Heisenberg et Géométrie Symplectique des algèbres de Lie.
Publ. Math. Orsay n° 78.08 (1978).

[3] NGHIEM-XUAN-HAI.
Sur certaines représentations d'une algèbre de Lie résoluble complexe II. Publ. Math. Orsay n° 213.76-63 (1976).

[4] L. PUKANSZKY.
Unitary representations of Solvable Lie Groups.
Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. $4^e$ Serie, t.4, 1971, p.457-608.

[5] L. PUKANSZKY.
Leçons sur les représentations des groupes.
Dunod. Paris 1967.

N° D'IMPRESSION 381
$4^e$ TRIMESTRE 1979