Surfaces de Riemann Compactes

Jean Giraud
Faculté des Sciences d'Orsay

Cours 3^e cycle
1969–70

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30F10 ; Secondary 14H55

Key words and phrases. Surface de Riemann, Courbes algébriques, corps de fonctions, Faisceaux cohérents, cohomologie cohérente, Riemann–Roch, dualité de Serre, points de Weierstrass, Variétés de Jacobi, d'Albanese, de Picard

Résumé. Notes d'un cours professé à Orsay au second semestre de l'année scolaire 1969–70 dans le cadre du troisième cycle de Géométrie Algébrique.

Note à cette édition en TEX version v1.0

Le texte original du cours était dactylographié par la faculté des Sciences d'Orsay (1970). Je l'ai transcrit en TEX, plus précisément en AMS-LaTEX, en me servant du paquet XY-pic pour les quelques cinquante diagrammes.

Je remercie Jean Giraud pour m'avoir permis de publier ses notes et pour son aide encourageant pendant la préparation. Il va de soi que tous les fautes de frappe qui restent dans le texte ne lui sont dû.

Berlin, 28 juin 2005 Berndt E. Schwerdtfeger

Note à cette édition en TEX version v1.1

Jean Giraud est disparu en 28 mars 2007. Je suis désolé que je n'ai pas eu la chance de lui revoir pour discuter un supplement contenant deux choses:

– une démonstration du théorème de Riemann–Roch pour un module cohérent quelconque, comme l'a signalé Giraud dans l'introduction
– la structure globale des vectoriels sur les surfaces de Riemann compactes

Berlin, 17 avril 2007 Berndt E. Schwerdtfeger

Introduction

Ce texte rassemble les notes d'un cours professé à Orsay au second semestre de l'année scolaire 1969–70 dans le cadre du troisième cycle de Géométrie Algébrique. Les deux premiers chapitres ont été rédigés par Mlle Josiane Pfeiffer que je remercie pour le soin avec lequel elle s'est acquittée de sa tâche. Par ailleurs, Mrs Delorme et Raoult ont animé un petit groupe d'étude de la cohomologie des faisceaux qui a rédigé un guide[1] sur ce sujet, qui s'est révélé fort utile pour aider les débutants à s'y reconnaître dans les textes classiques qui sont parfois un peu trop prolixes.

Ce cours ne se distingue que sur quelques points des nombreux textes parus sur ce sujet depuis Riemann. La plus grande originalité est au chapitre I, où, suivant une idée de Serre, on établit l'équivalence entre Surfaces de Riemann compactes et corps de fonctions d'une variable grâce à un théorème de prolongement de revêtements ramifiés et au théorème de finitude de la cohomologie cohérente. Dès cet instant on sait donc que les Surfaces de Riemann compactes ne sont autres que les courbes algébriques sur le corps des nombres complexes ; on n'en poursuit pas moins leur étude par voie transcendante. Nous n'avons admis aucun résultat sur la topologie des surfaces, hormis les généralités sur le revêtement universel qui sont (ou devraient être) enseignées en maîtrise. Tous les résultats nécessaires sur la cohomologie entière sont démontrés grâce à la cohomologie des faisceaux en utilisant souvent la structure complexe. Il n'est pas parlé d'homologie, mais nous avons indiqué rapidement comment, en considérant une Surface de Riemann comme un revêtement ramifié de la sphère de Riemann, on peut la munir d'une triangulation et calculer sa cohomologie entière, ce qui permettrait à peu de frais de voir les rapports avec l'homologie. Nous n'avons pas démontré le théorème de structure du groupe fondamental, ce qui est évidemment regrettable, puisque c'est le seul point de la théorie des courbes algébriques (sur un corps quelconque) que l'on ne sache établir que par voie transcendante. Enfin, signalons que nous n'avons démontré le théorème de Riemann–Roch que pour les modules inversibles bien que le théorème de finitude et la dualité soient prouvés pour un module cohérent quelconque, ce qui permet au lecteur, à titre d'exercice, de démontrer le théorème de Riemann–Roch pour un module cohérent quelconque.

[1] Appendice A

Table des matières

CHAPITRE 1

Surfaces de Riemann, revêtements ramifiés et corps de fonctions d'une variable

En suivant une idée de Serre [**16**] nous montrons dans ce chapitre que la catégorie des surfaces de Riemann compactes et connexes est équivalente à l'opposée de celle des corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes.

Pour cela, nous utilisons un résultat qui ne sera établi qu'au chapitre II: *Pour tout point d'une surface de Riemann compacte, il existe une fonction méromorphe n'ayant de pôle qu'en ce point.* Les méthodes du présent chapitre étant fort élémentaires et fort différentes de celles utilisées au chapitre II, il nous a semblé préférable de mettre en relief dès le début la nature purement *algébrique* de la notion de surface de Riemann compacte. Certains commentaires ($^*\ldots_*$) feront allusion aux *faisceaux*, notion n'intervenant effectivement qu'au chapitre suivant. Pour les notions de base des faisceaux on peut se reporter à l'appendice A, indépendant du reste du cours.

1. Surfaces de Riemann

Définition 1.1. On appelle *surface de Riemann* une variété differentielle X de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension 2, dont l'espace tangent en chaque point est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe telle que l'on ait:
$(*)$ Pour tout $x \in X$, il existe une carte $(U, (u, v) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $x \in U$, et que, pour tout $y \in U$, l'application tangente au point y,

$$T_y z : T_y X \longrightarrow \mathbb{C}$$

à l'application

$$z : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z = u + iv,$$

soit $\mathbb{C}$–linéaire.

Définition 1.2. Un *morphisme* entre deux Surfaces de Riemann X et Y est une application $f : X \longrightarrow Y$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que, pour tout $x \in X$, l'application tangente $T_x f : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$ à f en x soit $\mathbb{C}$–linéaire.

Il est clair que le composé de deux morphismes de surfaces de Riemann en est un autre et que l'application identique de X est un morphisme. Nous venons donc de définir une *catégorie*. Par suite, comme toujours, un *isomorphisme* de surfaces de Riemann est un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel qu'il existe un morphisme $g : Y \longrightarrow X$, avec $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.

De plus, un ouvert U du plan complexe est, de manière naturelle, une surface de Riemann, car en tout point l'espace tangent s'identifie à $\mathbb{C}$, et l'on vérifie la condition $(*)$ en prenant pour carte l'inclusion de U dans $\mathbb{C}$.

Nous noterons $\mathbb{P}$ le *plan complexe* muni de sa structure de surface de Riemann, $\mathbb{D}$ le *disque ouvert* $|z| < 1$, $\dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} - \{0\}$ le *disque ouvert pointé* et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{P} \mid \Im(z) > 0\}$ le *demi-plan supérieur*, munis de la structure induite.

Avec cette structure, les morphismes de U dans $\mathbb{P}$ ne sont autres que les *fonctions holomorphes* définies sur U. En effet, pour toute fonction différentiable $(P,Q) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, si on pose $f = P + iQ$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) La différentielle de f est $\mathbb{C}$–linéaire

(2) f satisfait aux *conditions de Cauchy*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \; ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

(3) f est dérivable: pour tout z_0 dans U, le rapport $\big(f(z) - f(z_0)\big)/(z - z_0)$ a une limite lorsque z tend vers z_0, $z \in U, z \neq z_0$.

(4) Au voisinage de tout point z_0 de U, f est développable en série entière:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Etudions les morphismes d'une surface de Riemann X à valeur dans $\mathbb{P}$. On les appelle *fonction holomorphes*. Elles forment un anneau.

Pour tout ouvert U de X, on note $\mathcal{O}_X(U)$ *l'anneau des fonctions holomorphes sur U*.

On a donc les objets suivants:
– Pour tout ouvert U de X, un anneau $\mathcal{O}_X(U)$.
– Pour tout ouvert $V \subset U$, une application de restriction:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{r_{VU}} & \mathcal{O}_X(V) \\ f & \longmapsto & f|V \end{array}$$

vérifiant les conditions
– Si $W \subset V \subset U$ sont des ouverts de X,

$$r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$$
$$r_{UU} = id_U$$

– $(U_i)_{i \in I}$ étant un recouvrement ouvert de U, et pour tout $i \in I$, f_i étant une fonction holomorphe sur U_i, avec pour tout $(i,j) \in I \times I$, $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$, alors il existe un unique $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tel que $\forall\, i \in I$, $f|U_i = f_i$.

* En conclusion, ces données définissent un faisceau d'anneaux ([**10**, p.123]) qu'on appelle *le faisceau des fonctions holomorphes sur X*, et qu'on note $\mathcal{O}_X$.*

DÉFINITION 1.3. On appelle *anneau local de X au point x* l'anneau des *germes* de fonctions holomorphes au voisinage de x ; on le note $\mathcal{O}_{X,x}$.

Par définition, $\mathcal{O}_{X,x}$ est l'ensemble quotient de $E = \{(U,f), U$ voisinage ouvert de x, $f \in \mathcal{O}_X(U)\}$ par la relation "il existe un voisinage ouvert W de x, $W \subset U \cap V$, tel que $f|W = g|W$".

* $\mathcal{O}_{X,x}$ est la fibre ([**10**, p. 110]) du faisceau $\mathcal{O}_X$ au point x. *

Dans le cas particulier où $X = \mathbb{P}$ et $x = 0$, les fonctions holomorphes étant développables en série entière (4) tout germe $\widetilde{f}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P},0}$ sera représenté par une série entière $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. L'anneau local de $\mathbb{P}$ à l'origine s'identifie donc à l'anneau des séries entières en z de rayon de convergence non nul. Les germes des fonctions nulles à l'origine forment un idéal $\mathfrak{m}_{\mathbb{P},0}$ qui est maximal, car c'est le noyau du morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P},0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \widetilde{f} \longmapsto f(0)$$

C'est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P},0}$, car les germes $\widetilde{f}$ des fonctions f telles que $f(0) \neq 0$ sont inversibles ; on traduit ce fait en disant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P},0}$ est un anneau local (Lang [**12**, II, §4, p. 110]).

De plus, $\mathfrak{m}_{\mathbb{P},0}$ est engendré par le germe $\widetilde{z}$ de z et tout $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P},0}$ s'écrit $f = \widetilde{z}^e \cdot u$, où u est une unité ; ceci se traduit en disant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P},0}$ est un anneau de valuation discrète ([**12**, XII, §6, p. 488]), la valuation de f étant la plus grande puissance de $\mathfrak{m}_{\mathbb{P},0}$ à laquelle f appartient (c'est à dire $= e$). On note $\mathrm{ord}_x(f)$ ou $v_x(f)$ cette valuation de f au point x.

2. Étude locale des morphismes

Définition 2.1. X étant une surface de Riemann, on appelle *carte de X* un couple $(U, z : U \to V)$, où U est un ouvert de X, V un ouvert de $\mathbb{P}$, et $z : U \to V$ un isomorphisme de surfaces de Riemann.

On dit qu'une carte (U, z) de X est *centrée en x* si $z(x) = 0$. Quelque fois on appelle aussi $\phi = z^{-1} : V \to U$ une carte centrée en x ; on a $\phi(0) = x$.

Proposition 2.1. *Soit U un ouvert de X, soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et soit x dans U. Alors, les conditions siuvantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un voisinage ouvert V de x, $V \subset U$, tel que $(V, f|V : V \to f(V))$ soit une carte de X*
(2) $T_x f \neq 0$

Démonstration. En effet, (1) $\Longrightarrow$ (2), car l'application tangente en un point à une carte est un isomorphisme. Réciproquement, si $T_x f \neq 0$, alors $T_x f$ est un isomorphisme, car c'est une application $\mathbb{C}$–linéaire entre espaces vectoriels complexes de dimension 1. D'après un théorème connu ([**3**, I,4,2]), il existe donc un voisinage ouvert V de x tel que f induise un isomorphisme entre V et $f(V)$. $\square$

Définition 2.2. On appelle *uniformisante locale en un point x de X*, un générateur de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est-à-dire le germe d'une carte de X centrée en x.

Si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ $f \neq 0$ alors $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathfrak{m}^n_{X,x}, f \notin \mathfrak{m}^{n+1}_{X,x}$ et on note $v_x(f) = n$ la *valuation de f en x*.

Corollaire 2.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $(U, f : U \to \mathbb{P})$ soit une carte de X est que $T_x f$ soit non nulle pour tout $x \in U$, et f injective.*

Remarque 2.1. Soit (U, z) une carte de X centrée en x et soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$. La fonction $f \circ z^{-1} : z(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Par suite, il existe un voisinage ouvert V de x dans X, dans lequel on a:

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

ce qui est une égalité entre fonctions définies sur V.

Définition 2.3. * On appelle *espace annelé en anneaux locaux* un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ tel que, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_X$ au point x soit un anneau local.

Un *morphisme* $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *d'espaces annelés en anneaux locaux* est un couple (f, ϕ) où $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $\phi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$

un morphisme de faisceaux sur Y (pour l'image direct $f_*(\mathcal{O}_X)$ voir l'appendice, 1.3) tel que, pour tout $x \in X$, le morphisme d'anneaux:

$$\mathcal{O}_{X,x} \longleftarrow \mathcal{O}_{Y,f(x)}$$

applique l'idéal maximal dans l'idéal maximal. $_*$

* Une surface de Riemann est donc un espace annelé en anneaux locaux et tout morphisme de surfaces de Riemann $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux. En effet

- f induit un morphisme $\phi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$, puisque, pour tout ouvert V de Y, on a le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \\ g &\longmapsto (g \circ f)|f^{-1}(V) \end{aligned}$$

  et pour tout ouvert $V' \subset V$, le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_Y(V') \arrow[r] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) \end{tikzcd}$$

  est commutatif
- De plus, $\phi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, est local, i.e. $\phi_x(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$, donc applique les germes de fonctions nulles au point $f(x)$ dans les germes de fonctions nulles au point x, et induit l'identité sur les fonctions constantes. $_*$

Exercice 2.1. * Démontrer que tout morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux entre deux surfaces de Riemann qui induit l'identité sur les germes de fonctions constantes est un morphisme de surfaces de Riemann. $_*$

Théorème 2.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de surfaces de Riemann, soit $x \in X$, soit $y = f(x)$, f n'étant constant dans aucun voisinage de x. Alors, pour toute carte (V, t) de Y centrée en y, il existe une carte (U, s) de X centrée en x et un entier $e \geq 1$, tels que:*

(1) *$f(U) \subset V$*

(2) *Dans $\mathcal{O}_X(U)$, on a l'égalité* $\boxed{t \circ (f|U) = s^e}$

Démonstration. Soit (U_0, s_0) une carte de X centrée en x. Quitte à restreindre U_0, nous la choisirons telle que $f(U_0) \subset V$. Soient $\widetilde{s_0}$ et $\widetilde{t \circ f}$ les germes corrspondants. Alors $\widetilde{s_0}$ est une uniformisante et $\widetilde{t \circ f} \in \mathfrak{m}_{X,x}$; de plus, f n'étant pas constante au voisinage de x, il existe un entier $e \geq 1$ et une unité $\widetilde{u}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, tels que

$$\widetilde{t \circ f} = \widetilde{u} \cdot (\widetilde{s_0})^e$$

Or, dans $\mathcal{O}_{X,x}$, toute unité $\widetilde{u}$ admet une racine e–ième, $e \geq 1$. Autrement dit, il existe une unité $\widetilde{\alpha}$ telle que $\widetilde{\alpha}^e = \widetilde{u}$. En effet, l'application $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\theta(z) = z^e$, est non nulle et a une dérivée non nulle pour tout $z \neq 0$, en particulier pour $z_0 = u(x)$. D'après la proposition 2.1, il existe donc une fonction ρ, holomorphe au voisinage de z, telle que $\rho^e(z) = z$ et il suffit de prendre $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\rho \circ u}$. Posant alors

$$\widetilde{s} = \widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{s_0}$$

on a

$$\widetilde{t \circ f} = \widetilde{s}^e$$

De plus, $\widetilde{s}$ est un générateur de $\mathfrak{m}_{X,x}$, donc il existe une carte (U_1, s) de X dont le germe est $\widetilde{s}$. Donc il existe une carte (U, s) de X centrée en x, avec $U \subset U_1$, donc $f(U) \subset V$, et telle que $t \circ f|U = s^e$ dans U. $\square$

DÉFINITION 2.4. Il est clair que e est le plus grand entier tel que $\mathfrak{m}_{Y,y}$ soit appliqué dans $\mathfrak{m}^e_{X,x}$, donc *ne dépend pas du choix de t et de s*, on le note $\boxed{e_x(f)}$ et il s'appelle *l'indice de ramification*.

En particulier, si $X \subset \mathbb{P}$ et si $f : X \longrightarrow \mathbb{P}$ est une fonction holomorphe, alors $e_x(f)$ est caractérisé par la condition suivante:

$$\begin{cases} f^{(i)}(x) = 0 & 0 < i < e_x(f) \\ f^{(i)}(x) \neq 0 & i = e_x(f) \end{cases}$$

où $f^{(i)}$ est la dérivée d'ordre i de f.

On peut traduire l'énoncé du théorème 2.3 en disant que, localement, tout morphisme non constant de surfaces de Riemann est de la forme $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $z \longmapsto z^e$.

COROLLAIRE 2.4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme non constant de surfaces de Riemann, et si X est connexe, alors $\{x \in X \mid e_x(f) \neq 1\}$ est discret et fermé.*

DÉMONSTRATION. En effet, la dérivée de l'application $z \mapsto z^e$ n'est nulle qu'à l'origine. $\square$

COROLLAIRE 2.5. *Soient X une surface de Riemann connexe et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Alors f est une application ouverte.*

COROLLAIRE 2.6. *X étant une surface de Riemann* compacte *et connexe, toute fonction holomorphe sur X est constante.*

DÉMONSTRATION. En effet, si f n'est pas constante, l'image de $|f| : X \to \mathbb{R}$ est un compact ouvert de $\mathbb{R}$. $\square$

COROLLAIRE 2.7. (Théorème de Liouville) *Une fonction holomorphe dans le plan complexe et bornée est constante.*

DÉMONSTRATION. Puisque f est bornée, elle se prolonge en une fonction holomorphe sur la sphère de Riemann (voir plus bas) qui est *compacte.* $\square$

D'où l'on déduit *le théorème de d'Alembert* car un polynôme f qui ne s'annule pas est constant puisque $\frac{1}{f}$ est entière et bornée.

3. Courbes algébriques planes sur $\mathbb{C}$

THÉORÈME 3.1. *Soit $F(Z, W)$ un polynôme* irréductible *non constant à coefficients complexes, soit $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0\}$, et soit $X_0 = \{x \in X \mid F'_Z(x) \neq 0$ ou $F'_W(x) \neq 0\}$. Alors X_0 est une sous–variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^2$, et de plus, il existe une unique structure de surface de Riemann compatible telle que, en tout point, la structure complexe de $T_x X_0$ soit induite par celle de $\mathbb{C}^2$.*

Démonstration. *X_0 est muni d'une structure de variété différentielle*

F, fonction polynômiale, est une application

$$F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{ou } F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2)$$

Alors, par le théorème des fonctions implicites ([**7**, 10.2.1]), dire que X_0 est une sous–variété de $\mathbb{C}^2$ équivaut à dire qu'en tout point de X_0, T_xF est de rang 2 (au sens réel) ou de rang 1 (au sens complexe).

Or T_xF est l'application $\mathbb{C}$–linéaire:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (dz, dw) &\longmapsto F'_Z(x)dz + F'_W(x)dw \end{aligned}$$

X_0 est muni d'une structure de surface de Riemann

Soit $x \in X_0$ tel que $F'_W(x) \neq 0$ (le cas $F'_Z(x) \neq 0$ se traitant symétriquement en échangeant les variables). Alors, il existe un voisinage ouvert V de x dans $\mathbb{C}^2$, tel que $p : V \cap X_0 \to \mathbb{P}$, $p(z, w) = z$, soit une carte holomorphe. En effet: le théorème des fonctions implicites ([**7**, 10.2.1]) permet d'affirmer que p est une carte locale $\mathcal{C}^\infty$ et p est un morphisme de surfaces de Riemann car sa différentielle est $\mathbb{C}$–linéaire. □

Théorème 3.2. *Soit $F(Z, W) \in \mathbb{C}[Z, W]$ un polynôme* irréductible *non constant, $F(Z, W) = a_0(Z) \cdot W^n + a_1(Z) \cdot W^{n-1} + \cdots + a_n(Z)$, avec $n > 0$ et $a_0 \neq 0$. Soit $R(Z)$ le résultant de F et F'_W. Soit $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid a_0(z) \neq 0 \text{ et } R(z) \neq 0\}$. Soit $X_1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0 \text{ et } z \in S_1\}$. Alors X_1 est une surface de Riemann et l'application $p : X_1 \longrightarrow S_1$, $p(z, w) = z$ est un revêtement étale de degré n. De plus, $\mathbb{P} - S_1$ est un ensemble fini.*

Démonstration. On rappelle que R est un polynôme en Z([**17**, §30], [**12**, IV, §8]) et qu'il existe des polynômes α et β tels que $R = \alpha F + \beta F'_W$ le degré par rapport à W de β étant inférieur à n.

De plus, $R(z) = 0$ si et seulement si $F(z, W)$ et $F'_W(z, W)$ ont un zéro commun. Donc, en tout point (z, w) de X_1, $F'_W(z, w) \neq 0$; le germe $\widetilde{p}$ de p est donc une uniformisante locale, c'est-à-dire : il existe un voisinage ouvert U de $(z, w) \in X_1$ tel que $p|U$ soit un isomorphisme, donc en particulier un homéomorphisme de U sur son image V. Donc p *est étale* ; et X_1 est une surface de Riemann (théorème 3.1).

Pour tout $z \in S_1$, $F(z, W)$ a n racines car $a_0(z) \neq 0$, et elles sont distinctes car $R(F, F'_W)(z) \neq 0$; donc $\operatorname{card} p^{-1}(z) = n$. Le fait que p est un revêtement étale de degré n résulte maintenant de l'énoncé bien connu que voici [On pourrait également invoquer le corollaire 3.5 ci-dessous]. Soient X_1 et S_1 deux espaces topologiques et $p : X_1 \to S_1$ un étalement tel que, pour tout $y \in S_1$, $\operatorname{card} p^{-1}(y) = n$. Alors, p *est un revêtement de degré* n, autrement dit:

Tout $y \in S_1$ admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_n$ et p induit un homéomorphisme entre U_i et U pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

Enfin, $\mathbb{P} - S_1$ est l'ensemble des zéros de $a_0(Z) \cdot R(Z)$, donc est un ensemble fini. □

Remarque 3.1. Nous voulons rajouter à la surface de Riemann X_1 un nombre fini de points qui remplaceront les points de $X - X_1$ (X étant la courbe algébrique définie par F). Pour cela, nous chercherons à prolonger le revêtement X_1 de S_1 en un revêtement X' de $\mathbb{P}$. Nous rajouterons les points à l'infini de X en prolongeant X' en un revêtement $\widetilde{X}$ de la sphère de Riemann $\mathbb{S}$. Mais $\widetilde{X}$ ne sera pas un vrai revêtement car $\mathbb{S}$ est simplement connexe : pour un nombre fini de points z de $\mathbb{S}$, la fibre $\widetilde{X}_z$ de z sera formée de moins de n points que l'on devra par suite compter avec des multiplicités.

DÉFINITION 3.1. On appelle *revêtement éventuellement ramifié de degré n*, où $n \in \mathbb{N}$, un morphisme de Surfaces de Riemann $f : X \longrightarrow Y$ tel que, pour tout $y \in Y$, l'on ait :

$$\boxed{n = \sum_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} e_x(f)}$$

On dit que f *est ramifié au point* $x \in X$ si $e_x(f) > 1$. Alors, x est un *point de ramification*.

EXEMPLE 3.1. Soit e un entier, $e > 1$. L'application $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(z) = z^e$, est un revêtement *ramifié*. En effet f induit un revêtement étale de degré e, $\dot{f} : \dot{\mathbb{D}} \to \dot{\mathbb{D}}$, et l'origine est un point de ramification ($e_0(f) = e$).

EXEMPLE 3.2. $F(Z, W) = W^n + Z^m - 1$, $(m \geq 2, n \geq 2)$.
La variété X associée est partout non singulière : c'est une surface de Riemann. Soit $p : X \to \mathbb{P}$, $p(z, w) = z$. Soit $z \in \mathbb{P}$; la fibre $p^{-1}(z) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^n = 1 - z^m\}$ admet :

– ou bien n éléments 2 à 2 distincts si $1 - z^m \neq 0$
– ou bien un seul élément si $1 - z^m = 0$

Dans le second cas, si $x = (z_0, 0)$ est l'unique point de la fibre de z_0, on a bien $\boxed{e_x(p) = n}$. En effet $z - z_0$ est une carte de $\mathbb{P}$ au point z_0 et la fonction $q(z, w) = w$ est une uniformisante locale au point x car $F'_Z(x) \neq 0$. De plus, dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, on a :

$$\widetilde{q}^n = -(\widetilde{p - z_0}) \prod_{\substack{z_i^m = 1 \\ z_i \neq z_0}} (\widetilde{p - z_i})$$

soit : $\widetilde{p - z_0} = \widetilde{q}^n \cdot \widetilde{u}$, où $\widetilde{u}$ est une unité de $\mathcal{O}_{X,x}$. D'où la conclusion.

THÉORÈME 3.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de Surfaces de Riemann, Y* étant connexe. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un entier $n \geq 0$ tel que f soit un revêtement éventuellement ramifié de degré n.*
(2) *f est propre à fibres finies.*
(3) *Pour chaque $y \in Y$, il existe une carte $t : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ centrée en y, un entier $r \geq 0$, et des cartes $s_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ $(1 \leq i \leq r)$, tels que*
   (a) $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^r U_i$
   (b) *Pour $1 \leq i \leq r$, il existe un entier $e_i \geq 1$, tel que $t \circ f | U_i = s_i^{e_i}$*

DÉMONSTRATION. Pour tout $y \in Y$, posons

$$v(y) = \sum_{\substack{x \in X \\ y = f(x)}} e_x(f)$$

Si on a (3), la fonction v est localement constante, donc constante, donc (3) $\Rightarrow$ (1). De plus, (3) $\Rightarrow$ (2), car la propriété "f est propre" est locale sur Y et évidente dans la situation de (3). De plus, si $X = \emptyset$, l'énoncé est trivial ; si $X \neq \emptyset$, chacune des conditions (1),(2) implique que f est *surjective*. Pour (1) cela est clair, pour (2) on note que f est propre, donc fermée, et aussi ouverte car elle n'est constante sur aucune composante connexe puisque ses *fibres sont finies*.

Soit alors $y \in Y$ et soit $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $r > 0$, sa fibre. Soit $\widetilde{t}$ une uniformisante locale au voisinage de y. Alors, pour tout i, $1 \leq i \leq r$, il existe une uniformisante $\widetilde{s_i}$ au voisinage de x_i et un entier $e_i > 0$ tels que :

$$\widetilde{t \circ f} = (\widetilde{s_i})^{e_i}$$

On peut donc choisir des voisinages ouverts *disjoints* U_i'' des x_i (car X est séparé) et des cartes locales $s_i : U_i'' \to \mathbb{P}$ de germe $\widetilde{s_i}$, tels que, localement, f soit l'application

$$f|U_i'' : U_i'' \longrightarrow f(U_i''), \quad f(z) = z^{e_i}$$

On pose alors $V' = \bigcap_{i=1}^r f(U_i'')$ et $U_i' = U_i'' \cap f^{-1}(V')$. Ainsi, en utilisant seulement le fait que f est surjective à fibres finies, on a réalisé la condition (3) du théorème 3.3 avec cependant une assertion moins forte :

$$\text{(a')} \qquad f^{-1}(V') \supset \coprod_{i=1}^{r} U_i'$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). La négation de (3) assure ce qui suit :
pour tout entier $p \geq 1$, soit $\frac{1}{p} \cdot V'$ le disque de rayon $\frac{r}{p}$, où r est le rayon de V', soit pour tout i, $1 \leq i \leq r$, $\frac{1}{p} \cdot U_i' = U_i' \cap f^{-1}(\frac{1}{p}V')$; alors $f^{-1}(\frac{1}{p} \cdot V') \neq \coprod_{i=1}^r \frac{1}{p}U_i'$. Soit z_p une suite de points de X tels que

$$f(z_p) \in \frac{1}{p} \cdot V', \quad z_p \notin \coprod_{i=1}^{r} \frac{1}{p} U_i'$$

Puisque l'adhérence K de $\frac{1}{2}V'$ est compacte et que f propre, $f^{-1}(K)$ est compact et il existe une suite extraite qui converge vers un point $z \in f^{-1}(K)$. Comme f est continue, on a $f(z) = y$, donc z est l'un des x_j, donc $z_p \in U_j'$ pour p assez grand, ce qui est absurde.

(1) $\Longrightarrow$ (3). L'inclusion (a') est une égalité, sinon une fibre aurait trop de points. □

Proposition 3.4. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un revêtement éventuellement ramifié de degré n.*

(1) *L'ensemble R des $x \in X$ tels que $e_x(f) > 1$ (*points de ramification*) est discret et fermé ; il en est de même de $f(R)$.*
(2) *Au voisinage de tout point $x \in X$ tel que $e_x(f) = 1$, f est un isomorphisme local, autrement dit, f est étale.*
(3) *Si R est vide, f est un revêtement (au sens habituel) de degré n.*

Corollaire 3.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme étale de surfaces de Riemann, et si chaque fibre a le même nombre n de points, f est un revêtement étale de degré n.*

Corollaire 3.6. *Un morphisme de surfaces de Riemann $f : X \longrightarrow Y$ où X est* compacte*, Y* connexe *et où f n'est constant sur aucune composante connexe de X est un revêtement éventuellement ramifié. De plus, Y est compacte et f est surjective.*

Démonstration. La fibre d'un point $y \in Y$ est un fermé discret de X puisque f n'est constant sur aucune composante connexe de X, donc compacte et finie. D'autre part f est propre car f est continue et X compact. □

Corollaire 3.7. *Si X est compact, l'ensemble des points de ramification d'un morphisme de surfaces de Riemann non constant $f : X \longrightarrow Y$ est fini.*

Corollaire 3.8. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un revêtement éventuellement ramifié et si Y est* compact*, X l'est aussi.*

4. Sphère de Riemann. Fonctions méromorphes

Théorème 4.1. *Soit $\mathbb{S} = \mathbb{P} \sqcup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{P}$. Il existe une unique structure de surface de Riemann sur $\mathbb{S}$ induisant celle de $\mathbb{P}$. On l'appelle* sphère de Riemann*.*

De plus, on a deux cartes holomorphes de $\mathbb{S}$, d'abord l'identité de $\mathbb{P}$, et ensuite $\mathbb{S} - \{0\} \to \mathbb{P}$, $\infty \mapsto 0, z \mapsto \frac{1}{z}, z \neq 0$ et $z \neq \infty$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 4.1. On appelle *fonction méromorphe* sur une surface de Riemann X, un morphisme de surfaces de Riemann $f : X \longrightarrow \mathbb{S}$ tel que l'ensemble des *pôles* $f^{-1}(\infty)$ soit discret.

Lemme 4.2. *Soit $f : \dot{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{P}$ une fonction holomorphe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une fonction méromorphe $\overline{f} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{S}$ prolongeant f*
(2) *Il existe un entier n tel que $z^n \cdot f(z) \to 0,\ z \to 0$*
(3) *Pour r assez grand, f ou $\frac{1}{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque de rayon $\frac{1}{r}$.*
(4) *Le développement en série de Laurent de f s'écrit:*

$$f = \sum_{n \geq -e} a_n \cdot z^n \quad (e \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Nous prouvons seulement que (1) $\Leftrightarrow$ (3). Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (3). Inversement,

si f se prolonge à $\frac{1}{r} \cdot \mathbb{D}$, alors elle se prolonge en un morphisme $\mathbb{D} \to \mathbb{P} \subset \mathbb{S}$, donc en une fonction méromorphe sur $\mathbb{D}$. D'autre part,

si $\frac{1}{f}$ se prolonge à $\frac{1}{r} \cdot \mathbb{D}$ et si f ne se prolonge pas, on a $\left(\frac{1}{f}\right)(0) = 0$. Le prolongement $\overline{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}$ est tel qu'en le composant avec la carte canonique $\phi : \mathbb{S} - \{0\} \to \mathbb{P}$, $\phi(z) = \frac{1}{z}$, on obtienne le morphisme $\frac{1}{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{P}$. □

Remarque 4.1. Une fonction méromorphe $f : X \to \mathbb{S}$ définit une fonction holomorphe $f : X_0 \to \mathbb{P}$, où X_0 s'obstient en ôtant à X l'ensemble discret des *pôles* de f (points x où $f(x) = \infty$). Inversement, étant donnée une fonction holomorphe f sur X_0, où $X - X_0$ est discret et fermé, pour qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur X, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X - X_0$, il existe une fonction holomorphe g définie au voisinage de x telle que $g(x') \cdot f(x')$ soit borné dans un voisinage de x.

Définition 4.2. Si x est un pôle d'une fonction méromorphe f, on appelle *ordre du pôle* l'entier $e_x(f)$.

Proposition 4.3. *Les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann X forment un anneau noté $M(X)$.*

Si, de plus, X est connexe, alors $M(X)$ est un corps.

DÉMONSTRATION. En effet : soit f une fonction méromorphe non nulle. Si X est connexe, l'ensemble $D = f^{-1}(0)$ est discret. De plus, $\frac{1}{f}$ est holomorphe dans $X - D$ et au voisinage de tout point de D, le produit $f \cdot \frac{1}{f}$ est borné. $\square$

PROPOSITION 4.4. *On a* $\boxed{M(\mathbb{S}) = \mathbb{C}(z)}$ *où z est l'identité de $\mathbb{S}$.*

DÉMONSTRATION. Les fonctions constantes et l'identité de $\mathbb{S}$ sont méromorphes. De plus, z est algébriquement indépendant sur $\mathbb{C}$ [une relation du type $a_0 z^n + \cdots + a_n = 0$, $(a_i \in \mathbb{C})$ dans $M(\mathbb{S})$ conclurait à la finitude de $\mathbb{C}$]. Le sous-corps de $M(\mathbb{S})$ engendré par z est donc le corps des fractions rationelles en z ; on le note $\mathbb{C}(z)$.

D'autre part, soit $f \in M(\mathbb{S})$; f est un morphisme de surfaces de Riemann compactes, donc un revêtement éventuellement ramifié de degré n. Alors soient

$$f^{-1}(0) \cap \mathbb{P} = \{x_1, \ldots, x_r\} \text{ avec les multipliciés } (e_1, \ldots, e_r)$$
$$f^{-1}(\infty) \cap \mathbb{P} = \{y_1, \ldots, y_s\} \text{ avec les multipliciés } (f_1, \ldots, f_s)$$

Soit

$$h = \frac{\prod_{i=1}^{s}(z - y_i)^{f_i}}{\prod_{i=1}^{r}(z - x_i)^{e_i}} \cdot f = \prod_{i=1}^{s}(z - y_i)^{f_i} \cdot g$$

g est une fonction méromorphe, et $\widetilde{g}$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathbb{S},x_i}$ pour tout i $(1 \leq i \leq r)$, car, au voisinage de x_i, on a $f = (z - x_i)^{e_i} \cdot u$, où $\widetilde{u}$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathbb{S},x_i}$. De même, h est une fonction méromorphe et h ne s'annule ou ne prend la valeur ∞ en aucun point de $\mathbb{P}$. Au point ∞, h est soit nulle, soit égale à ∞, soit finie. Donc l'un des deux points : 0 ou ∞ de $\mathbb{S}$ n'est pas atteint par h, ce qui est absurde, car un revêtement éventuellement ramifié est surjectif. Donc h est constante et $f \in \mathbb{C}(z)$. $\square$

REMARQUE 4.2. Si X est compacte, si $f : X \longrightarrow \mathbb{S}$ est une fonction méromorphe non constante, et si

$$n = \sum_{\substack{x \in X \\ f(x) = \infty}} e_x(f)$$

alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\boxed{n = \sum_{\substack{x \in X \\ f(x) = z}} e_x(f)}$$

En effet : f est un revêtement éventuellement ramifié.

5. Prolongement de revêtements éventuellement ramifiés

PROPOSITION 5.1. *Soient $f : X \longrightarrow S$, $g : Y \longrightarrow S$ deux revêtements éventuellement ramifiés ; alors toute application* continue *$m : X \longrightarrow Y$, telle que $g \circ m = f$ est un morphisme de surfaces de Riemann, son image est une réunion de composantes connexes de Y et enfin m est un revêtement éventuellement ramifié de son image.*

DÉMONSTRATION. En effet, soit $x \in X$. Si f est étale en x et si g est étale en $y = m(x)$, il existe des voisinages ouverts : W de $s = f(x) = g(m(x))$, U de x et V de y tels que $f(U) = g(V) = W$ et que $f|U$ et $g|V$ soient des isomorphismes de surfaces de Riemann. Alors $m|U = (g|V)^{-1} \circ (f|U)$ est un isomorphisme.

Si f est étale en x et g ramifié en $y = m(x)$, il existe des voisinages ouverts : W centré en s (qui trivialise le revêtement g (th. 3.3)), U centré en x et V centré en y tels que $f(U) = g(V) = W$, et que $f|U$ soit un isomorphisme de surfaces de

Riemann et $g|V$ un morphisme d'expression locale $z \mapsto z^e$; de plus, U est connexe et m continue, donc $m(U) \subset V$. Alors en tout point x' de $U - \{x\}$, m est encore un morphisme étale. Comme, de plus, m est continue, m est un morphisme sur tout U.

En dehors de l'ensemble discret R des points de ramification de f (prop. 3.4), m est un morphisme ; m étant continue et R discret, ceci suffit à prouver que m est un morphisme de surfaces de Riemann. Comme m n'est constant sur aucun ouvert de X, c'est une application ouverte ; de plus, m est propre, donc son image est une réunion de composantes connexes de Y. Enfin, m est un revêtement éventuellement ramifié de son image car on voit tout de suite que m est un morphisme propre à fibres finies. □

Théorème 5.2. *Soient S une surface de Riemann, S_0 un ouvert de S tel que $S - S_0$ soit discret. Le foncteur qui, à tout revêtement éventuellement ramifié $p : X \longrightarrow S$ étale au-dessus de S_0, attache sa restriction $p : X_0 \longrightarrow S_0$ où $X_0 = p^{-1}(S_0)$ est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Démontrons que le foncteur est *pleinement fidèle.*

Par définition, un foncteur $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{A}$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(g(X), g(Y))$$

induite par g est *injective* (resp. *bijective*).

Soient $p : X \longrightarrow S$ et $q : Y \longrightarrow S$ deux revêtements éventuellement ramifiés.

Deux morphismes $u, v : X \rightrightarrows Y$ tels que $qu = qv = p$, sont égaux dès que leurs restrictions à X_0 sont égales, car $X - X_0$ est *discret.* Donc le foncteur est *fidèle.*

Soit $u_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme tel que $q_0 \circ u_0 = p_0$. D'après la proposition 5.1, il suffit de trouver une application *continue* $u : X \longrightarrow Y$ prolongeant u_0 et telle que $qu = p$.

Soit $x \in X - X_0$, soit $s = p(x)$, soit (V, ϕ) une carte locale centrée en s telle que $\phi(V)$ soit un disque de $\mathbb{P}$ et que V trivialise les deux revêtements (th. 3.3)

$$\begin{cases} p^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^{n} U_i \ ; \\ q^{-1}(V) = \coprod_{j=1}^{m} W_j \ ; \end{cases}$$

On peut supposer que x est le centre de U_1, et comme $u_0(U_1)$ est connexe, il est contenu dans l'un des W_j, par exemple W_1.

Alors nécessairement, comme $qu = p$, $u(x)$ *est le centre de* W_1, noté y_1. Donc l'application u est bien définie et telle que $qu = p$.

u est continu

Soient $(V, \phi), (U_1, z_1), (W_1, r_1)$ les cartes locales centrées en $p(x) = s, x$ et y_1 telles que $\phi \circ p = z_1$ et $\phi \circ q = r_1^{f_1}$ (cf. th. 3.3).

Lorsque x' tend vers x, comme p est continu, $p(x') \to p(x) = s$, autrement dit $q(u_0(x')) \to s$, ce qui signifie que $\big(r_1(u_0(x'))\big)^{f_1} \to 0$, donc $r_1(u_0(x')) \to 0$, donc : $u_0(x') = u(x') \to y_1$.

Nous avons prouvé que $\mathrm{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0}(X_0, Y_0)$ est bijectif sans supposer que les restrictions de X et Y à S_0 soient étales.

ASSERTION 5.3. *Il reste à prouver que, si $p_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ est un revêtement* fini *étale de degré n, alors, il existe un revêtement éventuellement ramifié $p : X \longrightarrow S$ et un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & X_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d, "p_0"] \\ S & S_0 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

où $X_0 = p^{-1}(S_0)$.

REMARQUE 5.1. Supposons $S = \mathbb{P}$, $S_0 = \mathbb{P} - \{0\} = \dot{\mathbb{P}}$.
Soit $\boxed{p : \mathbb{P} \longrightarrow \dot{\mathbb{P}} \ , \ p(z) = \exp(2i\pi z)}$.
Cette application est un revêtement *étale* infini de groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}$. Ce revêtement ne se prolonge pas. D'autre part, $\mathbb{P}$ étant simplement connexe, $(\mathbb{P}, p)$ est *le revêtement universel de* $\dot{\mathbb{P}}$ et

$$\boxed{\pi_1(\dot{\mathbb{P}}) = \mathbb{Z}}$$

De même lorsque $S = \mathbb{D}$, $S_0 = \dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} - \{0\}$, $p^{-1}(\dot{\mathbb{D}}) = \widetilde{\dot{\mathbb{D}}}$ est connexe et simplement connexe, donc $(\widetilde{\dot{\mathbb{D}}}, p|\widetilde{\dot{\mathbb{D}}})$ est le revêtement universel de $\dot{\mathbb{D}}$ et $\pi_1(\dot{\mathbb{D}}) = \mathbb{Z}$.

Puisque $\pi_1(\dot{\mathbb{D}}) = \mathbb{Z}$ est commutatif, les classes à isomorphisme près de revêtements finis étales de $\dot{\mathbb{D}}$ correspondent bijectivement aux quotients finis de $\mathbb{Z}$ ([**9**, X.6, p.192]) et pour chaque entier positif n, on connait un revêtement étale de degré n de $\dot{\mathbb{D}}$, à savoir $\dot{\mathbb{D}} \longrightarrow \dot{\mathbb{D}}$, $z \mapsto z^n$. D'où le lemme:

LEMME 5.4. *Soit $\pi' : X \longrightarrow \dot{\mathbb{D}}$ un revêtement* étale *de degré n, où X est un espace topologique. Si X est* connexe*, il existe un homéomorphisme $\alpha : X \longrightarrow \dot{\mathbb{D}}$ tel que* pour tout $x \in X$

$$\boxed{\pi'(x) = [\alpha(x)]^n}$$

LEMME 5.5. *Soit $p_0 : X_0 \longrightarrow S_0$ un revêtement étale de degré n ; soit $S \supset S_0$, avec $S - S_0$ discret ; soit $s \in S - S_0$. Il existe une carte $\phi : \mathbb{D} \to S$ centrée en s, un entier $r \geq 1$, des cartes $\phi_i : \dot{\mathbb{D}} \to X_0$, $1 \leq i \leq r$, tel que*

(1) $p_0^{-1}(\phi(\dot{\mathbb{D}})) = \coprod_{i=1}^{r} \phi_i(\dot{\mathbb{D}})$
(2) *Pour tout i , $1 \leq i \leq r$, il existe un entier $e_i \geq 1$, $\phi^{-1} \circ p_0 \circ \phi_i(z) = z^{e_i}$ pour $z \in \dot{\mathbb{D}}$ et $\sum_{i=1}^{r} e_i = n$*

Admettons provisoirement ce lemme ; ceci démontre l'assertion 5.3. En effet, pour chaque i, on recolle $\mathbb{D}$ et X_0, grâce aux homéomorphismes ϕ_i, et on obtient une surface de Riemann X', qui est en vertu de (2), un revêtement éventuellement ramifié de $S_0 \cup \{s\}$ de degré n.

On recommence l'opération pour tout $s \in S - S_0$ en prenant soin de choisir des cartes $\phi_s : \mathbb{D} \to S$ comme ci-dessus, qui soient deux à deux disjointes.

Démontrons le lemme 5.5. Comme $S - S_0$ est discret, on peut choisir une carte $\phi : \mathbb{D} \to S$, telle que $\phi(\mathbb{D}) \cap (S - S_0) = \{s\}$. Alors la restriction π' de p_0 au-dessus de la carte ϕ est un revêtement étale de degré n de $\dot{\mathbb{D}}$:

$$\begin{tikzcd} p_0^{-1}(\phi(\dot{\mathbb{D}})) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"'] & X_0 \arrow[d, "p_0"] \\ \dot{\mathbb{D}} \arrow[r, "\phi"] & S_0 \end{tikzcd}$$

Soient $V_1, \ldots, V_r$ $(r \geq 1)$ ses composantes connexes [elles sont en nombre fini car chacune est un revêtement de $\phi(\dot{\mathbb{D}})$]. En vertu du lemme 5.4, pour tout i , $(1 \leq i \leq r)$, il existe un homéomorphisme $\alpha_i : V_i \to \dot{\mathbb{D}}$ et un entier $e_i \geq 1$, tels que pour tout $x \in V_i$, $\boxed{[\alpha_i(x)]^{e_i} = \phi^{-1} \circ p_0(x)}$. De plus α_i est un isomorphisme de revêtements, donc un isomorphisme de surfaces de Riemann (prop. 5.1). Et comme p_0 est un revêtement étale de degré n, $\boxed{\sum_{i=1}^{r} e_i = n}$. □

Corollaire 5.6. *Soit $p_0 : X_0 \longrightarrow S_0$ un revêtement* éventuellement ramifié *de degré n, où S_0 est un ouvert d'une surface de Riemann S et $S - S_0$ est discret. Soit $R = \{x \in X_0 \mid e_x(p_0) > 1\}$ l'ensemble des points de ramification de p_0 et soit $R' = p_0(R)$. Alors R' est discret dans S_0. Si, de plus, R'* est fermé *dans S, alors $p_0 : X_0 \longrightarrow S_0$ se prolonge en un revêtement éventuellement ramifié $p : X \longrightarrow S$.*

Démonstration. Posons $S_1 = S_0 - p_0(R)$, $X_1 = p_0^{-1}(S_1)$. Soit $p_1 : X_1 \to S_1$ la restriction de p_0. Comme $S - S_1$ est discret, on peut prolonger (X_1, p_1) en un revêtement éventuellement ramifié $p : \widetilde{X} \longrightarrow S$ (assertion 5.3). Montrons que p prolonge p_0. Soient $\widetilde{X_0} = p^{-1}(S_0)$, $\widetilde{p_0} = p|\widetilde{X_0} : \widetilde{X_0} \longrightarrow S_0$. Alors les revêtements éventuellement ramifiés $(\widetilde{X_0}, \widetilde{p_0})$ et (X_0, p_0) ont même restriction $p_1 : X_1 \longrightarrow S_1$, donc sont isomorphes (prop. 5.1). □

Corollaire 5.7. *Soient S une surface de Riemann compacte, S_0 un ouvert de S tel que $S - S_0$ soit fini. Alors le foncteur qui, à tout revêtement éventuellement ramifié de S associe un revêtement éventuellement ramifié de S_0 n'ayant qu'un nombre fini de points de ramification est une équivalence de catégories.*

Démonstration. En effet:

Tout revêtement éventuellement ramifié $f : X \longrightarrow S$ d'une surface de Riemann compacte n'a qu'un nombre fini de points de ramification (corollaire 3.7).

Réciproquement : un revêtement éventuellement ramifié de S_0 n'ayant qu'un nombre fini de points de ramification se prolonge d'après le corollaire 5.6. □

Lemme 5.8. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un revêtement étale de degré n, où X est un espace topologique, Y une surface de Riemann, alors il existe* une et une seule structure de surface de Riemann *sur X telle que f soit un morphisme de surface de Riemann.*

Démonstration. Soit $x \in X$, soit $y = f(x)$. Soit $\phi : \mathbb{D} \to Y$ une carte holomorphe locale de Y centrée en y telle que $f^{-1}(\phi(\mathbb{D})) = \coprod_{i=1}^{n} U_i$ et que $f|U_i : U_i \longrightarrow \phi(\mathbb{D})$ soit un isomorphisme. Alors X muni du système de cartes $\boxed{(U_i, \phi^{-1} \circ f|U_i)}$ possède une structure de surface de Riemann ; en effet les changements de cartes sont holomorphes. □

Corollaire 5.9. *Soient $p : X \to S$ et $q : Y \to S$ des revêtements éventuellement ramifiés de degrés m et n, il existe un produit dans la catégorie des revêtements éventuellement ramifiés de S.*

Démonstration. Soit S_0 le plus grand ouvert au-dessus duquel X et Y sont étales. Son complémentaire est discret. On note $p_0 : X_0 \longrightarrow S_0$ et $q_0 : Y_0 \longrightarrow S_0$ les restrictions de p et q à S_0. Le produit fibré $X_0 \underset{S_0}{\times} Y_0$ est canoniquement un revêtement étale de degré $m \cdot n$.

Prolongeons le revêtement étale $X_0 \underset{S_0}{\times} Y_0$ de S_0, de degré $m \cdot n$, en un revêtement éventuellement ramifié (5.3) noté $\rho : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow S$. D'autre part les projections $X_0 \underset{S_0}{\times} Y_0 \longrightarrow X_0$ et $X_0 \underset{S_0}{\times} Y_0 \longrightarrow Y_0$ se prolongent (th. 5.2) en $\pi_1 : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow X$ et $\pi_2 : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Y$. Grâce au th. 5.2, on voit alors que $(X \underset{S}{\times} Y, \pi_1, \pi_2)$ satisfait la propriété universelle du produit fibré. □

DÉFINITION 5.1. Un revêtement éventuellement ramifié $f : X \longrightarrow Y$ de degré n est dit *galoisien* si n est le cardinal du groupe $\mathrm{Aut}(X/Y)$ des automorphismes de X sur Y.

COROLLAIRE 5.10. *Tout revêtement éventuellement ramifié $f : X \longrightarrow Y$ de degré n est quotient d'un revêtement* galoisien *éventuellement ramifié.*

DÉMONSTRATION. Soit Y_0 l'ouvert de Y au-dessus duquel le revêtement f est étale. L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Aut}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_0/Y_0)$$

est un *isomorphisme*. Par suite le prolongement d'un revêtement étale galoisien est galoisien, de plus $n \geq \mathrm{card}\,\mathrm{Aut}(X_0/Y_0)$. Donc $\boxed{n \geq \mathrm{card}(\mathrm{Aut}(X/Y))}$.

Grâce au th. 5.2, on sait que, pour prouver le corollaire, on peut supposer que X/Y est étale. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un revêtement étale. Considérons l'ensemble Z des $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tels que $f(x_i) = f(x_j)$ pour tout couple d'indices (i,j) et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ $(1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq n)$; soit $q : Z \longrightarrow Y\ ,\ q(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1)$.

Alors (Z, q) est *un revêtement galoisien étale*. En effet, remarquons d'abord que la fibre $q^{-1}(y)$ d'un point $y \in Y$ est isomorphe à l'ensemble des permutations de la fibre $f^{-1}(y)$ et contient donc $n!$ points. D'autre part, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur Z de façon compatible avec q et aucune permutation n'opère trivialement.

Munissons Z de la topologie induite par celle de X^n. Il reste à prouver que q est étale, car ce sera un revêtement en vertu du corollaire 3.5, et que $\mathfrak{S}_n$ opère continûment. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Z$ de projection $y = q(x)$. Soit V un voisinage ouvert de y qui trivialise $f : X \longrightarrow Y$. Alors $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^n U_i$, où U_i est un voisinage de x_i.

Soit $W_x = \{(y_1, \ldots, y_n) \in Z \mid y_i \in U_i\,,\ 1 \leq i \leq n\}$. Il est immédiat que la restriction de q à W_x est un homéomorphisme $q' : W_x \xrightarrow{\sim} V$. Il est clair que $\mathfrak{S}_n$ opère continûment, donc Z est un revêtement étale galoisien.

L'application $p : Z \longrightarrow X\ ,\ p(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, satisfait à $fp = q$. C'est donc un revêtement étale. Enfin, d'après le lemme 5.8, il existe une unique structure de surface de Riemann sur Z telle que p soit un morphisme, donc aussi $q = f \circ p$. D'où la conclusion. □

EXERCICE 5.1. Si $X \longrightarrow Y$ est un revêtement éventuellement ramifié galoisien de groupe G, les sous–groupes G' de G correspondent à des revêtements éventuellement ramifiés $X' \longrightarrow Y$ munis d'un morphisme surjectif $X \longrightarrow X'$.

6. Surfaces de Riemann compactes et corps de fonctions

THÉORÈME 6.1. *En attachant à toute surface de Riemann* compacte et connexe *X le corps $M(X)$ des fonctions méromorphes sur X, et à tout morphisme* non constant *l'application en sens inverse entre les corps de fonctions méromorphes, on définit une équivalence de catégories entre : la catégorie des surfaces de Riemann* *compactes et connexes et l'opposée de la catégorie des corps des fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$.*

Remarquons qu'une fonction méromorphe est un morphisme qui peut être constant et que si $u : X \to Y$ est un morphisme de surfaces de Riemann, on a un morphisme *en sens inverse* $M(X) \leftarrow M(Y) : M(u)$, $M(u)(\phi) = \phi \circ u$, sauf si u est constant.

Nous utiliserons, sous réserve d'une démonstration ultérieure (voir la proposition 5.5 au chapitre 2):

AXIOME 6.2. *Pour tout point d'une surface de Riemann compacte, il existe une fonction méromorphe non constante n'ayant de pôle qu'en ce point.*

PROPOSITION 6.3. *Le foncteur M est fidèle.*

DÉMONSTRATION. Soient $u, v : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de surfaces de Riemann compactes et connexes, tels que pour tout $\phi \in M(Y)$, $\phi u = \phi v$. Si $u \neq v$, il existe $x \in X$, tel que $u(x) \neq v(x)$, de plus il existe une fonction $\psi \in M(Y)$ n'ayant de pôle qu'au point $u(x)$, par l'axiome 6.2. Alors $\psi \circ u$ et $\psi \circ v$ sont deux fonctions *distinctes* de $M(X)$ car $\psi \circ u$ a un pôle en x et $\psi \circ v$ n'en a pas. Donc $u = v$. □

Nous démontrerons plus loin (cor. 6.12) que le foncteur est pleinement fidèle.

PROPOSITION 6.4. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes et connexes, il existe un entier $n \geq 1$, tel que f soit un revêtement éventuellement ramifié de degré n et, de plus,*

$$[M(X) : M(Y)] = n$$

DÉMONSTRATION. La première assertion a déjà été prouvée au corollaire 3.6. D'après le corollaire 5.10, il existe un revêtement galoisien de groupe G qui coiffe X:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[l] \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Nous allons prouver que :

(1) $[M(Z) : M(Y)] = \operatorname{card} G = (Z : Y)$
où $(Z : Y)$ est le degré du revêtement galoisien de groupe G.

(2) Z est aussi un revêtement éventuellement ramifié *galoisien* de X, donc $[M(Z) : M(X)] = (Z : X)$.

D'où l'on déduit la proposition par division des degrés d'extension.

L'homomorphisme $G = \operatorname{Aut}(Z/Y) \longrightarrow \operatorname{Aut}(M(Z)/M(Y))$, $g \mapsto M(g)$ est injectif (prop. 6.3). Il suffit donc de prouver que

$$\boxed{M(Y) = M(Z)^G}$$

car alors $M(Z)$ est une extension galoisienne de $M(Y)$, de groupe de Galois G ; et donc $[M(Z) : M(Y)] = \operatorname{card} G$ ([**1**, Livre II, V.10.5] ou [**12**, VI, Th. 1.8]).

Démontrons que $M(Y) = M(Z)^G$. Il est clair que $M(Y) \subset M(Z)^G$. Soit $\phi \in M(Z)^G$; i.e.: soit $\phi : Z \longrightarrow \mathbb{S}$, $\phi \in M(Z)$ telle que pour tout $\gamma \in G$, $\phi \circ \gamma = \phi$. Du point de vue ensembliste, on a $Y = Z/G$, donc ϕ se factorise par une application $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{S}$ telle que $\psi \circ p = \phi$.

Il suffit de prouver que ψ est méromorphe, ce qui est clair en tous les points $y \in Y$ tels qu'il existe $z \in Z$ avec $p(z) = y$ et $e_z(p) = 1$. Soit $z \in Z$ tel que $e_z(p) = e$. Alors il existe des cartes $s' : \mathbb{D} \to Z$ et $s : \mathbb{D} \to Y$ centrées en z et $y = p(z)$ telles que pour tout $t \in \mathbb{D}$, on ait : $ps'(t) = s(t^e)$. D'où $\psi \circ s(t^e) = \phi \circ s'(t)$. Or, d'après ce qui précède, la fonction $\psi \circ s$ est méromorphe dans $\dot{\mathbb{D}}$ et même holomorphe quitte à diminuer $\dot{\mathbb{D}}$. Elle admet donc un développement en série de Laurent :

$$\psi \circ s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$$

donc

$$\psi \circ s(t^e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^{ne}$$

Cette dernière fonction étant méromorphe, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = 0\,,\ n \leq k$, donc ψ est méromorphe au point y. $\square$

Corollaire 6.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un revêtement éventuellement ramifié galoisien de groupe G entre surfaces de Riemann compactes et connexes, alors G est aussi le groupe de Galois de l'extension $M(X)/M(Y)$.*

Remarque 6.1. Quand on aura établi le théorème 6.1, on saura que si Y est une surface de Riemann de corps de fonctions méromorphes $M(Y)$, si L est une extension galoisienne de $M(Y)$ de groupe G et de degré n, il existe un revêtement galoisien $X \longrightarrow Y$ de groupe G, où X est la surface de Riemann compactes et connexe associée au corps de fonctions d'une variable L, qui induit l'extension $L \hookleftarrow M(Y)$.

Corollaire 6.6. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un revêtement éventuellement ramifié de degré n entre surfaces de Riemann* compactes et connexes *et si $\phi \in M(X)$ il existe $(a_0, \dots, a_n) \in [M(Y)]^n$ tel que, dans $M(X)$:*

$$\boxed{a_0\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0}$$

Démonstration. $M(X)/M(Y)$ est une extension de degré n par la proposition 6.4. $\square$

Exercice 6.1. Démontrer le corollaire 6.6 sans autre hypothèse sur Y que celle d'être une surface de Riemann.

Proposition 6.7. *Si X est une surface de Riemann compacte et connexe, $M(X)$ est un corps de fonctions d'une variable. Autrement dit : il existe $(z, w) \in [M(X)]^2$, avec z non constante, et un polynôme irréductible $F(Z, W) \in \mathbb{C}[Z, W]$ tel que*

$$\begin{cases} \mathbb{C}(z, w) = M(X) \\ F(z, w) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. En vertu de l'axiome 6.2, il existe une fonction méromorphe non constante z sur X. De plus, $z : X \longrightarrow \mathbb{S}$ est un revêtement éventuellement ramifié de degré n, et $M(z) : M(\mathbb{S}) \longrightarrow M(X)$ a pour image $\mathbb{C}(z)$ d'après proposition 4.4. Donc $M(X)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z)$, donc séparable et monogène. Autrement dit, il existe $w \in M(X)$ et un polynôme irréductible $P \in \mathbb{C}(z)[W]$ tels que

$$\begin{aligned} M(X) &= \mathbb{C}(z)[W]/(P(W)) = \mathbb{C}(z, w) \\ P(W) &= a_0(z)W^n + \cdots + a_n(z) \\ P(w) &= 0 \end{aligned}$$

Mais $P(W) = \frac{F(Z,W)}{G(Z)}$ où $F \in \mathbb{C}[Z,W]$ et $G \in \mathbb{C}[Z]$; et, en vertu du lemme de Gauss, F est irréductible dans $\mathbb{C}[Z,W]$. Alors $M(X) = \mathbb{C}(z,w)$ et $F(z,w) = 0$. $\square$

THÉORÈME 6.8. *Soit X une surface de Riemann compacte et connexe et soit $M(X) = \mathbb{C}(z,w)$ son corps de fonctions méromorphes.*

Soit $F(Z,W) = a_0(Z)\cdot W^n + a_1(Z)\cdot W^{n-1} + \cdots + a_n(Z)$ un polynôme irréductible tel que $F(z,w) = 0$. Soit C la courbe plane d'équation $F(Z,W) = 0$. Soit

$$p_0 : C_0 \longrightarrow S_0 = \{s \in \mathbb{S} \mid s \neq \infty\,,\, a_0(s) \neq 0\,,\, R(F, F'_W)(s) \neq 0\}\ ,\ p_0(z,w) = z$$

le revêtement étale associé (théorème 3.2). On a un isomorphisme de revêtements:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "m_0"] \arrow[dr, "z_0"'] & & C_0 \arrow[dl, "p_0"] \\ & S_0 & \end{tikzcd}$$

où $X_0 = z^{-1}(S_0)$.

Notons déjà que ceci assure que $z : X \to \mathbb{S}$ est le prolongement de $p_0 : C_0 \to S_0$, donc X est déterminée à isomorphisme près par $M(X)$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X_0$. Alors $z_0(x) \in S_0$, donc $z(x) \neq \infty$ et $z(x)$ et $w(x)$ vérifient

$$a_0(z(x)) \cdot w^n(x) + \cdots + a_n(z(x)) = 0$$

avec $a_0(z(x)) \neq 0$, donc $w(x) \neq \infty$. Les fonctions z et w sont donc *holomorphes* sur X_0 et

$$m_0 : X_0 \longrightarrow C_0\ ,\ m_0(x) = (z(x), w(x))$$

est un *morphisme de revêtements* car m_0 est continue et $p_0 \circ m_0 = z_0$.

Pour prouver que m_0 est un isomorphisme, nous prenons un point de base $s \in S_0$ au choix. Les fibres $X_0(s) = z^{-1}(s)$ et $C_0(s) = p_0^{-1}(s)$ tous les deux ont n éléments. Par définition du résultant $R(F, F'_W)$, on a $n = \mathrm{card}\{w(x) \mid x \in X_0(s)\}$, donc $m_0 : X_0(s) \xrightarrow{\sim} C_0(s)$ est bijectif sur les fibres, donc m_0 est bijectif. $\square$

Nous aurons besoin d'un lemme:

LEMME 6.9. *Si p est une fonction* méromorphe *dans un disque $\mathbb{D}$ et q une fonction* holomorphe *dans $\dot{\mathbb{D}}$, si $a_0(p)\cdot q^n + a_1(p)\cdot q^{n-1} + \cdots + a_n(p) = 0$, où les a_i sont méromorphes dans $\mathbb{D}$, alors q est méromorphe dans $\mathbb{D}$.*

DÉMONSTRATION. Si p est une fonction méromorphe de z, quitte à multiplier les coefficients du polynôme par une puissance convenable de la variable les rendant holomorphes, on peut supposer p holomorphe ; puis on choisit les uniformisantes locales de façon à pouvoir supposer

$$p = z^e$$

alors on a $a_0(z^e)\cdot q^n + \cdots + a_n(z^e) = 0$ avec a_i holomorphe $(0 \leq i \leq n)$.

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_0(z^e)}{z^r}$ tends vers une limite finie $c \neq 0$ lorsque $z \to 0$.

Si $z^r \cdot q$ n'est pas bornée au voisinage de $z = 0$ il existe une suite z_i tendant vers 0 telle que $z_i^r \cdot q(z_i)$ tende vers l'infini. Donc

$$\frac{a_0(z_i^e)}{z_i^r} + \frac{a_1(z_i^e)}{z_i^r \cdot q(z_i)} + \cdots + \frac{a_n(z_i^e)}{z_i^r \cdot q^n(z_i)} \longrightarrow c \neq 0$$

lorsque $i \to \infty$ ce qui est absurde.

Donc q est une fonction méromorphe dans $\mathbb{D}$. $\square$

PROPOSITION 6.10. *Soit $F(Z,W) = a_0(Z)\cdot W^n + a_1(Z)\cdot W^{n-1} + \cdots + a_n(Z)$ un polynôme irréductible tel que $a_0(Z) \neq 0$. Soit C la courbe plane d'équation $F = 0$ et soit $p : \widetilde{C} \longrightarrow \mathbb{S}$ le revêtement obtenu en prolongeant le revêtement $p_0 : C_0 \longrightarrow S_0$ déjà introduit au théorème 6.8. Alors C_0 et $\widetilde{C}$ sont connexes.*

DÉMONSTRATION. Comme $\widetilde{C} - C_0$ est un ensemble fini, il suffira de prouver que $\widetilde{C}$ est connexe. Considérons les fonctions méromorphes $p : \widetilde{C} \to \mathbb{S}$ et $q_0 : C_0 \to \mathbb{S}$, $q_0(z,w) = w$. La fonction q_0 se prolonge en $q : \widetilde{C} \longrightarrow \mathbb{S}$. En effet $\widetilde{C} - C_0$ est un ensemble fini et on peut appliquer le lemme 6.9.

On a donc deux fonctions méromorphes sur $\widetilde{C}$: p et q vérifiant $F(p,q) = 0$. Si C' est une composante connexe de $\widetilde{C}$, les restrictions de p et q à C' vérifient encore la même relation. Donc $M(C')$ contient $\mathbb{C}(p,q)$ qui est de degré n sur $C(p) = M(\mathbb{S})$ car F est irréductible. Le revêtement $p : C' \longrightarrow \mathbb{S}$ est donc de degré $\geq n$, donc $C' = \widetilde{C}$, sinon il y aurait trop de points dans une fibre de $\widetilde{C}/\mathbb{S}$. $\square$

COROLLAIRE 6.11. *Tout corps de fonctions d'une variable est le corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann compacte et connexe.*

DÉMONSTRATION. En effet, en reprenant les notations de la proposition 6.10, on a vu que $\widetilde{C}$ est connexe, elle est compacte car c'est un revêtement de degré n de $\mathbb{S}$ et $M(\widetilde{C}) \supset \mathbb{C}(p,q)$, donc lui est égal car ces deux corps ont même degré sur $\mathbb{C}(p)$. $\square$

COROLLAIRE 6.12. *Le foncteur M est pleinement fidèle.*

DÉMONSTRATION. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $\phi : M(X) \longrightarrow M(Y)$ un $\mathbb{C}$–morphisme. Soit $M(X) = \mathbb{C}(z,w)$, soit $m_0 : X_0 \longrightarrow C_0$ l'isomorphisme 6.8, soient $z' = \phi(z)$, $w' = \phi(w)$ et soit S_1 le plus grand ouvert de S_0 tel que w' soit holomorphe sur $Y_1 = z'^{-1}(S_1)$ et soient $z'_1, w'_1 : Y_1 \rightrightarrows S_1$ les restrictions de z' et w' à Y_1. Soit $r : Y_1 \longrightarrow C_1 = p^{-1}(S_1)$, $r(y) = (z'_1(y), w'_1(y))$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "s_1"] \arrow[ddr, "z'_1"'] & & C_1 \arrow[ddl, "p_1"] \\
& X_1 \arrow[ur, "m_1"'] \arrow[d, "z_1"] & \\
& S_1 &
\end{tikzcd}$$

où $s_1 = m_1^{-1} \circ r$. Alors s_1 se prolonge en $s : Y \longrightarrow X$ avec $z \circ s = z'$ et de même $w \circ s = w'$. $\square$

REMARQUE 6.2. Soit $f \in \mathbb{C}[Z,W]$ un polynôme irréductible et soit $F(Z,W,T)$ le polynôme homogène correspondant. On note C la partie du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par l'équation $F = 0$. Si X est une surface de Riemann compacte telle que

$$M(X) = \mathbb{C}(z,w), \quad f(z,w) = 0$$

on a un morphisme de variétés analytiques

$$\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

qui à $x \in X$ associe $(z(x), w(x), 1)$ si x n'est un pôle ni de z ni de w et, sinon, $(\lambda(x)z(x), \lambda(x)w(x), \lambda(x))$ où λ est holomorphe au voisinage de x et telle que $\lambda(x)z(x)$ et $\lambda(x)w(x)$ soient finis. On déduit des résultats qui précèdent que $\pi(X) = C$ et que, si C_0 est l'ensemble des points réguliers de C et si $X_0 = \pi^{-1}(C_0)$, alors $\pi : X_0 \longrightarrow C_0$ est un isomorphisme, les ensembles $X - X_0$ et $C - C_0$ étant évidemment finis. De plus, si X' est une surface de Riemann compacte et si $\pi' : X' \longrightarrow C$ est un morphisme tel que la restriction de π' à $X'_0 = \pi'^{-1}(C_0)$ induise un isomorphisme $\pi'_0 : X'_0 \xrightarrow{\sim} C_0$, alors il existe un unique isomorphisme de surface de Riemann $\alpha : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $\pi' \circ \alpha = \pi$. On montre alors que X est *la normalisée* de C. En effet, cette dernière est une courbe algébrique non singulière et définit donc une surface de Riemann $\widehat{C}$. Il est aisé de montrer que celle-ci est compacte ([**13**], [**14**]) et elle est connexe car C l'est. On a un morphisme $M(X) \xrightarrow{\sim} R(C) \to M(\widehat{C})$, où $R(C)$ est le corps des fractions rationelles sur C. C'est un isomorphisme car $M(\widehat{C})$ et $R(C)$ ont même degré sur $\mathbb{C}(z)$. D'où un morphisme en sens inverse $\alpha : \widehat{C} \longrightarrow X$ qui ne peut être qu'un isomorphisme et qui, par construction, satisfait à $\widehat{\pi} = \pi \circ \alpha$.

En conclusion, on sait que la catégorie des courbes algébriques irréductibles, complètes et non singulières est équivalente à l'opposée de celle des corps des fonctions d'une variable, donc aussi à celle des surfaces de Riemann compactes et connexes.

Si l'on veut employer le langage des schémas ([**13**], [**14**]), on peut décrire comme suit la courbe algébrique X_{al} définie par une surface de Riemann compacte et connexe X :
- l'ensemble sous-jacent est $X \sqcup \{\eta\} = X'$;
- les parties fermées sont $X', \emptyset$ et les parties finies de X, donc η appartient à tout les ouverts non vides ;
- les sections sur un ouvert non vide U du faisceau structural sont les fonctions méromorphes sur X qui sont holomorphes sur $X \cap U$.

7. Quelques exemples de surfaces de Riemann compactes

7.1. Courbes elliptiques. Soit Γ un sous-groupe additif de $\mathbb{P}$ engendré par une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe une unique structure de surface de Riemann sur $E = \mathbb{P}/\Gamma$ telle que la projection $p : \mathbb{P} \longrightarrow E$ soit un morphisme. Le lecteur prouvera l'énoncé plus général que voici.

PROPOSITION 7.1. *X étant une surface de Riemann, soit $p : X \longrightarrow Y$ un revêtement étale galoisien de groupe Γ tel que tout $\gamma \in \Gamma$ soit un morphisme de surfaces de Riemann. Alors il existe une unique structure de surface de Riemann sur Y telle que p soit un morphisme.*

On fabrique donc ainsi une surface de Riemann compacte et connexe E. Cherchons les fonctions méromorphes sur E n'ayant de pôle qu'en $p(0)$.

En composant par p, on est amené à chercher les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}$ n'ayant de pôle qu'à l'origine et telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\wp(z+\gamma) = \wp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{P}$.

On met en evidence la fonction $\wp$ de Weierstrass ([**4**, V,2,5])

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \Big(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\Big)$$

invariante par translation par Γ et ayant un pôle double à l'origine, puis sa dérivée

$$\wp'(z) = -2\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^3}$$

méromorphe, invariante par translation par Γ. $\wp$ ayant un pôle double à l'origine est un revêtement de degré 2 de $\mathbb{S}$ et donc $M(E)$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{C}(\wp)$. Mais $\wp'$ a un pôle triple à l'origine, donc ne s'exprime pas rationellement en fonction de $\wp$, donc

$$M(E) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$$

Par ailleurs, on connaît l'équation du second degré à laquelle satisfait $\wp'$; c'est

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

où

$$g_2 = 60G_2 \quad g_3 = 140G_3$$
$$G_i = \sum_{\substack{\omega\in\Gamma\\ \omega\neq 0}} \frac{1}{\omega^{2i}} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

on note alors que le nombre

$$j(\Gamma) = \frac{1728g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

ne dépend que de la classe à isomorphisme près de la surface de Riemann E.

7.2. Fonctions automorphes. Soit $\Gamma(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ le réseau associé à tout $\tau \in \mathbb{H}$, d'où une fonction

$$j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{P}\,,\ j(\tau) = j(\Gamma(\tau))$$

On démontre ([**8**, I.,p.270]) que j est un revêtement éventuellement ramifié *infini de* $\mathbb{P}$ qui est galoisien de groupe (dit *modulaire*)

$$G = SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$$

où la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ opère sur $\mathbb{H}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Soit G' un sous-groupe d'indice fini de G. [Par exemple G' est l'ensemble des classes des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ telles que $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ modulo N , $N \in \mathbb{N}$]. Alors $X = \mathbb{H}/G'$ est un revêtement *fini* $p : X \longrightarrow \mathbb{P}$, de degré $(G : G')$, qui, comme j, n'est ramifié qu'au-dessus des point 0 et 1728. Il se prolonge donc en un revêtement $\overline{p} : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{S}$, d'où une surface de Riemann compacte et connexe $\overline{X}$. Une fonction méromorphe $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ induit une fonction méromorphe F sur X donc une fonction méromorphe f sur $\mathbb{H}$ qui est invariante par G', c'est-à-dire telle que $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = f(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in G'$. La condition que $\overline{F}$ elle–même est méromorphe, s'exprime grâce au développement en série de Laurent de F au voisinage des points $x \in \overline{X}$ tels que $p(x) = \infty$, lequel est lié au développement en *série de Fourier* de f. Pour définir ce dernier, on notera qu'il existe un entier n tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in G'$ car G' est d'indice fini dans G ; donc que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, la fonction $x \mapsto f(x+iy)$ est périodique de période n. Pour plus de détails, voir [**8**]. De telles fonctions s'appellent des *fonctions automorphes*. On notera que, aussi bien dans le cas des courbes elliptiques $E = \mathbb{C}/\Gamma$ que dans le cas des courbes $X = \mathbb{H}/G'$, on a des procédés explicites permettant de construire des fonctions méromorphes, et l'axiome 6.2 est donc vérifié a priori.

CHAPITRE 2

Cohomologie des faisceaux cohérents

1. Exemples de faisceaux

Soit X une surface de Riemann.

Exemple 1.1. *Les fonctions holomorphes sur* X *forment un faisceau d'anneaux noté* $\mathcal{O}_X$ car, pour une fonction, la condition d'être holomorphe est locale.

Définition 1.1. *Un faisceau de modules sur* $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{E}$ sur X tel que, de plus: pour tout ouvert U de X, le groupe $\mathcal{E}(U)$ soit muni d'une structure de module sur $\mathcal{O}_X(U)$ telle que pour tout couple $V \subset U$, l'application $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(V)$ soit $\mathcal{O}_X(U)$–linéaire.

Exemple 1.2. $\mathcal{O}_X^n$, défini par $\mathcal{O}_X^n(U) = [\mathcal{O}_X(U)]^n$ est un faisceau de modules sur $\mathcal{O}_X$. De plus, $\mathcal{O}_X^n$ est *libre de rang* n *sur* $\mathcal{O}_X$. Ceci signifie qu'il existe n morphismes de faisceaux $\sigma_i : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^n$, $\sigma_i(f) = (0, \ldots, 0, f, 0, \ldots, 0) \in [\mathcal{O}_X(U)]^n$ pour $f \in \mathcal{O}_X(U)$, et que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{E}) \longrightarrow [\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E})]^n$$

$\phi \mapsto (\phi \circ \sigma_1, \ldots, \phi \circ \sigma_n)$ est un isomorphisme.

Définition 1.2. On appelle *diviseur* sur X une fonction $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ dont le support est discret et fermé.

Exemple 1.3. Notons $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau défini par

$$\boxed{\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f : U \to \mathbb{S} \mid \forall x \in U \ v_x(f) \geq -D(x)\}}$$

Lemme 1.1. $\mathcal{O}_X(D)$ *est un faisceau de* $\mathcal{O}_X$*–modules, qui est localement libre de rang* 1*, autrement dit: pour tout* $x \in X$*, il existe un voisinage ouvert* U_x *de* x *dans* X *et un isomorphisme de faisceaux de* $\mathcal{O}_X$*–modules:* $\mathcal{O}_X|U_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D)|U_x$.

Démonstration. Ceci se vérifie trivialement pour $x \notin \operatorname{supp} D$ en choisissant U_x tel que $U_x \cap \operatorname{supp} D = \emptyset$: alors $\mathcal{O}_X(D)|U_x = \mathcal{O}_X|U_x$, et pour $x \in \operatorname{supp} D$ en choisissant une carte (U_x, z_x) telle que $\operatorname{supp} D \cap U_x = \{x\}$: alors $\mathcal{O}_X(D)|U_x = z_x^{-D(x)} \cdot (\mathcal{O}_X|U_x)$. Donc si $x \notin \operatorname{supp} D$, $\mathcal{O}_X(D)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ et si $x \in \operatorname{supp} D$, $\mathcal{O}_X(D)_x = \mathfrak{m}_{X,x}^{-D(x)}$. □

Dire que $\mathcal{O}_X(D)$ *est libre de rang* 1, c'est dire qu'il existe un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$–modules entre $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_X(D)$, donc qu'il existe $f \in M(X)$ telle que pour tout $x \in X$, $v_x(f) = -D(x)$. Si X est *compacte*, cela n'est possible que si $\sum_{x \in X} D(x) = 0$. *Il existe donc des* $\mathcal{O}_X$*–modules localement libres qui ne sont pas libres.*

Si $D \geq 0$, i.e. $D(x) \geq 0$ pour tout x, alors $\mathcal{O}_X(-D)$ est un sous-module de $\mathcal{O}_X$, autrement dit un faisceau d'idéaux. Notons $\mathcal{O}_D$ le faisceau quotient de $\mathcal{O}_X$ par $\mathcal{O}_X(-D)$; on a donc la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \to 0 \tag{1}$$

$\mathcal{O}_D$ étant le faisceau associé au préfaisceau quotient $\mathcal{O}'_D$, qui est un préfaisceau de modules sur $\mathcal{O}_X$ et est défini, pour tout ouvert U de X, par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D)(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}'_D(U) \to 0$$

est *un faisceau de modules sur* $\mathcal{O}_X$.

Pour tout $x \notin \operatorname{supp} D$, puisque $\mathcal{O}_X(-D)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ et en vertu (1), $\mathcal{O}_{D,x} = 0$. Et en tout point $x \in \operatorname{supp} D$, puisque $\mathcal{O}_X(-D)_x = \mathfrak{m}_{X,x}^{D(x)}$ et en vertu de (1), la fibre $\mathcal{O}_{D,x}$ est un espace vectoriel de dimension $D(x)$ sur $\mathbb{C}$ admettant pour base $\tilde{1}, \tilde{z}, \ldots, \tilde{z}^{D(x)-1}$ où $\tilde{z}$ est une uniformisante locale en x.

Ainsi $\mathcal{O}_D$ *est un faisceau dont toutes les fibres sont nulles sauf celles relatives aux points de l'ensemble discret* $\operatorname{supp} D$.

2. Faisceaux cohérents

Définition 2.1. Un faisceau $\mathcal{E}$ de modules sur $\mathcal{O}_X$, [appelé *faisceau de* $\mathcal{O}_X$*–modules*, ou même $\mathcal{O}_X$*–module*], est dit :

(1) *localement de type fini* si, pour tout point $x \in X$, il existe un ouvert U contenant x et un épimorphisme de faisceaux
$$u : \mathcal{O}_X^n|U \longrightarrow \mathcal{E}|U$$
(2) *cohérent* s'il est localement de type fini et si pour tout ouvert U de X et tout morphisme de $\mathcal{O}_X$–modules
$$u : \mathcal{O}_X^n|U \longrightarrow \mathcal{E}|U$$
le noyau de u, qui est un $\mathcal{O}_X$–module, est localement de type fini.

(3) *localement libre de type fini* si, pour tout point $x \in X$, il existe un ouvert U contenant x et un isomorphisme de faisceaux
$$u : \mathcal{O}_X^n|U \longrightarrow \mathcal{E}|U$$
(4) *inversible* s'il est localement libre de rang 1.

Proposition 2.1. *Pour tout entier $n \geq 0$, le faisceau $\mathcal{O}_X^n$ est cohérent.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{O}_X^n$ est localement de type fini. On peut supposer : $X = U$. Traitons le cas $n = 1$. Soit un morphisme $L : \mathcal{O}_X^a \to \mathcal{O}_X$, $L(f_1, \ldots, f_a) = \sum_{i=1}^a \lambda_i \cdot f_i$ où $\lambda_i \in \mathcal{O}_X(X)$ pour tout i. Soit $\mathcal{I}$ le noyau de L, défini par

$$\mathcal{I}(V) = \{(f_1 \ldots, f_a) \in \mathcal{O}_X(V)^a \mid (\lambda_1|V)f_1 + (\lambda_2|V)f_2 + \cdots + (\lambda_a|V)f_a = 0\}$$

Soit $x \in X$ et soit (V, z) une carte locale centrée en x. Si tout les λ_i sont nuls, alors $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X^a$. Sinon, on peut supposer que $v_x(\lambda_1) \leq v_x(\lambda_i)$ donc $\lambda_i = z^e \cdot \mu_i$, avec $\mu_1(x) \neq 0$ et alors, quitte à restreindre V, μ_1 est inversible et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X^{a-1}|V &\longrightarrow \mathcal{I}|V \\ (f_2, \ldots, f_a) &\longmapsto (\phi, f_2, \ldots, f_a) \end{aligned}$$

est un isomorphisme où

$$\phi = -(\mu_2 f_2 + \cdots + \mu_a f_a)/\mu_1$$

Remarquons qu'on a montré de plus que: *Le noyau de tout morphisme non nul $L : \mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est localement libre de rang* $(a-1)$. On achève de prouver la proposition 2.1 grâce au corollaire 2.2 suivant. □

Corollaire 2.2. *Le noyau de tout morphisme de $\mathcal{O}_X$–modules, $L : \mathcal{O}_X^a \to \mathcal{O}_X^b$ est localement libre de rang $\geq a - b$.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence sur b, le cas $b = 1$ ayant été traité et soit

$$L' : \mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X^{b-1} \ , \ L' = pL$$

où $p : \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{O}_X^{b-1}$ est la projection sur les $(b-1)$ premiers facteurs.

Quitte à restreindre X, le noyau $\mathcal{I}$ de L' est libre de rang $\geq a+1-b$ et le noyau de L est le noyau de $L'' : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X \ , \ L'' = q \circ L$, où $q : \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est la projection sur le dernier facteur. □

COROLLAIRE 2.3. *Soit X une surface de Riemann. Un sous–$\mathcal{O}_X$–module localement de type fini $\mathcal{I}$ d'un $\mathcal{O}_X$–module localement libre de type fini $\mathcal{E}$ est localement libre de type fini.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ et soit V un voisinage de x sur lequel $\mathcal{E}$ est libre. Alors la fibre $\mathcal{I}_x$ de $\mathcal{I}$ est libre de type fini car $\mathcal{E}_x$ est libre de type fini et $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. Quitte à diminuer V, il existe $e_1, \ldots, e_a \in \mathcal{I}(V)$ dont les germes en x forment une base de $\mathcal{I}_x$, d'où un morphisme

$$u : \mathcal{O}_X^a|V \longrightarrow \mathcal{I}|V$$

Montrons que u est un isomorphisme sur un voisinage ouvert de x. Le noyau $\mathcal{K}$ de u est aussi le noyau du morphisme $\mathcal{O}_X^a|V \longrightarrow \mathcal{E}|V$ donc il est localement libre de type fini. La fibre $\mathcal{K}_x$ est nulle, donc le rang de $\mathcal{K}_{x'}$ est zéro pour tout point x' d'un voisinage connexe quelconque de x. Donc u est un monomorphisme sur un voisinage ouvert de x. On achève la démonstration en invoquant le lemme suivant. □

LEMME 2.4. *Soit $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$–module localement de type fini et soit $r : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$–modules. Si le morphisme $r_x : \mathcal{J}_x \longrightarrow \mathcal{I}_x$ est surjectif en un point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $r|V$ soit un épimorphisme.*

DÉMONSTRATION. Il existe un voisinage ouvert V de x et un épimorphisme $p : \mathcal{O}_X^a|V \to \mathcal{I}|V$. Quitte à diminuer V, il existe un morphisme $s : \mathcal{O}_X^a|V \to \mathcal{J}|V$ tel que $r \circ s = p$, (car r_x est un épimorphisme) d'où la conclusion. □

COROLLAIRE 2.5. *Pour tout $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$, il existe localement une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{E} \to 0$$

DÉMONSTRATION. En effet, puisque $\mathcal{E}$ est localement de type fini, il existe localement un épimorphisme $\mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{E}$, son noyau est localement de type fini car $\mathcal{E}$ est cohérent, donc localement libre d'après le corollaire 2.3. □

THÉORÈME 2.6. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$–module cohérent. Il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_X$–modules cohérents:*

$$0 \to \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_\ell \to 0$$

avec les propriétés :

(1) *le support S de $\mathcal{E}_t$, $S = \{x \in X \mid \mathcal{E}_{t,x} \neq 0\}$, est discret et fermé ;*
(2) *$\mathcal{E}_\ell$ est localement libre de type fini.*
(3) *Pour tout ouvert U de X, $\mathcal{E}_t(U)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(U)$ tels qu'il existe : un recouvrement de U par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$, et pour tout i, un élément non nul g_i de $\mathcal{O}_X(U_i)$ réalisant $g_i \cdot (f|U_i) = 0$.*

DÉMONSTRATION. (a) *$\mathcal{E}_t$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{E}$* ; car, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{E}_t(U)$ est un sous-module de $\mathcal{E}(U)$ et de plus pour tout $f \in \mathcal{E}_t(U)$, pour tout ouvert $V \subset U$, la restriction de f à V appartient à $\mathcal{E}_t(V)$.

De plus, $\mathcal{E}_t$ est un faisceau. En effet, soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement d'un ouvert U de X, et pour tout α, soit $f_\alpha \in \mathcal{E}_t(U_\alpha)$ tel que $f_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta = f_\beta|U_\alpha \cap U_\beta$ pour tout couple (α, β). Puisque $\mathcal{E}_t(V) \subset \mathcal{E}(V)$, quel que soit V, ouvert de X, et que $\mathcal{E}$ est un faisceau, il existe $f \in \mathcal{E}(U)$ tel que $f|U_\alpha = f_\alpha$ pour tout α. Mais $f_\alpha \in \mathcal{E}_t(U_\alpha)$; donc il existe un recouvrement $(U_{\alpha,i})$ de U_α et $g_{\alpha,i} \neq 0$ dans $\mathcal{O}_X(U_{\alpha,i})$ tels que

$$g_{\alpha,i} \cdot (f_\alpha|U_{\alpha,i}) = 0$$

c'est-à-dire $g_{\alpha,i} \cdot (f|U_{\alpha,i}) = 0$ pour tout α et pour tout i. Donc $f \in \mathcal{E}_t(U)$.

(b) Remarquons que la définition de $\mathcal{E}_t$ et de $\mathcal{E}_\ell$ est *locale*, autrement dit, pour tout ouvert U de X, $(\mathcal{E}|U)_t = \mathcal{E}_t|U$; il en est de même des conclusions du théorème.

Ce qui permet, d'après le corollaire 2.5, de supposer que l'on a une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_X^a \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^b \xrightarrow{v} \mathcal{E} \to 0$$

Soit $x \in X$; on en déduit une suite exacte de modules de type fini sur l'anneau principal $\mathcal{O}_{X,x}$:

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x}^a \xrightarrow{u_x} \mathcal{O}_{X,x}^b \xrightarrow{v_x} \mathcal{E}_x \to 0$$

Nous allons opérer, à l'aide d'un changement de base dans $\mathcal{O}_{X,x}^a$ et $\mathcal{O}_{X,x}^b$, *un changement de base dans les faisceaux permettant de simplifier le morphisme u.*

Le morphisme u_x est représenté par une matrice $a \times b$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit z une carte centrée en x et $\widetilde{z}$ son germe en x. En vertu du théorème des diviseurs élémentaires, il existe une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_b)$ de $\mathcal{O}_{X,x}^b$ et des entiers $(e_1, \ldots, e_a)$ tels que $(\widetilde{z}^{e_1} \cdot \varepsilon_1, \ldots \widetilde{z}^{e_a} \cdot \varepsilon_a)$ soit une base de $u_x(\mathcal{O}_{X,x}^a)$.

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, b\}$ il existe un voisinage ouvert U_i de x et une section s_i de $\mathcal{O}_X^b$ sur U_i dont ε_i soit le germe. Remplaçons X par $\bigcap_{i=1}^b U_i$. Les $(s_i)_i$ définissent un homomorphisme $g : \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{O}_X^b$ de matrice G, dont le germe $\gamma : \mathcal{O}_{X,x}^b \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}^b$, de matrice Γ, défini par les $(\varepsilon_i)_i$ est un isomorphisme. Soit G' la matrice adjointe de G, on a

$$G \cdot G' = G' \cdot G = \det G \cdot I_b$$

et le germe $\widetilde{\det G} = \det \Gamma$. Donc dans un voisinage de x auquel on réduit X, G est inversible et g définit un isomorphisme. De la même manière, quitte à restreindre X, on définit un isomorphisme $f : \mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X^a$; et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X^a \arrow[r, "u"] & \mathcal{O}_X^b \\ \mathcal{O}_X^a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "D"] & \mathcal{O}_X^b \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

définit *un morphisme* D de matrice $b \times a$:

$$D = \begin{pmatrix} z^{e_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z^{e_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & z^{e_a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit D_0 la matrice carrée $a \times a$ supérieure extraite de D. On a alors un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K} \arrow[d] \arrow[dddlll, rounded corners, bend left] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^a \arrow[r, "D_0"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X^a \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^a \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^b \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^{b-a} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

où

- $\mathcal{E}' = \operatorname{Coker} D_0$
- $i : \mathcal{O}_X^a \to \mathcal{O}_X^b$, $i(x_1, \dots, x_a) = (x_1, \dots, x_a, 0, \dots, 0)$
- $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \alpha$
- $p : \mathcal{O}_X^b \to \mathcal{O}_X^{b-a}$ est la projection sur les $(b-a)$ dernières composantes
- $\mathcal{E}'' = \operatorname{Coker} \alpha$

et où le lemme du serpent s'applique et donc $\mathcal{O}_X^{b-a} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$ est un isomorphisme et $\mathcal{K} = 0$.

On a donc fabriqué une suite exacte

$$\boxed{0 \to \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \to 0}$$

avec $\mathcal{O}_X^{b-a}$ isomorphe à $\mathcal{E}''$.

(c) Montrons que $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_t$. La fibre $\mathcal{E}'_x$ est le conoyau du morphisme de matrice D_0, donc $\mathcal{E}'_x = \bigoplus_{1 \le i \le a} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^{e_i}$ où chaque terme est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension e_i. Pour tout $y \neq x$, $\mathcal{E}'_y = 0$ car le germe de z est une unité de $\mathcal{O}_{X,y}$.

Donc $\mathcal{E}'$ est un faisceau à support discret, concentré en x et sa fibre est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie.

D'autre part $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_t$ car pour un ouvert U de X, pour tout $g \in \mathcal{E}'(U)$, on a $z^{e_1 + \cdots + e_a} \cdot g = 0$. Et $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}_t$. En effet, soit $f \in \mathcal{E}_t(U)$ où U est recouvert par des ouverts U_i et soit pour tout $i, g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tel que $g_i \cdot (f|U_i) = 0$. Soit f'' l'image de f dans $\mathcal{E}''$ par le morphisme β du diagramme. On a $g_i \cdot (f''|U_i) = 0$, donc $f''|U_i = 0$ car $\mathcal{E}''$ est localement libre. Donc $f'' = 0$ et donc $f \in \mathcal{E}'(U)$. Ceci achève la démonstration du théorème. □

DÉFINITION 2.2. Un $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$ est dit *de torsion* si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_t$.

PROPOSITION 2.7. *Pour qu'un $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$ soit de torsion, il faut et il suffit que son support soit discret.*

Pour qu'un $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$ soit localement libre, il faut et il suffit qu'il soit sans torsion.

Un $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$ est localement libre en dehors d'un ensemble discret.

Remarque 2.1. D'après le corollaire 2.3, un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ non nul localement de type fini $\mathcal{I}$ est localement libre de rang 1.

Si $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux localement de type fini, alors il est localement libre d'après le corollaire 2.3 et son rang ne peut être que 0 ou 1. Si c'est 1, alors $\mathcal{T} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est de torsion. En effet, la suite exacte $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{T} \to 0$ s'écrit localement $0 \to \mathcal{O}_V \xrightarrow{u} \mathcal{O}_V \to \mathcal{T}|V \to 0$, où $u(g) = f \cdot g$, $f \in \mathcal{O}_X(V)$. Pour $x \in V$, le rang de $\mathcal{T}_x$ sur $\mathbb{C}$ est $v_x(f)$. Il est alors immédiat que la fonction $D(x) =$ rang sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{T}_x$ est un diviseur positif et que $\mathcal{I}$ est égal à $\mathcal{O}_X(-D)$.

Proposition 2.8. *Si* $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*–modules dont deux sont cohérents, le troisième est cohérent.*

Démonstration. a. *Supposons* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *cohérents.* Puisque $\mathcal{F}$ est localement de type fini, $\mathcal{G}$ est localement de type fini. Soit alors $(g_1, \ldots, g_a)$ un nombre fini de sections de $\mathcal{G}$ sur un voisinage U d'un point $x \in X$. Quitte à diminuer le voisinage, on peut supposer qu'il existe des sections $(f_1, \ldots, f_a)$ de $\mathcal{F}$ telles que $g_i = v(f_i)$. Une relation entre les g_i s'écrit

$$\sum_{i=1}^{a} c_i \cdot g_i = 0 \quad \text{où } (c_1, \ldots, c_a) \in \mathcal{O}_X^a(V) \text{ et où } V \subset U$$

donc

$$\sum_{i=1}^{a} c_i \cdot f_i \in u(\mathcal{E})(V)$$

Mais $\mathcal{E}$ est localement de type fini, donc engendré localement par des sections $(e_1, \ldots, e_b)$. Quitte à diminuer U, on a

$$\sum_{i=1}^{a} c_i \cdot f_i - \sum_{j=1}^{b} d_j \cdot u(e_j) = 0$$

Mais, $\mathcal{F}$ étant cohérent, le module des relations entre les sections $(f_1, \ldots, f_a, u(e_1), \ldots, u(e_b))$ de $\mathcal{F}$ est de type fini ; donc celui des relations entre les g_i également.

b. *Supposons* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *cohérents.* On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^a \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathcal{G}$ étant cohérent, $\mathcal{K}$ est localement de type fini, donc $\mathcal{E}$ aussi. De plus le module des relations entre sections de $\mathcal{E}$ est celui des relations entre sections de $\mathcal{E}$ considérées comme sections de $\mathcal{F}$, donc localement de type fini.

c. *Supposons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ cohérents.* On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathcal{O}_X^{a+b} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{O}_X^b \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, dashed, "\overline{\gamma}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{O}_X^a \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E}$ est un épimorphisme dont le noyau $\mathcal{I}$ est localement de type fini car $\mathcal{E}$ est cohérent. Où $\mathcal{O}_X^b \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}$ de même avec $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\gamma$ localement de type fini.

Soient $(g_1, \dots, g_b)$ les sections de $\mathcal{G}$ définissant γ. Soient $(f_1, \dots, f_b)$ des sections de $\mathcal{F}$ relevant $(g_1, \dots, g_b)$ localement et soit $\overline{\gamma}$ l'homomorphisme associé aux f_i. Soit p la projection canonique $\mathcal{O}_X^{a+b} \to \mathcal{O}_X^b$, i l'injection canonique $\mathcal{O}_X^a \to \mathcal{O}_X^{a+b}$; soit $\phi : \mathcal{O}_X^{a+b} \to \mathcal{F}$ le morphisme rendant le diagramme commutatif. Soit $\mathcal{J} = \operatorname{Ker}\phi$. Alors la suite $0 \to \mathcal{O}_X^a \to \mathcal{O}_X^{a+b} \to \mathcal{O}_X^b \to 0$ est exacte ; ϕ est un épimorphisme, de sorte que $\mathcal{F}$ est localement de type fini. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ étant cohérents, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{K}$ sont localement libres de type fini (cor. 2.3). La suite $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{J} \to \mathcal{K} \to 0$ étant exacte, on a localement $\mathcal{J} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{K}$. Donc, $\mathcal{J}$ est localement libre, donc cohérent. D'après le cas (a), $\mathcal{F}$ est donc cohérent. □

PROPOSITION 2.9. *Soit X une surface de Riemann, soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$–modules. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{E}$ est cohérent.*

(2) *Il existe localement une suite exacte*

$$\mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{E} \to 0$$

(3) *Il existe localement une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{O}_X^a \longrightarrow \mathcal{O}_X^b \longrightarrow \mathcal{E} \to 0$$

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) en vertu du corollaire 2.3.

(3) $\Rightarrow$ (1) en vertu de la proposition 2.8. □

3. Cohomologie des faisceaux cohérents

PROPOSITION 3.1. *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$–modules, les $H^i(X, \mathcal{E})$ sont des* modules *sur* $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X)$.

DÉMONSTRATION. Un élément f de $\mathcal{O}_X(X)$ définit une homothétie $h_f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, donc, pour tout i, un morphisme de groupes abéliens $H^i(X, h_f) : H^i(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{E})$, noté $\xi \mapsto f \cdot \xi$. La fonctorialité prouve que $f \cdot (g \cdot \xi) = (f \cdot g) \cdot \xi$. D'autre part $h_{f+g} = h_f + h_g$ et les foncteurs $H^i(X, \cdot)$ sont additifs, de sorte que

$$(f + g) \cdot \xi = f \cdot \xi + g \cdot \xi$$

$H^i(h_0) = H^i(0) = 0$ et $H^i(h_1) = H^i(id) = 1$. □

Il est clair que la structure de module ainsi définie sur $H^0(X, \mathcal{E}) = \mathcal{E}(X)$ est celle que l'on a par définition du mot "$\mathcal{O}_X$–module".

En particulier, lorsque X *est compacte et connexe*, l'application $\mathbb{C} \to \mathcal{O}_X(X)$ est un isomorphisme, de sorte que les $H^i(X, \mathcal{E})$ sont des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels.

PROPOSITION 3.2. *Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$–module cohérent et de torsion et si X est compacte, alors*

$$H^i(X, \mathcal{E}) = 0 \quad \textit{pour } i > 0$$

et $H^0(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_{x \in X} \mathcal{E}_x$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie. Pour un module inversible $\mathcal{L}$ on a $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, $\mathcal{E}$ est à support discret D. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert U de X, chaque U_i contenant au plus un point x_i de D. Alors $\mathcal{E}(U) = \{(f_i)_{i \in I} \mid f_i \in \mathcal{E}(U_i)\}$, car la condition $f_i | U_i \cap U_j = f_j | U_i \cap U_j$ est vérifiée pour tout $i \neq j$ puisque les deux restrictions sont nulles. Donc $\mathcal{E}(U) = \prod_{i \in I} \mathcal{E}(U_i)$. Mais ou bien $D \cap U_i = \{x\}$, alors $\mathcal{E}(U_i) = \mathcal{E}_x$, ou bien $D \cap U_i = \emptyset$ et $\mathcal{E}(U_i) = 0$. Donc $\mathcal{E}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{E}_x$. Les $\mathcal{E}_x$ étant des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels de dimension finie et en nombre fini car D est discret et fermé et X compact, l'espace $H^0(X, \mathcal{E}) = \mathcal{E}(X)$ est de dimension finie. $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ est toujours de torsion, donc $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}(U) = \prod_{x \in U} (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})_x = \prod_{x \in U} \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{E}_x \simeq \prod_{x \in U} \mathcal{E}_x = \mathcal{E}(U)$, comme $\mathcal{L}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ par hypothèse.

Pour démontrer la nullité de $H^i(X, \mathcal{E})$ pour $i > 0$, nous remarquerons qu'*un faisceau à support discret $\mathcal{E}$ est flasque* car pour tout ouvert U de X on a

$$\mathcal{E}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{E}_x$$

Sa cohomologie est donc nulle ([**2**, p.109,110] ou le lemme 6.2 de l'appendice).

En fait, ici, $\mathcal{E}_x$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, donc est divisible en tant que groupe abélien, donc injectif, d'où l'on déduit qu'*un faisceau cohérent de torsion* est même *injectif.* □

4. Théorème de Dolbeault et De Rham

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4.1. *Pour tout $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$, on a $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ pour $i \geq 2$.*

Or il suffit de prouver ce théorème pour un faisceau $\mathcal{E}$ localement libre. En effet, si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_\ell \to 0$$

donne naissance à la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(X, \mathcal{E}_t) \to H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{E}_\ell) \to 0 \to H^1(X, \mathcal{E}) \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{E}_\ell) \to 0 \to H^2(X, \mathcal{E}) \to H^2(X, \mathcal{E}_\ell) \to 0 \cdots$$

où $H^i(X, \mathcal{E}_t) = 0$, pour $i \geq 1$ par la proposition 3.2, et donc $H^i(X, \mathcal{E})$ est isomorphe à $H^i(X, \mathcal{E}_\ell)$ pour $i \geq 1$, $\mathcal{E}_\ell$ étant le faisceau localement libre quotient de $\mathcal{E}$.

Nous supposerons donc $\mathcal{E}$ *localement libre de type fini et cohérent.*

Démontrons le théorème 4.1.

LEMME 4.2. *Soit* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1 \to \cdots \to \mathcal{E}^n \to \ldots$ *une suite exacte de faisceaux de* $\mathcal{O}_X$*–modules tels que* $H^i(X, \mathcal{E}^j) = 0$ *pour tout* $j \geq 0$*, pour tout* $i > 0$*. Alors l'application "cobord itéré" induit un isomorphisme :* $H^q(E^*) \xrightarrow{\sim} H^q(X, \mathcal{E})$ *pour tout* q*, où* E^* *est le complexe*

$$\mathcal{E}^0(X) \to \mathcal{E}^1(X) \to \cdots \to \mathcal{E}^{n-1}(X) \to \mathcal{E}^n(X) \to \ldots$$

DÉMONSTRATION. Le lecteur trouvera une démonstration de cet énoncé dans le Guide sur la cohomologie des faisceaux au chapitre A section 6.2, théorème 6.1, page 82. □

Afin de calculer la cohomologie d'un faisceau $\mathcal{E}$ cohérent localement libre de type fini, nous allons construire une telle résolution de $\mathcal{E}$. Pour cela, introduisons des formes différentielles dont nous rappellerons d'abord quelques propriétés utiles.

Notons
- $\mathcal{E}_X$ *le faisceau* des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$
- $\mathcal{E}_X^1$ *le faisceau* des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de degré 1 sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$
- $\mathcal{E}_X^2$ *le faisceau* des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de degré 2 sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$

$\mathcal{E}_X$ est un faisceau d'anneaux, $\mathcal{E}_X^1$ et $\mathcal{E}_X^2$ sont des faisceaux de $\mathcal{E}_X$–modules ; on a les morphismes de faisceaux:

$$\mathcal{E}_X \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2$$

associant, pour tout $x \in X$, à tout germe d'une fonction f la différentielle de f en x, et à toute forme différentielle de degré 1 sa différentielle extérieure. Rappelons que pour tout ouvert U d'une variété différentielle X, pour toute forme $\omega \in \mathcal{E}_X^1(U)$, pour tout $x \in U$, le germe $\omega_x : T_xX \to \mathbb{C}$ est une forme $\mathbb{R}$–linéaire. Puisque X est une surface de Riemann, l'espace tangent T_xX est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Si ω_x est de plus $\mathbb{C}$–linéaire nous dirons que $\omega \in \mathcal{E}_X^{1,0}(U)$; si, pour tout $x \in U$, ω_x est "$\mathbb{C}$–antilinéaire", i.e. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\omega_x(\lambda t) = \bar{\lambda} \cdot \omega_x(t)$, nous dirons que $\omega \in \mathcal{E}_X^{0,1}(U)$. D'autre part, $\mathcal{E}_X^1$ est un faisceau de $\mathcal{E}_X$–modules *localement libre de rang* 2 puisque pour toute carte U de X, toute forme $\omega \in \mathcal{E}_X^1(U)$ s'écrit de manière unique:

$$\omega = Adx + Bdy \quad \text{où } A, B \in \mathcal{E}_X(U)$$

et donc $\mathcal{E}_X^1(U) = \mathcal{E}_X(U)dx \oplus \mathcal{E}_X(U)dy$.

LEMME 4.3. $\mathcal{E}_X^{1,0}$ *et* $\mathcal{E}_X^{0,1}$ *sont des faisceaux de* $\mathcal{E}_X$*–modules localement libres de rang* 1 *et*

$$\mathcal{E}_X^1 = \mathcal{E}_X^{1,0} \oplus \mathcal{E}_X^{0,1}$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que pour tout ouvert U de X, $\mathcal{E}_X^{1,0}(U)$ (resp. $\mathcal{E}_X^{0,1}(U)$) est un $\mathcal{E}_X(U)$–module et que $\mathcal{E}_X^{1,0}$ et $\mathcal{E}_X^{0,1}$ sont des sous–faisceaux de $\mathcal{E}_X^1$.

Soit (U, z) une carte holomorphe de X. Alors par définition d'une surface de Riemann $dz \in \mathcal{E}_X^{1,0}(U)$ et $d\bar{z} \in \mathcal{E}_X^{0,1}(U)$, et dz (resp. $d\bar{z}$) est une base de $\mathcal{E}_X^{1,0}(U)$ (resp. $\mathcal{E}_X^{0,1}(U)$) sur $\mathcal{E}_X(U)$. D'autre part, on a l'égalité $z = x + iy$ dans $\mathcal{E}_X(U)$. Donc $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. Comme (dx, dy) est une base de $\mathcal{E}_X^1(U)$ sur $\mathcal{E}_X(U)$, il en est de même de $(dz, d\bar{z})$.

Dans cette nouvelle base la différentielle d'une fonction $f \in \mathcal{E}_X(U)$ est de la forme: $df = Adz + Bd\bar{z}$ où $A, B \in \mathcal{E}_X(U)$. Posant $\frac{\partial f}{\partial z} = A$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = B$, on a

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z}} \tag{2}$$

et les formules de changement de base s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

□

Enfin, $\mathcal{E}_X^2$ est *localement libre de rang* 1 sur $\mathcal{E}_X$. En effet, pour toute carte (U, z) de X, où $z = x + iy$, $dx \wedge dy$ est une base de $\mathcal{E}_X^2(U)$ sur $\mathcal{E}_X(U)$ et l'on a

$$\frac{1}{2i}\left(d\bar z \wedge dz\right) = \frac{1}{2i}(dx - idy) \wedge (dx + idy)$$

$$\boxed{\frac{1}{2i}(d\bar z \wedge dz) = dx \wedge dy} \tag{4}$$

Pour plus de commodité, nous noterons l'application

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E}_X &\longrightarrow \mathcal{E}_X^{1,0} \oplus \mathcal{E}_X^{0,1}\\ df &= (d'f, d''f)\end{aligned}$$

où $d'f$ est $\mathbb{C}$–linéaire et $d''f$ est $\mathbb{C}$–antilinéaire. Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{E}_X(U)$ soit *holomorphe*, il faut et il suffit que sa différentielle soit $\mathbb{C}$–linéaire, ce qui s'écrit $df \in \mathcal{E}_X^{1,0}(U)$, ou encore $d''f = 0$.

Théorème 4.4. (Dolbeault) *La suite* $0 \to \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}_X \xrightarrow{d''} \mathcal{E}_X^{0,1} \to 0$ *est exacte.*

Démonstration. Il reste à montrer que d'' est un épimorphisme, ce qui se voit fibre par fibre et résulte du lemme 4.5 ci-dessous. □

On pose

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

Lemme 4.5. *Soit* $f \in \mathcal{E}_X(\mathbb{D})$*. Alors, pour tout* $r, 0 < r < 1$*, il existe* $g \in \mathcal{E}_X(\mathbb{P})$*, telle que* $\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = f(z)$ *pour* $z \in \mathbb{D}_r$*.*

Démonstration. Définissons f dans $\mathbb{P}$ en la remplaçant par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ égale à f sur $\mathbb{D}_r$ et nulle en dehors de $\mathbb{D}$.

Posons $g(z) = \frac{1}{2i\pi}\iint_{\mathbb{P}} f(z+\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}$. En coordonnées polaires $\zeta = \rho \cdot e^{i\theta}$, on a $\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta} = -2ie^{-i\theta}d\rho \wedge d\theta$, la fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2i\pi}\iint_{\mathbb{P}} \frac{\partial}{\partial \bar z} f(z+\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\iint_{|\zeta|\geq\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z+\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta}\\ &= \end{aligned}$$

ou encore, en posant $\omega = -f(z+\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar z} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\iint_{|\zeta|\geq\varepsilon} d\omega$$

Puisque $f(z) = 0$ pour $|z| > 1$, la formule de Stokes donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\iint_{|\zeta|\geq\varepsilon} d\omega &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} -f(z+\varepsilon e^{-i\theta})\frac{-i\varepsilon e^{-i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{-i\theta}}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{-i\theta})d\theta\end{aligned}$$

qui tend vers $f(z)$ quand $\varepsilon \to 0$ car f est continue. □

Démontrons tout de suite un corollaire utile:

COROLLAIRE 4.6. *Pour tout $f \in \mathcal{E}_X(\mathbb{D})$, il existe $g \in \mathcal{E}_X(\mathbb{D})$ tel que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$.*

Si pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{D}_n$ est le disque ouvert de rayon $1 - \frac{1}{n}$, en vertu du lemme 4.5, il existe $g_n \in \mathcal{E}_X(\mathbb{P})$ tel que $\frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} = f$ dans $\mathbb{D}_n$. Alors $d''(g_n - g_{n-1}) = 0$ et $(g_n - g_{n-1})$ est holomorphe dans $\mathbb{D}_{n-1}$.

LEMME 4.7. *Il existe une suite $h_n \in \mathcal{E}_X(\mathbb{P})$ telle que*

(1) $\frac{\partial h_n}{\partial \bar{z}} = f$ *dans* $\mathbb{D}_n$
(2) $h_n - h_{n-1}$ *est holomorphe dans* $\mathbb{D}_{n-1}$
(3) $|h_n - h_{n-1}| < 2^{-n}$ *dans* $\mathbb{D}_{n-2}$

DÉMONSTRATION. Construisons h_n par récurrence sur n et supposons que l'on a construit $h_1, \ldots, h_{n-1}$; d'après le lemme 4.5, il existe $g_n \in \mathcal{E}_X(\mathbb{P})$ telle que $\frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} = f$ dans $\mathbb{D}_n$, donc $\frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial \bar{z}} = 0$ dans $\mathbb{D}_{n-1}$, donc $g_n - h_{n-1}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}_{n-1}$; il existe donc un polynôme P_n tel que $g_n - h_{n-1} - P_n| < 2^{-n}$ dans $\mathbb{D}_{n-2}$. On pose $h_n = g_n - P_n$. Dans chaque $\mathbb{D}_N$, on pose $g = h_N + \lim_{n\geq N}(h_n - h_N)$, où la suite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}_N$, d'après (3). Donc $g - h_N$ est holomorphe d'après (2), donc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_N}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g - h_N) = f$. □

Pour un énoncé plus général, voir Gunning [**11**, p. 40–43].

COROLLAIRE 4.8. *Pour tout $\mathcal{O}_X$–module cohérent localement libre $\mathcal{F}$, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$–modules:*

$$0 \to \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X \xrightarrow{d''} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} \to 0$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que le produit tensoriel de deux faisceaux est le faisceau associé au préfaisceau qui, à chaque ouvert U de X, associe $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{E}_X(U)$. On a un morphisme bilinéaire $\sigma : \mathcal{F} \times \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ possédant la propriété universelle que voici: pour tout morphisme bilinéaire $b : \mathcal{F} \times \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_X$–module, il existe un unique $\mathcal{O}_X$–morphisme $\beta : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{G}$ tel que $\beta \circ \sigma = b$.

Alors on vérifie que $\mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \mathcal{F}^n$. De ce fait, en tensorisant la suite de Dolbeault par $\mathcal{F}$, on obtient une nouvelle suite exacte:

$$0 \to \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1} \to 0$$

En effet, $\mathcal{F}$ étant localement libre de type fini, localement, cette nouvelle suite s'écrit

$$0 \to \mathcal{O}_X^n \longrightarrow (\mathcal{E}_X)^n \xrightarrow{(d'')^n} (\mathcal{E}_X^{0,1})^n \to 0$$

qui est une suite exacte. □

Nous avons ainsi obtenu une résolution de $\mathcal{F}$. Admettons provisoirement, sous réserve d'une démonstration ultérieure (prop. 4.10), que pour tout $i > 0$, $H^i(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X) = 0$ et $H^i(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}) = 0$. Alors, la suite exacte de cohomologie associée à la résolution s'écrit:

$$\boxed{0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X)(X) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1})(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0} \tag{5}$$

ce qui décrit la cohomologie de $\mathcal{F}$.

De plus, on a le corollaire:

Corollaire 4.9. *$H^i(\mathbb{D}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Démonstration. Pour $i \geq 2$, cela est clair, pour $i = 1$ c'est le corollaire 4.6. □

Montrons à présent que les $\mathcal{E}_X$–modules $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X$ et $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1}$ *n'ont pas de cohomologie*. Pour cela, il suffit de prouver la proposition:

Proposition 4.10. *X étant une variété différentielle* paracompacte*, pour tout faisceau de $\mathcal{E}_X$–modules $\mathcal{F}$, on a*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \textit{pour tout } i > 0$$

Démonstration. Voir la proposition 7.1 de l'appendice, page 85. □

Théorème 4.11. (de De Rham) *Soit X une variété différentielle paracompacte de dimension n. Soit (E^*) le complexe des formes différentielles de X à valeurs réelles (resp. complexes):*

$$E^* : \mathcal{E}_X(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{E}_X^n(X)$$

Alors

$$H^i(E^*) \simeq H^i(X, \mathbb{R}_X) \ (\textit{resp. } H^i(X, \mathbb{C}_X))$$

où $\mathbb{R}_X$ (resp. $\mathbb{C}_X$) est le faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbb{R}$ (resp. $U \mapsto \mathbb{C}$).

Démonstration. Cela résulte du lemme 4.2 et de la proposition précédente. Voir aussi la section 7 de l'appendice, page 84. □

5. Théorème de finitude

Théorème 5.1. *Soit X une surface de Riemann compacte et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $H^i(X, \mathcal{F})$ $(i = 0, 1)$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie.*

Nous supposerons, comme en (4.1), $\mathcal{F}$ *localement libre* de type fini, *de rang a*.

Choisissons des recouvrements ouverts de X:
– $\mathfrak{U} = (U_i, z_i)_{i \in I}$ est un recouvrement *fini* de X par des ouverts de coordonnées dont l'image $z_i(U_i)$ est un disque du plan $\mathbb{P}$ pour tout $i \in I$ et tels que, de plus, on ait des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$–modules $\rho_i : \mathcal{F}|U_i \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U_i)^a$ pour tout $i \in I$.
– $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ et $\mathfrak{W} = (W_i)_{i \in I}$ sont des recouvrements ouverts de X ayant même ensemble d'indices I que $\mathfrak{U}$ et tels que, pour tout $i \in I$, on ait $W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$.

On construit facilement de tels recouvrements. Par exemple, pour obtenir $\mathfrak{V}$, il suffit de poser pour tout $i \in I$: $K_i = X - \bigcup_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} U_j$. Alors K_i est fermé dans X, donc compact et $K_i \subsetneqq U_i$; $K_i' = z_i(K_i)$ est un compact de $\mathbb{P}$, inclus dans le disque $U_i' = z_i(U_i)$. On pose alors $\delta = d(K_i', \mathbb{P} - U_i')$, puis $V_i' = \{x \in \mathbb{P} \mid d(x, \mathbb{P} - U_i') \geq \frac{\delta}{n}\}$ et $V_i = z_i^{-1}(V_i')$. Alors $K_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in I$. On voit tout de suite que, pour n assez grand, les V_i recouvrent X.

A tout ouvert de coordonnées (U, z) de X muni d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$–modules $\rho : \mathcal{F}|U \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U)^a$, associons *un espace de Hilbert* en posant

$$\boxed{\mathcal{F}_0(U) = \left\{ f \in \mathcal{F}(U) \mid \iint_U \|\rho(f)(z)\|^2 d\mu < \infty \right\}}$$

où $\rho(f) = ((\rho(f))_1, \ldots, (\rho(f))_a)$ est une suite de a fonctions holomorphes ; le produit scalaire est défini par $\langle f, g\rangle = \iint_U (\rho(f)|\rho(g))d\mu$, où $(\rho(f)|\rho(g)) = \sum_{i=1}^a (\rho(f))_i \overline{(\rho(g))_i}$. Il reste à prouver que l'espace $\mathcal{F}_0(U)$ est *complet.* Soit K un compact, $K \subset U$, soit $f \in \mathcal{F}_0(U)$, soit r la distance de K à la frontière de U. Soit $z_0 \in K$ et soit D le disque centré en z_0 et de rayon r ; alors $\mu(D)$ ne dépend que de K et l'on a d'après la formule de Cauchy

$$\rho(f)(z_0) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D \rho(f)(z) d\mu \tag{6}$$

d'où, en vertu de l'inégalité de Schwarz,

$$\|\rho(f)(z_0)\| = \frac{1}{\mu(D)} |\langle f, 1\rangle| \leq \frac{1}{\mu(D)} \|f\|_{\mathcal{F}_0(D)} \|1\|_{\mathcal{F}_0(D)}$$

donc

$$\|\rho(f)(z_0)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu(D)}} \|f\|_{\mathcal{F}_0(D)}\,,\ z_0 \in K \tag{7}$$

Ce qui prouve que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme de $\mathcal{F}_0(U)$, les f_n convergent *uniformément* sur tout compact K vers une fonction qui est nécessairement holomorphe et de carré sommable sur U car U est relativement compact.

Lemme 5.2. *Soient U et V des ouverts de X tels que $V \subset \overline{V} \subset U$. Alors l'application de restriction: $\mathcal{F}_0(U) \longrightarrow \mathcal{F}_0(V)$ est un* opérateur compact.

Démonstration. Pour démontrer que l'image, par cet opérateur, de la boule unité fermée est relativement compacte, il suffit de voir que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}_0(U)$ telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n, on peut extraire de la suite $(f_n|V)_n$ une sous–suite convergente dans $\mathcal{F}_0(V)$. Or puisque $V \subset \overline{V} \subset U$ et en vertu de (7), f_n étant uniformément bornée par 1 sur U pour tout n, est uniformément bornée sur $\overline{V}$ et donc aussi sur V. La famille $(f_n|V)_{n\in\mathbb{N}}$ est normale et l'on peut en extraire une sous–suite *uniformément convergente*, donc à fortiori convergente au sens de la norme de $\mathcal{F}_0(V)$. □

Posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$, $(i,j) \in I^2$ et $V_{ijk} = V_i \cap V_j \cap V_k$, $(i,j,k) \in I^3$, on a un complexe

$$\boxed{C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathfrak{V}, \mathcal{F})}$$

où

$$C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F}) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}_0(V_i)$$
$$C^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) = \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{F}_0(V_{ij})$$
$$C^2(\mathfrak{V},\mathcal{F}) = \prod_{(i,j,k)\in I^3} \mathcal{F}_0(V_{ijk})$$

sont des produits finis d'espaces de Hilbert, donc des espaces de Hilbert, et où, pour tout $f = (f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$

$$(\delta_0 f)_{ij} = f_j|V_{ij} - f_i|V_{ij}$$

et pour tout $g \in C^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$

$$(\delta_1 g)_{ijk} = g_{jk}|V_{ijk} - g_{ik}|V_{ijk} + g_{ij}|V_{ijk}$$

De plus, l'opérateur δ est continu (l'opérateur restriction est continu et une somme finie d'opérateurs continus est continue). On en déduit la suite exacte:

$$\boxed{0 \to Z^0(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to 0}$$

où $Z^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ est le noyau de δ_0, donc est fermé dans $C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$, donc est un espace de Hilbert, où $Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ est le noyau de δ_1, donc est également un espace de Hilbert et où $H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ est le $\mathbb{C}$–espace vectoriel conoyau de δ_1.

Lemme 5.3. *On a un diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
 & C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[dd, "r"] & C^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \arrow[dd, "r"] \\
H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "w"'] & & \\
 & C^0(\mathfrak{W},\mathcal{F}) \arrow[r, "\delta_0"] & C^1(\mathfrak{W},\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

où v et w sont des applications injectives.

Démonstration. En effet, l'opérateur de restriction r est *compact* (Lemme 5.2). D'autre part, on définit $v : H^0(X,\mathcal{F}) \to C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ par $v(f) = (f|V_i)_{i\in I}$. Cette définition a un sens puisque $f|U_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et que $z_i(V_i)$ est relativement compact dans $z_i(U_i)$, donc $f|V_i \in \mathcal{F}_0(V_i)$. Le diagramme ainsi défini est commutatif et, $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ étant des recouvrements ouverts de X, il est clair que v et w sont injectives. De plus, $H^0(X,\mathcal{F}) = \operatorname{Ker}\delta_0$ car $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X. Donc $H^0(X,\mathcal{F})$ est fermé dans $C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ et, pour la norme induite, est un *espace de Hilbert*. Puisque r est un opérateur compact, l'image par $r\circ v = w$ de la boule unité fermée de $H^0(X,\mathcal{F})$ pour la norme de $C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ est compacte pour la topologie induite par celle de $C^0(\mathfrak{W},\mathcal{F})$ qui est la même que la celle induite par la topologie de $C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ ([**18**, p. 75]). De ce fait, $H^0(X,\mathcal{F})$ est un espace de Hilbert *localement compact*, donc *un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie.* Montrons à présent que $H^1(X,\mathcal{F})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie. □

LEMME 5.4. *On an un diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd} & H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \arrow[dd, "r"] \\ H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "w"'] & \\ & H^1(\mathfrak{W},\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

où v et w sont des isomorphismes de $\mathbb{C}$–espaces vectoriels.

DÉMONSTRATION. Nous nous bornerons à définir v (le procédé étant le même pour w) ; on vérifiera alors aisément que $r \circ v = w$. On a les suites exactes (voir cor. 4.8):

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X) \xrightarrow{d''} H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \to 0 \tag{8}$$

la dernière par définition de $H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$. Définissons $\widetilde{v} : H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$, puis v par passage au quotient. Soit $\omega \in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1})$. Notons encore ρ_i l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$–modules: $(\mathcal{F}|U_i)\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_X^{0,1}|U_i) \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U_i)^a \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{E}_X^{0,1}|U_i) = (\mathcal{E}_X^{0,1}|U_i)^a$. Alors $\rho_i(\omega|U_i) = (\omega_1,\dots,\omega_a)$ est une suite de a formes différentielles de degré 1, "$\mathbb{C}$–antilinéaires" et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme $z_i(U_i)$ est un disque de $\mathbb{P}$, pour tout $\alpha \in \{1,\dots,a\}$ il existe (cor. 4.6) $f_{i\alpha} \in \mathcal{E}_X(U_i)$, avec $\omega_\alpha = d'' f_{i\alpha}$ et donc on a, pour tout $i \in I$,

$$\boxed{\rho_i(\omega|U_i) = d'' f_i, \quad \text{où } f_i \in (\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)(U_i)} \tag{9}$$

Posons alors $g_{ij} = f_j|U_{ij} - f_i|U_{ij}$. Il est clair que $d'' g_{ij} = 0$ pour tout $(i,j) \in I^2$, de sorte que $g_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$; de plus, $h_{ij} = g_{ij}|V_{ij} \in \mathcal{F}_0(V_{ij})$ et, si $h = (h_{ij})_{(i,j)\in I^2}$, alors $h \in Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ car on vérifie aisément que $\delta_1 h = 0$. Soit $[h]$ la classe de h dans $H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$. Nous poserons

$$\boxed{\widetilde{v}(\omega) = [h]} \tag{10}$$

On vérifie par la méthode classique que cette définition est indépendante du choix des f_i. Si $f \in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)$, si $\omega = d'' f$, alors $\widetilde{v}(\omega) = [f|V_{ij} - f|V_{ij}] = 0$. Donc $\widetilde{v} \circ d'' = 0$ et $\widetilde{v}$ induit une application $v : H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ par passage au quotient.

Montrons que v est *injective*. Soit $\omega \in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1})$ tel que $\widetilde{v}(\omega) = v([\omega]) = 0$, où $[\omega] \in H^1(X,\mathcal{F})$. En vertu de ce qui précède, on a, pour tout $i \in I$, $\omega|U_i = d'' f_i$ où $f_i \in (\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)(U_i)$ et $\widetilde{v}(\omega)$ est la classe dans $H^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ de h, où $h_{ij} = f_j|V_{ij} - f_i|V_{ij}$. Puisque, par hypothèse, $[h] = 0$, et en vertu de l'exactitude de la suite (10), il existe $b = (b_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{V},\mathcal{F})$, avec $h = \delta b$, ce qui signifie, en vertu de l'axiome de définition des faisceaux, qu'il existe $f \in (\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)(X)$ tel que $f|V_j = f_j - b_j$. Alors $d'' f|V_j = d'' f_j - d'' b_j = d'' f_j = \omega|V_j$ car b_j est holomorphe, pour tout $j \in I$. Donc $\omega = d'' f$ et $[\omega] = 0$.

Montrons que v est *surjective*, autrement dit qu'à tout cocycle $h = (h_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{V},\mathcal{F})$, on peut associer $\omega \in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1})$, tel que $\widetilde{v}(\omega) = [h]$. Soit $(\phi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathfrak{V}$, où $\phi_i \in \mathcal{E}_X(X)$, supp ϕ_i est un compact inclus dans V_i et $\sum_{i\in I}\phi_i = 1$. Posons $g_i = \sum_{k\in I}\phi_k \cdot h_{ki}$; $g_i \in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)$. Alors $g_j - g_i = \sum_{k\in I}\phi_k\cdot(h_{kj} - h_{ki}) = (\sum_{k\in I}\phi_k)\cdot h_{ij} = h_{ij} \in \mathcal{F}_0(V_{ij})$; en posant

$\omega_i = d''(g_i|V_i)$, on a: $\omega_i|V_{ij} = \omega_j|V_{ij}$ pour tout $(i,j) \in I^2$, ce qui définit un unique $\omega \in H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1})$ tel que $\omega|V_i = \omega_i$. Montrons que $\widetilde{v}(\omega) = [h]$. Il existe des $f_i \in (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1})(U_i)$ tels que $d''f_i = \omega|U_i$ et $\widetilde{v}(\omega)$ est la classe de h' où $h'_{ij} = f_j|V_{ij} - f_i|V_{ij}$. Par ailleurs, $k_i = f_i - g_i$ est continue sur U_i ; donc de carré sommable sur V_i et même holomorphe sur V_i car $d''k_i = d''f_i - d''g_i = 0$ dans V_i. Donc $h' - h = \delta_0(k)$, où $k = (k_i)_{i\in I}$, donc $[h] = \widetilde{v}(\omega)$. □

L'opérateur $\delta + r : C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) \oplus Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$, $(\delta+r)(x,y) = \delta x + ry$, est *surjectif* car $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{r} H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ est un isomorphisme. On a donc une application linéaire continue surjective $\delta + r$ et un opérateur compact r entre espaces de Hilbert. Alors (par Dieudonné [**7**, 11.3.2]) $\operatorname{Coker}((\delta+r)-r) = \operatorname{Coker}\delta = H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie.

Le théorème 5.1 permet de prouver ce que nous avions appelé l'axiome 6.2 au chapitre 1:

PROPOSITION 5.5. *X étant une surface de Riemann compacte et connexe, pour tout $x \in X$, il existe une fonction méromorphe non constante n'ayant de pôle qu'au point x.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{O}_X(nx)$ le faisceau qui, à un ouvert U de X, associe le module sur $\mathcal{O}_X(U)$ des fonctions f méromorphes sur U dont la seule singularité soit éventuellement un pôle en x d'ordre inférieur ou égal à n, c'est-à-dire telles que $v_x(f) \geq -n$, $v_y(f) \geq 0$ pour tout $y \neq x$. En vertu du lemme 1.1, $\mathcal{O}_X(nx)$ est localement libre de rang 1. Le choix d'un système de cartes locales : $(U_i, z_i)_{i\in I}$ où $(U_i)_{i\in I}$ constitue un recouvrement ouvert de X, où (U_0, z_0) est centrée en x et où $x \notin U_i$ pour tout $i \neq 0$, donne une base des modules $\mathcal{O}_X(nx)(U_i)$ pour tout i :

$$\begin{cases} z_0^{-n} & \text{est une base de } \mathcal{O}_X(nx)|U_0 \\ 1 & \text{est une base de } \mathcal{O}_X(nx)|U_i \text{ pour tout } i \neq 0 \end{cases} \tag{11}$$

Rappelons (th. 4.1 et th. 5.1) que $H^i(X, \mathcal{O}_X(nx)) = 0$ pour $i \geq 2$ et que $H^i(X, \mathcal{O}_X(nx))$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie pour $i = 0$ et $i = 1$. De façon générale, on pose la

DÉFINITION 5.1. $\mathcal{F}$ étant un module *cohérent*, on appelle caractéristique d'Euler–Poincaré de $\mathcal{F}$, l'entier :

$$\boxed{\chi(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{F}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F})}$$

LEMME 5.6. *Pour toute suite exacte de $\mathcal{O}_X$–modules cohérents*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

on a la relation $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{E}) + \chi(\mathcal{G})$.

PROPOSITION 5.7. $\chi(\mathcal{O}_X(nx)) \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $n \to \infty$.

Remarquons que ceci démontre la prop. 5.5.

DÉMONSTRATION. On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(nx) \longrightarrow \mathcal{O}_X((n+1)x) \longrightarrow \mathcal{T} \to 0$$

où $\mathcal{T}$, quotient des deux premiers modules cohérents, est cohérent (prop. 2.8). D'ailleurs, $\operatorname{supp}\mathcal{T} = \{x\}$ et $\mathcal{T}_x = \mathbb{C}$, d'après les formules (11), donc $\mathcal{T}$ est de torsion et $\chi(\mathcal{T}) = 1$ d'après prop. 3.2, d'où

$$1 + \chi(\mathcal{O}_X(nx)) = \chi(\mathcal{O}_X((n+1)x))$$

ce qui démontre la proposition. □

PROPOSITION 5.8. *Pour tout $\mathcal{O}_X$–module localement libre $\mathcal{F}$, pour tout $x \in X$, on a* $\dim H^0(X, \mathcal{F}(nx)) \to \infty$ *lorsque* $n \to \infty$*, où* $\mathcal{F}(nx) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nx)$*.*

DÉMONSTRATION. Tensorisons la suite exacte de la proposition 5.7 par $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est supposé *localement libre* de rang r, la suite obtenue est exacte:

$$0 \to \mathcal{F}(nx) \longrightarrow \mathcal{F}((n+1)x) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T} \to 0$$

Or $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T})_y = 0$ si $y \neq x$ et $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T})_x \simeq \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{F}_x$. Donc $\mathcal{F}(x)$ est un espace vectoriel de dimension r et la formule de la proposition 3.2 donne

$$\boxed{\chi(\mathcal{F}((n+1)x)) = \chi(\mathcal{F}(nx)) + r}$$

ce qui montre la proposition pour $\mathcal{F}$ localement libre de rang r. □

6. Théorème de dualité (Serre)

Considérons le faisceau Ω_X défini par l'exactitude de la suite

$$0 \to \Omega_X \longrightarrow \mathcal{E}_X^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2$$

Pour tout ouvert de coordonnées (U, z) de X, tout $\omega \in \Omega_X(U)$ s'écrit localement $\omega = f(z) \cdot dz$ où f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $d\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$, donc puisque, par définition, ω est *fermée*, f est holomorphe. La réciproque est évidente, Ω_X *est localement libre de rang* 1 *sur* $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{F}$ étant un $\mathcal{O}_X$–module *cohérent*, considérant le préfaisceau de $\mathcal{O}_X$-modules défini pour tout ouvert U de X par $\mathcal{F}^*(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \Omega_X|U)$. C'est un faisceau que nous noterons $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega_X)$.

THÉORÈME 6.1. (Théorème de dualité de Serre) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une surface de Riemann compacte X et soit $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega_X)$. Alors les espaces vectoriels $H^1(X, \mathcal{F})$ et $H^0(X, \mathcal{F}^*)$ sont duaux.*

REMARQUE 6.1. $\mathcal{F}$ étant cohérent, on sait lui associer (théorème 2.6) la suite exacte $0 \to \mathcal{F}_t \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_\ell \to 0$ et $H^1(X, \mathcal{F})$ est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{F}_\ell)$. Alors $\mathcal{F}_\ell^*$ est isomorphe à $\mathcal{F}^*$. En effet, U étant un ouvert de X, l'application $m : \mathcal{F}_\ell^*(U) \longrightarrow \mathcal{F}^*(U)$, $m(\phi) = \phi \circ (\beta|U)$, est injective car β est un épimorphisme de faisceaux; d'autre part, elle est surjective: en effet, tout $\psi : \mathcal{F}|U \longrightarrow \Omega_X|U$ se factorise par $\beta|U$, autrement dit vérifie $\psi \circ \alpha = 0$, car un morphisme d'un module de torsion dans un module localement libre est nul (regarder les fibres).

Pour démontrer le théorème 6.1, on pourra donc supposer $\mathcal{F}$ *localement libre de rang a.*

COROLLAIRE 6.2. *Pour un $\mathcal{O}_X$–module localement libre $\mathcal{F}$ les espaces vectoriels $H^0(X, \mathcal{F})$ et $H^1(X, \mathcal{F}^*)$ sont duaux.*

DÉMONSTRATION. Ceci découle du théorème 6.1 et du fait que, si $\mathcal{F}$ est localement libre, le morphisme $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$, où $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega_X), \Omega_X)$, $\lambda(\ell)(f) = f(\ell)$, est un isomorphisme, ce qui se voit localement et résulte donc de l'énoncé analogue où $\mathcal{O}_X^a$ remplace $\mathcal{F}$ et où $\mathcal{O}_X$ remplace Ω_X. □

DÉMONSTRATION. Démontrons le théorème 6.1.

Soit $\phi \in H^0(X, \mathcal{F}^*)$. Attachons–lui une forme linéaire: $H^1(X, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$. Pour cela, à l'aide des suites exactes de Dolbeault (corollaire 4.8) relatives à $\mathcal{F}$ et Ω_X, on forme le diagramme (D1):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \arrow[r, "id\otimes d''"] \arrow[d, "\phi\otimes id"] & \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi\otimes id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_X \arrow[r] & \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \arrow[r, "id\otimes d''"] \arrow[d, "r"', "\wr"] & \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "r'"', "\wr"] & 0 \\
 & & \mathcal{E}_X^{1,0} \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}_X^2 &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes $r : \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_X^{1,0}$, resp. $r' : \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_X^2$, localement définis par: $fdz\otimes\varepsilon \mapsto \varepsilon f dz$, resp. $fdz\otimes gd\bar{z} \mapsto fgd\bar{z}\wedge dz$, sont des isomorphismes. On vérifie alors localement la commutativité du diagramme. A tout $\omega\in(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1})(X)$, associons son image par $r'\circ(\phi\otimes id)$ dans $\mathcal{E}_X^2(X)$, notée $\omega\wedge\phi$. On définit ainsi un homomorphisme

$$H^0(X,\mathcal{F}^*)\times H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1}) \longrightarrow \mathcal{E}_X^2(X)$$

$\mathcal{E}_X$–linéaire en ω et $\mathcal{O}_X$–linéaire en ϕ car $(\lambda\phi+\mu\psi)\otimes 1 = \lambda\phi\otimes 1+\mu\psi\otimes 1$, $\lambda,\mu\in\mathcal{O}_X(X)$.

Ainsi, *à tout* $\phi\in H^0(X,\mathcal{F}^*)$, *on associe* une forme linéaire:

$$\begin{aligned} H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto (\omega|\phi) = \iint_X \omega\wedge\phi \end{aligned}$$

qui induit, par passage au quotient (5), page 32, *une forme linéaire*

$$\begin{aligned} H^1(X,\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [\omega] &\longmapsto (\omega|\phi) = \iint_X \omega\wedge\phi \end{aligned}$$

En effet, $(\omega|\phi)$ est indépendant du représentant choisi dans $[\omega]$, puisque si $\omega = (id\otimes d'')(\eta)$, où $\eta\in H^0(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X)$, en vertu de la commutativité du diagramme ci-dessus, on a $\omega\wedge\phi = d\theta$, où $\theta = (r\circ(\phi\otimes id))(\eta)$, de sorte que $\iint_X \omega\wedge\phi = \iint_X d\theta = 0$ en vertu de la formule de Stokes. Soit $\rho : \mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{F}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$–modules localement libres. Il induit un morphisme $\rho^* : \mathcal{F}^*\longrightarrow\mathcal{E}^*$, $\rho^*(\phi) = \phi\circ\rho$ et pour tout $\phi\in\mathcal{F}^*(X)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \arrow[r, "id\otimes d''"] \arrow[d, "\rho\otimes id"] & \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "\rho\otimes id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \arrow[r, "id\otimes d''"] \arrow[d, "\phi\otimes id"] & \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi\otimes id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_X \arrow[r] & \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X \arrow[r, "id\otimes d''"] \arrow[d, "r"', "\wr"] & \Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "r'"', "\wr"] & 0 \\
 & & \mathcal{E}_X^{1,0} \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}_X^2 &
\end{tikzcd}$$

de sorte que pour tout $\omega\in(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}_X^{0,1})(X)$, on a $\omega\wedge\rho^*(\phi) = (\rho\otimes id)(\omega)\wedge\phi$, soit $((\rho\otimes id)(\omega)|\phi) = (\omega|\rho^*(\phi))$. Ceci exprime que l'opération $(\omega|\phi)$ est fonctorielle en $\mathcal{F}$. De plus, nous allons écrire l'expression locale de cette forme bilinéaire. Soit

(U, z) une carte locale de la surface de Riemann X, et soit $\rho : \mathcal{F}|U \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U)^r$ un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$–modules. Le diagramme (D1), dans lequel on a remplacé X par U, demeurant inchangé, il est clair que $(\omega|U) \wedge (\phi|U) = (\omega \wedge \phi)|U$. Nous supposerons donc $X = U$. Si $\omega \in (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1})(X)$ et si $\phi \in \mathcal{F}^*(X)$, la formule précédente montre que $\omega \wedge \phi = \rho(\omega) \wedge \rho^{*-1}(\phi)$. De plus, on a un isomorphisme canonique: $(\mathcal{O}_X^r)^* \xleftarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_X^r$; en effet, V étant un ouvert de X, à tout $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{O}_X^r(V)$, ε associe le morphisme: $\mathcal{O}_X^r \longrightarrow \Omega_X$, $(g_1, \ldots, g_r) \longmapsto (\sum_i f_i g_i)dz$. Donc $\rho(\omega) = (g_1, \ldots, g_r)d\bar{z}$, où $g_i \in \mathcal{E}_X(X)$, et $\rho^{*-1}(\phi) = (f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{O}_X^r(X)$ et l'on a

$$\boxed{\omega \wedge \phi = \rho(\omega) \wedge \rho^{*-1}(\phi) = \sum_{i=1}^{r} f_i \cdot g_i d\bar{z} \wedge dz} \tag{12}$$

où la deuxième égalité résulte de (D1), où $\mathcal{O}_X^r$ remplace $\mathcal{F}$.

La suite exacte :

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X)(X) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X^{0,1})(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0$$

sera notée

$$0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{d''} C \xrightarrow{v} D \to 0$$

Nous allons en faire *une suite exacte d'espaces vectoriels topologiques.* Rappelons que A et D sont des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels de dimension finie. D'autre part, soit $(U_\alpha, z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, un atlas fini holomorphe de X, choisi de façon que, pour tout $\alpha \in \Lambda$ on ait un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$–modules $\rho_\alpha : \mathcal{F}|U_\alpha \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X|U_\alpha)^r$. Posons, pour tout $\omega \in B$ (resp. $\in C$) et tout entier $n \geq 1$,

$$p_n(\omega) = \sum_\alpha \sum_{i+j \leq n} \sup_{x \in U_\alpha} \|D^{i,j}(\rho_\alpha \otimes id)(\omega)(x)\|$$

où $D^{i,j} = \frac{\partial^i}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial^j}{\partial y_\alpha^j}$, avec $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, expression qui a un sens car $z_\alpha(U_\alpha)$ est relativement compact.

Les fonctions p_n ainsi définies sont des *normes.* Munissons B (resp. C) de la topologie définie par cette familles de normes ([**18**, p. 47]). Alors B (resp. C) sont *complets* et sont des espaces vectoriels topologiques de Fréchet [**18**, p. 52], et $d'' : B \longrightarrow C$, dont l'expression locale s'écrit, pour tout $\omega \in B|U_\alpha$,
$(\rho_\alpha \otimes id_{\mathcal{E}_X^{0,1}})(d''\omega) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\rho_\alpha \otimes id_{\mathcal{E}_X})(\omega))$, est continue, puisque $p_n(d''\omega) \leq 2p_{n+1}(\omega)$. Donc $A = \operatorname{Ker} d''$ est fermé dans B et de dimension finie, de sorte que la topologie induite par B sur A est celle d'un espace normé de dimension finie et que u est continue. Pour voir que $v : C \longrightarrow D$ est continue, il suffit de voir que d'' a une image B' fermée dans C, puisque alors la topologie quotient sur D est celle d'un espace normé de dimension finie. Or, le diagramme suivant est exact:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] & B \arrow[rr, "d''"] \arrow[dr] & & C \arrow[r, "v"] & D \arrow[r] & 0 \\
& & & B' \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Comme B', muni de la topologie quotient de celle de B, est un espace de Fréchet et que toute section $s : D \to C$ de v est continue [**18**], l'application $i \times s : B' \times D \to C$ est continue et bijective, donc est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques [**18**]. B', fermé dans $B' \times D$ muni de la topologie produit, est donc aussi fermé dans C. Tout élément de l'espace dual de $H^1(X, \mathcal{F})$, c'est-à-dire toute forme linéaire continue T sur D, induit une forme linéaire continue (car v est continue) sur C, que nous noterons encore T et telle que $T \circ d'' = 0$. □

Montrons à présent le

LEMME 6.3. *Toute forme linéaire continue T sur C vérifiant $T \circ d'' = 0$, est de la forme: $\omega \mapsto \iint_X \omega \wedge \phi$, où $\phi \in \mathcal{F}^*(X)$ est déterminé de manière unique.*

DÉMONSTRATION. Reprenons l'atlas $(U_\alpha, z_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ défini plus haut. Notons $\mathcal{D}_\alpha$ l'espace de Schwartz des fonctions $g = (g_1, \dots, g_r)$ avec $g_i : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et où $\operatorname{supp} g$ est un compact de U_α, et définissons une forme linéaire T_α sur $\mathcal{D}_\alpha$ par

$$T_\alpha(g) = T(\rho_\alpha^{-1}(g))$$

Alors T_α est continue en vertu du choix de la topologie de C, donc définit *une distribution* sur $\mathcal{D}_\alpha$. Comme de plus, $\frac{\partial}{\partial \bar z}(T_\alpha) = 0$ car $T \circ d'' = 0$ se traduit, pour tout α, par $T_\alpha \circ \frac{\partial}{\partial \bar z} = 0$, T_α est une distribution de fonctions holomorphes [**15**, p. 48]. Autrement dit, il existe $f_\alpha = (f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha r}) \in (\mathcal{O}_X|U_\alpha)^r$, telle que, pour tout $g \in \mathcal{D}_\alpha$, $T_\alpha(g) = \iint_{U_\alpha} \langle g, f_\alpha\rangle d\bar z \wedge dz$. Posant $\phi_\alpha = \rho_\alpha^*(f_\alpha)$ et $\omega = \rho_\alpha^{-1}(g)$, ceci s'écrit, en vertu de (12)

$$T_\alpha(g) = \iint_X \omega \wedge \phi_\alpha$$

Autrement dit, nous avons construit $\phi_\alpha \in \mathcal{F}^*(U_\alpha)$ telle que pour tout $\omega \in C$, à support contenu dans U_α, on ait $T(\omega) = \iint_X \omega \wedge \phi_\alpha$, parce que, par définition de T_α, on a $T(\omega) = T_\alpha(\rho_\alpha(\omega))$. De plus, soit $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Pour tout $\omega \in C$, tel que $\operatorname{supp} \omega \subset U_{\alpha\beta}$, on a donc $T(\omega) = \iint_X \omega \wedge (\phi_\alpha|U_{\alpha\beta}) = \iint_X \omega \wedge (\phi_\beta|U_{\alpha\beta})$, de sorte que les restrictions à $U_{\alpha\beta}$ de ϕ_α et ϕ_β définissent la même forme linéaire sur $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$, donc sont égales, d'où $\phi \in \mathcal{F}^*(X)$ telle que $\phi|U_\alpha = \phi_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$. Soit (ψ_α) une partition de l'unité subordonnée à $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Pour tout $\omega \in C$, on a:

$$\begin{aligned} T(\omega) = T(\sum_\alpha \psi_\alpha \omega) &= \sum_\alpha T(\psi_\alpha \omega) = \sum_\alpha \iint_X \psi_\alpha \omega \wedge \phi_\alpha \\ &= \sum_\alpha \iint_X \psi_\alpha \omega \wedge \phi = \iint_X \omega \wedge \phi \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

7. Théorème de Riemann-Roch

Soit X une surface de Riemann.

DÉFINITION 7.1. [1] On appelle *diviseur* de X une application $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ à support discret et fermé. Un diviseur est dit *positif* si, pour tout $x \in X$, $D(x) \geq 0$.

Rappelons que le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ dont les sections sur un ouvert U de X sont les fonctions méromorphes sur U telles que $v_x(f) \geq -D(x)$, $x \in U$, est un $\mathcal{O}_X$–module localement libre de rang 1. Alors, si on pose $D = D^+ - D^-$, où D^+ et D^- sont positifs et où $\operatorname{supp} D^+ \cap \operatorname{supp} D^- = \emptyset$, $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est l'ensemble des fonctions méromorphes sur X ayant un pôle d'ordre au plus égal à $D^+(x)$ en tout point $x \in \operatorname{supp} D^+$ et un zéro d'ordre au moins égal à $D^-(x)$ en tout point $x \in \operatorname{supp} D^-$ et holomorphe en dehors de ces points.

A toute fonction *non nulle* $f \in M(X)$, on associe son *diviseur*: $\operatorname{div}(f) : X \to \mathbb{Z}$, $\operatorname{div}(f)(x) = v_x(f)$. On dit qu'un diviseur est *principal* s'il est le diviseur d'une fonction méromorphe.

[1] voir définition 1.2, page 21

DÉFINITION 7.2. On appelle *degré* d'un diviseur D, l'entier $\deg D = \sum_{x \in X} D(x)$.

Le degré du diviseur d'une fonction *méromorphe* f sur une surface de Riemann *compacte* est nul ; en effet, f est un revêtement éventuellement ramifié de la sphère de Riemann. Remarquons que *les diviseurs de X forment un groupe abélien ordonné noté* $\mathrm{Div}(X)$ et que l'ensemble des diviseurs principaux en est un sous-groupe, noté $\mathcal{P}(X)$. D'autre part, il est facile de voir que les classes (à isomorphismes près) de modules inversibles forment un groupe commutatif noté $\mathrm{Pic}(X)$ et appelé "*groupe de Picard* de X" dont la loi de groupe est définie par

$$cl(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = cl(\mathcal{L}) + cl(\mathcal{L}')$$

dont l'élément neutre est $cl(\mathcal{O}_X)$ et tel que

$$cl(\mathcal{L}^\vee) + cl(\mathcal{L}) = 0, \text{ où } \mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$$

PROPOSITION 7.1. *En attachant à un diviseur D le module inversible $\mathcal{O}_X(D)$, on définit un morphisme de groupes* $\mathrm{Div}(X)/\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$*, qui est toujours injectif et qui est surjectif si X est compacte.*

DÉMONSTRATION. Montrons que $\mathcal{O}_X(D + D') \simeq \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')$, ce qui assure que $\mathrm{Div}((X) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(X)$, $\pi(D) = cl(\mathcal{O}_X(D))$, est un morphisme de groupes. Il suffit de voir que, dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D) \times \mathcal{O}_X(D') \arrow[r, "r"] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X(D + D') \\
& \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

obtenu par la factorisation du morphisme bilinéaire r défini par $r(f, g) = f \cdot g$, le morphisme ρ est un isomorphisme ; or $\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')$ et $\mathcal{O}_X(D + D')$ sont localement libres de rang 1, donc, ρ n'étant pas le morphisme nul, est injectif ; de plus, ρ est surjectif car si z_x est une uniformisante locale au voisinage d'un point $x \in X$, si $h \in \mathcal{O}_X(D + D')_x$, on a $h = z_x^a \cdot k = (z_x^b \cdot k) z_x^c$ où $a = b + c$, où $b \geq -D(x)$ et où $c \geq -D'(x)$, car $a \geq -D(x) - D'(x)$.

Montrer que le noyau de π est $\mathcal{P}(X)$ revient à prouver l'assertion suivante: $\mathcal{O}_X(D)$ *est isomorphe à* $\mathcal{O}_X$ *si et seulement si D est principal.* Soit $\rho : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ un isomorphisme, et soit $\phi = \rho(1) \in \mathcal{O}_X(D)(X)$. Pour tout $x \in X$, ϕ_x est une base du module $\mathcal{O}_X(D)_x$ donc, si z_x est une uniformisante locale, s'écrit $\phi_x = z_x^{-D(x)} \cdot u$, où $u \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ est une unité. Donc $\mathrm{div}(\phi) = -D$. Réciproquement, si ϕ est une fonction méromorphe telle que $\mathrm{div}(\phi) = -D$, alors ϕ est une base de $\mathcal{O}_X(D)$.

Supposons que X soit compacte. Soit $\mathcal{L}$ un module inversible. Soit $\xi \in X$, nous avons vu (prop. 5.8) que, pour n assez grand, $\mathcal{L}(n\xi) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n\xi)$ admet une section non nulle, d'où un morphisme $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}(n\xi)$, d'où, par dualité, un morphisme non nul $\mathcal{L}(n\xi)^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_X$, ce qui montre que $\mathcal{I} = \mathcal{L}(n\xi)^\vee$ est un idéal cohérent non nul de $\mathcal{O}_X$, donc est égal à $\mathcal{O}_X(-D)$ (voir la remarque 2.1 page 26). Donc $-cl(\mathcal{L}) - cl(\mathcal{O}_X(n\xi))$ appartient à l'image de π, d'où la conclusion. □

REMARQUE 7.1. Comme le degré d'un diviseur principal est nul, on peut définir, si X est *compacte*, le degré d'un module inversible $\mathcal{L}$ comme celui de tout diviseur

D tel que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$ et l'on a

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') &= \deg \mathcal{L} + \deg \mathcal{L}' \\ \deg \mathcal{L}^\vee &= -\deg \mathcal{L} \\ \deg \mathcal{O}_X &= 0\end{aligned}$$

THÉORÈME 7.2. *X étant une surface de Riemann compacte et connexe, pour tout module inversible $\mathcal{L}$, on a*

$$\boxed{\chi(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + \chi(\mathcal{O}_X)}$$

DÉMONSTRATION. Soit D un diviseur tel que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$. Posons $D = D^+ - D^-$. On a les suites exactes (1), page 21

(S1) $$0 \to \mathcal{O}_X(-D^+) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D^+} \to 0$$

(S2) $$0 \to \mathcal{O}_X(-D^-) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D^-} \to 0$$

et, en tensorisant (S1) avec $\mathcal{O}_X(D)$ on obtient

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D^-) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D^+} \to 0$$

puisque $\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D^+} \simeq \mathcal{O}_{D^+}$ par prop. 3.2. D'où:

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X(-D^-)) + \chi(\mathcal{O}_{D^-})$$

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X(-D^-)) + \chi(\mathcal{O}_{D^+})$$

soit, en ajoutant membre à membre

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_X(D)) &= \chi(\mathcal{O}_X) + \chi(\mathcal{O}_{D^+}) - \chi(\mathcal{O}_{D^-}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \deg D^+ - \deg D^- \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \deg \mathcal{L}\end{aligned}$$

□

Pour tout $\mathcal{O}_X$–module cohérent $\mathcal{E}$, on pose:

$$h^i(\mathcal{E}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{E}) \quad i = 0, 1$$

DÉFINITION 7.3. Le nombre $g = h^1(\mathcal{O}_X)$ est appelé le *genre* de X.

PROPOSITION 7.3. *On a* $h^0(\Omega_X) = g$, $h^1(\Omega_X) = 1$ *et* $\deg \Omega_X = 2g - 2$.

DÉMONSTRATION. En effet $\mathcal{O}_X^* = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \Omega_X)$ est isomorphe à $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^\vee$, où $\mathcal{O}_X^\vee$ est le dual de $\mathcal{O}_X$, donc à Ω_X. En vertu de la dualité de Serre (th. 6.1), $h^0(\Omega_X) = h^0(\mathcal{O}_X^*) = h^1(\mathcal{O}_X) = g$; et $h^1(\Omega_X) = h^1(\mathcal{O}_X^*) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Alors $\chi(\Omega_X) = \deg \Omega_X + \chi(\mathcal{O}_X)$ (th. 7.2), soit encore $g - 1 = \deg \Omega_X + 1 - g$, ou $\deg \Omega_X = 2g - 2$. □

THÉORÈME 7.4. (Théorème de Riemann–Roch)

$$h^0(\mathcal{L}) - h^0(\Omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee) = \deg \mathcal{L} + 1 - g$$

DÉMONSTRATION. Ceci résulte directement du théorème 7.2 et de la proposition 7.3. □

COROLLAIRE 7.5. (Formule de Riemann–Hurwitz) *Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme de surfaces de Riemann compactes de degré n. Soient $(x_1, \ldots, x_r)$ ses points de ramification, avec les indices de ramifications $(e_1, \ldots, e_r)$. Soit g' le genre de X' et g celui de X. Alors:*

$$\boxed{2g' - 2 = n(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}(e_i - 1)}$$

DÉMONSTRATION. Soit D une partie finie de X et soit $U = X - D$. Soit ω une forme différentielle holomorphe sur U. Si $x \in D$ et si (V, z) est une carte centrée en x, on a $\omega|\dot{V} = h(z)dz$ où h est holomorphe dans $\dot{V} = V - \{x\}$; si, de plus, h est méromorphe en x, on dira que ω est méromorphe au point $x \in D$ et l'on dira que ω est *une forme différentielle méromorphe sur* X si elle est méromorphe en tout point x de D. Nous verrons plus loin que ω s'interprète comme une section méromorphe de Ω_X. Pour tout $x \in X$, on a $\omega = h \cdot dz$ au voisinage de x et $v_x(h)$ ne dépend que de ω (et est positive ou nulle si $x \notin D$) et d'après la proposition 7.7 ci-dessous, on a

$$\boxed{2g - 2 = \sum_{x \in X} v_x(\omega)} \tag{13}$$

Par ailleurs, $D' = f^{-1}(D)$ est fini et si l'on pose $U' = X' - D'$, l'image réciproque ω' de ω par l'application $U' \longrightarrow U$ est encore une forme différentielle méromorphe. Soit $x' \in X'$ et soit $x = f(x')$. Choisissons des uniformisantes locales z' en x' et z en x, de sorte que $z \circ f = {z'}^{e_{x'}}$ (théorème 2.3 au chap. 1). Alors, si $\omega = \phi(z)dz$, on a $\omega' = \phi({z'}^{e_{x'}})e_{x'} \cdot {z'}^{e_{x'}-1}dz'$. Alors $v_{x'}(\omega') = (e_{x'} - 1) + e_{x'} \cdot v_x(\omega)$ et, en vertu de (13),

$$\begin{aligned} 2g' - 2 &= \sum_{x' \in X'} e_{x'} \cdot v_{f(x')}(\omega) + \sum_{x' \in X'} (e_{x'} - 1) = \\ &= \sum_{x \in X} \Big(\sum_{x' \in f^{-1}(x)} e_{x'} \Big) v_x(\omega) + \sum_{x' \in X'} (e_{x'} - 1) = \\ &= n \cdot (2g - 2) + \sum_{x' \in X'} (e_{x'} - 1) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 7.6. *Soit X une surface de Riemann compacte. Soit s une section non nulle d'un module inversible $\mathcal{L}$. Alors $s \otimes 1$ est une base de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ sur $\mathcal{M}_X$ où $\mathcal{M}_X$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur X. De plus, pour tout $\mathcal{O}_X$–module inversible $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{M}_X$.*

DÉMONSTRATION. s étant une section non nulle de $\mathcal{L}$, est un monomorphisme car $\mathcal{L}$ et $\mathcal{O}_X$ sont localement libres de rang 1, et l'on a la suite exacte: $0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{T} \to 0$, où $\mathcal{T}$ est de torsion. Soit U l'ensemble des points x de X où $\mathcal{T}_x = 0$; son complémentaire est le support d'un diviseur ; $s|U$ est un isomorphisme, de sorte que, pour tout $x \in U$, s_x est une base de $\mathcal{L}_x$, donc $(s \otimes 1)_x$ est une base de $(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X)_x$. Si $x \notin U$, soit λ_x une base de $\mathcal{L}_x$. On a $s_x = f_x \cdot \lambda_x$, où f_x est le germe d'une fonction méromorphe qui est non nulle, donc est inversible dans $\mathcal{M}_{X,x}$, donc $s_x \otimes 1 = f_x(\lambda_x \otimes 1)$ et $\lambda_x \otimes 1$ étant une base de $\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_{X,x}$, il en est de même de $s_x \otimes 1$, d'où la première assertion, puisqu'elle se vérifie fibre par fibre. D'autre part, tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')^{-1}$, avec $D \geq 0$ et $D' \geq 0$. Or $\mathcal{O}_X(D)$ et $\mathcal{O}_X(D')$ sont des modules inversibles ayant une section non nulle. La conclusion résulte alors de la première assertion et de l'associativité du produit tensoriel. □

Définition 7.4. Une section de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ s'appelle *section méromorphe* de $\mathcal{L}$.

Elles forment donc un espace vectoriel de dimension 1 sur $M(X)$. Soit s une section méromorphe de $\mathcal{L}$, soit $x \in X$ et soit λ_x une base de $\mathcal{L}_x$; dans la base $\lambda_x \otimes 1$ de $\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_{X,x}$, on a $s_x = f_x \cdot \lambda_x$, où f_x est le germe en x d'une fonction méromorphe. Alors $v_x(f)$ ne dépend pas du choix de λ_x ; on le note $v_x^{\mathcal{L}}(s)$ ou encore $v_x(s)$ et l'on pose: $\operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s)(x) = v_x^{\mathcal{L}}(s)$, ce qui définit un diviseur. *On prendra garde* que si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, où D est un diviseur, et si s est une section de $\mathcal{L}$, c'est-à- dire une fonction méromorphe, on a $v_x(s) \neq v_x^{\mathcal{L}}(s)$ lorsque $D(x) \neq 0$.

Proposition 7.7. *Pour toute section méromorphe s de $\mathcal{L}$, on a*

(1) *$\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(\operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s))$*
(2) $\deg \mathcal{L} = \deg \operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s)$

Démonstration. On a un morphisme $\sigma : \mathcal{O}_X(\operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s)) \to \mathcal{L}$, $f \mapsto f \cdot s$ car $f \cdot s$ définit un unique élément de $\mathcal{L}(X)$ puisque $v_x^{\mathcal{L}}(f \cdot s) = v_x(f) + v_x^{\mathcal{L}}(s) \geq 0$; c'est évidemment un isomorphisme. Donc $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(\operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s))$, de sorte que $\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{O}_X(\operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s)) = \deg \operatorname{div}_{\mathcal{L}}(s)$. □

A présent, on voit aisément que toute section méromorphe de Ω_X s'interprète comme une forme différentielle méromorphe, ce qui prouve la formule (13).

Proposition 7.8. *A isomorphisme près, la seule surface de Riemann compacte de genre* 0 *est la sphère de Riemann* $\mathbb{S}$.

Démonstration. $\mathbb{S}$ est de genre 0 ; en effet, sur $\mathbb{S}$, la forme différentielle méromorphe dz a un pôle double à l'infini: localement à l'infini dans une carte $t = 1/z$ on a $dz = d(\frac{1}{t}) = -\frac{1}{t^2}dt$. De ce fait $2g - 2 = -2$ est le degré du diviseur de dz, ce qui montre que $g = 0$. D'autre part, dire qu'une surface de Riemann compacte est de genre 0 équivaut à dire qu'il existe une fonction méromorphe sur X ayant exactement un pôle simple (cette fonction étant alors un isomorphisme $X \longrightarrow \mathbb{S}$). En effet, soit X une surface de Riemann compacte de genre 0, soit $\xi \in X$. Alors $\chi(\mathcal{O}_X(\xi)) = h^0(\mathcal{O}_X(\xi)) - h^1(\mathcal{O}_X(\xi)) = 2$ (th. 7.2). Or $H^1(X, \mathcal{O}_X(\xi))$ est l'espace dual de $H^0(X, \Omega(-\xi))$ (th. 6.1), qui est nul car $\Omega_X(X) = 0$. Donc $h^0(\mathcal{O}_X(\xi)) = 2$ et donc il existe une section non constante ϕ de $\mathcal{O}_X(\xi)$; alors ϕ a un pôle simple, car sinon, elle serait constante. □

Corollaire 7.9. (Théorème de Lüroth) *Un sous–corps de $\mathbb{C}(z)$ contenant strictement $\mathbb{C}$ est un corps de fractions rationelles d'une variable.*

Démonstration. En effet, à un tel sous–corps K de $\mathbb{C}(z) = M(\mathbb{S})$, on sait associer une surface de Riemann compacte X telle que $K = M(X)$, avec un revêtement ramifié $\mathbb{S} \longrightarrow X$ induisant l'inclusion de K dans $\mathbb{C}(z)$ (théorème 6.1 du chap. 1). Alors la formule de Riemann–Hurwitz (cor. 7.5) s'écrit $-2 = n(2g - 2) + \sum_{i=1}^{n}(e_i - 1)$; ceci n'est possible que si $g = 0$. Donc $X = \mathbb{S}$. □

Théorème 7.10. (Vanishing Theorem) *$\mathcal{L}$ étant un $\mathcal{O}_X$–module inversible et X une surface de Riemann compacte.*

(1) *Si $\deg \mathcal{L} \leq 0$, alors $H^0(X, \mathcal{L}) = 0$ sauf si $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$.*
(2) *Si $\deg \mathcal{L} \geq 2g - 2$, $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ sauf si $\mathcal{L}$ est isomorphe à Ω_X.*

(3) *Si* $\deg \mathcal{L} \geq 2g-1$, $H^1(X,\mathcal{L}) = 0$ *; de plus,* $h^0(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + 1 - g$.

DÉMONSTRATION. (1): Dire que $H^0(X,\mathcal{L}) \neq 0$ équivaut à dire que $\mathcal{L}$ admet une section s non nulle. D'où la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{T} \to 0$$

où s est un monomorphisme et $\mathcal{T}$ un module de torsion. Alors d'après le lemme 5.6 et th. 7.2, puisque $h^1(\mathcal{T}) = 0$ (prop. 3.2), on a $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) + h^0(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \deg \mathcal{L}$. Donc $\deg \mathcal{L} \geq 0$. Si, de plus, $\deg \mathcal{L} = 0$, alors $h^0(\mathcal{T}) = 0$, donc $\mathcal{T} = 0$ car $H^0(X,\mathcal{T}) = \oplus_{x\in X}\mathcal{T}_x$; si donc $\mathcal{L}$ admet une section s non nulle, s est un isomorphisme et donc $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$.

(2): $H^1(X,\mathcal{L})$ est isomorphe au dual de $H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee)$.

En appliquant (1) à $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee)$, puisque $\deg(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee) = \deg \Omega_X - \deg \mathcal{L} = 2g-2-\deg \mathcal{L}$, on voit que si $\deg \mathcal{L} \geq 2g-2$, alors $H^1(X,\mathcal{L}) = 0$, sauf si $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$ ou encore, après tensorisation par $\mathcal{L}$, Ω_X est isomorphe à $\mathcal{L}$.

(3) découle de (2) et du théorème 7.4. □

8. Plongement projectif

Soit F un espace vectoriel complexe de dimension $r+1$; on note $\mathbb{P}(F)$ l'espace des classes, à homothétie non nulle près, de formes linéaires non nulles sur F. Soit F^* l'espace dual de F. Pour tout $f \in F, f \neq 0$, on pose:

$$\boxed{F^*(f) = \{\phi \in F^* \mid \phi(f) = 1\}}$$

Alors $F^*(f)$ est un espace affine de dimension r, on a une application:
$i(f) : F^*(f) \longrightarrow \mathbb{P}(F)$, $i(f)(\phi) = cls(\phi)$, et il existe une unique structure de variété analytique complexe sur $\mathbb{P}(F)$ telle que les $i(f)$ soient des cartes.

Soit X une variété analytique complexe (par exemple, une surface de Riemann), soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$–module inversible et soit $F = H^0(X,\mathcal{L})$. A tout $f \in F, f \neq 0$, on associe *l'ouvert* $X(f)$ *de* X *formé des points* $x \in X$ *tels que* f_x *soit une base de* $\mathcal{L}_x$. $X(f)$ est ouvert, en effet, $f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}$ étant un monomorphisme, la condition que f_x soit une base de $\mathcal{L}_x$ équivaut à: f_x engendre $\mathcal{L}_x$, qui est une condition *ouverte* (lemme 2.4). On a une application $j(f) : X(f) \longrightarrow F^*(f)$, $j(f)(x)(g) = \frac{g}{f}(x)$ pour tout $g \in F$, où $\frac{g}{f}$ est la fonction holomorphe sur $X(f)$ définie pour $g \in F$ par $g|X(f) = (\frac{g}{f}) \cdot (f|X(f))$. Comme $x \mapsto \frac{g}{f}(x)$ est holomorphe, $j(f)$ est une application holomorphe, de sorte que, par composition, on a une application holomorphe: $\phi(f) : X(f) \longrightarrow \mathbb{P}(F)$.

Nous voulons plonger une partie X' de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}(F)$. Posons

$$\boxed{X' = \bigcup_{\substack{f\neq 0\\ f\in F}} X(f)}$$

Si $x \in X(f) \cap X(h)$, alors $j(f)(x)(g) = \frac{g}{f}(x)$ et $j(h)(x)(g) = \frac{g}{h}(x) = (\frac{g}{f} \cdot \frac{f}{h})(x) = \frac{g}{f}(x) \cdot \frac{f}{h}(x)$ de sorte que les deux formes linéaires $j(f)(x)$ et $j(h)(x)$ sur F sont proportionelles. Donc $\phi(f)$ et $\phi(h)$ ont même restriction à $X(f) \cap X(h)$. Ceci permet, en recollant les $\phi(f)$, de *définir* un morphisme $\phi : X' \longrightarrow \mathbb{P}(F)$.

THÉORÈME 8.1. *Soit* $\mathcal{L}$ *un module inversible sur une surface de Riemann compacte* X *de genre* g. *Soit* $F = H^0(X,\mathcal{L})$ *et soit* $\phi : X' \longrightarrow \mathbb{P}(F)$ *défini comme ci-dessus. Soient* $\xi \in X$ *et* $\eta \in X$.

(1) *Pour que* $\xi \in X'$, *il faut et il suffit que* $H^1(X, \mathcal{L})$ *soit isomorphe à* $H^1(X, \mathcal{L}(-\xi))$.

(2) *Pour que* $\xi, \eta \in X'$ *et que* $\phi(\xi) \neq \phi(\eta)$, *il faut et il suffit que* $H^1(X, \mathcal{L})$ *soit isomorphe à* $H^1(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta))$.

(3) *Pour que* $\xi \in X'$ *et que l'application tangente à* ϕ *en* ξ, *notée* $T_\xi \phi$, *soit injective, il faut et il suffit que* $H^1(X, \mathcal{L})$ *soit isomorphe à* $H^1(X, \mathcal{L}(-2\xi))$.

Déduisons immédiatement de ce théorème le

Corollaire 8.2. *Si* $\deg \mathcal{L} \geq 2g$, ϕ *est partout définie, et si* $\deg \mathcal{L} \geq 2g + 1$, ϕ *est de plus un plongement.*

Remarque 8.1. Dire que ϕ est une *immersion*, c'est dire qu'en tout point ξ de X l'application $T_\xi \phi$ est injective. Si, *de plus*, l'application induite $X \longrightarrow \phi(X)$ est un homéomorphisme, on dit que ϕ est un *plongement*. Ici, X est compacte, donc une immersion injective est un plongement.

Démonstration. Si $\deg \mathcal{L} \geq 2g$, alors $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ par le *Vanishing Theorem* 7.10 et $\deg \mathcal{L}(-\xi) = \deg(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\xi)) = \deg \mathcal{L} - \deg \xi \geq 2g - 1$, donc $H^1(X, \mathcal{L}(-\xi)) = 0$ et d'après th. 8.1 (1), $X' = X$ et ϕ est partout définie.

Si $\deg \mathcal{L} \geq 2g+1$, on a $\deg \mathcal{L}(-\xi-\eta) = \deg \mathcal{L}(-2\xi) \geq 2g-1$, donc $H^1(X, \mathcal{L}) = H^1(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta)) = H^1(X, \mathcal{L}(-2\xi)) = 0$ pour tout $\xi, \eta \in X$. D'après th. 8.1 (3), ϕ est un plongement. $\square$

Démonstration. Démontrons le théorème 8.1

(1): On a la suite exacte (1) (page 21) $0 \to \mathcal{O}_X(-\xi) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_\xi \to 0$ qui devient, après tensorisation avec $\mathcal{L}$, $0 \to \mathcal{L}(-\xi) \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_\xi \to 0$ dont la suite exacte de cohomologie s'écrit

$$0 \to H^0(X, \mathcal{L}(-\xi)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}(-\xi)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}) \to 0$$

Dire que $\xi \in X'$ signifie qu'il existe $f \in F$ tel que f_ξ soit une base de $\mathcal{L}_\xi$ sur $\mathcal{O}_{X,\xi}$ ce qui signifie que $f(\xi) \neq 0$ car $\mathcal{L}$ est inversible, c'est-à-dire que $f \notin H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$. Donc $\xi \in X'$ équivaut à $H^0(X, \mathcal{L}) \neq H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$, ce qui équivaut à $H^1(X, \mathcal{L}) \simeq H^1(X, \mathcal{L}(-\xi))$.

(2): D'après l'exactitude de la suite

$$0 \to H^0(X, \mathcal{L}(-\xi-\eta)) \to H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \to H^1(X, \mathcal{L}(-\xi-\eta)) \to H^1(X, \mathcal{L}) \to 0$$

$H^1(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta))$ est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{L})$ si et seulement si $H^0(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta))$ est de codimension 2 dans $H^0(X, \mathcal{L})$. Cela signifie qu'on a

$$H^0(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L}(-\xi)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L})$$
$$H^0(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L}(-\eta)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L})$$

et comme on a $H^0(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta)) = H^0(X, \mathcal{L}(-\xi)) \cap H^0(X, \mathcal{L}(-\eta))$, on doit avoir $H^0(X, \mathcal{L}(-\xi)) \neq H^0(X, \mathcal{L}(-\eta))$, ce qui signifie, d'après (1), que $\xi, \eta \in X'$, et d'autre part qu'il existe $f \in H^0(X, \mathcal{L})$, $f \notin H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$ et $g \in H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$, $g \notin H^0(X, \mathcal{L}(-\xi-\eta))$, d'où $\frac{g}{f}(\xi) = 0$ et $\frac{g}{f}(\eta) \neq 0$ et donc $\phi(\xi) \neq \phi(\eta)$. Réciproquement, si $\xi, \eta \in X'$ vérifient $\phi(\xi) \neq \phi(\eta)$, il existe $g \in H^0(X, \mathcal{L})$ avec $\frac{g}{f}(\xi) \neq \frac{g}{f}(\eta)$. Posant $g_1 = g - (\frac{g}{f})(\xi) \cdot f$, on a $g_1 \in H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$ et $g_1 \notin H^0(X, \mathcal{L}(-\eta))$ de sorte que la codimension de $H^0(X, \mathcal{L}(-\xi - \eta))$ dans $H^0(X, \mathcal{L})$ vaut 2.

(3): Le raisonnement (2) où $\xi = \eta$ montre que $H^1(X, \mathcal{L})$ est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{L}(-2\xi))$ si et seulement si les codimensions des termes consécutifs de la suite

$$H^0(X, \mathcal{L}(-2\xi)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L}(-\xi)) \subsetneqq H^0(X, \mathcal{L})$$

valent 1, la codimension globale valant 2. Ceci signifie (1) que $\xi \in X'$ et qu'il existe $g \in H^0(X, \mathcal{L})$ tel que $v_\xi(f) = 1$. Soit $f \in H^0(X, \mathcal{L})$ tel que $\xi \in X(f)$. Alors $\frac{g}{f}$ est une uniformisante locale en ξ dont l'application tangente est injective. Mais $\frac{g}{f}$ est la composée de $j(f)$ et de $F^*(f) \to \mathbb{C}$, $\phi \mapsto \phi(g)$ de sorte que l'application tangente à $j(f)$ est encore injective. Donc aussi $T_\xi \phi$ car $j(f)$ s'obtient en composant ϕ avec une carte de $\mathbb{P}(F)$. Réciproquement, si $T_\xi \phi \neq 0$ on a $T_\xi j(f) \neq 0$ et il existe une application linéaire affine $\lambda : F^+(f) \to \mathbb{C}$ que l'on peut supposer de la forme $\psi \mapsto \psi(g)$, $g \in F$, telle que $T_\xi(\lambda \circ j(f)) \neq 0$. Or $\lambda \circ j(f) = \frac{g}{f}$. Donc $\frac{g}{f}$ est une uniformisante locale. Donc $v_\xi^{\mathcal{L}}(g) = 1$, donc $g \in H^0(X, \mathcal{L}(-\xi))$ et $g \notin H^0(X, \mathcal{L}(-2\xi))$. □

Appliquons le théorème 8.1 à $\mathcal{L} = \Omega_X$. Par dualité $H^1(X, \Omega_X)$ est isomorphe à $H^1(X, \Omega_X(-\xi))$ si et seulement si $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $H^0(X, \mathcal{O}_X(\xi))$, ce qui signifie qu'il n'existe pas de fonctions méromorphe non constante sur X ayant un pôle simple en ξ. *Donc ϕ est partout définie si et seulement si $g \geq 1$ et ϕ n'est définie nulle part si et seulement si $g = 0$.* De plus, si $g = 1$, ϕ est constante, car $h^0(\Omega_X) = 1$ et l'espace projectif correspondant est réduit à un point. Réciproquement, si ϕ est constante, ϕ étant partout définie, on a $\Omega_X(X) \neq \Omega_X(-\xi)(X) = \Omega_X(-\xi - \eta)(X)$ par le théorème 8.1 (2), donc si $\omega \in \Omega_X(-\xi)(X)$ on a $\omega = 0$, et si $\omega \in \Omega_X(X)$ avec $\omega \neq 0$, on a $\operatorname{div}(\omega) = 0$ et $0 = 2g - 2$, donc $g = 1$.

Supposons $g \geq 2$; ϕ est donc partout définie. S'il existe une fonction méromorphe sur X ayant un pôle double comme seule singularité, ce qui équivaut à l'existence d'une fonction méromorphe sur X ayant exactement deux pôles simples (regarder X comme un revêtement de degré 2 de $\mathbb{S}$), cela signifie que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \neq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(2\xi))$, ou qu'il existe $\xi \in X$ tel que $T_\xi \phi = 0$ (th. 8.1 (3)). De façon plus précise, on a le lemme:

Lemme 8.3. *Soit f une fonction méromorphe de degré 2 sur une surface de Riemann compacte X de genre g. Alors*

(1) *f admet $(2g + 2)$ points de ramification.*
(2) *Pour tout $\xi \in X$ et tout $\eta \in X$, $f(\xi) = f(\eta)$ si et seulement si $\phi(\xi) = \phi(\eta)$, où $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Omega_X(X))$ est le plongement par les formes différentielles.*

Démonstration. (1): La formule de Riemann–Hurwitz (corollaire 7.5) montre que $2g - 2 = 2(-2) + \sum_{i=1}^r (e_i - 1)$, ce qui s'écrit $2g + 2 = \sum_{i=1}^r (e_i - 1)$. Comme $2 \leq e_i \leq \deg f = 2$, on a $e_i = 2, 1 \leq i \leq r$ et donc $r = 2g + 2$; ceci prouve qu'un tel revêtement de degré 2 est ramifié, avec $2g + 2$ points de ramification.

(2): Si $f(\xi) = f(\eta) = \sigma$, la fonction $\frac{1}{f - \sigma}$ a deux pôles simples: en ξ et η, donc $\mathcal{O}_X(X) \neq \mathcal{O}_X(\xi + \eta)(X)$ et donc $H^1(X, \Omega_X) \neq H^1(X, \Omega_X(-\xi - \eta))$, d'où $\phi(\xi) = \phi(\eta)$ (th. 8.1 (2)).

Réciproquement, dire que $\phi(\xi) = \phi(\eta)$ équivaut à dire qu'il existe une fonction méromorphe h ayant des pôles simples en ξ et η. Or nous allons voir qu'on met en évidence un automorphisme γ de $\mathbb{S}$ tel que $\gamma \circ h = f$, ce qui assure que $f(\xi) = \gamma \circ h(\xi) = \gamma(\infty) = \gamma \circ h(\eta) = f(\eta)$. En effet, h a pour degré 2, donc admet au moins un point de ramification ; quitte à composer par une translation de $\mathbb{S}$ et comme ci-dessus par l'automorphisme $\frac{1}{z - \sigma}$ de $\mathbb{S}$, on peut se ramener au cas où f et g ont toutes deux un pôle double en $\xi \in X$. Puisque $h^0(\mathcal{O}_X(2\xi)) \leq 2$, il existe α et β

dans $\mathbb{C}$ tels que, dans $\mathcal{O}_X(2\xi)$, $h = \alpha + \beta \cdot f$, d'où $g = \gamma \circ f$, avec $\gamma(z) = \alpha + \beta z$ et γ est un automorphisme. □

On en déduit le théorème:

Théorème 8.4. *Si $g \geq 2$, pour que ϕ ne soit pas un plongement, il faut et il suffit qu'il existe sur X une fonction méromorphe ayant un seul pôle et que celui-ci soit double.*

Définition 8.1. Une surface de Riemann X satisfaisant aux conditions du théorème 8.4 est appelé *hyperelliptique*.

Soit X une surface de Riemann hyperelliptique de genre $g \geq 2$. En vertu du théorème 6.4 au chapitre 1, $M(X)$ est une extension quadratique de $M(\mathbb{S})$, de sorte qu'on a: $M(X) = \mathbb{C}(z', w)$ et la relation

$$w^2 = \prod_{1 \leq i \leq 2g+2} (z' - a_i) \tag{14}$$

où les $a_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts. De plus, une transformation homographique[2] sur $\mathbb{C}(z')$ [qui induit un automorphisme de $\mathbb{S}$], permet d'écrire $M(X) = \mathbb{C}(z, w)$ avec la relation

$$w^2 = z(z-1) \prod_{1 \leq i \leq 2g-1} (z - \alpha_i) \tag{15}$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts.

Inversement, la donnée de l'equation $w^2 = z(z-1) \prod_{1 \leq i \leq 2n-1} (z - \alpha_i)$ définit un revêtement éventuellement ramifié X de $\mathbb{S}$ de degré 2 (voir chap. 1, th. 3.2 et cor. 5.7), donc une fonction méromorphe sur la surface de Riemann X. Cette fonction ayant un pôle double, X est hyperelliptique. De plus, on peut déterminer son genre g ; en effet, en vertu du lemme 8.3, le revêtement est ramifié en $2g + 2 = 2n + 2$ points. Finalement, une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$ est déterminée par un système de $2g - 1$ paramètres complexes. Deux telles courbes sont isomorphes si et seulement s'il existe une transformation homographique échangeant les deux systèmes de paramètres correspondants et permutant les points $\{0, 1, \infty\}$.

9. Points de Weierstrass

Soit X une surface de Riemann compacte et connexe, soit $\xi \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une section du faisceau $\mathcal{O}_X(n\xi)$ est une fonction méromorphe n'ayant de pôle qu'au point ξ, avec un ordre inférieur ou égal à n. Nous noterons $\mathcal{M}(\xi)$ *l'anneau des fonctions méromorphes n'ayant de pôle qu'au point* ξ et pour tout n, $\mathcal{M}_n(\xi) = \{f \in \mathcal{M}(\xi) \mid v_\xi(f) \geq -n\}$ est un idéal de $\mathcal{M}(\xi)$. Considérons la filtration

$$\cdots \subset H^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)\xi)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(n\xi)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X((n+1)\xi)) \subset \cdots$$

et soit $A_n(\xi) = H^0(X, \mathcal{O}_X(n\xi))/H^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)\xi))$ et soit $a_n(\xi) = \dim_{\mathbb{C}} A_n(\xi)$.

Proposition 9.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\xi \in X$, $a_n(\xi) \leq 1$. De plus, $a_0(\xi) = 1$ et pour $n \geq 2g$, $a_n(\xi) = 1$ et* $\boxed{a_0(\xi) + a_1(\xi) + \cdots + a_{2g-1}(\xi) = g}$.

[2] $z' = \frac{az+b}{cz+d}$

DÉMONSTRATION. En effet, à la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X((n-1)\xi) \to \mathcal{O}_X(n\xi) \to \mathcal{O}_\xi \to 0$, où $\mathcal{O}_\xi$ est de torsion, on associe sa suite exacte de cohomologie et, en passant au quotient, on obtient

$$0 \to A_n(\xi) \to \mathbb{C} \to H^1(X, \mathcal{O}_X((n-1)\xi)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(n\xi)) \to 0$$

Par le Vanishing Theorem 7.10 pour $n \geq 2g-1$ on a $h^0(\mathcal{O}_X(n\xi)) = \deg \mathcal{O}_X(n\xi) + 1 - g = n + 1 - g$, donc pour $n \geq 2g$: $a_n(\xi) = h^0(\mathcal{O}_X(n\xi)) - h^0(\mathcal{O}_X((n-1)\xi)) = 1$, et, de plus $h^0(\mathcal{O}_X(2g\xi)) = a_0(\xi) + a_1(\xi) + \cdots + a_{2g}(\xi) = g + 1$. □

THÉORÈME 9.2. *Soit ξ un point d'une surface de Riemann compacte X de genre $g \geq 1$; il existe exactement g entiers: $n_1, n_2, \ldots, n_g$ tels que $a_{n_i} = 0$ et tel que $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g \leq 2g-1$.*

Ces entiers sont appelés *gaps* ou *trous de Weierstrass* (en allemand: Lücken).

DÉMONSTRATION. Il est clair que, les $2g$ nombres $a_0(\xi), \ldots, a_{2g-1}(\xi)$ valant chacun 0 ou 1 et ayant une somme égale à g, g d'entre eux sont nuls. De plus, $a_1(\xi) = h^0(\mathcal{O}_X(\xi)) - h^0(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X(\xi)) - 1 = 0$, puisqu'il n'existe pas de fonction méromorphe sur X ayant seulement un pôle simple. □

REMARQUE 9.1. L'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas des trous, est stable par addition. En effet, pour tout p, q avec $a_p = a_q = 1$, c'est-à-dire s'il existe $f, h \in \mathcal{M}(\xi)$ telles que $v_\xi(f) = -p$ et $v_\xi(h) = -q$, alors $v_\xi(f \cdot h) = -p - q$, de sorte que $a_{p+q} = 1$. Il résulte de ceci que, si par exemple $a_2(\xi) = 2$, c'est-à-dire s'il existe une fonction méromorphe f ayant un pôle double en ξ, les trous sont: $1, 3, 5, \ldots, 2g-1$. Le point ξ est alors dit *point de Weierstrass hyperelliptique* ; f étant un revêtement de degré 2 de $\mathbb{S}$ (th. 8.4), il existe alors $2g+2$ points de Weierstrass hyperelliptiques sur X. Lorsque les trous sont: $1, 2, \ldots, g$, on dit que ξ est un *point ordinaire* de X ; dans tous les autres cas, on dit que ξ est un *point de Weierstrass*. Nous allons étudier les points de Weierstrass d'une surface de Riemann compacte et connexe X de genre g. Lorsque $g = 1$, pour tout $\xi \in X$, on a un seul trou qui est 1. Avant de considérer le cas général $g \geq 1$, démontrons un lemme qui nous sera nécessaire:

LEMME 9.3. *Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$ un p–uple de fonctions holomorphes définies dans un ouvert connexe U de $\mathbb{P}$. On pose :*

$$w_r(f) = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_p \\ f_1' & \ldots & f_p' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(p-1)} & \ldots & f_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

et cette fonction holomorphe ainsi définie est appelé wronskien *de f et possède les propriétés suivantes:*

(1) *$w_r(f)$ est identiquement nul si et seulement s'il existe une relation linéaire non triviale à coefficients complexes constants entre les f_i.*

(2) *V étant ouvert de $\mathbb{P}$ et $z : V \to U$ une fonction holomorphe non constante, on a*

$$w_r(f \circ z) = (w_r(f) \circ z) \cdot z'^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

(3) *w_r est une application $\mathbb{C}$–multilinéaire alternée et pour tout λ holomorphe sur U,*

$$w_r(\lambda f_1, \ldots, \lambda f_p) = \lambda^p \cdot w_r(f_1, \ldots, f_p)$$

(4) *Pour tout $x \in U$ tel que $v_x(f_1) < v_x(f_2) < \cdots < v_x(f_p)$, on a*

$$v_x(w_r(f)) = \sum_{i=1}^{p} (v_x(f_i) - i + 1)$$

DÉMONSTRATION. (1): Il est clair que si les f_i satisfont à une relation linéaire à coefficients constants, le déterminant est nul. Inversement, raisonnons par récurrence ; l'énoncé est clair pour $p = 1$ puisque $w_r(f) = f$ dans ce cas. Supposons-le vrai pour tout $p' < p$. Alors, ou bien $w_r(f_1, \dots, f_{p-1})$ est nul et il existe une relation linéaire entre $f_1, \dots, f_{p-1}$, donc entre $f_1, \dots, f_p$; ou bien $w_r(f_1, \dots, f_{p-1})$ n'est pas identiquement nul et soit U' l'ouvert dense dans U où $w_r(f_1, \dots, f_{p-1})$ n'est pas nul. En développant $w_r(f_1, \dots, f_p)$ pas rapport à la dernière colonne, nous obtenons une equation différentielle d'ordre $(p-1)$:

$$f_p^{(p-1)} \cdot w_r(f_1, \dots, f_{p-1}) + A_{p-2} \cdot f_p^{(p-2)} + \cdots + A \cdot f_p = 0$$

admettant p solutions : $(f_1, \dots, f_{p-1}, f_p)$ dont les $(p-1)$ premières sont linéairement indépendantes, de sorte que f_p est bien combinaison linéaires à coefficients constants des $(p-1)$ premières sur U' ; on a donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot f_i = 0 (\alpha_i \in \mathbb{C})$ sur U' et aussi sur U en vertu du principe de prolongement analytique.

(2): Il suffit de remarquer que dans les dérivations successives de $f_i \circ z$:

$$(f_i \circ z)' = (f_i' \circ z) \cdot z' \, ; \, (f_i \circ z)'' = (f_i'' \circ z) \cdot {z'}^2 + (f_i' \circ z) \cdot z'' \text{ etc.\dots}$$

apparaissent dès la dérivée seconde des termes supplémentaires proportionnels à ceux de la ligne précédente, de sorte que le déterminant se réduit à celui dont les éléments sont les $(f_i^{(j)} \circ z) \cdot z'^j$ et a pour valeur, en mettant z'^j en facteur dans chaque ligne:

$$z'^{\frac{p(p-1)}{2}} [w_r(f) \circ z]$$

(3): Le raisonnement (2) permet de réduire le déterminant à celui dont les éléments sont les $\lambda \cdot f_i^{(j)}$, d'où le résultat.

(4): Supposons que x soit l'origine du plan $\mathbb{P}$ quitte à multiplier f_i par une constante $\in \mathbb{C}$, ce qui ne changera pas $v_x(w_r(f))$, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ le développement en série entière de f_i au voisinage de l'origine $f_i(z) = z^{n_i} + z^{n_i+1} + \dots$, de sorte que les termes de plus bas degré de $w_r(f)$ sont donnés par le déterminant $w_r(z^{n_1}, \dots, z^{n_p})$ qui n'est pas identiquement nul ; en effet $(z^{n_1}, \dots, z^{n_p})$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ car $n_1 < \cdots < n_p$. Alors

$$w_r(z^{n_1}, \dots, z^{n_p}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{1 \le i \le p} c(\sigma, i) z^{n_i - \sigma(i) + 1}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et où $c(\sigma, i)$ est un entier, d'où

$$v_x(w_r(f_1, \dots, f_p)) = \sum_{1 \le i \le p} n_i - \sigma(i) + 1 = \sum_{1 \le i \le p} (v_x(f_i) - i + 1)$$

$\square$

THÉORÈME 9.4. *Pour toute surface de Riemann compacte X de genre $g > 1$, il existe une section non nulle w de $\Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ telle que*

(1) *$w(x) = 0$ si et seulement si x est un point de Weierstrass.*

(2) *Pour tout $x \in X$, $v_x(w) = \sum_{1 \le i \le g} (n_i - i)$ où les n_i sont les trous au point x.*

Démonstration. Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (1) car $v_x(w) = 0$ signifie que $n_i = i$ pour tout i, donc que les trous sont $1, 2, \ldots, g$, autrement dit que le point est ordinaire. Il reste donc à démontrer (2). Nous allons fabriquer une application $\mathbb{C}$–linéaire alternée $w : \Omega_X(X)^g \longrightarrow \Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}(X)$ telle que, pour tout $(\omega_1, \ldots, \omega_g) \in \Omega_X(X)^g$, pour toute carte (U, z) de X, $w(\omega_1, \ldots, \omega_g)|U = w_r(f_1, \ldots, f_g) \cdot dz^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ où $\omega_i|U = f_i \cdot dz$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$.

Soient donc (U, z) et (V, t) des cartes de X, soit $W = U \cap V$. Supposons que, pour tout i, $\omega_i|U = f_i \cdot dz$ et $\omega_i|V = h_i \cdot dt$. Montrons que les sections $w_r(f_1, \ldots, f_g) \cdot dz^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ et $w_r(h_1, \ldots, h_g) \cdot dt^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ de $\Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ respectivement sur U et V, coïncident sur W, où $z = z(t)$ est fonction de t. On a, dans W ; $\omega_i = f_i dz = (f_i \circ z) z' dt = h_i dt$, de sorte que $h_i = (f_i \circ z) z'$ et que

$$\begin{aligned} w_r(h_1, \ldots, h_g) &= z'^g \cdot w_r(f_1 \circ z, \ldots, f_g \circ z) \\ &= z'^g \cdot z'^{\frac{g(g-1)}{2}} \cdot w_r(f) \circ z \\ &= z'^{\frac{g(g+1)}{2}} \cdot w_r(f) \circ z \end{aligned}$$

Mais l'application canonique $\Omega_X^n \longrightarrow \Omega_X^{\otimes n}$ étant $\mathcal{O}_X$–multilinéaire, on a $dz^{\otimes n} = z'^n \cdot dt^{\otimes n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$w_r(h) dt^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}} = w_r(f) \circ z \cdot z'^{\frac{g(g+1)}{2}} dt^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}} = w_r(f) \circ z \cdot dz^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$$

Ceci permet de déduire l'existence d'une section globale de $\Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$; on a ainsi bien défini une application multilinéaire alternée : $\Omega_X(X)^g \longrightarrow \Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}(X)$ se factorisant par $\bigwedge^g \Omega_X(X)$. $\square$

Lemme 9.5. *Soit (U, z) une carte de X centrée en x. Soient $n_1 < \cdots < n_g$ les trous en x. Il existe une base de $\Omega_X(X)^g$: $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ telle que $v_x(\omega_i) = n_i - 1$ pour tout $i = 1, \ldots, g$.*

Démonstration. En effet, dire que n_i est un trou signifie que $a_{n_i} = 0$, ou encore que $H^0(X, \mathcal{O}_X((n_i - 1)x)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(n_i x))$ ou encore que $H^1(X, \mathcal{O}_X((n_i - 1)x)) \neq H^0(X, \mathcal{O}_X(n_i x))$, ou encore, par dualité, que $H^0(X, \Omega_X((-n_i + 1)x)) \neq H^0(X, \Omega_X(-n_i x))$. Autrement dit, il existe une forme différentielle ayant un zéro d'ordre $n_i - 1$. Ainsi, on met en évidence g formes différentielles dont l'une ne s'annule pas, les autres ayant des zéros d'ordre $(n_2 - 1), \ldots, (n_g - 1)$, qui sont évidemment indépendantes.

Alors, pour cette base $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ de $\Omega_X(X)^g$, on a:

$$v_x(w_r(\omega_1, \ldots, \omega_g)) = \sum_{1 \leq i \leq g} (n_i - 1 - i + 1) = \sum_{1 \leq i \leq g} (n_i - i)$$

$\square$

On a ainsi démontré que *l'ensemble des points de Weierstrass d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ est fini et non vide.*

Définition 9.1. On appelle *poids* d'un point $x \in X$ l'entier

$$v_x(w) = \sum_{i=1}^{g} (n_i - i)$$

Corollaire 9.6. *Le poids d'un point ordinaire est nul. Le poids d'un point hyperelliptique est* $\frac{g(g-1)}{2}$. *La somme des poids étant le degré d'une section de* $\Omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$, *vaut* $(2g-2) \cdot \frac{g(g+1)}{2} = (g-1) \cdot g \cdot (g+1)$.

Alors, dès que X est hyperelliptique, tous ses points de Weierstrass sont hyperelliptiques puisque la somme des poids des points de ramification du revêtement X de $\mathbb{S}$ vaut déjà $(2g+2) \cdot \frac{g(g-1)}{2} = (g-1) \cdot g \cdot (g+1)$.

Corollaire 9.7. *Toute courbe de genre* 2 *est hyperelliptique.*

Démonstration. En effet, les trous étant tels que $1 = n_1 < n_2 \leq 2g - 1 = 3$, ou bien les trous en x sont: $(1, 2)$ et le point est ordinaire, ou bien les trous sont $(1, 3)$ et le point est de Weierstrass et hyperelliptique. On est sûr que de tels points existent puisque la somme de leurs poids vaut: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. $\square$

CHAPITRE 3

Variété de Picard

Dans ce qui suit, X désigne une surface de Riemann compacte et connexe de genre g.

Par manque de temps, les démonstrations de cette partie du cours sont parfois moins complètes que dans les chapitres précédents. On donne cependant assez d'indications au lecteur pour qu'il puisse les reconstituer.

1. Cohomologie réelle et complexe

Pour tout groupe commutatif ordinaire G, on note G_X le faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto G$.

Théorème 1.1. *Les espaces vectoriels complexes $H^i(X, \mathbb{C}_X)$ sont de dimension $1, 2g, 1$ ou 0 selon que $i = 0, 1, 2$ ou $i > 2$.*

Démonstration. Nous allons déduire ce théorème des théorèmes de de Rham et Dolbeault ainsi que de la dualité de Serre. Pour cela, on considère la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \to 0$$

où Ω_X est, comme plus haut, le faisceau des formes différentielles holomorphes, c'est-à-dire celles qui sont fermées et de type $(1, 0)$. Puisque X est connexe, on a $H^0(X, \mathbb{C}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ et la suite exacte de cohomologie s'écrit:

(16)

$$0 \to H^0(X, \Omega_X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \Omega_X) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{C}_X) \to 0$$

Puisque ceci est une suite exacte d'espaces vectoriels complexes et que $H^1(X, \Omega)$ est de dimension 1, pour voir que $\dim H^2(X, \mathbb{C}_X) = 1$, il suffit de voir que cet espace est non nul. Or il existe une forme différentielle ω de degré 2 telle que $\iint_X \omega = 1$: la construire telle que son support soit contenu dans un ouvert de coordonnées. La classe de ω dans $H^2(X, \mathbb{C}_X)$ n'est pas nulle car alors on aurait $\omega = d\alpha$ d'après le théorème de de Rham ce qui contredirait la formule de Stokes. L'application δ de (16) est donc un isomorphisme, d'où la conclusion puisque les dimension de $H^0(X, \Omega_X)$ et de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ sont égales à g (prop. 7.3 au chap. 2). $\square$

Notons de plus que la résolution de Dolbeault du module inversible Ω_X s'écrit $0 \to \Omega_X \to \mathcal{E}_X^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2 \to 0$ (cor. 4.8 au chap. 2 ; voir aussi le diagramme D1 page 38), ce qui montre que toute forme différentielle ω de degré 2 a une classe dite *classe de Dolbeault*, dans $H^1(X, \Omega_X)$, à savoir son image par le cobord attaché à la suite exacte ci-dessus. Par ailleurs, l'image de ω par le cobord itéré attaché à la suite exacte

$$0 \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{E}_X \to \mathcal{E}_X^1 \to \mathcal{E}_X^2 \to 0$$

est un élément de $H^2(X, \mathbb{C}_X)$ que l'on appelle *la classe de de Rham* de ω. Par fonctorialité du cobord par rapport aux suites exactes, il est immédiat que l'image par l'application δ de (16) de la classe de Dolbeault de ω est sa classe de de Rham. La remarque qui nous a servi à prouver le théorème précédent montre donc ce qui suit:

Corollaire 1.2. *En attachant à toute forme différentielle ω de degré 2 le nombre complexe $\iint_X \omega$, on définit des isomorphismes*

$$H^2(X, \mathbb{C}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \xleftarrow{\sim} H^1(X, \Omega_X)$$

qui sont compatibles avec l'isomorphisme δ de (16). *Pour qu'il existe $\alpha \in \mathcal{E}^1_X(X)$ telle que $d\alpha = \omega$, (resp. pour qu'il existe $\alpha \in \mathcal{E}^{1,0}_X(X)$ telle que $d\alpha = \omega$) il faut et il suffit que $\iint_X \omega = 0$.*

En utilisant encore les suites exactes de de Rham et Dolbeault, on peut obtenir une description plus précise de l'application $H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Pour cela, on considère le faisceau $\overline{\Omega}_X$ défini par l'exactitude de la suite

$$0 \to \overline{\Omega}_X \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}_X \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2_X \to 0$$

Il est immédiat que l'on a un isomorphisme de faisceaux de $\mathbb{R}_X$–modules $\Omega_X \xrightarrow{\sim} \overline{\Omega}_X$, $a \mapsto \bar{a}$, et que toute section b de $\overline{\Omega}_X$ s'écrit localement $b = g d\bar{z}$, où z est une uniformisante locale et g une fonction *antiholomorphe* ($\bar{g}$ est holomorphe). Par définition, toute section de Ω_X ou de $\overline{\Omega}_X$ est fermée ; d'après de Rham, on a donc une application

$$\begin{aligned} \Omega_X(X) \oplus \overline{\Omega}_X(X) &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) \\ a &\longmapsto r(a) \end{aligned} \tag{17}$$

et, d'après Dolbeault, une application

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_X(X) &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \\ a &\longmapsto s(a) \end{aligned} \tag{18}$$

qui sont toutes deux $\mathbb{C}$–linéaires. De plus, par retour aux définitions et fonctorialité du cobord par rapport aux suites exactes, il est immédiat que l'image de $r(a, b)$ par $H^1(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ n'est autre que $s(b)$.

Théorème 1.3. *Les applications* (17) *et* (18) *ci-dessus sont des bijections et l'image de $r(a, b)$ par $H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est $s(b)$.*

Démonstration. Dans la suite exacte (16), l'application δ est bijective, il suffit donc de prouver que (18) est bijective, ou même injective puisque sa source et son but ont pour dimension g. Mais, par dualité de Serre, la condition $s(a) = 0$ signifie que, pour toute forme holomorphe b, on a $\iint_X a \wedge b = 0$, d'où $a = 0$ en prenant $b = \overline{a}$, car localement on a $a = f d\overline{z}$, donc $a \wedge \overline{a} = f\bar{f} d\overline{z} \wedge dz = 2i|f|^2 dx \wedge dy$. □

Notons que $\mathbb{C}_X = \mathbb{R}_X \oplus i\mathbb{R}_X$; puisque la cohomologie est un foncteur additif, il en résulte que la dimension de l'espace vectoriel réel $H^i(X, \mathbb{R}_X)$ est la même que celle de l'espace vectoriel complexe $H^i(X, \mathbb{C}_X)$ et même que l'inclusion $H^i(X, \mathbb{R}_X) \to H^i(X, \mathbb{C}_X)$ transforme une base du premier en une base du second.

Corollaire 1.4. *L'application $H^1(X, \mathbb{R}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ induite par le morphisme évident $\mathbb{R}_X \to \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme d'espaces vectoriel réels. Pour toute forme différentielle $a \in \overline{\Omega}_X(X)$, la classe de Dolbeault de a dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est l'image par l'isomorphisme ci-dessus de la classe de de Rham de la forme réelle $a + \overline{a}$.*

Démonstration. D'après ce qui vient d'être dit des relations entre $H^1(X, \mathbb{R}_X)$ et $H^1(X, \mathbb{C}_X)$, il est immédiat que l'isomorphisme identifie $H^1(X, \mathbb{R}_X)$ et l'ensemble des éléments réels de $\Omega_X(X) \oplus \overline{\Omega}_X(X)$, lesquels sont ceux qui sont de la forme $(\overline{a}, a)$, $a \in \overline{\Omega}_X(X)$, d'où la conclusion, en considérant le morphisme composé $\mathbb{R}_X \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X$ et en appliquant le théorème 1.3. □

2. Cohomologie entière

Nous avons en vue le théorème suivant

Théorème 2.1. *Pour tout i, le groupe $H^i(X, \mathbb{Z}_X)$ est un réseau*[1] *de $H^i(X, \mathbb{R}_X)$. En particulier, $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$, $H^2(X, \mathbb{Z}_X) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^i(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ pour $i > 2$.*

Démonstration. Nous verrons plus bas (cf. la remarque 2.2) comment démontrer ce théorème dans le cas $i = 1$ en considérant le revêtement universel de X puis, en remarque 4.1, comment le prouver dans le cas $i = 2$ en utilisant à fond la structure de surface de Riemann de X. Mais ces démonstrations cas par cas sont un peu détournées, c'est pourquoi nous conseillons au lecteur de procéder comme suit à titre d'exercice. Grâce à une fonction méromorphe $z : X \longrightarrow \mathbb{S}$, on considère X comme un revêtement ramifié de la sphère de Riemann. On choisit une *triangulation* de $\mathbb{S}$ telle que les projections des points de ramification de z soient des sommets. En dehors des sommets, l'application z est donc un revêtement étale de degré n, ce qui permet de relever la triangulation à X car les simplexes sont simplement connexes. On tient compte du fait que X est orientée en orientant tous les simplexes de dimension 2 de la même façon que X. Cette précaution se traduit de la manière suivante. Si l'on désigne respectivement par F, A et S les ensembles de faces, d'arêtes et de sommets de la triangulation, on a des *relations d'incidence* qui se traduisent par des nombres $e(f, a)$, $f \in F$, $a \in A$ et $e(a, s)$, $a \in A$, $s \in S$ qui valent -1, 0 ou 1 et, pour chaque arête $a \in A$, les $e(f, a)$ (resp. $e(a, s)$) sont nuls sauf deux d'entre eux qui sont de signe opposés. Ceci dit, notant de la même façon (et pour cause !) un simplexe et l'application correspondante, pour tout groupe commutatif G, on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to G_X \to \bigoplus_{f \in F} f_* f^* G_X \to \bigoplus_{a \in A} a_* a^* G_X \to \bigoplus_{s \in S} s_* s^* G_X \to 0 \tag{19}$$

la définition des morphismes étant laissée à la sagacité du lecteur. Puisque les simplexes sont fermés et contractiles, il est immédiat que (19) est en fait une résolution de G_X par des faisceaux acycliques, ce qui montre que la cohomologie de G_X est celle du complexe obtenu en passant aux sections, qui n'est autre que $G^{(F)} \to G^{(A)} \to G^{(S)}$. Bien entendu, puisque X est connexe, on a $G = H^0(X, G_X)$, mais on a également un isomorphisme canonique $H^2(X, G_X) \xrightarrow{\sim} G$, obtenu en associant à tout $u \in G^{(S)}$, $u = (u_s)_{s \in S}$, l'élément $\sum_{s \in S} u_s$. On sait donc par exemple que $H^i(X, \mathbb{Z}_X)$ est nul pour $i > 2$ et libre de rang 1 pour $i = 0, 2$. Pour $i = 1$, il est de type fini car la triangulation est finie, et la suite exacte de cohomologie attachée à $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to 0$ montre qu'il est sans torsion, donc libre de type fini. Le théorème des coefficients universels (particulièrement trivial dans le cas présent, cf. Mac Lane, Homology, p. 171) montre alors que, pour tout groupe commutatif G, on a $H^i(X, G_X) = H^i(X, \mathbb{Z}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, $i \geq 0$, ce qui implique le théorème ci-dessus. On peut alors calculer le rang de $H^1(X, \mathbb{C}_X)$: c'est évidemment $s - a + f - 2$, où s, a et f sont les cardinaux de S, A et F. Mais, ces nombres se calculent à partir des analogues s', a' et f' relatifs à la triangulation de la sphère dont on est parti,

[1] sous–groupe additif engendré par une base

du degré n du revêtement ramifié et de ses indices de ramification $e_1, \dots, e_r$. Il est en effet immédiat que l'on a $f = n \cdot f'$, $a = n \cdot a'$ et $s = n \cdot s' - \sum_i (e_i - 1)$, d'où

$$s - a + f = n(s' - a' + f') - \sum_{i=1}^{r} (e_i - 1) \tag{20}$$

On sait depuis Euler que $s' - a' + f' = 2$ [plus savant mais moins malin que lui, on peut le prouver en faisant $X = \mathbb{S}$ dans ce qui précède, car $H^1(\mathbb{S}, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}}) = 0$], d'où, par la formule de Riemann–Hurwitz, $s - a + f = 2 - 2g$, ce qui redonne le rang de $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ calculé autrement au paragraphe précédent. □

Nous allons maintenant montrer que, pour tout groupe commutatif A, on a un isomorphisme

$$H^1(X, A_X) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X), A) \tag{21}$$

où $\pi_1(X)$ est le groupe fondamental de X, que nous considèrerons pour les besoins de la cause comme le groupe d'automorphismes du revêtement universel $p : \widetilde{X} \to X$ de X.

Lemme 2.2. *Soit* $0 \to A_X \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} \mathcal{F} \to 0$ *une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur* X*, où* A_X *est constant. Pour tout* $s \in \mathcal{F}(X)$*, l'espace étalé* E_s *attaché au faisceau* $v^{-1}(s)$ *est un revêtement de* X *qui est galoisien de groupe* A*.*

Remarque 2.1. Le faisceau $v^{-1}(s)$ est défini comme suit: pour un ouvert U de X on a $v^{-1}(s)(U) = \{e \in \mathcal{E}(U) \mid v(e) = s|U\}$. La fibre est $v^{-1}(s)_x = v_x^{-1}(s_x) \subset \mathcal{E}_x$.

Démonstration. Le groupe A opère sur le faisceau $v^{-1}(s)$ par $(a, e) \mapsto a + e$, $a \in A$, $e \in v^{-1}(s)(U)$, où U est un ouvert de X, donc aussi sur E_s. Puisque A opère librement et que les fibres de E_s ont toutes même cardinal que A, il reste à voir que E_s est un revêtement, ce qui se vérifie localement ; on peut donc supposer qu'il existe $e \in \mathcal{E}(U)$ tel que $v(e) = s$, d'où un isomorphisme de faisceaux $v^{-1}(s)|U \xrightarrow{\sim} A_U$, $e' \mapsto e' - e$, d'où la conclusion, car l'espace étalé attaché à A_U est le revêtement trivial $U \times A$. □

Puisque E_s est un revêtement galoisien de groupe A, on sait lui attacher un morphisme de groupes $d(s) : \pi_1(X) \longrightarrow A$ que l'on peut caractériser de la façon suivante. Puisque $\widetilde{X}$ est simplement connexe, il existe un X–morphisme $f : \widetilde{X} \to E_s$; puisque A est commutatif, $d(s)$ est *l'unique morphisme de groupes* tel que, pour tout $x \in X$, on ait $f(gs) = d(s)(g) \cdot f(x)$, pour tout $g \in \pi_1(X)$. Par ailleurs, la théorie élémentaire des revêtement nous enseigne que E_s est trivial si, et seulement si, $d(s)$ est le morphisme nul ; par ailleurs, E_s est trivial si et seulement si $v^{-1}(s)$ admet une section, ce qui signifie que l'image de s par le cobord $H^0(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, A_X)$ est nulle. Enfin, on vérifie aisément que $d(s + s') = d(s) + d(s')$. En effet, le morphisme $d(s) + d(s')$ correspond au revêtement galoisien quotient $(E_s \times E_{s'})/A$, où A opère "diagonalement" $a \cdot (x, x') = (ax, -ax')$, et il est immédiat que l'aplication $E_s \times E_{s'} \longrightarrow E_{s+s'}$, $(x, x') \mapsto x + x'$, induit un isomorphisme $(E_s \times E_{s'})/A \xrightarrow{\sim} E_{s+s'}$. En conclusion, à la suite exacte du lemme 2.2, nous avons attaché un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X), A) \\ s &\longmapsto d(s) \end{aligned}$$

dont le noyau est l'image de $H^0(X, \mathcal{E})$. Si maintenant nous prenons pour $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections non nécessairement continues de A_X, de sorte que

$H^1(X, \mathcal{E}) = 0$, nous en déduisons un morphisme injectif

$$\varepsilon(A) : H^1(X, A_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X), A) \tag{22}$$

De plus, *ce morphisme est fonctoriel en A*. En effet, si l'on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_X & \xrightarrow{u} & \mathcal{E} & \xrightarrow{v} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_X} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_X & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $s \in \mathcal{F}(X)$, si $s' = k(s) \in \mathcal{F}'(X)$, alors on a un morphisme $E_s \to E_{s'}$, $e \mapsto j(e)$, qui est compatible avec les opérations de A et A'. D'après la caractérisation de $d(s)$ donnée plus haut, ceci nous assure que, dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), A')$, on a

$$d(s') = i \circ d(s) \tag{23}$$

ce qui, en prenant pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les faisceaux de germes de sections non nécessairement continues de A_X et A'_X, nous assure que (22) est un morphisme de foncteurs.

Montrons maintenant que $\varepsilon(A)$ est *surjectif*. Tout morphisme $\phi : \pi_1(X) \to A$ correspond à un revêtement galoisien de groupe A, à savoir le quotient par $\pi_1(X)$ de $\widetilde{X} \times A$, où $\pi_1(X)$ opère par $g \cdot (x, a) = (gx, \phi(g^{-1}) + a)$; notons-le E. Soit $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections non nécessairement continues de A_X et soit $0 \to A_X \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} \mathcal{F} \to 0$ la suite exacte correspondante. Soit e une section non nécessairement continue de $\mathcal{E}$. Pour toute section continue $e' \in E(U)$, on a $e' - e \in \mathcal{E}(U)$, d'où un morphisme de faisceaux $\lambda : E \to \mathcal{E}$ qui satisfait à $\lambda(ae') = u(a) + \lambda(e')$, $a \in A$, $e' \in E(U)$. Le composé $v \circ \lambda : E \to \mathcal{F}$ se factorise par une section s de $\mathcal{F}$ et on vérifie tout de suite que λ identifie E et $v^{-1}(s)$, d'où la conclusion.

En résumé:

Proposition 2.3. *Pour tout groupe commutatif A, on a un isomorphisme de groupes $\varepsilon(A) : H^1(X, A_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi_1(X), A)$, qui est fonctoriel en A. De plus, avec les notation du lemme 2.2, pour tout $s \in \mathcal{F}(X)$, l'image $\varepsilon(A)$ du cobord de s est le morphisme $d(s) : \pi_1(X) \to A$ attaché au revêtement galoisien $v^{-1}(s) = E_s$.*

Remarque 2.2. Depuis le début des constructions du lemme 2.2 nous n'avons utilisé que le fait que X admet un revêtement universel ; nous utiliserons le fait que X est *compacte* par l'intermédiaire du §1 qui assure que $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ est de dimension finie. Soit H le groupe obtenu en divisant $\pi_1(X)$ par son groupe des commutateurs puis le quotient par son groupe de torsion. Pour tout groupe commutatif sans torsion A, la proposition 2.3 fournit un isomorphisme $H^1(X, A_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H, A)$. En prenant $A = \mathbb{C}$ on voit que H est libre de rang $2g$, et en prenant ensuite $H = \mathbb{Z}$ puis $H = \mathbb{R}$, on en déduit sans utiliser la triangulation que $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ est un réseau de $H^1(X, \mathbb{R}_X)$. La triangulation utilisée pour prouver le théorème 2.1 nous donne cependant un résultat plus précis même pour la cohomologie de dimension 1. En effet, nous avons noté que, pour tout groupe commutatif G, on a $H^1(X, G_X) \simeq H^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$. Combiné avec le résultat précédent, ceci nous assure que *le quotient $\pi_1(X)^{ab}$ de $\pi_1(X)$ par son sous-groupe des commutateurs* est sans torsion, donc égal à H comme on voit en prenant pour G les quotients finis de $\mathbb{Z}$ et en calculant de deux façons $H^1(X, G_X)$. Donc $\pi_1(X)^{ab}$ *est libre de rang $2g$.*

Considérons à nouveau le revêtement universel $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ de X. A toute forme différentielle fermée $a \in \mathcal{E}^1_X(X)$ est attachée une forme différentielle fermée $\widetilde{a} = p^*(a)$ sur $\widetilde{X}$; puisque $\widetilde{X}$ est simplement connexe, il existe une fonction $\widetilde{f}$ sur $\widetilde{X}$ telle que $\widetilde{a} = d\widetilde{f}$. Pour tout $g \in \pi_1(X)$, on a encore $d(\widetilde{f} \circ g) = a$, d'où il résulte que la fonction $\widetilde{f} \circ g - \widetilde{f}$ est une *constante* qui ne dépend pas du choix de $\widetilde{f}$. Si l'on considère un point $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ et un chemin $\widetilde{\gamma}$ de classe $\mathcal{C}^1$ joignant $\widetilde{x}$ et $g\widetilde{x}$, sa projection γ sur X est une courbe fermée et l'on a bien entendu $\int_\gamma a = \int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{a} = \widetilde{f} \circ g - \widetilde{f}$. C'est pourquoi cette constante sera notée

$$\int_\gamma a, \quad \gamma \in \pi_1(X),\ a \in \mathcal{E}^1_{X,f}(X) \tag{24}$$

où $\mathcal{E}^1_{X,f}$ désigne le faisceau des formes différentielles fermées. Pour γ fixé, $\int_\gamma a$ est une forme linéaire en a et cette forme s'appelle *une période de la variété* X. Pour a fixé, $\int_\gamma a$ est un morphisme de groupe $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui s'appelle "*les périodes*" de la forme différentielle a [ce pluriel bizarre s'explique par le souci de rester fidèle à la terminologie classique, cf. la remarque 2.3]. Pour que a soit exacte (soit la différentielle d'une fonction sur X) il faut et il suffit que la fonction $\widetilde{f}$ sur $\widetilde{X}$ passe au quotient, c'est-à-dire soit de la forme $\widetilde{f} = f \circ p$, ce qui signifie qu'elle est invariante par $\pi_1(X)$, ce qui signifie que *les périodes* de a *sont nulles*. Utilisant maintenant le théorème de de Rham, nous définissons un morphisme de groupes

$$H^1(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}) \tag{25}$$

qui, à la classe d'une forme a, associe le morphisme $\gamma \mapsto \int_\gamma a$. D'après ce que nous venons de dire, (25) est *injectif.* Bien entendu, ce morphisme est aussi celui qui a été défini en (21). Pour le voir, il suffit d'appliquer la proposition 2.3 à la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{E}_X \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1_X \to 0$. Donc (25) est bijectif, d'où l'importante conséquence que voici.

Théorème 2.4. (d'existence de Riemann) *Soit $H = \pi_1(X)^{ab}$ le quotient du groupe fondamental de X par son sous-groupe des commutateurs. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes*

$$\begin{aligned} \Omega_X(X) \oplus \overline{\Omega}_X(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}) \\ a &\longmapsto (\gamma \mapsto \int_\gamma a) \end{aligned} \tag{26}$$

On a un isomporphisme d'espaces vectoriels réels

$$\begin{aligned} \Omega_X(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathbb{R}) \\ a &\longmapsto (\gamma \mapsto 2\Re \int_\gamma a) \end{aligned} \tag{27}$$

Démonstration. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première en considérant le morphisme $\Omega_X(X) \to \Omega_X(X) \oplus \overline{\Omega}_X(X)$, $a \mapsto (a, \overline{a})$. Quant à la première, elle résulte du théorème 1.3 qui assure que toute classe de cohomologie complexe est représentée de manière unique par une forme appartenant à $\Omega_X(X) \oplus \overline{\Omega}_X(X)$. Notons que la bijectivité de (27) peut se traduire en disant que, pour tout morphisme $u : H \to \mathbb{R}$, *il existe une unique forme différentielle holomorphe* ω dont les périodes soient données par $2\Re \int_\gamma \omega = u(\gamma)$. Puisque le groupe H est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$, en choisissant une base de H, on voit que la donnée de ω équivaut à celle de $2g$ nombres réels. Sous cette forme, l'énoncé ci-dessus apparaît bien comme un théorème d'existence. $\square$

Corollaire 2.5. *Pour que la classe de de Rham d'une forme fermée $a \in \mathcal{E}^1_{X,f}(X)$ appartienne à $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, il faut et il suffit que ses périodes soient entières. Pour que la classe de Dolbeault d'une forme $a \in \overline{\Omega}_X(X)$ appartienne à l'image de $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\iota} H^1(X, \mathcal{O}_X)$, il faut et il suffit que les parties réelles de ses périodes soient demi-entières.*

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement de la proposition 2.3. Pour la seconde, on réfère au corollaire 1.4. Notons que ce qui précède montre que l'application ι *est injective et que son image est un réseau.* □

Remarque 2.3. Nous avons vu que le groupe $\pi_1(X)^{ab}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. Depuis Riemann, on établit ce résultat grâce à la "*dissection canonique*" de X qui montre que X s'obtient en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone à $4g$ côtés. Dans X, ces cotés ont pour image des courbes fermées qui représentent des éléments du groupe fondamental et les images de ceux-ci forment une base du groupe $\pi_1(X)^{ab}$. On trouve donc ainsi $2g$ périodes priviligiées qui déterminent toutes les autres et l'on appelle alors *périodes d'une forme différentielle* les $2g$ *nombres* ainsi obtenus. En fait, la dissection canonique est inutile pour les questions étudiées dans le présent chapitre ; en revanche elle met en évidence un fait important que nous ne démontrerons pas, à savoir que $\pi_1(X)$ lui-même est le quotient d'un groupe libre à $2g$ générateurs $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ liés par la relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \tag{28}$$

Enfin, à titre d'exercice, le lecteur pourra prouver le corollaire 2.5 sans utiliser aucun des résultats de ce chapitre, sauf la définition des périodes, en notant que l'on a des suites exactes $0 \to \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{C}_X \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathbb{C}_X^\times \to 0$, où $\mathbf{e}(u) = \exp(2\pi i u)$, et $0 \to \mathbb{C}_X^\times \longrightarrow \mathcal{E}_X^\times \xrightarrow{D} \mathcal{E}^1_{X,f} \to 0$, où $\mathcal{E}_X^\times$ est le faisceau des fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$ partout non nulles et où $Df = \frac{df}{2\pi i f}$, d'où l'on déduit que, pour toute forme fermée a, la condition $a = Df$ signifie que la classe de de Rham de a a une image nulle dans $H^1(X, \mathbb{C}_X^\times)$, ce qui signifie qu'elle appartient à l'image de $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$. Le corollaire 2.5 est donc bien banal et beaucoup moins profond que le théorème 2.4. A ce stade, il est bon de faire le point et de se souvenir comment on est arrivé là. Le premier point sérieux est la preuve de "l'axiome" 6.2 qui assure l'existence de fonctions méromorphes non constantes sur X ; il s'agit d'une démonstration d'analyse qui nous donne du même coup la finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents. Moyennant quoi, on peut considérer X comme un revêtement ramifié de la sphère de Riemann et construire une triangulation de X, ce qui fonde les résultats du présent paragraphe, à ceci près qu'il faut encore savoir pourquoi le genre g' défini comme la moitié du rang de $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ est aussi égal à la dimension g de l'espace des formes différentielles holomorphes. La formule de Riemann–Hurwitz et la formule (20) nous montrent que $2g' - 2$ est le degré du diviseur d'une forme différentielle méromorphe quelconque ; enfin, ce degré est égal à $2g - 2$ d'après le théorème de Riemann–Roch, c'est-à-dire, en dernière analyse, d'après la dualité de Serre.

3. La Jacobienne et la propriété universelle d'Albanese

Notons $\widetilde{JX}$ l'espace des formes $\mathbb{C}$–linéaires sur l'espace $\Omega_X(X)$ des formes différentielles holomorphes. Parmi celles-là figurent les périodes, qui sont de la forme $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$, $\gamma \in \pi_1(X)$. Les périodes forment un réseau P de $\widetilde{JX}$. En effet, si $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ est une base de $\pi_1(X)^{ab}$, les formes linéaires correspondantes sur $\Omega_X(X)$ sont indépendantes sur $\mathbb{R}$ car il en est ainsi de leurs parties réelles car celles-ci forment une base du dual réel de $\Omega_X(X)$ d'après (27). On appelle *Jacobienne* de X le quotient $JX = \widetilde{JX}/P$. Il est clair qu'il existe une structure de groupe de Lie complexe sur JX caractérisée par la condition que la projection $\pi : \widetilde{JX} \longrightarrow JX$ soit un morphisme car π est un revêtement. Rappelons à ce propos que le quotient d'un espace vectoriel complexe par un réseau s'appelle *un tore complexe*. Bien entendu, JX est compacte et de dimension g. Nous allons maintenant construire un morphisme de variétés analytiques complexes

$$j : X \longrightarrow JX \tag{29}$$

Pour cela, *nous choisissons un point* x_0 de X. Introduisant à nouveau le revêtement universel $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ de X et un point $\widetilde{x_0}$ de $\widetilde{X}$ se projettant sur x_0, on peut associer à tout $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ une forme linéaire sur $\Omega_X(X)$, autrement dit un élément $\widetilde{j}(\widetilde{x})$ de $\widetilde{JX}$, défini par

$$\widetilde{j}(\widetilde{x}) = \int_{\widetilde{x_0}}^{\widetilde{x}} \widetilde{\omega}\,, \quad \omega \in \Omega_X(X),\ \widetilde{\omega} = p^*(\omega) \tag{30}$$

d'où une application

$$\widetilde{j} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{JX} \tag{31}$$

Il est immédiat que $\widetilde{j}$ est *analytique complexe* : choisir une base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega_X(X)$, des fonctions holomorphes $F_1, \ldots, F_g$ sur $\widetilde{X}$ telles que $dF_i = \widetilde{\omega_i}$ et noter que $\widetilde{j}(\widetilde{x})$ est le point de $\mathbb{C}^g$ dont la i–ième coordonnée est $F_i(\widetilde{x}) - F_i(\widetilde{x_0})$. De plus, le composé $\pi \circ \widetilde{j} : \widetilde{X} \longrightarrow JX$ se factorise par $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, et définit le morphisme $j : X \longrightarrow JX$ cherché. En effet, si $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x'})$, il existe $\gamma \in \pi_1(X)$ tel que $\widetilde{x'} = \gamma\widetilde{x}$ et la différence $\widetilde{j}(\widetilde{x'}) - \widetilde{j}(\widetilde{x})$ est *une période* : que j soit un morphisme tient au fait que p et π sont étales et surjectives. On notera que

$$\widetilde{j}(\widetilde{x_0}) = j(x_0) = 0 \tag{32}$$

Par ailleurs, et par constructions, *l'image par* $\widetilde{j}$ *de la fibre* $p^{-1}(x_0)$ *est exactement le réseau des périodes* $P \subset \widetilde{JX}$.

Nous allons maintenant donner une propriété universelle de la Jacobienne qui la fait apparaître comme la "*variété d'Albanese*" de X. Pour cela nous ferons quelques remarques sur les tores complexes. Soit D un réseau d'un espace vectoriel complexe de dimension finie V et soit $T = V/D$ le tore complexe quotient. La différentielle dv d'une forme linéaire v sur V est une forme différentielle holomorphe invariante par translation, en particulier invariante par les translations de D. Par passage au quotient elle définit donc une forme différentielle holomorphe v_T sur T caractérisé par la condition $q^*(v_T) = dv$, où $q : V \longrightarrow T$ est la projection. Notons également que, pour tout $x \in V$, on a

$$\int_0^x q^*(v_T) = \int_0^x dv = v(x) \tag{33}$$

THÉORÈME 3.1. *Pour tout tore complexe* $T = V/D$ *et tout morphisme de variétés analytiques complexes* $f : X \longrightarrow T$ *tel que* $f(x_0) = 0$*, il existe un unique morphisme de tores complexes* $F : JX \longrightarrow T$ *tel que* $F \circ j = f$.

DÉMONSTRATION. Puisque $p : \widetilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X et que $q : V \to T$ est celui de T, il existe une unique application continue $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to V$ telle que $\widetilde{f}(x_0) = 0$ et que $q \circ \widetilde{f} = f \circ p$. Il est clair que $\widetilde{f}$ est holomorphe car q et p sont étales et surjectives. En fait, grâce à la remarque qui précède l'énoncé, nous pouvons donner une formule explicite pour $\widetilde{f}$. En effet, pour connaître $\widetilde{f}(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, il suffit de connaître $v(\widetilde{f}(\widetilde{x}))$ pour tout élément v du dual $V^\vee$ de V. Or on a évidemment

$$\int_{\widetilde{x_0}}^{\widetilde{x}} p^* f^*(v_T) = \int_{\widetilde{x_0}}^{\widetilde{x}} f^* q^*(v_T) = \int_0^{\widetilde{f}(\widetilde{x})} q^*(v_T) = v(\widetilde{f}(\widetilde{x})) \tag{34}$$

Notons maintenant que le premier membre n'est autre que $\widetilde{j}(\widetilde{x})(f^*(v_T))$, ce qui nous conduit à définir une application

$$\widetilde{F} : \widetilde{JX} \longrightarrow V \tag{35}$$

par la condition que, pour tout $v \in V^\vee$, et tout $u \in \widetilde{JX}$ on ait $v(\widetilde{F}(u)) = u(f^*(v_T))$, ce qui est licite, car $u \in \widetilde{JX}$ est une forme linéaire sur $\Omega_X(X)$ et l'application $V^\vee \longrightarrow \Omega_X(X)$, $v \mapsto f^*(v_T)$, l'est aussi. Il est clair que $\widetilde{F}$ est $\mathbb{C}$–linéaire et la formule (34) montre que l'on a $\widetilde{F} \circ \widetilde{j} = \widetilde{f}$. Il en résulte que $q \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{j} = q \circ \widetilde{f} = f \circ p$, donc $q \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{j}(p^{-1}(x_0)) = 0$, d'où $q \circ \widetilde{F}(P) = 0$, puisque par construction on a $P = \widetilde{j}(p^{-1}(x_0))$. Donc $\widetilde{F}$ applique le réseau P dans le réseau D, donc passe au quotient et définit un morphisme $F : JX \longrightarrow T$ qui est évidemment holomorphe car π et q sont étales ; puisque $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ est surjective, la relation $\widetilde{F} \circ \widetilde{j} = \widetilde{f}$ implique $F \circ j = f$, d'où l'existence de F. Pour l'unicité, notons que l'application $F \mapsto F \circ j$ est un morphisme de groupes, ce qui montre qu'il suffit de prouver que $F \circ j = 0$ implique $F = 0$. Soit un morphisme de tores complexes $F : JX \longrightarrow T$ tel que $F \circ j = 0$. Il existe une application $\mathbb{C}$–linéaire $\widetilde{F} : \widetilde{JX} \longrightarrow V$ telle que $q \circ \widetilde{F} = F \circ \pi$ et puisque $F \circ j = 0$, $\widetilde{F} \circ \widetilde{j}$ est constante car $\widetilde{X}$ est connexe, donc nulle. Si $V \neq 0$, on en déduit l'existence d'une forme linéaire non nulle v sur $\widetilde{JX}$ telle que $v \circ \widetilde{j} = 0$. Puisque le dual de $\widetilde{JX}$ est $\Omega_X(X)$, on en déduit l'existence d'un $\omega \in \Omega_X(X)$ tel que, pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $\int_{\widetilde{x_0}}^{\widetilde{x}} \widetilde{\omega} = 0$, ce qui implique $\omega = 0$, d'où la conclusion. $\square$

4. La variété de Picard

Nous allons munir le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ des classes à isomorphisme près de $\mathcal{O}_X$–modules inversibles de degré zéro d'une structure de tore complexe ; nous verrons ensuite que ce tore est canoniquement isomorphe à la Jacobienne JX : ce sera le théorème d'Abel. Notons tout de suite que $\mathrm{Pic}^0(X)$ est contravariant en X, car l'image réciproque d'un module inversible en est un autre, cependant que la Jacobienne est évidemment covariante ; nous verrons en fait que JX est le dual de $\mathrm{Pic}^0(X)$, ce qui est très facile puisque JX est son propre dual, ce qui est plus profond.

Définition 4.1. *Cohomologie de Čech*: Nous nous limiterons au degré 1. Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On note $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ l'ensemble des familles $(c_{ij})_{(i,j) \in I^2}$, $c_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, telles que, dans $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$, on ait $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$; une telle famille s'appelle *un cocycle de* $\mathfrak{U}$ *à valeurs dans* $\mathcal{F}$. Parmi ceux-ci, on appelle *cobord* les cocycles tels qu'il existe une famille $b_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, telle que, dans chaque U_{ij}, on ait $c_{ij} = b_j - b_i$. On note $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ le groupe quotient de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ par les cobords. Il est évident que, pour $\mathfrak{U}$ fixé, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ *est fonctoriel en* $\mathcal{F}$: si $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, à la classe du cocycle c_{ij} on attache celle de $u(c_{ij})$.

Notons maintenant que, pour tout $x \in H^1(X, \mathcal{F})$, il existe un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X tel que la restriction de x à tout ouvert de $\mathfrak{U}$ soit nulle. Pour le voir, il suffit de plonger $\mathcal{F}$ dans un faisceau $\mathcal{F}'$ tel que $H^1(X, \mathcal{F}') = 0$, d'où une suite exacte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}') \to H^0(X, \mathcal{F}'/\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{F}) \to 0$$

Alors x est l'image par ∂ d'une section y de $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ et la restriction de x à un ouvert U de X est nulle si, et seulement si, la restriction de y à U provient d'un $z \in H^0(X, \mathcal{F}')$. De plus, il est clair que les $x \in H^1(X, \mathcal{F})$ dont la restriction à chaque ouvert du recouvrement $\mathfrak{U}$ est nulle forment un sous-groupe de $H^1(X,\mathcal{F})$ que l'on notera $H^1(X,\mathcal{F})^{\mathfrak{U}}$.

Proposition 4.1. *Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, on a un isomorphisme de foncteurs en $\mathcal{F}$*

$$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathcal{F})^{\mathfrak{U}} \tag{36}$$

qui est tel que, pour toute suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{F}' \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$, tout $g \in \mathcal{G}(X)$ et toute famille $f_i' \in \mathcal{F}'(U_i)$, $i \in I$, telle que $v(f_i') = g|U_i$, l'image de g par l'opérateur cobord $H^0(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ soit l'image par (36) *de la classe du cocycle $c \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ caractérisé par*

$$u(c_{ij}) = f_j' - f_i' \quad \textit{dans } U_{ij}$$

Démonstration. Pour prouver la proposition, on définit (36) en imposant la condition de l'énoncé à la suite exacte obtenue en plongeant $\mathcal{F}$ dans le faisceau $\widehat{\mathcal{F}}$ de ses germes de sections non nécessairement continues : cela est possible, car les $x \in H^1(X,\mathcal{F})^{\mathfrak{U}}$ sont évidemment ceux pour lesquels il existe g et (f_i') comme dans l'énoncé. On définit ainsi l'isomorphisme (36) qui est évidemment fonctoriel en $\mathcal{F}$. Pour vérifier la seconde assertion pour une suite exacte comme celle de l'énoncé, on plonge successivement $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$, $\widehat{\mathcal{F}}$ et $\widehat{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{F}'$ et on compare les suites exactes obtenues. On notera que la condition de l'énoncé caractérise l'isomorphisme de foncteurs (36). □

Exemple 4.1. Soit $a \in \mathcal{E}_X^{0,1}(X)$ une forme différentielle *fermée* et soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Cherchons un cocycle $x \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ dont la classe dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ soit la *classe de Dolbeault* de a dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$. En appliquant la proposition ci-dessus à la suite exacte de Dolbeault, on voit qu'il suffit de trouver des $f_i \in \mathcal{E}_X(U_i)$ tels que l'on ait $d''f_i = a|U_i$. Alors, dans U_{ij}, on a $d''(f_j - f_i) = 0$, donc $c_{ij} = f_j - f_i$ appartient à $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ et c'est le cocycle cherché. De même, si $a \in \mathcal{E}_X^2(X)$ et si $a|U_{ij} = d''b_i$, $b_i \in \mathcal{E}_X^{0,1}(U_i)$, la classe de Dolbeault de a dans $H^1(X,\Omega_X)$ est celle du cocycle $c_{ij} = b_j - b_i \in \Omega_X(U_{ij})$.

Proposition 4.2. *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X.*

(1) *Soit $\mathcal{L}$ un (faisceau de) $\mathcal{A}$–module localement libre de rang un. Il existe un élément $cl(\mathcal{L}) \in H^1(X,\mathcal{A}^\times)$, où $\mathcal{A}^\times$ est le faisceau des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X et toute base f_i de $\mathcal{L}|U_i$, $i \in I$, l'élément $cl(\mathcal{L})$ soit représenté par le cocycle $c \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{A}^\times)$ caractérisé par $f_i \cdot c_{ij} = f_j$ dans U_{ij}.*

(2) *On a $cl(\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{L}') = cl(\mathcal{L}) + cl(\mathcal{L}')$, $cl(\mathcal{A}) = 0$ et tout $c \in H^1(X,\mathcal{A}^\times)$ est la classe d'un $\mathcal{A}$–module localement libre de rang un, unique à isomorphisme près.*

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur. □

En appliquant cette proposition au faisceau $\mathcal{O}_X$, nous en déduisons un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$$

Considérons maintenant la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathcal{O}_X^\times \to 0, \quad \mathbf{e}(f) = \exp(2\pi i f)$$

on en déduit une suite exacte de groupes

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\iota} H^1(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon} H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\partial} H^2(X,\mathbb{Z}_X) \to 0 \tag{37}$$

car $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X^\times(X) = \mathbb{C}^\times$ et $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$.

Lemme 4.3. *Pour tout $\mathcal{O}_X$–module inversible $\mathcal{L}$, l'image de $cl(\mathcal{L})$ par le composé*

$$H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)\xrightarrow{\partial}H^2(X,\mathbb{Z}_X)\xrightarrow{\alpha}H^2(X,\mathbb{C}_X)\xrightarrow{\sigma}\mathbb{C} \tag{38}$$

est $-\deg(\mathcal{L})$.

Démonstration. Dans cet énoncé, α est le morphisme évident et σ est l'isomorphisme qui, à la classe de de Rham d'une forme différentielle a de degré 2 associe $\iint_X a$, corollaire 1.2. Par linéarité, il suffit de prouver l'énoncé lorsque $\mathcal{L}=\mathcal{O}_X(x)$, $x\in X$. Soit (U_0,z) une carte holomorphe centrée en x telle que $z(U_0)$ soit le disque de rayon 1. Soit U_0' l'ensemble des $y\in U_0$ tels que $|z(y)|\le 1/2$ et soit $U_1=X-U_0'$. Une base de $\mathcal{L}|U_0$ est $1/z$ et une base de $\mathcal{L}|U_1$ est 1 ; donc $c_{01}=z\in\mathcal{O}_X^\times(U_{01})$ représente $c=cl(\mathcal{L})$. Pour calculer $\alpha\partial(c)$, on considère le morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\mathbf{e}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X^\times \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}_X \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "d"] & \Omega_X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $D(f)=df/2\pi i f$. Donc $\alpha\partial(c)$ est l'image par le cobord $H^1(X,\Omega_X)\xrightarrow{\partial}H^2(X,\mathbb{C}_X)$ de la classe $D(c)$ qui est celle du cocycle $D(c_{01})=dz/2\pi i z\in\Omega_X(U_{01})$. Cherchons une forme $a\in\mathcal{E}_X^2(X)$ dont la classe de Dolbeault soit celle du cocycle $D(c_{01})$; sa classe de de Rham sera $\partial D(c)$ par le corollaire 1.2, et il suffira de prouver que $\iint_X a=-1$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque unité, nulle pour $|t|<1/3$, valant 1 pour $|t|\ge 1/2$ et soit $f=g\circ z$. Alors la forme $b_0=-f dz/2\pi i z$ appartient à $\mathcal{E}_X^{0,1}(U_0)$ et si on pose $b_1=0$, $b_1\in\mathcal{E}_X^{0,1}(U_1)$, on a, dans U_{01}, $db_0=db_1=0$, d'où une forme fermée a sur X, nulle hors de U_0 et égale à db_0 sur U_0, qui est la forme cherchée, car, dans U_{01}, $b_1-b_0=D(c_{01})$. D'où la conclusion, car $\iint_X a=\iint_{U_0}db_0=\int_C b_0=-1$, où C est l'image par z^{-1} du cercle de rayon 1/2. □

Remarque 4.1. Ce lemme montre que l'image du morphisme ε de (37) est contenue dans l'ensemble des classes de diviseurs de degré 0. En fait elle lui est égale: cela résulte immédiatement du fait que $H^2(X,\mathbb{Z}_X)\xrightarrow{\alpha}H^2(X,\mathbb{C}_X)$ est injectif, ce qui a été prouvé grâce à la triangulation. Pour ne pas utiliser la triangulation, notons que, par linéarité, il suffit de prouver que $cl(\mathcal{O}_X(x-y))$ appartient à l'image de ε lorsque x et y appartiennent à un même ouvert de coordonnée (U_0,z) (joindre x et y par une chaîne de points). On peut évidemment supposer que $z(U_0)$ est un disque de rayon 1 et que $|z(x)|<r$ et $|z(y)|<r$. Notant U_0' l'image réciproque par z du disque fermé de rayon r et posant $U_1=X-U_0'$, il est immédiat que $cl(\mathcal{O}_X(x-y))$ est représenté par le cocycle $(z-z(x))/(z-z(y))\in\mathcal{O}_X^\times(U_{01})$. Puisque x et y appartiennent à U_0', on peut choisir une détermination de $\frac{1}{2\pi i}\log(z-z(x))/(z-z(y))$ dans U_{01} et l'image par ε de la classe du cocycle ainsi défini est $cl(\mathcal{O}_X(x-y))$. La suite exacte (37) nous donne ainsi une suite exacte

$$0\to H^1(X,\mathbb{Z}_X)\xrightarrow{\iota}H^1(X,\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\varepsilon}\operatorname{Pic}^0(X)\to 0 \tag{39}$$

Pour conclure sur ce point, notons que, puisque $\operatorname{Pic}(X)/\operatorname{Pic}^0(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, nous avons obtenu une preuve du fait que $H^2(X,\mathbb{Z}_X)\simeq\mathbb{Z}$ n'utilisant pas la triangulation de X ; nous avons même prouvé la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Le composé $\sigma\circ\alpha$ de* (38) *induit un isomorphisme*

$$H^2(X,\mathbb{Z}_X)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}$$

Pour que la classe de de Rham d'une forme différentielle a de degré 2 appartienne à $H^2(X,\mathbb{Z}_X)$, il faut et il suffit que $\iint_X a$ soit entier.

5. Relations bilinéaires de Riemann, théorème d'Abel

Soit $T = V/D$ un tore complexe et soit V' l'antidual de V, c'est-à-dire l'espace des formes $\mathbb{R}$–linéaires $v : V \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $v(ax) = \overline{a}v(x)$, $a \in \mathbb{C}$, $x \in V$. L'ensemble D' des $v \in V'$ dont la partie imaginaire prend des valeurs entières sur D est un réseau de V' et le tore complexe $T' = V'/D'$ s'appelle *le dual* de T, (Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay 1967–68). Soit maintenant H une forme hermitienne sur V dont la partie imaginaire A (qui est une forme $\mathbb{R}$–bilinéaire alternée sur V) prend des valeurs entières sur $D \times D$. On a une application $\mathbb{C}$–linéaires $F : V \to V'$, $F(x)(y) = H(x, y)$, qui applique D dans D', d'où un morphisme de tores complexes $f : T \to T'$, qui est surjectif si H est non–dégénérée. Dans ce cas, la partie imaginaire A de H est aussi non dégénérée et l'ensemble $D'' = F^{-1}(D') = \{x \in V \mid A(x, D) \subset \mathbb{Z}\}$ est donc un réseau de V que l'on appelle *le dual de* D et qui contient D. Il est immédiat que le noyau de $f : T \to T'$ est isomorphe à D''/D (lemme du serpent), donc f est bijectif si et seulement si $D = D''$.

D'après le théorème de Dolbeault, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes $\overline{\Omega}_X(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X)$ et la suite exacte (39) fait donc apparaître $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme le tore complexe quotient de $\overline{\Omega}_X(X)$ par $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, qui est un réseau d'après le corollaire 2.5. Par ailleurs, la Jacobienne JX est le quotient du dual $\widetilde{JX}$ de $\Omega_X(X)$ par le réseau P des périodes. L'accouplement

$$(40)\qquad \begin{aligned}(\ ,\ ) : \widetilde{JX} \times \overline{\Omega}_X(X) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (f, a) &\longmapsto 2if(\overline{a})\end{aligned}$$

fait apparaître $\widetilde{JX}$ comme l'antidual de $\overline{\Omega}_X(X)$. Si p est la période définie par un $\gamma \in \pi_1(X)$, on a ainsi

$$(41)\qquad \Im(p, a) = p(\overline{a}) + p(a) = 2\Re \int_\gamma a$$

ce qui prouve que P est le dual du réseau $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, corollaire 2.5. Par suite, *la Jacobienne JX est canoniquement le tore complexe dual de* $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Théorème 5.1. (Relations bilinéaires de Riemann)
La forme $H(a, b) = 2i \iint_X a \wedge \overline{b}$ où $a, b \in \overline{\Omega}_X(X)$ est hermitienne négative et non dégénérée. Sa partie imaginaire $A(a, b) = 2\Re \iint_X a \wedge \overline{b}$ prend des valeurs entières sur $H^1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X, \mathbb{Z})$.

La forme H est évidemment linéaire par rapport à la première variable et possède la symétrie hermitienne ; de plus, si a s'écrit localement $a = f d\bar{z}$, alors $2ia \wedge \bar{a} = 2i|f|^2 d\bar{z} \wedge dz = -4|f|^2 dx \wedge dy$, donc $H(a, a) < 0$ si $a \neq 0$. Pour montrer que A prend des valeurs entières sur le réseau, nous noterons que l'on a évidemment $2\Re a \wedge \overline{b} = (a + \overline{a}) \wedge (b + \overline{b})$. Or, d'après [**10**, p. 256], on a, pour tout groupe commutatif G un accouplement antisymétrique et fonctoriel en G

$$H^1(X, G_X) \times H^1(X, G_X) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

appelé le *cup–produit* et qui, lorsque $G = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), se calcule comme suit : le cup–produit des classes de de Rham des formes u et v est la classe de de Rham de $u \wedge v$. Par suite, si les classes de de Rham de $(a + \bar{a})$ et $(b + \overline{b})$ sont entières, celle de $(a + \bar{a}) \wedge (b + \overline{b})$ appartient à $H^2(X, \mathbb{Z}_X)$ par fonctorialité du cup–produit, donc son intégrale, qui est $A(a, b)$, est un entier d'après la proposition 4.4, ce qui prouve la seconde assertion du théorème d'après la façon dont on a identifié $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ à un réseau de $\overline{\Omega}_X(X)$, corollaire 2.5.

Lorsque l'on traduit en termes de matrices le théorème ci-dessus, on retrouve les classiques relations bilinéaires de Riemann : ce délectable exercice d'algèbre linéaire se trouve dans le Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay 1967–68, voir aussi le cours de Gunning [**11**].

THÉORÈME 5.2. (Théorème d'Abel) *On a un isomorphisme canonique de tores complexes* $\alpha : \mathrm{Pic}^0(X) \xrightarrow{\sim} JX$. *Soit* $j : X \longrightarrow JX$ *le morphisme* (29) *attaché au choix d'un point* $x_0 \in X$. *Pour tout* $x \in X$, $\alpha^{-1}j(x)$ *est la classe du module inversible* $\mathcal{O}_X(x - x_0)$.

DÉMONSTRATION. D'après les banalités plus haut, les propriétés de la forme H permettent de définir un morphisme surjectif de $\mathrm{Pic}^0(X)$ dans son dual ; en composant avec l'isomorphisme entre ce dual et JX, on trouve le morphisme α. Pour voir que α est un isomorphisme, il suffit de montrer que le réseau dual de $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ pour la partie imaginaire A de H est lui-même, ce qui revient à dire *que le cup–produit induit une dualité entre* $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ *et lui-même*, ce qui est un résultat connu de la théorie des surfaces, de nature purement topologique d'ailleurs. Au lieu d'utiliser ce résultat, nous allons le démontrer en utilisant la structure complexe de X. Pour cela, il nous faut expliciter α. D'après (40), le morphisme s'obtient par passage au quotient à partir de l'application $\mathbb{C}$–linéaire

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_X(X) &\xrightarrow{\sim} \widetilde{JX} \\ a &\longmapsto (b \mapsto \iint_X a \wedge b) \end{aligned} \tag{42}$$

car l'image $\ell \in \widetilde{JX}$ de $a \in \overline{\Omega}_X(X)$ doit satisfaire à $H(a, b) = 2i\ell(\bar{b})$ pour tout $b \in \overline{\Omega}_X(X)$, c'est-à-dire $2i \iint_X a \wedge \bar{b} = 2i\ell(\bar{b})$. L'application (42) nous est d'ailleurs bien familière : c'est la dualité de Serre entre $\overline{\Omega}_X(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ et $\Omega_X(X) = H^0(X, \Omega)$.

LEMME 5.3. *Soit* $a \in \overline{\Omega}_X(X)$ *et soit* γ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *tracé sur* X, *d'origine* y *et d'extrémité* x *tel que, pour tout* $b \in \overline{\Omega}_X(X)$, *on ait* $\iint_X a \wedge b = \int_\gamma b$. *L'image de* a *dans* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *est la classe de* $\mathcal{O}_X(x - y)$.

DÉMONSTRATION. Par linéarité, quitte à découper le chemin γ, on peut supposer que γ est contenu dans un ouvert de coordonnées (U_0, z) tel que $z(U_0)$ soit un disque de rayon 1. Soit $r > 0$ tel que $|z(x)| < r/2$ et $|z(y)| < r/2$, soit U_0' l'image réciproque par z du disque fermé de rayon r et soit $U_1 = X - U_0'$. Comme dans la remarque 4.1, le cocycle $c_{01} = (z - z(x))/(z - z(y)) \in \mathcal{O}_X^\times(U_{01})$ représente le module inversible $\mathcal{O}_X(x - y)$ et l'on peut choisir une détermination de $d_{01} = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z - z(x)}{z - z(y)}$ dans U_{01}, d'où un cocycle $d_{01} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$; l'image dans $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ de la classe de cohomologie de d_{01} est $cl(\mathcal{O}_X(x - y))$ et il reste à montrer que la classe de cohomologie de d_{01} est la classe de Dolbeault de a. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque unité, nulle sur le disque de rayon $r/2$ et valant 1 pour $|t| \geq \frac{2r}{3}$. Soit $f = g \circ z$. On a une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_0, à savoir $b_0 = \frac{f}{2\pi i} \log \frac{z - z(y)}{z - z(x)}$, et si l'on pose $b_1 = 1$, $b_1 \in \mathcal{E}_X(U_1)$, il existe une forme $a' \in \mathcal{E}_X^{0,1}(X)$ telle que $a' = d''b_0$ dans U_0 et $a' = d''b_1 = 0$ dans U_1. D'après l'exemple 4.1, la classe de Dolbeault de a' est la classe de cohomologie du cocycle d_{01} et il reste donc à prouver que a et a' ont même classe de Dolbeault, ou encore, par dualité de Serre, que, pour tout $b \in \Omega_X(X)$, on a $\iint_X a \wedge b = \iint_X a' \wedge b$, c'est-à-dire $\iint_X a' \wedge b = \int_\gamma b$. Puisque a' est nulle hors de U_0, on a $\iint_X a' \wedge b = \iint_{U_0} a' \wedge b = \iint_{U_0} db_0 \wedge b$, car $d''b_o \wedge b = db_0 \wedge b$. Par ailleurs, puisque $z(U_0)$ est un disque, il existe une fonction holomorphe F sur U_0 telle que $b = dF$ dans U_0, donc $d(F db_0) = dF \wedge db_0 = -db_0 \wedge b$, d'où $\iint_X a' \wedge b = -\iint_{U_0} d(Fdb_0) = -\int_C Fdb_0$, où C est l'image réciproque par z du cercle de rayon r, d'où , par la formule de Cauchy et puisque f vaut 1 au voisinage de C : $\iint_X a' \wedge b = F(x) - F(y) = \int_\gamma b$, d'où la conclusion. □

Lorsque $x = y$, la forme linéaire $b \mapsto \int_\gamma b$ est une période et l'énoncé ci-dessus signifie que l'image dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ de la forme $a \in \overline{\Omega}_X(X)$ qui lui correspond par (42) est nulle, donc $a \in H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, ce qui montre que l'application $\alpha : \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow JX$ est injective, donc un isomorphisme. Par ailleurs, prenant pour γ un chemin tracé sur X qui joint le point base x_0 au point x, le lemme ci-dessus montre que l'image par α de la classe de $\mathcal{O}_X(x - x_0)$ est la classe dans JX de la forme linéaire $\lambda(b) = \int_\gamma b$, $\lambda \in \widetilde{JX}$, c'est-à-dire $j(x)$, ce qui achève de prouver le théorème d'Abel. □

Théorème 5.4. *L'application $j : X \longrightarrow JX$ est injective si $g \neq 0$. L'application $j^g : X^g \longrightarrow JX, (x_1, \ldots, x_g) \longmapsto j(x_1) + \ldots j(x_g)$ est surjective.*

Démonstration. Le première assertion tient au fait que si $\mathcal{O}_X(x - x_0)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, alors ce module a une section non nulle qui est une fonction méromorphe non constante n'ayant qu'un seul pôle, donc $g = 0$. Pour la seconde, on considère un module inversible $\mathcal{L}$ de degré 0, ce qui assure que $\mathcal{L}(gx_0)$ est de degré g, ce qui assure que $H^0(X, \mathcal{L}(gx_0)) \neq 0$. Le diviseur d'une section non nulle de $\mathcal{L}(gx_0)$ est donc positif et de degré g, donc de la forme $x_1 + \cdots + x_g$ (où les x_i ne sont pas nécessairement distincts), ce qui assure que $\mathcal{L}(gx_0) = \mathcal{O}_X(x_1 + \cdots + x_g)$, d'où la conclusion, par le théorème d'Abel. □

Remarque 5.1. Soit $D = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i - \sum_{1 \leq i \leq n} y_i$ un diviseur de degré 0. Pour qu'il existe une fonction méromorphe de diviseur D, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_X(D)$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X$, ce qui signifie que $\sum_i j(x_i) - j(y_i) = 0$, dans JX. Choisissant pour chaque i un chemin C_i de classe $\mathcal{C}^1$ joignant y_i à x_i, on définit une forme linéaire d sur $\Omega_X(X)$, c'est-à-dire un élément de $\widetilde{JX}$, par $d(\omega) = \sum_i \int_{\mathbb{C}_i} \omega$. Par définition de j, il résulte du théorème d'Abel 5.2 que la projection de d dans JX est la classe de $\mathcal{O}_X(D)$. Pour que ce soit 0, il faut et il suffit que d soit une période. Autrement dit, *pour que D soit le diviseur d'une fonction il faut et il suffit que la forme linéaire $\omega \mapsto \sum_i \int_{C_i} \omega$ soit une période*, ce qui signifie qu'il existe une courbe fermée C de classe $\mathcal{C}^1$ tracée sur X telle que, pour tout $\omega \in \Omega_X(X)$, on ait $\int_C \omega = \sum_i \int_{C_i} \omega$.

ANNEXE A

Guide sur la Cohomologie des Faisceaux

Dans cette appendice on “rappelle” des notions générales aux faisceaux sur des espaces topologiques généraux.

1. Faisceaux sur des espaces topologiques

1.1. Préfaisceaux et faisceaux. Dans ce qui suit, X sera un espace topologique quelconque.

DÉFINITION 1.1. Un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ d'ensembles sur X est la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ et pour tout couple d'ouverts $V \subset U$ d'une application *de restriction* $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, telles que (Godement [**10**, I.1.9, p. 16]):
– pour chaque ouvert U : $\rho_U^U = id$
– pour des ouverts $W \subset V \subset U$: $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ (condition de transition)
Un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'applications $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatibles aux restrictions. On note $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ cet ensemble.

On a ainsi défini une *catégorie de préfaisceaux*.

Si on note X_{top} la catégorie des ensembles ouverts de X, avec pour morphismes les inclusions $V \subset U$, la catégorie des préfaisceaux peut s'interpréter comme la catégorie des *foncteurs contravariants* $\mathcal{F} : X_{top} \to \mathcal{E}ns$.

Par abus de langage les éléments $s \in \mathcal{F}(U)$ seront aussi appelé des *sections* et la restriction à un ouvert plus petit $V \subset U$ sera noté $s|V = \rho_V^U(s)$.

DÉFINITION 1.2. Un *faisceau* $\mathcal{F}$ d'ensembles sur X est un préfaisceau qui satisfait de plus aux conditions suivantes (Godement [**10**, II.1.1, p. 109]):

(1) Pour tout ouvert U et tout recouvrement $(U_i)_i$ de U et deux éléments $s', s'' \in \mathcal{F}(U)$ tel que pour tout i on ait $s'|U_i = s''|U_i$, alors $s' = s''$.
(2) Pour tout ouvert U et tout recouvrement $(U_i)_i$ de U et une famille $(s_i)_i$ de sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ satisfaisant à la *condition de recollement*
$$\forall\ (i,j) \quad s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$$
il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ avec $s|U_i = s_i$ pour tout i.

La section s dont (2) affirme l'existence est *unique* par la propriété (1).

Les *morphismes de faisceaux* sont ceux en tant que préfaisceaux, la *catégorie des faisceaux* est une sous–catégorie *pleine* des préfaisceaux ; on les note respectivement $\widetilde{X}_{top} \subset \widehat{X}_{top}$.

1.2. Morphismes étales, espaces étalés et faisceaux.

1.2.1. *Espaces étalés et morphismes.* Soit $E \xrightarrow{p} X$ une application continue d'espaces topologiques. On dit que p est *étale* quand pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que p soit un homéomorphisme de U sur son image. On dit aussi que (E, p) est un espace *étalé* sur X (Godement [**10**, II.1.2]).

Il est clair que id est étale, et que le composé de deux morphismes étales est encore étale.

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces étalés sur X. Un *morphisme d'espaces étalés* $(E, p) \longrightarrow (F, q)$ est une application continue $f : E \longrightarrow F$ telle que $q \circ f = p$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Il est alors évident que f lui-même est étale.

On a ainsi défini une *catégorie* Et/X *d'espaces étalés sur* X.

Si $E \xrightarrow{p} X$ est un espace étalé et si $x \in X$, on appelle *fibre en* x de l'espace étalé l'ensemble $p^{-1}(x)$. La topologie induite sur la fibre est discrète.

1.2.2. *Faisceau associé à un espace étalé.* Soit $E \xrightarrow{p} X$ un espace étalé. Pour tout ouvert $U \subset X$ notons $\Gamma(U, E) = \{s : U \to E \mid p \circ s = id\}$ l'ensemble des sections *continues*.

Si on défini $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, E)$ avec les morphismes de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ évident pour $V \subset U$, on obtient bien un faisceau $\mathcal{F}$ sur X. L'application qui à (E, p) fait correspondre $\mathcal{F}$ est un foncteur covariant $T : Et/X \to \widetilde{X}_{top}$ de la catégorie des espaces étalés sur X dans celle des faisceaux sur X.

Réciproquement, considérons un faisceau $\mathcal{F}$ sur X, et un point $x \in X$. On appelle *fibre de* $\mathcal{F}$ *en* x l'ensemble $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ et on pose

$$E = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

On munit E de la projection p qui à $a \in \mathcal{F}_x$ fait correspondre x. Maintenant, l'application canonique de $\mathcal{F}(U)$ dans la limite inductive $\mathcal{F}_x$ notée $s \mapsto s_x$, induit une application $\widetilde{s} : U \to E$ définie par $\widetilde{s}(x) = s_x$. On munit E de la topologie la plus fine qui rende les applications $\widetilde{s}$ continues. $E \xrightarrow{p} X$ est alors un espace étalé sur X. On obtient ainsi un foncteur $T' : \widetilde{X}_{top} \to Et/X$ covariant de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des espaces étalés sur X.

THÉORÈME 1.1. *Les foncteurs* T *et* T' *vérifient* $T \circ T' \approx id_{\widetilde{X}_{top}}$ *et* $T' \circ T \approx id_{Et/X}$ *et sont donc des équivalences de catégories.*

DÉMONSTRATION. Pour les démonstrations cf. Godement [**10**, loc.cit.]. □

REMARQUE 1.1. La fibre $\mathcal{F}_x$ du faisceau est égale à la fibre $p^{-1}(x)$ de l'espace étalé associé, évidemment.

On peut donc occuper ou bien le point de vue *faisceau*, ou bien le point de vue *espace étalé*, et on se permet de les confondre.

1.3. Images directes et réciproques de faisceaux.

1.3.1. *Image directe.* Soient $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue, et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Considérons le préfaisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y défini par
– $\forall V$ ouvert $\subset Y$: $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$
– morphismes de restrictions évidents.
Alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau et f_* est un foncteur covariant de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des faisceaux sur Y, appelé *image directe par* f.

1.3.2. *Image réciproque.* Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue, et soit (G, p) un espace étalé sur Y. On considère le produit fibré $X \underset{Y}{\times} G$ dans la catégorie des espaces topologiques.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

On constate que q est encore étale. Le produit fibré définit un foncteur de la catégorie des espaces étalés sur Y dans celle des espaces étalés sur X, et par suite un foncteur f^* de la catégorie des faisceaux sur Y dans celle des faisceaux sur X, appelé *image réciproque par* f.

Exemple 1.1. Si U est un ouvert d'un espace topologique X, l'injection canonique j est continue et même étale.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, son image réciproque est le faisceau restreint à U. L'espace étalé correspondant est l'image réciproque de U par la projection au sens des espaces topologiques, avec la projection restreinte. Si (E, p) est un espace étalé sur U, l'image directe $j_*\mathcal{E}$ du faisceau associé est le faisceau défini par $j_*\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \cap V)$, dont l'espace étalé associé est $(E, j \circ p)$.

Si x est un point d'un espace topologique X, l'image réciproque d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X par l'application canonique $\{x\} \to X$ est la fibre $\mathcal{F}_x$ munie de la topologie discrète.

1.3.3. *Propriétés d'adjonction.* Le foncteur f^* est un *adjoint à gauche* du foncteur f_*.

Pour montrer ceci, on va définir un morphisme de faisceaux sur Y :

$$a_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{G}$$

Si V est un ouvert de Y on a $\mathcal{G}(V) = \Gamma(V, G)$ et

$$f_*f^*\mathcal{G}(V) = f^*\mathcal{G}(f^{-1}V) = \Gamma(f^{-1}V, X \underset{Y}{\times} G) = \mathrm{Hom}_X(X \underset{Y}{\times} V, X \underset{Y}{\times} G)$$

On va prendre comme image de $s \in \mathcal{G}(V)$ la section $a_{\mathcal{G}}(V)(s) = id \times s$ qui est évidemment continue. La compatibilité aux restrictions est évidente. On obtient bien un morphisme de faisceaux.

Il faut pour que ces morphismes définissent une *adjonction* qu'ils satisfassent deux conditions.

La première est la fonctorialité en $\mathcal{G}$, c'est-à-dire la commutativité du diagramme suivant pour tout morphisme $h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ de faisceaux sur Y.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "a_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "h"'] & f_*f^*\mathcal{G} \arrow[d, "f_*f^*h"] \\
\mathcal{G}' \arrow[r, "a_{\mathcal{G}'}"'] & f_*f^*\mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

Si s est une section continue de G sur l'ouvert V de Y, on a :

$$a_{\mathcal{G}'}(V)h(V)(s) = a_{\mathcal{G}'}(V)(h \circ s) = id \times h \circ s$$

$(f_*f^*h)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(s) = (f_*f^*h)(id \times s) = (f^*h)(f^{-1}V)(id \times s) = (id \times h) \circ (id \times s)$. Ce qui assure la fonctorialité en $\mathcal{G}$.

La seconde est que, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X et tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Y, l'application de $\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ définie par $m \mapsto (f_*m)a_{\mathcal{G}}$ soit bijective.

On peut encore décrire l'application comme suit :

A une section t de $\mathcal{G}$ sur un ouvert V de Y, correspond la section $(id \times t) \in \Gamma(f^{-1}V, X \underset{Y}{\times} G)$ qui a pour image par $m(f^{-1}V)$ la section $m \circ (id \times t) \in \mathcal{F}(f^{-1}V)$ qui est aussi une section de $f_*\mathcal{F}$ sur V ; c'est cette section qui est

$$(f_*m)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t)$$

Injectivité

Si $m \neq m'$, il y a au moins un point de l'espace étalé f^*G sur X où les applications m et m' diffèrent. Soit (x, a) un tel point. Son image a par g est dans une certaine section t de G au-dessus d'un certain ouvert V de Y contenant $p(a) = f(x)$. On voit alors que pour le choix de V et t qu'on vient de faire, on a $(f_*m)(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t) \neq (f_*m')(V)a_{\mathcal{G}}(V)(t)$, donc $(f_*m)a_{\mathcal{G}} \neq f_*m')a_{\mathcal{G}'}$.

Surjectivité

Soit n un morphisme de $\mathcal{G}$ dans $f_*\mathcal{F}$. On se propose de construire un morphisme $n' : f^*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tel que $n = (f_*n') \circ a_{\mathcal{G}}$.

Soit $(x, a) \in f^*G$, et soit $y = p(a) = f(x)$. Il existe un ouvert V de Y contenant y et une section s au-dessus de V telle que $a = t(y)$. Alors $n(V)(t)$ est une section de $f_*\mathcal{F}$ sur V, ou encore une section de $\mathcal{F}$ sur $f^{-1}V$, ce qui donne un point $n(V)(t)(x)$ de $\mathcal{F}$ se projetant sur x. Ce point ne dépend que de (x, a) et non de V et t et sera noté $n'(x, a) = n(V)(t)(x)$. On a ainsi défini une application $n' : f^*G \to \mathcal{F}$, dont on pourra vérifier qu'elle est continue et qu'elle redonne bien n.

1.3.4. *Propriétés d'exactitude.* Grâce à l'adjonction, on sait que

– f_* est compatible aux limites projectives (donc *exact à gauche*),

– f^* est compatible aux limites inductives (donc *exact à droite*).

Mais nous avons par surcroît

– f^* est compatible aux limites projectives finies, donc est un *foncteur exact*.

Pour le prouver, on peut voir qu'une limite projective finie d'espaces étalés sur un espace topologique X dans la catégorie des espaces topologiques au-dessus de X est déjà étalé sur X et s'identifie donc à la limite dans la catégorie des espaces étalés sur X. La construction de f^*, qui ne fait intervenir que le produit fibré d'espaces topologiques va donc commuter à la formation des limites projectives finies d'espaces étalés.

1.3.5. *Propriétés de conservation.* Pour qu'un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ soit un *mono-, épi- ou isomorphisme* il faut et il suffit que les morphismes sur les fibres $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ($x \in X$) le soient.

Pour qu'un morphisme de faisceaux soit un *noyau* (resp. *conoyau*) d'une paire de morphismes, il faut et il suffit que ce soit le cas pour les morphismes correspondants sur les fibres.

Pour qu'un diagramme de faisceaux soit un *produit fini* avec ses projections (une *somme* avec ses injections), il faut et il suffit que les diagrammes sur les fibres le soient aussi.

ATTENTION. Sauf si X est discret, une famille de morphismes sur les fibres ne provient pas en général d'un morphisme de faisceaux.

1.4. Faisceaux de groupes sur un espace topologique. Un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X est un faisceau $\mathcal{G}$ sur X, muni d'un morphisme de faisceaux de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ qui induit sur chaque ouvert U de X une opération faisant de $\mathcal{G}(U)$ un groupe abélien.

Dans les espaces étalés, la notion correspondante est un espace étalé G sur X, muni d'une application continue de $G \underset{X}{\times} G$ dans G, qui induit sur chaque fibre une opération de groupe, telle que la section nulle soit continue et que la section opposée d'une section continue sur un ouvert U de X soit encore une section continue.

Les morphismes de faisceaux de groupes sur X sont bien entendu les morphismes de faisceaux compatibles aux opérations, qui se décrivent dans les espaces étalés comme les applications au-dessus de X continue et compatibles aux opérations sur les fibres.

On obtient ainsi une catégorie abélienne $\mathcal{A}b_X$. L'exactitude peut s'observer "fibre par fibre".

L'image directe, l'image réciproque d'un faisceau de groupes par une application continue sont de manière évidente des faisceaux de groupes. Ces structures naturelles font des foncteurs f_* et f^* des foncteurs additifs pour toute application continue f. On a encore les propriétés d'exactitude :

– f_* est compatible aux limites projectives, en particulier exact à gauche.

– f^* est compatible aux limites inductives et exact.

De même, on parlera de faisceaux d'anneaux, de modules sur un faisceau d'anneaux etc. cf. Godement [**10**, page 123 et suite].

2. Foncteurs cohomologiques

2.1. La catégorie des ∂–foncteurs. On note $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens et $\mathcal{A}b_X$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Tous les foncteurs considérés seront additifs.

DÉFINITION 2.1. Un *∂–foncteur*[1] (H, d) est une suite de foncteurs $H^n : \mathcal{A}b_X \to \mathcal{A}b$ et la donnée pour toute petite suite exacte dans $\mathcal{A}b_X$

$$S : 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

de morphismes $d^n S$ (appelé *cobords*) tels que

$$\dots \longrightarrow H^n(\mathcal{E}) \xrightarrow{H^n(\mu)} H^n(\mathcal{F}) \xrightarrow{H^n(\chi)} H^n(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^n S} H^{n+1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{H^{n+1}(\mu)} H^{n+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

soit un *complexe*, i.e. la composée de deux flèches successives est nulle :

$$d^n S \circ H^n(\chi) = 0 = H^{n+1}(\mu) \circ d^n S$$

et de plus tels que $d^n S$ dépende fonctoriellement de la suite S , i.e. un morphisme de petites suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[1]prononcé *del–foncteur*

donne un morphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^n S"] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}') \arrow[r, "H^n(\chi')"] & H^n(\mathcal{G}') \arrow[r, "d^n S'"] & H^{n+1}(\mathcal{E}') \arrow[r, "H^{n+1}(\mu')"] & H^{n+1}(\mathcal{F}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Définition 2.2. Un *morphisme de ∂–foncteurs* $\varphi : (H, d) \to (K, \delta)$ est une suite de morphismes de foncteurs $\varphi^n : H^n \to K^n$ qui commutent aux cobords, i.e. telle que pour toute petite suite exacte S on ait $\varphi^{n+1}(\mathcal{E}) \circ d^n S = \delta^n S \circ \varphi^n(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{F})"'] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^n S"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{F})"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "K^n(\chi)"] & K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^n S"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "K^{n+1}(\mu)"] & K^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.2. ∂–foncteurs universels.

Lemme technique. *Soit un carré cocartésien de $\mathcal{A}b_X$ ($\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \sqcup_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_2$). Si α_1 est un monomorphisme, β_2 l'est aussi.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
\mathcal{E}_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Les caractères d'exactitude (monomorphismes, sommes, conoyaux ...) se voient fibre par fibre (Godement [**10**, p.115 et 118]). On est donc ramené au cas d'un carré de groupes commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\alpha_1"'] & & E_2 \arrow[dd, "\beta_2"] \arrow[dl, shift left, "\sigma_2"] \\
& E_1 \oplus E_2 \arrow[ur, shift left, "\pi_2"] \arrow[dl, shift left, "\pi_1"] \arrow[dr, "\chi"] & \\
E_1 \arrow[rr, "\beta_1"'] \arrow[ur, shift left, "\sigma_1"] & & F
\end{tikzcd}$$

On a une construction de la somme amalgamée F. Soit $E_1 \oplus E_2$ une somme directe de E_1 et E_2 qui s'y injectent par σ_1 et σ_2. Alors $\chi : E_1 \oplus E_2 \to F$ est la flèche conoyau de $\sigma_1\alpha_1 - \sigma_2\alpha_2$.

Soit $x \in E_2$ dans le noyau de β_2: $\beta_2(x) = 0$, soit $\chi\sigma_2(x) = 0$. C'est donc que

$$\sigma_2(x) = (\sigma_2\alpha_2 - \sigma_1\alpha_1)(y) \text{ pour un } y \in E$$

Composons à gauche par la projection $\pi_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$

$$\pi_1\sigma_2(x) = 0 = -\pi_1\sigma_1\alpha_1(y) = -\alpha_1(y)$$

α_1 étant un monomorphisme, $y = 0$, donc $\sigma_2(x) = 0$ et ensuite , en composant par $\pi_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_2$

$$\pi_2\sigma_2(x) = x = 0$$

□

Corollaire 2.1. *Si μ_1 et μ_2 sont deux monomorphismes de même source, il existe un monomorphisme μ de même source tel que $\mu = \alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$.*

Démonstration. On construit la somme amalgamée de (μ_1, μ_2) et la diagonale du carré convient:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu"] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ \mathcal{E}_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

α_2 étant un monomorphisme par le lemme technique, $\mu = \alpha_2\mu_2$ aussi. □

Définition 2.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un foncteur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ est *effaçable* si pour tout objet E de $\mathcal{C}$ et tout $x \in H(E)$ il existe un monomorphisme $u : E \to F$ de $\mathcal{C}$ tel que $H(u)x = 0$. Le morphisme u est alors appelé morphisme *effaçant* x.

Définition 2.4. Un ∂–foncteur (H, d) est appelé *exact* (ou *cohomologique*) si le complexe obtenu pour toute petite suite exacte S est acyclique.

Définition 2.5. Un ∂–foncteur (H, d) est appelé *universel* si pour tout ∂–foncteur (K, δ) un morphisme $\varphi^0 : H^0 \to K^0$ se prolonge de façon unique en un morphisme de ∂–foncteurs.

Théorème 2.2. *Un ∂–foncteur (H, d) cohomologique, dont les H^n sont effaçables pour $n \geq 1$, est universel.*

Démonstration. On se donne un deuxième ∂–foncteur (K, δ) et $\varphi^0 : H^0 \to K^0$ un morphisme de degré 0. On construit $\varphi^{n+1} : H^{n+1} \to K^{n+1}$ par récurrence sur n et on montre :
– l'unicité
– que φ^n commute aux flèches d^nS et δ^nS
– que φ^n est un morphisme de ∂–foncteurs

a) L'unicité. Donnons nous $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$. Il existe un monomorphisme μ effaçant x et avec $\mathcal{G} = \operatorname{Coker}\mu$ on construit la suite exacte

$$S : 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

il s'ensuit

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{F})"'] & H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & K^n(\mathcal{F}) \arrow[r, "K^n(\chi)"] & K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^nS"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "K^{n+1}(\mu)"] & K^{n+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

A partir de $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$ cherchons l'image x' dans $K^{n+1}(\mathcal{E})$

$H^{n+1}(\mu)x = 0$	puisque μ efface x, donc
$\exists\, y \in H^n(\mathcal{G}) \quad x = d^nS(y)$	par l'acyclicité du complexe des H^n

On doit poser $x' = \delta^nS \circ \varphi^n(\mathcal{G})y$ pour rendre le carré commutatif, au moins sur y.
– x' ne dépend pas de y. En effet, si $x = d^nS(y')$, alors $d^nS(y' - y) = 0$ et donc $y' - y \in H^n(\chi)z$ pour un $z \in H^n(\mathcal{F})$. Alors $\delta^nS \circ \varphi^n(\mathcal{G})(y' - y) = \delta^nS \circ \varphi^n(\mathcal{G}) \circ H^n(\chi)z = \delta^nS \circ K^n(\chi)(\varphi^n(\mathcal{F})z) = 0$.
– x' ne dépend pas de μ : Si μ et μ_1 sont deux monomorphismes effaçant x, on sait qu'il existe un monomorphisme $\mu' = \alpha\mu = \beta\mu_1$ qui efface aussi x. Il suffit de montrer que μ' et μ mènent à la même image x' de x.

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id"] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad \chi' = \operatorname{Coker} \mu'$$

Il existe β rendant commutatif le diagramme. Par fonctorialité de d et δ , on a

$$\begin{tikzcd}
& H^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "d^nS"] \arrow[dl, "H^n(\beta)"'] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G})"] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[dl, "id"'] \arrow[dd, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & {} \\
H^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "d^nS'"] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G}')"'] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[rr, "H^{n+1}(\mu')"] \arrow[dd, dotted, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & & {} \\
& K^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "\delta^nS"'] \arrow[dl, "K^n(\beta)"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "id"] & \\
K^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "\delta^nS'"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) & &
\end{tikzcd}$$

On peut prendre $y' = H^n(\beta)y$ comme image réciproque de $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$, car $d^nS'y' = d^nS' \circ H^n(\beta)y = d^nSy = x$. On est alors amené à calculer

$$\delta^nS' \circ \varphi^n(\mathcal{G}')y' = \delta^nS' \circ \varphi^n(\mathcal{G}')H^n(\beta)y = \delta^nS' \circ K^n(\beta) \circ \varphi^n(\mathcal{G})y = \delta^nS \circ \varphi^n(\mathcal{G})y = x'$$

En même temps que l'existence, on obtient ainsi l'unicité de x'.

Remarquons que $\varphi^{n+1}(\mathcal{E})$ ainsi construit est additif sur les x effacés par μ. Mais si μ efface x, et si μ' efface x', il existe $\mu'' = \alpha\mu = \alpha'\mu'$ effaçant x et x', donc aussi $x + x'$ par additivité de $H^{n+1}(\mu)$. $\varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x + x') = \varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x) + \varphi^{n+1}(\mathcal{E})(x')$ est alors vérifié.

b) Commutativité du carré.

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(\mathcal{G})"'] & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & H^{n+1}(\mathcal{F}) \\
K^n(\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^nS"] & K^{n+1}(\mathcal{E}) &
\end{tikzcd}$$

Elle est évidente par construction car si $y \in H^n(\mathcal{G})$ alors $d^nS(y)$ est effacé par μ.

c) Fonctorialité de φ^n. Soient $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $x \in H^{n+1}(\mathcal{E})$, μ effaçant x, $\mathcal{F}'$ somme amalgamée de (μ, α),

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{F} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
S' : 0 \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r, "\mu'"] & \mathcal{F}' \arrow[r, "\chi'"] & \mathcal{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où μ', qui est un monomorphisme grâce au lemme technique, et χ et χ' des conoyaux de μ et μ'. Il existe alors un unique γ rendant ce diagramme commutatif.

Il s'ensuit un cube dont toutes les faces (sauf peut-être celle de droite) sont commutatives:

$$
\begin{tikzcd}
 & H^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "d^nS"] \arrow[dl, "H^n(\gamma)"'] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G})"] & & H^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[dl, "H^{n+1}(\alpha)"'] \arrow[dd, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E})"] & {} \\
H^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "d^nS'"] \arrow[dd, "\varphi^n(\mathcal{G}')"'] & & H^{n+1}(\mathcal{E}') \arrow[rr, "H^{n+1}(\mu')"] \arrow[dd, "\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')"] & & {} \\
 & K^n(\mathcal{G}) \arrow[rr, "\delta^nS"'] \arrow[dl, "K^n(\gamma)"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "K^{n+1}(\alpha)"] & \\
K^n(\mathcal{G}') \arrow[rr, "\delta^nS'"'] & & K^{n+1}(\mathcal{E}') & &
\end{tikzcd}
$$

Soit $y \in H^n(\mathcal{G})$ tel que $x = d^nS(y)$, $y' = H^n(\gamma)y$, $x' = H^{n+1}(\alpha)x$. Il est clair que μ' efface x', et qu'on peut prendre y' pour construire $\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')x'$ par fonctorialité de d^n. Maintenant

$$
\begin{aligned}
\varphi^{n+1}(\mathcal{E}')H^{n+1}(\alpha)x &= \delta^nS'\varphi^n(\mathcal{G}')y' && \text{par construction} \\
&= \delta^nS'K^n(\gamma)\varphi^n(\mathcal{G})y && \text{fonctorialité de } \varphi^n \\
&= K^{n+1}(\alpha)\delta^nS\varphi^n(\mathcal{G})y && \text{fonctorialité de } \delta^n \\
&= K^{n+1}(\alpha)\varphi^{n+1}(\mathcal{E})x && \text{par construction}
\end{aligned}
$$

□

3. Faisceaux injectifs

Définition 3.1. Un objet *injectif* dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet I tel que pour tout monomorphisme $m : A \to B$ de la catégorie et tout morphisme $a : A \to I$, il existe un morphisme $b : B \to I$ tel que $b \circ m = a$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[dl, dashed, "b"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

On dit que $\mathcal{C}$ *a suffisamment d'injectifs* si pour tout objet de $\mathcal{C}$ il existe un monomorphisme de source l'objet et de but un objet injectif.

Proposition 3.1. *Si $K : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ est un foncteur effaçable, et si I est un objet injectif de $\mathcal{C}$, alors $K(I) = 0$. Si $\mathcal{C}$ a suffisamment d'injectifs, cette propriété caractérise les foncteurs effaçables.*

Démonstration. Soit $x \in K(I)$. Il existe un monomorphisme $u : I \to J$ tel que $K(u)(x) = 0$. Comme I est injectif, le monomorphisme u admet une rétraction w

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "id"'] & J \arrow[dl, dashed, "w"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

tel que $w \circ u = id$. On aura donc $x = K(w \circ u)(x) = K(w)(K(u)(x)) = 0$.

Si $\mathcal{C}$ a suffisamment d'injectifs, le monomorphisme $\mu : E \to F$, où F est injectif, efface évidemment tout élément de $K(E)$. □

LEMME 3.2. *Le groupe* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *est injectif dans* $\mathcal{A}b$.

DÉMONSTRATION. Soit G un groupe abélien, soit H un sous–groupe de G et soit h un morphisme de H vers $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On considère l'ensemble des couples (K, k) où K est un sous–groupe de G et k un morphisme de K vers $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On le munit de la relation $(K, k) \leq (K', k')$ définie par $K \subset K'$ et $k = k'|K$ est la restriction de k' aà K. C'est visiblement une relation d'ordre inductif. Le lemme de Zorn montre qu'il y a un élément maximal de l'ensemble au–dessus de (H, h).

Si K est différent de G, soit $x \in G - K$ et soit K' le sous–groupe de G engendré par K et x. Si $K = 0$, on pourra prolonger k par $k'(x)$ arbitraire dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Sinon, n étant le plus petit entier positif non nul tel que $nx \in K$, on peut prolonger k par $k'(x) = p/n \pmod 1$, p étant pris de telle sorte que $p = k(nx) \pmod 1$.

Un élément maximal (K, k) est donc tel que $K = G$, donc h se prolonge sur tout G. □

LEMME 3.3. $\mathcal{A}b$ *a suffisamment d'injectifs.*

DÉMONSTRATION. En fait, le résultat est même vrai pour la catégorie des modules sur un anneau, voir Godement [**10**, p. 6 et 7]. □

LEMME 3.4. *L'image directe d'un faisceau injectif par une application continue est encore un injectif.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \to Y$ une application continue, soit $\mathcal{J}$ un faisceau injectif sur X et $m : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un monomorphisme de faisceaux sur Y. Comme le foncteur f^* est exact, f^*m est encore un monomorphisme. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{J}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\circ f^* m"'] & \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{J}) \arrow[d, "\circ m"] \\
\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{F}, \mathcal{J}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{F}, f_*\mathcal{J})
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes horizontales résultes de l'adjonction de (f^*, f_*). Puisque $\mathcal{J}$ est injectif par hypothèse, la flèche verticale à gauche est surjectif, donc la flèche à droite est surjectif, et alors $f_*\mathcal{J}$ est injectif. □

THÉORÈME 3.5. $\mathcal{A}b_X$ *a suffisamment d'injectifs.*

DÉMONSTRATION. Soit Y un espace topologique *discret*.

Pour un tel espace, le foncteur qui, à un faisceau $\mathcal{K}$ sur Y, associe la famille de groupes $(\mathcal{K}_y)_{y \in Y}$ est une équivalence de catégories entre $\mathcal{A}b_Y$ et la catégorie des familles de groupes indexées par Y.

Soit $\mathcal{K}$ un faisceau sur Y. Il est possible d'envoyer par une injection chaque groupe $\mathcal{K}_y$ dans un groupe abélien injectif J_y. Ceci fournit un monomorphisme du faisceau $\mathcal{F}$ dans le faisceau sur Y défini par la famille $(J_y)_y$. On appelle $\mathcal{J}$ ce faisceau ; montrons qu'il est injectif.

Soit $\mathcal{L} \xrightarrow{m} \mathcal{M}$ un monomorphisme de faisceaux sur Y et $\mathcal{L} \xrightarrow{a} \mathcal{J}$ un morphisme. Pour chaque $y \in Y$, le morphisme $a_y : \mathcal{L}_y \to J_y$ se factorise par le monomorphisme sous la forme $a_y = b_y \circ m_y$, car m_y est un monomorphisme et J_y est injectif. La famille des $(b_y)_{y \in Y}$ détermine un morphisme $b : \mathcal{M} \to \mathcal{J}$, tel que $a = b \circ m$.

Soient X un espace topologique, Y l'ensemble X muni de la topologie discrète et $f : Y \to X$ l'application identique, qui est continu.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $u : f^*\mathcal{F} \to \mathcal{J}$ un monomorpisme de faisceaux sur Y, de but injectif.

Alors on considère $f_* u \circ a_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to f_* f^* \mathcal{F} \to f_* \mathcal{J}$, c'est un monomorphisme par l'exactitude à gauche de f_* et l'injectivité de $a_{\mathcal{F}}$. Comme $f_*\mathcal{J}$ est injectif par le lemme 3.4, on y est. □

4. Résolutions et cohomologie des complexes

4.1. Résolutions.

Définition 4.1. Une *résolution* (E^*, e) de l'objet E est un complexe E^* :

$$0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

muni d'une augmentation $e : E \to E^0$ de telle sorte que la suite

$$0 \to E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

soit exacte.

Une résolution (E^*, e) est dite *injective* si l'objet E^n est injectif pour tout $n \geq 0$.

Proposition 4.1. *Si on se donne une résolution (E^*, e) de l'objet E, un complexe:*

$$F \xrightarrow{f} F^0 \xrightarrow{b^0} F^1 \xrightarrow{b^1} F^2 \to \dots$$

d'objets F^i injectifs et un morphisme $m : E \to F$, il existe un morphisme de complexe $m^* : E^* \to F^*$ compatible avec m, c'est-à-dire tel que: $m^0 \circ e = f \circ m$ et $m^{i+1} \circ d^i = b^i \circ m^i$ pour tout $i \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] & {} \\
 & F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"] & F^1 \arrow[r, "b^1"] & {}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Puisque e est un monomorphisme, le morphisme $f \circ m$ de but injectif se prolonge en un morphisme $m^0 : E^0 \to F^0$ tel que $m^0 \circ e = f \circ e$. Comme $b^0 \circ f$ est nul, on a $0 = b^0 \circ f \circ m = b^0 \circ m^0 \circ e$. Le morphisme $b^0 \circ m^0$ se factorise donc à travers le conoyau de e, dont le but est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^1. Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge donc en un morphisme $m^1 : E^1 \to F^1$ tel que $m^1 \circ d^0 = b^0 \circ m^0$.

En recommançant aux degrés suivants, on obtient de proche en proche le morphisme voulu. □

Proposition 4.2. *Dans les conditions du Prop. 4.1, si m est nul, tout morphisme $m^* : E^* \to F^*$ compatible avec m est* homotope à zéro*, c'est-à-dire qu'il existe des flèches $h^i : E^{i+1} \to F^i$, $i \geq 0$, telles que*

$$m^0 = h^0 \circ d^0 \;\; et \; m^{i+1} = h^{i+1} \circ d^{i+1} + b^i \circ h^i \quad i \geq 0$$

Démonstration. En effet $m^0 \circ e = f \circ m = 0$, donc m^0 se factorise par le conoyau de e, qui est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^0. Puisque F^0 est injectif, la factorisation se prolonge à E^1. On obtient ainsi une flèche h^0 telle que $m^0 = h^0 \circ d^0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m=0"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] \arrow[dl, "h^0"'] & {} \\
 & F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"] & F^1 \arrow[r, "b^1"] & {}
\end{tikzcd}$$

La flèche $m^1 - b^0 \circ h^0$ composée avec d^0 donne $(m^1 - b^0 \circ h^0) \circ d^0 = 0$. Donc elle se factorise par le conoyau de d^0, dont le but est un sous-objet de E^2 à cause de l'exactitude en E^1. Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge en une flèche h^1, telle que $m^1 - b^0 \circ h^0 = h^1 \circ d^1$.

On voit comment continuer de proche en proche. □

Remarque 4.1. Dans une catégorie abélienne qui a suffisamment d'injectifs, tout objet a une résolution injective, que l'on peut construire comme suit. On part de l'objet E. Il existe un monomorphisme $e : E \to E^0$ où E^0 est injectif. On prend alors un conoyau de e, dont le but s'envoie par un monomorphisme dans un injectif E^1. Le composé de ce monomorphisme et du conoyau utilisé est appelé d^0. L'exactitude en E^0 est assurée. On voit comment poursuivre la construction de proche en proche.

4.2. Cohomologie des complexes.

Définition 4.2. Si $0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \ldots$ est un complexe de groupes abéliens, noté E^*, on apelle *n–ième groupe de cohomologie* $H^n(E^*)$ le groupe quotient du noyau de $d^n : E^n \to E^{n+1}$ par l'image de d^{n-1} pour tout $n \geq 0$

$$H^n(E^*) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$$

où l'on pose $E^{-1} = 0$ et $d^{-1} = 0$.

Montrons comment un morphisme de complexes $m^* : E^* \to F^*$ induit une famille de morphismes $H^i(m^*) : H^i(E^*) \to H^i(F^*)$.

Si x est un élément de $H^i(E^*)$, c'est la classe d'un $y \in E^i$ tel que $d^i y = 0$. Alors $m^i(y)$ est un élément de F^i vérifiant $b^i m^i y = m^{i+1} d^i y = 0$. Si y' est un autre élément représentant de x, on aura $y' - y = d^{i-1} z$ avec $z \in E^{i-1}$. Donc $m^i y' = m^i y + m^i d^{i-1} z = m^i y + b^{i-1} m^{i-1} z$. La classe de $m^i y'$ est donc la même que celle de $m^i y$. C'est cette classe qu'on prend comme $H^i(m^*)(x)$.

Il est clair que les applications $H^i(m^*)$ ainsi définies sont additives et que H^i est un foncteur additif de la catégorie des complexes de groupes abéliens dans celle des groupes abéliens pour tout $i \geq 0$.

Lemme 4.3. *Si m^* est homotope à zéro, $H^i(m^*)$ est nul pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. On reprend les notations ci-dessus et de la proposition 4.2.

Pour le degré 0, on a $m^0 y = h^0 d^0 y = 0$.

Pour le degré $i+1$, on a $m^{i+1} y = h^{i+1} d^{i+1} y + b^i h^i y = b^i h^i y = 0$ par récurrence.

□

Théorème 4.4. *Si on a une suite exacte S de complexes de groupes abéliens:*

$$0 \to E^* \to F^* \to G^* \to 0$$

on a des morphismes $d^i S : H^i(G^*) \to H^{i+1}(E^*)$ vérifiant les propriétés:

– *fonctorialité en S*
– *exactitude de la suite*

$$0 \to H^0(E^*) \xrightarrow{H^0(u^*)} H^0(F^*) \xrightarrow{H^0(v^*)} H^0(G^*) \to \dots$$
$$\dots \to H^i(E^*) \xrightarrow{H^i(u^*)} H^i(F^*) \xrightarrow{H^i(v^*)} H^i(G^*) \xrightarrow{d^iS} H^{i+1}(E^*) \xrightarrow{H^{i+1}(u^*)} \dots$$

Démonstration. Pour simplifier, les différentielles des complexes seront notées d.

Voici la construction des *cobords* d^iS.

Soit t un élément de $H^i(G^*)$. Il est représenté par un élément $z \in G^i$ tel que $dz = 0$. Il existe un $y \in F^i$ tel que $v^iy = z$. On a $v^{i+1}dy = dv^iy = dz = 0$, donc il existe un unique élément $x \in E^{i+1}$ tel que $u^{i+1}x = dy$. On voit que $u^{i+2}dx = du^{i+1}x = ddy = 0$, donc $dx = 0$. On montre que la classe ξ de x ne dépend que de t et non des y et z intervenant dans la construction et on pose $d^iS(t) = \xi$.

Le raisonnement que nous venons de faire est le même qu'au *lemme du serpent*, voir Cartan–Eilenberg [**5**, III, Lemma 3.3, p. 40]. Les détails des autres assertions seront laissé au lecteur (voir [**5**, IV, §3] ou [**10**, I.2 th. 2.1.1] ou [**12**, XX, §2]). □

5. Cohomologie des faisceaux

5.1. Construction des foncteurs dérivé R^iT.

Théorème 5.1. *Il existe un ∂–foncteur exact et effaçable, noté $(H^*(X, \cdot), d)$ défini sur $\mathcal{A}b_X$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{A}b$, qui en degré 0 est le foncteur $\Gamma : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$.*

Plus généralement, si

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$$

est un foncteur additif exact a gauche défini sur une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ qui a suffisamment d'injectifs on va construire un ∂–foncteur (R^iT, d) exact et effaçable, dont le degré 0 est $R^0T \simeq T$.

En vertu de la propriété universelle, un tel ∂–foncteur est unique à isomorphisme unique près.

Lemme 5.2. *Soient $(E^*, e), (F^*, f)$ et (G^*, g) des résolutions des objets E, F et G, telles que (G^*, g) soit injective. Soient*

$$E \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} G$$

des morphismes. Si p^*, q^* et r^* sont des morphismes de complexes qui prolongent a, b et $b \circ a$, alors $H^i(Tr^*) = H^i(Tq*) \circ H^i(Tp^*)$.

Démonstration. En effet r^* et $q^* \circ p^*$ prolongent $b \circ a$. Leur différence prolonge 0, le morphisme nul de E dans G. C'est donc un morphisme homotope à zéro par la proposition 4.2. Son transformé par T l'est aussi. On aura donc $H^i(T(r^* - q^* \circ p^*)) = 0$, d'après (4.3). Par additivité des foncteurs H^i et T, on a le lemme. □

Soient (E^*, e) et (E_1^*, e_1) deux résolutions injectives de E. D'après (4.1) il existe des morphismes de complexes $u^* : E^* \to E_1^*$ et $u_1^* : E_1^* \to E^*$ prolongeant l'identité de E.

En appliquant le lemme (5.2) avec $p^* = u_1^*, q^* = u^*$ et $r^* = id$, puis $p^* = u^*, q^* = u_1^*$ et $r^* = id$, on voit que u^* et u_1^* définissent deux isomorphismes réciproques pour tout $i \geq 0$:

$$H^i(T(E_1^*)) \underset{H^i(T(u^*))}{\overset{H^i(T(u_1^*))}{\rightleftarrows}} H^i(T(E^*))$$

On voit que les groupes ne dépendent pas de la résolution choisie.

Choisissons donc pour chaque objet une résolution injective. Si la résolution de E choisie est (E^*, e), posons $R^iT(E) = H^i(T(E^*))$.

Pour chaque morphisme $a : E \to F$, il existe un morphisme unique à homotopie près $a^* : E^* \to F^*$ qui prolonge a, cf. (4.1) et (4.2). Ceci procure un morphisme $R^iT(a) : R^iT(E) \to R^iT(F)$.

En utilisant le lemme 5.2 on voit que R^iT est un foncteur, évidemment additif.

Le foncteur *exact à gauche* T transforme la suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d} E^1$$

en la suite exacte

$$0 \to T(E) \xrightarrow{T(e)} T(E^0) \xrightarrow{T(d)} T(E^1)$$

Ceci détermine l'isomorphisme entre les foncteurs T et R^0T.

5.2. Effaçabilité en degré ≥ 1. Il suffit de vérifier que si I est un objet injectif, alors $R^iT(I) = 0$ pour $i \geq 1$, d'après la proposition 3.1.

En effet, on obtient une résolution injective en augmentant le complexe I^*, défini par $I^0 = I$ et $I^n = 0$ pour $n > 0$, par l'identité de I. Il est alors évident que $H^i(T(I^*)) = 0$ pour $i \geq 1$.

LEMME 5.3. *Soient* $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ *une petite suite exacte,* (E^*, e) *une résolution injective de* E *et* (G^*, g) *une résolution de* G*. Alors il existe une résolution* (F^*, f) *de* F*, telle que* $F^i = E^i \oplus G^i$*, et des morphismes de résolution prolongeant* u *et* v*:*

$$E^* \xrightarrow{u^*} F^* \xrightarrow{v^*} G^*$$

où u^i *est l'injection canonique et* v^i *la projection canonique.*

DÉMONSTRATION. On remarque que la suite

$$0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{g \circ v} G^0 \xrightarrow{d} G^1 \xrightarrow{d} \dots$$

constitue une résolution de E. Il existe un morphisme de résolutions qui prolonge l'identité de E par (4.1):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & F \arrow[r, "g\circ v"] \arrow[d, "k^0"] & G^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "k^1"] & G^1 \arrow[r] \arrow[d, "k^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] & E^0 \arrow[r, "d"] & E^1 \arrow[r, "d"] & E^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En appelant w^i la projection canonique $F^i \to E^i$, on définit la flèche f et la différentielle d de F^* comme suit:

$$f = (k^0, g \circ v) : F \to F^0 = E^0 \oplus G^0$$

$$d = (d \circ w^i + (-1)^{i+1} k^{i+1} \circ v^i, d \circ v^i) : F^i \to F^{i+1}$$

Reste à vérifier les relations de commutation et d'exactitude. On pourra se reporter à Cartan–Eilenberg [**5**, V,§2, p.79–80], qui traite la situation duale dans les modules, de façon suffisamment générale. □

5.3. Construction du cobord. Si $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ une petite suite exacte, soient (E^*, e) et (G^*, g) les résolutions injectives choisis de E et G (5.1). Les objets $E^i \oplus G^i$ sont injectifs comme sommes directes d'injectifs. La construction du lemme 5.3 nous donne donc une résolution injective (F_1^*, f_1) de l'objet F et une suite exacte de résolutions :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"] & F \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_1"] & G \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E^* \arrow[r, "u^*"] & F_1^* \arrow[r, "v^*"] & G^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Les suites $0 \longrightarrow E^i \xrightarrow{u^i} F_1^i \xrightarrow{v^i} G^i \longrightarrow 0$ étant scindées restent exactes après transformation par le foncteur T. On obtient une suite exacte de complexes de groupes abéliens:

$$0 \longrightarrow TE^i \xrightarrow{Tu^i} TF_1^i \xrightarrow{Tv^i} TG^i \longrightarrow 0$$

La construction donnée au paragraphe 4.4 fournit alors des cobords.

Il faut s'assurer de la fonctorialité par rapport aux suites exactes et vérifier l'exactitude.

La construction est indiqué dans Cartan–Eilenberg [**5**, V,§2, p. 80–82].

La fonctorialité du cobord décrit en 4.4 et celle de T donnent le résultat voulu.

Pour l'exactitude, on prend un morphisme de résolutions $(F^*, f) \xrightarrow{j^*} (F_1^*, f_1)$ qui prolonge l'identité de F.

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & & H^i(TF_1^*) \arrow[dr, "H^i(Tv^*)"] & & \\ R^{i-1}T(G) \arrow[r, "d^{i-1}"] & R^iT(E) \arrow[ur, "H^i(Tu^*)"] \arrow[dr, "R^iT(u)"'] & & R^iT(G) \arrow[r, "d^i"] & R^{i+1}T(E) \\ & & R^iT(F) \arrow[uu, "H^i(Tj^*)"'] \arrow[ur, "R^iT(v)"'] & & \end{tikzcd}$$

La suite du haut est exacte, grâce au théorème de la suite exacte d'homologie (section 4.4).

Celle du bas, qui nous intéresse, l'est aussi parce que $H^i(Tj^*)$ est un isomorphisme (section 5.1) et que les triangles commutent (lemme 5.2).

On est bien arrivé à un ∂–foncteur exact et effaçable prolongeant T.

5.4. Fonctorialité par rapport à l'espace de base. On se propose de comparer les cohomologies des faisceaux de groupes abéliens sur Y et celles de leurs images réciproques par une application continue $f : X \to Y$.

Le morphisme d'adjonction de foncteurs de $\mathcal{A}b_Y$ dans elle–même $id \to f_* f^*$ fournit un morphisme de foncteurs de $\mathcal{A}b_Y$ dans la catégorie des groupes abéliens:

$$\Gamma(Y, \cdot) \to \Gamma(Y, f_* f^* \cdot) = \Gamma(X, f^* \cdot)$$

Comme le foncteur f^* est exact, on obtient en le composant avec le ∂–foncteur $(H^*(X, \cdot), d)$ un nouveau ∂–foncteur cohomologique défini sur $\mathcal{A}b_Y$:

$$(H^*(X, f^* \cdot), d \circ f^*)$$

Comme le ∂–foncteur $(H^*(Y,\cdot),d)$ est *universel*, le morphisme en degré 0 : $\Gamma(Y,\cdot)\to\Gamma(X,f^*\cdot)$ se prolonge de manière unique en un morphisme de ∂–foncteurs:

$$(H^*(Y,\cdot),d)\to(H^*(X,f^*\cdot),d\circ f^*)$$

6. Résolutions cohomologiquement triviales

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau sur X. Une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux injectifs $\mathcal{I}^n$ permet de calculer les groupes $H^p(X,\mathcal{E})=H^p(\Gamma\mathcal{I}^*)$ par définition. En fait, il suffit, pour connaître $H^p(X,\mathcal{E})$ d'avoir une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux $\mathcal{F}^n$ vérifiant seulement $H^i(X,\mathcal{F}^n)=0$ pour tout $i\geq 1$.

6.1. Le morphisme du cobord itéré. Soit $0\to\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{F}^0\xrightarrow{d^0}\mathcal{F}^1\xrightarrow{d^1}\mathcal{F}^2\xrightarrow{d^2}\dots$ une résolution quelconque de $\mathcal{E}$. Découpons cette résolution en petites suites exactes, en posant $\mathcal{K}^n=\operatorname{Ker}(\mathcal{F}^n\to\mathcal{F}^{n+1})$. On obtient, au rang n:

$$S_n : 0\to\mathcal{K}^n\to\mathcal{F}^n\to\mathcal{K}^{n+1}\to 0$$

Si (H,δ) est un ∂–foncteur quelconque, il résulte de S_n un complexe:

$$\dots\to H^p(X,\mathcal{F}^n)\to H^p(X,\mathcal{K}^{n+1})\xrightarrow{\delta^p S_n}H^{p+1}(X,\mathcal{K}^n)\to H^{p+1}(X,\mathcal{F}^n)\to\dots$$

En itérant le cobord δ, on obtient un morphisme:

$$H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})\xrightarrow{\delta^1}H^2(X,\mathcal{K}^{n-2})\xrightarrow{\delta^2}\dots\to H^{n-1}(X,\mathcal{K}^1)\xrightarrow{\delta^{n-1}}H^n(X,\mathcal{E})$$

Supposons de plus que $H^0=\Gamma$ et regardons un morceau du complexe attaché à S_{n-1}:

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}) \arrow[r, "d^{n-1}"] & \Gamma(X,\mathcal{K}^n) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[dr, "\chi"'] & H^1(X,\mathcal{K}^{n-1}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}^{n-1})\cdots \\
 & & \Gamma(X,\mathcal{K}^n)/\operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[u, dashed, "\theta"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) &
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du conoyau $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))$, il existe une unique flèche θ, rendant commutatif le triangle. En composant θ avec les morphismes trouvée plus haut, on obtient alors un morphisme *du cobord itéré*:

$$\varepsilon^n(\mathcal{F}^*) : H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))\longrightarrow H^n(X,\mathcal{E})$$

On laisse au lecteur le soin d'expliquer en quel sens ε^n est un morphisme fonctoriel en $\mathcal{F}^*$.

6.2. Résolutions par des objets cohomologiquement triviaux. Il existe ainsi un cobord itéré pour une résolution quelconque, et pour un ∂–foncteur (H,δ) quelconque, vérifiant seulement $H^0=\Gamma$. Si de plus (H,δ) est cohomologique et si les faisceaux $\mathcal{F}^n$ ont une cohomologie nulle, on obtient le

THÉORÈME 6.1. *Soit $0\to\mathcal{E}\to\mathcal{F}^0\to\mathcal{F}^1\to\dots$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des faisceaux vérifiant $H^p(\mathcal{F}^n)=0$ pour tout $p\geq 1$ et tout $n\geq 0$. Soit (H,δ) un ∂–foncteur cohomologique. Alors le cobord itéré $\varepsilon^n\mathcal{F}^*$ est un isomorphisme $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))\xrightarrow{\sim}H^n(X,\mathcal{E})$.*

Démonstration. En effet, la suite *exacte* de cohomologie attachée à S_n s'écrit alors: $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(X,\mathcal{K}^{n+1}) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(X,\mathcal{K}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$ et $\delta^p S_n$ est donc un isomorphisme. De plus, dans la suite de cohomologie de S_{n-1}, $H^1(X,\mathcal{F}^{n-1})$ est nul et $H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})$ apparaît alors comme un conoyau de la flèche

$$\Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}) \xrightarrow{d^{n-1}} \Gamma(X,\mathcal{K}^n)$$

comme aussi $H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*))$, et $\theta : H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathcal{K}^{n-1})$ est donc aussi un isomorphisme, d'où le théorème. □

6.3. Une autre construction du cobord itéré. Si $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \ldots$ est une résolution de $\mathcal{E}$, on peut définir d'autres morphismes

$$a^n : H^n(\Gamma(X,\mathcal{F}^*)) \to H^n(X,\mathcal{E})$$

de la manière suivante. On rappelle qu'on a choisi une résolution injective $(\mathcal{I}^*, i)$ de $\mathcal{E}$, et posé par définition:

$$H^n(X,\mathcal{E}) = H^n(\Gamma(X,\mathcal{I}^*))$$

Mais il existe un morphisme de résolutions $\alpha^* : \mathcal{F}^* \to \mathcal{I}^*$ prolongeant l'identité $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (cf. plus haut). Alors a^n est induit par α^*:

$$a^n = H^n(\Gamma(X,\alpha^*))$$

On montre alors (voir Cartan-Eilenberg [**5**, p.91-92]) que :

$$\boxed{\varepsilon^n \mathcal{F}^* = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n}$$

6.4. Résolutions flasques.

Lemme 6.2. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs et soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur exact à gauche.*

Soit $\mathcal{B}$ une sous–catégorie de $\mathcal{A}$ satisfaisant aux conditions:

(1) *Tout injectif est dans $\mathcal{B}$.*
(2) *Si un objet E de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{B}$, toute suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$ dans $\mathcal{A}$ est transformée par T en suite exacte.*
(3) *Tout objet quotient d'objets de $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{B}$.*

Alors pour tout objet E de $\mathcal{B}$, on a $R^iT(E) = 0$ pour $i > 0$.

Démonstration. Si E est un objet de $\mathcal{B}$ on peut en construire une résolution injective:

$$0 \to E \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots$$

Le quotient F^1 de E^0 par E est dans $\mathcal{B}$ grâce à (1) et (3). De proche en proche on voit que les quotients F^{i+1} de E^i par F^i sont dans $\mathcal{B}$. Les petites suites exactes $0 \to F^i \to E^i \to F^{i+1} \to 0$ sont transformées par T en suites exactes $0 \to T(F^i) \to T(E^i) \to T(F^{i+1}) \to 0$ grâce à (2). Or $R^{i+1}T(E)$ est justement le quotient de $T(F^{i+1})$ par l'image de $T(E^i)$ pour $i \geq 0$ et ce quotient est nul. □

Définition 6.1. Un faisceau est *flasque* si les morphismes de restriction sont des épimorphismes.

6.4.1. *Propriétés des faisceaux flasques.* Montrons que la sous–catégorie des faisceaux flasques de $\mathcal{A}b_X$ satisfait aux conditions du lemme 6.2 pour le foncteur Γ.

Démonstration. Prouvons (1) du lemme 6.2.

Soit $\mathcal{I}$ un faisceau injectif sur X. On peut l'envoyer dans le faisceau flasque $f_*f^*\mathcal{I}$ par un monomorphisme, qui admet une rétraction r puisque $\mathcal{I}$ est injectif. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_*f^*\mathcal{I}(X) & \xrightarrow{r(X)} & \mathcal{I}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*f^*\mathcal{I}(U) & \xrightarrow[r(U)]{} & \mathcal{I}(U) \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des rétractions, donc des épimorphismes. La flèche de gauche est un épimorphisme, donc celle de droite aussi. $\mathcal{I}$ est flasque.

Les condition (2) et (3) du lemme 6.2 sont le théorème 3.1.2 et son corollaire dans Godement [**10**, II.3.1]. □

6.4.2. *Cohomologie par voie "flasque".* La cohomologie pourra se calculer à l'aide des résolutions flasques, comme on a vu au théorème 6.1. C'est ce que fait Godement [**10**, II.4.4, p.173]. La résolution canonique présente le double avantage d'être fonctorielle, donc de fournir les images des morphismes par le ∂–foncteur universel $(H^*(X, .), d)$ et d'éviter le choix de résolutions injectives.

Voici comment définir la résolution *canonique* flasque:

On peut envoyer tout faisceau dans un faisceau flasque de la manière suivante. Si X est l'espace de base, on définit $Y \xrightarrow{f} X$ comme dans la preuve du théorème 3.5. Ceci donne lieu au morphisme canonique d'adjonction $\mathcal{F} \to f_*f^*\mathcal{F}$ de faisceaux sur X. C'est un monomorphisme, parce que f est surjective.

De plus, tout faisceau sur un espace discret est évidemment flasque, et l'image directe d'un faisceau flasque par une application continue est flasque ; le faisceau $f_*f^*\mathcal{F}$ est donc flasque.

On obtient ainsi une résolution

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

où les $\mathcal{F}^i$ sont flasques en prenant

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0 &= f_*f^*\mathcal{F} \\ \mathcal{F}^1 &= f_*f^*(\mathcal{F}^0/\mathcal{F}) \\ \mathcal{F}^{i+1} &= f_*f^*(\mathcal{F}^i/\operatorname{Im} d^{i-1}) \end{aligned}$$

avec les morphismes évidents.

La construction est visiblement fonctorielle.

7. Théorème de De Rham

Soit V une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ paracompacte (c'est-à-dire une variété dont les composantes connexes sont dénombrables à l'infini).

On considère sur V le faisceau constant $\mathbb{R}_V$ (faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbb{R}$), et les faisceaux $(\mathcal{E}_V^i)_{i\geq 0}$, $\mathcal{E}_V^i$ étant le faisceau des germes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur V de degré i.

On a un complexe $(\mathcal{E}_V^*)$:

$$0 \to \mathbb{R}_V \to \mathcal{E}_V^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}_V^1 \to \cdots \to \mathcal{E}_V^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{E}_V^{i+1} \to \ldots$$

envoyant $\mathbb{R}_V$ sur les germes d'applications localement constantes, et d^i étant la différentielle extérieure.

$\mathcal{E}_V^*$ est une résolution de $\mathbb{R}_V$ d'après le lemme de Poincaré (voir H. Cartan [**3**, ch.II, th.2.12.1]). D'après section 6.1 on a des morphismes de cobord itéré:

$$H^n(\Gamma(V, \mathcal{E}_V^*)) \to H^n(V, \mathbb{R}_V)$$

Le théorème de De Rham affirme que ce sont des isomorphismes.

D'après le théorème 6.1, il suffit de montrer:

$$\forall\, i > 0\, \forall\, j \geq 0 \quad H^i(V, \mathcal{E}_V^j) = 0$$

Cela résulte de la

Proposition 7.1. *Soit V une variété $\mathcal{C}^\infty$ paracompacte, et $\mathcal{F}$ un faisceau de modules sur $\mathcal{E}_V^0$. Alors on a*

$$\forall\, i > 0 \quad H^i(V, \mathcal{F}) = 0$$

La proposition 7.1 se déduira des propositions 7.4 et 7.5. Auparavant, dégageons deux lemmes, et une définition.

Définition 7.1. Soient X un espace topologique et $\mathfrak{Z}$ un système cofinal de recouvrements de X, enfin $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On dit que $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ lorsque:

$\forall\, (U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{Z}$, $\forall\, (f_{ij})_{ij} \in \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ vérifiant pour tous i, j, k $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, il existe $(\lambda_i)_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ tel que pour tous i et j, $f_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Lemme 7.2. *Si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{K} \to 0$ est une petite suite exacte de faisceaux où $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$, alors la suite*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{K}(X) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit en effet $k \in \mathcal{K}(X)$. Comme β est localement surjective, il existe un recouvrement (U_i) de X qu'on peut supposer appartenir à $\mathfrak{Z}$, et une famille $(g_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i)$ telle que $k|U_i = \beta(U_i) g_i$. Alors

$$\beta(U_i \cap U_j)(g_i | U_i \cap U_j - g_j | U_i \cap U_j) = 0$$

Donc il existe une famille $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ telle que $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$. Et α étant injective, comme $\alpha(f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}) = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$; alors $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ quel que soit i, j, k. De $P(\mathfrak{Z})$ on déduit qu'il existe une famille $\lambda_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que $f_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ sur $U_i \cap U_j$. Posant $g_i' = g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i) \in \mathcal{G}(U_i)$, on observe que les g_i' se recollent en $g' \in \mathcal{G}(X)$, et on vérifie que $\beta(g') = k$ car: $\forall\, i \in I$ $\beta(U_i)(g'|U_i) = \beta(U_i)(g_i') = \beta(U_i)(g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i)) = \beta(U_i)(g_i) = k|U_i$ puisque $\beta(U_i) \circ \alpha(U_i) = 0$. □

Corollaire 7.3. *Si $\mathcal{F}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. En effet soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0$ une suite exacte avec $\mathcal{G}$ injectif. Alors la suite

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{K}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0$$

est exacte et d'après le lemme 7.2, ceci entraîne que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Proposition 7.4. *Soit X un espace topologique, $\mathfrak{Z}$ une famille cofinale de recouvrements de X. Soit $\mathcal{C}$ une classe de faisceaux sur X vérifiant les propriétés suivantes:*

(1) $P(\mathfrak{Z})$

(2) $(Q)\ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{C} \quad \exists\, 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{I} \to \mathcal{K} \to 0$ *exacte avec* $\mathcal{I}$ *injectif et* $\mathcal{I}, \mathcal{K} \in \mathcal{C}$.

Alors $\forall\, \mathcal{F} \in \mathcal{C}\ \forall n \geq 1 \quad H^n(X, \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

D'après le corollaire 7.3, $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Supposons que pour $n \leq p$ $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$, quel que soit $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Soit alors $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{K} \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{G}$ soit injectif, suite dont (Q) garantit l'existence. On a la suite exacte:

$$H^p(X, \mathcal{K}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{G})$$

dont les deux extrémités sont nulles, $H^p(X, \mathcal{K})$ d'après l'hypothèse de récurrence, $H^{p+1}(X, \mathcal{G})$ puisque $\mathcal{G}$ est injectif. Donc $H^{p+1}(X, \mathcal{F}) = 0$. □

Proposition 7.5. *Soit V une variété paracompacte. Soit $\mathfrak{Z}$ l'ensemble des recouvrements de V tels qu'un ouvert de ce recouvrement n'en rencontre qu'un nombre fini d'autres. Soit $\mathcal{C}$ la classe des faisceaux de modules sur $\mathcal{E}^0_V$. Alors: $\mathfrak{Z}$ est un ensemble cofinal de recouvrements de V et $\mathcal{C}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$ et (Q).*

Démonstration. 1) $\mathcal{C}$ vérifie (Q). Cela provient de ce que la construction classique du plongement d'un faisceau dans un faisceau injectif ne fait pas sortir de la catégorie des modules sur un faisceau d'anneaux si on y est déjà, et que le quotient d'un faisceau de modules par un autre est encore un faisceau de modules.

2) $\mathcal{C}$ vérifie $P(\mathfrak{Z})$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}^0_V$–module. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de V appartenant à $\mathfrak{Z}$ et soit $m \in \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)$ tel que $\forall\,(i,j,k) \in I^3$ on ait $m_{ij} + m_{jk} = m_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. Il existe alors une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur V subordonnée au recouvrement $(U_i)_i$ (G. de Rham, [**6**, I, §2, th.1, p. 4]) c'est-à-dire qu'il existe:

(1) des fermés $(F_i)_{i\in I}$, $F_i \subset U_i$

(2) des fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$ à support compact contenu dans F_i et telles que $\forall\, x \in V \quad \sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$

La somme $n_i = \sum_{k\in I} \varphi_k m_{ik}$ est définie sur U_i (et même sur V) et sur $U_i \cap U_j$ on a

$$n_i - n_j = \sum_{k\in I} \varphi_k(m_{ik} - m_{jk}) = \sum_{k\in I} \varphi_k m_{ij} = m_{ij}$$

□

Bibliographie

1. Nicolas Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1961.
2. Henri Cartan, *Eléments d'algèbre homologique*, Cours ENS, 1964.
3. ———, *Cours de Calcul différentiel*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1977, nouveau tirage 1997.
4. ———, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variabvles complexes*, Collection Enseignement des sciences, no. 1, Hermann, Paris, 1985, nouveau tirage 1995.
5. Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Mathematical Series, no. 19, Princeton University Press, Princeton, 1956.
6. Georges de Rham, *Variétés différentiables*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, no. III, Hermann, Paris, 1982.
7. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 1960.
8. Robert Fricke and Felix Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1897.
9. Claude Godbillon, *Éléments de topologie algébrique (Groupe fondamental. Revêtements : cohomologie des formes différentielles)*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1971.
10. Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, no. XIII, Hermann, Paris, 1964.
11. Robert C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Notes, vol. 2, Princeton University Press, Princeton, 1966.
12. Serge Lang, *Algebra*, rev. 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
13. David Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry*, Harvard Mathematical Department, 1967, mimeographed notes.
14. ———, *The Red Book of Varieties and Schemes*, second, expanded ed., Lecture Notes in Math., vol. 1358, Springer, 1999.
15. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1984, nouveau tirage 1997.
16. Jean-Pierre Serre, *Revêtements. Groupe fondamental*, Structures algébriques et structures topologiques, Monographies de l'Enseignement Mathématique, no. 7, Inst. Math. Univ. Genève, 1958, pp. 175–186.
17. Bartel Leendert van der Waerden, *Algebra*, Grundlehren der math. Wiss., vol. 33-34, Springer, Berlin, 1960.
18. Kosaku Yosida, *Functional Analysis*, 6th ed. repr. ed., Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 1995.

Index