

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

2648 1

203



Sur la condition de Carleson dans la boule unité
de C^m

Anna Maria Mantero

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

Sur la condition de Carleson dans la boule unité de \mathbb{C}^m

Anna Maria Mantero

INTRODUCTION.

Soit D le disque unité de \mathbb{C} et λ la mesure de Lebesgue sur le bord ∂D de D . Soit $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans D . On rappelle que pour $0 < p < \infty$, $H^p(D)$ est l'adhérence de $H^\infty(D)$ dans $L^p(\lambda)$.

Soit alors $\{z_j ; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans D ; L. Carleson [1], pour résoudre un problème d'interpolation associé à $H^\infty(D)$ a démontré et utilisé le théorème suivant :

THEOREME. Soit $\{z_j ; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans D . Alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes :

(a) Il existe une constante c_p positive, $0 < p < \infty$, telle que pour toute fonction $f \in H^p(D)$ on a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |f(z_j)|^p (1 - |z_j|^2) \leq c_p \|f\|_{H^p}^p.$$
$$(b) \sup_k \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - z_j \bar{z}_k|^2} < +\infty.$$

On va généraliser ce théorème au cas de la boule unité B de \mathbb{C}^m . Définissant les $H^p(B)$, $0 < p < \infty$ de manière analogue, on va démontrer le théorème suivant :

THEOREME. Soit $\{z_j, j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans B . Alors (a) et (b) sont équivalents :

(a) Il existe une constante $c_p > 0$, $0 < p < \infty$ telle que pour toute fonction $f \in H^p(B)$ on ait

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |f(z_j)|^p (1 - |z_j|^2)^m \leq c_p \|f\|_{H^p(B)}^p$$

$$(b) \sup_k \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m < +\infty.$$

Utilisant le théorème de Hörmander [2], il suffit de démontrer que la mesure

$$(1) \quad \mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_{z_j} (1 - |z_j|^2)^m$$

où δ_{z_j} est la masse de Dirac au point z_j , est une mesure de Carleson si et seulement si la condition (b) est satisfaite.

§1. NOTATIONS.

1. On appelle λ la mesure de Lebesgue normalisée sur le bord ∂B de B et, si E est un ensemble mesurable de ∂B , on notera $|E| = \lambda(E)$ sa mesure.

2. A chaque z dans B on associe l'ensemble suivant, pour une constante c fixée :

$$E_z^c = \{\zeta \in \partial B : |1 - \langle z, \zeta \rangle| \leq c(1 - |z|^2)\}.$$

On remarque que $|E_z^c|$ est équivalente à $(1 - |z|^2)^m$, l'équivalence étant uniforme en z .

On utilisera les propriétés suivantes des ensembles $\{E_z^c; z \in B\}$. [2].

(i) Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que si $E_z^c \cap E_{z'}^c \neq \emptyset$ et $|z| \geq |z'|$, alors $E_{C_1 z}^c \supset E_{z'}^c$, avec $z, z' \in B$.

(ii) Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $z \in B$ on ait :

$$|E_{C_1 z}^c| \leq C_2 |E_z^c|.$$

3. Soit $\{z_j; j \in \mathbb{N}\}$ une suite de points dans B . On dira que la mesure μ associée par (1) est une mesure de Carleson si pour tout $c > 0$ suffisamment grand, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout z dans B , on ait :

$$\mu(E_z^c) \leq K |E_z^c|.$$

On voit facilement que cela équivaut à : il existe $K > 0$ tel que pour toute partie finie J de \mathbb{N} on ait [3]:

$$\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| \leq K \left| \bigcup_{j \in J} E_{z_j}^c \right|.$$

§ 2. PREUVE DU THEOREME.

(a) \Rightarrow (b). D'après le théorème de Hörmander [2], μ est une mesure de Carleson

Donc on a, pour $c > 0$ suffisamment grand, qu'il existe une constante positive K telle que, pour tout J fini

$$(2) \quad \sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| \leq K \left| \bigcup_{j \in J} E_{z_j}^c \right|.$$

Fixons k . On définit B_k^c :

$$B_k^c = \left\{ z \in B : |1 - \langle z, z_k \rangle| \leq c(1 - |z_k|^2) \right\}.$$

La condition (2) entraîne que pour $J = \{j \in \mathbb{N} ; z_j \in B_k^c\}$ on a :

$$\sum_{j \in J} (1 - |z_j|^2)^m \leq K(1 - |z_k|^2)^m.$$

Donc

$$\sum_{j \in J} \left(\frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m \leq \sum_{j \in J} \left(\frac{1 - |z_j|^2}{1 - |z_k|^2} \right)^m \leq K.$$

Supposons maintenant que $z_j \notin B_k^c$. On définit pour $i \in \mathbb{N}$, $B_i = B_k^{2^i c}$. En

explicitant les calculs on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{z_j \notin B_k} \left(\frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{z_j \in B_{i+1} \setminus B_i} \left(\frac{(1 - |z_j|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^m}{[2^i c (1 - |z_k|^2)]^{2m}} \sum_{z_j \in B_{i+1} \setminus B_i} (1 - |z_j|^2)^m \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{c^{2m}} \frac{1}{2^{2im} (1 - |z_k|^2)^m} (2^{i+1})^m c^m (1 - |z_k|^2)^m = \\ &= \frac{1}{c^m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m}{2^{im}} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc (b) est prouvé.

(b) \Rightarrow (a). Fixons la constante c . Pour prouver cette implication on considère un ensemble fini J d'entiers positifs. Sans perte de généralité, on peut supposer que $J = \{1, 2, \dots, N\}$ et que les ensembles $\{E_{z_j}^c ; j \in J\}$ sont numérotés selon leur mesure décroissante

$$|E_{z_1}^c| \geq |E_{z_2}^c| \geq \dots \geq |E_{z_N}^c|.$$

①. On fait d'abord l'hypothèse supplémentaire que tout ensemble $E_{z_j}^c$ est contenu dans l'ensemble $E_{z_1}^c$. Dans ce cas, on obtient que :

$$\begin{aligned}
& +\infty > \sup_k \sum_{j \neq k} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\langle z_j, z_k \rangle|^2} \right)^m \geq \\
& \geq \sum_{j \in J}^{j \neq 1} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\langle z_j, z_1 \rangle|^2} \right)^m \geq \\
& \geq \frac{1}{c^{2m}} \sum_{j \in J}^{j \neq 1} \left(\frac{1-|z_j|^2}{1-|z_1|^2} \right)^m.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{j \in J}^{j \neq 1} (1-|z_j|^2)^m \leq K(1-|z_1|^2)^m.$$

(2). On revient au cas général. Soit $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, $1 \leq n \leq N$ une partition de J ainsi déterminée :

$$I_1 = \{j \in J : E_{z_1}^c \cap E_{z_j}^c \neq \emptyset\}.$$

Si $I_1 = J$ on s'arrête. Sinon, on appelle r_2 le plus petit entier dans J qui n'est pas dans I_1 . Et on pose ensuite :

$$I_2 = \{j \in J \setminus I_1 : E_{z_{r_2}}^c \cap E_{z_j}^c \neq \emptyset\}$$

$$I_n = \left\{ j \in J \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i : E_{z_{r_n}}^c \cap E_{z_j}^c \neq \emptyset \right\}.$$

Considérons les points suivants : $\{Z_i = C_1 z_{r_i}; 1 \leq i \leq n\}$ où C_1 est donné par la condition (i) de 2, page. 3 . C'est-à-dire C_1 est choisi de façon que tous les

ensembles $E_{z_j}^c$ soient contenus dans $E_{Z_i}^c$ pour $j \in I_i$. De plus, il vient

$$(3) \quad \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \in J}^{j \neq i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|Z_i|^2)}{|1-\langle z_j, Z_i \rangle|^2} \right)^m < +\infty.$$

En effet

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \in J}^{j \neq i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|Z_i|^2)}{|1-\langle z_j, Z_i \rangle|^2} \right)^m \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_i \sum_{j \in J}^{j \neq i} 2^{2m} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_i|^2)}{|1-\langle z_j, z_{r_i} \rangle|^2} \right)^m \leq \\ &\leq C_2 2^{2m} \sup_i \sum_{j \in J}^{j \neq i} \left(\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_{r_i}|^2)}{|1-\langle z_j, z_{r_i} \rangle|^2} \right)^m < +\infty. \end{aligned}$$

Considérons alors $\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c|$. Ceci s'écrit

$$\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \in I_i} |E_{z_j}^c|.$$

Grâce à (1) et à la propriété (3), il existe K' avec

$$\sum_{j \in I_i} |E_{z_j}^c| \leq K' |E_{z_{r_i}}^c|.$$

Mais la propriété (ii) de 2. entraîne que

$$\sum_{j \in I_i} |E_{z_j}^c| \leq K' C_2 |E_{z_{r_i}}^c|,$$

d'où

$$\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| \leq K' C_2 \sum_{1 \leq i \leq n} |E_{z_{r_i}}^c|.$$

Utilisant maintenant le fait que les $\{E_{z_{r_i}}^c\}$ sont disjoints, on obtient :

$$\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| \leq K' C_2 \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_{z_{r_i}}^c \right|.$$

Donc a fortiori :

$$\sum_{j \in J} |E_{z_j}^c| \leq K \left| \bigcup_{j \in J} E_{z_j}^c \right|.$$

Ce qui prouve (b).

§ 3. GENERALISATIONS.

Ce théorème se généralise aisément au cadre abstrait défini par Hörmander dans [2]. Les démonstrations consistent à se ramener à des mesures de Carleson et à appliquer le théorème de Hörmander [2].

1. Soit D un domaine de classe C^∞ borné dans \mathbb{R}^n . A chaque point $z \in D$ assez près du bord pour qu'il n'ait qu'une seule projection ζ sur ∂D , on associe l'ensemble, pour c fixé,

$$B(z, c) = E(\zeta, c\rho) \cap \partial D$$

où ρ est la distance euclidienne de z à ∂D et $E(\zeta, c\rho)$ est la boule euclidienne de centre ζ et de rayon $c\rho$. A tout couple (z, w) dans $D \times D$ on associe la "distance" :

$$\rho(z, w) = \inf_{t \in D} \left\{ |B(t, c)| ; B(z, c) \subset B(t, c) \text{ et } B(w, c) \subset B(t, c) \right\}.$$

Soit $P_z(\zeta)$ le noyau de Poisson de D associé à la mesure d'aire λ sur ∂D .

La classe des intégrales de Poisson de fonctions de $L^p(\lambda)$, $1 < p < \infty$, sera notée $H^p(D)$. Si $\{z_j ; j \in \mathbb{N}\}$ est une suite dans D on peut énoncer le

THEOREME. Les deux conditions sont équivalentes :

(a) Il existe c_p , $1 < p < \infty$ tel que $\forall f \in H^p(D)$ on a

$$\sum_j |f(z_j)|^p \cdot |B(z_j, c)| \leq c_p \|f\|_{H^p}^p$$

(b) $\sup_k \sum_{j \neq k} \frac{|B(z_j, c)| \cdot |B(z_k, c)|}{[\rho(z_j, z_k)]^2} < +\infty.$

2. Soit D un domaine strictement pseudo-convexe de \mathbb{C}^m . A chaque point $z \in D$ de projection ζ sur ∂D on associe

$$B(z, c) = E(\zeta, c\rho) \cap \partial D$$

avec ρ la distance euclidienne de z à ∂D et $E(\zeta, c\rho)$ la boule de

Hörmander [2] de centre ζ et de rayon $c\rho$. A tout couple $(z, w) \in D \times D$ on

associe la "distance" :

$$\rho(z, w) = \inf_{t \in D} \left\{ |B(t, c)| : B(z, c) \subset B(t, c) \text{ et } B(w, c) \subset B(t, c) \right\}.$$



Soit λ la mesure de Lebesgue au bord de ∂D et $H^p(\lambda)$, $0 < p < \infty$ l'adhérence dans $L^p(\lambda)$ des fonctions analytiques et bornées dans D . On a alors :

THEOREME. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe c_p , $0 < p < \infty$ tel que $\forall f \in H^p(D)$ on ait

$$\sum_j |f(z_j)|^p \cdot |B(z_j, c)| \leq c_p \|f\|_{H^p}^p.$$

(b) $\sup_k \sum_{j \neq k} \frac{|B(z_j, c)| \cdot |B(z_k, c)|}{[\rho(z_j, z_k)]^2} < +\infty.$

Bibliographie

- [1] CARLESON, L. An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).
- [2] HÖRMANDER, L. L^p estimates for (pluri-)subharmonic functions. Math. Scand. 20 (1967).
- [3] VAROPOULOS, N. Sur un problème d'interpolation. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972).