

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91-ORSAY (FRANCE)

N° 48

Publication

"UNE APPLICATION DE LA DUALITÉ AU  
CONTRÔLE OPTIMAL : CONTRAINTE PORTANT  
SUR LE CONTRÔLE ET SUR L'ÉTAT"

J. MOSSINO

Orsay, année universitaire 1973-1974.

UNE APPLICATION DE LA DUALITE AU CONTRÔLE OPTIMAL ;  
CONTRAİNTE PORTANT SUR LE CONTRÔLE ET SUR L'ETAT.

---

J. MOSSINO

---

Nous étudions ici quelques problèmes de contrôle optimal comportant des contraintes sur le contrôle et sur l'état. Cela est décrit dans un cadre relativement général qui englobe les systèmes dont l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles linéaire.

Nous transformons chacun de ces problèmes (dit problème de contrôle primal) par dualité, selon le formalisme de Fenchel et Rockafellar [7]. Cela conduit en général à un autre problème de contrôle (problème de contrôle dual) ou, dans certains cas limites, à un simple problème d'optimisation.

Du fait des contraintes sur l'état, le problème de contrôle primal n'est pas simple à approcher numériquement. Par contre le problème de contrôle dual est souvent un problème sans contrainte sur l'état; et de ce fait son approximation est plus aisée. Utilisant les relations primal-dual de la théorie de la dualité, nous en déduisons une approximation de la solution du problème primal.

Nous décrivons un algorithme se rattachant à ce point de vue : c'est un algorithme d' Uzawa au niveau dual, dont la convergence est classique ; nous donnons sa signification pour le problème primal et nous obtenons ainsi une approximation numérique de ce problème.

- Plan :
- §.1. Énoncé du problème primal  $\mathcal{P}$
  - §.2. Le problème dual  $\mathcal{P}^*$  ; les relations entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  (cas  $\nu > 0$ )
  - §.3. Le cas  $\nu = 0$
  - §.4. Un procédé d'approximation du contrôle optimal (avec  $\nu > 0$ )

---

§.1. Énoncé du problème de contrôle primal (problème  $\mathcal{P}$ ).

Le problème  $\mathcal{P}$  est un problème de contrôle que nous formulons de la manière suivante :

- L'état  $y(v)$  dépend de façon affine continue du contrôle :

$$y(v) = \mathcal{L}v + Y .$$

- On minimise la "fonction coût" :

$$J(v) = \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles :

$$K = \{v \in \mathcal{U} \mid \rho_1 v \in K_1 \text{ et } \rho_2 y(v) \in K_2\} .$$

La contrainte porte donc sur le contrôle et sur l'état. Dans toute la suite nous supposons  $K \neq \emptyset$  .

Précisons le cadre fonctionnel.

L'espace  $\mathcal{U}$  est l'espace de Hilbert des contrôles ;  $W$  est l'espace de Hilbert des états ;  $\mathcal{H}$  est l'espace de Hilbert des observations. Soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deux espaces de Hilbert. Tous ces espaces sont supposés réels.

L'application  $\mathcal{L}$  est linéaire continue de  $\mathcal{U}$  dans  $W$ . On note  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, W)$ .  
On suppose :  $C \in \mathcal{L}(W, \mathcal{H})$  ;  $\rho_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \Phi_1)$  ;  $\rho_2 \in \mathcal{L}(W, \Phi_2)$ .

L'ensemble  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) est un sous-ensemble convexe fermé (éventuellement borné) non vide de  $\Phi_1$  (resp.  $\Phi_2$ ) ; l'hypothèse  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) borné dans  $\Phi_1$  (resp.  $\Phi_2$ ) n'intervenant que dans la partie numérique de ce travail.

L'introduction de l'ensemble  $K_1$  n'exclue pas, bien sûr, le cas où la contrainte ne porte que sur l'état : il suffit alors de poser  $\Phi_1 = \mathcal{U}$  et  $K_1 = \{0\}$ ,  $\rho_1$  étant l'application nulle de  $\mathcal{U}$  dans lui-même.

Voici un premier exemple de problème de contrôle entrant dans le cadre précédent :

Exemple 1.

- L'état  $y(v)$  est la solution de :

$$\begin{cases} y - \Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné "régulier" de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

- Le problème de minimisation est :

$$\inf_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v)^2 dx \right\}$$

où  $K = \{v \in L^2(\Omega) \mid |\text{grad } y(v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ .

On vérifie que  $K \neq \emptyset$  (car il contient  $-f$ ) et que ce problème de contrôle rentre dans le cadre général défini ci-dessus.

§.2. Le problème dual  $\mathcal{F}^*$  ; les relations entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^*$  (cas  $\nu > 0$ )..

2.1. Le problème dual  $\mathcal{F}^*$  :

Nous allons définir par dualité selon le formalisme de Fenchel et Rockafellar [7] un problème de contrôle  $\mathcal{F}^*$  qui sera plus simple que  $\mathcal{F}$  car la contrainte

portera sur le contrôle seulement.

Notons que l'on peut énoncer  $\mathcal{P}$  sous une forme équivalente où l'état dépend de façon linéaire (et non plus affine) du contrôle :

-  $z(v) = \mathcal{L}v$  est l'équation d'état.

- Le problème de minimisation est :

$$\inf_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \|Cz(v) + CY - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 \right\}$$

où  $K = \{v \in \mathcal{U} \mid \rho_1 v \in K_1 \text{ et } \rho_2 z(v) + \rho_2 Y \in K_2\}$ .

La fonctionnelle à minimiser est :

$$J(v) = \frac{1}{2} \|Cz(v) + CY - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 .$$

Soit  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(v) = \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2$ ; et soit

$G : P = \phi_1 \times \phi_2 \times \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  définie par :

$$G(p) = G_1(p_1) + G_2(p_2) + G_3(p_3)$$

avec :

$$G_1(p_1) = \chi_{K_1}(p_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 \in K_1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(on dit que  $\chi_{K_1}$  est la fonction indicatrice de  $K_1$ )

$$G_2(p_2) = \chi_{K_2}(p_2 + \rho_2 Y)$$

$$G_3(p_3) = \frac{1}{2} \|p_3 + CY - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

On définit  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, P)$  par

$$Lv = (\rho_1 v, \rho_2 \mathcal{L}v, \mathcal{L}v) .$$

On vérifie que le problème de minimisation (que l'on notera souvent  $\text{Inf } \mathcal{P}$ ) s'écrit

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} \{F(v) + G(Lv)\}$$

et que  $F$  (resp.  $G$ ), est convexe s.c.i. sur  $\mathcal{U}$  (resp.  $P$ ) .

Soit alors  $F^*$  (resp.  $G^*$ ) la fonctionnelle conjuguée [7] de  $F$  (resp.  $G$ ), qui est convexe s.c.i. sur  $\mathcal{U}^*$  (resp.  $P^*$ ) . Le problème dual de  $\mathcal{P}$  au sens de Fenchel et Rockafellar s'écrit en désignant par  $L^*$  l'opérateur adjoint de  $L$  :

$$\text{Sup}_{p^* \in P^*} \{-F^*(L^*p^*) - G^*(-p^*)\} \quad (\text{cf. [7]})$$

(on notera souvent  $\text{Sup } \mathcal{P}^*$ ) .

Le lemme suivant, de vérification immédiate, permet de préciser la forme de  $L^*$ ,  $F^*$  et  $G^*$  dans le contexte ci-dessus :

Lemme 2.1.  $L^*p^* = \rho_1^* p_1^* + \mathcal{L}^*(\rho_2^* p_2^* + \mathcal{C}^* p_3^*)$

$$F^*(L^*p^*) = \frac{1}{2\nu} \|L^*p^*\|_{\mathcal{U}^*}^2$$

$$G^*(p^*) = \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{H}^*}^2 - \langle p_3^*, \mathcal{C}Y - z_d \rangle - \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle + \mathcal{A}_{K_1}(p_1^*) + \mathcal{A}_{K_2}(p_2^*)$$

où  $\mathcal{A}_{K_i}$  ( $i=1$  ou  $2$ ) désigne la fonction d'appui de  $K_i$

$$(\mathcal{A}_{K_i}(p_i^*)) = \text{Sup}_{p_i \in K_i} \langle p_i^*, p_i \rangle \quad (1).$$

On peut alors expliciter le problème  $\mathcal{P}^*$ .

Proposition 2.1. Le problème  $\mathcal{P}^*$  est un problème de contrôle, le contrôle est  $p^* \in P^* = \phi_1^* \times \phi_2^* \times \mathcal{H}^*$ , et l'on doit maximiser sur  $P^*$  la "fonction coût" :

$$-\frac{1}{2\nu} \|L^*p^*\|_{\mathcal{U}^*}^2 - \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{H}^*}^2 - \langle p_3^*, \mathcal{C}Y - z_d \rangle - \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle - \mathcal{A}_{K_1}(-p_1^*) - \mathcal{A}_{K_2}(-p_2^*)$$

---

(1) Les crochets sont des crochets de dualité (Les espaces qui interviennent sont bien évidents).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{où } L^* p^* = \rho_1^* p_1^* + \mathcal{L}^*(\rho_2^* p_2^* + G^* p_3^*) . \end{array} \right.$$

Cela appelle deux remarques :

1) La maximisation porte bien sur une fonction concave, mais "en général" ni strictement concave ni coercive.

Donc "en général" on n'est assuré ni de l'existence ni de l'unicité d'une solution pour  $\mathcal{G}^*$ .

De plus la fonction à maximiser n'est "en général" pas différentiable, les fonctions  $\mathcal{K}_{K_i}$  n'étant "en général" pas différentiables.

2) L'existence de contraintes pour le problème de contrôle  $\mathcal{G}^*$  ne peut se produire que si la "fonction coût" prend des valeurs infinies. Par suite les contraintes éventuelles ne portent que sur le contrôle  $p^*$ , l'ensemble des  $p^*$  admissibles étant :

$$\{p^* \in P^* \mid \mathcal{K}_{K_1}(-p_1^*) < +\infty \text{ et } \mathcal{K}_{K_2}(-p_2^*) < +\infty\}.$$

Et nous remarquons que sous l'hypothèse  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) borné dans  $\Phi_1$  (resp.  $\Phi_2$ ) le problème  $\mathcal{G}^*$  est sans contrainte (car  $\mathcal{K}_{K_i}(-p_i^*) \leq \text{Sup}_{p_i^* \in K_i} \|p_i^*\| \|p_i\| < +\infty$  pour tout  $p_i^* \in \Phi_i^*$  ( $i=1$  ou  $2$ )).

Du point de vue numérique ce résultat est intéressant et nous l'exploiterons au §.4.

Exemples. Nous donnons deux exemples avec calcul explicite du problème  $\mathcal{G}^*$  pour lesquels la "fonction coût" de  $\mathcal{G}^*$  n'est ni strictement concave, ni coercive, ni différentiable. Elle se prête cependant à l'approximation numérique du §.4. Puis nous montrons à titre d'exemple qu'elle est coercive et strictement concave dans le cas particulier où il n'y a pas de contrainte sur l'état et où la contrainte sur le contrôle est donnée de façon explicite ( $v \in K_1$ ).

1) Reprenons l'exemple 1 du §.1 : le problème primal est un problème de contrôle

optimal d'un système distribué (contrôle, observation et contrainte distribués).

On pose :  $\mathcal{U} = L^2(\Omega)$  ;  $W = H_0^1(\Omega)$  ;  $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$  ;  $\phi_1 = L^2(\Omega)$  ;  $\phi_2 = L^2(\Omega)^N$  . L'application  $\mathcal{C}$  est l'injection canonique de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  ;  $\rho_1 \equiv 0$  ;  $\rho_2$  est l'application :

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega)^N \\ y & & \text{grad } y . \end{array}$$

Nous posons enfin  $K_1 = \{0\}$  et

$$K_2 = \{ \phi \in L^2(\Omega)^N \mid |\phi| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \} .$$

Dans ce cas  $L^* p^*$  est défini par :

$$\begin{aligned} \langle L^* p^*, v \rangle &= \langle p^*, Lv \rangle \\ &= \langle p_2^*, \rho_2 \mathcal{L}v \rangle + \langle p_3^*, \mathcal{C} \mathcal{L}v \rangle \\ &= \int_{\Omega} p_2^* \cdot \text{Grad } z(v) \, dx + \int_{\Omega} p_3^* z(v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (p_3^* - \text{div } p_2^*) z(v) \, dx \end{aligned}$$

(car  $z(v)$  est nul sur  $\partial\Omega$ ) .

Soit alors  $w(p^*)$  la solution de :

$$\begin{cases} w - \Delta w = p_3^* - \text{div } p_2^* & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Il vient

$$\int_{\Omega} (p_3^* - \text{div } p_2^*) z(v) \, dx = \int_{\Omega} (w - \Delta w) z(v) \, dx = \int_{\Omega} (z(v) - \Delta z(v)) w \, dx$$

(car  $z(v)$  et  $w$  sont nuls sur  $\partial\Omega$ )

$$= \int_{\Omega} v w \, dx .$$

D'où  $\int_{\Omega} (L^* p^*) v \, dx = \int_{\Omega} w(p^*) v \, dx$  ,  $\forall v \in L^2(\Omega)$  et par suite :

$$L^* p^* = w(p^*) .$$

On obtient immédiatement  $\mathcal{A}_{K_1}^* (-p_1^*) = 0$  et

$$j_{K_2}^*(-p_2^*) = \sup_{p_2 \in K_2} \langle -p_2^*, p_2 \rangle = \sup_{\substack{p_2 \in L^2(\Omega)^N \\ |p_2| \leq 1 \text{ p.p.}}} \int_{\Omega} -p_2^* \cdot p_2 \, dx = \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx .$$

Par suite la "fonction coût" du problème dual est :

$$-\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w(p^*))^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 \, dx - \int_{\Omega} p_3^* (Y - z_d) \, dx - \int_{\Omega} p_2^* \cdot \text{grad } Y \, dx - \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx .$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } - \int_{\Omega} p_3^* Y \, dx - \int_{\Omega} p_2^* \cdot \text{grad } Y \, dx &= - \int_{\Omega} (p_3^* - \text{div } p_2^*) Y \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (w(p^*) - \Delta w(p^*)) Y \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (Y - \Delta Y) w(p^*) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} f w(p^*) \, dx . \end{aligned}$$

En reportant cela dans l'expression de la "fonction coût" on trouve :

$$-\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w(p^*) + \nu f)^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 \, dx + \int_{\Omega} p_3^* z_d \, dx - \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (f)^2 \, dx .$$

Et nous obtenons :

Le problème  $\mathcal{G}^*$  est le problème de contrôle où  $w(p^*)$  est l'état, donné par :

$$\begin{cases} w - \Delta w = p_3^* - \text{div } p_2^* & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Le problème de maximisation est à une constante près :

$$\sup_{\substack{(p_2^*, p_3^*) \\ \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)}} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w(p^*) + \nu f)^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 \, dx + \int_{\Omega} p_3^* z_d \, dx - \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx \right\}$$

Nous remarquons sur cet exemple que la fonction coût de  $\mathcal{G}^*$  n'est ni strictement concave, ni coercive ni différentiable. Cependant  $\mathcal{G}^*$  est sans contrainte et l'on montrera au §.4 que l'introduction de  $\mathcal{G}^*$  fournit un procédé d'approximation numérique pour  $\mathcal{G}$ .

## 2) Exemple 2.

Le problème primal est un problème à contrôle frontière, observation finale et

contrainte finale sur l'état :

- L'état  $y(v)$  est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[ , \Omega \text{ ouvert borné "régulier" de } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial y}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \times ]0, T[ \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$(y_0 \in L^2(\Omega) \text{ et } f \in L^2(Q)) .$

- Le problème de minimisation est :

$$\text{Inf}_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, T; v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Gamma} (v)^2 d\Gamma \right\}$$

où  $K = \{v \in L^2(\Gamma) \mid |y(T; v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} .$

On suppose que  $K \neq \emptyset$  et l'on pose :

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma); \quad W = \{y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \mid \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega^*))\};$$

$$\mathcal{X} = L^2(\Omega); \quad \phi_1 = L^2(\Gamma) ; \quad \phi_2 = L^2(\Omega) . \text{ L'application } C \text{ est définie par}$$

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ y & & y(T) . \end{array}$$

On prend  $\rho_1 \equiv 0$  , et  $\rho_2 \equiv C$  . Enfin on pose :  $K_1 = \{0\}$  et

$$K_2 = \{\phi \in L^2(\Omega) \mid |\phi| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} .$$

L'application  $L^*$  est alors donnée par

$$\langle L^* p^*, v \rangle_{\Sigma} = \langle p^*, Lv \rangle = \langle p_2^*, \rho_2 \mathcal{L}v \rangle + \langle p_3^*, C \mathcal{L}v \rangle = \int_{\Omega} (p_2^* + p_3^*) z(T; v) dx .$$

Soit  $w(p^*)$  la solution de

$$\begin{cases} - \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans } Q \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ w(T) = p_2^* + p_3^* & \text{dans } \Omega . \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_Q \left( -\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \right) z(v) \, dx \, dt = \int_Q \left( \frac{\partial z(v)}{\partial t} - \Delta z(v) \right) w \, dx \, dt - \int_{\Omega} w(T) z(T;v) \, dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} w(0) z(0;v) \, dx - \int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial n} z(v) \, d\Sigma + \int_{\Sigma} w \frac{\partial z(v)}{\partial n} \, d\Sigma \\
 &= - \int_{\Omega} (p_2^* + p_3^*) z(T;v) \, dx + \int_{\Sigma} w v \, d\Sigma .
 \end{aligned}$$

Donc  $\int_{\Sigma} (L^* p^*) v \, d\Sigma = \int_{\Sigma} w v \, d\Sigma$  ,  $\forall v \in L^2(\Sigma)$

et par suite :

$$L^* p^* = w(p^*)|_{\Sigma} .$$

Nous avons encore :  $\mathcal{J}_{K_1}(-p_1^*) = 0$  tandis que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{K_2}(-p_2^*) &= \sup_{p_2 \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} -p_2^* p_2 \, dx = \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx . \\
 |p_2| &\leq 1 \text{ p.p.}
 \end{aligned}$$

La fonction coût est donc :

$$-\frac{1}{2v} \int_{\Sigma} (w(p^*))^2 \, d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 \, dx - \int_{\Omega} p_3^* (Y(T) - z_d) \, dx - \int_{\Omega} p_2^* Y(T) \, dx - \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx$$

Et par suite :

Le problème  $\mathcal{P}^*$  est le problème de contrôle où

- L'état  $w(p^*)$  est la solution de :

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans } Q \\
 \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\
 w(T) = p_2^* + p_3^* & \text{dans } \Omega .
 \end{cases}$$

- Le problème de maximisation est :

$$\begin{aligned}
 &\sup_{(p_2^*, p_3^*)} \left\{ -\frac{1}{2v} \int_{\Sigma} (w(p^*))^2 \, d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 \, dx - \int_{\Omega} p_3^* (Y(T) - z_d) \, dx \right. \\
 &\left. \in L^2(Q) \times L^2(\Omega) \quad - \int_{\Omega} p_2^* Y(T) \, dx - \int_{\Omega} |p_2^*| \, dx \right\} .
 \end{aligned}$$

Et la remarque faite à l'exemple 1 sur la "fonction coût" de  $\mathcal{P}^*$  est encore valable ici.

3) Montrons que lorsque la contrainte ne porte que sur le contrôle pour le problème primal, et s'écrit  $v \in K_1$ , la "fonction coût" de  $\mathcal{P}^*$  est coercive et strictement concave, ce qui entraîne alors pour  $\mathcal{P}^*$  l'existence d'une solution unique.

On pose dans ce cas :  $\phi_1 = \mathcal{U}$  ;  $\rho_1 = \text{Id}$  ;  $\phi_2 = W$  ;  $\rho_2 \equiv 0$  ;  $K_2 = \{0\}$  .

Il vient :  $L^* p^* = p_1^* + \mathcal{L}^* C^* p_3^*$  .

Et le problème de maximisation de  $\mathcal{P}^*$  s'écrit alors :

$$\text{Sup}_{\substack{(p_1^*, p_3^*) \\ \in \mathcal{U}^* \times \mathcal{H}^*}} \left\{ -\frac{1}{2v} \|p_1^*\|^2 + \mathcal{L}^* C^* p_3^* \right\}_{\mathcal{U}^*}^2 - \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{H}^*}^2 - \langle p_3^*, Cy - z_d \rangle - \mathcal{A}_{K_1}(-p_1^*) \}$$

et il est facile de montrer que la fonction à maximiser est coercive et strictement concave.

2.2. Les relations entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  (cas  $v > 0$ ) .

Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  sont liés de la façon suivante

Théorème 2.2. 1°) Le problème  $\mathcal{P}$  admet une solution unique (c'est-à-dire un contrôle optimal unique)  $\bar{v} \in K$  .

2°) Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  ont le même extrémum (nous écrivons  $\text{Inf } \mathcal{P} = \text{Sup } \mathcal{P}^*$ ) .

3°) Si  $\mathcal{P}^*$  possède une solution (soit  $\bar{p}^*$ ) elle est liée à la solution  $\bar{v}$  de  $\mathcal{P}$  par les relations dites d'extrémalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} v\bar{v} - \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* \bar{p}^* = 0 \\ \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} \rangle = \text{Inf}_{p_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, p_1 \rangle \\ \langle \bar{p}_2^*, \rho_2 y(\bar{v}) \rangle = \text{Inf}_{p_2 \in K_2} \langle \bar{p}_2^*, p_2 \rangle \\ Cy(\bar{v}) - z_d + \Lambda_{\mathcal{H}}^{-1} \bar{p}_3^* = 0 \end{array} \right.$$

(où  $\Lambda_{\mathcal{U}}$  désigne l'isomorphisme canonique  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$ , de même pour  $\Lambda_{\mathcal{P}}$ ).

Réciproquement si  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$  vérifient ces relations  $\bar{v}$  est la solution de  $\mathcal{P}$  et  $\bar{p}^*$  est solution de  $\mathcal{P}^*$ .

Démonstration : Le résultat du 1°) est classique [4]. Pour les points 2°) et 3°) notre démonstration utilise un résultat général de Rockafellar [7] que nous rappelons :

Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  étant notés respectivement :

$$\text{Inf}_{v \in \mathcal{U}} \{F(v) + G(Lv)\} \quad \text{et} \quad \text{Sup}_{p^* \in P^*} \{-F^*(L^* p^*) - G^*(-p^*)\}$$

où  $F$  et  $G$  sont convexes s.c.i. propres, il est établi en [7] que

A) Si  $\text{Inf } \mathcal{P} > -\infty$  et s'il existe  $v_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $F(v_0) < +\infty$  et  $G$  continue en  $Lv_0$ , alors :

- (i) Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  ont le même extremum
- (ii)  $\mathcal{P}^*$  admet une solution au moins.

B) Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  possèdent les solutions respectives  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$ , l'égalité  $\text{Inf } \mathcal{P} = \text{Sup } \mathcal{P}^*$  est équivalente à

$$\begin{cases} F(\bar{v}) + F^*(L^* \bar{p}^*) = \langle L^* \bar{p}^*, \bar{v} \rangle \\ G(L\bar{v}) + G^*(-\bar{p}^*) = - \langle \bar{p}^*, L\bar{v} \rangle . \end{cases}$$

Réciproquement si  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$  vérifient ce système, alors :

- (i)  $\text{Inf } \mathcal{P} = \text{Sup } \mathcal{P}^*$
- (ii)  $\bar{v}$  est solution de  $\mathcal{P}$  et  $\bar{p}^*$  est solution de  $\mathcal{P}^*$ .

Dans le cas du problème de contrôle considéré ici, le critère énoncé en A) n'est pas directement applicable au niveau primal, les fonctions indicatrices pouvant n'être continues en aucun point (c'est le cas lorsque  $K_i$  est d'intérieur vide ( $i=1$  ou  $2$ )). Par contre il est applicable au niveau dual (c'est-à-dire qu'on permute en A et B les rôles de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$ ). En effet nous avons  $\text{Sup } \mathcal{P}^* < +\infty$  (car il est bien connu que  $\text{Sup } \mathcal{P}^* \leq \text{Inf } \mathcal{P}$  et, puisque  $K \neq \emptyset$ ,  $\text{Inf } \mathcal{P} < +\infty$ ) ; de plus il existe  $p_0^* \in P^*$  tel que  $G^*(-p_0^*) < +\infty$  et que  $F^*$  soit continue en  $L^* p_0^*$  (par exemple  $p_0^* = 0$ ). Les problèmes

$\mathcal{G}^*$  et  $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{P}$  (cf. [7]) ont donc le même extrémum. Et pour démontrer le point 3°) il suffit d'après B de montrer que le système :

$$\begin{cases} F(\bar{v}) + F^*(L^* \bar{p}^*) = \langle L^* \bar{p}^*, \bar{v} \rangle \\ G(L\bar{v}) + G^*(-\bar{p}^*) = - \langle \bar{p}^*, L\bar{v} \rangle \end{cases}$$

prend la forme annoncée.

Or la première de ces deux égalités s'écrit :

$$\frac{v}{2} \|\bar{v}\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2v} \|L^* \bar{p}^*\|_{\mathcal{U}^*}^2 = \langle L^* \bar{p}^*, \bar{v} \rangle$$

soit :  $v\bar{v} - \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* \bar{p}^* = 0$  .

La deuxième se divise en :

$$\begin{cases} G_1(\rho_1 \bar{v}) + G_1^*(-\bar{p}_1^*) = - \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} \rangle \\ G_2(\rho_2 \mathcal{L} \bar{v}) + G_2^*(-\bar{p}_2^*) = - \langle \bar{p}_2^*, \rho_2 \mathcal{L} \bar{v} \rangle \\ G_3(C\mathcal{L} \bar{v}) + G_3^*(-\bar{p}_3^*) = - \langle \bar{p}_3^*, C\mathcal{L} \bar{v} \rangle \end{cases}$$

et ces trois égalités s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} \rangle = \inf_{p_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, p_1 \rangle \\ \langle \bar{p}_2^*, \rho_2 \mathcal{L} \bar{v} \rangle = \inf_{p_2 \in K_2} \langle \bar{p}_2^*, p_2 \rangle \\ C\mathcal{L} \bar{v} - z_d + \Lambda_{\mathcal{Y}}^{-1} \bar{p}_3^* = 0 \end{cases}$$

Exemples. Nous reprenons les exemples du §.2.1. et nous écrivons les relations d'extrémalité pour chacun de ces exemples.

1) Exemple 1. (contrôle, observation et contraintes distribués).

Si  $\mathcal{G}^*$  possède une solution  $\bar{p}^*$  elle est liée à la solution  $\bar{v}$  de  $\mathcal{G}$  par les relations d'extrémalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} v\bar{v} - w(\bar{p}^*) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \int_{\Omega} \bar{p}_2^* \cdot (p_2 - \text{grad } y(\bar{v})) \, dx \geq 0 \quad \forall p_2 \in L^2(\Omega)^N \text{ tel que } |p_2| \leq 1 \text{ p.p.} \\ y(\bar{v}) - z_d + \bar{p}_3^* = 0 \text{ dans } \Omega . \end{array} \right.$$

Réciproquement si  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$  vérifient ces relations,  $\bar{v}$  est la solution de  $\mathcal{G}$  et  $\bar{p}^*$  est solution de  $\mathcal{G}^*$ .

2) Exemple 2. (contrôle frontière, observation finale et contrainte finale sur l'état)

La situation est identique à celle de l'exemple 1, mais les relations d'extrémalité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} v\bar{v} - w(\bar{p}^*)|_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \int_{\Omega} \bar{p}_2^* (p_2 - y(T, \bar{v})) \, dx \geq 0 \quad \forall p_2 \in L^2(\Omega) \text{ tel que } |p_2| \leq 1 \text{ p.p.} \\ y(T, \bar{v}) - z_d + \bar{p}_3^* = 0 \text{ dans } \Omega . \end{array} \right.$$

3) Reprenons le cas particulier où la contrainte ne porte que sur le contrôle et s'écrit  $v \in K_1$ . Nous avons vu au §.2.1. que dans ce cas  $\mathcal{G}^*$  admet une solution unique  $\bar{p}^*$ . Elle est liée à la solution  $\bar{v}$  de  $\mathcal{G}$  par les relations d'extrémalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} v\bar{v} - \Lambda_{\text{U}}^{-1} L^* \bar{p}^* = 0 \\ \langle \bar{p}_1^*, v - \bar{v} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_1 \\ Cy(\bar{v}) - z_d + \Lambda_{\text{Y}}^{-1} \bar{p}_3^* = 0 . \end{array} \right.$$

Réciproquement si  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$  vérifient ce système,  $\bar{v}$  est la solution de  $\mathcal{G}$  et  $\bar{p}^*$  est la solution de  $\mathcal{G}^*$ .

Montrons sur un exemple concret (mais c'est évidemment général!) qu'en éliminant  $\bar{p}^*$  entre ces relations on retrouve le système habituel contrôle-état-état adjoint (cf. [4]).

On considère le problème  $\mathcal{P}$  suivant :

- L'état  $y(v)$  est la solution de :

$$\begin{cases} y - \Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \text{ ouvert borné "régulier" de } \mathbb{R}^N \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (f \in L^2(\Omega)) .$$

- Le problème de minimisation est :

$$\text{Inf}_{v \in K_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v)^2 dx \right\}$$

où  $K_1$  est un convexe fermé de  $L^2(\Omega)$  .

Nous posons  $\mathcal{U} = L^2(\Omega) = \mathcal{K}$  et  $\mathcal{W} = H_0^1(\Omega)$  . Il vient alors

$L^* p^* = p_1^* + \chi(p_3^*)$  où  $\chi(p_3^*)$  est la solution de

$$\begin{cases} \chi - \Delta \chi = p_3^* & \text{dans } \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Et les relations d'extrémalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{v} - \bar{p}_1^* - \chi(\bar{p}_3^*) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \int_{\Omega} p_1^* (v - \bar{v}) dx \geq 0 \quad \forall v \in K_1 \\ y(\bar{v}) - z_d + \bar{p}_3^* = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

(où  $y(\bar{v})$  est la solution de :

$$\begin{cases} y - \Delta y = f + \bar{v} & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et  $\chi(\bar{p}_3^*)$  est la solution de

$$\begin{cases} \chi - \Delta \chi = \bar{p}_3^* & \text{dans } \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

En éliminant  $(\bar{p}_1^*, \bar{p}_3^*)$  entre ces relations et en posant  $\chi = -P$  pour retrouver les notations habituelles de [4] nous obtenons :

$$\begin{cases} y - \Delta y = f + \bar{v} & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ P - \Delta P = y - z_d & \text{dans } \Omega \\ P = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} (P + v\bar{v})(v - \bar{v}) dx \geq 0 \quad \forall v \in K_1 \end{cases}$$

ce qui est bien le système classique contrôle-état-état adjoint, et nous retrouvons ainsi que  $\bar{v}$  est solution de ce système si et seulement si il est contrôle optimal du problème primal.

§.3. Le cas  $v = 0$  .

Nous faisons maintenant  $v = 0$  dans l'énoncé du problème  $\mathcal{P}$  donné au §.1., c'est-à-dire :

- L'état  $y(v)$  dépend de façon affine continue du contrôle

$$y(v) = \mathcal{L}v + Y .$$

- On minimise la "fonction coût" :

$$J(v) = \frac{1}{2} \| Cy(v) - z_d \|_{\mathcal{H}}^2$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles :

$$K = \{v \in \mathcal{U} \mid \rho_1 v \in K_1 \text{ et } \rho_2 y(v) \in K_2\} .$$

La signification des notations reste celle indiquée au §.1., et nous supposons toujours  $K \neq \emptyset$  .

3.1. Le problème dual  $\mathcal{P}^*$  :

Nous procédons comme dans le cas  $v > 0$  , cependant nous avons maintenant  $F \equiv 0$  ,  $G$  et  $L$  étant inchangés. Alors  $G^*$  et  $L^*$  sont définis au lemme 2.1. tandis que :

$$F^*(L^* p^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } L^* p^* = 0 \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

Et nous pouvons alors expliciter le problème  $\mathcal{P}^*$  .

Proposition 3.1. Le problème  $\mathcal{P}^*$  est le problème de maximisation :

$$\begin{aligned} & \text{Sup}_{p^* \in P^* = \Phi_1^* \times \Phi_2^* \times \mathcal{H}^*} \left\{ -\frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{H}^*}^2 - \langle p_3^*, Cy - z_d \rangle - \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle - \mathcal{I}_{K_1}(-p_1^*) - \mathcal{I}_{K_2}(-p_2^*) \right\} \\ & L^* p^* = 0 \end{aligned}$$

$$\lfloor \text{ où } L^* p^* = \rho_1^* p_1^* + \mathcal{L}^*(\rho_2^* p_2^* + C^* p_3^*) .$$

Cela appelle trois remarques a priori :

1°) Régulariser le problème primal c'est-à-dire rajouter à la fonction coût du problème primal le terme  $\frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2$  revient à pénaliser le problème dual (la contrainte  $L^* p^* = 0$  disparaît alors et il s'introduit le terme supplémentaire de pénalisation  $-\frac{1}{2\nu} \|L^* p^*\|_{\mathcal{U}^*}^2$  ) .

2°) Comme au §.2 la "fonction coût" du problème dual est concave mais "en général" pas strictement concave, pas coercive et pas différentiable ; donc "en général" on n'est assuré ni de l'existence ni de l'unicité d'une solution pour  $\mathcal{P}^*$  .

3°) Le problème  $\mathcal{P}^*$  est toujours un problème avec contrainte, l'ensemble des  $p^*$  admissibles étant

$$\{p^* \in P^* \mid \mathcal{K}_{K_1}(-p_1^*) < +\infty ; \mathcal{K}_{K_2}(-p_2^*) < +\infty \text{ et } L^* p^* = 0\} .$$

Cependant cette dernière contrainte ( $L^* p^* = 0$ ) s'exprime souvent très simplement, de sorte que souvent  $\mathcal{P}^*$  n'est pas un problème de contrôle optimal mais un simple problème d'optimisation. Cela est illustré par les exemples qui suivent.

### Exemples.

1) Reprenons l'exemple 1 (contrôle d'un système distribué) en faisant maintenant  $\nu = 0$  .

Nous avons vu que  $L^* p^* = w(p^*)$  où  $w(p^*)$  est la solution de

$$\begin{cases} w - \Delta w = p_3^* - \operatorname{div} p_2^* & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

La contrainte  $L^* p^* = 0$  s'explique alors directement en fonction du contrôle  $p^*$  et s'écrit :

$$p_3^* - \operatorname{div} p_2^* = 0 .$$

Le problème  $\mathcal{P}^*$  est alors un simple problème de maximisation :

$$\begin{aligned} & \text{Sup}_{(p_2^*, p_3^*)} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 dx + \int_{\Omega} p_3^* z_d dx - \int_{\Omega} |p_2^*| dx \right\} \\ & \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \\ & p_3^* - \text{div } p_2^* = 0 \end{aligned}$$

2) Faisons aussi  $v = 0$  dans l'exemple 2 (contrôle frontière, observation finale et contrainte finale sur l'état).

Nous savons que  $L^* p^* = w(p^*)|_{\Sigma}$  où  $w(p^*)$  est la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 \text{ dans } Q \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ w(T) = p_2^* + p_3^* \text{ dans } \Omega . \end{array} \right.$$

Et la condition  $w(p^*)|_{\Sigma} = 0$  est équivalente à  $w(p^*) = 0$  donc à  $p_2^* + p_3^* = 0$  (cf. [4]).

Le problème  $\mathcal{G}^*$  se réduit alors au problème de maximisation :

$$\begin{aligned} & \text{Sup}_{(p_2^*, p_3^*)} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 dx + \int_{\Omega} p_3^* z_d dx - \int_{\Omega} |p_2^*| dx \right\} \\ & \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ & p_2^* + p_3^* = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\text{Sup}_{p^* \in L^2(\Omega)} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (p^*)^2 dx + \int_{\Omega} p^* z_d dx - \int_{\Omega} |p^*| dx \right\} .$$

3) Montrons toutefois sur un exemple que, lorsque  $v = 0$ , il peut arriver que le problème  $\mathcal{G}^*$  comporte, comme le problème  $\mathcal{G}$ , une contrainte sur l'état (et dans ce cas il ne paraît pas très intéressant de l'introduire!).

Considérons en effet le cas d'un problème  $\mathcal{G}$  à contrôle frontière, observation et contrainte sur l'état distribuées :

- L'état  $y(v)$  est la solution de

$$\begin{cases} y - \Delta y = f & \text{dans } \Omega, \text{ ouvert borné "régulier" de } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial y}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

( $f \in L^2(\Omega)$ ) .

- Le problème de minimisation est :

$$\inf_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{v}{2} \int_{\Gamma} (v)^2 d\Gamma \right\}$$

où  $K = \{v \in L^2(\Gamma) \mid |\text{Grad } y(v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}$  .

On pose ici  $\mathcal{U} = L^2(\Gamma)$  ;  $W = H^1(\Omega)$  ;  $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$  ;  $\phi_1 = L^2(\Gamma)$  ;  $\phi_2 = L^2(\Omega)^N$  ;  
 $\mathcal{C}$  est l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  ;  $\rho_1 \equiv 0$  ;  $\rho_2$  est l'application :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega)^N \\ y & & \text{grad } y . \end{array}$$

On pose encore  $K_1 = \{0\}$  et  $K_2 = \{\phi \in L^2(\Omega)^N \mid |\phi| \leq 1 \text{ p.p.}\}$ .

Dans ce cas  $L^* p^*$  est défini par :

$$\begin{aligned} \langle L^* p^*, v \rangle &= \langle p^*, Lv \rangle = \int_{\Omega} p_2^* \cdot \text{Grad } z(v) dx + \int_{\Omega} p_3^* z(v) dx \\ &= \int_{\Omega} (p_3^* - \text{div } p_2^*) z(v) dx + \int_{\Gamma} z(v) p_2^* \cdot n dx \end{aligned}$$

(formellement).

Soit  $w(p^*)$  la solution du système formel :

$$\begin{cases} w - \Delta w = p_3^* - \text{div } p_2^* & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = p_2^* \cdot n & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (p_3^* - \text{div } p_2^*) z(v) dx + \int_{\Gamma} z(v) p_2^* \cdot n d\Gamma &= \int_{\Omega} (w - \Delta w) z dx + \int_{\Gamma} z \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (z - \Delta z) w dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} z d\Gamma + \int_{\Gamma} w \frac{\partial z}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} z \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial z}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} w v d\Gamma . \end{aligned}$$

Donc  $L^* p^* = w(p^*)|_{\Gamma}$  .

La condition  $L^* p^* = 0$  est alors équivalente à  $w(p^*)|_{\Gamma} = 0$  et ne se simplifie pas

davantage, de sorte que  $\mathcal{G}^*$  est le problème de contrôle optimal où :

$$\left[ \begin{array}{l} - \text{L'état } w(p^*) \text{ est la solution du système formel} \\ \left\{ \begin{array}{l} w - \Delta w = p_3^* - \operatorname{div} p_2^* \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = p_2^* \cdot n \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \\ - \text{Le problème de maximisation est :} \\ \operatorname{Sup}_{\substack{(p_2^*, p_3^*) \\ \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \\ w(p^*)|_{\Gamma} = 0}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3^*)^2 dx - \int_{\Omega} p_3^* (Y - z_d) dx - \int_{\Omega} p_2^* \cdot \operatorname{Grad} Y dx - \int_{\Omega} |p_2^*| dx \right\} \end{array} \right.$$

C'est donc encore un problème de contrôle optimal à contraintes sur l'état, l'ensemble des contrôles admissibles étant :

$\{p^* \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \text{ tels que la solution de}$

$$\left\{ \begin{array}{l} w - \Delta w = p_3^* - \operatorname{div} p_2^* \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = p_2^* \cdot n \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

appartienne à  $H_0^1(\Omega)$  et non seulement à  $H^1(\Omega)$ , ensemble non vide car il contient  $(0,0)$ .

### 3.2. Les relations entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ (cas $v = 0$ ).

Nous obtenons encore l'égalité des extrêma de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^*$  - ce qui fournit des relations primal-dual analogues à celles obtenues pour  $v > 0$  - en faisant une hypothèse supplémentaire :

Théorème 3.2. On fait l'hypothèse supplémentaire H :

Si  $v_n$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{U}$  qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cy(v_n) \text{ borné dans } \mathcal{K} \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ d(\rho_1 v_n, K_1) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ d(\rho_2 y(v_n), K_2) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

alors  $v_n$  est bornée dans  $\mathcal{U}$ .

(On note indifféremment par  $d$  les distances dans  $\phi_1$  et  $\phi_2$ ).

Moyennant cette hypothèse :

- 1) Le problème  $\mathcal{P}$  admet une solution au moins  $\bar{v} \in K$ .
- 2) Les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  ont le même extrémum.
- 3) Si  $\mathcal{P}^*$  possède une solution (soit  $\bar{p}^*$ ) elle est liée à toute solution  $\bar{v}$  de  $\mathcal{P}$  par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^* \bar{p}^* = 0 \\ \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} \rangle = \inf_{p_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, p_1 \rangle \\ \langle \bar{p}_2^*, \rho_2 y(\bar{v}) \rangle = \inf_{p_2 \in K_2} \langle \bar{p}_2^*, p_2 \rangle \\ Cy(\bar{v}) - z_d + \Lambda_{\mathcal{H}}^{-1} \bar{p}_3^* = 0 . \end{array} \right.$$

Réciproquement si  $\bar{v}$  et  $\bar{p}^*$  vérifient ces relations  $\bar{v}$  est solution de  $\mathcal{P}$  et  $\bar{p}^*$  est solution de  $\mathcal{P}^*$ .

Démonstration : Le point 1) est immédiat grâce à l'hypothèse H, assurant que toute suite minimisante pour  $\mathcal{P}$  est bornée, et à la semi-continuité inférieure faible de la fonction coût de  $\mathcal{P}$ .

Une fois établie l'égalité des extrêma de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$ , le point 3) s'obtient exactement comme au §.2. Il nous reste donc à établir l'égalité des extrêma de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$ .

Or elle ne peut pas se démontrer comme dans le cas  $v > 0$  car  $F^*$  est définie par :

$$F^*(v^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } v^* = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et n'est donc continue en aucun point.

Cependant nous allons montrer que :

$$\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) = \text{Sup } \mathcal{P}^*(\varepsilon)$$

pour un problème  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  qui est une forme pénalisée de  $\mathcal{P}$  et l'égalité des extrêmes de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  en découlera par passage à la limite.

Cette démonstration nécessite cinq lemmes :

Lemme 3.2.1. : Soit  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  le problème de contrôle suivant, que nous appellerons "problème primal pénalisé" :

$$y(v) = \mathcal{A}v + Y$$

$$\text{Inf}_{v \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\text{Cy}(v) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [d(\rho_1 v, K_1)^2 + d(\rho_2 y(v), K_2)^2] \right\} \quad (\varepsilon > 0) .$$

Sous l'hypothèse H,  $\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) \rightarrow \text{Inf } \mathcal{P}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  .

Preuve : Il est immédiat que  $\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) \leq \text{Inf } \mathcal{P}$ . D'autre part, pour tout  $v \in \mathcal{U}$ , l'expression :

$$\frac{1}{2} \|\text{Cy}(v) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [d(\rho_1 v, K_1)^2 + d(\rho_2 y(v), K_2)^2]$$

croît lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; et par suite

$\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon)$  croît également, de sorte que :

$$\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) \rightarrow \ell \leq \text{Inf } \mathcal{P} .$$

Nous allons montrer que  $\ell = \text{Inf } \mathcal{P}$  .

Soit  $\alpha > 0$  fixé. Pour tout  $\varepsilon$  il existe  $v(\varepsilon) \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\frac{1}{2} \|\text{Cy}(v(\varepsilon)) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [d(\rho_1 v(\varepsilon), K_1)^2 + d(\rho_2 y(v(\varepsilon)), K_2)^2] \leq \text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) + \alpha \leq \text{Inf } \mathcal{P} + \alpha .$$

La suite  $v(\varepsilon)$  vérifie donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cy}(v(\varepsilon)) \text{ borné dans } \mathcal{H} \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \\ d(\rho_1 v(\varepsilon), K_1) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \\ d(\rho_2 y(v(\varepsilon)), K_2) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

et, grâce à l'hypothèse H, elle est bornée dans  $\mathcal{U}$  .

Nous pouvons donc en extraire une sous-suite, notée encore  $v(\varepsilon)$ , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha \text{ dans } \mathcal{U} \text{ faible} \\ \rho_1 v(\varepsilon) \rightarrow \rho_1 u_\alpha \text{ dans } \Phi_1 \text{ faible} \\ \rho_2 y(v(\varepsilon)) \rightarrow \rho_2 y(u_\alpha) \text{ dans } \Phi_2 \text{ faible} \\ Cy(v(\varepsilon)) \rightarrow Cy(u_\alpha) \text{ dans } \mathcal{K} \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Or les fonctions  $d(\cdot, K_i)$  ( $i=1$  ou  $2$ ) sont convexes continues et par suite s.c.i. pour les topologies faibles. D'où :  $0 = \underline{\lim} d(\rho_1 v(\varepsilon), K_1) \geq d(\rho_1 u_\alpha, K_1) > 0$  et donc  $\rho_1 u_\alpha \in K_1$ . De même  $\rho_2 y(u_\alpha) \in K_2$  et par suite  $u_\alpha \in K$ .

Comme nous avons

$$\frac{1}{2} \|Cy(v(\varepsilon)) - z_d\|^2 \leq \text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) + \alpha \leq \text{Inf } \mathcal{P} + \alpha$$

nous en déduisons par passage à la lim et semi-continuité inférieure faible de la fonction  $\|\cdot - z_d\|^2$  :

$$\frac{1}{2} \|Cy(u_\alpha) - z_d\|^2 \leq \ell + \alpha \leq \text{Inf } \mathcal{P} + \alpha .$$

Faisant maintenant tendre  $\alpha$  vers  $0$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} Cy(u_\alpha) \text{ borné dans } \mathcal{K} \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0 \\ d(\rho_1 u_\alpha, K_1) = 0 \\ d(\rho_2 y(u_\alpha), K_2) = 0 . \end{array} \right.$$

En utilisant encore l'hypothèse H, nous avons :

$$u_\alpha \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{U} \text{ faible}$$

d'où  $Cy(u_\alpha) \rightarrow Cy(u)$  dans  $\mathcal{K}$  faible.

Et en passant à la lim, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , dans l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \|Cy(u) - z_d\|^2 \leq \ell \leq \text{Inf } \mathcal{P} .$$

Or  $u \in K$  puisque  $u_\alpha \in K$  qui est faiblement fermé ; les inégalités sont donc

des égalités, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 3.2.2. En dualisant  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  de façon convenable, nous obtenons pour  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  le "problème dual régularisé".

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{\substack{p_1^* \in P^* \\ L^* \quad p^* = 0}} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \left[ \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 + \|p_2^*\|_{\phi_2^*}^2 \right] - \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{Y}^*}^2 - \langle p_3^*, CY - z_d \rangle - \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle \right. \\ \left. - \mathcal{A}_{K_1}(-p_1^*) - \mathcal{A}_{K_2}(-p_2^*) \right\} . \end{aligned}$$

Preuve : Nous dualisons  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  en posant :

$$F \equiv 0$$

$$G_1(p_1) = \frac{1}{2\varepsilon} d(p_1, K_1)^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \text{Inf}_{\phi_1 \in K_1} \|p_1 - \phi_1\|_{\phi_1}^2$$

et 
$$G_2(p_2) = \frac{1}{2\varepsilon} d(p_2 + \rho_2 Y, K_2)^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \text{Inf}_{\phi_2 \in K_2} \|p_2 + \rho_2 Y - \phi_2\|_{\phi_2}^2 ,$$

$G_3$  et  $L$  étant inchangés.

Nous avons alors par exemple :

$$\begin{aligned} G_1^*(p_1^*) &= \text{Sup}_{p_1 \in \phi_1} \left\{ \langle p_1^*, p_1 \rangle - \frac{1}{2\varepsilon} \text{Inf}_{\phi_1 \in K_1} \|p_1 - \phi_1\|^2 \right\} = \text{Sup}_{\substack{p_1 \in \phi_1 \\ \phi_1 \in K_1}} \left\{ \langle p_1^*, p_1 \rangle - \frac{1}{2\varepsilon} \|p_1 - \phi_1\|^2 \right\} \\ &= \text{Sup}_{\phi_1 \in K_1} \text{Sup}_{p_1 \in \phi_1} \left\{ \langle p_1^*, p_1 + \phi_1 \rangle - \frac{1}{2\varepsilon} \|p_1\|^2 \right\} = \text{Sup}_{\phi_1 \in K_1} \left\{ \langle p_1^*, \phi_1 \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 + \mathcal{A}_{K_1}(p_1^*) . \end{aligned}$$

Effectuant un calcul analogue sur  $G_2$ , nous obtenons pour  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  le problème indiqué.

Lemme 3.2.3. Les extrêmes de  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  sont égaux. Le problème  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  admet une solution  $\bar{p}^*(\varepsilon)$ .

Preuve : Le critère de Rockafellar énoncé en A dans la démonstration du théorème 2.2 est en effet directement applicable aux problèmes  $\mathcal{P}(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$ , les fonctions  $d(\cdot, K_i)$  étant continues.

[ Lemme 3.2.4.  $\text{Sup } \mathcal{P}^*(\varepsilon) \rightarrow \text{Sup } \mathcal{P}^*$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  .

La démonstration découle immédiatement du lemme suivant, de vérification aisée, appliqué aux problèmes  $\mathcal{P}^*$  et  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  :

[ Lemme 3.2.5. Les notations sont indépendantes du contexte.

Soit  $\mathcal{P}$  le problème :  $\text{Sup}_{x \in X} J(x)$ , et soit  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  le problème :  $\text{Sup}_{x \in X} J_\varepsilon(x)$

où  $J$  et  $J_\varepsilon$  sont des fonctions réelles définies sur un ensemble quelconque  $X$ , et vérifiant les seules hypothèses :

- (i)  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  admet une solution  $x(\varepsilon) \in X$  pour tout  $\varepsilon > 0$
- (ii)  $J_\varepsilon(x) \leq J(x) \quad \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$
- (iii)  $J_\varepsilon(x) \rightarrow J(x) \quad \forall x \in X$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  .

Alors :  $\text{Sup}_{x \in X} \mathcal{P}(\varepsilon) = \text{Sup}_{x \in X} J_\varepsilon(x) \rightarrow \text{Sup } \mathcal{P} = \text{Sup}_{x \in X} J(x)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  .

Nous pouvons maintenant démontrer l'égalité des extrêma de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  . Nous avons

$$\text{Inf } \mathcal{P}(\varepsilon) = \text{Sup } \mathcal{P}^*(\varepsilon)$$

d'après le lemme 3.2.3. ; et grâce aux lemmes 3.2.1. et 3.2.4. nous obtenons par passage à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\text{Inf } \mathcal{P} = \text{Sup } \mathcal{P}^*$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

§.4. Un procédé d'approximation du contrôle optimal (avec  $v > 0$ ).

Dans toute la suite nous supposons que  $v$  est strictement positif et que les sous ensembles  $K_1$  et  $K_2$  sont bornés.

Nous avons vu que dans ce cas le problème dual est sans contrainte, et de ce fait "plus simple" que le problème primal ; nous sommes donc amenés à remplacer l'approximation de  $\mathcal{P}$  par l'approximation de  $\mathcal{P}^*$ . La "fonction coût" de  $\mathcal{P}^*$  étant "en général" non différentiable à cause des termes  $\mathcal{A}_{K_i}(-p_i^*)$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) il est assez naturel [2] d'employer une méthode de minimax qui utilise un algorithme du type Uzawa.

En fait cette méthode s'appliquera non pas à  $\mathcal{P}^*$  mais à une forme régularisée de  $\mathcal{P}^*$ , soit  $\mathcal{P}^*(\epsilon)$ .

Nous verrons que l'approximation de  $\mathcal{P}^*$  ainsi construite introduit parallèlement une approximation de  $\mathcal{P}$  ; cependant les convergences qui semblent difficiles à établir directement au niveau primal se démontrent très simplement par passage au niveau dual ; nous aurons ainsi une approche des "fonctions optimales" du problème primal (contrôle optimal  $\bar{v}$ , état optimal  $y(\bar{v})$ , observation optimale  $Cy(\bar{v})$ , ainsi que  $\rho_1 \bar{v}$  et  $\rho_2 y(\bar{v})$ ).

Nous exposerons d'abord (§.4.1 à 4.3) la méthode dans le cadre abstrait décrit au §.1 ; nous donnerons un exemple au §.4.4, et enfin au §.4.5 une discrétisation sur cet exemple, utilisant une méthode de différences finies.

§.4.1. Description de l'algorithme.

Principe de l'algorithme. Soient  $\epsilon_1 > 0$  et  $\epsilon_2 > 0$  fixés.

- (i) On part de  $\phi^0 \in K_1 \times K_2$  connu
- (ii) On suppose  $\phi^n \in K_1 \times K_2$  connu
- (iii) On détermine  $v^{n+1} \in \mathcal{U}$  et  $p^{*n+1} \in P^*$  en résolvant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} v v^{n+1} - \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* p^{*n+1} = 0 \\ \rho_1 v^{n+1} + \varepsilon_1 \Lambda_{\phi_1}^{-1} p_1^{*n+1} - \phi_1^n = 0 \\ \rho_2 y(v^{n+1}) + \varepsilon_2 \Lambda_{\phi_2}^{-1} p_2^{*n+1} - \phi_2^n = 0 \\ Cy(v^{n+1}) - z_d + \Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1} p_3^{*n+1} = 0. \end{array} \right.$$

(iv) On détermine  $\phi^{n+1} \in K_1 \times K_2$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^{n+1} = \text{Proj}_{K_1} \left( \frac{k^n}{\varepsilon_1} \rho_1 v^{n+1} + \left(1 - \frac{k^n}{\varepsilon_1}\right) \phi_1^n \right) \\ \phi_2^{n+1} = \text{Proj}_{K_2} \left( \frac{k^n}{\varepsilon_2} \rho_2 y(v^{n+1}) + \left(1 - \frac{k^n}{\varepsilon_2}\right) \phi_2^n \right) \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^{n+1} = \text{Proj}_{K_1} (\phi_1^n - k^n \Lambda_{\phi_1}^{-1} p_1^{*n+1}) \\ \phi_2^{n+1} = \text{Proj}_{K_2} (\phi_2^n - k^n \Lambda_{\phi_2}^{-1} p_2^{*n+1}) \end{array} \right.$$

où  $k^n$  est une suite de nombres positifs pour lesquels nous préciserons les hypothèses par la suite.

Le lemme suivant montre que le système (iii) détermine de façon unique  $v^{n+1}$  et  $p^{*n+1}$ , et caractérise ces éléments comme les solutions respectives de deux problèmes en dualité  $\mathcal{G}^{n+1}$  et  $\mathcal{G}^{*n+1}$  :

Lemme 4.1. Soit  $\mathcal{G}^{n+1}$  le problème de contrôle optimal :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(v) = \mathcal{L}v + Y \\ \text{Inf}_{v \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_{\mathcal{Z}}^2 + \frac{v}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\rho_1 v - \phi_1^n\|_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\rho_2 y(v) - \phi_2^n\|_{\phi_2}^2 \right\}. \end{array} \right.$$

1) En dualisant  $\mathcal{G}^{n+1}$  de façon convenable nous obtenons le problème  $\mathcal{G}^{*n+1}$  :

$$\text{Sup}_{p^* \in P^*} \left\{ -\frac{1}{2v} \|L^* p^*\|_{\mathcal{U}^*}^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_2^*\|_{\phi_2^*}^2 - \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{Z}^*}^2 + \langle p_1^*, \phi_1^n \rangle - \langle p_2^*, \rho_2 Y - \phi_2^n \rangle - \langle p_3^*, CY - z_d \rangle \right\}.$$

2) Les problèmes  $\mathcal{P}^{n+1}$  et  $\mathcal{P}^{*n+1}$  admettent chacun une solution unique.

3) Ils ont le même extrémum. Les éléments  $v^{n+1} \in \mathcal{U}$  et  $p^{*n+1} \in P^*$  vérifient le système (iii) si et seulement si :

$$\begin{cases} v^{n+1} & \text{est la solution de } \mathcal{P}^{n+1} \\ p^{*n+1} & \text{est la solution de } \mathcal{P}^{*n+1} . \end{cases}$$

Démonstration. On procède comme au §.2.1, en posant maintenant :

$$G_1(p_1) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|p_1 - \phi_1^n\|_{\phi_1}^2$$

$$G_2(p_2) = \frac{1}{2\varepsilon_2} \|p_2 + \rho_2 Y - \phi_2^n\|_{\phi_2}^2$$

$F$ ,  $G_3$  et  $L$  étant inchangés, et on vérifie aisément que  $\mathcal{P}^{*n+1}$  a la forme indiquée.

Ensuite il est immédiat que  $\mathcal{P}^{n+1}$  (resp.  $\mathcal{P}^{*n+1}$ ) admet une solution unique, la fonctionnelle à minimiser (resp. maximiser) étant strictement convexe (resp. strictement concave) et coercive.

Enfin le critère de Rockafellar énoncé en A dans la démonstration du théorème 2.2 est directement applicable aux problèmes  $\mathcal{P}^{n+1}$  et  $\mathcal{P}^{*n+1}$  qui par suite ont le même extrémum ; et les éléments  $v^{n+1} \in \mathcal{U}$  et  $p^{*n+1} \in P^*$  vérifient les relations d'extrémalité si et seulement si  $v^{n+1}$  est la solution de  $\mathcal{P}^{n+1}$  et  $p^{*n+1}$  est la solution de  $\mathcal{P}^{*n+1}$ . Or on constate aisément que ces relations d'extrémalité ne sont autre que le système (iii).

#### §.4.2. Convergence de l'algorithme ( $n \rightarrow \infty$ ; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ étant fixé).

Nous définissons d'abord deux problèmes  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  en dualité et nous établissons pour ces problèmes les relations primal-dual ; puis nous montrons que les suites  $v^n$ ,  $p^{*n}$ ,  $\phi_1^n$ ,  $\phi_2^n$  convergent vers les "fonctions optimales" des problèmes  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$ .

Lemme 4.2. Soit  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  le "problème primal pénalisé" :

$$\begin{cases} y(v) = \mathcal{L}v + Y \\ \text{Inf}_{v \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} d(\rho_1 v, K_1)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} d(\rho_2 y(v), K_2)^2 \right\} . \end{cases}$$

1) En dualisant  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  de façon convenable nous obtenons le "problème dual régularisé"  $\mathcal{F}^*(\varepsilon)$  :

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{p^* \in P^*} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \|L^* p^*\|_{\mathcal{U}^*}^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \|p_1^*\|_{\Phi_1^*}^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_2^*\|_{\Phi_2^*}^2 - \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{H}^*}^2 - \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle - \langle p_3^*, CY - z_d \rangle \right. \\ \left. - \mathcal{I}_{K_1}^*(-p_1^*) - \mathcal{I}_{K_2}^*(-p_2^*) \right\} . \end{aligned}$$

2) les problèmes  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{F}^*(\varepsilon)$  admettent chacun une solution unique.

3) Ils ont le même extrémum. Les éléments  $\bar{v}(\varepsilon) \in \mathcal{U}$  et  $\bar{p}^*(\varepsilon) \in P^*$  sont les solutions respectives de  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{F}^*(\varepsilon)$  si et seulement si ils vérifient les relations d'extrémalité :

$$\begin{cases} \nu \bar{v}(\varepsilon) - \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* \bar{p}^*(\varepsilon) = 0 \\ \rho_1 \bar{v}(\varepsilon) + \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^*(\varepsilon) - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}(\varepsilon)) = 0 \\ \rho_2 y(\bar{v}(\varepsilon)) + \varepsilon_2 \Lambda_{\Phi_2}^{-1} \bar{p}_2^*(\varepsilon) - \text{Proj}_{K_2}(\rho_2 y(\bar{v}(\varepsilon))) = 0 \\ Cy(\bar{v}(\varepsilon)) - z_d + \Lambda_{\mathcal{H}}^{-1} \bar{p}_3^*(\varepsilon) = 0 . \end{cases}$$

Démonstration. Pour le 1) la démonstration est identique à celle du lemme 3.2.2.

(on pose :

$$F = \frac{\nu}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 ; G_1(p_1) = \frac{1}{2\varepsilon_1} d(p_1, K_1)^2 ;$$

$$G_2(p_2) = \frac{1}{2\varepsilon_2} d(p_2 + \rho_2 Y, K_2)^2 ; G_3 \text{ et } L \text{ étant inchangés.)}$$

Le 2) est immédiat.

L'égalité des extrêma se montre comme au lemme 3.2.3. Quant aux relations

d'extrémalité, celles qui comportent  $F$  et  $G_3$  sont les mêmes qu'au théorème 2.2 ;  
montrons par exemple que celle qui comporte  $G_1$  est équivalente à :

$$\rho_1 \bar{v}(\varepsilon) + \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^*(\varepsilon) - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}(\varepsilon)) = 0$$

(pour  $G_2$  on procède de même).

Il nous faut expliciter :

$$G_1(\rho_1 \bar{v}(\varepsilon)) + G_1^*(-\bar{p}_1^*(\varepsilon)) = - \langle \bar{p}_1^*(\varepsilon), \rho_1 \bar{v}(\varepsilon) \rangle .$$

Notant  $\bar{v}$  (resp.  $\bar{p}_1^*$ ) au lieu de  $\bar{v}(\varepsilon)$  (resp.  $\bar{p}_1^*(\varepsilon)$ ) pour simplifier, cela s'écrit

$$\frac{1}{2\varepsilon_1} \|\rho_1 \bar{v} - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v})\|^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\bar{p}_1^*\|^2 + \text{Sup}_{\psi_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} - \psi_1 \rangle = 0 .$$

D'où en faisant  $\psi_1 = \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v})$  :

$$\|\rho_1 \bar{v} + \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^* - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v})\|^2 \leq 0 ,$$

soit  $\rho_1 \bar{v} + \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^* - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}) = 0 .$

Réciproquement cette égalité entraîne :

$$\langle -\bar{p}_1^*, \psi_1 - \rho_1 \bar{v} - \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^* \rangle \leq 0 \quad \forall \psi_1 \in K_1 ,$$

l'égalité étant atteinte pour  $\psi_1 = \rho_1 \bar{v} + \varepsilon_1 \Lambda_{\Phi_1}^{-1} \bar{p}_1^* = \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}) .$

Donc  $\text{Sup}_{\psi_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} - \psi_1 \rangle = -\varepsilon_1 \|\bar{p}_1^*\|^2 .$

Et alors  $\frac{1}{2\varepsilon_1} \|\rho_1 \bar{v} - \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v})\|^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\bar{p}_1^*\|^2 + \text{Sup}_{\psi_1 \in K_1} \langle \bar{p}_1^*, \rho_1 \bar{v} - \psi_1 \rangle$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\varepsilon_1 \bar{p}_1^*\|^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\bar{p}_1^*\|^2 - \varepsilon_1 \|\bar{p}_1^*\|^2 = 0 .$$

D'où l'équivalence indiquée.

Le théorème qui suit établit la convergence de l'algorithme lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

Théorème 4.2. Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  étant fixés :

- (i) La suite  $v^n$  converge fortement vers la solution  $\bar{v}(\varepsilon)$  du "problème primal pénalisé"  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  ;
- (ii) La suite  $p^{*n}$  converge fortement vers la solution  $\bar{p}^*(\varepsilon)$  du "problème dual régularisé"  $\mathcal{G}^*(\varepsilon)$  ;
- (iii) De plus 
$$\begin{cases} \phi_1^n \rightarrow \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}(\varepsilon)) \\ \text{et } \phi_2^n \rightarrow \text{Proj}_{K_2}(\rho_2 Y(\bar{v}(\varepsilon))) \end{cases}$$
  
(convergences fortes).

Démonstration. Appliquant les résultats de [2] et [5] il est aisé de constater que

1) La fonction selle :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p^*, \phi) = & \frac{1}{2v} \|L^* p^*\|_{u^*}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_2^*\|_{\phi_2^*}^2 + \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{X}^*}^2 - \langle p_1^*, \phi_1 \rangle + \langle p_2^*, \rho_2 Y - \phi_2 \rangle \\ & + \langle p_3^*, CY - z_d \rangle \end{aligned}$$

définie sur  $P^* \times (\phi_1 \times \phi_2)$  admet un point-selle sur  $P^* \times (K_1 \times K_2)$  sous l'hypothèse  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) borné dans  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) .

2) L'algorithme défini au §.4.1 est simplement l'algorithme d'Uzawa associé au problème :

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}^*(\varepsilon) = & \text{Inf}_{p^* \in P^*} \left\{ \frac{1}{2v} \|L^* p^*\|_{u^*}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_2^*\|_{\phi_2^*}^2 + \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{X}^*}^2 + \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle + \langle p_3^*, CY - z_d \rangle \right. \\ & \left. + \text{Sup}_{\phi_1 \in K_1} \langle -p_1^*, \phi_1 \rangle + \text{Sup}_{\phi_2 \in K_2} \langle -p_2^*, \phi_2 \rangle \right\} \end{aligned}$$

(ici on utilise le lemme 4.1).

La convergence de  $p^{*n}$  vers la solution  $\bar{p}^*(\varepsilon)$  de  $\mathcal{G}^*(\varepsilon)$  s'établit comme dans [5] en remplaçant la fonctionnelle quadratique  $\|v\|^2 - \langle f, v \rangle$  par

$$\frac{1}{2v} \|L^* p^*\|_{u^*}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|p_1^*\|_{\phi_1^*}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_2^*\|_{\phi_2^*}^2 + \frac{1}{2} \|p_3^*\|_{\mathcal{X}^*}^2 + \langle p_2^*, \rho_2 Y \rangle + \langle p_3^*, CY - z_d \rangle .$$

Soit  $\alpha = \text{Inf}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . En prenant la suite de nombres  $k^n$  dans un intervalle  $[k_0, k_1]$  choisi de façon que

$$\underline{2k\alpha - k^2 \geq \beta > 0 \text{ si } k \in [k_0, k_1]}$$

on montre comme dans [5] que :

$$\|p^{*n+1} - \bar{p}^*(\varepsilon)\|_{P^*}^2 \rightarrow 0 ;$$

et par suite  $p^{*n}$  converge fortement vers  $\bar{p}^*(\varepsilon)$ .

Les autres convergences vont s'en déduire grâce aux relations primal-dual :

Comme  $v^n = \frac{1}{v} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* p^{*n}$  nous obtenons  $v^n \rightarrow \frac{1}{v} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} L^* \bar{p}^*(\varepsilon) = \bar{v}(\varepsilon)$  (d'après le lemme 4.2) ; ensuite comme  $\phi_1^n = \rho_1 v^{n+1} + \varepsilon_1 \Lambda_{\phi_1}^{-1} p_1^{*n+1}$  nous obtenons  $\phi_1^n \rightarrow \rho_1 \bar{v}(\varepsilon) + \varepsilon_1 \Lambda_{\phi_1}^{-1} \bar{p}_1^*(\varepsilon) = \text{Proj}_{K_1}(\rho_1 \bar{v}(\varepsilon))$  (toujours d'après le lemme 4.2) et on obtient de même la convergence forte de  $\phi_2^n$ .

#### §.4.3. Les résultats de convergence lorsque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ .

La convergence de la suite  $\bar{v}(\varepsilon)$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  découle immédiatement de la théorie de la pénalisation [4].

Théorème 4.3. Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la solution  $\bar{v}(\varepsilon)$  du "problème primal pénalisé" converge fortement vers la solution  $\bar{v}$  du problème primal.

Remarque. On ne peut rien dire a priori sur la convergence de la suite  $\bar{p}^*(\varepsilon)$ , la coercivité sur les deux premières composantes dépendant de  $\varepsilon$  ; on sait seulement que  $\bar{p}^*(\varepsilon)$  est une suite maximisante pour  $\mathcal{P}^*$  et les relations primal-dual entre  $\mathcal{P}(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}^*(\varepsilon)$  montrent que  $L^* \bar{p}^*(\varepsilon) \rightarrow v \Lambda_{\mathcal{U}} \bar{v}$  et  $\bar{p}_3^*(\varepsilon) \rightarrow -\Lambda_{\mathcal{Y}}(\text{Cy}(\bar{v}) - z_d)$

#### §.4.4. Exemple.

Nous reprenons l'exemple 1 (contrôle optimal d'un système distribué) et nous explicitons sur cet exemple l'algorithme et les résultats de convergence obtenus aux

§.4.1 à 4.3.

Le problème  $\mathcal{P}$  est le problème de contrôle optimal où :

- L'état  $y(v)$  est la solution de

$$\begin{cases} y - \Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \text{ ouvert borné "régulier" de } \mathbb{R}^n \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(f \in L^2(\Omega))$$

- Le problème de minimisation est :

$$\text{Inf}_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v)^2 dx \right\}$$

$$\text{où } K = \{v \in L^2(\Omega) \mid |\text{Grad } y(v)| \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} .$$

Rappelons que  $\mathcal{U} = L^2(\Omega) = \mathcal{H} = \phi_1$  ;  $\phi_2 = L^2(\Omega)^N$  ;  $W = H_0^1(\Omega)$  ;  $\rho_1 \equiv 0$  ;  $\rho_2$  est l'application Grad de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)^N$  ;  $K_1 = \{0\}$  ;  $K_2 = \{\phi \in L^2(\Omega)^N \mid |\phi| \leq 1 \text{ p.p.}\}$ .

En utilisant l'expression de  $L^*$  trouvée au §.2.1 et en supprimant les \* pour simplifier les notations, l'algorithme défini au §.4.1 s'explique comme suit :

(i) On part de  $\phi^0 \in K_2$  connu .

(ii) On suppose  $\phi^n \in K_2$  connu .

(iii) On résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{n+1} - \Delta y^{n+1} = f + v^{n+1} \quad \text{dans } \Omega \\ y^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ w^{n+1} - \Delta w^{n+1} = p_3^{n+1} - \text{div } p_2^{n+1} \quad \text{dans } \Omega \\ w^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \nu v^{n+1} - w^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \text{Grad } y^{n+1} + \varepsilon p_2^{n+1} - \phi^n = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ y^{n+1} - z_d + p_3^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega . \end{array} \right.$$

(iv) Enfin on détermine  $\phi^{n+1} \in K_2$  par

$$\phi^{n+1} = \text{Proj}_{K_2} \left( \frac{k^n}{\varepsilon} \text{Grad } y^{n+1} + \left(1 - \frac{k^n}{\varepsilon}\right) \phi^n \right)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\phi^{n+1} = \text{Proj}_{K_2} \left( \phi^n - k^n p_2^{n+1} \right) .$$

En utilisant le lemme 4.1 et les calculs effectués au §.2.1 nous voyons que les éléments  $v^{n+1} \in L^2(\Omega)$  et  $p^{n+1} \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$  vérifient le système (iii) si et seulement si :

-  $v^{n+1}$  est la solution de :

$$\text{Inf}_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\text{Grad } y(v) - \phi^n|^2 dx \right\}$$

où  $y(v)$  est l'état défini par 
$$\begin{cases} y - y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

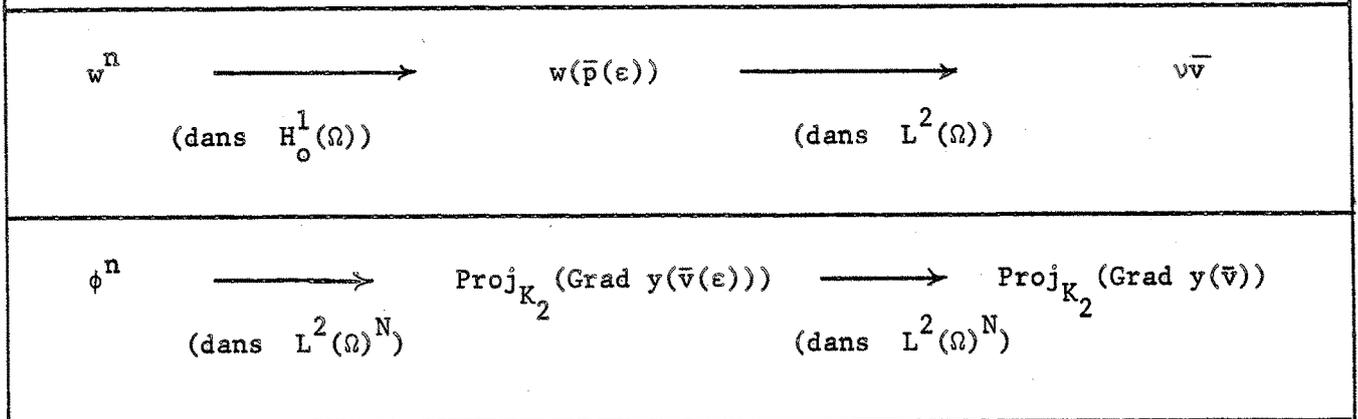
- et  $p^{n+1}$  est la solution de :

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{p=(p_2, p_3)} \\ \in L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w(p) + \nu f)^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |p_2|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_3)^2 dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} p_3 z_d dx + \int_{\Omega} p_2 \phi^n dx \right\} \end{aligned}$$

où  $w(p)$  est l'état défini par 
$$\begin{cases} w - \Delta w = p_3 - \text{div } p_2 & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Et l'on déduit des théorèmes 4.2 et 4.3 les convergences fortes :

$n \rightarrow \infty, \varepsilon > 0 \text{ fixé}$	$\varepsilon \rightarrow 0$
$v^n \xrightarrow{\text{(dans } L^2(\Omega)\text{)}} \bar{v}(\varepsilon)$	$\bar{v}(\varepsilon) \xrightarrow{\text{(dans } L^2(\Omega)\text{)}} \bar{v}$
$y^n \xrightarrow{\text{(dans } H^1_0(\Omega)\text{)}} y(\bar{v}(\varepsilon))$	$y(\bar{v}(\varepsilon)) \xrightarrow{\text{(dans } H^1_0(\Omega)\text{)}} y(\bar{v})$
$p^n \xrightarrow{\text{(dans } L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\text{)}} \bar{p}(\varepsilon)$	$\bar{p}(\varepsilon) \begin{cases} \text{on ne sait rien sur la conver-} \\ \text{gence de } \bar{p}_2(\varepsilon) \text{ mais} \\ \bar{p}_3(\varepsilon) \xrightarrow{\text{(dans } L^2(\Omega)\text{)}} z_d - y(\bar{v}) \end{cases}$



où  $\bar{p}(\varepsilon)$  est la solution du "problème dual régularisé" et  $\bar{v}(\varepsilon)$  est la solution du "problème primal pénalisé" :

$$\left[ \begin{array}{l}
 \begin{cases} y - \Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \\
 \\
 \text{Inf}_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} [|\text{Grad } y(v)| - 1]_+^2 dx \right\} \\
 \\
 \text{(avec la notation : } \psi_+ = \begin{cases} \psi & \text{si } \psi > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{)}
 \end{array} \right.$$

tandis que  $\bar{v}$  est le contrôle optimal du problème primal.

§.4.5. Discrétisation sur l'exemple précédent.

Nous donnons par une méthode de différences finies une version discrète de l'algorithme précédent et nous montrons que l'on obtient ainsi une approximation des "fonctions optimales" de  $\mathcal{G}$  (contrôle optimal  $\bar{v}$ , état optimal  $y(\bar{v})$ , ainsi que  $\text{Proj}_{K_2}(\text{Grad } y(\bar{v}))$ ).

Pour les résultats et les notations classiques de la méthode des différences finies nous renvoyons à [10] .

Nous notons  $L^2(\Omega)_h$  l'approximation interne habituelle de  $L^2(\Omega)$  (c'est

l'espace des fonctions étagées

$$(*) \quad v_h(x) = \sum_M v_h(M) \bar{w}_{hM}(x), \quad v_h(M) \in \mathbb{R},$$

muni du produit scalaire :

$$(v_h, w_h) = \sum_M v_h(M) w_h(M) \quad \text{et} \quad H_o^1(\Omega)_h$$

l'approximation externe habituelle de  $H_o^1(\Omega)$  (c'est l'espace des fonctions étagées

$$(**) \quad y_h(x) = \sum_M y_h(M) \bar{w}_{hM}(x), \quad y_h(M) \in \mathbb{R},$$

muni du produit scalaire analogue discret de celui de  $H^1(\Omega)$ ).

Pour simplifier nous ferons dans (\*) et (\*\*) les sommations sur le même ensemble  $\{M \in \Omega_h^1\}$ .

Soit alors  $f_h \in L^2(\Omega)_h$  défini par

$$f_h(M) = \frac{1}{h_1 \times \dots \times h_N} \int_{\sigma_h(M)} f(x) dx$$

et  $z_{d_h} \in L^2(\Omega)_h$  défini de la même façon.

Nous considérons le problème de contrôle  $\mathcal{P}_h$ , analogue discret de  $\mathcal{G}$ , que nous formulons de la manière suivante :

- L'état  $y_h(v_h)$  est la solution de

$$y_h - \Delta_h y_h = f_h + v_h \quad (y_h \in H_o^1(\Omega)_h)$$

(notation qui signifie :

$$y_h(M) - \sum_{i=1}^N \delta_i^2 y_h(M) = f_h(M) + v_h(M)$$

pour tout  $M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1$ , où  $\delta_i^2$  est défini par :

$$\delta_i^2 \phi(M) = \frac{1}{h_i^2} [\phi(M+h_i e_i) + \phi(M-h_i e_i) - 2\phi(M)] .)$$

- On minimise la "fonction coût"

$$J_h(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_h(v_h) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v_h)^2 dx$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles :

$$K_h = \{v_h \in L^2(\Omega)_h \mid |\delta y_h(v_h)|_{\mathbb{R}^N} \leq 1 \text{ partout}\}$$

où  $\delta$  est l'application de  $H_o^1(\Omega)_h$  dans  $L^2(\Omega)_h^N$  définie par :

$$\delta_i \phi(M) = \frac{1}{h_i} [\phi(M+h_i e_i) - \phi(M)] \quad (i = 1, \dots, N ; M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1) .$$

Tous les résultats théoriques obtenus précédemment sont applicables en posant  $\mathcal{U} = L^2(\Omega)_h = \mathcal{H} = \phi_1$  ;  $\phi_2 = L^2(\Omega)_h^N$  ;  $W = H_o^1(\Omega)_h$  ;  $\mathcal{C}$  est l'injection canonique de  $H_o^1(\Omega)_h$  dans  $L^2(\Omega)_h$  ;  $\rho_1 = 0$  ;  $\rho_2 = \delta$  ;  $K_1 = \{o\}$  et  $K_2 = K_{2h} = \{\phi_h \in L^2(\Omega)_h^N \mid |\phi_h|_{\mathbb{R}^N} \leq 1 \text{ partout}\} .$

Il est facile de constater que l'opérateur adjoint de  $\delta$  est  $-\text{div}_h$  défini par :

$$\forall M \in \overset{\circ}{\Omega}_h^1 \quad -\text{div}_h \phi(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i} [\phi_i(M-h_i e_i) - \phi_i(M)] .$$

En appliquant les résultats du §.2 et en remarquant que le problème dual est coercif (toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on a

$$\int_{\Omega} |p_{2h}| dx \sim \|p_{2h}\|_{L^2(\Omega)_h^N} \quad \text{on obtient la :}$$

Proposition 4.5.1. 1) Le problème  $\mathcal{G}_h^*$  est le problème de contrôle où :

- L'état  $w_h(p_h)$  est donné par :

$$w_h - \Delta_h w_h = p_{3h} - \operatorname{div}_h p_{2h} \quad (w_h \in H_0^1(\Omega)_h)$$

- Le problème de maximisation est à une constante près :

$$\begin{aligned} \sup_{(p_{2h}, p_{3h})} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w_h(p_h) + \nu f)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_{3h})^2 dx + \int_{\Omega} p_{3h} z_d dx \right. \\ \left. - \int_{\Omega} |p_{2h}| dx \right\} \end{aligned}$$

2) Le problème  $\mathcal{G}_h$  admet une solution unique, et le problème  $\mathcal{G}_h^*$  admet une solution au moins.

3) Ils ont le même extrémum. Les éléments  $\bar{v}_h \in L^2(\Omega)_h$  et  $\bar{p}_h \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h$  sont solutions respectives de  $\mathcal{G}_h$  et  $\mathcal{G}_h^*$  si et seulement si ils vérifient les relations d'extrémalité :

$$\begin{cases} \nu \bar{v}_h - w_h(\bar{p}_h) = 0 \\ \int_{\Omega} \bar{p}_{2h} \cdot (p_{2h} - \delta y_h(\bar{v}_h)) dx \geq 0 \quad \forall p_{2h} \in K_{2h} \\ y_h(\bar{v}_h) - z_{dh} + \bar{p}_{3h} = 0 \end{cases}$$

Et il est possible de rechercher  $\bar{v}_h$  et  $\bar{p}_h$  en travaillant sur ce système, cependant les convergences lorsque  $h \rightarrow 0$  semblent difficiles à établir (au niveau primal du fait des contraintes sur l'état, au niveau dual du fait que la coercivité dépend de  $h$ ). Nous allons donc appliquer la méthode décrite plus haut :

Le principe de l'algorithme est le suivant :

Soit  $\epsilon > 0$  fixé.

(i) On part de  $\phi^0 \in K_{2h}$  connu.

(ii) On suppose  $\phi_h^n \in K_{2h}$  connu.

(iii) On résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h^{n+1} - \Delta_h y_h^{n+1} - v_h^{n+1} = f_h \\ w_h^{n+1} - \Delta_h w_h^{n+1} + \operatorname{div}_h p_{2h}^{n+1} - p_{3h}^{n+1} = 0 \\ v v_h^{n+1} - w_h^{n+1} = 0 \\ \delta y_h^{n+1} + \epsilon p_{2h}^{n+1} = \phi_h^n \\ y_h^{n+1} + p_{3h}^{n+1} = z_{dh} \end{array} \right.$$

(où  $v_h^{n+1} \in L^2(\Omega)_h$  ;  $y_h^{n+1} \in H_o^1(\Omega)_h$  ;  $(p_{2h}^{n+1}, p_{3h}^{n+1}) \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h$  ;  $w_h^{n+1} \in H_o^1(\Omega)_h$  ) .

(iv) Enfin on détermine  $\phi_h^{n+1} \in K_{2h}$  par

$$\phi_h^{n+1} = \operatorname{Proj}_{K_{2h}} \left( \frac{k^n}{\epsilon} \delta y_h^{n+1} + \left(1 - \frac{k^n}{\epsilon}\right) \phi_h^n \right) \text{ soit encore :}$$

$$\phi_h^{n+1} = \operatorname{Proj}_{K_{2h}} \left( \phi_h^n - k^n p_{2h}^{n+1} \right) .$$

Appliquant les résultats des §.4.1 et 4.2 au cadre fonctionnel discret, nous obtenons les deux lemmes suivants :

Lemme 4.5.1. Soit  $\mathcal{G}_h^{n+1}$  le problème de contrôle optimal :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h(v_h) \text{ est la solution de : } y_h - \Delta_h y_h = f_h + v_h \quad (y_h \in H_o^1(\Omega)_h) \\ \operatorname{Inf}_{v_h \in L^2(\Omega)_h} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_h(v_h) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v_h)^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} |\delta y_h(v_h) - \phi_h^n|^2 dx \right\} . \end{array} \right.$$

1) En dualisant  $\mathcal{G}_h^{n+1}$  de façon convenable on obtient le problème  $\mathcal{G}_h^{*n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_h(p_h) \text{ est la solution de : } w_h - \Delta_h w_h = p_{3h} - \operatorname{div}_h p_{2h} \\ (w_h \in H_o^1(\Omega)_h) \\ \operatorname{Sup}_{\substack{p_h = (p_{2h}, p_{3h}) \\ \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h}} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w_h(p_h) + v_h f)^2 dx - \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |p_{2h}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_{3h})^2 dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} p_{3h} z_d dx + \int_{\Omega} p_{2h} \phi_h^n dx \right\} . \end{array} \right.$$

2) Les problèmes  $\mathcal{P}_h^{n+1}$  et  $\mathcal{P}_h^{*n+1}$  ont chacun une solution unique.

3) Ils ont le même extrémum. Les éléments  $v_h^{n+1} \in L^2(\Omega)_h$  et  $p_h^{n+1} \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h$  vérifient le système (iii) si et seulement si :

$$\begin{cases} v_h^{n+1} & \text{est la solution de } \mathcal{P}_h^{n+1} \text{ et} \\ p_h^{n+1} & \text{est la solution de } \mathcal{P}_h^{*n+1}. \end{cases}$$

(Et ce lemme prouve en particulier que le système (iii) admet une solution unique!)

Lemme 4.5.2. Soit  $\mathcal{P}_h(\varepsilon)$  le "problème primal pénalisé discret" :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h(v_h) \text{ est la solution de : } y_h - \Delta_h y_h = f_h + v_h \quad (y_h \in H_o^1(\Omega)_h) \\ \text{Inf}_{v_h \in L^2(\Omega)_h} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_h(v_h) - z_d)^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (v_h)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} [|\delta y_h(v_h)| - 1]_+^2 dx \right\}. \end{array} \right.$$

1) En dualisant  $\mathcal{P}_h(\varepsilon)$  de façon convenable on obtient le "problème dual régularisé discret"  $\mathcal{P}_h^*(\varepsilon)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_h(p_h) \text{ est la solution de } w_h - \Delta_h w_h = p_{3h} - \text{div}_h p_{2h} \quad (w_h \in H_o^1(\Omega)_h) \\ \text{Sup}_{\substack{p_h = (p_{2h}, p_{3h}) \\ \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h}} \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} (w_h(p_h) + \nu f)^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |p_{2h}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p_{3h})^2 dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} p_{3h} z_d dx - \int_{\Omega} |p_{2h}| dx \right\} \end{array} \right.$$

2) Les problèmes  $\mathcal{P}_h(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}_h^*(\varepsilon)$  admettent chacun une solution unique.

3) Ils ont le même extrémum. Les éléments  $\bar{v}_h(\varepsilon) \in L^2(\Omega)_h$  et  $\bar{p}_h(\varepsilon) \in L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h$  sont les solutions respectives de  $\mathcal{P}_h(\varepsilon)$  et  $\mathcal{P}_h^*(\varepsilon)$  si et seulement si ils vérifient les relations d'extrémalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} v\bar{v}_h(\varepsilon) - w_h(\bar{p}_h(\varepsilon)) = 0 \\ \delta y_h(\bar{v}_h(\varepsilon)) + \varepsilon \bar{p}_{2h}(\varepsilon) - \text{Proj}_{K_{2h}}(\delta y_h(\bar{v}_h(\varepsilon))) = 0 \\ y_h(\bar{v}_h(\varepsilon)) - z_{dh} + \bar{p}_{3h}(\varepsilon) = 0. \end{array} \right.$$

Et l'on peut déduire du théorème 4.2 la convergence de l'algorithme lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour une suite  $k^n$  "bien choisie" (cf. démonstration du théorème 4.2):

Théorème 4.5.1. La suite  $k^n$  étant "bien choisie", on a les convergences suivantes lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon > 0$  étant fixé :

(i) La suite  $v_h^n$  converge vers la solution  $\bar{v}_h(\varepsilon)$  du "problème primal pénalisé discret" ;

(ii) La suite  $p_h^n$  converge vers la solution  $\bar{p}_h(\varepsilon)$  du "problème dual régularisé discret" ;

(iii) De plus :  $\phi_h^n \rightarrow \text{Proj}_{K_{2h}}(\delta y_h(\bar{v}_h(\varepsilon)))$ .

En outre  $y_h^n \rightarrow y_h(\bar{v}_h(\varepsilon))$  et  $w_h^n \rightarrow w_h(\bar{p}_h(\varepsilon))$ .

Remarque. Il est naturel de se demander si l'on ne peut pas faire  $\varepsilon = 0$  dans l'algorithme discret. Les inconnues du système (iii) sont les vecteurs  $v_h^{n+1}$ ,  $y_h^{n+1}$ ,  $(p_{2h}^{n+1})_{i=1\dots N}$ ,  $p_{3h}^{n+1}$ ,  $w_h^{n+1}$  ; on peut éliminer  $w_h^{n+1}$  et  $p_{3h}^{n+1}$  par les troisième et cinquième équations ; les inconnues qui restent sont  $v_h^{n+1}$ ,  $y_h^{n+1}$ ,  $(p_{2h}^{n+1})_{i=1\dots N}$  et le système (iii) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -v_h^{n+1} + (I - \Delta_h) y_h^{n+1} = f_h \\ v(I - \Delta_h) v_h^{n+1} + y_h^{n+1} + \text{div}_h p_{2h}^{n+1} = z_{dh} \\ \delta y_h^{n+1} + \varepsilon p_{2h}^{n+1} = \phi_h^n \end{array} \right.$$

La matrice à inverser est donc de la forme :

$- I$	$I - \Delta_h$	$0$
$\nu(I - \Delta_h)$	$I$	$(- {}^t\delta_1) \dots (- {}^t\delta_N)$
$0$	$\delta_1$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\delta_N$	$\varepsilon I$

où  ${}^t\delta_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) désigne la matrice transposée de la matrice  $\delta_i$ .

Il est aisé de constater que si  $N = 1$  le déterminant de cette matrice ne s'annule pas avec  $\varepsilon$ , mais que cela se produit si  $N = 2$ . Le système (iii) n'est donc pas inversible pour  $N = 2$ .

Nous plaçant dans le cas où  $N = 1$  et  $\varepsilon = 0$  l'opération (iii) de l'algorithme discret détermine de façon unique  $(v_h^{n+1}, y_h^{n+1}, p_{2h}^{n+1})$ ,  $w_h^{n+1}$  et  $p_{3h}^{n+1}$  s'en déduisant. Notant  $X^{n+1} = (v_h^{n+1}, y_h^{n+1}, p_{2h}^{n+1})$  et appelant  $B^n$  le second membre, le système (iii) s'écrit :  $\mathcal{A}X^{n+1} = B^n$  où  $\mathcal{A}$  est une matrice inversible indépendante de  $n$ . La norme de  $B^n$  est majorée indépendamment de  $n$  puisque  $\phi_h^n$  demeure dans un sous ensemble borné de  $L^2(\Omega)_h^N$ . Nous avons donc  $\|X^{n+1}\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|B^n\| \leq C$ ; et l'on peut extraire des sous suites notées encore  $(v_h^n, y_h^n, p_{2h}^n, \phi_h^n)$  qui convergent vers  $(\bar{v}_h, \bar{y}_h, \bar{p}_{2h}, \bar{\phi}_h)$ . Mais le système (iii) comportant des indices  $n$  et  $(n+1)$ , le passage à la limite pour ce système n'est pas loisible, non plus que celui dans l'égalité :

$$\phi_h^{n+1} = \text{Proj}_{K_{2h}}(\phi_h^n - k^n p_{2h}^{n+1})$$

et l'on ne peut donc pas affirmer que  $\bar{v}_h$  et  $\bar{p}_h$  sont solutions respectives de  $\mathcal{G}_h$  et  $\mathcal{G}_h^*$ .

Ceci a été vérifié numériquement pour un problème  $\mathcal{G}$  dont le contrôle optimal est connu (pour l'exemple considéré où  $\bar{v}_h = 0$  nous avons obtenu  $\bar{v}_h$  très loin de zéro!)

De toute façon nous allons avoir besoin de  $\epsilon > 0$  pour établir les résultats de convergence lorsque  $h \rightarrow 0$ , ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

Nous faisons donc tendre  $h$  vers  $0$ ,  $\epsilon > 0$  étant fixé puis nous ferons tendre  $\epsilon$  vers  $0$  :

Théorème 4.5.2. Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon > 0$  étant fixé, la suite  $\bar{v}_h(\epsilon)$  converge fortement vers la solution  $\bar{v}(\epsilon)$  du "problème primal pénalisé continu"  $\mathcal{P}(\epsilon)$ , et la suite  $\bar{p}_h(\epsilon)$  converge fortement vers la solution  $\bar{p}(\epsilon)$  du "problème dual régularisé continu"  $\mathcal{P}^*(\epsilon)$ .

En outre  $y_h(\bar{v}_h(\epsilon))$  converge fortement vers  $y(\bar{v}(\epsilon))$  tandis que  $w_h(\bar{p}_h(\epsilon))$  converge fortement vers  $w(\bar{p}(\epsilon))$ ; et  $\text{Proj}_{K_{2h}} \delta y_h(\bar{v}_h(\epsilon))$  converge fortement vers  $\text{Proj}_{K_2} \text{Grad } y(\bar{v}(\epsilon))$ .

Toutes ces convergences ont lieu au sens des approximations respectives  $L^2(\Omega)_h$ ,  $L^2(\Omega)_h^N \times L^2(\Omega)_h$ ,  $H^1_0(\Omega)_h$ ,  $L^2(\Omega)_h^N$ .

Démonstration. Les convergences s'établissent facilement au niveau dual du fait de l'absence de contrainte.

On montre (grâce à la coercivité pour  $\epsilon > 0$ ) que  $(\bar{p}_{2h}(\epsilon)|_\Omega, \bar{p}_{3h}(\epsilon)|_\Omega)$  est borné dans  $L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ . Utilisant l'équation d'état, nous avons :

$$\begin{cases} w_h(\bar{p}_h(\epsilon))|_\Omega & \text{borné dans } L^2(\Omega) \\ \delta_i w_h(\bar{p}_h(\epsilon))|_\Omega & \text{borné dans } L^2(\Omega) \quad (i=1, \dots, N) \end{cases}$$

On montre alors de façon classique [10] que :

$$\begin{cases} \bar{p}_h(\epsilon)|_\Omega & \rightharpoonup \bar{p} \text{ dans } L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \text{ faible;} \\ w_h(\bar{p}_h(\epsilon))|_\Omega & \rightharpoonup w(\bar{p}) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible;} \\ \delta_i w_h(\bar{p}_h(\epsilon))|_\Omega & \rightharpoonup \frac{\partial w(\bar{p})}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad (i=1, \dots, N) \end{cases}$$

puis il est facile grâce à l'absence de contrainte sur l'état (et même l'absence totale de contrainte!) de montrer que  $\overline{p} = \overline{p}(\epsilon)$ .

Enfin, on montre de façon tout aussi classique, en utilisant les "fonctions coût" de  $\mathcal{G}_h^*(\epsilon)$  et  $\mathcal{G}^*(\epsilon)$ , que

$$\overline{p}_h(\epsilon) \Big|_{\Omega} \rightarrow \overline{p}(\epsilon) \text{ dans } L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \text{ fort}$$

puis, en utilisant encore l'équation d'état, que :

$$\begin{cases} w_h(\overline{p}_h(\epsilon)) \Big|_{\Omega} \rightarrow w(\overline{p}(\epsilon)) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \delta_i w_h(\overline{p}_h(\epsilon)) \Big|_{\Omega} \rightarrow \frac{\partial w(\overline{p}(\epsilon))}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \quad (i = 1, \dots, N) \end{cases}$$

Les relations d'extrémalité établies aux lemmes 4.5.2 et 4.2 nous donnent

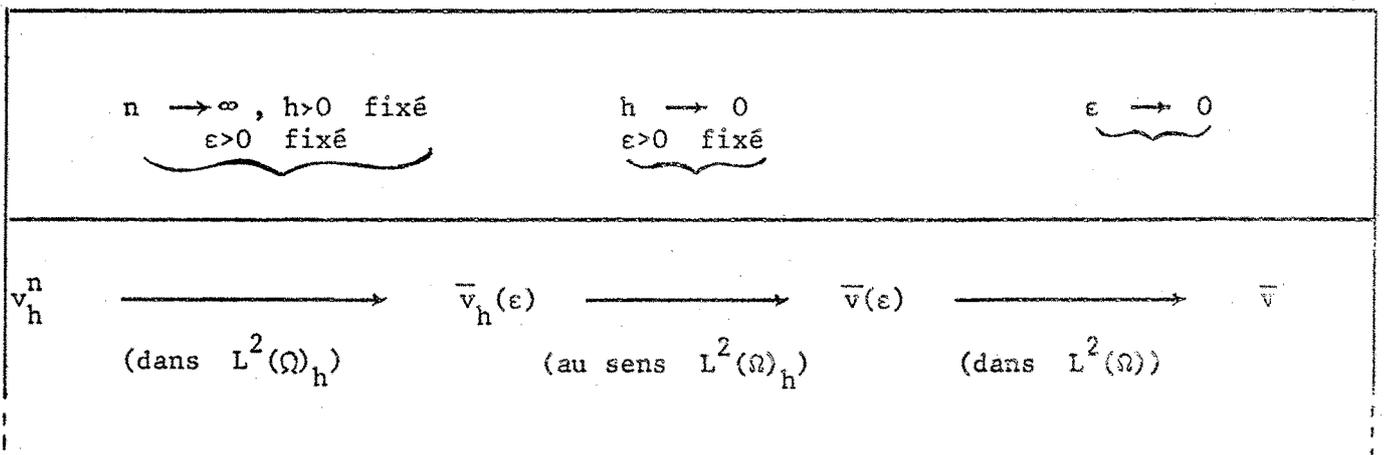
alors :

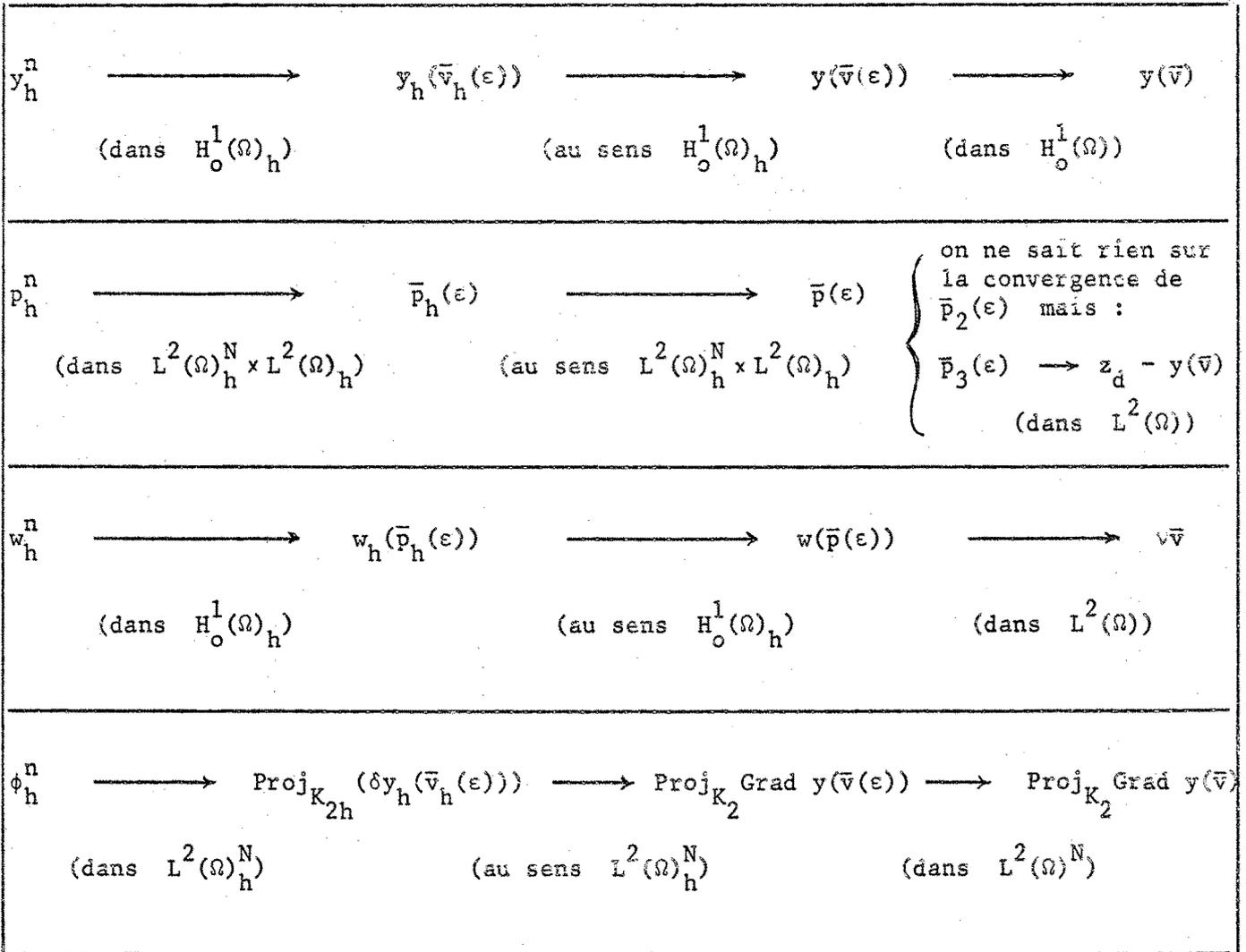
$$\overline{v}_h(\epsilon) \Big|_{\Omega} = \frac{1}{v} w_h(\overline{p}_h(\epsilon)) \Big|_{\Omega} \rightarrow \frac{1}{v} w(\overline{p}(\epsilon)) = \overline{v}(\epsilon)$$

(convergence dans  $L^2(\Omega)$  fort).

La convergence de  $y_h(\overline{v}_h(\epsilon))$  s'en déduit facilement ainsi que celle de  $\text{Proj}_{K_{2h}} \delta y_h(\overline{v}_h(\epsilon))$  ce qui achève la démonstration du théorème 4.5.2.

On utilise ensuite le théorème 4.3 qui établit la convergence de  $\overline{v}(\epsilon)$  vers  $\overline{v}$  et l'on obtient en résumé le tableau suivant :





où  $\bar{v}_h(\varepsilon)$  (resp.  $\bar{v}(\varepsilon)$  ; resp.  $\bar{v}$ ) est la solution du "problème primal pénalisé discret" (resp. "problème primal pénalisé" ; resp. Problème primal) et  $\bar{p}_h(\varepsilon)$  (resp.  $\bar{p}(\varepsilon)$ ) est la solution du "problème dual régularisé discret" (resp. "problème dual régularisé").

Enfin lorsque  $v = 0$  et lorsque le problème dual  $\mathcal{G}^*$  est sans contrainte sur l'état (cf. §.3) on peut approcher par une méthode analogue  $Cy(\bar{v})$  ainsi que  $\rho_1 \bar{v}$  et  $\rho_2 y(\bar{v})$ , mais cela ne permet pas d'atteindre le contrôle optimal et l'état optimal.

Bibliographie.

- [1] A. Brøndsted, R.T Rockafellar : On the subdifferentiability of convex functions. Proc. Am. Math. Soc., 16, 1965, p.605-611.
  - [2] J. Cea, R. Glowinsky et J.C. Nedelec : Minimisation de fonctionnelles non différentiables. Lecture Notes in Math. Conference on applications of Numerical Analysis. Springer Verlag, Dundee 1971.
  - [3] Ky Fan : Sur un théorème minimax. C.R.A.S. Paris, 259-3925-3928, 1964.
  - [4] J.L. Lions : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Gauthier-Villiar, Paris 1968.
  - [5] J.L. Lions, R. Tremolières, R. Glowinski : Algorithmes d'optimisation. I.R.I.A. Chap.II, p.43-46.
  - [6] J.J. Moreau : Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles. Collège de France. 1966.
  - [7] R.T. Rockafellar : Duality and stability in extremum problems involving convex functions. Pac. J. of Math., 21, 1967, p.167-187.
  - [8] R. Temam : Calcul des variations. Cours de 3ème cycle, Fac des Sc. Orsay, 1971.
  - [9] R. Temam : Etude d'un problème non linéaire lié aux équations de Maxwell. Convegno su "problemi di analisi numerica", Rome, Janvier 1972.
  - [10] R. Temam : Analyse numérique. Collection S.U.P. Presses Universitaires de France.
-