

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 210-76-62

ANALYSE THEORIQUE ET NUMERIQUE  
DE QUELQUES PROBLEMES D'OPTIMISATION  
INTERVENANT EN THEORIE DES STRUCTURES



CLAUDE JOURON

27086

Publication Mathématique d'Orsay

## TABLE DES MATIERES

I	-	<u>INTRODUCTION.</u>	I.1
II	-	<u>ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL.</u>	
		1. Enoncé du problème spectral.	II.1
		2. Continuité de $\lambda(u)$ et $w(u)$ .	II.4
		3. Dérivabilité de $\lambda(u)$ et $w(u)$ .	II.8
		4. Pseudo-concavité et Faible * semi-continuité supérieure de $\lambda(u)$ .	II.12
		5. Exemples.	II.16
III	-	<u>OPTIMISATION EN THEORIE DES STRUCTURES.</u>	
		1. Fonctions pseudoconvexes et quasiconvexes.	III.1
		2. Formulation des problèmes.	III.3
		3. Etude du problème $\mathcal{P}_0$ .	III.6
		4. Etude du problème $\mathcal{R}_0$ .	III.11
		5. Etude des problèmes : cadre abstrait.	III.12
		6. Etude des problèmes $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ .	III.21
		7. Etude des problèmes $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ .	III.31
IV	-	<u>DISCRETISATION DES PROBLEMES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.</u>	
		1. Approximation des espaces.	IV.1
		2. Approximation du problème spectral.	IV.4
		3. Approximation du problème $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ .	IV.11
		4. Résolution du problème discrétisé.	IV.17
		5. Résultats numériques.	IV.20

BIBLIOGRAPHIE.

I - INTRODUCTION.

Nous avons tenté dans ce travail de traiter deux types de problèmes se posant en optimisation des structures. Dans les deux cas la variable de contrôle est l'épaisseur de la structure et la fréquence fondamentale de vibration joue un rôle très important.

Le premier type de problème peut s'énoncer ainsi : minimiser le poids d'une structure tout en gardant la fréquence fondamentale de vibration identique à celle d'une structure d'épaisseur uniforme. Les travaux sur ce sujet sont nombreux, citons [18], [26], [1], [2], [8], [9], [24], [29]. On trouvera dans [2] une bibliographie assez complète.

Le deuxième type de problème est en quelque sorte le problème dual : maximiser la première fréquence de vibration d'une structure tout en gardant son poids constant. Citons ici les travaux de [11], [16], [22], [23], [24], [17]. Le lien entre les deux problèmes dans le cas d'une barre étant fait dans [22].

Nous ne considérerons ici que les cas où la valeur propre est celle d'un opérateur elliptique du second ordre, le principe du maximum jouant un rôle très important.

Indiquons maintenant brièvement le plan de cette étude et les résultats obtenus.

Nous avons au cours du Chapitre I étudié les propriétés de la fréquence fondamentale de vibration. Si  $u$  est la fonction représentant l'épaisseur de la structure et si  $\lambda(u)$  est la première valeur propre du problème spectral considéré, nous avons montré en particulier que la fonction :

$$u \rightarrow \lambda(u)$$

était différentiable dans  $L^\infty(\Omega)$  [ $\Omega$  étant la forme de la structure] et quasi-concave.

Dans le Chapitre III nous avons tout d'abord décrit, dans un cadre fonctionnel qui nous a semblé naturel, les deux types de problèmes indiqués auparavant, puis nous avons étudié ces problèmes. Nous avons montré, dans le cas où il n'y a

aucune contrainte sur l'épaisseur ou une contrainte portant sur l'épaisseur minimale de la structure, que les problèmes admettaient des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Dans le cas où l'épaisseur de la structure est comprise entre deux valeurs fixes, nous avons obtenu, en plus de ces conditions, des théorèmes d'existence.

Le Chapitre IV traite de l'approximation de ces problèmes par la méthode des éléments finis. Nous avons montré, seulement dans certains cas, la convergence en un sens faible d'une solution du problème approché vers une solution du problème continu. La méthode dite du lagrangien augmenté a été utilisée pour résoudre le problème approché.

Je tiens à remercier ici R. TEMAM pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués pendant ce travail, ainsi que les membres de l'Equipe d'Analyse Numérique d'Orsay avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions.

II - ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL.1 - ENONCE DU PROBLEME SPECTRAL.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On désigne par  $(\cdot, \cdot)$  [resp.  $((\cdot, \cdot))$ ] le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  [resp.  $H_0^1(\Omega)$ ] , par  $\|\cdot\|_0$  [resp.  $\|\cdot\|$ ] la norme de  $L^2(\Omega)$  [resp.  $H_0^1(\Omega)$ ] , par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $H_0^1(\Omega)$  et son dual  $H^{-1}(\Omega)$  et par  $|\cdot|_\infty$  la norme de  $L^\infty(\Omega)$  .

On considère deux fonctions  $a$  et  $b$  définies sur un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $L^\infty(\Omega)$  à valeurs dans l'ouvert  $\mathcal{U}$  de  $L^\infty(\Omega)$  défini par

$$(1.1) \quad \mathcal{U} = \{u \in L^\infty(\Omega) ; \exists \alpha(u) \in \mathbb{R} \text{ tel que } u(x) \geq \alpha(u) > 0 \text{ p.p.}\} .$$

Pour  $(w, \phi) \in (H_0^1(\Omega))^2$  ,  $u \in \mathcal{O}$  on pose :

$$(1.2) \quad a_u(w, \phi) = \int_{\Omega} a(u)(x) \operatorname{grad} w(x) \cdot \operatorname{grad} \phi(x) \, dx .$$

On a

$$(1.3) \quad \alpha(a(u)) \|w\|^2 \leq a_u(w, w) \leq |a(u)|_\infty \|w\|^2 .$$

La forme bilinéaire continue coercive  $a_u$  définit un isomorphisme  $A_u$  de  $H_0^1(\Omega)$  sur  $H^{-1}$  :

$$(1.4) \quad \langle A_u w, \phi \rangle = a_u(w, \phi) \quad \forall (w, \phi) \in H_0^1(\Omega)^2 .$$

$A_u$  peut être considéré comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dont le domaine est :

$$\mathcal{D}_u = \{w \in H_0^1(\Omega) ; A_u w \in L^2(\Omega)\} .$$

On appellera  $G_u$  l'opérateur réciproque de  $A_u$  .

Pour  $w \in L^2(\Omega)$  ,  $u \in \mathcal{O}$  on pose

$$(1.5) \quad B_u w = b(u) \in L^2(\Omega) .$$

On a

$$(1.6) \quad \alpha(b(u)) \|w\|_0^2 \leq (B_u w, w) \leq \|b(u)\|_\infty \|w\|_0^2 .$$

On va s'intéresser au problème spectral

$$(1.7) \quad A_u w = \lambda B_u w .$$

Le problème est un problème classique de valeurs propres. On sait, cf. KATO [10] et MIKLIN [15] que son spectre est composé d'un ensemble dénombrable

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

$$\lambda_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty ,$$

de plus

$$(1.8) \quad \lambda_1 = \inf_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\langle A_u w, w \rangle}{(B_u w, w)} = \frac{\langle A_u w_1, w_1 \rangle}{(B_u w_1, w_1)}$$

où  $w_1$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Remarquons également que le problème (1.7) est équivalent à

$$(1.9) \quad \left(\frac{1}{\lambda} I - G_u B_u\right) w = 0 .$$

Soit  $w_1$  un vecteur propre associé à  $\lambda_1$ . On désigne par  $|w_1|$  la fonction

$$x \rightarrow |w_1(x)|$$

$|w_1|$  est un vecteur propre de (1.7) associé à  $\lambda_1$  car  $|w_1| \in H_0^1(\Omega)$  cf. STAMPACHIA [20],

$$\langle A_u |w_1|, |w_1| \rangle = \langle A_u w_1, w_1 \rangle$$

$$(B_u |w_1|, |w_1|) = (B_u w_1, w_1) .$$

Posons

$$(1.10) \quad \lambda(u) = \lambda_1$$

$$(1.11) \quad w(u) = \frac{|w_1|}{\| |w_1| \|_0} .$$

Lemme 1.1.

$$(1.12) \quad w(u;x) > 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

$$(1.13) \quad \lambda(u) \text{ est une valeur propre simple de (1.7).}$$

Démonstration : Le principe fort du maximum STAMPACCHIA [20] appliqué à l'opérateur  $A_u - \lambda_u B_u$  montre que  $w(u;x) > 0$  p.p. dans  $\Omega$ . Pour montrer que  $\lambda(u)$  est une valeur propre simple de (1.7) on va faire le raisonnement classique suivant :

Soit  $v$  un second vecteur propre associé à  $\lambda(u)$ , on peut supposer que  $v$  est orthogonal à  $w$  et donc d'après (1.12)

$$(1.14) \quad v^+ \neq 0 \text{ et } v^- \neq 0$$

$|v|$  est également un vecteur propre associé à  $\lambda(u)$

$$G_u B_u (|v|) = \frac{1}{\lambda(u)} |v| = |G_u B_u v|$$

c'est-à-dire

$$(1.15) \quad G_u B_u v^+ + G_u B_u v^- = |G_u B_u v^+ - G_u B_u v^-|$$

puisque  $|v| = v^+ + v^-$  et  $v = v^+ - v^-$ .

Comme  $B_u(L_+^2) \subset L_+^2$   $G_u(L_+^2) \subset L_+^2$  l'égalité (1.15) implique

$$v^+ = 0 \text{ ou } v^- = 0$$

ce qui est en contradiction avec (1.14). ■

On vient donc de montrer la

Proposition 1.1.

Il existe un et un seul couple  $(\lambda(u), w(u)) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$  tel que

$$(1.16) \quad A_u w(u) - \lambda(u) B_u w(u) = 0$$

$$(1.17) \quad w(u; x) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

$$(1.18) \quad \|w(u)\|_0 = 1 .$$

De plus  $(\lambda(u), w(u))$  vérifie (1.10), (1.12), (1.13) et (1.8).

Cette dernière relation s'écrit, compte tenu des notations :

$$(1.19) \quad \lambda(u) = \frac{\langle A_u w(u), w(u) \rangle}{\langle B_u w(u), w(u) \rangle} = \inf_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\langle A_u w, w \rangle}{\langle B_u w, w \rangle} .$$

L'unicité est évidente car si  $(\lambda_j, w_j)$  vérifie (1.7) alors  $w_j \perp w(u)$  et donc on ne peut avoir  $w_j(x) \geq 0$  p.p. et  $w_j \neq 0$ .

2 - CONTINUITÉ DE  $\lambda(u)$  ET  $w(u)$  .

On va considérer tout d'abord la topologie forte de  $L^\infty(\Omega)$  .

Proposition 2.1.

On suppose que les applications

$$(2.1) \quad u \rightarrow a(u) \text{ et } u \rightarrow b(u) \text{ sont continues dans } \mathcal{O}$$

alors les applications

$$u \in \mathcal{O} \rightarrow \lambda(u) \in \mathbb{R}$$

$$u \in \mathcal{O} \rightarrow w(u) \in H_0^1(\Omega)$$

sont continues dans  $\mathcal{O}$  .

Démonstration : Soit  $u_n \in \mathcal{O}$  tel que  $u_n \rightarrow u_0 \in \mathcal{O} \subset L^\infty(\Omega)$  .

On notera  $(\lambda_n, w_n)$  le couple  $(\lambda(u_n), w(u_n))$  et  $\alpha_0$  [resp.  $\beta_0$ ] le scalaire

$(\alpha(a(u_0)))$  [resp.  $\alpha(b(u_0))$ ]. D'après (2.1) pour  $n$  assez grand on a

$$(2.2) \quad \alpha(a(u_n)) \geq \frac{\alpha_0}{2} > 0,$$

$$(2.3) \quad \alpha(b(u_n)) \geq \frac{\beta_0}{2} > 0.$$

Soit  $w \in H_0^1(\Omega)$  fixé. On a d'après (1.19), (1.4), (1.3), (1.6), (2.3), (2.2)

$$(2.4) \quad \lambda_n = \lambda(u_n) \leq \frac{2 \|a(u_n)\|_\infty \|w\|^2}{\beta_0 \|w\|_0^2}$$

et

$$(2.5) \quad \frac{\alpha_0}{2} \|w_n\|^2 \leq \lambda_n \|b(u_n)\|_\infty \|w_n\|_0^2.$$

Or  $a(u_n)$  et  $b(u_n)$  sont bornées dans  $L^\infty(\Omega)$  et par conséquent on déduit de (2.4) puis de (2.5) les majorations

$$\lambda_n \leq c^{ste},$$

$$\|w_n\| \leq c^{ste}.$$

On peut donc, des suites  $(\lambda_n)$  et  $(w_n)$ , extraire des sous-suites, toujours notées  $(\lambda_n)$   $(w_n)$ , telles que

$$(2.6) \quad \lambda_n \rightarrow \lambda_* \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$(2.7) \quad w_n \rightarrow w_* \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

$$(2.8) \quad w_n(x) \rightarrow w_*(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Le couple  $(\lambda_n, w_n)$  vérifie (1.16) pour  $u = u_n$  c'est-à-dire :

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} a(u_n)(x) \nabla w_n(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \lambda_n \int_{\Omega} b(u_n)(x) w_n(x) w(x) \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

On passe à la limite dans l'équation (2.9) :

$$(2.10) \quad \int_{\Omega} a(u_0)(x) \nabla w_*(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \lambda_* \int_{\Omega} b(u_0)(x) w_*(x) w(x) \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent  $(\lambda_*, w_*)$  vérifie (1.16) pour  $u = u_0$ .

De plus, comme  $w_n$  vérifie (1.17), (1.18) et que l'on a (2.7), (2.8),  $w_*$  vérifie également (1.17), (1.18). La Proposition 1.1 permet alors d'affirmer que

$$w_* = w(u_0)$$

$$\lambda_* = \lambda(u_0)$$

et l'unicité de  $(\lambda(u_0), w(u_0))$  implique que ce sont les suites tout entières qui convergent vers  $(\lambda(u_0), w(u_0))$ .

On doit maintenant démontrer que

$$(2.11) \quad w_n \rightarrow w(u_0) = w_0 \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ fort.}$$

Calculons

$$E_n = \int_{\Omega} a(u_n)(x) |\nabla(w_n(x) - w_0(x))|^2 dx$$

$$E_n = \int_{\Omega} a(u_n)(x) |\nabla w_n(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a(u_n)(x) |\nabla w_0(x)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} a(u_n)(x) \nabla w_n(x) \cdot \nabla w_0(x) dx .$$

Or l'on a d'après (2.9) et (1.19)

$$\int_{\Omega} a(u_n)(x) |\nabla w_n(x)|^2 dx = \lambda_n \int_{\Omega} b(u_n)(x) w_n^2(x) dx ,$$

$$\int_{\Omega} a(u_n)(x) \nabla w_n(x) \cdot \nabla w_0(x) dx = \lambda_n \int_{\Omega} b(u_n)(x) w_n(x) w_0(x) dx ,$$

$$\int_{\Omega} a(u_0)(x) |\nabla w_0(x)|^2 dx = \lambda_0 \int_{\Omega} b(u_0)(x) w_0^2(x) dx .$$

D'où la nouvelle expression de  $E_n$  :

$$E_n = E_{1,n} + E_{2,n} + E_{3,n}$$

où

$$E_{1,n} = \int_{\Omega} (a(u_n) - a(u_0))(x) |\nabla w_0(x)|^2 dx ,$$

$$E_{2,n} = \lambda_n \int_{\Omega} b(u_n)(x) w_n(x) (w_n(x) - w_0(x)) dx ,$$

$$E_{3,n} = \int_{\Omega} (\lambda_0 b(u_0)(x) w_0(x) - \lambda_n b(u_n)(x) w_n(x)) w_0(x) dx .$$

On peut maintenant passer à la limite et constater que chacun des termes  $E_{i,n}$   $i = 1, 2, 3$  tend vers zéro et donc

$$E_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty .$$

D'après (1.3), (2.2) on a, pour  $n$  assez grand

$$\frac{\alpha_0}{2} \|w_n - w_0\|^2 \leq E_n$$

ce qui démontre (2.11). ■

On va maintenant munir  $L^\infty$  de la topologie faible\* c'est-à-dire  $\sigma(L^\infty, L^1)$ . On notera cet espace topologique  $L_\sigma^\infty$ .

Si l'on suppose  $a$  et  $b$  continues de  $L_\sigma^\infty$  dans  $L_\sigma^\infty$  on n'est pas assuré d'avoir (2.2) et l'on ne peut passer à la limite dans (2.9). Par suite on ne peut affirmer que les fonctions  $\lambda(u)$  et  $w(u)$  sont continues pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

Par contre si l'on suppose  $a$  indépendant de  $u$  et  $b$  continue de  $L_\sigma^\infty$  dans  $L_\sigma^\infty$  alors, si  $(u_n)$  est une suite de  $L^\infty(\Omega)$  telle que

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ quand } n \rightarrow \infty ,$$

la démonstration précédente montre que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$w_n \rightarrow w_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort.}$$

D'où la

Proposition 2.2. On suppose que

$$(2.12) \quad a(u) = u_1, \quad \forall u \in \mathcal{G}$$

$$(2.13) \quad u \rightarrow b(u) \text{ est séquentiellement continue de } L_\sigma^\infty \text{ dans } L_\sigma^\infty$$

alors les applications  $\lambda(u)$  et  $w(u)$  sont séquentiellement continues pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

Remarque 2.1. Le seul exemple où l'on appliquera cette proposition est le cas où  $b$  est affine.

Remarque 2.2. On verra dans la section 4 que, sous certaines hypothèses sur  $a$  et  $b$ ,  $\lambda(u)$  est faible \* semi-continue supérieurement.

### 3 - DERIVABILITE DE $\lambda(u)$ ET $w(u)$ .

On considère les fonctions

$$u \in \mathcal{O} \rightarrow \lambda(u) \in \mathbb{R}$$

$$u \in \mathcal{O} \rightarrow w(u) \in H_0^1(\Omega) \cap S_1$$

où

$$S_1 = \{v \in L^2(\Omega) ; \|v\|_0 = 1\}.$$

On va supposer que

(3.1)  $a$  et  $b$  sont continument différentiables de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{U}$

et l'on va montrer, comme dans MIGNOT [13], que les fonctions  $\lambda(u)$  et  $w(u)$  sont différentiables.

Considérons la fonction  $F$  de

$$\mathcal{O} \times H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \text{ dans } H^{-1}$$

définie par

$$(3.2) \quad F(u, w, \lambda) = A_u w - \lambda B_u w = \operatorname{div}(a(u) \nabla w) - \lambda b(u) w.$$

Soit  $u_0 \in \mathcal{O}$  posons :

$$w_0 = w(u_0), \quad \lambda_0 = \lambda(u_0), \quad A_0 = A_{u_0}, \quad B_0 = B_{u_0}.$$

Calculons les dérivées partielles de  $F$  par rapport à  $u, w, \lambda$  au point  $(u_0, w_0, \lambda_0)$

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 : w \in H_0^1(\Omega) \longrightarrow A_0 w - \lambda_0 B_0 w \in H^{-1}(\Omega),$$

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow -\lambda B_0 w_0 \in L^2(\Omega),$$

$$(3.5) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 : h \in L^\infty(\Omega) \longrightarrow A_{a'}(u_0) \cdot h w_0 - \lambda_0 B_{b'}(u_0) \cdot h w_0.$$

Par conséquent  $F$  est continument différentiable sur  $\mathcal{O}$ .

Posons

$$Y = (w, \lambda).$$

Lemme 3.1.  $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R} \times (H_0^1 \cap w_0^\perp)$  sur  $H^{-1}$  où  $\perp$  désigne l'orthogonalité par rapport au produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

Démonstration : On a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 (\lambda, w) = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 \lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 w.$$

D'après (3.4)  $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R} B_0 w_0$  et, si l'on admet pour l'instant que

$$(3.6) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 \text{ est un isomorphisme de } H_0^1 \cap w_0^\perp \text{ sur } w_0^o$$

où

$$w_0^o = \{v \in H^{-1}(\Omega) ; \langle v, w_0 \rangle = 0\},$$

le lemme est complètement démontré puisque

$$\mathbb{R} B_0 w_0 \oplus w_0^o = H^{-1}.$$

Démonstration de (3.6). On a

$$(3.7) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)_o = \lambda_o A_o \circ \left( \frac{1}{\lambda_o} I - G_o B_o \right) .$$

Remarquons que  $B_o w_o$  est un vecteur propre de  $(G_o B_o)^* = B_o G_o$ , associé à la valeur propre simple  $\frac{1}{\lambda_o}$  et par conséquent, d'après l'alternative de Freedholm,

$$\frac{1}{\lambda_o} I - G_o B_o \text{ est un isomorphisme de } w_o^\perp \text{ sur } (B_o w_o)^\perp$$

et donc de  $H_o^1(\Omega) \cap w_o^\perp$  sur  $H_o^1(\Omega) \cap (B_o w_o)^\perp$ .

D'autre part  $A_o$  est un isomorphisme de  $(B_o w_o)^\perp \cap H_o^1(\Omega)$  sur  $w_o^\perp$  et donc grâce à (3.7) on en déduit (3.6). ■

Lemme 3.2. Pour tout point  $u_o$  de  $\mathcal{U} \subset L^\infty(\Omega)$  il existe une boule  $D$  de centre  $u_o$  et une fonction continue unique  $Y(u)$  définie dans  $D$  de classe  $C^1$  telles que

$$(3.8) \quad Y(u) \in H_o^1 \cap S_1 \times \mathbb{R}$$

$$(3.9) \quad Y(u_o) = (w_o, \lambda_o)$$

$$(3.10) \quad F(u, Y(u)) = 0 \quad \forall u \in D .$$

Démonstration : D'après le Lemme 3.1 on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction  $F$  définie sur :

$$\mathcal{U} \times (w_o + H_o^1(\Omega) \cap w_o^\perp) \times \mathbb{R} .$$

Il existe donc une boule  $D$  de centre  $u_o$  et une fonction unique  $\tilde{Y}(u)$  définie sur  $D$  de classe  $C^1$  vérifiant (3.9), (3.10)

$$(3.8) \quad \tilde{Y}(u) \in (w_o + H_o^1(\Omega) \cap w_o^\perp) \times \mathbb{R} .$$

Si l'on normalise la première composante de  $\tilde{Y}(u)$  on obtient une fonction unique  $Y(u)$  de classe  $C^1$  vérifiant (3.8), (3.9) et (3.10). ■

Théorème 3.1. Si l'on suppose que a et b vérifient l'hypothèse (3.1) alors les applications

$$u \longrightarrow \lambda(u)$$

$$u \longrightarrow w(u)$$

sont différentiables en tout point  $u_0$  de  $\mathcal{O}$ , de plus

$$(3.12) \quad \lambda'(u_0).h = \frac{\int_{\Omega} \{ (a'(u_0).h)(x) |\nabla w_0(x)|^2 - \lambda_0 (b'(u_0).h)(x) w_0^2(x) \} dx}{\int_{\Omega} b(u_0)(x) w_0^2(x) dx}$$

où

$$w_0 = w(u_0) \quad \lambda_0 = \lambda(u_0) .$$

Démonstration : Posons

$$\widehat{Y}(u) = (w(u), \lambda(u)) \in (H_0^1(\Omega) \cap S_1) \times \mathbb{R} .$$

D'après la Proposition 2.1  $\widehat{Y}(u)$  est continue sur  $D$ , comme on a unicité de la fonction  $Y$  définie dans le Lemme 3.3 on en déduit que

$$Y(u) = \widehat{Y}(u) = (w(u), \lambda(u))$$

et d'après (3.10)

$$(3.13) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_0 (\lambda'(u_0).h) + \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)_0 (w'(u_0).h) = - \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 .h .$$

Compte tenu de (3.6) on a

$$\left\langle \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_0 (\lambda'(u_0).h), w_0 \right\rangle = - \left\langle \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 .h, w_0 \right\rangle$$

ce qui d'après (3.4), (3.5) nous donne (3.12). ■

4 - PSEUDO-CONCAVITE ET FAIBLE \* SEMI-CONTINUITE SUPERIEURE DE  $\lambda(u)$  .

Théorème 4.1. Soit  $C$  un convexe contenu dans  $\mathcal{O}$  . On suppose que

(4.1)  $a$  et  $b$  sont continument différentiables de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{U}$  ;

(4.2)  $b$  est convexe sur  $C$  relativement au cône des fonctions positives de  $L^\infty(\Omega)$  ;

(4.3)  $a$  est concave sur  $C$  relativement au même cône

alors

$$(4.4) \quad \lambda(v) \leq \lambda(u) + \lambda'(u) \cdot (v-u) \frac{\int_{\Omega} b(u)(x) w^2(u;x) dx}{\int_{\Omega} b(v)(x) w^2(u,x) dx} \quad \forall (u,v) \in C \times C .$$

Démonstration : Afin d'alléger l'écriture on supprime la variable d'intégration  $x$  . Appelons  $\theta$  la quantité située à droite dans l'inégalité (4.4) . On a, d'après (3.12)

$$(4.5) \quad \theta = \frac{\lambda(u) \int_{\Omega} b(v) w^2(u) dx + \int_{\Omega} (a'(u) \cdot (v-u)) |\nabla w(u)|^2 dx}{\int_{\Omega} b(v) w^2(u) dx} - \frac{\lambda(u) \int_{\Omega} (b'(u) \cdot (v-u)) w^2(u) dx}{\int_{\Omega} b(v) w^2(u) dx} .$$

Et (4.2), (4.3) impliquent

$$(4.6) \quad a'(u) \cdot (v-u) \geq a(v) - a(u)$$

et

$$(4.7) \quad b'(u) \cdot (v-u) \leq b(v) - b(u) ,$$

d'où, compte tenu de (1.19),

$$\theta \geq \frac{\int_{\Omega} a(v) |\nabla w(u)|^2 dx}{\int_{\Omega} b(v) w^2(u) dx} \geq \lambda(v) \quad \blacksquare$$

Remarque 4.1. Cette relation (4.4) est fondamentale car elle permettra au chapitre III de montrer que  $\lambda$  est pseudoconcave et donc que l'ensemble  $\Lambda_c$  est convexe où

$$\Lambda_c = \{v \in C ; \lambda(v) \geq c\} \quad .$$

On va admettre, pour l'instant, ce résultat pour pouvoir démontrer la

Proposition 4.1. Soit  $C$  un convexe contenu dans  $\emptyset$ . On suppose que  $a$  et  $b$  vérifient (4.1), (4.2), (4.3) et que chacune des fonctions  $a$  et  $b$  vérifie les deux hypothèses suivantes (énoncées seulement pour  $a$ )

$$(4.8) \quad \underline{\text{Si}} \quad u_n \in C \quad u_n \rightarrow u \in C \text{ p.p. alors } a(u_n) \rightarrow a(u) \text{ p.p. et}$$

$$(4.9) \quad \underline{\text{Si}} \quad u_n \in C \quad |u_n|_{\infty} \leq k_1 \text{ alors } \exists k_2 > 0 \text{ tel que } |a(u_n)|_{\infty} \leq k_2 ,$$

alors

$\lambda(u)$  est faible \* semi-continue supérieurement sur  $C$ .

Démonstration : Il faut montrer que le convexe  $\Lambda_c$  est faible \* fermé.

Nous aurons besoin pour cela des deux résultats suivants :

Lemme 4.1. Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , si  $\Lambda$  est un convexe de  $L^{\infty}(\Omega)$  et si  $u$  est un point adhérent à  $\Lambda$  pour la topologie  $\sigma(L^{\infty}, L^1)$  alors il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\Lambda$  telle que

$$(4.10) \quad u_n \rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \forall p \geq 1, p \neq \infty ,$$

$$(4.11) \quad u_n \rightarrow u \text{ pour la topologie } \sigma(L^{\infty}, L^1) .$$

Lemme 4.2. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(v_n)$  une suite d'éléments de  $L^{\infty}(\Omega)$  et  $v \in L^{\infty}(\Omega)$  tels que

$$|v_n|_{\infty} \leq k_1 \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow v \text{ p.p. dans } \Omega$$

alors

$$v_n \rightarrow v \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty, L^1) .$$

Admettons pour l'instant ces Lemmes et continuons la démonstration de la Proposition 4.1. Soit  $u$  un point adhérent à l'ensemble  $\Lambda_c$ , d'après le Lemme 4.1, il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\Lambda_c$  vérifiant (4.10), (4.11). Cette dernière relation implique :

$$(4.12) \quad |u_n|_\infty \leq k \quad \forall n .$$

D'après (4.10) on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que

$$(4.13) \quad u_n \rightarrow u \text{ p.p. dans } \Omega .$$

Les hypothèses (4.8) et (4.9) montrent que l'on peut appliquer aux suites  $a(u_n)$  et  $b(u_n)$  le Lemme 4.2 et par suite

$$a(u_n) \rightarrow a(u) \text{ faible } * ,$$

$$b(u_n) \rightarrow b(u) \text{ faible } * .$$

D'autre part on a

$$c \leq \lambda(u_n) \leq \frac{\int_{\Omega} a(u_n) |\nabla w(u)|^2 dx}{\int_{\Omega} b(u_n) w^2(u) dx} \quad \forall n ,$$

et, si l'on passe à la limite, on obtient

$$c \leq \lambda(u) . \quad \blacksquare$$

Démonstration du Lemme 4.1. Voir Grothendieck [ 6 ] p.96.

Démonstration du Lemme 4.2.  $\exists \Omega' \subset \Omega$  tel que  $\text{mes}(\Omega \setminus \Omega') = 0$  et

$$|v_n(x)| \leq k_1 \quad \forall x \in \Omega' .$$

Soit  $\phi \in L^1(\Omega)$  alors

$$(v_n(x) - v(x)) \phi(x) \rightarrow 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

$$(v_n(x) - v(x)) \phi(x) \leq (k_1 + |v|_\infty) |\phi(x)| \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

et donc, d'après le Théorème de Lebesgue,

$$\int_{\Omega} (v_n(x) - v(x)) \phi(x) dx \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

$$\int_{\Omega} (v_n(x) - v(x)) \phi(x) dx \rightarrow 0.$$

Remarque 4.1. L'hypothèse (4.8) peut sembler artificielle mais cela provient du fait que l'on a considéré des fonctions abstraites  $a$  et  $b$  de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ . Dans le cas où les fonctions  $a$  et  $b$  sont construites à partir de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  on verra, dans la prochaine section, que l'hypothèse se simplifie.

Remarque 4.2. Soit  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  une partition de  $\Gamma$ . Soit  $c \in L^\infty(\Gamma_2)$  tel que  $e(x) \geq \alpha > 0$  p.p.  $x \in \Gamma_2$ . Posons

$$W = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$$(4.14) \quad a_u(w, \phi) = \int_{\Omega} a(u) \nabla w \nabla \phi dx + \int_{\Gamma_2} e w \phi ds \quad \forall (w; \phi) \in W \times W.$$

Tout ce que l'on vient de faire dans ces quatre premières sections est valable si l'on prend cette nouvelle forme bilinéaire continue coercive sur  $W$  qui nous définit un isomorphisme  $A_u$  de  $W$  sur  $W'$ . Si  $\Omega$  et  $a(u)$  sont suffisamment réguliers alors le problème (1.7) est équivalent dans ce cas à

$$-\operatorname{div}(a(u)\nabla w) - \lambda b(u)w = 0$$

$$\left\{ u \frac{\partial w}{\partial n} + e w \right\} \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

$$w|_{\Gamma_1} = 0.$$

On peut supposer  $e = 0$  si la mesure superficielle de  $\Gamma_1$  est non nulle car sur  $W$   $\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx$  est une norme équivalente à la norme habituelle, c'est-à-dire

celle induite par  $H^1(\Omega)$ .

### 5 - EXEMPLES.

Compte tenu de la Remarque 4.2. Nous considèrerons  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  une partition de  $\Gamma$ . On supposera toujours  $\text{mes } \Gamma_1 \neq 0$  (il s'agit de la mesure superficielle), par contre  $\Gamma_2$  pourra être de mesure nulle, la fonction  $e$  figurant dans (4.14) sera identiquement nulle.

Exemple 1. On suppose que

$$(5.1) \quad \mathcal{O} = \mathcal{U} \quad a(u) = u \quad b(u) = 1.$$

Les relations (1.19), (3.12) et (4.4) deviennent dans ce cas :

$$(5.2) \quad \lambda(u) = \inf_{\substack{w \in \mathcal{W} \\ \|w\|_0 = 1}} \int_{\Omega} u(x) |\nabla w(x)|^2 dx = \int_{\Omega} u(x) |\nabla w(x, u)|^2 dx$$

$$(5.3) \quad \lambda'(u) h = \int_{\Omega} h(x) |\nabla w(u; x)|^2 dx \quad \forall h \in L^\infty(\Omega)$$

$$(5.4) \quad \lambda(v) \leq \lambda(u) + \lambda'(u) \cdot (v-u) \quad \forall (v, u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

Cette dernière relation montre que

$$(5.5) \quad \lambda \text{ est concave sur } \mathcal{U}.$$

L'hypothèse (4.4) étant vérifiée,  $\lambda$  est faible \* s.c.s. Enfin (5.3), (5.4) impliquent que si  $u \geq v$  alors  $\lambda(u) \geq \lambda(v)$ .

Exemple 2. On suppose que

$$\mathcal{O} = \mathcal{U} \quad a(u) = 1 \quad b(u) = u.$$

D'où

$$(5.6) \quad \lambda(u) = \inf_{\substack{w \in \mathcal{W} \\ \|w\|_0 = 1}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u(x) w^2(x) dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(u; x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u(x) w^2(u; x) dx}$$

$$(5.7) \quad \lambda'(u) \cdot h = - \lambda(u) \frac{\int_{\Omega} h(x) w^2(u;x) dx}{\int_{\Omega} u(x) w^2(u;x) dx} .$$

Les relations (5.7) et (4.4) montrent que

$$(5.8) \quad v \geq u \implies \lambda(v) \leq \lambda(u) .$$

D'après la Proposition 2.2  $\lambda(u)$  est faible\* séquentiellement continue.

Exemple 3.  $\mathcal{U} = \mathcal{U}$   $a(u) = u$   $b(u) = u + \delta$  où  $\delta$  est un scalaire strictement positif.

D'où

$$(5.9) \quad \lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_0 = 1}} \frac{\int_{\Omega} u(x) |\nabla w(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} (u(x) + \delta) w^2(x) dx} = \frac{\int_{\Omega} u(x) |\nabla w(u;x)|^2 dx}{\int_{\Omega} (u(x) + \delta) w^2(u;x) dx}$$

$$(5.10) \quad \lambda'(u) \cdot h = \frac{\int_{\Omega} \{ |\nabla w(u;x)|^2 - \lambda(u) w^2(u;x) \} h(x) dx}{\int_{\Omega} (u(x) + \delta) w^2(u;x) dx} .$$

D'après les résultats des sections précédentes  $\lambda(u)$  est faible\* s.c.s. sur  $\mathcal{U}$  et pseudo concave sur  $\mathcal{U}$ .

Avant de considérer un problème où  $b$  ne sera pas affine. On va étudier les propriétés des fonctions de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  construites à partir de fonctions numériques.

Proposition 5.1. Soit  $a$  une fonction continue de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$ .  
Pour  $u \in \mathcal{U}$  on pose

$$a(u) : x \rightsquigarrow a(u(x)) ,$$

- i) Alors  $a(u) \in \mathcal{U}$  et vérifie (4.8) sur le convexe  $\mathcal{U}$  ;
- ii) Si  $a$  est localement lipschitzienne alors  $a$  est continue sur  $\mathcal{U}$  ;
- iii) Si  $a$  est de classe  $C^1$  et à dérivée localement lipschitzienne alors  $a$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$  et

$$a'(u) \cdot h : x \in \Omega \rightsquigarrow a'(u(x)) \cdot h(x) ;$$

iv) Si  $\mathfrak{a}$  est concave [resp. convexe] alors  $a$  est concave [resp. convexe] par rapport au cône des fonctions positives p.p. ;

v) Si  $\mathfrak{a}$  est croissante alors  $a$  vérifie (4.9) sur le convexe  $\mathcal{U}$  ;

vi) Soit

$$C_\alpha = \{u \in \mathcal{U} ; u(x) \geq \alpha > 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}, \alpha \text{ fixé,}$$

alors  $a$  vérifie (4.9) sur le convexe  $C_\alpha$ .

Exemple 4.  $\mathcal{O} = \mathcal{U}$   $a(u) = 1$   $b(u) = \frac{1}{2}$

c'est-à-dire  $b(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \forall \xi \in ]0, +\infty[$ ,  $b$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$ , convexe sur  $\mathcal{U}$ . On a

$$(5.11) \quad \lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|_0 = 1}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{w^2(x)}{u^2(x)} dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(u;x)|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{w^2(u;x)}{u^2(x)} dx}$$

$$(5.12) \quad \lambda'(u) \cdot h = \frac{2\lambda(u) \int_{\Omega} \frac{w^2(u;x)}{u^3(x)} h(x) dx}{\int_{\Omega} \frac{w^2(u;x)}{u^2(x)} dx}$$

Les relations (5.11) et (4.4) montrent que

$$(5.13) \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}, v \leq u \implies \lambda(v) \leq \lambda(u).$$

Sur  $C_\alpha$  l'hypothèse (4.9) est vérifiée pour  $b$  et par conséquent  $\lambda(u)$  est faible\* s.c.s. sur  $C_\alpha$ .

Remarque 5.1. Constatons que dans tous les exemples  $\lambda'(u)$  est un élément de  $L^1(\Omega)$ .

III - OPTIMISATION EN THEORIE DES STRUCTURES.

Avant d'énoncer et d'étudier les problèmes d'optimisation, nous allons rappeler quelques définitions et propriétés des fonctions pseudo-convexes et quasi-convexes sur un E.L.C.S. :  $E$ . On trouvera dans MANGASARIAN [12] le cas où  $E$  est de dimension finie.

1 - FONCTIONS PSEUDOCONVEXES ET QUASICONVEXES.

Soient  $E$  un E.L.C.S. sur  $\mathbb{R}$ ,  $G$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et  $C$  un convexe de  $E$ . On pose pour tout  $c \in \mathbb{R}$

$$A_c = \{u \in C ; G(u) \leq c\} .$$

Définition 1.1. On dit que  $G$  est quasiconvexe sur  $C$  si  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $A_c$  est convexe.

On dit que  $G$  est quasiconcave sur  $C$  si  $-G$  est quasiconvexe.

Remarque 1.1. La notion de quasiconvexité est indépendante de la topologie définie sur  $E$ .

Proposition 1.1. On a les résultats suivants

(i)  $G$  est quasiconvexe sur  $C$  si et seulement si

$$(1.1) \quad \forall (u,v) \in C \times C, \forall \xi \in [0,1], G(\xi u + (1-\xi)v) \leq \text{Max}(G(v), G(u))$$

(ii) On suppose que  $G$  est Gateaux-différentiable sur  $C$  et on note  $G'(u)$  sa Gateaux-différentielle ( $G'(u) \in E'$ ) ;  $G$  est quasiconvexe sur  $C$  si et seulement si

$$(1.2) \quad \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G(v) \leq G(u) \text{ alors } G'(u) \cdot (v-u) \leq 0 .$$

Démonstration : (i) est évident. Quant à (ii) il suffit de regarder la démonstration de [12] et de se rappeler qu'une fonction Gateaux-différentiable sur  $C$  est continue sur tout segment  $[u,v]$ .

Remarque 1.2. La propriété (1.2) est équivalente à

$$(1.3) \quad \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G'(u).(v-u) > 0 \text{ alors } G(v) > G(u) .$$

Définition 1.2. On dit que  $G$  est pseudoconvexe sur  $C$  si  $G$  est Gateaux-différentiable sur  $C$  et si

$$(1.4) \quad \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G'(u).(v-u) \geq 0 \text{ alors on a } G(v) \geq G(u) .$$

On dit que  $G$  est pseudoconcave sur  $C$  si  $-G$  est pseudoconvexe sur  $C$  .

Remarque 1.3. La propriété (1.4) est équivalente à

$$(1.5) \quad \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G(v) < G(u) \text{ alors on a } G'(u).(v-u) < 0 .$$

Proposition 1.2. Si  $G$  est pseudoconvexe sur  $C$  alors  $G$  est quasiconvexe sur  $C$  et

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (u,v) \in C \times C \text{ tel que } G(v) < G(u) \text{ on a } G(\xi u + (1-\xi)v) < G(u) \\ \text{pour tout } \xi \in ]0,1] . \end{array} \right.$$

Démonstration : Il faut montrer que la propriété (1.1) est vérifiée c'est-à-dire

$$(1.7) \quad G(w) \leq \text{Max}(G(u), G(v)) \text{ où } w = \xi u + (1-\xi)v , \xi \in [0,1] .$$

On a

$$(1.8) \quad G'(w).(v-w) = \xi G'(w).(v-u) \text{ et}$$

$$(1.9) \quad G'(w).(u-w) = - (1-\xi) G'(w).(v-u) .$$

Si  $G'(w).(v-u) \geq 0$  alors d'après (1.8), (1.4)

$$G(v) \geq G(w) ;$$

si  $G'(w).(v-u) < 0$  alors d'après (1.9), (1.4)

$$G(u) \geq G(w) .$$

Dans les deux cas (1.7) est vérifiée.

La démonstration de (1.6) se fait comme dans [12].

## 2 - FORMULATION DES PROBLEMES.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On pose

$$\mathcal{U} = \{u \in L^\infty(\Omega) ; \exists \alpha(u) > 0 \quad u(x) \geq \alpha(u) \quad \text{p.p. } x \in \Omega\} .$$

Soient  $a$  et  $b$  deux applications continument différentiables de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}$ ,  $a$  étant concave et  $b$  convexe. On considère la fonction coût suivante :

$$(2.1) \quad J(u) = \int_{\Omega} u(x) \, dx \quad u \in \mathcal{U} .$$

On pose

$$(2.2) \quad \lambda(u) = \inf_{\substack{w \in W \\ w \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} a(u)(x) |\nabla w(x)|^2 \, dx}{\int_{\Omega} b(u)(x) w^2(x) \, dx}$$

où

$$W = \{w \in H^1(\Omega) ; w|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$(\Gamma_1, \Gamma_2)$  étant une partition de  $\Gamma$  telle que  $\text{mes } \Gamma_1 \neq 0$ . D'après le Chapitre II,  $\lambda$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  sa dérivée étant donnée par II.(3.12) c'est-à-dire

$$(2.3) \quad \lambda'(u) \cdot v = \frac{\int_{\Omega} \{(a'(u) \cdot v)(x) |\nabla w(u;x)|^2 - \lambda(u) (b'(u) \cdot v)(x) w^2(u;x)\} \, dx}{\int_{\Omega} b(u)(x) w^2(u;x) \, dx} .$$

De plus on a II.(4.4) c'est-à-dire

$$(2.4) \quad \lambda(v) \leq \lambda(u) + \lambda'(u) \cdot (v-u) \frac{\int_{\Omega} b(u)(x) w^2(u;x) \, dx}{\int_{\Omega} b(v)(x) w^2(u;x) \, dx} \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} .$$

Proposition 2.1. La fonction  $\lambda(u)$  est pseudoconcave et quasiconcave sur  $\mathcal{U}$ .

Démonstration : Cela résulte de (2.4), de la définition des fonctions pseudoconcaves et de la Proposition 1.2. ■

On va considérer une structure d'épaisseur uniforme  $u_1$ , par un changement de variable on peut supposer

$$(2.5) \quad u_1(x) \equiv 1 .$$

On pose

$$(2.6) \quad \lambda_1 = \lambda(u_1) \quad \text{et} \quad J_1 = J(u_1) .$$

Les problèmes auxquels on va s'intéresser sont les suivants :

$$(\mathcal{P}_0) \quad \begin{array}{l} \text{Inf} \\ u \in \mathcal{U} \end{array} J(u) \\ \lambda(u) = \lambda_1$$

et

$$(\mathcal{A}_0) \quad \begin{array}{l} \text{Sup} \\ u \in \mathcal{U} \end{array} \lambda(u) . \\ J(u) = J_1$$

Remarque 2.1. La variable  $u$  représente l'épaisseur d'une structure et par conséquent pour des raisons technologiques on est obligé de rajouter à ces problèmes une contrainte supplémentaire

$$u(x) \geq \alpha$$

où  $\alpha$  est fixé et vérifie

$$(2.7) \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Par conséquent on va introduire le convexe  $C_\alpha$  défini par

$$(2.8) \quad C_\alpha = \{u \in \mathcal{U} ; u(x) \geq \alpha \text{ p.p. } x \in \Omega\} ,$$

ainsi que les problèmes

$$(\mathcal{P}_\alpha) \quad \begin{array}{l} \text{Inf} \\ u \in C_\alpha \end{array} J(u) \\ \lambda(u) = \lambda_1$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\alpha) \quad & \sup_{u \in C_\alpha} \lambda(u) . \\ J(u) = & J_1 \end{aligned}$$

Pour obtenir des résultats d'existence nous serons amenés à rajouter une contrainte supplémentaire

$$u(x) \leq \beta \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

où  $\beta$  est fixé et vérifie

$$(2.9) \quad 1 < \beta .$$

Si l'on pose

$$(2.10) \quad C_{\alpha, \beta} = \{u \in \mathcal{U} ; \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad \text{p.p. } x \in \Omega\} ,$$

on appelle  $(\mathcal{P}_{\alpha, \beta})$  et  $(\mathcal{R}_{\alpha, \beta})$  les problèmes  $(\mathcal{P}_\alpha)$  et  $(\mathcal{R}_\alpha)$  où la contrainte

$$u \in C_\alpha$$

a été remplacée par

$$u \in C_{\alpha, \beta} .$$

Nous autoriserons  $\beta$  à valoir  $+\infty$  et ainsi le problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  sera  $(\mathcal{P}_{\alpha, +\infty})$ , de même pour  $(\mathcal{R}_\alpha)$ . Mais nous préciserons toujours dans l'énoncé des résultats obtenus si l'hypothèse

$$\beta < +\infty$$

est intervenue.

Si  $a$  et  $b$  sont définies par des fonctions de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$  :  $a$  et  $b$ , on supposera  $a$  et  $b$  de classe  $C^2$ ,  $a$  concave et  $b$  convexe. Sous ces hypothèses on a vu que  $a$  et  $b$  possédaient les propriétés que l'on a énoncées au début de ce paragraphe, de plus d'après la Proposition II.5.1 et II.4.1.

(2.11)  $\lambda(u)$  est faible \* s.c.s. sur  $C_{\alpha, \beta}$ .

3 - ETUDE DU PROBLEME  $\mathcal{P}_0$ .

Proposition 3.1. On suppose de plus que

(3.1)  $\exists u_\gamma \in \mathcal{U}$  tel que  $\lambda(u_\gamma) > \lambda_1$ .

Si  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}_0$  alors  $\exists \eta \in \mathbb{R}$  tel que

(3.2)  $J'(u) + \eta \lambda'(u) = 0$ .

Démonstration :  $J$  et  $\lambda$  étant Frechet-différentiables pour démontrer (3.2), il suffit de montrer que  $\bar{u}$  est un point régulier pour  $\lambda$  ; c'est-à-dire que

$$\lambda'(\bar{u}) \neq 0.$$

Supposons le contraire alors on a

$$\lambda'(\bar{u}) \cdot (u_\gamma - \bar{u}) = 0.$$

Et donc, d'après (2.4) cela implique

$$\lambda(u_\gamma) \leq \lambda(\bar{u}) = \lambda_1,$$

ce qui est en contradiction avec (3.1). ■

Proposition 3.2. Soit  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  tel que

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1,$$

et

$\exists \eta \leq 0$  vérifiant (3.2)

alors  $\bar{u}$  est solution du problème  $(\mathcal{P}_0)$ .

Démonstration : Soit  $v$  vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) = \lambda_1 .$$

$\lambda$  étant quasi-concave on a, d'après (1.2),

$$\lambda'(u)(v-\bar{u}) \geq 0$$

et donc, puisque  $\eta \leq 0$ , (3.2) implique

$$J'(u) \cdot (v-\bar{u}) \geq 0$$

c'est-à-dire

$$J(v) \geq J(\bar{u}) . \quad \blacksquare$$

Remarque 3.1. Le caractère particulier de la fonctionnelle  $J$  n'est pas intervenu au cours de la démonstration. On n'a utilisé que la pseudoconvexité de  $J$ .

On pose

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{U} ; \lambda(v) = \lambda_1\} .$$

Proposition 3.3. Si  $a$  et  $b$  sont définies par des fonctions  $a$  et  $b$  et si l'hypothèse (3.1) est vérifiée alors  $\bar{u} \in \mathcal{V}$  est solution du problème  $(\mathcal{P}_0)$  si  $\exists v \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$(3.3) \quad a'(\bar{u}(x)) |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 - \lambda_1 b'(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}; x) = v .$$

De plus si  $v$  est strictement positif la réciproque est vérifiée.

Démonstration : Comme  $J'(u) = 1$  pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , la constante  $\eta$  intervenant dans (3.2) est différente de zéro. Posons

$$v = - \frac{\int_{\Omega} b(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}; x) dx}{\eta}$$

alors les relations (2.3) et (3.2) impliquent (3.3).

D'où le résultat.  $\blacksquare$

Application 3.1 : Exemple 1.

Si

$$u_\gamma(x) \equiv \gamma \quad \text{où } \gamma > 1$$

alors, comme

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma \lambda_1 ,$$

(3.1) est vérifiée. Et donc par application de la Proposition 3.3 on sait qu'il existe  $v \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$|\nabla w(\bar{u}; x)|^2 = v$$

ce qui implique  $v > 0$ . De plus on a, d'après I.(5.2)

$$v \int_{\Omega} \bar{u}(x) dx = \lambda(\bar{u}) .$$

Enonçons le résultat : une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{u} \in \mathcal{V}$  soit solution du problème  $\mathcal{P}_0$  pour l'exemple 1 est que  $w(u)$  (définie par la Proposition I.1.1) vérifie

$$(3.4) \quad |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 = v$$

où  $v$  est une constante strictement positive.

On retrouve ainsi les résultats de [1].

Cette condition nécessaire et suffisante va nous permettre d'obtenir la solution. Si  $\Omega = ]0,1[$  et

$$W = \{w \in H^1(\Omega) ; w(0) = 0\} .$$

On obtient

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 , \quad v = 3 ,$$

$$\int_{\Omega} \bar{u} dx = \frac{\lambda_1}{3} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0,82 \quad \left(\int_{\Omega} 1 dx\right)$$

et

$$\bar{u}(x) = \frac{\lambda_1}{2} (1 - x^2) .$$

Application 3.2 : Exemple 3.

Si l'on considère la fonction

$$u_\gamma(x) \equiv \gamma > 1$$

elle vérifie

$$\lambda(u_\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} (1+\delta) \lambda_1 > \lambda_1 .$$

Par suite, compte tenu de la Proposition 3.3 et de l'expression I.(5.10) de la dérivée, on sait qu'il existe  $v \in \mathbb{R}$  tel que

$$|\nabla w(\bar{u}; x)|^2 - \lambda(u) w^2(\bar{u}; x) = v .$$

En multipliant par  $\bar{u}(x)$ , en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant la relation I.(5.9) on obtient

$$\lambda(\bar{u})\delta = v \int_{\Omega} \bar{u}(x) dx .$$

Cette relation implique  $v > 0$  puisque  $\delta > 0$ .

Donc on vient de montrer : une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{u} \in \mathcal{V}$  soit solution du problème  $\mathcal{P}_0$  pour l'exemple 3 est que  $w(\bar{u})$  vérifie

$$(3.5) \quad |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 - \lambda_1 w^2(\bar{u}; x) = v ,$$

où  $v$  est une constante strictement positive.

Si l'on prend  $\Omega = ]0,1[$  et  $W = H_0^1(\Omega)$  on obtient

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{1+\delta} ,$$

$$w(\bar{u}; x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \operatorname{sh} \mu_1 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\mu_1} \operatorname{sh} \mu_1 (1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

où  $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1}$ ,

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu_1}{2}}{\operatorname{ch}^2 \mu_1 x} - 1 \right) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{\delta}{2} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu_1}{2}}{\operatorname{ch}^2 \mu_1 (1-x)} - 1 \right) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et

$$J(\bar{u}) = \frac{\delta}{2} \left( \frac{\operatorname{sh} \mu_1}{\mu_1} - 1 \right) \leq \frac{\pi^2}{12} < J(1) .$$

On trouvera dans [2] le calcul explicite de la solution dans le cas d'un ouvert rectangulaire.

Application 3.3 : Exemple 4.

On considère toujours la même fonction  $\mu_\gamma$  et sur cet exemple elle vérifie

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma^2 \lambda_1 > \lambda_1 .$$

Par conséquent d'après les résultats précédents  $\exists v \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lambda(u) \frac{w^2(\bar{u}, x)}{\bar{u}^3(x)} = v .$$

Cette relation montre que  $v > 0$ . Si on multiplie par  $\bar{u}(x)$  cette égalité et si l'on intègre sur  $\Omega$  on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 dx = v \int_{\Omega} \bar{u}(x) dx .$$

On a donc sur cet exemple le résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{u} \in \mathcal{V}$  soit solution du problème  $\mathcal{P}_0$  pour l'exemple 4 est que  $w(\bar{u})$  vérifie

$$\lambda_1 \frac{w^2(\bar{u}, x)}{\bar{u}^3(x)} = v$$

où  $v > 0$  .

4 - ETUDE DU PROBLEME  $\mathcal{P}_0$  .

Proposition 4.1. Soit  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  vérifiant la contrainte

$$(4.1) \quad J(\bar{u}) = J_1 ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{u}$  soit solution du problème  $\mathcal{P}_0$  est qu'il existe  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que

$$(4.2) \quad \lambda'(\bar{u}) + \eta J'(\bar{u}) = 0 .$$

Démonstration : Soit  $\bar{u}$  une solution de  $\mathcal{P}_0$  .  $J$  et  $\lambda$  étant différentiables sur l'ouvert  $\mathcal{U}$  et  $J'(u) \neq 0$  , on sait qu'il existe  $\eta$  vérifiant (4.2). Etudions la réciproque.

Soit  $v \in \mathcal{U}$  tel que

$$J(v) = J_1 = J(\bar{u}) .$$

La relation (4.2) s'écrit :

$$\lambda'(u) \cdot (v - \bar{u}) = -\eta \int_{\Omega} (v - \bar{u}) \, dx = 0 .$$

Ce qui implique, puisque  $\lambda$  est pseudoconcave,

$$\lambda(v) \leq \lambda(\bar{u}) .$$

Remarque 4.1. Ici le caractère linéaire de  $J$  est intervenu . Si on avait supposé seulement  $J$  pseudoconvexe, il aurait fallu faire l'hypothèse  $\eta \leq 0$  pour démontrer la réciproque.

Remarque 4.2. Si  $a$  et  $b$  sont définies par des fonctions  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  alors, comme dans le paragraphe précédent, (4.2) peut être remplacé par :

$$(4.3) \quad \mathfrak{a}'(\bar{u}(x)) |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 - \lambda(\bar{u}) \mathfrak{b}'(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}; x) = v .$$

Application 4.1 : Exemple 4.

Enonçons le résultat : une condition nécessaire et suffisante pour que



$\bar{u} \in \mathcal{U}$  vérifiant (4.1) soit solution du problème  $\mathcal{P}_0$  pour l'exemple 4 est que  $(\lambda(\bar{u}), w(\bar{u}))$  vérifie :

$$(4.4) \quad \frac{\lambda(\bar{u}) w^2(\bar{u}; x)}{\bar{u}^3(x)} = v$$

où  $v$  est une constante strictement positive.

J.B. KELLER [12] avait montré en admettant implicitement la différentiabilité  $(\lambda(u), w(u))$ , que cette condition (4.4) était nécessaire.

Remarque 4.3. La fonction  $w(\bar{u})$  étant continue sur  $\bar{\Omega}$ , la relation (4.4) montre que  $\bar{u}$  va s'annuler sur la partie du bord où  $w(\bar{u})$  sera nulle. Par suite  $\bar{u}$  n'appartient pas à  $\mathcal{U}$ .

Avant d'étudier les problèmes  $\mathcal{P}_{\alpha, \beta}$  et  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$  nous allons considérer ces problèmes dans un cadre abstrait.

#### 5 - ETUDE DES PROBLEMES : CADRE ABSTRAIT.

Soient  $E$  un E.L.C.S.,  $C$  un convexe de  $E$ ,  $J$  et  $\lambda$  deux applications de  $C$  dans  $\mathbb{R}$ . On s'intéresse aux problèmes d'optimisation suivants :

$$\text{Problème } \mathcal{P} \quad \begin{array}{l} \text{Inf} \\ \lambda(u) = \lambda_1 \\ u \in C \end{array} \quad J(u)$$

$$\text{Problème } \mathcal{Q} \quad \begin{array}{l} \text{Inf} \\ \lambda(u) \geq \lambda_1 \\ u \in C \end{array} \quad J(u)$$

et

$$\text{Problème } \mathcal{R} \quad \begin{array}{l} \text{Sup} \\ J(u) = J_1 \\ u \in C \end{array} \quad \lambda(u)$$

où  $\lambda_1 = \lambda(u_1)$ ,  $J_1 = J(u_1)$   $u_1 \in C$ .

#### 5.1. ETUDE DES PROBLEMES P ET Q.

Proposition 5.1. On suppose que

$$(5.1) \quad J \text{ est pseudoconvexe sur } C,$$

(5.2)  $\lambda$  est continue sur tout segment  $[u, v]$  de  $C$ ,

(5.3)  $\left\{ \begin{array}{l} \exists u_\alpha \in C \text{ tel que } \lambda(u_\alpha) < \lambda_1 \text{ et} \\ \text{pour tout } u \in C, u \neq u_\alpha \quad J(u) > J(u_\alpha) \end{array} \right.$

alors les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $Q$  sont équivalents.

Démonstration : On va tout d'abord démontrer le

Lemme 5.1. Avec les mêmes hypothèses que dans la Proposition 5.1. on a

$$(5.4) \quad \text{Inf } Q = \text{Inf } \mathcal{P}.$$

Démonstration : Comme on a toujours

$$(5.5) \quad \text{Inf } Q \leq \text{Inf } \mathcal{P},$$

pour montrer le résultat il suffit de montrer que l'inégalité stricte est absurde.  
Supposons donc que

$$\exists v \in C \text{ tel que } \lambda(v) > \lambda_1 \text{ et } J(v) < \text{Inf } \mathcal{P}.$$

Alors, d'après (5.3), (1.6), on a

$$(5.6) \quad \forall \xi \in ]0, 1[ \quad J(\xi u_\alpha + (1-\xi)v) < \text{Max}(J(u_\alpha), J(v)) \leq \text{Inf } \mathcal{P}.$$

L'hypothèse (5.2) montre que la fonction

$$\xi \rightarrow f(\xi) = \lambda(\xi u_\alpha + (1-\xi)v)$$

est continue sur  $[0, 1]$ . Or

$$f(0) = \lambda(v) > \lambda_1$$

et

$$f(1) = \lambda(u_\alpha) < \lambda_1$$

par conséquent

$\exists \xi_0 \in ]0,1[$  tel que

$$f(\xi_0) = \lambda_1 .$$

Et par suite

$$\text{Inf } \mathcal{P} \leq J(\xi_0 u_\alpha + (1-\xi_0)v) ,$$

inégalité qui contredit (5.6). ■

Ce lemme montre que si  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ ,  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{Q}$ . Etudions la réciproque.

Soit  $\hat{u}$  une solution du problème  $\mathcal{Q}$ . On a

$$J(\hat{u}) = \text{Inf } \mathcal{Q} = \text{Inf } \mathcal{P}$$

et

$$\lambda(\hat{u}) \geq \lambda_1 .$$

Supposons que cette dernière inégalité soit stricte, alors par le même raisonnement que précédemment, on peut affirmer que

$$\exists \xi_0 \in ]0,1[ \text{ tel que } \lambda(\xi_0 u_\alpha + (1-\xi_0)\hat{u}) = \lambda_1 .$$

Et, comme

$$J(u_\alpha) < J(\hat{u}) ,$$

on a, en appliquant la Proposition 1.2

$$J(\xi_0 u_\alpha + (1-\xi_0)\hat{u}) < J(\hat{u}) = \text{Inf } \mathcal{P} ;$$

ce qui est absurde. ■

## 5.2. ETUDE DES CONDITIONS D'OPTIMALITE.

Proposition 5.2. Sous les hypothèses (5.1),

$$(5.7) \quad \lambda \text{ est pseudoconcave}$$

et

$$(5.8) \quad \exists u_Y \in C \text{ tel que } \lambda(u_Y) > \lambda_1$$

alors  $\bar{u}$  est solution du problème Q si et seulement si  $\bar{\eta} \leq 0$  tel que

$$(5.9) \quad J'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) + \bar{\eta} \lambda'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in C$$

$$(5.10) \quad \bar{\eta}(\lambda(\bar{u}) - \lambda_1) = 0 .$$

Démonstration : (i) La condition est nécessaire.

Soit  $\bar{u}$  une solution du problème Q . Alors d'après HALKIN [7] :

$$\exists (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que}$$

$$(5.11) \quad (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1) \neq 0$$

$$(5.12) \quad (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1) \leq 0$$

$$(5.13) \quad \bar{\eta}_0 J'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) - \bar{\eta}_1 \lambda'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) \leq 0 \quad \forall v \in C$$

$$(5.14) \quad \bar{\eta}_1(\lambda(\bar{u}) - \lambda_1) = 0 .$$

On va montrer que  $\bar{\eta}_0$  est différent de zéro.

Si  $\bar{\eta}_1 = 0$  alors (5.11) implique  $\bar{\eta}_0 \neq 0$  . Si  $\bar{\eta}_1 \neq 0$  (5.14) implique  $\lambda(\bar{u}) = \lambda_1$  . Supposons alors que  $\bar{\eta}_0 = 0$  . L'inéquation (5.13) s'écrit :

$$\lambda'(u) \cdot (v - \bar{u}) \leq 0 \quad \forall v \in C ,$$

et donc d'après (5.7) ,

$$\lambda(v) \leq \lambda(\bar{u}) = \lambda_1 \quad \forall v \in C ;$$

inégalité qui contredit (5.8).

On peut par conséquent diviser (5.13) par  $\bar{\eta}_0$  ; d'où (5.9)

(ii) La condition est suffisante.

Soit  $\bar{u} \in C$  vérifiant (5.9), (5.10) où  $\bar{\eta} \leq 0$  et

$$\lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1 .$$

Si  $\bar{\eta} = 0$  alors (5.1) et (5.9) impliquent :

$$J(v) \geq J(\bar{u}) \quad \forall v \in C .$$

Et donc  $\bar{u}$  est solution du problème  $Q$  .

Si  $\bar{\eta} \neq 0$  alors, d'après (5.10) ,

$$\lambda(\bar{u}) = \lambda_1 .$$

Soit  $v \in C$  vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) \geq \lambda_1 = \lambda(\bar{u}) .$$

(5.7) et (1.2) impliquent

$$\lambda'(\bar{u})(v-\bar{u}) \geq 0 ,$$

et donc

$$J'(\bar{u}) \cdot (v-\bar{u}) \geq 0 .$$

Inégalité qui entraîne, compte tenu de l'hypothèse (5.1)

$$J(v) \geq J(\bar{u}) .$$

Par suite :  $\bar{u}$  est solution du problème  $Q$  . ■

Corollaire 5.1. On suppose que les hypothèses (5.1), (5.3), (5.7) et (5.8) sont vérifiées. Soit  $\bar{u} \in C$  alors  $\bar{u}$  est solution du problème  $Q$  ou du problème  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\exists \eta < 0$  tel que

$$(5.9) \quad J'(\bar{u}) \cdot (v-\bar{u}) + \eta \lambda'(u) \cdot (v-\bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in C .$$

Démonstration : D'après la Proposition 5.1, les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalents, par suite on peut appliquer la Proposition 5.2 au problème  $\mathcal{P}$ . Reste à montrer que  $\bar{\eta} < 0$ .

Si  $\bar{\eta} = 0$  alors (5.1) et (5.9) impliquent

$$J(v) \geq J(\bar{u}) \quad \forall v \in C ;$$

ce qui est en contradiction avec (5.3). ■

Remarque 5.1. On ne peut déduire de (5.9) un principe du maximum car la somme de deux fonctions pseudoconvexes n'est pas nécessairement pseudoconvexe.

### 5.3. DUALISATION DU PROBLEME $\mathcal{Q}$ .

On va dualiser par les minimax le problème  $\mathcal{Q}$  (cf. EKELAND-TEMAM [5] chapitre VI).

On a pour tout  $u \in C$

$$\sup_{p \leq 0} \{J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1)\} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda(u) < \lambda_1 \\ J(u) & \text{si } \lambda(u) \geq \lambda_1 \end{cases} .$$

Ce qui permet d'écrire le problème  $\mathcal{Q}$

$$(5.15) \quad \inf_{u \in C} \sup_{p \leq 0} \mathcal{L}(u, p)$$

où

$$(5.16) \quad \mathcal{L}(u, p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) .$$

On appelle problème dual de  $\mathcal{Q}$  le problème

$$\mathcal{Q}^* \quad \sup_{p \leq 0} \inf_{u \in C} \mathcal{L}(u, p) .$$

Bien entendu on a

$$(5.17) \quad \sup \mathcal{Q}^* \leq \inf \mathcal{Q} .$$

Posons

$$(5.18) \quad h(p) = \inf_{u \in C} \mathcal{L}(u, p) .$$

La fonction  $h$  est concave et s.c.s. puisque c'est l'enveloppe inférieure des fonctions affines :

$$p \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(u, p) .$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas fait d'hypothèse particulière sur  $J$  et  $\lambda$ . Si l'on suppose que  $\lambda$  vérifie (5.8) alors on a

$$(5.19) \quad h(p) \rightarrow -\infty \text{ quand } p \rightarrow -\infty .$$

En effet (5.16) et (5.18) impliquent

$$(5.20) \quad h(p) \leq p(\lambda(u_Y) - \lambda_1) + J(u_Y)$$

et, compte tenu de (5.8), cela implique (5.19). D'où la

Proposition 5.3. Si la fonction  $\lambda$  vérifie la condition (5.8) alors le problème  $Q^*$ , dual de  $Q$ , admet une solution  $\bar{p}$ .

Proposition 5.4. On suppose que l'hypothèse (5.8) est vérifiée et que pour tout  $p < 0$  la fonction

$$(5.21) \quad u \rightarrow \mathcal{L}(u, p) \text{ est quasiconvexe, sur } C$$

$$(5.22) \quad J \text{ est s.c.i. sur } C$$

$$(5.23) \quad \lambda \text{ est s.c.s. sur } C$$

alors

$$(5.24) \quad \max_{p \leq 0} \inf_{v \in C} \mathcal{L}(v, p) = \inf_{v \in C} \sup_{p \leq 0} \mathcal{L}(v, p)$$

c'est-à-dire

$$\text{Sup } Q^* = \text{Inf } Q .$$

De plus

$$(5.25) \quad (\bar{u}, \bar{p}) \text{ point selle sur } C \times \mathbb{R} \text{ de } \mathcal{L}(u, p) \iff \begin{cases} \bar{p} \text{ est solution de } Q^* \\ \text{et} \\ \bar{u} \text{ est solution de } Q . \end{cases}$$

Démonstration : L'égalité (5.24) résultera du principe du minimax de Ky-Fan (cf. [3]), si on montre qu'il existe  $\tilde{v} \in C$  et  $\xi \in \mathbb{R}$  tels que

$$(5.26) \quad \xi < \text{Inf } Q$$

et

$$I_\xi = \{p \leq 0 ; \mathcal{L}(\tilde{v}, p) \geq \xi\} \text{ soit compact .}$$

Quel que soit  $\xi$  vérifiant (5.26) on a, si l'on prend  $\tilde{v} = u_\gamma$  et compte tenu de (5.8), (5.16) :

$$I_\xi = \left[ \frac{\xi - J(u_\gamma)}{\lambda(u_\gamma) - \lambda_1}, 0 \right] .$$

Donc  $I_\xi$  est compact.

(5.25) résulte de (5.24) et de la caractérisation suivante d'un point selle :

Lemme 5.1. Une fonction  $\mathcal{L}$  définie sur  $A \times B$  à valeurs réelles possède un point selle sur  $A \times B$  si et seulement si

$$\text{Max}_{p \in B} \text{Inf}_{u \in A} \mathcal{L}(u, p) = \text{Min}_{u \in A} \text{Sup}_{p \in B} \mathcal{L}(u, p)$$

et ce nombre est alors égal à  $\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p})$  .

#### 5.4. ETUDE DU PROBLEME $R$ .

On peut si l'on fait les hypothèses similaires à celles faites dans les sections précédentes, appliquer les résultats obtenus. Par exemple l'équivalent de l'hypothèse (5.3) est

$$(5.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists u_0 \in C \text{ tel que } J(u_0) > J_1, \lambda(u_0) \geq \text{Sup } \mathcal{R} \text{ et pour tout } u \in C, \\ u \neq u_0 \quad \lambda(u_0) > \lambda(u). \end{array} \right.$$

Mais pour certains problèmes cette hypothèse n'est pas vérifiée ; c'est le cas pour le problème  $\mathcal{R}_\alpha$  dans le cas où le problème spectral est donné par celui décrit dans l'exemple 4 du paragraphe II.5.

Si  $\text{Inf } \mathcal{P} > -\infty$  et si l'on pose

$$(5.28) \quad J_1 = \text{Inf } \mathcal{P}$$

alors on va voir que les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  sont liés.

Proposition 5.5. Si on fait les hypothèses (5.1), (5.2) et (5.3) alors :

(i) si  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ ,  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{R}$  et toute solution du problème  $\mathcal{R}$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ .

(ii) si  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{R}$  et si  $\lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1$  alors  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ .

Démonstration : Supposons que  $\bar{u}$  ne soit pas solution de  $\mathcal{R}$  alors il existe  $\bar{v} \in C$  vérifiant

$$(5.29) \quad \lambda(\bar{v}) > \lambda(\bar{u}) = \lambda_1$$

et

$$J(\bar{v}) = J(1) = \text{Inf } \mathcal{P}.$$

Par suite  $\bar{v}$  est solution de  $\mathcal{Q}$  et donc de  $\mathcal{P}$  ce qui impose

$$\lambda(\bar{v}) = \lambda_1.$$

Cette relation contredit (5.29).

Remarque 5.2. L'équivalence des problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  n'étant pas complète nous ferons dans le paragraphe 7 une étude du problème  $\mathcal{R}$  indépendante de l'étude du

problème  $\mathcal{P}$ .

6 - ETUDE DES PROBLEMES  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ .

On revient aux hypothèses et notations du paragraphe 2. On va introduire les problèmes suivants :

$$Q_{\alpha,\beta} \quad \inf_{\substack{u \in C_{\alpha,\beta} \\ \lambda(u) \geq \lambda_1}} J(u).$$

Si l'on pose

$$(6.1) \quad u_\alpha(x) \equiv \alpha \quad \forall x \in \Omega,$$

d'après (2.1), (2.10) on a

$$(6.2) \quad J(u_\alpha) < J(u) \quad \text{pour tout } u \in C_{\alpha,\beta}, u \neq u_\alpha.$$

Proposition 6.1. Si on suppose de plus que

$$(6.3) \quad \lambda(u_\alpha) < \lambda_1$$

$$(6.4) \quad \exists u_\gamma \in C_{\alpha,\beta} \quad \text{tel que } \lambda(u_\gamma) > \lambda_1$$

alors

(i) les problèmes  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  et  $Q_{\alpha,\beta}$  sont équivalents

(ii)  $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$  est solution du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  ou  $Q_{\alpha,\beta}$

si et seulement si

$$(6.5) \quad \lambda(\bar{u}) = \lambda_1$$

et

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \eta < 0 \quad \text{tel que} \\ J(v) - J(\bar{u}) + \eta \lambda'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta} \end{array} \right.$$

(iii) l'ensemble  $S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$  des solutions du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  est convexe

et  $w(u)$  est indépendant de  $u$  pour  $u \in S(\mathcal{G}_{\alpha,\beta})$  .

(iv) Si  $\beta < +\infty$  alors le problème  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$  admet au moins une solution.

Démonstration : Par application de la Proposition 5.1 et du Corollaire 5.1, on obtient (i) et (ii).

Posons  $S = S(\mathcal{G}_{\alpha,\beta})$  . Soient  $(\bar{u}, \bar{v}) \in S \times S$  et  $\xi \in [0,1]$  on pose

$$u(\xi) = \xi \bar{u} + (1-\xi) \bar{v} \quad ,$$

$J$  étant linéaire, on a

$$J(u(\xi)) = \text{Inf } \mathcal{G}_{\alpha,\beta} \quad .$$

D'autre part, puisque  $\lambda$  est pseudoconcave on a

$$\lambda(u(\xi)) \geq \text{Min}(\lambda(\bar{u}), \lambda(\bar{v})) = \lambda_1 \quad .$$

Et par suite  $u(\xi)$  est solution du problème  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$  et donc de  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$  . D'où

$$\lambda(\xi \bar{u} + (1-\xi) \bar{v}) = \lambda_1 \quad \forall \xi \in [0,1] \quad ,$$

ce qui implique

$$(6.7) \quad \lambda'(\bar{v})(\bar{u} - \bar{v}) = 0 \quad .$$

On pose

$$w_1 = w(\bar{u}) \quad \text{et} \quad w_2 = w(\bar{v}) \quad .$$

La relation (6.7), compte tenu de (2.3), devient

$$(6.8) \quad \int_{\Omega} a'(\bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})(x) |\nabla w_2(x)|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} b'(\bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})(x) w_2^2(x) dx \quad .$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega} (a(\bar{u}) - a(\bar{v}))(x) |\nabla w_2(x)|^2 \leq \lambda_1 \int_{\Omega} (b(\bar{u}) - b(\bar{v}))(x) w_2^2(x) dx$$

puisque  $a$  est concave et  $b$  convexe. Par suite II(1.19) implique

$$\langle A_{\bar{u}} w_2, w_2 \rangle \leq \lambda_1 (B_{\bar{u}} w_2, w_2) .$$

Et donc  $w_2$  est un vecteur propre associé à  $\bar{u}$  et  $\lambda_1$ . Ce qui implique, d'après la Proposition II.1.1,

$$w_2 = w_1 .$$

Cela termine la démonstration de (iii).

Démontrons la propriété (iv).  $C_{\alpha, \beta}$  est un convexe faible\* fermé de  $L^\infty(\Omega)$ , et comme  $\beta < +\infty$ , il est faible\* compact. Posons

$$K = \{u \in C_{\alpha, \beta} ; \lambda(u) \geq \lambda_1\} .$$

D'après (2.11)  $K$  est faible\* compact.  $J$  étant faiblement-\* continue sur  $L^\infty(\Omega)$  atteint donc son minimum en au moins un point de  $K$ . ■

Proposition 6.2. (Mêmes hypothèses que dans la Proposition 6.1.)

Si  $a$  et  $b$  sont définies par des fonctions  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  alors la relation (6.6) est équivalente à :

$\exists e > 0$  vérifiant

$$(6.9) \quad g(\bar{u}; x) \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\beta = \{x \in \Omega; \bar{u}(x) < \beta\}$$

et

$$(6.10) \quad g(\bar{u}; x) \geq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\alpha = \{x \in \Omega; \bar{u}(x) > \alpha\}$$

où

$$(6.11) \quad g(\bar{u}; x) = \hat{a}'(\bar{u}(x)) |\nabla w(\bar{u}; x)|^2 - \lambda_1 \hat{b}'(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}; x) .$$

Démonstration : On pose

$$(6.12) \quad e = - \frac{\int_{\Omega} \hat{b}(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}; x) dx}{\eta} .$$

La relation (6.6) s'écrit alors :

$$(6.13) \quad \int_{\Omega} \{e - g(\bar{u}; x)\} \{v(x) - \bar{u}(x)\} dx \geq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha, \beta}.$$

Supposons que (6.9) ne soit pas vérifiée. Alors on peut considérer une partie  $\Omega_1$  de  $\Omega_\beta$ , de mesure non nulle, telle que

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \{e - g(\bar{u}; x)\} &\leq 0 & \text{p.p. } x \in \Omega_1 \\ \bar{u}(x) &\leq \beta_1 < \beta & \text{p.p. } x \in \Omega_1. \end{aligned}$$

Si l'on prend dans (6.13), comme fonction  $v$ , la fonction

$$v(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega \\ \bar{u}(x) + \frac{\beta - \beta_1}{2} & \text{sur } \Omega_1 \end{cases}$$

on obtient

$$\int_{\Omega_1} \{e - g(\bar{u}; x)\} dx \geq 0;$$

ce qui contredit (6.14).

On démontrerait de la même façon (6.10). ■

Si  $\beta = +\infty$  les relations se simplifient et on obtient

Corollaire 6.1. Si  $\beta = +\infty$ , la relation (6.6) est équivalente à

$$\exists e > 0 \text{ vérifiant}$$

$$(6.15) \quad g(\bar{u}; x) \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

$$(6.16) \quad (g(\bar{u}; x) - e)(\bar{u}(x) - \alpha) = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

où  $g$  est définie par (6.11).

On pose

$$(6.17) \quad \mathcal{L}(u, p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1).$$

Proposition 6.3. Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 6.1 et si l'on suppose que :

$$u \rightarrow \mathcal{L}(u,p) \text{ est quasiconvexe pour tout } p \leq 0$$

alors  $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$  est solution du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  (ou  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ ) si et seulement si  $(\bar{u}, \bar{p})$  est point selle sur  $C_{\alpha,\beta} \times \mathbb{R}_-$  de  $\mathcal{L}(u,p)$  . De plus on a  $\bar{p} < 0$  .

Démonstration : Le résultat énoncé, sauf  $\bar{p} \neq 0$  , est obtenu par application de la Proposition 5.4.

Si  $\bar{p} = 0$  alors on a

$$J(\bar{u}) \leq J(v) \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta}$$

ce qui est en contradiction avec (6.3), (6.2). ■

Corollaire 6.2. (Mêmes hypothèses que la Proposition 6.3). Soit  $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$  alors  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  (ou  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ ) si et seulement si

$$(6.18) \quad \lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1$$

et  $\exists \bar{p}$  vérifiant

$$(6.19) \quad \bar{p} \leq 0$$

$$(6.20) \quad J(\bar{u}) \leq J(v) + \bar{p}(\lambda(v) - \lambda_1) ; \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta}$$

Démonstration : La Proposition 6.3 montre que la condition est nécessaire.

Montrons que la condition est suffisante. Soit  $v \in C_{\alpha,\beta}$  vérifiant la contrainte

$$\lambda(v) \geq \lambda_1$$

alors (6.19) et (6.20) montrent que :

$$J(\bar{u}) \leq J(v)$$

et donc  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$  et donc du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  . ■

Remarque 6.1. Une condition nécessaire pour que  $(\bar{u}, \bar{p})$  soit point selle de  $\mathcal{Q}(u, p)$  sur  $C_{\alpha, \beta} \times \mathbb{R}_-$  est

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{p} \lambda'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha, \beta} .$$

Par conséquent  $\bar{p}$  est l'une des constantes  $\eta$  de la Proposition 6.1. Et par suite, si  $\eta$  existe et est unique alors le problème  $\mathcal{Q}_{\alpha, \beta}^*$  admet une seule solution.

Application 6.1. Exemple 1. On a

$$\lambda(u_\alpha) = \alpha \lambda_1$$

et donc, d'après (2.7) ,  $\lambda(u_\alpha) < \lambda_1$  .

Si l'on choisit

$$(6.21) \quad 1 < \gamma < \beta$$

et si l'on pose

$$(6.22) \quad u_\gamma(x) \equiv \gamma \quad \forall x \in \Omega$$

on a

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma \lambda_1 > \lambda_1 .$$

Donc les hypothèses (6.3) et (6.4) sont vérifiées. On va pouvoir par conséquent appliquer les résultats qui précèdent en distinguant les deux cas  $\beta < +\infty$  et  $\beta = +\infty$  :

1er cas.  $\beta < +\infty$  .

Le problème  $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}$  admet une solution au moins.

Soit  $\bar{u} \in C_{\alpha, \beta}$  vérifiant (6.5),  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}$  si et seulement si  $\exists \epsilon > 0$  tel que

$$(6.23) \quad |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \leq \epsilon \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\beta$$

et

$$(6.24) \quad |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \geq \epsilon \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_\alpha .$$

Nous allons montrer que cette constante  $e$  est indépendante de la solution  $\bar{u}$ .

Soit  $\bar{v}$  une autre solution du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ . Alors d'après la Proposition 6.1 on a

$$w(\bar{v}) = w(\bar{u}) .$$

De plus  $\exists e' > 0$  tel que

$$|\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \leq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\beta = \{x; \bar{v}(x) < \beta\}$$

et

$$|\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \geq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\alpha = \{x; \bar{v}(x) > \alpha\} .$$

Posons

$$\Omega_1 = \{x; \bar{u}(x) > \bar{v}(x)\} ,$$

$$\Omega_2 = \{x; \bar{v}(x) > \bar{u}(x)\} .$$

Constatons que si  $\bar{u}$  est différent de  $\bar{v}$  alors  $\text{mes } \Omega_1$  et  $\text{mes } \Omega_2$  sont différentes de zéro puisque

$$\int_{\Omega} \bar{u}(x) dx = \int_{\Omega} \bar{v}(x) dx .$$

D'autre part on a

$$x \in \Omega_1 \implies x \in \Omega'_\alpha \cap \Omega'_\beta \implies e \leq |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \leq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_1$$

et

$$x \in \Omega_2 \implies x \in \Omega'_\alpha \cap \Omega_\beta \implies e' \leq |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \leq e \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_2 .$$

Toutes ces inégalités impliquent

$$e = e' .$$

2ème cas.  $\beta = +\infty$ .

On ne sait pas si le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  admet une solution mais on sait caractériser cette solution. Soit  $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$  vérifiant (6.5),  $\bar{u}$  est une solution du

problème  $\mathcal{G}_\alpha$  si et seulement si

$\exists e > 0$  tel que

$$(6.25) \quad |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

$$(6.26) \quad (|\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 - e)(\bar{u}(x) - \alpha) = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

De même que dans le cas précédent on montrerait que  $e$  est indépendante de la solution  $\bar{u}$  de  $\mathcal{G}_\alpha$ .

### Application 6.2. Exemple 3.

On a

$$\lambda(u_\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} (1 + \delta) \lambda_1 < \lambda_1.$$

On considère toujours la même fonction  $u_\gamma$  définie par (6.22) avec  $\gamma$  vérifiant (6.21). On a

$$\lambda(u_\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha + \delta} (1 + \delta) \lambda_1 > \lambda_1.$$

Par application des résultats obtenus dans ce paragraphe on obtient :

1er cas .  $\beta < +\infty$ .

Le problème  $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}$  admet une solution au moins.

Soit  $\bar{u} \in C_{\alpha, \beta}$  vérifiant (6.5),  $\bar{u}$  est une solution du problème  $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}$  si et seulement si  $\exists e > 0$  tel que

$$(6.27) \quad |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 - \lambda_1 w^2(\bar{u}(x); x) \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\beta$$

$$(6.28) \quad |\nabla w(\bar{u}(x); x)|^2 - \lambda_1 w^2(\bar{u}(x); x) \geq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\alpha.$$

Comme dans l'Application 6.1. on peut montrer que cette constante est unique.

2ème cas .  $\beta = +\infty$ .

On ne sait pas si l'on a existence de solutions du problème  $\mathcal{G}_\alpha$ . La

condition nécessaire et suffisante est la même, l'inégalité (6.28) étant remplacée par une égalité. C'est l'exemple que nous avons traité dans [9] mais nous n'avons pas démontré que  $e$  était strictement positive. L'idée de comparer les problèmes  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  est due à D. SERRE.

Remarque 6.2. Dans les deux exemples qui précèdent, la condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{u}$  soit solution de  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  ne dépendait pas explicitement de  $\bar{u}$  car  $a$  et  $b$  étaient des fonctions affines de  $\bar{u}$ . Nous allons maintenant traiter un exemple où il n'en n'est plus ainsi.

Application 6.3. Exemple 4.

Les fonctions  $u_\alpha$  et  $u_\gamma$  vérifient

$$\lambda(u_\alpha) = \alpha^2 \lambda_1 < \lambda_1 ,$$

$$\lambda(u_\gamma) = \gamma^2 \lambda_1 > \lambda_1 .$$

Énonçons les résultats obtenus :

1er cas.  $\beta < +\infty$  .

Le problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  admet une et une seule solution  $\bar{u}$  caractérisée par la condition suivante

$\exists e > 0$  tel que

$$(6.29) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\beta$$

$$(6.30) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} \geq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\alpha .$$

Le problème  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}^*$ , dual de  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}$ , admet une et une seule solution  $\bar{p}$  vérifiant

$$(6.31) \quad \bar{p} = - e^{-1} \int_{\Omega} \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{u}^3(x)} dx .$$

2<sup>ème</sup> cas.  $\beta = +\infty$ .

Si le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  admet une solution celle-ci est unique et elle est caractérisée par la même condition ; (6.30) étant remplacée par une égalité.

Seule l'unicité de la solution reste à montrer. Soit  $\bar{v}$  une seconde solution de  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  alors  $\exists e' > 0$  tel que

$$(6.32) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{v}^3(x)} \leq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\beta = \{x; \bar{v}(x) < \beta\}$$

$$(6.33) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x);x)}{\bar{v}^3(x)} \geq e' \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega'_\alpha = \{x; \bar{v}(x) > \alpha\} .$$

Posons

$$\Omega_1 = \{x; \bar{u}(x) > \bar{v}(x)\} ,$$

$$\Omega_2 = \{x; \bar{u}(x) < \bar{v}(x)\} .$$

Supposons  $\bar{u} \neq \bar{v}$ , alors les ensembles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont de mesures non nulles.

D'autre part, comme  $\Omega_1 \subset \Omega_\alpha \cap \Omega'_\beta$ , on a

$$e \bar{u}^3(x) \leq w^2(\bar{u}(x);x) \leq e' \bar{v}^3(x) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega_1$$

et l'on en déduit que

$$e < e' .$$

De même comme  $\Omega_2 \subset \Omega'_\alpha \cap \Omega_\beta$  on a

$$e' < e .$$

On arrive ainsi à une contradiction.

$(e, \bar{u})$  étant unique, la relation (6.12) montre que  $\eta$  est unique ainsi que  $\bar{p}$  d'après la Remarque 6.2.

7 - ETUDE DES PROBLEMES  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$  .

Sous les hypothèses de la section 2 on a le résultat suivant :

Proposition 7.1. Soit  $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$  vérifiant la contrainte

$$(7.1) \quad J(\bar{u}) = J_1 ,$$

alors  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$  si et seulement si il existe  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que

$$(7.2) \quad \lambda'(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) + \eta (J(v) - J(\bar{u})) \leq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta} .$$

(ii) L'ensemble  $S(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$  des solutions du problème  $S_{\alpha,\beta}$  est convexe et  $w(u)$  est indépendant de  $u$  pour  $u \in S(\mathcal{R}_{\alpha,\beta})$  .

(iii) Si  $\beta < +\infty$  le problème  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$  admet au moins une solution.

Démonstration : D'après les résultats d'HALKIN [7], on sait que :  $\exists (\mu_0, \mu_1) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$(7.3) \quad (\mu_0, \mu_1) \neq (0, 0)$$

$$(7.4) \quad \mu_1 \leq 0$$

$$(7.5) \quad -\mu_1 \lambda'(u) \cdot (v - \bar{u}) + \mu_0 J(\bar{u}) \cdot (v - \bar{u}) \leq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta} .$$

Si  $\mu_1 = 0$  alors (7.5) s'écrit

$$\mu_0 (J(v) - J(\bar{u})) \leq 0 \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta} .$$

Si  $\mu_0 < 0$  cela implique

$$J(v) \geq J(\bar{u}) = J_1 \quad \forall v \in C_{\alpha,\beta} .$$

Tandis que, si  $\mu_0 > 0$ , cela implique

$$J(v) \leq J(\bar{u}) = J_1 \quad \forall v \in C_{\alpha, \beta} .$$

Dans les deux cas c'est incompatible avec la définition de  $J$  et de  $C_{\alpha, \beta}$ . Par suite on a

$$\mu_1 < 0 .$$

Et donc (7.5) implique (7.2).

Réciproquement soient  $\bar{u} \in C_{\alpha, \beta}$  et  $\eta \in \mathbb{R}$  vérifiant (7.1) et (7.2). Soit  $v \in C_{\alpha, \beta}$  vérifiant la contrainte (7.1) alors (7.2) s'écrit :

$$\lambda'(u) \cdot (v-u) \leq 0 .$$

Et donc, puisque  $\lambda$  est pseudoconcave

$$\lambda(v) \leq \lambda(\bar{u}) .$$

Cela termine la démonstration de (i).

Démontrons la propriété (ii). On pose  $S = S(\mathcal{R}_{\alpha, \beta})$ . Soit  $(\bar{u}, \bar{v}) \in S \times S$  et  $\xi \in [0, 1]$ . Soit

$$u(\xi) = \xi \bar{u} + (1-\xi) \bar{v} .$$

On a

$$u(\xi) \in C_{\alpha, \beta}$$

$$J(u(\xi)) = J_1 \quad (J \text{ étant linéaire})$$

et

$$\lambda(u(\xi)) \geq \text{Min}(\lambda(\bar{u}), \lambda(\bar{v})) = \text{Sup } \mathcal{R}_{\alpha, \beta} .$$

Par conséquent  $u(\xi)$  est solution du problème  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ . On termine alors la démonstration comme dans le cas de la Proposition 6.1.

Le résultat (iii) est évident puisque on maximise une fonction faible-\* s.c.s. sur un compact faible-\* de  $L^\infty(\Omega)$ .

Proposition 7.2. Si  $a$  et  $b$  sont définies par des fonctions  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  alors la relation (7.2) est équivalente à

$$\exists e \in \mathbb{R} \text{ vérifiant (6.9) et (6.10)}$$

où  $g$  est définie par

$$(7.6) \quad g(\bar{u}(x), x) = \mathfrak{a}'(\bar{u}(x)) |\nabla w(\bar{u}(x), x)|^2 - \lambda(u) \mathfrak{b}'(u(x)) w^2(u(x); x) .$$

Démonstration : On fait la démonstration comme dans le cas de la Proposition 6.2 mais (6.12) est remplacée par

$$(7.7) \quad e = - \eta \int_{\Omega} \mathfrak{b}(\bar{u}(x)) w^2(\bar{u}(x), x) dx . \quad \blacksquare$$

Application 7.1. Exemple 4.

On peut appliquer les résultats qui précèdent et par conséquent si  $\bar{u} \in C_{\alpha, \beta}$  et vérifie (7.1),  $\bar{u}$  est solution du problème  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$  si et seulement si

$$\exists e \in \mathbb{R} \text{ tel que}$$

$$(7.8) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x); x)}{\bar{u}^3(x)} \leq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_{\beta}$$

$$(7.9) \quad \frac{w^2(\bar{u}(x); x)}{\bar{u}^3(x)} \geq e \quad \text{p.p. } x \in \Omega_{\alpha} .$$

Comme  $u(x) \equiv \beta$  n'est pas solution de  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ , on en déduit que  $\text{mes } \Omega_{\beta} \neq 0$  et donc (7.8) implique

$$e > 0 .$$

On démontrerait comme dans le cas de l'application 6.3, que l'existence d'une solution implique l'unicité de cette solution. Et par conséquent si  $\beta < +\infty$  on a existence et unicité de solution du problème  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ .

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe 5 au problème, c'est pourquoi nous supposons que

$$(7.10) \quad \beta < +\infty .$$

Et nous allons considérer les fonctions  $u_\alpha$  définie par (6.1) et  $u_\beta$  définie par

$$(7.11) \quad u_\beta(x) \equiv \beta .$$

Ces fonctions vérifient

$$(7.12) \quad J(u_\alpha) < J(u) < J(u_\beta) \text{ pour tout } u \in C_{\alpha,\beta}, u \neq u_\beta \text{ et } u \neq u_\alpha$$

Nous supposons que

$$(7.13) \quad \lambda(u_\beta) > \lambda(u) \text{ pour tout } u \in C_{\alpha,\beta}, u \neq u_\beta .$$

On introduit le problème :

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta} \quad \begin{array}{l} \text{Sup}_{u \in C_{\alpha,\beta}} \lambda(u) \\ J(u) \leq J_1 \end{array} .$$

Constatons que les hypothèses (5.3) et (5.8) sont vérifiées. En effet

$$\exists u_\beta \in C \text{ tel que } J(u_\beta) > J_1 \text{ et pour tout } u \in C_{\alpha,\beta}, u \neq u_\beta, \lambda(u) < \lambda(u_\beta)$$

et

$$\exists u_\alpha \in C \text{ tel que } J(u_\alpha) < J_1 .$$

D'où

Proposition 7.3. Sous les hypothèses (7.10), (7.13) alors

- (i) les problèmes  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$  et  $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$  sont équivalents ;
- (ii) la constante  $n$  intervenant dans (7.2) est positive .

Application 7.1. Exemple 4. (suite).

Montrons que, si  $\beta$  vérifie (7.10) alors on a (7.13).

Soit  $u \in C_{\alpha, \beta}$ ,  $u \neq u_\beta$ , on a, d'après II.(1.12), II.(5.11),

$$\lambda(u) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(u_\beta, x)|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{w^2(u_\beta, x)}{u^2(x)} dx} < \lambda(u_\beta) .$$

Ce qui démontre (7.13).

IV - DISCRETISATION DES PROBLEMES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

Dans tout ce chapitre on suppose que les hypothèses de la section III.2 ainsi que III.(6.3) et III.(6.4) sont vérifiées ;  $a$  et  $b$  étant définies par des applications  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$ . D'autre part on supposera, bien que cela ne soit pas nécessaire, que le domaine  $\Omega$  est à frontière polygonale. Enfin nous ne traiterons que l'approximation des problèmes  $\mathcal{P}_{\alpha, \beta}$ , les problèmes  $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$  pouvant être résolus par des méthodes semblables.

1 - APPROXIMATION DES ESPACES.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$ . On suppose que cette triangulation vérifie les hypothèses habituelles suivantes : (cf. CIARLET [4], STRANG et FIX [21])

- (i) la réunion des triangles fermés de  $\mathcal{T}_h$  est  $\overline{\Omega}$ ,
- (ii) tout triangle de  $\mathcal{T}_h$  a un diamètre inférieur ou égal à  $h$ ,
- (iii) deux triangles de  $\mathcal{T}_h$  ont, soit une intersection vide, soit une intersection réduite à un côté commun ou à un sommet commun,
- (iv)  $\mathcal{T}_h$  est une suite régulière de triangulations de  $\Omega$ , c'est-à-dire si  $\underline{\theta}(h)$  est le plus petit des angles de tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  on a

$$\underline{\theta}(h) \geq \underline{\theta} > 0 \text{ pour tout } h ,$$

(v) si  $\text{mes } \Gamma_2 \neq 0$  alors les extrémités communes de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des noeuds de la triangulation. Et elle vérifie l'hypothèse supplémentaire suivante :

- (vi) si  $\overline{\theta}(h)$  est le plus grand des angles de tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  on a

$$\overline{\theta}(h) \leq \frac{\pi}{2} .$$

On désigne par  $s_1, s_2, \dots, s_M$  les sommets de la triangulation, par  $\mathcal{S}_h$  l'ensemble de ces sommets et par  $T_1, T_2, \dots, T_p$  les triangles  $\mathcal{T}_h$ . Si  $N$  est le nombre de sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  non situé sur  $\Gamma_1$ , on peut supposer,

sans nuire à la généralité, que ces sommets sont  $s_1, s_2, \dots, s_N$ .

Soit  $W_h$  l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle de  $\mathcal{T}_h$ , continues sur  $\bar{\Omega}$  et nulles sur  $\Gamma_1$ . On a donc

$$(1.1) \quad W_h \subset W$$

et

$$\dim W_h = N.$$

On désignera par  $\phi_{1,h}, \phi_{2,h}, \dots, \phi_{N,h}$  la base habituelle de  $W_h$  et par  $w_1, w_2, \dots, w_N$  les composantes suivant cette base d'un vecteur  $w_h$  de  $W_h$ . On a donc les relations

$$(1.2) \quad \phi_{i,h}(s_j) = \delta_{i,j} \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N$$

$$(1.3) \quad w_h = \sum_{i=1}^N w_i \phi_{i,h}.$$

On écrira (1.3) sous la forme

$$w_h = (w_i).$$

Pour tout  $w \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \cap W$  on définit

$$r_h w = w_h$$

où  $w_h$  est la fonction de  $W_h$  telle que

$$w_h(s_j) = w(s_j) \quad j = 1, \dots, M.$$

On a d'après [25]

Lemme 1.1. Pour tout  $w \in W$  et tout  $h > 0$  il existe  $w_h \in W_h$  telle que si  $w \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ ,  $w_h = r_h w$  et  $w_h$  converge vers  $w$  dans  $W$  quand  $h$  tend vers  $0$ .

On va maintenant approximer en un sens faible le convexe  $C_{\alpha,\beta}$  de  $L^\infty(\Omega)$ . Soit  $U_h$  l'ensemble des fonctions constantes sur chaque triangle de  $\mathcal{T}_h$ . L'ensemble

$(\chi_h)$  des fonctions caractéristiques de ces triangles forme une base de  $U_h$ . On a

$$(1.4) \quad u_h(x) = \sum_{k=1}^P u_k \chi_k(x)$$

que l'on notera

$$u_h = (u_k) .$$

On pose

$$C_{h,\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta} \cap U_h .$$

Pour tout  $u \in C_{\alpha,\beta}$  on définit

$$(1.5) \quad q_h u = u_h = (u_k)$$

où

$$(1.6) \quad u_k = \frac{1}{\text{aire } T_k} \int_{T_k} u(x) dx \quad k = 1, \dots, P .$$

Lemme 1.2. Pour tout  $u \in C_{\alpha,\beta}$ ,  $q_h u$  converge vers  $u$  dans  $L^1(\Omega)$  pour la topologie forte et  $q_h u$  converge vers  $u$  dans  $L^\infty(\Omega)$  pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  si  $\beta < +\infty$ .

Démonstration : On démontre facilement que

$$q_h u \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort .}$$

D'autre part  $q_h u \in C_{\alpha,\beta}$  donc  $q_h u$  est borné dans  $L^\infty(\Omega)$ , par suite

$$q_h u \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(\Omega) . \quad \blacksquare$$

Notation. On désignera par  $M_m(\mathbb{R})$  l'anneau des matrices carrées d'ordre  $m$  à coefficients réels. On notera par  $(, )_e$  le produit scalaire habituel de  $\mathbb{R}^m$

$$(x, y)_e = \sum_{i=1}^m x_i y_i ,$$

l'orthogonalité par rapport à ce produit scalaire sera noté  $\perp$ .

## 2 - APPROXIMATION DU PROBLEME SPECTRAL.

On va approximer le problème spectral par :

trouver  $(w_h, \lambda_h) \in W_h \times \mathbb{R}$  tel que

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} a(u_h)(x) \nabla w_h(x) \cdot \nabla \phi_h(x) \, dx = \lambda_h \int_{\Omega} b(u_h)(x) w_h(x) \phi_h(x) \, dx \quad \forall \phi_h \in W_h .$$

Le système (2.1) s'écrit :

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}(u_h) w_j = \lambda_h \sum_{j=1}^N b_{ij}(u_h) w_j \quad \forall i = 1, \dots, N$$

où

$$(2.3) \quad a_{ij}(u_h) = \int_{\Omega} a(u_h)(x) \nabla \phi_{i,h}(x) \cdot \nabla \phi_{j,h}(x) \, dx$$

$$(2.4) \quad b_{ij}(u_h) = \int_{\Omega} b(u_h)(x) \phi_{i,h}(x) \phi_{j,h}(x) \, dx ,$$

ce qui s'écrit :

$$(2.5) \quad a_{ij}(u_h) = \sum_{k=1}^P a(u_k) \int_{T_K} \nabla \phi_{i,h}(x) \cdot \nabla \phi_{j,h}(x) \, dx$$

$$(2.6) \quad b_{i,j}(u_h) = \sum_{k=1}^P b(u_k) \int_{T_K} \phi_{i,h}(x) \phi_{j,h}(x) \, dx .$$

On pose

$$(2.7) \quad \hat{A}_{u_h} = (a_{ij}(u_h)) \in M_N(\mathbb{R})$$

$$(2.8) \quad \hat{B}_{u_h} = (b_{ij}(u_h)) \in M_N(\mathbb{R}) .$$

Le problème spectral (2.2) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(2.9) \quad \hat{A}_{u_h} w_h = \lambda_h \hat{B}_{u_h} w_h .$$

Les matrices  $\hat{A}_{u_h}$  et  $\hat{B}_{u_h}$  sont symétriques définies positives. Par conséquent le problème spectral (2.9) est classique. On sait qu'il admet  $N$  valeurs propres strictement positives et que les sous-espaces propres sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par  $\hat{B}_{u_h}$  ou par  $\hat{A}_{u_h}$ . Désignons par  $\lambda_h(u_h)$  la plus

petite valeur propre, on a

$$(2.10) \quad \lambda_h(u_h) = \inf_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq 0}} \frac{(\hat{A}_{u_h} w_h, w_h)_e}{(\hat{B}_{u_h} w_h, w_h)_e} = \inf_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} a(u_h)(x) |\nabla w_h(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} b(u_h)(x) w_h^2(x) dx}$$

Lemme 2.1. Il existe un et un seul couple  $(\lambda_h(u_h), w_h(u_h)) \in \mathbb{R} \times W_h$  vérifiant (2.9),

$$(2.11) \quad w_k(u_h) \geq 0 \quad [w_h(u_h) = (w_k(u_h))]$$

et

$$(2.12) \quad \int_{\Omega} w_h^2(u_h; x) dx = 1 .$$

De plus  $\lambda_h(u_h)$  est la plus petite valeur propre du problème (2.9), elle est simple, elle vérifie

$$(2.13) \quad \lambda_h(u_h) = \frac{(\hat{A}_{u_h} w_h(u_h), w_h(u_h))_e}{(\hat{B}_{u_h} w_h(u_h), w_h(u_h))_e}$$

et enfin on a

$$(2.14) \quad \forall k = 1, \dots, N \quad w_k(u_h) > 0 .$$

Démonstration : On a unicité parce que les sous-espaces propres sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par  $\hat{B}_{u_h}$ .

L'existence et les propriétés énoncées découleront du Théorème de Perron-Frobenius appliqué à la matrice

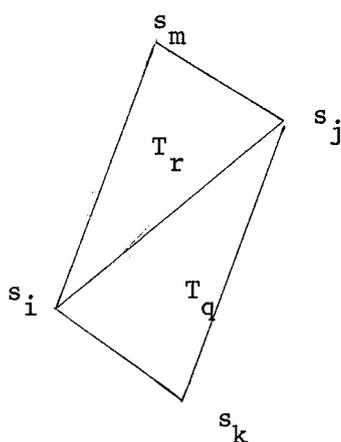
$$\hat{C}_{u_h} = (\hat{A}_{u_h})^{-1} \hat{B}_{u_h}$$

parceque l'on a le résultat suivant :

Lemme 2.2. La matrice  $C_{u_h}$  est une matrice strictement positive (c'est-à-dire les éléments de cette matrice sont strictement positifs).

Démonstration : Nous allons montrer que les éléments non situés sur la diagonale de  $\hat{A}_{u_h}$  sont négatifs ou nuls.

Les seuls éléments à considérer sont  $a_{ij}(u_h)$  dans le cas où  $s_i s_j$  est un côté d'un des triangles de  $\mathcal{T}_h$ .



Dans ce cas-là on a d'après (2.5)

$$a_{ij}(u_h) = -\frac{\overrightarrow{s_k s_i} \cdot \overrightarrow{s_k s_j}}{2} a(u_q) - \frac{\overrightarrow{s_m s_i} \cdot \overrightarrow{s_m s_j}}{2} a(u_r)$$

ce qui, d'après l'hypothèse (vi) que l'on a faite, montre que

$$a_{ij}(u_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \widehat{s_i s_k s_j} = \widehat{s_i s_m s_j} = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si  $a_{ij}(u_h) = 0$  alors  $a_{im}(u_h) \neq 0$  et  $a_{mj}(u_h) \neq 0$ .

On va maintenant montrer que  $\hat{A}_{u_h}$  est irréductible.

$\Omega$  étant connexe cela implique que

$$\forall (s_j, s_k) \in \mathcal{S}_h \times \mathcal{S}_h \quad \exists j_1, j_2, \dots, j_m \text{ tel que } j_1 = j, j_m = k \text{ et}$$

$s_{j_\ell} s_{j_{\ell+1}}$  est un côté d'un triangle de  $\mathcal{T}_h$  pour tout  $\ell = 1, \dots, m-1$ .

D'après la remarque précédente on peut supposer que

$$a_{j_\ell, j_{\ell+1}} \neq 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, m-1$$

et par conséquent  $\hat{A}_{u_h}$  est irréductible.

On peut alors appliquer le résultat de VARGA [28] p.85, et par suite

$$(\hat{A}_{u_h})^{-1} > 0.$$

Comme  $\hat{B}_{u_h}$  est une matrice positive régulière,  $\hat{C}_{u_h}$  est donc une matrice strictement positive. ■

Lemme 2.3. Les applications

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow \lambda_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in \mathcal{U}_h \longrightarrow w_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

sont continues.

On a posé  $\mathcal{U}_h = U_h \cap \mathcal{U}$ .

Démonstration : On ne notera pas, pour les éléments de  $U_h$  et  $W_h$ , l'indice  $h$ .

Soit  $u^{(n)} \in \mathcal{U}_h$  tel que

$$u^{(n)} \longrightarrow u^{(\infty)} \in \mathcal{U}_h.$$

Les applications  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  étant continues de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$  on a

$$\lambda_h(u^{(n)}) \leq c \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx \quad \forall w \in W_h \cap S_1$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $n$ . Cette relation montre que

$\lambda_h(u^{(n)})$  est borné dans  $\mathbb{R}$ . Il en est de même de  $w(u^{(n)})$  puisque  $w(u^{(n)}) \in S_1$ .

Donc on peut extraire une sous suite telle que

$$\begin{aligned} \lambda_h(u_i^{(n)}) &\longrightarrow \lambda^* \\ w(u_i^{(n)}) &\longrightarrow w^* \in S_1 \end{aligned}$$

$\nabla$  étant un opérateur linéaire de  $W_h$  dans un espace de dimension finie, on a aussi

$$\nabla w(u_i^{(n)}) \rightarrow \nabla w^* .$$

Constatons que

$$w^* \geq 0 .$$

Les expressions de  $a_{ij}(u_i^{(n)})$  et  $b_{ij}(u_i^{(n)})$  montrent que

$$\begin{aligned} a_{ij}(u_i^{(n)}) &\rightarrow a_{ij}(u_i^{(\infty)}) \\ b_{ij}(u_i^{(n)}) &\rightarrow b_{ij}(u_i^{(\infty)}) . \end{aligned}$$

Et donc si l'on passe à la limite, dans l'expression

$$\hat{A}_{u_i^{(n)}}^{(n)} w(u_i^{(n)}) = \lambda_h(u_i^{(n)}) \hat{B}_{u_i^{(n)}}^{(n)} w(u_i^{(n)})$$

on obtient

$$\hat{A}_{u^{(\infty)}} w^* = \lambda^* \hat{B}_{u^{(\infty)}} w^* .$$

Ce qui, d'après le Lemme 2.1 implique

$$\lambda^* = \lambda_h(u^{(\infty)})$$

$$w^* = w(u^{(\infty)}) .$$

L'unicité des limites montre que ce sont les suites toute entières qui convergent vers  $\lambda_h(u^{(\infty)})$  et  $w(u^{(\infty)})$  . ■

Comme dans le cas continu on va démontrer la

Proposition 2.1. Les applications

$$u_h \in \mathcal{U}_h \rightarrow \lambda_h(u_h) \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in \mathcal{U}_h \rightarrow h(u_h) \in W_h$$

sont différentiables en tout point  $u_h^{(0)}$  de  $\mathcal{U}_h$ , de plus

$$(2.15) \quad \lambda'_h(u_h^{(0)}) \cdot v_h = \frac{\int_{\Omega} \{ \hat{a}'_h(u_h^{(0)}(x)) \|\nabla w_h^{(0)}(x)\|^2 - \lambda_h^{(0)} \hat{b}'_h(u_h^{(0)}(x)) w_h^{(0)}(x)^2 \} v_h(x) dx}{\int_{\Omega} \hat{b}_h(u_h^{(0)}(x)) w_h^{(0)}(x)^2 dx}$$

où

$$w_h^{(0)} = w_h(u_h^{(0)}) \quad \text{et} \quad \lambda_h^{(0)} = \lambda_h(u_h^{(0)}) .$$

Démonstration : On ne notera pas l'indice  $h$  pour les éléments de  $U_h$  et  $W_h$ .  
On considère la fonction :

$$F_h(u, y) = \hat{A}_u w - \lambda \hat{B}_u w$$

de  $U_h \times (W_h \times \mathbb{R})$  dans  $W_h$

où

$$y = (w, \lambda) .$$

Soit  $u^{(0)} \in \mathcal{U}_h$  on pose

$$\hat{A}^{(0)} = \hat{A}_{u^{(0)}}, \quad \hat{B}^{(0)} = \hat{B}_{u^{(0)}}, \quad \lambda^{(0)} = \lambda_h(u^{(0)})$$

et  $w^{(0)} = w(u^{(0)})$  .

Les dérivées partielles de  $F_h$  au point  $(u^{(0)}, w^{(0)}, \lambda^{(0)})$  sont :

$$\left( \frac{\partial F_h}{\partial w} \right)_o : w \in W_h \longrightarrow \hat{A}^{(0)} w - \lambda^{(0)} \hat{B}^{(0)} w \in W_h$$

$$\left( \frac{\partial F_h}{\partial \lambda} \right)_o : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow -\lambda \hat{B}^{(0)} w^{(0)} \in W_h$$

$$\left( \frac{\partial F_h}{\partial u} \right)_o : u \in \mathcal{U}_h \longrightarrow \hat{A}'^{(0)} w^{(0)} - \lambda^{(0)} \hat{B}'^{(0)} w^{(0)} \in W_h$$

où  $\hat{A}'^{(0)} = (a'_{ij}(u^{(0)}), v)$  et  $\hat{B}'^{(0)} = (b'_{ij}(u^{(0)}), v)$  .

Remarquons que d'après (2.5), si  $u^{(0)} = (u_k^{(0)})$  et  $v = (v_k)$  on a

$$(2.16) \quad a'_{ij}(u^{(0)}) \cdot v = \sum_{k=1}^P \hat{a}'(u_k^{(0)}) \cdot v_k \int_{T_K} \nabla \phi_{i,h}(x) \cdot \nabla \phi_{j,h}(x) dx$$

$$(2.17) \quad a'_{ij}(u^{(0)}) \cdot v = \int_{\Omega} \hat{a}'(u^{(0)}(x)) \cdot v(x) \nabla \phi_{i,h}(x) \cdot \nabla \phi_{j,h}(x) dx .$$

De même

$$b'_{ij}(u^{(0)}) \cdot v = \int_{\Omega} \hat{b}'(u^{(0)}(x)) \cdot v(x) \phi_{i,h}(x) \phi_{j,h}(x) dx .$$

Admettons pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 2.4.  $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_o$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R} \times w^{(0)\perp}$  sur  $W_h$  .

On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F définie sur

$$u_h \times \{w^{(0)} + W_h \cap w^{(0)\perp}\} \times \mathbb{R} .$$

Et on termine alors la démonstration comme dans le cas continu. ■

Démonstration du Lemme 2.4. :  $\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_o$  est un isomorphisme de  $w^{(0)\perp}$  sur  $w^{(0)\perp}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_o \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R} \text{ sur } \hat{B}^{(0)} w^{(0)} .$$

Par suite  $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_o$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R} \times w^{(0)\perp}$  sur

$$\hat{B}^{(0)} w^{(0)} \oplus w^{(0)\perp} = W_h . \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2. La propriété suivante est vérifiée

$$(2.18) \quad \lambda_h(v_h) \leq \lambda_h(u_h) + \lambda'_h(u_h) \cdot (v_h - u_h) \frac{\int_{\Omega} \hat{b}(u_h(x)) w_h^2(u_h; x) dx}{\int_{\Omega} \hat{b}(v_h(x)) w_h^2(u_h; x) dx}$$

$$\forall (u_h, v_h) \in u_h \times u_h .$$

Démonstration : Elle est identique au cas continu.

On en déduit :

Corollaire 2.1.  $\lambda_h$  est pseudoconcave (et donc quasiconcave) sur  $U_h$  .

3 - APPROXIMATION DU PROBLEME  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  .

On pose

$$\lambda_{h,1} = \lambda_h(1) .$$

Et l'on va approximer le problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  par

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h} \quad \inf_{u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h} J(u_h) .$$

$$\lambda_h(u_h) = \lambda_{h,1}$$

On introduit également le problème

$$\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h} \quad \inf_{u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h} J(u_h)$$

$$\lambda_h(u_h) \geq \lambda_{h,1}$$

constatons que la fonction  $u_\alpha$  définie par III(6.1) est un élément de  $U_h$  et que :

$$(3.1) \quad J(u_\alpha) < J(u_h) \quad \text{pour tout } u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h, \quad u_h \neq u_\alpha .$$

Proposition 3.1. Si on suppose de plus que

$$(3.2) \quad \lambda_h(u_\alpha) < \lambda_{1,h}$$

$$(3.3) \quad \exists u_{\gamma,h} \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \quad \text{tel que } \lambda_h(u_{\gamma,h}) > \lambda_{1,h} .$$

alors

(i) les problèmes  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$  et  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$  sont équivalents

(ii)  $\bar{u}_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$  est solution du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$  ou  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$  si et seulement si

$$(3.4) \quad \lambda_h(\bar{u}_h) = \lambda_{1,h}$$

et

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \eta_{1,h} \text{ tel que} \\ J(v_h) - J(\bar{u}_h) + \eta_{1,h} \lambda'_h(\bar{u}_h) \cdot (v_h - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall v_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \end{array} \right.$$

(iii) l'ensemble  $S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h})$  des solutions du problème  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$  est convexe  
et  $w_h(\bar{u}_h)$  est indépendant de  $u_h$  pour  $u_h \in S(\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h})$ .

(iv)  $\forall \beta \in ]1, +\infty[$  le problème  $\mathcal{Q}_{\alpha,\beta,h}$  (et donc  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ ) admet au moins  
une solution.

Démonstration : La démonstration de cette Proposition est identique à celle de la Proposition III.6.1.

Si  $\beta = +\infty$  on a existence car pour  $u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ ,  $J(u_h)$  est une norme. ■

Proposition 3.2. Soit  $\bar{u}_h = (\bar{u}_k)$  une solution de  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,h}$ . On pose

$$(3.6) \quad g_h(\bar{u}_h; x) = (g_k(\bar{u}_h)) \in U_h$$

où

$$(3.7) \quad g_k(\bar{u}_h) = a'(\bar{u}_k) \int_{T_k} |\nabla w_h(\bar{u}_h)|^2 dx - \lambda_{1,h} b'(\bar{u}_k) \int_{T_k} w_h^2(\bar{u}_h) dx$$

alors la condition (3.5) est équivalente à

$$\exists e_h > 0 \text{ vérifiant}$$

$$(3.8) \quad g_k(\bar{u}_h) \leq e_h \quad \forall k \in I_\beta = \{k \in [1, 2, \dots, P]; \bar{u}_k < \beta\}$$

et

$$(3.9) \quad g_k(\bar{u}_h) \geq e_h \quad \forall k \in I_\alpha = \{k \in [1, 2, \dots, P]; \bar{u}_k > \alpha\} .$$

Démonstration : On pose

$$e_h = - \frac{\int_{\Omega} b(\bar{u}_h(x)) w_h^2(\bar{u}_h; x) dx}{\eta_{1,h}} .$$

La relation (3.5) est équivalente à

$$\sum_{k=1}^P \{e_h - g_k(\bar{u}_h)\} (v_k - \bar{u}_k) > 0 \quad \forall v_h = (v_k) \in C_{\alpha, \beta, h}$$

ce qui permet de déduire (3.8) et (3.9). ■

Par application de la Proposition III.5.4 on montre le résultat suivant :

Proposition 3.3. Si l'on suppose que pour tout  $p \leq 0$  la fonction

$$u_h \rightarrow \mathcal{L}_h(u_h, p) = J(u_h) + p(\lambda_h(u_h) - \lambda_1, h)$$

est quasiconvexe, alors  $\bar{u}_h$  est solution du problème  $\mathcal{S}_{\alpha, \beta, h}$  (ou  $\mathcal{Q}_{\alpha, \beta, h}$ ) si et seulement si  $(\bar{u}_h, \bar{p}_h)$  est point selle de  $\mathcal{L}_h(u, p)$  sur  $C_{\alpha, \beta} \cap U_h \times \mathbb{R}$ . De plus on a  $\bar{p}_h < 0$ .

Nous allons maintenant étudier dans le cas de l'exemple 1 la convergence de ce problème  $\mathcal{S}_{\alpha, \beta, h}$  lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers zéro,

Proposition 3.4. Dans le cas de l'application III.6.1 et si  $\beta < +\infty$  on a le résultat suivant :

$$(i) \quad \lim J(\bar{u}_h) = \text{Inf } \mathcal{S}_{\alpha, \beta}$$

et

(ii) on peut extraire de la suite  $\bar{u}_h$  une sous-suite convergeant vers une solution  $\bar{u}$  du problème  $\mathcal{S}_{\alpha, \beta}$ .

Nous allons tout d'abord établir quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.1.  $\lambda_{h,1} > \lambda_1$  et  $\lim \lambda_{h,1} = \lambda_1$ .

Démonstration : voir STRANG et FIX [21].

Lemme 3.2. Pour tout  $u \in C_{\alpha, \beta}$  on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_h(q_h u) = \lambda(u).$$

Démonstration : D'après (2.10) on a

$$\lambda_h(q_h u) \leq \frac{\int_{\Omega} q_h u(x) |\nabla r_h w(u;x)|^2 dx}{\int_{\Omega} r_h w(u;x)^2 dx} .$$

D'où

$$\lambda_h(q_h u) \leq \beta c_1 .$$

Les  $c_i$  désignent dans tout ce paragraphe des constantes indépendantes de  $h$  .

Comme

$$\int_{\Omega} q_h u(x) |\nabla w_h(q_h u;x)|^2 dx = \lambda_h(q_h u)$$

on en déduit

$$\int_{\Omega} |\nabla w_h(q_h u;x)|^2 dx \leq c_2 .$$

Et par conséquent on peut extraire, des suites  $\lambda_h(q_h u)$  et  $w_h(q_h u)$ , des sous-suites  $\lambda_{h'}(q_{h'} u)$  et  $w_{h'}(q_{h'} u)$  telles que

$$\lambda_{h'}(q_{h'} u) \longrightarrow \lambda^*$$

$$w_{h'}(q_{h'} u) \longrightarrow w^* \text{ dans } W \text{ faible et dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

$$w_{h'}(q_{h'} u;x) \longrightarrow w^*(x) \text{ p.p. } x \in \Omega .$$

Si l'on écrit la relation (2.1) pour ce problème spectral avec  $w_h = r_h w$  où  $w \in W$  on obtient :

$$\int_{\Omega} q_h u(x) \nabla w_{h'}(q_{h'} u;x) \cdot \nabla r_h w(x) dx = \lambda_{h'}(q_{h'} u) \int_{\Omega} w_{h'}(q_{h'} u;x) r_h w(x) dx .$$

Or  $\nabla w_h$  est constant sur chaque triangle  $T_k$  de  $\mathcal{T}_h$  pour tout  $w_h \in W_h$  et par conséquent d'après (1.5), (1.6) le premier membre de cette égalité s'écrit

$$\int_{\Omega} u(x) \nabla w_{h'}(q_{h'} u;x) \cdot \nabla r_h w(x) dx .$$

On peut alors passer à la limite et, grâce aux Lemmes 1.1 et 1.2 on obtient

$$\int_{\Omega} u(x) \nabla w^*(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \lambda^* \int_{\Omega} w^*(x) w(x) \, dx$$

et ceci pour tout  $w \in W$ .

Comme  $w^*$  vérifie II.(1.17) et II.(1.18), la Proposition II.1.1 permet d'affirmer que

$$\lambda(u) = \lambda^*$$

$$w(u) = w^*$$

et que ce sont toutes les suites  $\lambda_h(q_h u)$  et  $w_h(q_h u)$  qui convergent vers  $\lambda(u)$  et  $w(u)$ . ■

Lemme 3.3. Soit  $u_h \in C_{\alpha, \beta}$ , si  $u_h$  converge vers  $u$  pour la topologie faible \* de  $L^\infty(\Omega)$  alors

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \lambda_h(u_h) \leq \lambda(u).$$

Démonstration : D'après (2.10) on a

$$(3.11) \quad \lambda_h(u_h) \leq \frac{\int_{\Omega} u_h(x) |\nabla r_h w(u; x)|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |r_h w(u; x)|^2 \, dx}.$$

Et en passant à la limite on obtient le résultat. ■

Démonstration de la Proposition 3.4 ; Puisque  $\lambda_h$  est concave sur  $C_{\alpha, \beta} \cap U_h$  on a, d'après la Proposition 3.3 :

$$(3.12) \quad J(\bar{u}_h) \leq J(v_h) + \bar{p}_h (\lambda_h(v_h) - \lambda_{h,1}) \quad \forall v_h \in C_{\alpha, \beta} \cap U_h.$$

Si l'on écrit cette inégalité pour

$$v_h = u_\beta$$

où

$$u_\beta(x) \equiv \beta \quad \forall x \in \Omega,$$

on obtient alors

$$\frac{J(u_\alpha) - J(u_\beta)}{\beta - 1} \leq \bar{p}_h \lambda_{1,h} \leq \bar{p}_h \lambda_1$$

D'où

$$c_3 \leq \bar{p}_h \leq 0 .$$

On peut donc extraire des suites  $\bar{p}_h$  et  $\bar{u}_h$ , des sous-suites  $\bar{p}_{h'}$  et  $\bar{u}_{h'}$ , telles que

$$\bar{u}_{h'} \longrightarrow \hat{u} \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

$$\bar{p}_{h'} \longrightarrow \hat{p} \text{ dans } \mathbb{R}_- .$$

Soit  $v \in C_{\alpha,\beta}$ , si l'on passe à la limite dans (3.12) avec

$$v_{h'} = q_{h'} v$$

on obtient, compte tenu des Lemmes 1.2, 3.1 et 3.2,

$$(3.13) \quad J(\hat{u}) \leq J(v) + \hat{p}(\lambda(v) - \lambda_1) ;$$

et ceci pour tout  $v \in C_{\alpha,\beta}$ .

D'après le Lemme 3.3 on a

$$(3.14) \quad \lambda(\hat{u}) \geq \lambda_1 .$$

Les relations (3.13), (3.14) et le Corollaire III.6.2 montrent que  $\hat{u}$  est solution du problème  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ .

Donc on vient de montrer la partie (ii) de la Proposition. Cette démonstration montre que toute valeur d'adhérence faible \* de  $\bar{u}_h$  est solution du problème  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$  et donc toute valeur d'adhérence de  $J(\bar{u}_h)$  vaut  $\text{Inf } \mathcal{G}_{\alpha,\beta,h}$ . L'unicité de cette valeur implique (i). ■

4 - RESOLUTION DU PROBLEME DISCRETISE.

On va utiliser la méthode du Lagrangien augmenté (cf. [19]). Nous allons décrire cette méthode dans le cadre abstrait du paragraphe III.5, et on fait les hypothèses III.(5.1), III.(5.3), III.(5.8) et III.(5.7). Le Lagrangien jusqu'à présent considéré était celui défini par III.(5.16) c'est-à-dire

$$(4.1) \quad \mathcal{L}(u,p) = J(u) + p(\lambda(u) - \lambda_1) \quad (u,p) \in C \times \mathbb{R}_-$$

Nous allons maintenant étudier celui défini par

$$(4.2) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u,p) = J(u) + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left[ p + \frac{\lambda(u) - \lambda_1}{\varepsilon} \right]^2 - p^2 \right\}$$

pour  $(u,p) \in C \times \mathbb{R}_-$ .

Constatons que l'on a

$$(4.3) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u,p) = \begin{cases} J(u) + \frac{1}{2\varepsilon}(\lambda(u) - \lambda_1)^2 + p(\lambda(u) - \lambda_1) & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \leq -p \cdot \varepsilon \\ J(u) - \frac{p^2 \cdot \varepsilon}{2} & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \geq -p \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Proposition 4.1. Si  $(\bar{u}, \bar{p}) \in C \times \mathbb{R}_-$  est point selle sur  $C \times \mathbb{R}_-$  du Lagrangien  $\mathcal{L}(u,p)$  alors  $(\bar{u}, \bar{p})$  est point selle sur  $C \times \mathbb{R}_-$  de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u,p)$ .

Démonstration : Si  $(\bar{u}, \bar{p})$  est point selle de  $\mathcal{L}(u,p)$  sur  $C \times \mathbb{R}_-$  alors, il est facile de voir que

$$(4.4) \quad \lambda(\bar{u}) \geq \lambda_1$$

et

$$(4.5) \quad J(\bar{u}) \leq J(u) + \bar{p}(\lambda(u) - \lambda_1) \quad \forall u \in C.$$

Par suite

$$(4.6) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}, p) = J(\bar{u}) \quad \forall p \leq 0,$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u, \bar{p}) = \begin{cases} \mathcal{L}(u, \bar{p}) + \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda(u) - \lambda_1)^2 & \text{si } \lambda(u) - \lambda_1 \leq -\bar{p} \cdot \varepsilon \\ J(u) - \bar{p}^2 \varepsilon + \bar{p}^2 \frac{\varepsilon}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

or  $\mathcal{L}(u, \bar{p}) \leq J(u) - \frac{\bar{p}^2}{2\varepsilon}$  si  $\lambda(u) - \lambda_1 \geq -\bar{p} \varepsilon$

par conséquent

$$(4.7) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u, \bar{p}) \geq \mathcal{L}(u, \bar{p}) \quad \forall u \in C.$$

Les relations (4.5), (4.6) et (4.7) impliquent que  $(\bar{u}, \bar{p})$  est point selle de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$ . ■

Proposition 4.2. Si  $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$  est point selle sur  $C \times \mathbb{R}_-$  de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$  alors  $\bar{u}_\varepsilon$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ .

Démonstration : Soit  $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$  un point selle sur  $C \times \mathbb{R}_-$  de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$  alors on a les deux inéquations suivantes :

$$(4.8) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, p) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon) \quad \forall p \in \mathbb{R}_-$$

$$(4.9) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon) < \mathcal{L}_\varepsilon(u, \bar{p}_\varepsilon) \quad \forall u \in C.$$

Deux cas sont à considérer :  $\bar{p}_\varepsilon = 0$  et  $\bar{p}_\varepsilon \neq 0$ .

1er cas :  $\bar{p}_\varepsilon = 0$ . Alors

$$(4.10) \quad \lambda(\bar{u}_\varepsilon) \geq \lambda_1;$$

car si  $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 < 0$  alors (4.8) implique

$$\lambda(\bar{u}_\varepsilon) = \lambda_1.$$

(4.9) s'écrit :

$$(4.11) \quad J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} [(\lambda(u) - \lambda_1)_-]^2.$$

Cette relation et (4.10) impliquent que  $\bar{u}_\varepsilon$  est solution du problème  $Q$  et donc du problème  $\mathcal{P}$ .

2ème cas :  $\bar{p}_\varepsilon \neq 0$ . Alors on a

$$(4.12) \quad \lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 = 0.$$

En effet si  $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 < -\bar{p}_\varepsilon \cdot \varepsilon$  alors, (4.8) montre que,

$$p(\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1) \leq \bar{p}_\varepsilon (\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1)$$

pour tout  $p$  dans un voisinage de  $\bar{p}_\varepsilon$ ; et par suite on a (4.12). Si  $\lambda(\bar{u}_\varepsilon) - \lambda_1 \geq -\bar{p}_\varepsilon \cdot \varepsilon$  alors, (4.8) implique

$$-\frac{p}{2} \varepsilon \leq -\frac{\bar{p}_\varepsilon}{2} \varepsilon \quad \forall p \in [\bar{p}_\varepsilon, 0]$$

ce qui est absurde.

(4.9) s'écrit :

$$J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( \bar{p}_\varepsilon + \frac{\lambda(u) - \lambda_1}{\varepsilon} \right)_- \right]^2 - \frac{\varepsilon}{2} \bar{p}_\varepsilon^2$$

ce qui implique

$$(4.13) \quad J(\bar{u}_\varepsilon) \leq J(u) \text{ pour tout } u \text{ appartenant à } C \text{ vérifiant } \lambda(u) = \lambda_1.$$

Et donc la relation (4.12), (4.13) montre que  $\bar{u}_\varepsilon$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ . ■

Par conséquent si le problème  $\mathcal{P}$  admet une solution au moins, et si l'on fait l'hypothèse supplémentaire (III.5.21),  $\mathcal{L}(u, p)$  alors, admet au moins un point selle (Proposition III.5.4) et donc, d'après la Proposition 4.1,  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$  admet un point selle et la première composante de tout point selle de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$  est solution du problème  $\mathcal{P}$ . Pour trouver un point selle de  $\mathcal{L}_\varepsilon(u, p)$  on considère l'algorithme suivant

on part de  $p^{(0)} \in \mathbb{R}_-$  on calcule  $u^{(1)}, p^{(1)}, \dots, u^{(n)}, p^{(n)}$ ,

(4.14) on détermine  $u^{(n+1)} \in C$  qui minimise sur  $C$  :

$$u \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(u, p^{(n)})$$

et on pose

$$(4.15) \quad p^{(n+1)} = \left( p^{(n)} + \frac{\lambda(u^{(n+1)}) - \lambda_1}{\varepsilon} \right)_-$$

Revenons à notre problème  $\mathcal{P}_{\alpha, \beta, h}$ . On suppose que (3.2) et (3.3) sont vérifiés

alors ce problème admet au moins une solution. En général (III.5.21) n'est pas vérifiée (sauf si  $\lambda$  est concave) néanmoins on considèrera cette méthode, les essais numériques (cf. §.5) ayant montré que cette méthode pouvait nous donner de bons résultats.

Le problème (4.14) admet au moins une solution sur  $C_{\alpha,\beta} \cap U_h, \forall \beta \in ]1, +\infty]$  car

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u_h, p^{(n)}) \geq J(u_h) - \frac{\varepsilon(p^{(n)})^2}{2}$$

et

$$J(u_h) \longrightarrow +\infty \text{ quand } u_h \longrightarrow +\infty, u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h.$$

Pour résoudre le problème (4.14) on utilise une méthode de gradient. Et donc à chaque étape de cette méthode on doit calculer  $\lambda'_h(u_h)$ . D'après (2.15) on doit donc calculer

$$\lambda_h(u_h) \text{ et } w_h(u_h)$$

c'est-à-dire calculer la plus petite valeur propre du problème spectral (2.9) et le vecteur propre positif correspondant. Pour déterminer cette valeur propre on utilise la méthode classique dite de la puissance inverse itérée.

## 5 - RESULTATS NUMERIQUES.

On a testé la méthode dans le cas de l'application III.6.2 où l'on a pris  $\Omega = ]0,1[$  et comme conditions aux limites

$$w(0) = w(1) = 0.$$

On a pris pour  $\beta$  :

$$\beta = +\infty.$$

Pour des raisons de symétrie on peut se limiter à l'ouvert  $]0,1/2[$  en prenant

$$w'(1/2) = 0.$$

On peut obtenir la solution explicitement en résolvant les conditions nécessaires et suffisantes III.(6.27) et III.(6.28) ;  $w(u)$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} (uw')' + \lambda_1(u+\delta)w = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(1/2) = 0 . \end{array} \right.$$

On obtient

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{\text{ch}^2 \sqrt{\lambda_1} x_0}{\text{ch}^2 \sqrt{\lambda_1} x} \cdot \left( \frac{\delta}{2} + \alpha \right) - \frac{\delta}{2} & 0 \leq x \leq x_0 \\ \alpha & x_0 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$$

et

$$w(\bar{u}; x) = \begin{cases} w_0 \text{sh} \sqrt{\lambda_1} x & 0 \leq x \leq x_0 \\ w_0 \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_1} x_0}{\cos \mu(x_0 - 1/2)} \cos \mu(x - 1/2) & x_0 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$$

où

$$\mu = \left[ \left( \frac{\alpha + \delta}{\alpha} \right) \lambda_1 \right]^{1/2} ,$$

$x_0$  est la solution de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \text{th} \sqrt{\lambda_1} x = -\frac{1}{\mu} \text{cotg} \mu(x - 1/2)$$

et

$w_0$  est obtenue par normalisation.

On peut calculer le poids minimal :

$$M = \int_0^1 u(x) dx = \frac{\text{sh} 2\sqrt{\lambda_1} x_0}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \left( \frac{\delta}{2} + \alpha \right) + (1-2x_0)\alpha - \delta x_0 .$$

On a pris

$$\delta = 1 \text{ et } \alpha = 0.5$$

et alors  $M = 0,685\ 229 \dots$

On a découpé l'intervalle  $[0,1]$  en  $N_1$  intervalles de longueur  $h = \frac{1}{N_1}$ .  
 Pour les essais numériques on a pris  $N_1 = 20$ . On a obtenu au bout de 5 itérations dans la méthode de la puissance inverse itérée une valeur approchée de  $\lambda_{1,h}$  :

$$\lambda_{1,h} \approx 4.944\ 78 .$$

$$\text{(En fait } \lambda_{1,h} = \frac{6}{h^2(1+\delta)} \left( \frac{1 - \cos \pi/N_1}{2 + \cos \pi/N_1} \right) = 4.944\ 957\ 3 \dots)$$

alors que

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{1+\delta} = 4.934\ 802\ 2\dots)$$

On n'a fait qu'une seule étape dans la méthode du gradient. Si l'on appelle

$u_h^{(n+1)} = (u_i^{(n+1)}) \in \mathbb{R}^{N_1}$  le vecteur ainsi obtenu, celui-ci est défini par

$$u_i^{(n+1)} = \Pi(u_i^{(n)} - \rho v_i^{(n)}) \quad 1 \leq i \leq N_1$$

où  $v_i^{(n)}$  est le gradient normalisé pris au point  $u_h^{(n)} = (u_i^{(n)})$  de la fonction

$$u_h = (u_i) \in \mathbb{R}^{N_1} \rightsquigarrow \mathcal{E}_{\varepsilon,h}(u_h, p_h^{(n)})$$

et  $\Pi$  est la projection sur  $[\alpha, +\infty[$ .

On a pris pour test de convergence

$$\text{test}(n+1) = g(u_h^{(n+1)}) + |\lambda_h(u_h^{(n+1)}) - \lambda_{h,1}| \leq \varepsilon_m$$

où

$$g(u_h^{(n+1)}) = \text{Max}_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ u_i^{(n+1)} > \alpha}} \left| \frac{\partial}{\partial u_i} \mathcal{E}_{\varepsilon,h}(u_h^{(n+1)}, p_h^{(n)}) \right| .$$

On est sorti de l'algorithme au bout de 18 itérations en prenant

$$\rho = 3, \quad p^{(0)} = -5, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m = 10^{-3} \quad \text{et} \quad u_h^{(0)} = 1 .$$

Les résultats obtenus sont indiqués par le tableau 1, et

$$\lambda_h(u_h^{(18)}) = 4.9445 .$$

$i$	$u_i^{(18)}$	$\bar{u}((i - \frac{1}{2})h)$
1	0.9920	0.9923
2	0.9558	0.9561
3	0.8867	0.8871
4	0.7911	0.7916
5	0.6767	0.6774
6	0.5517	0.5527
7	0.5000	0.5000
8	0.5000	0.5000
9	0.5000	0.5000
10	0.5000	0.5000
M	0.6854	0.6852

TABLEAU 1

On a également considéré le cas de l'application III.6.3 avec  $\Omega = ]0,1[$ ,  $\beta = +\infty$  et comme conditions aux limites

$$w(0) = w'(1) = 0 .$$

On peut donc comme dans le cas précédent, résoudre les conditions nécessaires et suffisantes : III.(6.29) et III.(6.30)  $w$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} w'' + \lambda_1 \frac{w}{u^2} = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(1) = 0 \end{array} \right.$$

On pose

$$\xi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}.$$

Soit  $(x_0, \theta_0)$  la solution du système

$$2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - \pi - 4 \frac{\sin^2 \theta_0}{\alpha} \frac{\sqrt{\lambda_1}}{3} (x_0 - 1) = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} \xi x_0}{\alpha \xi} - \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{3 \sqrt{\frac{\lambda_1}{3}}}.$$

On obtient alors pour l'épaisseur de la structure

$$u(x) = \begin{cases} \alpha & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_0} \sin(\theta(x)), & x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

tandis que la vibration est donnée par

$$w(x) = w_0 \begin{cases} \sin \xi x \\ \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_0} \sin^3 \theta(x) \end{cases}$$

où  $\theta(x)$  est solution de

$$2\theta - \sin 2\theta - \pi - \mu(x-1) = 0$$

et

$$\mu = 4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{3}} \frac{\sin^2 \theta_0}{\alpha}.$$

On obtient le poids minimal suivant

$$M = \int_0^1 u(x) dx = \alpha x_0 + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_0 \mu} \left\{ \frac{3}{2} (\frac{\pi}{2} - \theta_0) + \sin 2\theta_0 - \frac{\sin 4\theta_0}{8} \right\}.$$

Afin de considérer les mêmes données physiques que [8] nous avons pris

$$u_1(x) = \frac{4}{10\pi} \sqrt{\frac{\pi}{3}} = 0.1302940$$

et  $\alpha = 0.05$ ,

cela correspond au cas  $\rho_0 = 1\ 000$  livres des articles cités. Dans ce cas on a

$$\lambda_1 = \lambda(u_1) = 0.041\ 887\ 9$$

$$M = 0.114\ 034 .$$

On a fait la même discrétisation que dans le cas précédent avec  $N_1 = 20$  et on a obtenu au bout de 5 itérations de la méthode de la puissance inverse itérée

$$\lambda_{1,h} = 0.041\ 912 .$$

On a tout d'abord effectué un essai en ne faisant qu'une seule étape dans la méthode du gradient pour résoudre (4.14) mais on a constaté une oscillation de la fonction  $\text{test}(n)$ . Aussi a-t-on préféré faire quelques itérations dans la méthode du gradient. Le problème (4.14) est donc résolu de la manière suivante

$$u_h^{(n,1)} = u_h^n$$

$$u_i^{(n,q+1)} = \Pi(u_i^{(n,q)} - \rho v_i^{(q)}) \quad 1 \leq i \leq N_1$$

où  $(v_i^{(q)})$  est le gradient normalisé pris au point

$$u_h^{(n,q)} = (u_i^{(n,q)})$$

de la fonction

$$u_h = (u_i) \rightsquigarrow \mathcal{L}_{\varepsilon,h}(u_h, p_h^n)$$

et  $\Pi$  est la projection sur  $[\alpha, +\infty[$ .

On sort de l'algorithme au bout de  $q_n$  étapes où  $q_n$  est définie par

$$q_n = \begin{cases} q_{\max} & \text{si } g(u_h^{(n,q)}) > \varepsilon_m \quad \forall q = 1, \dots, q_{\max} \\ \text{le premier } q < q_{\max} & \text{tel que } g(u_h^{(n,q)}) \leq \varepsilon_m \end{cases}$$

On prend alors

$$u_h^{(n+1)} = u_h^{(n, q_n)} .$$

Nous avons effectué un essai avec  $\rho = 0,15$  ,  $\epsilon = 0,001$ ,  $\epsilon_m = 0,001$  et on est sorti de l'algorithme global au bout de 4 itérations en obtenant pour  $q_1, q_2, q_3$  et  $q_4$  respectivement 5, 5, 5 et 1, c'est-à-dire que l'on a calculé 16 fois une valeur propre c'est ce qui en gros mesure le coût du calcul. On a obtenu

$$\lambda_h(u_h^{(4)}) = 0.419\ 36$$

$$\int_0^1 u_h^{(4)} dx = 0.114\ 123$$

et la fonction  $u_h^{(4)}$  est donnée par le Tableau 2 où elle est comparée avec la solution  $\bar{u}$  du problème continu.

Tableau 2

$i$	$u_i^{(4)}$	$u((i - \frac{1}{2})h)$
1	0.0500	0.0500
2	0.0500	0.0500
3	0.0596	0.0594
4	0.0729	0.0727
5	0.0842	0.0840
6	0.0939	0.0938
7	0.1025	0.1024
8	0.1101	0.1100
9	0.1168	0.1167
10	0.1227	0.1226
11	0.1279	0.1279
12	0.1325	0.1325
13	0.1365	0.1365
14	0.1399	0.1399
15	0.1428	0.1428
16	0.1452	0.1452
17	0.1471	0.1471
18	0.1485	0.1485
19	0.1495	0.1495
20	0.1499	0.1499



BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARMAND, J.L.P. et VITTE, W.J. - *Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous systems.*  
SUDAAR N° 390, Stanford University, 1970.
- [2] ARMAND, J.L.P. - *Applications of the theory of optimal control of distributed parameter systems to structural optimization.*  
N.A.S.A., CR 2044, Juin 1972.
- [3] BREZIS, H., NIRENBERG, L. et STAMPACCHIA, G. - *A remark on Ky Fan's Minimax Principle.*  
Bolletino U.M.I. 6, 293-300 (1972).
- [4] CIARLET, P.G. - *Numerical analysis of the finite element method.*  
Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal (1975)  
(à paraître).
- [5] EKELAND, I. et TEMAM, R. - *Analyse convexe et problèmes variationnels.*  
Paris, Dunod 1973.
- [6] GROTHENDIECK, A. - *Espaces vectoriels topologiques.*  
Sociedade de Matematica de Sao Paulo 1958.
- [7] HALKIN, H. - *Calculus of Variations Classical and Modern.*  
C.I.M.E., 1966, 177-192.
- [8] HAUG, E.J., PAN, K.C. et STREETER, T.D. - *A computational method for optimal structural design : I piecewise uniform structures.*  
Int. J. num. Meth. Eng., 5, 171-184 (1972) - *II Continuous problems.*  
Int. J. num. Meth. Eng., 9 649-667 (1975).
- [9] JOURON, C. - *Etude des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème d'optimisation non convexe.*  
C.R. Acad. Sci., 281, Série A, 1031-1034 (1975).
- [10] KATO, T. - *Perturbation theory for linear operators.*  
Springer-Verlag 1966.
- [11] KELLER, J.B. - *The shape of the strongest column.*  
Arch. Rat. Mech. Anal., 5, 275-285 (1960).
- [12] MANGASARIAN, O.L. - *Nonlinear programming.*  
Mc Graw-Hill, 1969.
- [13] MIGNOT, F. - *Contrôle de fonctions propres.*  
C.R. Acad. Sci., 280, Série A, 333-335 (1975).
- [14] MIGNOT, F. - *Inéquations variationnelles et contrôle.*  
Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI (1975).

- [15] MIKLIN, S.G. - *Variational Methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press (1964).
- [16] NIORSON, F.I. - *On the optimal design of a vibrating beam*. Quart. Appl. Math., 23, 47-53 (1965).
- [17] ODEH, F. et TADJBAKHS, I. - *The shape of the strongest column with a follower load*. J. Optimization Theory Appl., 15, 103-118 (1975).
- [18] PRAGER, W. et TAYLOR, J.E. - *Problems of optimal structural design*. J. Appl. Mech., Serie E, 35, 102-107 (1968).
- [19] ROCKAFELLAR, R.T. - *Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non convex programming*. SIAM J. Control, 12, 268-285 (1974).
- [20] STAMPACCHIA, G. - *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Séminaire de Mathématiques supérieures (1965).
- [21] STRANG, F. et FIX, G. - *An analysis of the finite element method*. Prentice Hall 1973.
- [22] TAYLOR, J.E. - *Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency*. A.I.A.A. Journal, 5, 1911-1913 (1967).
- [23] TAYLOR, J.E. - *Optimum design of a vibrating bar with specified minimum cross section*. A.I.A.A. Journal, 6, 1379-1381 (1968).
- [24] TAYLOR, J.E. et LIU, C.Y. - *Optimal design of columns*. A.I.A.A. Journal, 6, 1497-1502 (1968).
- [25] TEMAM, R. - *On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations*. (Cours à l'Université de Maryland) Publications mathématiques d'Orsay n°90.
- [26] TURNER, M.I. - *Design of minimum mass structures with specified natural frequencies*. A.I.A.A. Journal, 5, 406-412 (1967).
- [27] VAN DE WIELE, J.P. - *Resolution numérique d'un problème de contrôle optimal de valeurs propres et vecteurs propres*. Thèse 3ème cycle, Université Paris VI (1974).
- [28] VARGA, R. - *Matrix Iterative Analysis*. Prentice Hall 1962.
- [29] WEISSHAAR, T.A. - *An application of control theory methods to the optimization of structures having dynamic or aeroelastic constraints*. SUDAAR N° 412, Stanford University, 1970.