UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

Approximation et transfert d'opérateurs de convolution

Noël Lohoué

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

APPROXIMATION ET TRANSFERT D'OPERATEURS DE CONVOLUTION

par Noël Lohoué

0. Une généralisation du théorème suivant permet d'obtenir un résultat de transfert des opérateurs de convolution.

THEOREME 0. Soit Λ_n une suite de réseaux dans $\mathbb{R}$ dont le pas tend vers zéro. Soit $\overline{\Lambda} = \cup \Lambda_n$. Alors pour tout convoluteur S de $L^p(\mathbb{R})$ à support compact, il existe une suite S_N de mesures discrètes portées par $\overline{\Lambda}$ telles que :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \|S_n\|_{PM_p(\mathbb{R})} = \|S\|_{PM_p(\mathbb{R})}$.

2) Pour toute fonction f de $L^p(\mathbb{R})$, la suite $S_N * f$ converge vers $S * f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Nous indiquerons sa généralisation en temps utile.

Considérons maintenant deux groupes abéliens localement compacts G_1 et G_2 et $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme injectif, continu. Soit $1 \le p \le \infty$ et $L^p(G)$ l'espace Banach classique pour la mesure de Haar de G. Soit S un opérateur de convolution de $L^p(G_1)$, si S est assez régulier, par exemple, sa transformée de Fourier est une fonction continue, l'image hoS de S existe comme opérateur de convolution de $L^p(G_2)$. On obtient ainsi une contraction d'un certain sous-espace de l'algèbre de

(*) Ce travail nous a été proposé par C. S. Herz durant notre séjour à McGill Université à Montréal, nous le remarcions pour les suggestions qu'il nous a faite sur la rédaction.

Banach $PM_p(G_1)$ des opérateurs de convolution de $L^p(G_1)$ dans $PM_p(G_2)$.

Un bon choix de réseaux dans des groupes de la forme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \times F$, F étant un groupe fini, conduit, grâce à une généralisation du théorème 0 dans ces groupes, au théorème suivant :

THEOREME 1. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts ; soit $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme continu, injectif de G_1 dans G_2. Le prolongement de h à $UPM_p(G_1)$ défini comme suit :

(*) $\quad \forall S \in UPM_p(G_1) \quad , \quad \forall f \in A_p(G_2) \quad , \quad \langle hoS, f\rangle = \langle S, foh\rangle$

est une isométrie de $UPM_p(G_1)$ dans $UPM_p(G_2)$.

Ce théorème est suivant une terminologie que nous avons introduite dans [6] un théorème de transfert ; il améliore profondément le résultat de cet article.

C'est le résultat le plus précis, dans ce contexte, qui généralise un théorème de K. de Leeuw prouvé dans [5].

La démonstration que nous proposons ici s'inspire de celle que nous avons faite dans [6] pour un résultat analogue ; malheureusement elle ne s'adapte pas aux groupes non commutatifs.

Dans le language des multiplicateurs le théorème 1 s'énonce comme suit :

THEOREME 2. Soient Γ_2 et Γ_1 deux groupes abéliens localement compacts ; soit $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un homomorphisme continu, d'image dense et soit $m : \Gamma_2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes ; on pose alors $m_1 = moh$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(*) (voir définition ci-dessous (1))

a) m est un multiplicateur de $\mathfrak{F}L^p(G_2)$

b) m_1 est un multiplicateur de $\mathfrak{F}L^p(G_1)$.

Dans ces conditions la norme de m comme multiplicateur est égale à celle de m_1.

L'équivalence des théorèmes 1 et 2 résulte d'une régularisation standard ; toutefois le lecteur qui aurait du mal à la rétablir pourra trouver une démonstration analogue dans [6].

Les deux résultats précédents sont liés à certaines algèbres de groupe que nous définissons maintenant.

(1) Notations et définitions.

1) Nous adoptons les notations et définitions de $A_p(G)$, $PM_p(G)$, $M_p(G)$ qui se trouvent dans [3].

Rappelons seulement que :

i) $PF_p(G)$ est la fermeture de $L^1(G)$ considéré comme sous-espace de $PM_p(G)$.

ii) $UPM_p(G)$ est la fermeture normique dans $PM_p(G)$ de la sous-algèbre formée des convoluteurs à support compact.

iii) $B_p(G)$ est l'algèbre de Banach des multiplicateurs de $A_p(G)$.

2) Soit E un sous-ensemble fermé de G ; nous notons $I_p(E)$ l'idéal fermé de $A_p(G)$ des fonctions qui s'annulent sur E.

On note $A_p(E)$ l'algèbre de Banach $A_p(G) | I_p(E)$, pour la norme quotient ;

elle s'identifie à l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A_p(G)$.

Un corollaire immédiat du théorème 1 est le suivant :

COROLLAIRE 1. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts ; soit $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme continu, injectif ; soit E_1 un sous-ensemble compact de G_1 et soit $E_2 = h(E_1)$. Alors $A_p(E_1)$ est isométriquement isomorphe à $A_p(E_2)$.

Une fois qu'on a prouvé le théorème 1, la preuve de ce corollaire est analogue à celle faite pour $p = 2$ dans [4] ; c'est pourquoi nous ne la répéterons pas ici.

Le second corollaire décrira une propriété de densité de certains sous-espaces de $B_p(G)$.

COROLLAIRE 2. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts ; soit $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme continu, d'image dense de G_1 dans G_2.

L'image de la boule unité de $A_p(G_2)$ par l'application $f \to f{\circ}h$ est dense dans la boule unité de $B_p(G_1)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de G_1. Plus précisément, étant donnée une fonction f de $B_p(G)$, il existe un filtre $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ de fonctions de $A_p(G_2)$ tel que :

i) $\forall \beta \quad \|f_\beta\|_{A_p(G_2)} \leq \|f\|_{B_p(G_1)}$

ii) Le filtre $f_\beta{\circ}h$ converge uniformément sur tout compact de G_1 vers f.

Ce travail est organisé de la façon suivante.

Dans la première partie, nous établissons le théorème 0 et prouvons le théorème 1 dans un cas particulier qui contient les idées essentielles.

Dans la seconde partie, nous réduisons la preuve du théorème 1 à celle d'un cas particulier dont la preuve n'est qu'une copie du cas particulier déjà établi dans la première.

Au dernier paragraphe, nous donnons la démonstration d'un lemme que nous avons utilisé dans le texte sans preuve.

I.1. Démonstration du théorème 0.

Puisque S est dans $UPM_p(R)$, il suffit de prouver le théorème pour tous les convoluteurs à support compact ; dans ce cas, on voit par une régularisation standard qu' suffit encore de le prouver pour tout sous-espace dense de $L^1(\mathbb{R})$; nous pouvons donc nous contenter du sous-espace de $L^1(\mathbb{R})$ constitué des fonctions f dont la transformée de Fourier est à support compact.

Nous ferons alors la:

Construction

Notons N_n l'inverse du pas de Λ_n ; il s'en suit que $\Lambda_n = N_n^{-1}\mathbb{Z}$; soit $\Lambda_n^{\perp} = N_n\mathbb{Z}$, alors il existe n_o tel que pour tout $n > n_o$, le support de $\hat{f}$ soit contenu dans l'intervalle $[-N_n, N_n]$. Fixons $n \geq n_o$; il existe une fonction sommable $\theta : R \to \mathbb{C}$, dont la norme ne dépasse pas $(1+\frac{1}{n})^{1/2}$ telle que le support de $\hat{\theta}$ soit compact et $\hat{\theta}$ vaut 1 sur l'intervalle $[-N_n, N_n]$.

Choisissons une autre fonction sommable $\theta' : R \to \mathbb{C}$ dont la somme ne dépasse pas $(1+\frac{1}{n})^{1/2}$ telle que $\hat{\theta}'$ soit à support compact, vaille 1 sur le support de $\hat{\theta}$.

Alors il existe un réseau Λ_{n_1} dont l'inverse du pas N_{n_1} est tel que le support de $\hat{\theta}'$ soit contenu dans l'intervalle $[-N_{n_1}, N_{n_1}]$.

On pose $\theta_n = \theta$; $\theta'_n = \theta'$; $f_{N_n} = \frac{1}{2N_{n_1}} \sum_{\lambda \in \Lambda_{n_1}} f(\lambda)\delta_\lambda$.

L'estimation de la norme de f_{N_n} résultera de la

PROPOSITION 0. <u>On a l'encadrement suivant des normes :</u>

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \|f_{N_n}\|_{PM_p(R)} \leq \|f\|_{PM_p(R)} \leq (1+\tfrac{1}{n})^{1/2} \|f_{N_n}\|_{PM_p(R)} .$$

La preuve de cette proposition découlera du

LEMME 0. <u>Soit</u> T <u>l'opérateur défini sur l'espace des suites finies de</u> Λ_{n_1}, <u>prenant ces valeurs dans l'espace des fonctions sur</u> $\mathbb{R}$ <u>par</u> :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad T\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n_1}} \theta_n(x-\lambda)\,\varphi(\lambda).$$

<u>Alors pour tout</u> $1 \leq p \leq \infty$, T <u>se prolonge continûment en un opérateur de</u> $\ell^p(\Lambda_{n_1})$ <u>dans</u> $L^p(R)$ <u>dont la norme ne dépasse pas</u> $(2N_{n_1})^{1/p'}(1+\frac{1}{n})^{1/p'}$; p' <u>est l'exposant conjugué de</u> p.

En effet, nous avons prouvé dans (6) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{\lambda \in \Lambda_{n_1}} |\theta_n(x-\lambda)|$ ne dépasse pas le produit $\|\theta_{N_n}\|_1 \|\theta'_{N_n}\|_1 \, 2N_{n_1}$.
C'est d'ailleurs une inégalité classique, voir par exemple (H).

Par le choix des θ_{N_n} cette quantité ne dépasse pas $(1+\frac{1}{n})\,2N_{n_1}$.

Il s'en suit que :

$$\|T\varphi\|_\infty \leq (1+\tfrac{1}{n})2N_{n_1} \|\varphi\|_\infty$$

D'autre part

$$\Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda_{n_1}} \theta_n(x-\lambda)\,\varphi(\lambda) \Big\|_1 \leq (1+\tfrac{1}{n})^{1/2} \|\varphi\|_1 .$$

Le théorème d'interpolation de Riesz donne l'inégalité énoncée dans le lemme.

Terminons alors la preuve de la proposition 0.

Considérons deux suites finies φ_1 et φ_2 sur Λ_{n_1} ; comme f_{N_n} est une mesure portée par Λ_{n_1}, $f_{N_n} * \varphi$ est bien définie et il est aisé de voir que :

$$f_{N_n} * \varphi_1 * \varphi_2(0) = \frac{1}{2N_{n_1}} f * T\varphi_1 * T\varphi_2(0).$$

Par conséquent, le lemme 0 donne l'estimation :

$$\left|f_{N_n} * \varphi_1 * \varphi_2(0)\right| \leq \|f\|_{PM_p(R)}(1 + \tfrac{1}{n}) \|\varphi_1\|_p \|\varphi_2\|_p ,$$

Il s'en suit que $\|f_{N_n}\|_{PM_p(\Lambda_{n_1})} \leq (1 + \frac{1}{n}) \|f\|_{PM_p(R)}$.

Puisque Λ_{n_1} est un sous-groupe de R, le théorème (6) dit que

$$\|f_{N_n}\|_{PM_p(R)} = \|f_{N_n}\|_{PM_p(\Lambda_{n_1})}$$

d'où la première inégalité de la proposition.

Pour obtenir la seconde, il suffit de remarquer que

$$f = f_{N_n} * \theta_n$$

et d'utiliser l'estimation sur θ_{N_n}.

Fin de la preuve du théorème 0.

Il est clair que la suite des $\{f_{N_n}\}$ converge fortement vers f.

L'encadrement des normes donné par la proposition 0, termine la preuve du théorème, quitte à passer éventuellement à une sous-suite de $\{f_{N_n}\}$.

I.2. Preuve du théorème 1 dans un cas particulier : $h : R \to T^2$.

Il suffit, grâce au lemme (III.0) de prouver le théorème pour les fonctions f de $L^1(R)$ dont la transformée de Fourier est à support compact. La preuve du théorème est basée sur le :

LEMME 1. <u>Il existe une suite Λ_n de réseaux dont le pas tend vers 0, une suite $h'_n : \mathbf{T}^2 \to \mathbb{R}/\Lambda_n$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :</u>

$$\begin{tikzcd} \Lambda_n \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathbf{T}^2 \arrow[dl] \\ & \mathbb{R}/\Lambda_n . & \end{tikzcd}$$

La preuve de ce lemme est élémentaire, nous la laissons au lecteur.

Nous prouverons le résultat ci-dessous dont les idées essentielles sont celles de la proposition 0.

<u>PROPOSITION</u> 1. <u>Soit $\{f_{N_n}\}$ la suite des mesures discrètes donnée par le théorème 0 associé au réseau ci-dessus. Pour tout n,</u>

$$\|h \circ f_{N_n}\|_{PM_p(\mathbf{T}^2)} \leq (1 + \tfrac{1}{n})^2 \, \|f \circ f\|_{PM_p(\mathbf{T}^2)}.$$

Pour prouver cette proposition nous aurons besoin d'un lemme dont l'énoncé nécessite quelques notations.

On note $\hat{h} : \mathbf{Z}^2 \to \mathbb{R}$ l'homomorphisme dual de h et l'on veut factoriser h en deux homomorphismes, l'un injectif d'image dense h_1, et l'autre injectif h_2. On pose $\Gamma = \hat{h}(\mathbf{Z}^2)$ qu'on munit de la topologie discrète et on note G son groupe dual.

Il est clair qu'il existe un homomorphisme $h_1 : \mathbb{R} \to G$, injectif d'image dense et un isomorphisme $h_2 : G \to \mathbf{T}^2$ tel que $h = h_2 \circ h_1$, il suffit de regarder par dualité et de remarquer que l'injectivité de h entraîne qu'il soit d'image dense.

On note H_n le sous-groupe fermé de G, engendré par l'image $h_1(\Lambda_n)$. Si l'on regarde tout cela en termes de diagramme, on trouve :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "h_1"] & G \arrow[r, "h_2"] & T^2 \\ \Lambda_n \arrow[u, "i_1"] \arrow[r] & H_n \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

Nous prouverons alors le :

LEMME 2. On utilise les réseaux Λ_{n_1} qui ont donné la construction des $f_{N_{\overline{n}}}$ dans la proposition 0. La fonction θ_n étant celle de la proposition 0 ; pour tout polynôme trigonométrique P sur G et tout $Y\in G$

$$\int_{H_{n_1}} |(h_1 \circ \theta_n) * P(y-u)|du \leq (1+\tfrac{1}{n})^{1/2}\|P\|_{L^1(G)}.$$

Preuve du lemme 2.

Il suffit de le prouver pour tout $y = h(x)$, $x\in R$, puisque h_1 est d'image dense. Pour tout $x\in R$, il existe une suite S_j de fonctions sommables sur la droite de norme $L^1(R)$ dominée par $\|P\|_{L^1(G)}$ telle que $h_1 o S_j$ converge faiblement vers $P(h(x)-u)du$. Cette affirmation ne découle pas d'une régularisation standard. Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach à la boule unité de $h_1 o L^1(R)$ vue dans $PM_1(G)$; soit $\Lambda^{\perp}_{n_1} = N_{n_1}\mathbb{Z}$ et soit $T_{n_1} = R/\Lambda^{\perp}_{n_1}$. La transformée de Fourier de $P(h(x) - u)du$ n'est autre que la fonction

$$\hat{Q}_n(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda^{\perp}_{n_1}} \hat{\theta}_n(z-\lambda)\hat{P}(z-\lambda)e^{i(z-\lambda)x}$$

vue dans $\Gamma/\Lambda^{\perp}_{N_{n_1}}$.

D'autre part, on a prouvé dans (6), que la fonction

$$\hat{S}'_j(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda^{\perp}_{n_1}} \hat{\theta}_n(t-\lambda)\hat{S}_j(t-\lambda)e^{i(t-\lambda)x}.$$

Comme élément ~~dans~~ de $A_2(T_{n_1})$ est de norme inférieure ou égale à $\|\theta_n\|_1\|S_j\|_1$, par conséquent inférieure ou égale à $(1+\frac{1}{n})^{1/2}\|P\|_{L^1(G)}$, d'après le choix de $\hat{\theta}_n$ et $\hat{S}_j$.

Mais la suite $\hat{S}'_j$ qui est dans $B_2(\hat{H}_N)$ converge ponctuellement vers $\hat{Q}$: cela est aisé puisque la suite $\hat{S}_j$ converge ponctuellement vers $\hat{P}$ et qu'à cause du choix des $\hat{\theta}_n$, pour z et t fixés, les sommes qui interviennent sont en nombre fini.

$\hat{Q}$ étant une limite ponctuelle de fonctions de $B_2(\hat{H}_n)$ bornées en normes par $(1+\frac{1}{n})^{1/2}\|P\|_1$, elle est dans $B_2(\hat{H}_n)$ et sa norme ne dépasse pas $(1+\frac{1}{n})^{1/2}\|P\|_1$, d'après le théorème de Bochner. Ce qui termine la preuve du lemme.

Preuve de la proposition. On refait presque la même démonstration que dans la proposition 0 avec une légère modification.

La transformée de Fourier de $h_1 \circ f_{N_n}$, n'est autre que la restriction $\hat{f}'_{N_n}$ de $\hat{f}_{N_n}$ à Γ ; elle peut être lue sur $\Gamma/\Lambda^{\perp}_{n_1}$. Il existe une suite $\{r_\ell\}$ de polynômes trigonométriques $\|r_\ell\|_1 \leq (1+\frac{1}{n})^{1/2}$ tel que $\hat{r}_\ell$ converge ponctuellement vers θ_n.

1) Reprenons les notations du lemme [2] et considérons l'opérateur T_ℓ défini sur les fonctions continues sur H_{N_1}, comme suit :

$$\forall\Phi, \qquad T_\ell\Phi(y) = \int_{H_{n_1}} (h_1 \circ \theta\ ) * r_\ell(y-u)\,\phi(u)\,du.$$

Le lemme [2] prouve que $\|T_\ell\Phi\|_\infty \leq (1+\frac{1}{n})^{1/2}\|r_\ell\|_{L^1(G)}\|\Phi\|_\infty \leq (1+\frac{1}{n})\,\|\Phi\|_\infty$

Il est trivial que $\|T_\ell\Phi\|_1 \leq \|\theta_n\|_1\|r_\ell\|_1\|\Phi\|_1 \leq (1+\frac{1}{n})\|\Phi\|_1$.

Par interpolation, on trouve que $\|T_\ell\Phi\|_p \leq (1+\frac{1}{n})\,\|\Phi\|_p$.

2) Il est aisé de vérifier que :

$$(h_1 \circ f_{N_n}) * (r_\ell * \varphi_1) * (r_\ell * \varphi_2)(0)$$

$$= (h_1 \circ f) * T_\ell \Phi_1 * T_\ell \varphi_2(0), \quad \text{pour} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \quad \text{continues}$$

sur H_{n_1}.

Par conséquent l'inégalité précédente dit que :

$$\left|(h_1 \circ f_{N_n}) * (r_\ell * \Phi_1) * (r_\ell * \Phi_2)(0)\right|$$

$$\leq \left[1 + \frac{1}{n}\right] \|\Phi_1\|_p \|\Phi_2\|_p \qquad \|h_1 \circ f\|_{PM_p(G)}.$$

D'autre part, il est aisé de prouver (il suffit de le vérifier quand Φ_1 et Φ_2 sont des caractères), que

$$\lim_{\ell \to +\infty} h_1 \circ f_{N_n} * r_\ell * \Phi_1 * r_\ell * \Phi_2(0)$$

$$= (h_1 \circ f_{N_n}) * \Phi_1 * \Phi_2(0).$$

Il s'en suit que :

$$\|h_1 \circ f_{N_n}\|_{PN(H_{N_{n_1}})} \leq (1 + \frac{1}{n})^2 \|h_1 \circ f\|_{PM_p(G)}.$$

La proposition est ainsi démontrée.

~~Pour prouver ce théorème nous aurons encore besoin du~~

Λ_{n_1} désignant le réseau dont la construction a été donnée à la page (5) on veut indiquer le lemme suivant qui est une succession d'applications du théorème [6.II.2].

LEMME 3.

i) $\|h \circ f\|_{PM_p(\mathbf{T}^2)} = \|h_1 \circ f\|_{PM_p(G)}$;

ii) $\|h \circ f_{N_n}\|_{PM_p(\mathbf{T}^2)} = \|h_1 \circ f_N\|_{PM_p(H_{n_1})} = \|h_1 \circ f_N\|_{PM_p(G)}$

iii) $\|h_1 \circ f_N\|_{PM_p(H_{n_1})} = \|f_{N_n}\|_{PM_p(\Lambda_{n_1})} = \|f_N\|_{PM_p(\mathbf{R})}$.

Les assertions i) et ii) sont élémentaires comme nous l'avons déjà dit ; seule iii) mérite une explication, mais elle n'est autre que la version du théorème 1, pour les homomorphismes partant d'un groupe discret, prouvée dans [6].

Fin de la preuve du théorème 1.

Soit f une fonction sommable sur la droite dont la transformée de Fourier est à support compact. Le lemme 1 nous prouve l'existence d'une suite de réseaux et le théorème 0 dit qu'il existe une suite f_{N_n} de mesures portées par $\bar{\Lambda}$, en fait portée par Λ_{n_1} voir page (5) telle que

$$\|f\|_{PM(\mathbf{R})} = \lim_{n\to\infty} \|f_{N_n}\|_{PM(\mathbf{R})}.$$

D'après le lemme 3, il suffit de prouver que $\|f\|_{PM_p(\mathbf{R})} \leq \|h_1 \circ f\|_{PM_p(G)}$. Mais cette inégalité découle simplement du lemme 3 et de la proposition 1 puisque

$$\|f\|_{PM_p(\mathbf{R})} = \lim_{n\to\infty} \|f_{N_n}\|_{PM_p(\Lambda_{n_1})} = \lim_{n\to\infty} \|h_1 \circ f_{N_n}\|_{PM_p(G)} \leq \|h_1 \circ f\|_{PM_p(G)}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.

<u>II. Preuve du théorème 1.</u>

PROPOSITION . <u>Pour prouver le théorème ; il suffit de le prouver sous les hypothèses suivantes : $G_1 = \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{T}^m \times F$, F étant un groupe fini, G_2 est un groupe compact.</u>

Preuve de la proposition

Nous utiliserons abondamment les théorèmes de structures. Partons de deux groupes abéliens localement compacts quelconques G_1 et G_2, d'un homomorphisme injectif $h_1 : G_1 \to G_2$.

D'après le lemme (III 0) il suffit de prouver que pour tout convoluteur S à support compact, la norme de $h_1 o S$ dans $PM_p(G_2)$ vaut celle de S dans $PM_p(G_1)$.

1. Soit V un voisinage compact du support de S qui contient l'élément neutre de G_1 ; V engendre un sous-groupe ouvert G_3 de G_1, de la forme $G_3 = \mathbf{R}^{\ell_1} \times \mathbf{Z}^{\ell_2} \times H$ où H est un groupe compact ; la restriction de h à G_3 donne lieu à un homomorphisme injectif h_2 de G_3 dans le compactifié de Bohr G_4 de G_2.

On sait, voir (6) puisque S a son support dans G_3 que la norme de S dans $PM_p(G_3)$ vaut celle de S dans $PM_p(G_1)$.

Par ailleurs d'après (6) on sait aussi que :

$$\|h_1 \circ S\|_{PM_p(G_2)} = \|h_2 \circ S\|_{PM_p(G_4)}.$$

Conclusion:

Pour prouver le théorème, il suffit donc de le prouver dans le cas où $G_3 = \mathbf{R}^{\ell} \times \mathbf{Z}^m \times H$ et G_4 est un groupe compact.

2. La seconde simplification consistera à remarquer que sous les hypothèses ci-dessus, on peut se borner à prouver le théorème pour un triplet $(h\ , \mathbf{R}^m \times H, \mathbf{T}^{\alpha})$ où H est un groupe compact, h homomorphisme injectif de $\mathbf{R}^n \times H$ dans $\mathbf{T}^{\alpha}$.

a) En effet, soit α le groupe dual de G_4, qui est discret ; à tout élément x de G_4 associons l'élément f_x de T^{α} défini par : $f_x(\chi) = \chi(x)$, pour tout χ

dans α.

Il est clair que l'on définit ainsi un homomorphisme de G_2 dans $\mathbf{T}^\alpha$, qui identifie le premier groupe à un sous-groupe compact du second ; nous notons w cet homomorphisme et remarquons seulement qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{Z}^m \times H \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_3"'] & G_4 \arrow[dl, "w"] \\ \mathbf{T}^\alpha & \end{tikzcd}.$$

b) Nous voulons prolonger $h_3 = w \circ h_2$ à $\mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \times H$.

Soit χ un caractère sur $\mathbf{T}^\alpha$; l'application $(x,0,0) \longrightarrow \chi \circ h_3(x,0,0)$ définit un caractère de Z^m tel que $\chi \circ h_3(x,0,0) = e^{2\pi i\beta_\chi . x}$. On définit alors le prolongement h_4 de h_3 à $\mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \times H$ en termes de dualité par la formule : pour tout triplet $(X,Y,Z) \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \times H$,

$$\langle h_4(X,Y,Z), \chi \rangle = e^{2\pi i\beta_\chi X} \langle h_3(0,Y,Z), \chi \rangle$$

Malheureusement, l'homomorphisme h_4 ainsi défini peut ne pas être injectif ; nous corrigeons ce défaut en introduisant un autre homomorphisme $h_5 : \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \times H \longrightarrow \mathbf{T}^\alpha \times \mathbf{T}^m$ défini comme suit

$$h_5(X,Y,Z) = \left[h_4(X,Y,Z)\ ,\ \Pi(X)\right]$$

où Π est la projection canonique de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{T}^m$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{Z}^m \times H \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "h_3"] & G_4 \arrow[d, "w"] \\ \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \times H \arrow[dr, "h_5"] & \mathbf{T}^\alpha \arrow[d, "i_2"] \\ & \mathbf{T}^\alpha \times \mathbf{T}^m \end{tikzcd}.$$

Les homomorphismes i_1 et i_2 ont un sens évident dans ce diagramme.

c) Supposons le théorème prouvé pour $\mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{R}^{m}\times H$, $\mathbb{T}^{\alpha}\times\mathbb{T}^{m}$, h. Soit S un convoluteur à support compact sur $\mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{Z}^{m}\times H$; d'après (6) on sait que :

$$\|i_1 o S\|_{PM_p(\mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{R}^{m}\times H)} = \|S\|_{PM_p(\mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{R}^{m}\times H)}$$

$$\|i_2 o w o h_2 o S\|_{PM_p(\mathbb{T}^{\alpha}\times\mathbb{T}^{m})} = \|h_2 o S\|_{PM_p(G_4)}.$$

Il s'en suit qu'on aura :

$$\|S\|_{PM_p(\mathbb{R}^{\ell}\times\mathbb{R}^{m}\times H)} = \|h_2 o S\|_{PM_p(G_4)}.$$

3. Fin de la preuve de la proposition.

Supposons le théorème prouvé pour les groupes de la forme décrite par l'énoncé de la proposition. D'après les parties 1 et 2 de la proposition, pour avoir une preuve complète du théorème, il suffit de l'établir pour les triplets $\{h,\mathbb{R}^{n}\times H,\mathbb{T}^{\alpha}\}$, H étant un groupe compact.

Par ailleurs, le lemme (III.0) nous dit qu'il suffit de le prouver pour les fonctions f sommables sur $\mathbb{R}^{n}\times H$ dont la transformée de Fourier est à support compact.

Soit f une telle fonction ; considérons un voisinage V compact, symétrique du support de $\hat{f}$ qui contient l'élément neutre $\hat{0}$ du groupe dual $\mathbb{R}^{n}\times\hat{H}$; V engendre un sous-groupe ouvert Γ_5 de $\mathbb{R}^{n}\times\hat{H}$, de la forme $\Gamma_5=\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{Z}^{m}\times\hat{F}$ où $\hat{F}$ est un groupe fini, voir (8).

On remarque que $\Gamma_5\cap\hat{h}(\mathbb{Z}^{\alpha})$ est dense dans Γ_5 ; soit $\Gamma_6=\hat{h}^{-1}(\Gamma_5)$ et G_6 le groupe dual de Γ_6 ; alors h se prolonge en un homomorphisme $h^{*}:\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{Z}^{m}\times F\longrightarrow G_6$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} R^n \times T^m \times F \arrow[r, "h^*"] & G_6 \\ R^n \times H \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[r, "h"] & T^\alpha . \arrow[u, "\pi_2"'] \end{tikzcd}$$

Comme l'annulateur H_o de Γ_5 dans $R^n \times H$ est compact, l'annulateur de Γ_6 dans T^α est $h(H_o) = H_1$.

f, resp. hof, est une fonction H_o, resp H_1, périodique, par conséquent :

$$\|f\|_{PM_p(R^n \times H)} = \|\pi_1 o f\|_{PM_p(R^n \times T^m \times F)}$$

$$\|hof\|_{PM_p(T^\alpha)} = \|\pi_2 \circ h \circ f\|_{PM_p(G_6)}.$$

Comme le diagramme est commutatif, les deux égalités ci-dessus terminent la preuve de la proposition.

<u>Généralisation du théorème 0</u>.

Soit $\{\Lambda_n\}$ une suite de réseaux dans un groupe abélien $G = R^n \times T^m \times F$. On suppose que le pas de Λ_n tend vers 0 et on note $\bar{\Lambda} = U\Lambda_n$.

Soit S un convoluteur de $L^p(G)$, à support compact. Alors il existe une suite S_n de mesures à support fini, portées par $\bar{\Lambda}$ telles que :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\|_{PM_p(G)} = \|S\|_{PM_p(G)}$

b) pour toute f dans $L^p(G)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n * f - S * f\|_p = 0$.

La preuve de ce théorème est la même que celle du théorème 0.

Grâce à cet énoncé, la preuve du théorème 2, établie pour (R, T^2) au paragraphe précédent, se généralise sans difficulté pour les groupes de la forme $R^n \times T^m \times F$.

Démonstration du corollaire 2.

On sait que si h est injective, d'image dense, l'application, $f \to f \circ h$ de $A_p(G_2)$ dans $B_p(G_1)$ est une isométrie.(voir 6)

Soit $C(G)$ l'espace de Banach, pour la norme de la convergence uniforme sur G_1 des fonctions $f : G_1 \to \mathbb{C}$, continues et bornées. Rappelons qu'un système fondamental des voisinages de 0 dans $C(G)$ pour la topologie β de R. C. Buck est donnée par : $V_{\psi,\varepsilon} = \left\{\varphi \in C(G_1) \text{ , } \|\varphi\psi\|_\infty \leq \varepsilon\right\}$ où ψ est une fonction continue nulle à l'infini et $\varepsilon > 0$ un nombre réel arbitraire cf. [1].

Rappelons aussi que β coincide sur toute partie bornée (pour la norme de la convergence uniforme sur G_1) avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et que l'espace vectoriel dual de $C(G_1)_\beta$ est l'espace de Banach $M(G)$ des mesures de Radon bornées sur G.

Soit φ une fonction de $B_p(G_1)$; on peut supposer sans restreindre la généralité que $\|\varphi\|_{B_p(G_1)} \leq 1$. Soit Q_p l'image par l'application $f \to f \circ h$ de la boule unité de $A_p(G_2)$. Supposons que φ ne soit pas dans la fermeture de Q_p, pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. D'après le paragraphe précédent φ n'est pas dans la β-fermeture de Q_p ; le théorème "des bipolaires" dit que dans ces conditions on peut trouver une forme linéaire du β-dual de $C(G_1)$, par conséquent une mesure de Radon μ sur G_1, telle que :

$$\forall f \in A_p(G_2) \quad , \quad \|f\|_{A_p(G_2)} \leq 1, \qquad \left|\int_{G_1} f \circ h(x)\, d\mu(x)\right| \leq 1$$

et

$$\left|\int_{G_1} \varphi(x)\, d\mu(x)\right| > 1.$$

Alors $\quad \|\tilde{h}(\mu)\|_{PM_p(G_2)} \leq 1 \quad$ et $\quad \|\mu\|_{PM_p(G_1)} > 1$

ce qui est une contradiction avec le théorème 1.

Pour terminer, faisons une remarque sur les algèbres de restrictions $A_p(E)$.

Remarque.

L'analogue du théorème de G. Krein pour $A_2(\mathbb{R})$ existe en termes d'algèbre $A_p(\mathbb{R})$ et s'énonce :

Soit I un intervalle borné de la droite numérique $\mathbb{R}$; soit φ une fonction continue sur I telle qu'il existe une constante C_φ vérifiant la condition :

Pour toute mesure à support fini μ, portée par I :

$$\left|\int_I \varphi(x)\, d\mu(x)\right| \leq C_\varphi \|\mu\|_{PM_p(I)} \quad \text{alors} \quad \varphi \in A_p(I).$$

Donnons l'idée de la preuve.

Quitte à faire une translation suivie d'une homothétie, on peut toujours supposer que $I = [0,2\pi[$ et que φ s'annule en dehors d'un intervalle strictement contenu dans I. Alors on peut trouver une fonction θ de $A_2(\mathbb{R})$ qui vaut un sur le support de φ et nulle en dehors de I. Soit μ une mesure à support fini sur le cercle unité $\mathbf{T}$, elle s'identifie à une mesure μ', $\mathbf{Z}$ périodique sur la droite ; $\mu'\theta$ est une mesure à support dans $[0,2\pi[$ dont la norme dans $PM_p(\mathbb{R})$ ne dépasse pas une constante absolue multipliée par celle de μ dans $PM_p(\mathbf{T})$.

Alors [6] CH II permet de voir que φ est une fonction de $A_p(\mathbf{T})$. L'isomorphisme local de $A_p[\mathbf{T}]$ et $A_p(\mathbb{R})$ donne le résultat.

On peut généraliser ce résultat pour obtenir l'analogue du théorème de Rosenthal [7]. Il n'y a d'ailleurs pas de modifications sérieuses à faire sur la démonstration de Rosenthal.

III. LEMME 0.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes abéliens localement compacts ; soit $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un homomorphisme continue, d'image dense.

On suppose que pour toute fonction f de $A_2(\Gamma_2)$ à support compact, on ait l'égalité

$$\|f\|_{M_p(\Gamma_2)} = \|f \circ h\|_{M_p(\Gamma_2)}.$$

Alors pour toute fonction continue m sur Γ_2, si m est dans $M_p(\Gamma_2)$ $m_1 = m \circ h$ est dans $M_p(\Gamma_1)$ et il y a égalité de norme.

Démonstration du lemme.

Soit $m : \Gamma_2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur Γ_2, à valeurs complexes et soit $m_1 = m \circ h$. Il faut montrer que si m_1 est dans $M_p(\Gamma_1)$ alors :

i) m est dans $M_p(\Gamma_2)$

ii) $\|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)} = \|m\|_{M_p(\Gamma_2)}$.

Mais on sait [cf. 6, théorème I.2] que si m est dans $M_p(\Gamma_2)$, $m_1 \in M_p(\Gamma_1)$ et $\|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)} \leq \|m\|_{M_p(\Gamma_2)}$. Il suffit donc de prouver que m est dans $M_p(\Gamma_2)$ et que

$$\|m\|_{M_p(\Gamma_2)} \leq \|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}.$$

a) Pour toute fonction $\varphi \in L^1(\Gamma_2)$, $m_1' = [m * \varphi] \circ h$ est dans $M_p(\Gamma_1)$ et sa norme ne dépasse pas $\|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\varphi\|_{L^1(\Gamma_2)}$.

Soit $g : \Gamma_1 \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact, on va montrer que

$$\left|\int_{\Gamma_1} m_1'(\gamma_1)\, g(\gamma_1)\, d\gamma_1\right| \leq \|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\varphi\|_{L^1(\Gamma_2)}\|\hat{g}\|_{A_p(G_1)}.$$

En effet :

$$(1)\quad \int_{\Gamma_1} m_1'(\gamma_1)\, g(\gamma_1)\, d\gamma_1 = \int_{\Gamma_1}\left\{\int_{\Gamma_2} m\left(h(\gamma_1)-\gamma_2\right)\varphi(\gamma_2)\, d\gamma_2\right\} g(\gamma_1)\, d\gamma_1$$

$$= \int_{\Gamma_2}\left\{\int_{\Gamma_1} m\left(h(\gamma_1)-\gamma_2\right) g(\gamma_1)\, d\gamma_1\right\}\varphi(\gamma_2)\, d\gamma_2$$

si $\gamma_2 = h(\gamma_1')$ où $\gamma_1' \in \Gamma_1$

$$(2)\quad \left|\int_{\Gamma_1} m\left(h(\gamma_1)-h(\gamma_1')\right) g(\gamma_1)\, d\gamma_1\right|$$

$$\leq \|m_{1\gamma_1'}\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\hat{g}\|_{A_p(G_1)}$$

$$= \|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\hat{g}\|_{A_p(G_1)}$$

où $m_{1\gamma_1'}$ est la translatée de m_1 par $\gamma_1' : m_{1\gamma_1'}(\gamma_1) = m_1(\gamma_1 - \gamma_1')$.

Comme $h(\Gamma_1)$ est dense dans Γ_2 et ~~comme~~ que m est une fonction continue,

pour tout point γ_2 de Γ_2,

$$\left|\int_{\Gamma_1} m\left(h(\gamma_1)-\gamma_2\right) g(\gamma_1)\, d\gamma_1\right|$$

$$\leq \|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\hat{g}\|_{A_p(G_1)}.$$

Reportons cette inégalité dans (1) il vient :

$$\left|\int_{\Gamma_1} m_1'(\gamma_1)\, g(\gamma_1)\, d\gamma_1\right| \leq \|m_1\|_{M_p(\Gamma_1)}\|\hat{g}\|_{A_p(G_1)}\|\varphi\|_{L^1(\Gamma_2)}.$$

La majoration désirée, pour la norme de $m_1^!$, résulte de la dualité $A_p(G_1)$, $PM_p(G_1)$.

b) Soit $\{f_\alpha\}$ une approximation de l'unité de $A_2(\Gamma_2)$, f_α à support compact et soit $\{f_\beta\}$ une approximation de l'unité de $L^1(\Gamma_2)$, f_β à support compact.

Pour tout couple (α, β) $[mf_\alpha] * f_\beta$ est une fonction de $A_2(\Gamma_2)$ à support compact et d'après l'hypothèse du lemme et la partie a) :

$$\begin{aligned} \| [mf_\alpha] * f_\beta \|_{M_p(\Gamma_2)} &= \| \{ [mf_\alpha] * f_\beta \} oh \|_{M_p(\Gamma_1)} \\ &\leq \| [mf_\alpha] oh \|_{M_p(\Gamma_1)} \| f_\beta \|_{L^1(\Gamma_2)} \\ &\leq \| moh \|_{M_p(\Gamma_1)} \| f_\alpha oh \|_{B_2(\Gamma_1)} \\ &\leq \| moh \|_{M_p(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Le filtre $\{[mf_\alpha] * f_\beta\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$ est borné dans $M_p(\Gamma_2)$; on voit facilement qu'il admet une valeur d'adhérence qui est m, car la continuité de m montre que $\lim\limits_\alpha \lim\limits_\beta (mf_\alpha) * f_\beta = m$ uniformément sur tout compact de Γ_2. m est donc dans $M_p(\Gamma_2)$ et $\|m\|_{M_p(\Gamma_2)} \leq \|moh\|_{M_p(\Gamma_1)}$; ce qui termine la démonstration du lemme.

Bibliographie

[1] BUCK, R. C. Operator algebras and dual spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1953), 681-687.

[2] EYMARD, P. Séminaire N. Bourbaki. 22ème année 1969-1970. Exposé 367.

[3] HERZ, C. S. and DE LEEUW, K. On invariance properties of spectral synthesis set. Illinois J. Math. 1965, p. 221.

[4] HERZ, C. S. On spectral synthesis of bounded functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 181-232.

[5] DE LEEUW, K. On L^p multipliers. Ann. Math. 81 (1965), 365-379.

[6] LOHOUE, N. Thèse à paraître.

[7] ROSENTHAL, H. A caracterisation of restrictions of Fourier-Stieltjes transforms. Pacific J. Math. 23 (1967), 403-418.

[8] WEIL, A. Intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Act. Sci. et Litt., Gauthier-Villars (1938).

Noël Lohoué
Mathématiques (425)
Centre Scientifique d'Orsay
Université Paris-Sud
91405 ORSAY (France)