

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

82-05

CAMILLE JORDAN ET LES FONDEMENTS DE L'ANALYSE
(Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son
cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique)

Hélène GISPERT-CHAMBAZ

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS 1980 : 01A55

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

82-05

CAMILLE JORDAN ET LES FONDEMENTS DE L'ANALYSE
(Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son
cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique)

Hélène GISPERT-CHAMBAZ

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

ORSAY
n° d'ordre : 3194

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PAR

Mme Hélène GISPert-CHAMBAZ



SUJET : Camille Jordan et les fondements de l'analyse.

(Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique).

soutenue le 21 avril 1982 devant la Commission d'examen

MM. KAHANE Jean-Pierre Président

DUGAC Pierre

LAUDENBACH François

TATON René

TABLE DES MATIERES

Introduction.....	4
Tableau chronologique récapitulatif.....	8
Principaux travaux sur les fondements avant 1895.....	9
Première partie : <i>Principaux travaux sur les fondements de l'analyse au moment de la parution de la première édition du traité de Jordan.</i>	
1.1. Une source, la correspondance inédite de Darboux.....	11
1.2. Les constructions de réels.....	13
1.3. Théorèmes sur les suites infinies de réels.....	14
1.4. Les ensembles.....	15
1.5. Fonctions.....	17
1.5.1. Sur les fonctions continues.....	17
1.5.2. Continuité pour les fonctions de plusieurs variables...	18
1.5.3. Fonctions discontinues.....	19
1.5.4. Sur la dérivabilité des fonctions.....	20
1.5.5. Sur l'intégrabilité des fonctions de variable réelle...	22
1.6. Sur les séries.....	23
1.7. Conclusion.....	24
Notes sur la première partie.....	25
Deuxième partie : <i>La mise sur pied des fondements en France de 1870 à 1882.</i>	
2.1. Les traités : un moyen de connaissance.....	29
2.2. L'Italie et l'Allemagne.....	30
2.3. Les fondements dans le tome 1 de Jordan de 1882.....	35
2.3.1. Buts et limites de notre étude.....	35
2.3.2. La table des matières.....	37
2.3.3. L'introduction.....	38
2.3.4. Les irrationnels.....	39
2.3.5. La continuité.....	40
2.3.6. La notion de dérivée.....	41

2.3.7. La formule fondamentale du calcul.....	44
2.3.8. Dérivées partielles, différentielles.....	47
2.3.9. Formule de Taylor, développement en série de Taylor....	50
2.3.10. Les séries.....	53
2.3.11. Intégration et théorie des fonctions.....	55
2.3.12. Conclusion.....	56
2.4. Les fondements dans les autres traités d'analyse.....	58
2.4.1. Les introductions.....	59
2.4.2. Les tables des matières.....	59
2.4.3. Les irrationnels.....	61
2.4.4. La continuité.....	61
2.4.5. La notion de dérivée.....	63
2.4.6. Le théorème des accroissements finis.....	66
2.4.7. Dérivées partielles, différentielles.....	67
2.5. Les fondements en France à travers la correspondance de Darboux.....	67
Notes sur la deuxième partie.....	71
Troisième partie : <i>Camille Jordan et l'Ecole Polytechnique.</i>	
3.1. Jordan, un grand algébriste.....	75
3.2. La note de 1881.....	77
3.3. L'Ecole Polytechnique.....	79
3.4. L'"enseignement élémentaire", un alibi ? - La préface de la première édition.....	81
3.5. La préface de la deuxième édition.....	84
Quatrième partie : <i>Une première étape, en France, dans la prise en compte des nouveaux fondements de l'analyse.</i>	
4.1. Une situation nouvelle à partir de 1885.....	87
4.2. La préface au traité de Tannery.....	89
4.3. Le supplément au tome de 1887.....	90
4.3.1. Les irrationnels dans les tomes de 1887 et 1893.....	92
4.3.2. Les paragraphes sur les limites.....	95
4.3.3. Fonctions.....	96
. Le théorème de la borne supérieure pour les fonctions limitées.....	98
. Fonctions intégrables.....	99
. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle..	101
. Continuité uniforme.....	104

4.3.4. Les derniers paragraphes.....	106
4.4. Limites et continuité chez d'autres auteurs.....	107
4.4.1. Peano.....	107
4.4.2. Dini.....	108
4.4.3. Tannery.....	109
Cinquième partie : <i>L'étape décisive : le tome de 1893.</i>	
5.1. Une édition de référence.....	111
5.2. Un nouveau plan.....	113
5.3. Les énoncés sur les limites.....	114
5.4. Les énoncés sur les ensembles.....	115
5.4.1. Premières définitions.....	115
5.4.2. Existence de points frontières.....	117
5.4.3. Connexité.....	118
5.4.4. Ensembles mesurables - étendue des ensembles.....	120
5.4.5. Des manques dans l'exposé de la théorie des ensembles.....	122
5.5. Fonctions.....	124
5.5.1. Fonctions bornées - fonctions intégrables.....	124
5.5.2. Fonctions continues.....	125
5.5.3. Fonctions à variation bornée.....	128
5.6. Dérivées et différentielles.....	128
5.6.1. Dérivée d'une fonction d'une seule variable.....	128
5.6.2. Dérivées partielles - différentielles totales.....	130
5.6.3. Dérivée et différentielle d'ordre supérieur.....	132
5.7. Les autres paragraphes.....	133
5.7.1. Lignes continues.....	133
5.7.2. Séries de fonctions.....	134
5.8. Conclusion.....	134
Conclusion.....	136
Bibliographie.....	138
Annexe : lettres inédites de Gaston Darboux à Jacques Houël....	143

INTRODUCTION

A partir des années 1860, se développe en Allemagne un mouvement de refonte des principes de l'analyse, de mise sur pied de ses fondements, à la faveur duquel sont élaborées les premières notions de topologie.

Ce mouvement qui ne concerne au départ que peu de mathématiciens et reste très marginal par rapport à toute l'activité mathématique, va provoquer à la fin du siècle la naissance de la théorie des fonctions et de l'analyse moderne.

L'étude de ce mouvement, de l'apport de chacun des mathématiciens qui y participèrent, a été réalisée par P. Dugac dans sa thèse, *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire*.

Nous nous proposons dans ce travail d'aborder cette étude sous un angle différent. Nous avons voulu rendre compte de l'influence de ce mouvement dans le monde mathématique et de son évolution entre les années 1870 et 1890 en France.

Nous avons pu ainsi dégager trois moments différents dans l'histoire des fondements de l'analyse en France :

- Une première période, jusque vers le début des années 1880 où, mis à part Darboux, personne ne s'intéresse réellement à tous ces nouveaux résultats trouvés essentiellement à l'étranger; les limites mêmes du mouvement de mise sur pied des fondements à cette époque expliquent en partie les résistances auxquelles il se heurte; *"Il y avait des remarques ingénieuses, des résultats isolés, des conceptions profondes, mais aussi obscures que profondes"* (Lebesgue, [41], XXIII).

- D'autre part, dans une France qui ne s'intéressait pas aux recherches sur les séries trigonométriques, recherches qui furent à l'origine de beaucoup de ces travaux, le grand défaut de ces résultats fut d'être sans emploi dans les autres secteurs de l'activité mathématique. Cela change en France à partir de 1884-1885 quand Poincaré, le premier, utilise dans un de ses mémoires un résultat de la théorie des ensembles de Cantor, dont les travaux ont été publiés en français à partir de 1883.

- Enfin, dans les années 1890, a lieu un changement radical. La France tient alors la première place dans la poursuite de ce mouvement avec l'édification de la théorie des fonctions d'une variable réelle dont Borel, Baire et Lebesgue furent les fondateurs, bien que les résistances ne disparaissent que très lentement. Cette période nouvelle, la troisième, débute avec la parution de la deuxième édition du *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* de Camille Jordan qui *"doit être considéré comme le premier artisan de cette renaissance du réel"* (Lebesgue, [41], XXIII); *"Il le fait dans son cours, ((où)) il commence l'édification d'une théorie des variables réelles"*(idem). Remarquons que l'essentiel des travaux sur les

fondements qui provoquèrent l'apparition de cette troisième période fut publié dès les années 1870.

Nous avons procédé à cette étude, à travers l'histoire du Cours d'Analyse de Camille Jordan qui résume de façon intéressante ces trois moments que nous venons de caractériser; nous la résumerons en trois dates :

- 1882 : parution du premier tome *Calcul différentiel* du Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Camille Jordan; le deuxième tome consacré au *Calcul Intégral*, paraît en 1883. Dans ce cours remarquable qui rend compte de façon claire et exhaustive des derniers développements de l'analyse classique à cette époque, Camille Jordan ignore complètement les travaux de la dernière décennie sur les fondements.

- 1887 : parution du troisième tome *Intégration des équations différentielles et Eléments de calcul des variations* comportant une *Note sur quelques points de la théorie des fonctions*. Jordan complète son exposé de 1882, en particulier sur l'étude des fonctions de variable réelle, introduisant alors les travaux sur les fondements.

- 1893 : parution de la deuxième édition. Dans cette édition, particulièrement remarquée et louée, qui fut le livre dans lequel la plupart des grands mathématiciens du début du XXe siècle apprirent l'analyse, "*les principes sont exposés de la façon la plus solide et sous une forme qui, bien souvent, semble devoir être définitive*". (Jules Tannery, [59], 249)

Nous nous sommes attachée dans ce travail à mesurer, grâce à une analyse détaillée du contenu des différents tomes sur les questions qui nous concernent ici, l'ampleur de la différence entre les tomes de 1882 et de 1893, ainsi que l'évolution profonde de 1887 à 1893.

Nous avons ainsi cherché à mettre en évidence les deux choses suivantes :

- l'état réel de la pénétration des nouvelles idées sur les fondements vers les années 1880, à partir du contenu du tome de 1882.

- l'importance du rôle de Camille Jordan qui réussit à surmonter le premier, dans les cent premières pages de son cours d'analyse, les limites auxquelles se heurtait la mise sur pied des fondements, et réalise la synthèse nécessaire de toutes ces idées nouvelles, en élaborant ainsi une théorie naissante.

Afin d'en avoir l'appréciation la plus précise, nous avons étudié, parallèlement aux tomes de 1882 et de 1887, plusieurs traités d'analyse des années 1870-1880 parus en France, en Allemagne et en Italie.

Cela nous a permis de mettre à jour une adéquation entre l'état d'avancement de la mise sur pied des fondements dans les différents pays, à différentes périodes, et le contenu des traités, et nous a confirmé dans le choix que nous avons fait pour mener cette étude.

Ainsi, c'est en Italie où la situation est la plus avancée - avec la création autour de Dini d'une puissante école d'analyse qui publie de nombreux résultats à partir de 1881 - que paraît en 1878 le premier cours consacré aux fondements ([15]).

En Allemagne, par contre, où malgré la présence de Weierstrass et de ses élèves dont Cantor, il n'y a rien d'équivalent à cette école italienne, un tel traité fait défaut. Ainsi, bien que l'impulsion décisive soit venue d'Allemagne, ce n'est qu'en 1885 que paraît le traité de Stoltz, premier traité général d'analyse qui prenne en compte les idées nouvelles sur les fondements publié en Allemagne.

Jusqu'en 1886, date de la parution de l'*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable* de J. Tannery, les traités français ignorent de façon plus ou moins absolue les travaux sur les fondements et les premières notions de topologie. Cela ne change qu'une fois que les mathématiciens français s'emparent, dans leurs propres travaux, de ces résultats.

Il apparaît ainsi que la parution de "nouveaux traités" d'analyse est étroitement liée à l'état de réflexion sur les fondements. Elle nous semble significative d'un état de maturité sur ces questions que tous les pays ne connaissent pas au même moment.

Ainsi, nous montrerons que l'exposé remarquable de Jordan de 1893 est la cristallisation d'un long processus caractéristique dans une certaine mesure de la réalité française : tout d'abord, au début des années 1880, des tâtonnements sur ces notions des fondements - que d'autres, à l'étranger, mais nous le verrons, aussi en France, maîtrisaient mieux que lui - puis un long mûrissement qui s'exprime tout à la fois dans les faiblesses du tome de 1882 et dans les améliorations et les limites de la Note de 1887.

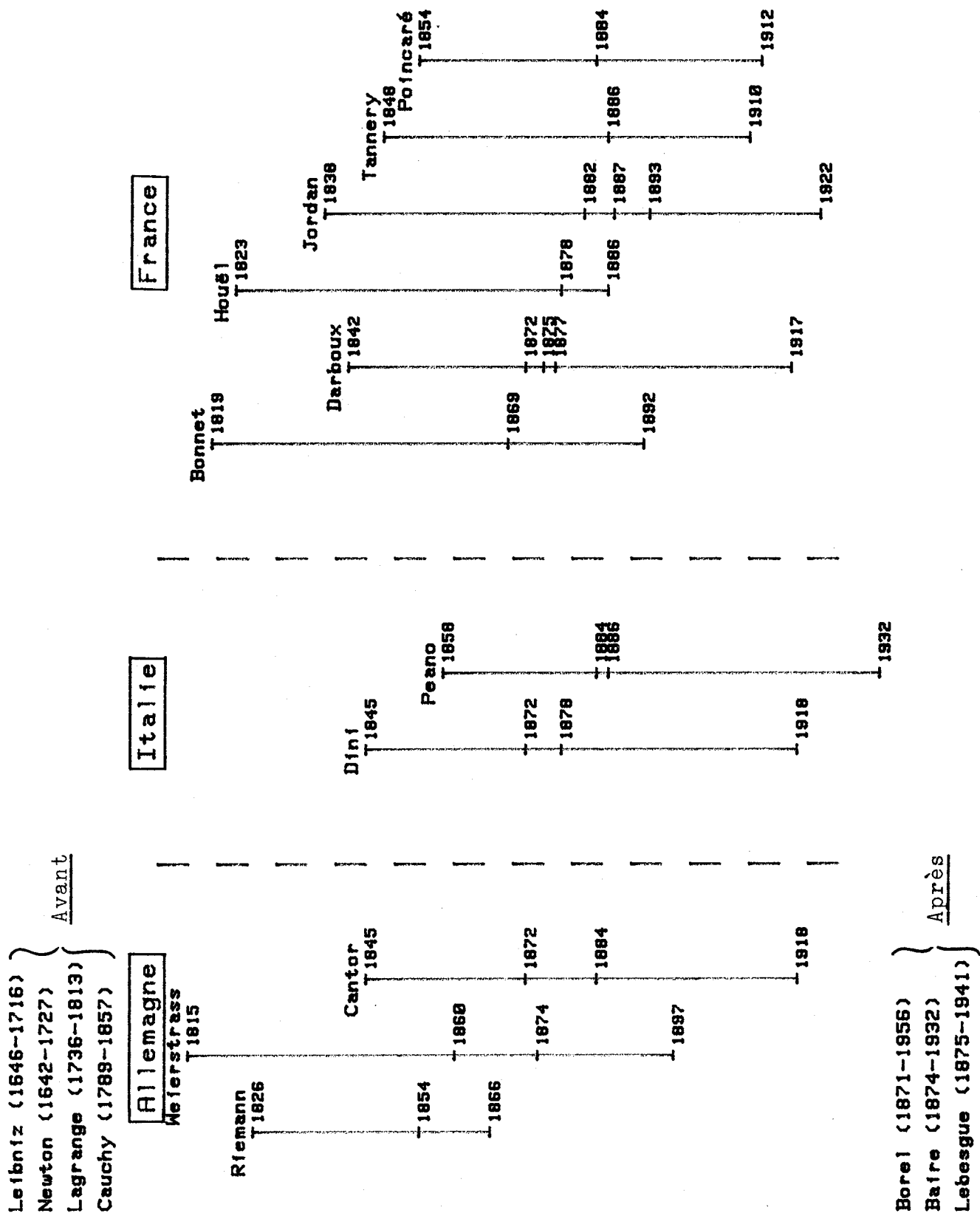
Il nous faudra également préciser le rôle que joua l'itinéraire personnel de Jordan dans l'élaboration de ce traité, ainsi que celui de l'Ecole Polytechnique qui ne saurait être négligeable.

Nous avons enfin, au cours de nos recherches, été amenés à étudier la correspondance pour l'essentiel inédite de G. Darboux conservée aux Archives de l'Académie des Sciences. Il nous est apparu que ces quelques 426 lettres écrites entre 1870 et 1883 au mathématicien bordelais J. Houël, traducteur de Lobatchevski et de Riemann, présentaient un intérêt considérable et donnaient des éléments inédits sur l'histoire des fondements en France et la part qu'y prit Darboux.

Un nombre important de lettres est consacré à la critique d'un cours de calcul différentiel et intégral de J. Houël qui parut en 1878 et à l'exposé des idées personnelles de Darboux sur l'enseignement du calcul différentiel ; nous avons donc jugé utile de présenter ici une partie de notre travail sur cette correspondance qui, par ailleurs, a fait l'objet d'un article qui devrait être publié prochainement.

Tableau chronologique récapitulatif

(Les travaux sur les fondements, qui correspondent aux dates indiquées dans ce tableau, sont repris dans la liste de la page 9)



Principaux travaux cités sur les fondements :
points de repère

O. BONNET :

-1869 : parution du *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret ([51]) dans lequel se trouve la démonstration du théorème des accroissements finis.

G. CANTOR :

-1872 : premiers éléments de la théorie des ensembles ([4])

-1884 : parution en français, dans les *Acta Mathematica*, de certains de ses articles sur les ensembles de points ([6])

G. DARBOUX :

-1872 : premier de ses articles sur les fondements ([9])

-1875 : mémoire sur les fonctions discontinues ([10])

-1877 : addition au mémoire sur les fonctions discontinues ([11])

U. DINI :

-1872 : il enseigne à l'Université de Pise un cours dans lequel il prend en compte les nouveaux travaux sur les fondements

-1878 : parution de son traité ([15]), premier cours moderne sur la théorie des fonctions d'une variable réelle

J. HOUEL :

-1878 : parution de son *Cours de calcul infinitésimal* ([27])

C. JORDAN :

-1882 : parution du premier tome de la première édition du *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* ([31])

-1887 : parution du troisième volume de cette édition, comportant une *Note sur quelques points de la théorie des fonctions* ([33])

-1893 : parution du premier volume de la deuxième édition "*entièrement revue et corrigée*" ([35])

G. PEANO :

-1884 : remarques préliminaires au traité de Genocchi ([45]), constituées de critiques de nombreux cours de calcul infinitésimal parus les années précédentes

-1886 : il expose une théorie de la mesure dans les *Applications géométriques du calcul infinitésimal* ([46])

A. POINCARÉ :

-1884 : mémoire sur les groupes kleinéens ([49]) dans lequel il utilise des résultats de Cantor sur la théorie des ensembles

B. RIEMANN :

-1854 : mémoire d'habilitation à l'Université de Göttingen ([50]), paru en 1868 en Allemagne et en 1873 en France

J. TANNERY :

-1886 : parution de son traité d'analyse ([56]), premier traité français dans lequel les travaux sur les fondements sont intégrés

K. WEIERSTRASS :

-1860-1874 : cours à l'Université de Berlin

1. PRINCIPAUX TRAVAUX SUR LES FONDEMENTS DE L'ANALYSE AU MOMENT DE LA PARUTION DE LA PREMIERE EDITION DU TRAITE DE JORDAN.

Nous nous proposons de montrer dans ce premier chapitre, que l'essentiel des travaux sur les fondements, dont Jordan se servira pour son exposé des principes de l'analyse dans le tome de 1893 de son traité, est antérieur à 1882, année de la parution du premier tome de la première édition du traité.

Nous dresserons pour cela un tableau rapide des résultats dans ce domaine, au tout début des années 1880. Nous nous aiderons de la thèse de P. Dugac, *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire* ([18]) et de la correspondance de Gaston Darboux.

1.1. Une source : la correspondance inédite de G. Darboux

Il s'agit de 426 lettres écrites par Gaston Darboux entre 1870 et 1883 à Jules Houël⁽¹⁾, professeur à la Faculté de Bordeaux, traducteur de Lobatchevski et de Riemann et collaborateur le plus direct de Darboux à la direction du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, bulletin fondé par Darboux en 1870.

Nous n'utiliserons ici qu'une petite partie de cette correspondance, ne retenant que les lettres qui abordent des questions relatives aux fondements du calcul infinitésimal.

Les si nombreuses lettres de Darboux sont en effet consacrées à de multiples sujets, mathématiques, historiques, mais aussi politiques⁽²⁾.

A l'aide de ces lettres qui constituent de véritables archives du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, nous pouvons suivre pas à pas l'élaboration et la réalisation des numéros du *Bulletin* pendant plus de dix ans. On y trouve ainsi des échos de la vie mathématique à Paris et à l'étranger; nous en donnerons ici certains extraits qui nous ont semblé apporter des éléments intéressants sur l'histoire des fondements dans les années 1872-1875.

Mais cette correspondance est également étroitement mêlée à l'activité directement mathématique des deux hommes.

Darboux y commente et défend les articles qu'il écrit pendant cette période, tout particulièrement les articles sur les fondements et les principes du calcul différentiel : *Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions* en 1872 ([9]), *Mémoire sur les fonctions discontinues* en 1875 ([10]), *Addition au mémoire sur les fonctions discontinues* en 1879 ([11]).

Houël et Darboux s'affrontent aussi longuement à propos de quelques démonstrations fondamentales d'analyse; Houël qui publiera un cours de calcul différentiel et intégral en 1878, soumet à Darboux les épreuves de son livre.

Darboux traite ainsi de la continuité d'une fonction de deux variables et de la nécessité de démontrer qu'une fonction continue atteint sous certaines conditions ses valeurs extrema, de l'existence de fonctions continues sans dérivées; à partir d'une discussion sur le rôle et la démonstration du théorème des accroissements finis, il revient sur la limite des infiniment petits à deux variables.

Darboux a ainsi l'occasion de revenir longuement sur les fondements de l'analyse. Ces discussions acharnées sur les fondements reprennent inlassablement, avec les mêmes arguments tout au long des années de correspondance, jusqu'en 1882. Elles ont, par rapport aux trois articles cités précédemment, un caractère spécifique tout à fait remarquable; Darboux y affirme en effet sa conception des principes du calcul infinitésimal et expose la façon dont il reconstruirait sur des bases solides et rigoureuses le calcul différentiel.

Cet aspect non plus seulement critique mais constructif de sa démarche, excessivement rare à son époque, ne se retrouve pas sous une forme aussi accusée dans l'oeuvre majeure de Darboux sur ces questions, à savoir le mémoire de 1875.

Tout au long de cette correspondance, utilisant de très nombreux exemples de fonctions "bizarres", "saugrenues" (Houël), Darboux affirme la nécessité d'être rigoureux dans les énoncés et les démonstrations de propositions qu'on ne peut, en aucun cas, considérer comme acquises; il le fait jusque dans les dernières lettres conservées aux Archives, ce qui n'est pas un des moindres intérêts de cette correspondance.

En effet, après 1875, Darboux ne poursuit pas ses travaux dans cette direction et, comme l'écrit Lebesgue, "*il ne fit pas d'autre incursion dans le domaine des fonctions non analytiques*" ([39], 14). Les lettres sur les fondements des dernières années prennent donc une importance toute particulière.

Nous intégrerons les éléments de notre étude sur cette correspondance de la façon suivante :

Dans la première partie, nous donnerons des éléments inédits sur les recherches de Gaston Darboux sur les fondements, montrant que l'importance de Darboux dans ce domaine est généralement sous-estimée.

Nous aurons recours à ces lettres à deux reprises dans notre deuxième partie, donnant d'une part les témoignages de Darboux sur le "climat mathématique" de son temps, d'autre part les critiques très précises sur le traité de Houël⁽³⁾.

Enfin, nous donnerons dans la troisième partie quelques extraits de la correspondance concernant l'Ecole Polytechnique et les conceptions de Darboux sur l'enseignement de l'analyse infinitésimale.

1.2. Les constructions des réels

Entre 1860 et 1870, plusieurs théories des nombres réels furent élaborées par divers mathématiciens.

Méray et Cantor arrivèrent, dans leur travail de recherche et indépendamment l'un de l'autre, à une définition correcte des nombres irrationnels et de l'ensemble des réels en établissant une relation d'équivalence à l'aide des suites de Cauchy et en passant au quotient.

La publication de Méray ([18], 80) qui date de 1869 fut la première. En 1872, Heine expose la théorie des nombres irrationnels de Cantor que celui-ci publiera lui-même plus tard ([25]).

Dedekind et Weierstrass élaborèrent, en vue de leur enseignement, deux théories différentes; Dedekind publia la sienne (procédé des coupures) en 1872 ([14]). La même année E. Kossak donne, d'après des notes prises au Cours de Weierstrass du semestre d'hiver 1865-1866 sur la *Théorie générale des fonctions analytiques*, une définition des irrationnels grâce à une relation d'équivalence ([18], 58).

Signalons enfin que Bolzano tenta de construire, dans les années 1830, une théorie des nombres réels dans un traité resté inédit jusqu'en 1962 ([18], 11).

Dans de nombreuses questions d'analyse, le problème de l'existence et de la construction des nombres réels se trouvait implicitement posé.

Par exemple, en énonçant dans son *Cours d'Analyse* de 1821 ([7], 2, t.3) le critère de Cauchy dont il considère la condition suffisante évidente, Cauchy établit les principes d'une étude rigoureuse de la convergence des séries et du calcul, sinon de l'existence, des limites de suites⁽⁴⁾.

Mais il était nécessaire de définir les nombres irrationnels pour pouvoir démontrer la condition suffisante du critère.

L'exigence d'une telle définition était ressentie de plus en plus consciemment au cours de la deuxième moitié du XIXe siècle⁽⁵⁾.

D'autre part, comme le signale P. Dugac dans [18], page 57, le livre de Briot et Bouquet, *Sur la théorie des fonctions doublement périodiques*, paru en 1859, "contient plusieurs théorèmes incomplets ((qui)) faisaient appel à des propriétés non explicitées des sous-ensembles des points de la droite et du plan, ce qui devait amener les mathématiciens de façon tout à fait naturelle à la notion de point d'accumulation, à la propriété de Bolzano-Weierstrass et à une conception rigoureuse des nombres irrationnels (...)) Il était nécessaire de clarifier et de redéfinir un certain nombre de notions fondamentales. Or toutes ces questions qui portent sur quelques unes des notions parmi les plus essentielles de l'analyse nouvelle, renvoyaient en dernier ressort à la structure de la droite réelle et à celle de ses sous-ensembles. On avait en fait besoin en analyse, outre d'une définition claire et maniable de la limite, d'outils plus fins tel que le point d'accumulation et des précisions sur la borne supérieure et la borne inférieure et toutes ces notions exigeaient finalement que l'ensemble des nombres réels fut défini rigoureusement".

Cette définition claire et maniable de la limite se forgera parallèlement à la construction des irrationnels qui permettra de débarrasser la notion de limite de toute contradiction et de démontrer rigoureusement l'existence de limites de suites ou de fonctions.

L'artisan principal de ce travail fut Weierstrass qui dès 1861 exprima la notion de limite à l'aide d'inégalités, de ε et de η ⁽⁶⁾.

1.3. Théorème sur les suites infinies de réels

Dans un mémoire de 1817 sur le théorème des valeurs intermédiaires, Bolzano avait déjà formulé et démontré de façon remarquable, malgré des lacunes dues essentiellement à l'inexistence de construction rigoureuse des irrationnels, les théorèmes fondamentaux de l'analyse dont il est question ici, dont celui sur la borne supérieure d'un ensemble majoré de réels. Il utilisera par ailleurs, dans un inédit publié en 1930, le théorème dit de *Bolzano-Weierstrass* (un ensemble borné infini de réels admet au moins un point d'accumulation).

Cependant, ce mémoire resta longtemps ignoré et son influence ne se fit sentir qu'à partir des années 1865 à travers les cours enseignés par Weierstrass à l'Université de Berlin⁽⁷⁾.

C'est d'ailleurs Weierstrass qui élaborera dans ses cours les démonstrations rigoureuses de ces théorèmes sur les réels, qui ne furent tout d'abord connues qu'à travers des rédactions presque toutes inédites de ses cours successifs⁽⁸⁾.

En fait, d'après [18], c'est dans le cours de 1874 que l'on trouve dans le chapitre *Sur les séries entières* la démonstration rigoureuse du théorème sur la borne supérieure d'un ensemble majoré de réels (démonstration inspirée de Bolzano), ainsi que celle sur l'existence d'au moins un point d'accumulation pour un ensemble borné infini de réels, qui comporte explicitement un renvoi au mémoire de 1817 de Bolzano (ce théorème était déjà formulé dans le cours de 1865-1866, mais avec une démonstration lacunaire).

La notion de point d'accumulation d'"un système de points" qu'il appela "*point limite*" fut également introduite par Cantor en 1872 dans son mémoire *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* à la suite de Weierstrass.

C'est dans le livre de Dini, *Fondements pour la théorie des fonctions de variables réelles*, publié en 1878, que paraissent pour la première fois les démonstrations de ces théorèmes clefs de l'analyse. Ce traité reprend les cours que Dini enseigna à Pise en 1871-1872, cours conçus en partie à partir des *Notes sur les méthodes que suivaient Weierstrass et les mathématiciens allemands, ses élèves, dans leurs démonstrations*, que lui envoya H. A. Schwarz en 1870. On retrouve ainsi les démonstrations de l'existence de la borne supérieure d'un ensemble majoré et sa caractérisation, de la convergence des suites monotones (toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) admet une limite), de l'existence de la limite commune de deux suites adjacentes, du théorème de Bolzano-Weierstrass (de toute suite infinie de réels on peut extraire une sous-suite convergente).

1.4. Les ensembles

Ce sont à nouveau les noms de Weierstrass et de Cantor que nous retrouvons à l'origine des notions premières de topologie générale.

L'idée de base de l'oeuvre de Weierstrass, en ce qui concerne l'analyse, est l'utilisation de séries entières pour représenter les fonctions⁹⁾, qui implique l'idée de prolongement analytique, qui fut à l'origine du développement de la théorie des ensembles et de la topologie générale.

Dans le cours de 1861, Weierstrass introduit un certain nombre de notions "topologiques". Il définit le voisinage (*Nachbarschaft*) d'un point x_0 comme l'ensemble de tous les x "pour lesquels la différence $x - x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une valeur déterminée" et travaille sur des intervalles "fermés bornés" (il montre que l'image continue d'un intervalle fermé et borné est un intervalle fermé et borné) ([18], 51).

Mais c'est dans le cours de 1874 que l'on trouve les définitions actuelles d'un ensemble borné, puis celle d'un ouvert borné O à l'aide de la notion de voisinage d'un point a , défini alors comme un disque ouvert de centre a . Weierstrass définit également un point extérieur à O , la frontière de O et introduit la notion de connexité ([18], 65)⁽¹⁰⁾.

Quant à Cantor, son nom est universellement attaché à la théorie des ensembles qu'il élabore à partir de ses recherches sur les séries trigonométriques et publie dans une série de mémoires, principalement dans les *Mathematische Annalen* et les *Acta Mathematica*.

Dans le premier de ces mémoires en 1872 ([4]), Cantor introduit la notion d'un *ensemble de points* et donne la définition du *voisinage d'un point de la droite* (tout intervalle qui contient ce point dans son intérieur), puis celle d'un *point limite* (*point d'accumulation*) et d'*ensemble de 2^eme espèce* (*ensemble dérivé d'ordre 2*), toutes sauf la dernière inspirées de Weierstrass.

P. Dugac souligne l'importance de ce texte qui "ouvre l'ère de l'étude des sous-ensembles d'un ensemble donné, munis de certaines propriétés, étude qui conduira, en particulier aux notions clés d'ensemble de mesure nulle et d'ensemble maigre".

Dans une série d'articles, publiés de 1879 à 1884 dans les *Mathematische Annalen*, et traduits (voir à ce sujet [17]) en français dans les *Acta Mathematica* en 1883 et 1884 donc après la parution du premier tome du traité de Jordan, Cantor donne un exposé de sa théorie des sous-ensembles infinis de R . Nous ne retiendrons ici que les quelques définitions qui figureront dans la deuxième édition du traité de Jordan, celles d'un *ensemble partout dense*, d'un *ensemble parfait*, d'un *ensemble bien enchaîné*, de *point isolé* et d'un *ensemble nulle part dense*, d'un *ensemble fermé*, d'un *ensemble dense en lui-même* (Hankel, en 1870, avait introduit pour la droite les notions d'*ensemble partout dense* et d'*ensemble non dense*).

Par ailleurs, Cantor publie en 1877 le théorème affirmant qu'il existe une bijection entre R et R^2 .

Mais ce fut Dedekind qui, "à l'occasion d'une publication envisagée des leçons de Dirichlet sur la théorie du potentiel, incité à se poser des questions sur les problèmes de topologie, fut le premier mathématicien de son temps à le faire dans des termes dont il n'y a rien à retrancher même en 1974" ([17bis], 107). Il le fera malheureusement dans un article inédit situé aux environs de 1871 et qui ne paraîtra que dans ses oeuvres mathématiques ([14], tome 2, 353).

Dans cet article sont définis les *ouverts* (ensemble P de points $p, p'...$ tel que pour tout point p on a une longueur δ telle que tous les points dont la distance à p est plus petite que δ , appartiennent à l'ensemble P), les *points intérieurs*, les *boules ouvertes*, les *points extérieurs*, les *points frontières*. D'après Dugac ([17bis]), "il faudra attendre longtemps avant de trouver, dans la littérature mathématique, un exposé aussi systématique de topologie générale".

1.5. Les fonctions

La volonté d'explicitier en toute rigueur les fondements des mathématiques qui est une des causes des travaux sur les nombres réels que nous venons de mentionner se retrouve dans les recherches sur la théorie des fonctions qui furent d'ailleurs souvent, à cette époque, à l'origine de notions topologiques (cf Weierstrass et Cantor).

Le cadre général des recherches sur les fonctions en cette deuxième moitié du XIXe siècle reste toujours l'étude de la possibilité de représenter une fonction quelconque par une série convergente, étude que nous n'aborderons pas ici, notre but étant seulement de faire le point sur les notions de base de la théorie des fonctions de variables réelles traitées dans les premiers chapitres du traité de Jordan, à savoir celles concernant les fonctions continues, les fonctions intégrables, les dérivées. Déjà celles-ci étaient loin d'être complètement clarifiées au début des années 1870, comme le montrent les lettres de Darboux à Houël dans lesquelles, à maintes reprises, il développe l'idée suivante, exprimée dans la préface de son mémoire de 1875 sur les fonctions discontinues : "Au risque d'être trop long, j'ai tenu avant tout, sans y réussir peut être, à être rigoureux. Bien des points, qu'on regardait à bon droit comme évidents (...) doivent être soumis à une critique rigoureuse (...). Par exemple on verra qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. On conçoit qu'en présence de propositions aussi singulières on éprouve le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées".

1.5.1. Sur les fonctions continues

La première définition moderne à l'aide d'inégalités de la continuité fut donnée par Bolzano en 1817 dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires, mémoire qui, comme nous l'avons déjà mentionné, ne fut redécouvert que vers 1865.

La définition qui servira de référence jusque vers les années soixante sera celle de Cauchy, parue dans son cours d'analyse en 1821, moins précise que celle de Bolzano⁽¹¹⁾.

C'est dans le cours de Weierstrass de 1861 qu'on trouve la première définition "epsilonienne" de la continuité d'une fonction d'une variable, définition que l'on retrouve chez Ossian Bonnet en 1871 ([18]) sous une forme voisine⁽¹²⁾.

Dans ce même cours de 1861, Weierstrass démontre qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes supérieure et inférieure puis énonce le théorème des valeurs intermédiaires, mais sa démonstration, ainsi que les démonstrations précédentes de Bolzano (1817) et de Cauchy (1821)⁽¹³⁾, est lacunaire. Elle repose en effet sur l'existence de la borne supérieure d'un ensemble majoré, existence non encore démontrée. C'est en 1874 qu'il donnera une démonstration exacte de ce théorème (se référant explicitement à celle de Bolzano), démonstration qu'il possède probablement autour de 1868.

Weierstrass démontre également dans le cours de 1861 que l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Ce n'est pas Weierstrass qui attirera l'attention sur une autre de ces fausses évidences à propos des fonctions continues, à savoir leur monotonie, mais Darboux, dans son mémoire de 1875 où il montre l'existence de "*fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle*"⁽¹⁴⁾.

En 1872, E. Heine dégage la notion de continuité uniforme dans [25] et démontre rigoureusement pour la première fois qu'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle. Cette propriété, ainsi que la notion de continuité uniforme, fut utilisée par d'autres mathématiciens auparavant dont Cantor⁽¹⁵⁾.

1.5.2. Continuité pour les fonctions de plusieurs variables

Les énoncés à ce propos, ou plus précisément leur absence ou les erreurs qu'ils renferment, sont une indication supplémentaire de la difficulté qu'il y avait alors à saisir le fond de la notion de continuité. Cauchy avait tenté de démontrer en 1821 (il avait déjà le mérite de se poser la question) un théorème affirmant que si une fonction de deux variables est continue par rapport à x et par rapport à y , alors elle est continue par rapport à (x, y) .

Le premier contre-exemple sera publié par Thomae en 1870 dans [60] et sera suivi d'un deuxième trouvé par Schwarz en 1872 ([52])⁽¹⁶⁾.

Cette même année, dans une lettre du 26 avril à Houël, Darboux expose avec une parfaite maîtrise la différence entre la continuité séparément par rapport à chacune des variables et la continuité par rapport à deux variables. Il reviendra sur cette question en donnant des contre-exemples pendant plus de cinq ans, ce qui montre la difficulté qu'il avait à convaincre Houël⁽¹⁷⁾.

Ces contre-exemples inédits, ainsi que les deux autres furent ignorés en France. Il en sera ainsi jusqu'en 1896 date à laquelle Baire redécouvrira cette différence de nature des deux continuités et en fera le point de départ de ses recherches.

Il semble qu'en 1861 Weierstrass ait donné une définition tout à fait correcte (à l'aide de voisinages) de la continuité d'une fonction de deux variables ([18], 114). Dans son cours de 1874 il démontre qu'une fonction continue sur un ensemble fermé borné atteint ses bornes supérieure et inférieure et définit la notion de point d'accumulation pour R^n et C^n .

La démonstration de ce théorème pour le cas particulier de deux variables avait été faite par Darboux en 1872 dans un article où il définissait la continuité d'une fonction de deux variables ([9])⁽¹⁸⁾.

1.5.3. Fonctions discontinues

C'est Riemann dans [50], mémoire présenté pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen en 1854 mais publié seulement en 1867 par Dedekind et traduit en français en 1873 par Darboux et Houël (voir les lettres de Darboux des 24 et 30 mars 1873), qui relança l'étude des fonctions discontinues⁽¹⁹⁾. Définissant l'oscillation d'une fonction dans un intervalle, il élargit la notion d'intégrale à des fonctions non continues ayant une infinité dénombrable de discontinuités et intégrable, exemple qui sera suivi par d'autres dont ceux de Hankel en 1870 qui donne les premières définitions et fait l'étude des fonctions ayant une infinité de discontinuités dans tout intervalle de R ([18], 116) et ceux de Darboux en 1875 dans son mémoire sur les fonctions discontinues.

Là encore Bolzano fut en avance sur beaucoup de ses contemporains et des mathématiciens qui lui succédèrent. Vers 1835, il intitule la première partie de son livre, *La théorie des fonctions, Fonctions continues et discontinues* (livre publié seulement en 1930), alors que jusqu'à la deuxième édition du traité de Jordan (1893) la presque totalité des manuels de calcul infinitésimal (calcul intégral et différentiel) ne signale pas l'intégrale de Riemann et ignore les fonctions non continues.

Mais le livre de Dini de 1878 est une exception. Il reprend et perfectionne en effet, dans un chapitre qui leur est consacré, les définitions et l'étude des fonctions discontinues.

Darboux quant à lui, utilise à plusieurs reprises dans sa correspondance des fonctions discontinues à titre de contre-exemples, considérant, par exemple, les fonctions définies de deux façons différentes sur les rationnels et les irrationnels (lettre du 21 mai 1874).

1.5.4. Sur la dérivabilité des fonctions

Les résultats sur la dérivabilité exposés ici peuvent s'organiser autour de trois questions : l'existence des dérivées et la construction de fonctions continues mais non dérivables, la démonstration du théorème des accroissements finis, les dérivées de fonctions de plusieurs variables.

Traitant du calcul différentiel, Bourbaki écrit :

"Avec les ouvrages de Cauchy on se retrouve enfin sur un terrain solide.((...)) La notion de limite, fixée une fois pour toutes, est prise pour point de départ; celles de fonction continue (au sens moderne) et de dérivée s'en déduisent immédiatement, ainsi que leurs principales propriétés élémentaires; et l'existence de la dérivée, au lieu d'être un article de foi, devient une question à étudier par les moyens ordinaires de l'analyse".

Et, excepté une nouvelle fois Bolzano qui construisit un exemple non publié de fonction continue n'ayant de dérivée ni finie ni infinie de signe déterminé en aucun point⁽³⁾, les mathématiciens des années suivantes ne se préoccupèrent que des calculs de dérivées ou de différentielles et non de leur existence, critique que formulait encore Peano en 1884 à l'égard de la majorité des traités de calcul infinitésimal publiés ([45], 1, 47).

Darboux, également, reprend cette critique de façon implicite à plusieurs reprises dans ses réponses à Houël⁽²¹⁾, et insiste sur les difficultés qu'il rencontrerait s'il cherchait, toutes les fois qu'il calculait une dérivée, à en démontrer l'existence.

La question de l'inéluctabilité de l'existence de la dérivée d'une fonction continue fut définitivement tranchée par Weierstrass qui produisit en 1872 un exemple de fonction continue et qui n'est dérivable en aucun point de R , exemple qui ne fut publié qu'en 1875 et qui apparaît dans le cours de 1874.

Dans ce même cours Weierstrass indique que Riemann aurait donné un exemple de fonction continue qui n'était dérivable qu'en certains points de R ou en aucun point de R , lors de ses cours à Göttingen dans les années 1860 ([18], 66). Mais c'est surtout à partir de la publication en 1868 de [50] que l'influence de Riemann se fit sentir, comme en témoigne Darboux dans l'introduction de son mémoire de 1875 :

"Jusqu'à l'apparition du mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. ((...)) Ce seul fait qu'il existe des fonctions discontinues susceptibles d'intégration suffit à prouver, comme on le verra, qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée, et cette conséquence des travaux de Riemann n'a pas tardé à être admise par les géomètres allemands".

Darboux lui même, à la suite de la lecture du mémoire de Riemann et dès avant 1875, construisit plusieurs de ces fonctions. Dans la lettre du 24 mars 1873 il annonce qu'il en a communiqué plusieurs à la Société Mathématique de France, exemples dont malheureusement on ne retrouve pas de trace dans le *Bulletin de la Société Mathématique*⁽²²⁾.

La deuxième question importante à propos de la dérivabilité est celle du rôle et de la démonstration du théorème des accroissements finis.

Tout d'abord, une démonstration rigoureuse de ce théorème nécessitait un recours aux résultats les plus nouveaux des fondements de l'analyse⁽²³⁾.

Abandonnant le théorème des valeurs intermédiaires, jusqu'alors nécessaire à l'obtention de la formule finale et utilisant le théorème de Rolle, O. Bonnet donne la première démonstration qui ne suppose pas la continuité de la dérivée. Elle est publiée dans le cours de Serret de 1868. Elle a cependant un inconvénient, celui d'utiliser l'hypothèse fautive de la monotonie d'une fonction continue.

En 1874, Darboux "arrange" la démonstration de Bonnet en utilisant le lemme sur le maximum. Il n'utilise plus en effet l'hypothèse de monotonie mais il admet, tout en disant qu'on peut la démontrer (ce qu'il ne fait pas, cf la lettre du 16 avril 1874), l'existence de la borne supérieure d'une fonction continue⁽²⁴⁾.

C'est en 1878, dans le livre de Dini, que l'on trouve la première démonstration entièrement exacte de ce théorème, toutes les étapes intermédiaires étant démontrées avec rigueur.

Dini signale qu'il a pris les éléments de sa démonstration dans les cours que donne Weierstrass. Cependant, on ne trouve pas de démonstration entièrement satisfaisante de ce théorème dans les notes de cours des étudiants de Weierstrass, celui-ci utilisant encore dans son cours de 1874 l'hypothèse de continuité de la dérivée.

En 1870 Schwarz donne la première démonstration correcte de la propriété suivante : une fonction réelle, dérivable, dont la dérivée est toujours nulle, est constante. Il la démontre grâce au théorème des accroissements finis dont c'est une conséquence⁽²⁵⁾.

C'est un des premiers exemples d'utilisation de la formule des accroissements finis dans les démonstrations des propriétés les plus élémentaires du calcul différentiel. Or, elle seule permet de *"donner la seule exposition rigoureuse et simple du calcul différentiel"* (Darboux, lettre du 2 mai 1874).

Darboux reviendra fréquemment dans ses lettres⁽²⁶⁾ sur le rôle fondamental de ce *"théorème ((celui des accroissements finis)) dominant le calcul infinitésimal"* (Darboux, lettre du 25 avril).

En ce qui concerne les résultats sur les fonctions de plusieurs variables nous retrouvons les mêmes problèmes que ceux que nous avons soulignés à propos de la continuité : la difficulté à concevoir la nécessité d'une démonstration.

Dans le cours de 1861 Weierstrass démontre que $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ lorsque la fonction réelle f des variables x et y , ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes sont continues. Schwarz généralisa ce théorème en 1873 en supposant la seule continuité de f'_x , de f'_y et de f''_{xy} .

Les lettres de Darboux témoignent d'autre part des difficultés qu'il pouvait y avoir à définir les dérivées partielles des fonctions de deux variables, ainsi que les dérivées de fonctions implicites, etc, toutes propriétés et définitions qui nécessitaient l'utilisation de la formule des accroissements finis.

1.5.5. Sur l'intégrabilité des fonctions de variables réelles

En 1873 Darboux découvre le mémoire de Riemann de 1854 ([50]) et écrit à Houël : *"Voilà un beau morceau et qui ne sera pas apprécié. Mais il y a une perle que tout le monde y découvrira je l'espère. C'est la définition de l'intégrale définie"* (lettre du 30 mars 1873).

Alors que Cauchy *"n'applique son procédé qu'à des fonctions a priori intéressantes, les fonctions continues, Riemann regarde à qui s'applique le procédé de définition et considère tout donc y compris les intégrales de fonctions discontinues"* (H. Lebesgue, [38], 24)).

C'est Darboux en 1875 qui démontrera dans [10] la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale d'une fonction bornée existe, condition énoncée par Riemann.

L'existence de l'intégrale restait en effet à démontrer rigoureusement, même dans le cas d'une fonction continue.

Dans sa démonstration en 1823, Cauchy supposait *implicitement* la continuité uniforme de la fonction sur un intervalle pour prouver l'existence d'une limite des sommes dites de Riemann lorsque le pas tend vers 0, continuité uniforme qui ne sera démontrée rigoureusement qu'en 1872 par Heine.

1.6. Sur les séries

Cauchy tout d'abord dans son cours de 1821, puis Abel à partir de 1825 posèrent, les premiers, les principes d'une étude rigoureuse du comportement des séries, s'élevant l'un comme l'autre à plusieurs occasions contre l'habitude de travailler sur des sommes de séries dont on ne montrait pas la convergence ou qui étaient divergentes⁽²⁷⁾.

Si des progrès furent faits alors dans l'étude de la convergence des séries numériques, il n'en fut pas de même pour celle des séries de fonctions dont l'étude était beaucoup plus délicate et nécessitait la maîtrise, par exemple, de la convergence uniforme qui ne fut acquise que plus tard.

Il faut cependant là encore noter le mérite de Cauchy qui sut, par exemple, corriger une de ses propres erreurs⁽²⁸⁾ sur la continuité de la somme d'une série de fonctions continues simplement convergente ou de Abel qui, sans la résoudre, posait la question de la démonstration de la dérivée de la somme d'une série de fonctions dérivables.

Dans son cours de 1861, Weierstrass reprend ces questions et donne la première démonstration connue du théorème sur la dérivation terme à terme d'une série convergente de fonctions.

En 1869, Heine publie la démonstration du théorème sur l'intégration terme à terme des séries, théorème que Weierstrass enseignait depuis des années dans ses cours.

Le chapitre 5 du mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues, consacré aux séries, est une synthèse de tous les résultats sur les séries de fonctions convergentes et absolument convergentes²⁹.

Cette synthèse de 1875, où figurent de nombreux contre-exemples, montre que Darboux dominait ces questions, ceci étant loin d'être partagé par tous à cette époque.

Si Dini dans son cours de 1878 donne des résultats rigoureux et démontre que si la somme d'une série de fonctions continues sur un intervalle et positives à partir d'un certain rang est continue, alors la série est uniformément convergente, d'autres mathématiciens et parmi les plus grands, traitent des séries avec moins de bonheur, comme le fait remarquer Darboux dans une lettre à Houël de 1875 (voir la lettre du 23 décembre 1875).

1.7. Conclusion

Il apparaît ainsi, à la suite de ce rapide inventaire, que l'essentiel des propositions concernant la structure de la droite des réels, les propriétés des fonctions continues ou intégrables, les premiers éléments de la théorie des ensembles que Jordan expose dans le tome de 1893 ont déjà été démontrés en 1882 lorsque sort le premier tome de la première édition de son traité, principalement en Allemagne et en Italie.

C'est pendant les années 1870 que l'exigence d'une plus grande rigueur dans l'énoncé et la démonstration des propriétés élémentaires du calcul infinitésimal aboutit à la remise en cause des principes sur lesquels reposait l'analyse. Elle se traduit par une accumulation de résultats visant à poser les principes de l'analyse sur des bases plus solides.

Cependant, s'il est vrai que c'est alors que sont élaborées les premières notions de topologie générale ou les premiers éléments de la théorie des fonctions, il nous faut souligner le caractère épars et marginal de tous ces résultats pendant cette décennie.

S'il s'agit ici de la naissance de la topologie générale, de la théorie des fonctions à leurs tout débuts, personne ne voyait encore ni leur globalité, ni leur cohérence, ni leur utilité; là sera le mérite de Jordan avec la deuxième édition du traité qui en présentera un exposé unique.

Ainsi, parlant des travaux sur les fonctions de variables réelles dans l'introduction à sa notice sur ses travaux scientifiques de 1922 ([39], 101), Lebesgue constatait :

"Jusqu'à ces derniers temps, la plupart des travaux sur les fonctions réelles, ceux concernant les séries trigonométriques exceptés, se réduisaient à des remarques, parfois très élégantes, mais sans lien, ne formant nul corps de doctrines, et n'ayant servi pratiquement à rien".

Dans une autre introduction à la notice, celle-là inédite ([40], 89), Lebesgue écrit encore :

"L'étude générale des fonctions, si elle apparaissait comme fort intéressante au point de vue philosophique après les ouvrages de Dini et de Tannery, par exemple, semblait sans portée mathématique véritable.((...)) Les travaux qu'on publiait sur les fonctions de variables réelles avaient le plus souvent pour but de montrer, par des exemples, l'impossibilité d'énoncer sans restriction telle ou telle proposition. On constituait ainsi une sorte de musée de monstruosité plus propre à détourner le mathématicien de ce genre d'étude qu'à l'y intéresser".

Notes sur la première partie

1. L'Académie possède d'autre part 31 lettres de Houël à Darboux conservées à la bibliothèque de l'Institut (cf 2, note 19).

2. Témoin de la Commune de Paris, de la République des Versaillais, Darboux fait part à Houël de son opinion sur les événements politiques de cette période. La politique de Paul Bert, alors Ministre de l'Instruction Publique, ses réformes des programmes de licence en Faculté des Sciences sont, entre autres, longuement critiquées et discutées.

3. Nous verrons que ces critiques peuvent le plus souvent s'appliquer au tome de 1882 du cours de Jordan.

4. Signalons également que Cauchy fut le premier à utiliser systématiquement la notation u_n pour les éléments d'une suite, les mathématiciens du XVIII^e siècle ayant abondamment travaillé sur les suites sans disposer de cette notation. Quant au critère dit *de Cauchy*, il fut énoncé déjà clairement par Bolzano en 1817, donc avant Cauchy.

5. Ainsi dans son mémoire sur les nombres irrationnels C. Meray indique que "*deux principes*" étaient à cette époque le fondement essentiel de toutes les parties mathématiques où intervient la notion de limite. Le premier était qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) tend vers une limite. Le second principe était que toute suite de Cauchy tend vers une limite.

"Jusqu'à présent", écrit-il, "*on a regardé ces propositions comme des axiomes*", mais cette façon de faire n'évitait pas "*la nécessité d'introduire dans les raisonnements la conception assez obscure de nombre incommensurable*" (cité par P. Dugac dans [18], page 22).

6. Cauchy en 1821 utilise une définition de la limite en des termes voisins de ceux que donnera Weierstrass ([7], 2, t.3, 59).

7. Dans une lettre du 17 janvier 1876, Darboux écrit à Houël : "*Qu'est-ce que ce Bolzano dont vous me parlez à propos d'un théorème sur la continuité des fonctions ?*" D'autre part P. Dugac indique que Cantor ne connut ce mémoire qu'en 1870, mémoire signalé par Schwarz qui en possédait un exemplaire, "*dernier exemplaire qu'avait l'éditeur*".

8. Au sujet des rédactions inédites des cours de Weierstrass, signalons entre autre les rédactions suivantes étudiées par P. Dugac dans [16] et [18] :

- le cours du semestre d'été 1861, intitulé *Calcul différentiel*, rédigé par Schwarz, alors élève de Weierstrass; ce cours a une importance particulière, car ce sont entre autres des notes de ce cours que Schwarz communiqua à différents mathématiciens, dont Heine et Dini qui prit ainsi connaissance, vers 1871, des idées de Weierstrass.

- le cours du semestre d'hiver de 1865-1866 qui était intitulé *Théorie générale des fonctions analytiques*.

- le cours du semestre d'été de 1874, intitulé *Introduction à la théorie des fonctions analytiques* dont il existe une rédaction manuscrite d'un élève de Weierstrass, G. Hettner.

- le cours du semestre d'été de 1878, intitulé comme le précédent, dont il existe deux rédactions, avec des différences sensibles, l'une ayant été publiée en 1881 par S. Pincherle (Weierstrass se plaignit de cette rédaction).

Notons que le dernier cours de Weierstrass date de 1886 et que le premier manuel d'enseignement s'inspirant des idées de Weierstrass fut celui de Stoltz paru en 1885.

9. Ce principe de la représentation des fonctions avait été développé par Lagrange. Il est intéressant de faire le parallèle entre la façon dont Weierstrass d'une part et Méray d'autre part le développent, ce dernier se caractérisant par une grande étroitesse ([18], 85).

10. - a est extérieur à O s'il existe un voisinage de a qui ne rencontre pas O .

- a appartient à la frontière de O si dans tout voisinage de a il y a des points qui n'appartiennent pas à O .

11. La définition de Bolzano d'une fonction continue en un point est : "Si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra".

Celle de Cauchy est d'autre part : "La fonction f sera continue au point x si la valeur numérique ((i.e. valeur absolue)) de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ".

12. Riemann, dans un cours publié, utilise déjà les ε pour la définition de la continuité et insiste, dans un inédit découvert après sa mort en 1866, sur l'importance de l'écriture de cette définition à l'aide d'inégalités.

13. Dans son mémoire de 1875, Darboux se réfère à la démonstration de Cauchy de ce théorème.

14. L'exemple qu'il donne d'une telle fonction est la somme $f(x)$ de la série $f(x) = \sum a_n (\sin nx)^{2/3}$ avec $\sum a_n$ absolument convergente ([10], 106).

15. En effet si la définition de la continuité uniforme est de Heine, la démonstration de [25] est sinon de Cantor, du moins très directement inspirée de celle de ce dernier, qui à ce sujet ne se réfère pas à Heine mais à Cantor.

Notons également que dans ses cours sur l'intégrale définie, en particulier celui de 1854, Dirichlet énonçait déjà un théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle, et cela dans une formulation d'une modernité surprenante.

16. Il s'agit des contre-exemples suivants :

Thomae : $f(x,y)=\sin(4 \operatorname{Arctg}(x/y))$ au voisinage de $(0,0)$
et $f(x,0) = f(0,0) = 0$.

Schwarz : $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$ avec $f(0,0) = 0$.

17. Il construit son premier contre-exemple dans la lettre du 30 Décembre 1873.

Il s'agit de la fonction

$$f(x,y) = x^2/y^4 \cdot \exp(-x^2/y^4) ; f(0,y) = 0 ; f(0,0) = 0$$

Si elle est continue sur toute droite en s'approchant de l'origine, ce n'est plus vrai lorsqu'elle s'en approche sur la parabole $x=ky^2$ où elle demeure constante.

Nous renvoyons en ce qui concerne la continuité pour une fonction de deux variables aux lettres des 26 avril 1872, 30 décembre 1873, 19 janvier 1874, 27 novembre 1875, 11 juillet 1877.

18. "Suivant l'exemple de M. Bonnet pour les fonctions d'une seule variable, nous définirons la continuité point par point, pour ainsi dire, de la manière suivante :

Une fonction $z=f(x,y)$ est dite continue pour un système (x_0,y_0) des valeurs de variables, représenté par un point M, quand on peut assigner autour du point M une courbe, quelque petite qu'elle soit, telle que, pour tous les points $m'(x,y)$ compris à l'intérieur de cette courbe, on ait la différence $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ plus petite en valeur absolue que δ , δ étant pris aussi petit qu'on le veut".

19. Dans son mémoire de 1829 "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données", Dirichlet examine le cas où le nombre de discontinuités, ainsi que le nombre des maxima et minima de la fonction est infini. Il y donne le premier exemple d'une fonction définie sur R et telle que tout point de R soit un point de discontinuité de la fonction ([18], 37) : $f(x)=0$ si x est rationnel, $f(x)=1$ si x est irrationnel.

20. L'exemple de Bolzano se trouve dans la *Théorie des fonctions* écrit vers 1835, mais, rappelons le, publié seulement en 1930, dans la deuxième partie : *fonctions dérivées*.

21. Voir les lettres des 18 et 24 janvier 1875, ainsi que la lettre du 31 janvier de la même année à propos de l'existence de la dérivée de $x^2 \cdot \sin(1/x)$ à l'origine.

22. Nous trouvons dans la correspondance une série de lettres à propos du débat qui s'élève avec le mathématicien belge Gilbert sur l'existence de fonctions continues sans dérivées et la validité des travaux de Hankel ([24 bis]); dans la lettre du 18 février 1873 Darboux expose à Houël une des erreurs de la démonstration dans laquelle Gilbert concluait à la nécessité de l'existence de la dérivée pour toute fonction continue ([23]). Voir également les lettres des 24 et 30 mars, 12 avril, 16 juin et 3 juillet 1873, ainsi qu'une lettre non datée du second semestre 1873.

23. Voir à propos de la démonstration de ce théorème le cours enseigné par P. Dugac en 1979 à l'Université de Paris VI ([19]).

24. Darboux en donne une démonstration pour des fonctions de deux variables, dans laquelle il admet "*l'existence d'un point limite à l'intérieur de tous les contours successifs de plus en plus petits, intérieurs chacun à tous ceux qui le précèdent*" ([9]).

25. La démonstration est donnée pour la première fois dans une lettre de Schwarz à Cantor du 20 février 1870 ([18], 49).

26. Voir les lettres des années 1874 et 1875.

27. Abel, dans une lettre du 16 janvier 1825 écrit, parlant des séries divergentes : "*Je suis devenu prodigieusement attentif à tout cela; car si l'on excepte les cas de la plus extrême simplicité, par exemple : les séries trigonométriques, il n'y a presque pas, dans toutes les mathématiques, une seule série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse : en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important dans les mathématiques est sans fondement*".

28. Ce n'est qu'en 1853 que Cauchy corrigea son erreur, alors que dans la lettre de 1825 déjà citée, publiée dès 1839, Abel critiquait cette proposition en fournissant un contre exemple et ajoutait : "*On fait tout espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies; mais est-ce permis ? Jamais de la vie*".

29. Nous ne nous occuperons pas ici du problème important des séries de Fourier d'une fonction, bien qu'elles aient eu un rôle de premier plan au cours du dix-neuvième siècle. Nous n'avons pas fait rentrer dans notre comparaison des différentes éditions du traité de Jordan les chapitres correspondant à cette notion.

2. LA MISE SUR PIED DES FONDEMENTS EN FRANCE DE 1870 A 1882.

2.1. les traités : un moyen de connaissance

Le recensement des travaux sur les fondements de l'analyse de 1870 à 1880 que nous venons d'effectuer nous montre que, mis à part Gaston Darboux et Ossian Bonnet, aucun mathématicien français ne participa à cette production de nouveaux résultats. Plus encore, à la suite de son mémoire de 1875 ([10]), Darboux *"fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de pareilles questions"* (Lebesgue, [39], 14).

Ce mouvement des années 1870 à propos des fondements est en fait étranger aux recherches mathématiques qui se déroulent en France. On ne s'y intéresse pas aux séries trigonométriques qui sont à l'origine de beaucoup de ces travaux. Le ton désabusé de certaines des lettres de Darboux à propos de l'accueil qui risque d'être fait, par exemple au mémoire de Riemann [50], en est une preuve.

De même, *"Darboux racontait ((...)) que ce Mémoire ((celui de 1875)) avait été froidement accueilli par plusieurs de ceux qui habituellement s'intéressaient à ses travaux. Ils l'avaient dissuadé de labourer plus longtemps le champ stérile des fonctions qui n'ont pas de dérivées"* (E. Picard, [47], 17)⁽¹⁾.

Nous confirmerons le peu d'intérêt en France pour ces questions des fondements, dans l'étude que nous allons faire dans cette partie, de différents traités d'analyse parus en France entre 1870 et 1882 et particulièrement du premier tome du *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* de C. Jordan.

Par contre, la parution en Italie dès 1878 du premier traité d'analyse qui présente, dans le cas de la droite réelle, les résultats de la théorie des ensembles et des fonctions ayant une infinité de points de discontinuité, témoigne d'une situation tout à fait différente.

Enfin, l'absence en Allemagne jusqu'en 1885 de tout manuel s'inspirant des idées de Weierstrass malgré l'importance du nombre des résultats trouvés par des mathématiciens allemands, traduit une troisième réalité.

Ainsi, dans ces trois pays, le mouvement de mise sur pied des fondements entre 1870 et 1882 se développe de trois façons différentes; sa prise en compte dans les traités d'analyse apparaît à trois moments différents.

Avant d'étudier plus particulièrement son histoire en France, nous donnerons quelques éléments sur les situations en Italie et en Allemagne. Un point de vue plus global nous permettra ainsi de mieux saisir l'originalité de la situation française, mais surtout de

mieux juger de la valeur des traités d'analyse comme "révélateur" de l'état du mouvement dans chaque pays.

Nous attachant plus précisément à la situation en France, nous pourrions discuter, à la suite de l'étude du tome de 1882 et des autres cours d'analyse parus en France de la distance inévitable entre la réalité du mouvement et l'image que nous en donnent les traités.

2.2. L'Italie et l'Allemagne

Depuis 1859, Weierstrass enseignait à l'Université de Berlin un cours dans lequel il s'attachait à étudier les fondements de l'analyse (cf 1.3) . Mais Weierstrass n'ayant jamais publié ses cours, ce n'est qu'à partir de 1870, avec la parution en Allemagne de mémoires de certains de ses élèves comme Schwarz, Thomae et Heine, que ses idées commencèrent à être connues et que l'on put découvrir comme l'écrit Dini dans l'introduction à son cours [15], que *"des hommes déjà habiles dans la science, et estimés à juste titre, avaient soulevé des doutes encore plus grands"* et visaient *"à poser les principes de l'analyse sur des bases plus solides"*.

D'autre part en 1868 Dedekind publia le mémoire de Riemann "Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique" [50], et en 1872 Cantor écrit son premier article dans lequel il définit entre autre la notion d'ensemble dérivé et de point d'accumulation ([4]) (cf 1.4) .

Si ces divers travaux n'ont que peu de répercussions en France il n'en est pas de même en Italie où U. Dini y trouve des réponses à ses propres préoccupations.

. L'Italie

Comme il s'en explique dans l'introduction à son cours que nous venons de citer, Dini ressent dès les années 1865-1866 des doutes quant à la rigueur des énoncés et des démonstrations concernant les principes fondamentaux de l'analyse. *"Mais débutant dans la vie scientifique"* et comme *"personne n'avait soulevé publiquement de tels doutes"* il en tire la conclusion *"qu'ils n'existent que dans son esprit"*.

Il doit attendre 1870-1871 pour trouver, dans les mémoires de Schwarz notamment, un écho à ses propres doutes. Cependant, ne se satisfaisant pas de ce qu'il ne trouvait dans les mémoires que *"peu d'aperçu sur les doutes mentionnés, tandis qu'on y faisait entendre que certains de ces doutes pouvaient être levés, ((et que)) aucun ne montrait comment cela pouvait être fait"*, Dini écrit à Schwarz. Celui-ci lui envoie alors ses notes du cours de Weierstrass de 1861 et les démonstrations qu'il n'avait pas encore publiées.

Enseignant alors à l'Université de Pise, Dini introduit immédiatement ces nouvelles théories dans son cours de l'année 1871-1872 et conçoit son livre dont la publication sera retardée jusqu'en 1878. La rapidité avec laquelle Dini s'empare de ces nouvelles idées et les diffuse en Italie prouve l'importance qu'il accorde à la mise sur pied des fondements, aux notions et théories qui en sont issues.

Dans son cours et dans son livre, Dini revient sur la théorie des ensembles et les notions présentes dans l'article de Cantor de 1872 ([4]), sur les fonctions admettant une infinité de discontinuités, sur l'existence de la dérivée, etc.

L'examen de la Table des matières permet de mieux saisir l'importance et la nouveauté de ce cours qui réalise une première synthèse des résultats obtenus sur les ensembles de réels et sur les fonctions d'une variable réelle. Dini reprend également, pour les "*rendre pleinement rigoureux*", les résultats de Hankel sur le principe de condensation des singularités, résultats provoqués par le mémoire de Riemann [50]⁽²⁾.

Il nous semble qu'il est important de relever que, contrairement à Weierstrass, Dini publia son cours d'analyse. La parution de ce cours correspond à une étape différente du mouvement de mise sur pied des fondements en Italie. Autour de Dini, qui jusque là était isolé, se crée une puissante école italienne d'analyse qui commence à publier de nombreux travaux sur la théorie des fonctions vers 1880. Alors qu'au même moment en Allemagne, malgré les travaux de certains mathématiciens dont Cantor, le mouvement semble s'essouffler et les idées de Weierstrass ne se diffusent que très lentement.

Dans son intervention au Congrès International des Mathématiciens de 1908, *Les mathématiques en Italie dans la deuxième moitié du XIXe siècle*, Volterra affirme ([62], 61-62) :

"Ce fut Dini qui introduisit et diffusa l'amour pour certaines recherches avec son livre et plus encore avec l'efficacité et l'originalité de son enseignement. Qui a subi le charme de ses leçons, dans lesquelles tant de pensées obscures devenaient par enchantement faciles et claires, ressentira pour la vie entière une vive sympathie envers les mêmes recherches. Weierstrass et Riemann, partant des idées qui s'étaient petit à petit infiltrées dans l'analyse, ont commencé, en en étant les initiateurs, Georges Cantor étonna tout le monde avec ses révélations inattendues, Du Bois Raymond a pénétré beaucoup de problèmes obscurs et Darboux a découvert tant de belles propositions originales. C'est Dini, coordonnant ces doctrines ensemble, les enrichissant de nouvelles vérités, qui eut le courage de les introduire en Italie, dans l'Université au commencement même des études de l'analyse infinitésimale et comme fondement de celles-ci. Entreprise hardie de ses jeunes années, grâce à laquelle son enseignement acquit une coloration nouvelle tandis que les anciennes théories devenaient comme vivifiées par un souffle de fraîcheur et de jeunesse.

Attirée par ces études, une école de mathématiciens se forma en Italie, qui consacra la force de leur talent au développement de cette doctrine et apportèrent d'importants résultats.

Ces études prirent ainsi chez nous une double direction : l'une conduite par Ascoli, Arzela et d'autres, vers des recherches concrètes sur les séries, les limites et la théorie des fonctions; l'autre, avec Peano et l'école qu'il a animée, en donnant une base toujours plus solide aux fondements et en approfondissant la critique des postulats, va de jour en jour vers des régions toujours plus abstraites, acquérant un caractère plus ou moins philosophique."

Nous évoquerons enfin un cours d'analyse, rédigé en partie par Peano, qui parut en Italie en 1884 et qui permet de mieux saisir l'état de la réflexion sur les fondements en Italie mais aussi en France et pour une moindre part en Allemagne.

Il s'agit du traité d'Angelo Genocchi, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, pubblicato con aggiunte dal Dr Giuseppe Peano. En fait, le traité est en grande partie l'oeuvre de Peano qui publia le cours oral professé par Genocchi à l'Université de Turin ainsi que le montrent des lettres et documents inédits de Genocchi ([45], I, 47).

Peano, dans une longue introduction, recense différentes erreurs ou inexactitudes contenues dans un certain nombre de traités à propos de définitions ou de démonstrations concernant les fondements de l'analyse. Il critique entre autre quatre traités français d'analyse parus entre 1857 et 1882 dont le tome I du cours d'analyse de Jordan.

Nous reviendrons dans la quatrième partie sur le contenu du cours et des nombreuses notes que Peano y ajouta; mais il nous semble intéressant de noter ici, que cette étude critique des traités d'analyse utilisés en Europe entre les années 1870 et 1882, étude consacrée spécifiquement aux paragraphes traitant de questions relevant des fondements, est faite en Italie et dès 1884.

Nous nous servons de cette analyse de Peano pour notre étude du tome de 1882 du traité de Jordan et des autres traités; nous reviendrons alors, en détail, sur cette introduction de Peano. Nous ne donnerons ici que la liste des différents ouvrages critiqués par Peano et la liste de ceux auxquels il se réfère. Cela permet d'avoir une bibliographie relativement complète des traités d'analyse édités ou réédités en Europe en 1870 et 1884⁽²⁾.

. L'Allemagne.

Tout a donc commencé en Allemagne où la plupart des travaux sur les fondements est publiée avant 1875 (cf 1).

Le mémoire de Heine de 1872 ([25]) rédigé à partir des notes de cours de Weierstrass est le premier exemple d'une démarche qui vise

explicitement à remettre en cause les anciennes bases de l'analyse et à proposer, ici dans le cadre du théorème des valeurs intermédiaires, une nouvelle mise sur pied de fondements pleinement rigoureux.

Cependant, il semble que le mouvement soit freiné par la non publication des cours de Weierstrass dont les idées, en Allemagne même, ne se diffusent pas vite. Dans une lettre de 1879 qu'il adresse à Hermite, Mittag Leffler souligne les limites auxquelles se heurte le mouvement de refonte des fondements ([16], 154) :

"9 Décembre 1879

Je trouve que Monsieur Weierstrass a parfaitement raison quand il dise ((sic)) que mon mémoire soit trop long et les calculs trop développés. Mais à côté des avantages énormes qu'il y a d'être l'élève de Monsieur Weierstrass, il y a aussi de petits inconvénients que vous ne pouvez pas peut-être saisir. ((...)) Les Allemands eux-mêmes ne sont pas en général assez au courant des idées de Monsieur Weierstrass pour pouvoir saisir sans difficulté une exposition qui soit faite strictement d'après le modèle classique qui a donné le grand géomètre. ((...)) Tout le mal vient de ça que Monsieur Weierstrass n'a pas publié ses cours. C'est vrai que la méthode de Weierstrass est enseignée maintenant dans plusieurs universités allemandes, mais tout le monde n'est pas pourtant l'élève de Weierstrass ou l'élève de quelqu'un de ses élèves"

Mittag Leffler n'est pas le seul à regretter l'absence d'un tel traité d'analyse en Allemagne. Lorsqu'avait paru le livre de Dini de 1878, Cantor avait écrit à Dedekind dans une lettre du 18 janvier 1880 ([17bis], 233) , il faudrait *"le traduire et l'adapter"*, car *"justement chez nous un ouvrage comme celui de Dini est nécessaire, et je le sens presque à chaque leçon que je donne à mes auditeurs."*

Il faudra en fait attendre 1885 pour que sorte en Allemagne le traité de Stoltz, premier traité général d'analyse s'inspirant des idées de Weierstrass.

Quoique des recherches se poursuivent, notamment sur l'invariance de la dimension, ou la théorie des ensembles de Cantor, il n'existe rien de comparable vers 1880 à l'école italienne d'analyse.

Dans une lettre du 10 janvier 1883, Mittag Leffler écrit à Cantor *"que si la partie philosophique de son oeuvre fera très grande sensation en Allemagne, il n'en sera pas de même de la partie mathématique. Car en dehors de Weierstrass, il semble que ce soit seulement Schottky qui ait "de la compréhension pour votre travail" ([17], 13).*

C'est cependant en Allemagne que paraissent en 1878-1879, différents articles à propos du non homéomorphisme de R^n sur R^m , qui peuvent être considérés comme un des premiers exemples d'articles de topologie générale ([24]). Ils furent provoqués par un article de 1878 de Cantor qui établissait l'existence d'une correspondance bijective entre les points de la droite et ceux du plan ([4 bis]).

Dès la parution de cet article plusieurs mathématiciens dont Luröth ([42]), Thomae ([61]), Netto ([43]) et Cantor ([5]) lui-même, s'attaquèrent au problème de l'invariance de la dimension cherchant à montrer l'impossibilité d'un homéomorphisme entre R^n et R^m pour n différent de m , souvent pour des cas particuliers.

Ils cherchèrent en raisonnant par l'absurde à mettre en défaut soit la bijectivité, soit la continuité de l'application. Aucune de ces démonstrations n'est satisfaisante. Certaines sont fausses, mais beaucoup ont le défaut de considérer comme acquis et d'utiliser des propriétés non démontrées des applications et des espaces. Ce sont ces recherches poursuivies par Schoenflies, Fréchet, Baire, Brouwer et Lebesgue, qui ont contribué de façon décisive à la naissance de la topologie (voir [24] et [28]).

Ces articles de 1878-1879, dans lesquels les mathématiciens utilisèrent des définitions de topologie et de théorie des ensembles, sont un des premiers exemples de la pénétration des nouvelles définitions et des raisonnements topologiques dans les revues mathématiques. On sort enfin de l'Université de Berlin.

A la suite de l'envoi d'une des démonstrations de Cantor sur le non homéomorphisme, Dedekind esquisse un souhait à propos du développement de la topologie ou plutôt de la théorie des multiplicités en Allemagne à cette époque ([8], 225), dans une lettre à Cantor du 19 janvier 1879 :

"Pour une publication, je tiendrai pour souhaitable que soient exactement définis les noms ou expressions techniques de la théorie des multiplicités ((...)) Il serait très méritoire de développer ab ovo toute cette théorie des domaines sans faire appel à l'intuition géométrique et qu'il faudrait alors définir d'une façon nette et précise le concept d'une ligne joignant continument le point a au point b à l'intérieur du domaine".

Dedekind ajoute à propos des définitions que donne Netto qu'elles *"contiennent un bon germe mais semblent susceptibles d'être simplifiées et en même temps complétées."*

Cependant ces prémices sont encore fragiles. Tous les auteurs insistent sur la nécessité d'éclaircir, de préciser, les notions de frontière, de point intérieur, de voisinage, et proposent leurs propres définitions. Ils manient par contre avec moins de soin celles de variété, domaine, courbe, connexité qui ne sont jamais énoncées rigoureusement.

Enfin ils signalent les difficultés qu'il y a à travailler avec des fonctions de R^n dans R^m , la continuité même présentant de nombreux obstacles. Nous verrons que les premiers énoncés sur ces fonctions seront donnés dans la deuxième édition du traité de Jordan.

2.3. les fondements dans le tome I de Jordan de 1882

En 1882 commence la parution de la première édition du *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* de Camille Jordan. Le premier tome, *Calcul différentiel*, sort en 1882, le second *Calcul intégral* en 1883⁴⁾.

Dans ces deux tomes remarquables, Jordan présente de façon claire et exhaustive les derniers développements de l'analyse classique à cette époque, mais ignore complètement les travaux de la dernière décennie sur les fondements.

2.3.1. Buts et limites de notre étude

Il nous semble nécessaire de préciser ici les buts et les limites de la recherche scrupuleuse de tous les manques, inexactitudes ou erreurs dans les paragraphes consacrés aux principes du calcul différentiel (chapitre 1 : *dérivées et différentielles*; chapitre 3 : *développements en série*) que nous allons mener dans les pages suivantes.

Nous montrerons, avec le constat que nous allons dresser au sujet du cours de Jordan puis des autres cours d'analyse parus en France, que Jordan ne tient absolument pas compte de la somme des travaux sur les fondements réalisés avant 1882, et qu'il est en cela représentatif des auteurs français de traités d'analyse entre 1870 et 1886, date de la parution du cours de Jules Tannery.

D'autre part, en comparant avec le tome de 1893 de la deuxième édition, nous montrerons le changement radical que Jordan opère en dix ans.

Nous pensons apporter ainsi un élément intéressant et significatif sur l'état réel de la pénétration des nouvelles idées sur les fondements vers 1880 en France.

Nous tenons cependant à signaler certaines des difficultés et des limites de cette recherche.

Tout d'abord il est indispensable de redire que nous n'abordons ici que les fondements de l'analyse et que nos conclusions ne sauraient s'étendre à l'ensemble de l'analyse classique de cette époque.

D'autre part, il nous a fallu veiller constamment à ce que notre recherche des traces du mouvement de mise sur pied des fondements ne se transforme pas en une recherche esthétique de la rigueur ou du formalisme; cela fausserait alors toute étude historique sur les mathématiques en oubliant l'essentiel, c'est-à-dire les mathématiques en train de se faire.

Dans la préface qu'il écrivit à son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle* parue en 1886, Tannery signale ce danger ([56], VII) :

"On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile ((...)) S' imagine-t-on, par exemple, les inventeurs du calcul différentiel et intégral s'acharnant, avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie ? Ne valait-il pas mieux montrer la fécondité de ces notions, dont l'importance justifie le soin qu'on a mis à les éclaircir ?

Cette révision même, qu'on a faite de notre temps, l'aurait-on entreprise, sans les questions que l'étude des fonctions et particulièrement des séries trigonométriques a posées d'une manière inévitable ?"

Mais cet écueil étant repéré, il nous faut souligner que ce mouvement de mise sur pied des fondements, si profondément lié à une recherche de la rigueur a été à l'origine de notions fondamentales et incontournables comme la construction des irrationnels, l'existence de la borne supérieure, la convergence uniforme, outils indispensables à un moment pour faire de l'analyse.

Ainsi, la juste démonstration de ces théorèmes sur les principes de l'analyse ne peut plus être considérée comme gratuite et uniquement formelle lorsqu'elle fait apparaître, ainsi que nous l'avons vu dans la première partie, de nouveaux outils mathématiques utilisables et nécessaires, à partir d'un moment, aux progrès de l'analyse.

La question délicate est alors de reconnaître le moment où l'efficacité de chacun de ces outils est prouvée puis reconnue, donc le moment à partir duquel leur absence, dans un exposé, devient une réelle faiblesse.

C'est ce problème que soulève Darboux dans une lettre du 19 janvier 1874 dans laquelle il donne son opinion sur les exigences que doit satisfaire, "aujourd'hui" un traité de calcul infinitésimal :

"Pour ce qui concerne la question générale de l'enseignement du Calcul Différentiel, voici ce que je soutiens. Il y a eu une époque où les géomètres grisés par la découverte du Calcul Différentiel et Intégral ont fait des applications, sont allés en avant sans se préoccuper de la rigueur en admettant un tas de choses plus ou moins bien limitées. Cette époque est passée depuis la publication de l'Analyse Algébrique. On a le droit actuellement de demander à un

traité de Calcul Infinitésimal d'être ou d'essayer d'être dans l'exposition de la théorie, je ne dis pas dans les applications, aussi rigoureux que tout traité de géométrie. (Je parle de la géométrie des anciens car celle de modernes est du point de vue de la rigueur un mic mac insensé). Voilà mon opinion."

Nous relèverons donc dans le tome de 1882, puis dans les autres traités, les différents manques quant aux fondements, laissant pour une part à Peano et à Darboux le soin de souligner l'importance de ceux-ci, en citant certains passages de la préface au livre de Genocchi et de la correspondance de Darboux.

Nous indiquerons, en conclusion certains des "gros" manques de ces traités; rappelons cependant qu'en France, les preuves de l'utilité de toutes ces notions furent données et reconnues surtout à partir de 1885.

Signalons enfin que tous ces traités posent la question du contenu d'un enseignement élémentaire, c'est-à-dire pour des étudiants sortant de Mathématiques Supérieures. Nous y reviendrons dans la partie suivante, dans laquelle nous étudierons la préface que Jordan a écrite à la première édition de son cours dans le tome de 1882.

2.3.2. La table des matières

La lecture seule des tables des matières des différents traités étudiés dans cette partie permet déjà de dégager des caractères communs qui s'opposent, par exemple, à ceux des tables des matières des traités de Dini, Peano, Tannery et de Jordan (1893).

La principale raison de cette différence est l'introduction des nouveaux fondements de l'analyse dans ces derniers traités.

Pour ceux-ci en effet, les premiers paragraphes d'un traité d'analyse sont consacrés à la construction des nombres irrationnels et à l'étude de R , à l'existence de la borne supérieure, aux théorèmes sur les limites et les suites de réels.

Pour les premiers, les principes du calcul infinitésimal se réduisent aux théorèmes fondamentaux sur les infiniment petits.

Ainsi, dans le tome de 1882, Jordan consacre une partie importante de l'introduction à la définition, au rôle, aux propriétés des infiniment petits. Dans le tome de 1893, les théorèmes sur les infiniment petits sont présentés à l'intérieur du paragraphe sur les limites, dans le premier chapitre, après la construction des nombres irrationnels et les énoncés sur les limites.

Une autre différence est la place réservée à la notion de continuité et plus généralement à l'étude d'une fonction.

Avant les travaux sur les fondements de l'analyse, il n'y avait aucune nécessité de traiter de la continuité, dans la mesure où toutes les fonctions considérées étaient continues et où elles étaient toutes définies sur de *bons ensembles*, à savoir des compacts. D'autre part il n'apparaît pas nécessaire de démontrer un certain nombre de propriétés des fonctions continues considérées comme évidentes.

Ainsi dans les premiers traités cités - parus cependant entre les années 1870 et 1880, et pour le tome de Jordan, après 1882, donc après l'ensemble des résultats cités dans la première partie - la continuité est peu ou pas étudiée.

A aucun moment, par exemple, dans la table des matières du livre d'Hermite ne figurent les mots *continuité* ou *dérivée*. Si ces mots sont présents dans la table des matières du tome de 1882 de Jordan, on n'y trouve par contre mentionné aucune des propriétés des fonctions.

Dans le livre lui-même, par ailleurs, on ne trouve :

- ni la définition de la limite bien qu'elle soit évidemment utilisée
- ni la construction des réels
- aucun énoncé sur les ensembles ou les notions premières de topologie (ouvert, voisinage, etc)
- aucune des propriétés des fonctions continues qui soient démontrées. Elles ne sont parfois mentionnées qu'au détour d'une démonstration, comme le théorème des valeurs intermédiaires.

2.3.3. L'introduction

Il semble ainsi que toute théorie des fonctions soit superflue, l'analyse se réduisant alors au "calcul" différentiel et intégral dont les auteurs expliquent les buts dans leur introduction. Ainsi Jordan explique dans [31], page 7 que :

"Ce nouveau Calcul ((...)) se divise en deux branches distinctes : le Calcul différentiel et le Calcul intégral.

Le Calcul différentiel résout le problème suivant : connaissant les relations qui lient plusieurs quantités variables, trouver celles qui existent entre leurs variations infiniment petites.

Le Calcul intégral pose la question suivante : des relations qui lient les variations, déduire celles qui existent entre les variables.

Dans les applications de l'Analyse aux phénomènes naturels, ces deux problèmes pourraient se formuler ainsi :

- 1° Des effets étant mesurés, remonter à leurs causes.*
- 2° Les causes étant connues, calculer leurs effets".*

Il nous semble cependant que leurs vues étaient plus audacieuses qu'il n'y paraît; ainsi lorsqu'Hermite écrit dans l'introduction à son Cours écrit :

"Le Calcul différentiel et le Calcul intégral étendent indéfiniment leur domaine en fournissant l'origine et posant la base de l'étude d'un nombre infini de fonctions nouvelles. Ainsi l'on comprend que Lagrange ait donné à l'un de ses Ouvrages, qui est précisément consacré à une exposition des principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral, le titre de Leçons sur le Calcul des fonctions".

Cela est repris rapidement par Jordan qui signale :

"C'est à Newton et à Leibnitz que revient la gloire d'en ((les infiniment petits)) avoir formé un corps de doctrine systématique, qui porte le nom de "Calcul infinitésimal" ou "Théorie des fonctions".

Dans son introduction, Jordan amène l'idée de limite et de quantité infiniment petite ou grande à l'aide du problème des tangentes et de celui des quadratures.

Le recours à l'intuition géométrique, que l'on retrouve dans les autres traités étudiés dans cette partie, n'est plus utilisé dans le tome de 1893 du traité de Jordan.

2.3.4. Les irrationnels

La première des critiques faites par Peano dans [45] a trait aux *"nombres incommensurables"* qui ne sont pas définis dans de nombreux traités et dont, *"comme il est facile de s'en apercevoir"*, l'existence est en fait supposée dans certaines démonstrations. Peano cite alors une démonstration de Serret ([51], I, n°96) et une démonstration de Jordan ([31], 102) *"qui contiennent toutes deux dans un évidemment le concept de nombre incommensurable"*.

Cette remarque vigilante de Peano s'applique ici, dans les deux cas à un point particulièrement sensible dont nous avons déjà souligné l'importance, la démonstration du critère de Cauchy pour la convergence d'une série (cf 1.2).

Remarquons en outre, que le critère de Cauchy n'est ni nommé, ni mentionné, en tant que proposition chez Jordan (Il le sera dès 1887).

2.3.5. La continuité

Dans le chapitre 1 du Calcul différentiel, *dérivées et différentielles*, Jordan, après avoir défini la notion de fonction (il la définit de la façon la plus générale qui soit, n'amenant des restrictions que dans le tome de 1887 ([33], 556)), passe en revue les différentes sortes de fonctions, entières, algébriques, fractionnaires, transcendentes, puis définit la continuité ([31], 11) pour les fonctions d'une et deux variables, définition exacte si ce n'est l'absence de valeur absolue :

"On dit qu'une fonction $y=f(x)$ est continue pour la valeur $x=a$ si, quelque petite que soit la quantité ε , on peut toujours déterminer une seconde quantité η telle que l'on ait

$$f(a+h) - f(a) < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\eta$ et $+\eta$ ".

Mais là s'arrête toute étude spécifique des fonctions continues. Aucune des propriétés mentionnées comme trop souvent évidentes par Darboux dans [10] ne sont démontrées.

Ainsi le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas démontré mais présenté en remarque :

"Remarque.- Si $f'(x)$ est une fonction continue de a à $a+h$, elle passera par degrés insensibles de son maximum M à son minimum m ".

Cette remarque est faite "en passant" à l'occasion de la démonstration du théorème des accroissements finis.

L'existence d'un maximum ou d'un minimum pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné n'est pas mentionnée mais utilisée (voir par exemple [31], page 23 et [32], page 56).

Notons également qu'à la page 52 du deuxième tome de la première édition ([32]), dans le chapitre *Intégrales définies*, nous trouvons la définition avec valeur absolue d'une fonction continue, et la définition d'une fonction uniformément continue. En bas de page, une note indique qu' "on peut établir que toute fonction continue est nécessairement uniformément continue; mais nous renverrons au tome 3 pour la démonstration de cette proposition" :

"Soit $f(x)$ une fonction de x , continue de $x=a$ à $x=b$. On pourra, par définition, pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle et quelque petite que soit la quantité ε , déterminer une autre quantité η , telle que l'on ait, pour toute valeur de h qui ne surpasse pas η en valeur absolue, la relation

$$\text{mod } [f(x+h) - f(x)] < \varepsilon .$$

On dira que la fonction est uniformément continue dans cet intervalle, si l'on peut assigner à η une valeur indépendante de x , et qui satisfasse à la condition précédente dans tout l'intervalle considéré".

Il est donc évident que Jordan envisage dans sa note la continuité sur un intervalle; seulement il ne précise pas la nature de l'intervalle. Notons que dès 1872 Heine avait précisé si les intervalles qu'il considérait étaient fermés ou non ([25], 184). Jordan se servira de cette propriété de continuité uniforme pour pouvoir faire des passages à la limite sous le signe intégrale.

Signalons enfin que toutes les fonctions envisagées par Jordan sont bien entendu continues. Il ne donne d'ailleurs aucun contre-exemple de fonction discontinue ne serait-ce qu'en un point particulier. La seule mention qu'il fasse de ces fonctions est la phrase suivante ([31], 12) :

"Il est clair qu'une fonction quelconque est discontinue pour les systèmes de valeurs des variables qui la rendent infinie ou indéterminée".

. Continuité pour les fonctions de plusieurs variables

Jordan en donne la définition pour deux variables, mais n'ajoute aucun commentaire. Nous avons déjà signalé que les exemples de Darboux, Thomae et Schwarz de fonctions de deux variables continues seulement séparément par rapport aux variables n'étaient pas connus en France (cf 1.5.2.).

Ainsi, quoique sa définition soit correcte, Jordan commettra des erreurs dans la recherche de la limite d'une fonction continue de deux variables lors de la démonstration du théorème des accroissements finis. Il supposera qu'il revient au même de chercher la limite par rapport à chacune des variables, l'autre étant supposée constante ou de chercher la limite lorsqu'il y a variation simultanée des deux variables ([31], 21)⁽⁵⁾.

2.3.6. La notion de dérivée

. La définition de la dérivée

C'est la définition classique, à l'aide de la limite du rapport de l'accroissement $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ sur l'accroissement de la variable Δx lorsque x tend vers 0, que donne Jordan.

Remarquons cependant, que cette limite est appelée la dérivée de y et non la dérivée de y au point x , même si Jordan ajoute ([31], 12) :

"Il est clair que cette limite dépend en général de la valeur initiale donnée à x . Ce sera donc une fonction de x (...). Il peut arriver que $\Delta y/\Delta x$ tende vers ∞ ou ne tende vers aucune limite fixe. Dans ce cas $f'(x)$ serait infinie ou indéterminée" ([31], 12).

Nous insistons sur ce point pour deux raisons. La première est que la définition exacte de la dérivée au point x_0 sera donnée clairement dans la deuxième édition (page 61), la seconde est que cette question a été débattue par Weierstrass dans son cours de 1874 :

Définissant d'abord la dérivée de f au point x comme la limite du quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

lorsque h tend vers 0, il précise ([18], 66) :

"En illustrant jadis l'existence de cette limite en un point donné, pour des fonctions connues, on supposait également que cette propriété était vraie pour les autres points où la fonction était définie et que la fonction dérivée obtenue avait les mêmes propriétés que la fonction considérée. Ce qui avait donné lieu à des tentatives pour démontrer qu'une fonction continue, sauf en des points isolés, était partout dérivable".

Aussi la conclusion de Weierstrass, après avoir donné l'exemple d'une fonction continue sur R qui n'est dérivable en aucun point de R , est de donner une nouvelle définition de la dérivée :

"f est dérivable au point x s'il existe un nombre c tel que l'on ait

$$f(x+h) = f(x) + c.h + h.h_1,$$

où h_1 tend vers zéro avec h , c'est-à-dire que $h_1=o(h)$, c étant indépendant de h et $f(x) + c.h$ étant une fonction affine de h ".

Weierstrass démontre alors l'unicité de cette application et conclut :

"Là dedans se trouve la véritable notion de dérivée".

Jordan envisage dans sa définition le cas où la limite du rapport peut ne pas exister. Mais, évoquant le cas des fonctions continues, il écrit :

"Il est clair qu'une fonction est continue aux points où sa dérivée est finie et déterminée ((...)). On a longtemps admis, sans preuve suffisante, que réciproquement, si la fonction est continue, sa dérivée y' sera finie et déterminée, sauf pour certaines valeurs isolées données à la variable.

Cette assertion est trop absolue. On a donné récemment des exemples de fonctions continues dont la dérivée est toujours indéterminée. Mais ces fonctions anormales ne seront pas abordées dans ce cours. Nous nous bornerons à étudier les fonctions continues qui satisfont au postulatum ci-dessus. Elles offrent déjà un champ fort vaste, car, parmi les fonctions en nombre infini qu'elles embrassent, se trouvent, ainsi que nous allons le voir, toutes celles qui sont connues par les éléments des Mathématiques".

Ainsi, Jordan ne donnera pas d'exemple de fonction continue sans dérivée. Par contre, dans le tome de 1887, il donnera l'exemple de Weierstrass.

. Existence de la dérivée

Darboux soulève indirectement cette question dans deux lettres de 1875, dans lesquelles il attire l'attention de Houël sur le cas de l'existence de la dérivée de la fonction $x^2 \cdot \sin(1/x)$ au point $x=0$, existence qu'il affirmait en appliquant directement la définition, à savoir la limite du rapport au point 0.

Cette existence était contestée par Houël, et le restera (voir [27], page 120, où il affirme que la dérivée de $x^2 \cdot \sin(1/x)$ est indéterminée pour $x=0$), l'application des formules de dérivation des fonctions composées l'amenant dans ce cas à une indétermination.

Peano reprendra très explicitement cette question de l'existence ([45], 55), critiquant plusieurs auteurs à propos de leur manque de considération pour les conditions d'existence des dérivées.

Critiquant le procédé "*de plusieurs auteurs, même modernes*", qui tirent l'expression de la dérivée d'une succession d'équations, sans se soucier des conditions d'existence de la dérivée, il insiste sur le fait que, dans ses propres raisonnements, il démontre en même temps qu'il la détermine, l'existence de la dérivée.

Il remarque très pertinemment, que ces auteurs démontrent "*seulement que, si elle existe, la dérivée est bien égale à ce qu'on a trouvé*".

Peano mentionne ensuite certains paragraphes de Serret et de Jordan que nous allons étudier, et entre autres le paragraphe 38 de Sturm. Les paragraphes relevés par Peano chez Jordan sont les paragraphes 13 et 23 : *Dérivée d'une fonction inverse* et *Dérivée des fonctions composées*, dont il se sert pour calculer la dérivée d'une fonction implicite.

Dans ces paragraphes, sans qu'*aucune hypothèse* ne soit précisée quant à la dérivabilité des fonctions en question, Jordan, appliquant des formules, construit une équation dont il déduit, non l'existence, mais la forme de la dérivée.

Dans le paragraphe 12, *Dérivée d'une fonction de fonction*, que Peano ne mentionne pas, on retrouve un défaut analogue, la formule

$$y' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$$

où $y=F(x)$, est donnée sans aucune hypothèse sur la dérivabilité de F ou f en quelque point que ce soit.

La lecture d'un des paragraphes de la page 64 de la deuxième édition de 1893 (le paragraphe sur la dérivée d'une fonction de fonction contient les mêmes faiblesses que le n°12 du tome de 1882

où Jordan précise : "Si l'une de ces fonctions a une dérivée connue, on aura immédiatement la dérivée de l'autre", éclaire les faiblesses des paragraphes cités par Peano.

Nous montrerons lors de l'étude des autres traités de cette période que Darboux, à l'occasion de la critique du traité de Houel, revient avec insistance sur cette question de l'existence de la dérivée dans plusieurs lettres de janvier 1875.

2.3.7. La formule fondamentale du calcul (ou le théorème des accroissements finis)

C'est sous ce nom que Peano désigne le théorème des accroissements finis dont nous avons rapidement retracé l'histoire au XIXe siècle et dont nous avons signalé le rôle important qu'il joue dans une exposition du calcul différentiel, lors de la première partie de ce travail.

Toutes les démonstrations qui en furent données jusqu'en 1884 dans les manuels, mis à part celle de Dini, sont lacunaires ou exigent des hypothèses superflues sur la dérivée.

Avant d'étudier les critiques de Peano, ainsi que celles exprimées dix ans plus tôt par Darboux, nous allons rappeler très sommairement le plan de la démonstration correcte de ce théorème des accroissements finis, qui est en fait une conséquence du théorème de Rolle,

Théorème de Rolle :

Soit f , réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a)=f(b)=0$. Il existe c tel que $f'(c)=0$.

Ce théorème se démontre grâce à :

- f continue sur $[a, b]$, f atteint son maximum M ; donc il existe c tel que $f(c)=M$,
- lemme sur le maximum : $f'(c)=0$.

Théorème des accroissements finis :

On en déduit en appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (f(b) - f(a)) \cdot (x-a)/(b-a)$$

que si f réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors, il existe c tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$$

Ce rappel a une importance réelle, car c'est cette même démonstration que l'on trouve dans le cours de 1878 de Dini qui renvoie explicitement aux deux *lemmes* qui permettent une démonstration rigoureuse du théorème de Rolle; la démonstration de Dini est la première démonstration entièrement correcte (cf 1.5.4). On voit d'autre part à quel point une bonne démonstration nécessitait un recours aux résultats les plus nouveaux des fondements de l'analyse.

La démonstration de Jordan dans le tome de 1882 n'a rien à voir avec celle que nous venons d'exposer, et est encore élaborée sur le vieux modèle de Lagrange et Cauchy.

Il l'expose au paragraphe 15 (p. 21) sans l'honorer d'un titre et en donne l'énoncé suivant :

"Soit $y=f(x)$ une fonction de x dont la dérivée reste finie et déterminée lorsque x varie dans un certain intervalle. Soient a et $a+h$ deux valeurs de x prises dans cet intervalle. On aura :

$$f(a+h)-f(a) = \mu h,$$

μ désignant une quantité intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de a à $a+h$ ".

Le principe de la démonstration de Jordan est de donner à x une suite finie de valeurs intermédiaires a_1, a_2, a_{n-1} entre a et $a+h$ et d'additionner alors les équations obtenues en exprimant la relation suivante pour la dérivée (relation qu'il ne démontre pas auparavant) :

$$f(a_{i+1})-f(a_i) = (a_{i+1}-a_i) \cdot (f'(a_i) + \epsilon_{i+1})$$

Remplaçant les $f'(a_i)$ par leur maximum M , puis par leur minimum m , et les ϵ_i par leur maximum ϵ , puis leur minimum η , il obtient :

$$f(a+h)-f(a) \leq (M+\epsilon) \cdot h$$

$$f(a+h)-f(a) \geq (m+\eta) \cdot h$$

Mais pour conclure, Jordan multiplie indéfiniment les valeurs intermédiaires et en conclut que les ϵ_i tendent tous vers 0 :

"car ϵ_1 par exemple est la différence entre $(f(a_1)-f(a))/(a_1-a)$ et sa limite $f'(a)$ ",

donc ϵ et η tendent vers 0 et :

"on aura à la limite :

$$f(a+h)-f(a) \leq M \cdot h \geq m \cdot h = \mu h."$$

Là se trouve l'erreur signalée par Peano à la fois dans une note publiée dans les *Nouvelles Annales* de 1884 ([44]) et dans [45], page 55, où il la résume simplement :

"La démonstration de Jordan suppose que $(f(x+h)-f(x))/h$ converge uniformément vers $f'(x)$ pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a,b) , ce qui exige la continuité de la dérivée".

Nous ne reviendrons pas sur la note des *Nouvelles Annales*, dans laquelle Peano utilise le contre-exemple $x^2 \cdot \sin(1/x)$, fonction dont la dérivée reste toujours finie et déterminée mais discontinue au point 0.

Par contre, nous insisterons sur les lettres des 24 janvier et 19 février 1874, des 18, 24 et 31 janvier 1875, dans lesquelles Darboux repère et critique une erreur analogue à celle de Jordan, à propos de la convergence uniforme d'un infiniment petit à deux variables dans une démonstration de Houël du théorème : si $f'(x)=0$,

alors $f(x)=cte$, démonstration qu'on ne retrouve pas textuellement dans la version définitive du traité.

Dans la lettre du 18 janvier 1875, Darboux expose la démonstration de Houel qui est sur le même principe que celle de Jordan et conclut :

"Voici ce que je reproche à votre raisonnement que personne ne trouve plus rigoureux. Quand on pose

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \xi,$$

ξ est une fonction de deux variables x et h qui tend vers zéro quand, x restant fixe, h tend vers zéro. Mais si x et h varient comme dans votre démonstration, bien mieux si à chaque nouvelle subdivision des intervalles x_1-x_0 il naît des nouvelles quantités ξ je n'y vois plus clair du tout et votre démonstration n'a plus qu'une apparence de rigueur. Ceci est tellement vrai que vous seul vous entêtez et qu'elle a été abandonnée par tous les professeurs des spéciales d'ici. Supposez par exemple que vous divisiez les intervalles en 2 puis ceux-ci en 2 égaux et ainsi de suite. Quand vous aurez 2^n intervalles la subdivision en amènera 2^{n+1} et il naîtra 2^n quantités ξ . Je suppose que chacune de ces quantités qui naissent tendent vers zéro mais commencent à être supérieures à $\frac{1}{2}$ par exemple. Vous verrez que la démonstration ne s'applique plus".

lettre du 24 janvier 1875 :

"Pour que votre exposition soit juste, il faudrait que vous puissiez démontrer que ξ donné, on peut toujours trouver h tel que

$$\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} - f'(x) < \xi$$

pour toute valeur de x comprise entre les deux limites, θ étant plus petit que 1".

On verra que Houel a tenu compte de ces objections.

lettre du 31 janvier 1875 :

"En second lieu il n'est nullement exact de dire que supposer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

quand h tend vers zéro et supposer qu'on puisse trouver pour chaque une quantité h telle que

$$\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} - f'(x) < \xi$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites soient une même chose absolument parlant. Il y a un abîme entre ces deux propositions et en voici la preuve :

Imaginez une fonction pour laquelle on aurait

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{h^3}{x-a+h}$$

La première supposition serait vérifiée, la seconde ne le serait pas".

Dans la lettre du 9 décembre 1874 Darboux écrit que, en fait, Houël suppose la continuité de la dérivée. Il formule donc, presque dans des termes équivalents, la critique que fait Peano dans l'introduction au traité de Genocchi dix ans plus tard.

Nous avons eu, de plus, la surprise de constater que Darboux utilise à ce propos, dans les lettres des 24 et 31 janvier 1875, le même exemple que Peano; la fonction $x^2 \cdot \sin(1/x)$ au voisinage de zéro. Il montre que $\lim f'(x)$ quand x tend vers 0 n'est pas égal à $f'(0)$, devançant ainsi Peano.

Jordan conclut le paragraphe sur les accroissements finis par une remarque qui lui permet d'obtenir explicitement la formule des accroissements finis; il s'agit de la remarque déjà signalée sur le théorème des valeurs intermédiaires (cf 2.3.5.).

A la suite de la note de Peano, toujours dans *Les Nouvelles Annales*, Jordan reconnaît son erreur et demande à Peano de lui communiquer sa démonstration car il n'en connaît pas de satisfaisante.

Peano lui répond à la fois dans les *Nouvelles Annales* où il renvoie à la démonstration de Dini, et dans une lettre du 16 février 1884 conservée à l'Ecole Polytechnique. Peano donne le détail de sa démonstration, "démonstration donnée par M. Genocchi et par moi à l'Université de Turin, par M. Dini à Pise, etc ((qui)) est la même qu'on lit dans le cours de M. Serret, si l'on fait abstraction de quelques imperfections de langage (la fonction commence à croître, ...)" (cf 2.4.6). Nous verrons en étudiant la note de 1887 dans quelle mesure il tiendra compte des remarques de Peano .

Nous avons déjà indiqué les faiblesses de la démonstration de Bonnet que Peano, à notre avis, sous-estime dans sa lettre du 16 février 1884. Nous reviendrons sur cette démonstration de Bonnet lors de l'étude des autres traités de cette période 1870-1882.

D'après les témoignages de Darboux (voir les lettres des 18 janvier et 27 novembre 1875), il semble que cette démonstration ait été connue et utilisée par tous les professeurs de spéciales de Paris. On peut alors se poser les questions suivantes :

Jordan connaissait-il la démonstration de Bonnet et ne la jugeait-il pas satisfaisante, en ayant relevé l'erreur ?

Ou alors, ignorait-il malgré tout cette démonstration ou lui préférait-il la version ancienne qui supposait des hypothèses supplémentaires sur la dérivée ?

2.3.8. Dérivées partielles; différentielles

Peano, dans son introduction au cours de Genocchi, suivant le plan de celui-ci, passe ensuite à la critique des chapitres sur les séries, puis sur le développement des fonctions en série de Taylor

et enfin aux théorèmes sur les fonctions de plusieurs variables (dont dérivées et différentielles).

Respectant l'ordre suivi par Jordan dans le tome de 1882, nous étudierons tout d'abord les chapitres des divers manuels concernant les dérivées partielles et les différentielles (chapitres 3 et 4 du livre de Jordan).

Nous pouvons formuler à leur sujet une première remarque globale.

Nous constatons, à des degrés divers, une sur-utilisation de la notion de différentielle, y compris des fonctions d'une variable, au détriment de la notion de dérivée.

A un moment où il ne pouvait pas être question de saisir la véritable nature, donc la véritable importance de la notion de différentielle, la réduction de son rôle et de son utilisation dans le livre de Genocchi-Peano, ainsi que dans la deuxième édition du cours de Jordan en 1893, mais également dès le Supplément de 1887, doit être considérée comme un progrès⁽⁶⁾

Darboux déjà, dès 1875, en insistant sur l'importance du théorème des accroissements finis et de son utilisation pour les démonstrations des théorèmes sur les dérivées partielles ou les dérivées des fonctions composées, avait pressenti que là était un des caps à franchir pour une exposition moderne et rigoureuse du calcul différentiel.

. La définition de Jordan de la différentielle totale

Jordan définit (n°16, p.23) la différentielle totale d'une fonction d'une variable à partir du rapport de l'accroissement y de la fonction et x de la variable, y' étant la dérivée, de la façon suivante :

" $\Delta y / \Delta x = y' + \varepsilon$ donc $y = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ avec ε étant un infiniment petit avec Δx . Donc y se compose de deux termes : l'un, $y' \cdot \Delta x$ simplement proportionnel à Δx et qui constitue sa valeur principale; l'autre, $\varepsilon \cdot \Delta x$, d'ordre supérieur au premier. Le premier de ces deux termes, $y' \cdot \Delta x$, se nomme la différentielle de y et se désigne par dy ".

Cette définition, très classique, que l'on retrouvera d'ailleurs dans l'édition de 1893 ne peut être mise en cause vu l'époque.

Par contre, passant aux fonctions de plusieurs variables (en fait Jordan ne traite que le cas de deux variables) Jordan, ayant défini correctement les dérivées partielles, calque sur le cas d'une variable la définition de la différentielle totale (n°19, p.24) :

Exprimant Δz à l'aide des équations dans lesquelles interviennent les dérivées partielles, il obtient :

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x + \Delta x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \epsilon_1 \cdot \Delta y$$

ϵ et ϵ_1 étant infiniment petits.

Supposant alors que $\partial f / \partial x$ est continue par rapport à x , il obtient :

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \epsilon \cdot \Delta x + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \Delta y$$

et il conclut :

"Donc Δz sera formée de deux parties :

1°. l'une $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y$

linéaire en Δx et Δy ,

2°. l'autre $\epsilon \cdot \Delta x + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \Delta y$ d'ordre supérieur au premier.

La première partie, qui est évidemment la principale lorsque Δx et Δy sont suffisamment petits, se nomme la différentielle totale de z ".

En fait, Jordan estime l'ordre de l'infiniment petit du 2° sans tenir aucun compte de l'ordre respectif des accroissements Δx et Δy et des infiniment petits $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2$ qui sont fonctions à la fois de Δx et de Δy .

Il s'agit en fait de la même faiblesse que dans la démonstration du théorème des accroissements finis, touchant à la limite d'un infiniment petit à deux variables.

C'est ce que critique Peano dans le traité de Jordan et dans d'autres lorsqu'il met en cause "une proposition mal énoncée et mal démontrée dans un grand nombre de traités" et il poursuit :

"Ainsi souvent on dit que la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction de plusieurs variables à sa différentielle est l'unité".

Il cite alors Sturm (n°102) dont la formulation est exactement celle donnée par Peano, puis Jordan (n°19, 22, etc).

La critique est particulièrement dirigée contre la conclusion du passage que nous citons où Jordan introduit la définition. Il précise alors sa critique, en s'appuyant sur des erreurs de Jordan ou Serret entre autres, à propos de la limite du reste de la formule de Taylor pour des fonctions de plusieurs variables en fonction de l'accroissement des variables.

Il est intéressant de remarquer qu'à ce propos Peano renvoie au numéro 130 du traité de Genocchi-Peano dans lequel il développe la théorie de formes de degré n définie ou indéfinie et des limites des fonctions de plusieurs variables de la forme $0/0$.

En fait, ces erreurs disparaissent lorsqu'on utilise la formule des accroissements finis, ainsi que le fait Jordan dans le tome de 1893 ([35], 75).

. Dérivées des fonctions composées

L'expression de la différentielle totale ou de la dérivée d'une fonction composée $f(u,v,...)$ où $u,v,...$ sont des fonctions de variables indépendantes est une conséquence de l'expression de la différentielle. On retrouve donc chez Jordan la même erreur dans le paragraphe 22 que dans le paragraphe 19, critiquée de la même façon par Peano et où la formule des accroissements finis n'est toujours pas utilisée. Comme la précédente, cette erreur sera corrigée dans le tome de 1893.

.Dérivées et différentielles d'ordre supérieur, interversion de l'ordre de différentiation

La seule remarque que nous ferons à propos de la définition des dérivées d'ordre supérieur, et que Peano ne relève même pas, est l'absence systématique de réserve quant à l'existence de ces dérivées seconde, troisième, etc.

Jordan, ainsi que d'ailleurs les autres auteurs, ne considère que des fonctions C^∞ , les quelques précautions prises pour la définition de la dérivée première ayant là totalement disparues.

La définition de Jordan est par exemple (n°27, p.30) :

"Soient $y=f(x)$ une fonction de x , y' sa dérivée. Cette nouvelle fonction aura elle-même une dérivée, qu'on appelle la dérivée seconde de y ".

Jordan, dans le n°29, page 31, démontre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

lorsque les dérivées partielles jusqu'au second ordre sont des fonctions continues de x et de y . Sa démonstration, où il utilise enfin le théorème des accroissements finis est correcte et semblable à celle de Peano ([20], n°103, p.136).

Dans son introduction à Genocchi ([45],66), Peano donne un exemple de fonction de deux variables dont l'ordre de différentiation ne peut être interverti.

2.3.9. Formule de Taylor; développements en séries de Taylor

Les remarques que nous pouvons faire à propos des développements limités et des développements en série de Taylor d'une fonction sont les conséquences des critiques des démonstrations de la formule des accroissements finis, ou du théorème de Rolle.

Jordan, ainsi que l'ensemble des auteurs, mis à part Houël, démontre la formule de Taylor, puis de Maclaurin, à l'aide de ces théorèmes.

Peano fait remarquer, tout d'abord dans [45], page 60, puis à la fin de la lettre du 16 février 1884 qu'il écrivit à Jordan, que la validité de la formule de Taylor avec un reste d'ordre n ne suppose que l'existence et non la continuité de la dérivée n -ième de la fonction. Cela comme conséquence des hypothèses nécessaires à la démonstration de la formule des accroissements finis⁽⁷⁾.

Jordan, quant à lui, note avec une insistance étonnante :

"Il importe de ne pas oublier que la démonstration précédente suppose que $f^n(x)$ est continue dans l'intervalle de x à $x+h$ " ([31], 70).

Etonnante, car Jordan non seulement mentionnera cette condition à plusieurs reprises mais écrira (p.81) que cette méthode *"est d'ailleurs inapplicable si $f^n(x)$ n'est pas continue aux environs de $x=0$ "*, alors que le cas des fonctions non continues n'a jamais été abordé dans son cours précédemment et qu'aucun exemple n'en a jamais été donné.

A propos de l'extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables, Peano fait remarquer dans [45], page 66, qu'il est par contre nécessaire de supposer la continuité des dérivées partielles d'ordre n , ce que ne fera pas Serret (n°134, p.194).

Dans ce cas en effet, l'utilisation du théorème sur la dérivée d'une fonction composée (Peano critique la démonstration qu'en donne Serret) suppose cette continuité.

Peano fournit un contre-exemple d'un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 1 d'une fonction de deux variables qui n'est pas valable, les dérivées partielles n'étant pas continues en $(0,0)$.

Il critique également dans [45], page 70, le n°134 de Serret dans lequel celui-ci essaie d'établir le rapport entre la limite du reste R^n et du dernier terme du développement.

En ce qui concerne le développement en série de Taylor, n'ayant, au préalable ni défini ni discuté la convergence d'une série ou tout simplement de la série de Taylor ou de Maclaurin d'une fonction, Jordan étudie la convergence ou la divergence du développement en série de fonctions particulières, à partir évidemment de la limite du reste quand n tend vers l'infini.

Ceci n'est qu'une maladresse, dans la mesure où, plus tard, il définit (p.104) la convergence d'une série et signale (n°104, p.98) qu'il est nécessaire, pour qu'une fonction soit développable en série infinie par la formule de Maclaurin, que le reste tende vers zéro.

On ne trouve d'autre part aucun énoncé sur les fonctions continues.

Serret, comme Jordan, se sert sans démonstration du théorème des valeurs intermédiaires; il affirme, dans le cours de la démonstration du théorème des accroissements finis, la monotonie de toute fonction continue.

Cette erreur est relevée par Peano ([45], 55) qui exhibe un contre-exemple. Ce fut Darboux qui, le premier, mit en cause cette *évidence* dans son mémoire de 1875 ([10], 58, 106)¹⁴.

Contrairement aux autres auteurs, Houël, probablement sous l'influence de Darboux, énonce le "*théorème*" des valeurs intermédiaires et en donne une démonstration.

Cette démonstration pêche cependant en un point essentiel relativement aux fondements, et dont nous verrons toute la signification lorsque nous comparerons les tomes de 1887 et 1893 du cours de Jordan (cf 4.3.1).

Houël se réfère en effet dans le cours de sa démonstration à un paragraphe où il énonce comme évidentes, et sans aucune démonstration, les propositions sur la convergence de deux suites adjacentes ([27], 107 et 117).

Admettant cette propriété, il ne démontre à aucun moment dans son cours le *théorème fondamental* sur l'existence de la borne supérieure.

Houël, d'autre part, est le seul auteur qui traite quelque peu des fonctions discontinues.

Il y consacre trois pages ([27], 118 à 120), dans lesquelles il développe entre autre l'exemple de la fonction $\sin \pi/x$ qui est discontinue dans le voisinage de $x=0$ ¹⁵, et de la fonction $\exp(1/(x-a))$ discontinue dans le voisinage de $x=a$.

Les considérations de Houël, à propos des fonctions discontinues, sont effectivement influencées par la correspondance qu'il échangea avec Darboux. Celui-ci, à de nombreuses reprises, insiste sur certaines valeurs particulières de la variable qui peuvent mettre en défaut des théorèmes.

On retrouve, page 120 du cours de Houël, l'écho de ces discussions, avec toutes les réserves que Houël apporte toujours aux remarques de Darboux :

"*Toutes ces valeurs de la variable, qui mettent en défaut la plupart des théorèmes généraux relatifs aux fonctions continues, se nomment des valeurs singulières ou valeurs critiques. Nous les excluons toujours dans l'énoncé et la démonstration des propositions fondamentales*".

Il signale également, ainsi que tous les autres (mis à part Hermite), l'exemple de Cauchy d'un développement convergent qui converge vers une autre valeur que celle de la fonction (p.98).

2.3.10. Les séries

Au moment de la parution du premier tome du traité de Jordan, les résultats sur les séries numériques et les séries de fonctions étaient déjà, pour l'essentiel, assimilés. Darboux d'une part ([10]) et Dini d'autre part ([15]) avaient exposé une synthèse des résultats obtenus, tout en les enrichissant par leur apport personnel.

Les paragraphes de l'Annexe que Peano consacre aux séries sont d'ailleurs plus historiques que critiques envers les traités récents.

Certains paragraphes font cependant appel à des notions d'analyse que nous avons déjà étudiées et traduisent les divers degrés d'"assimilation" de la mise sur pied des fondements.

Il en est ainsi pour les différentes façons dont les auteurs exposent le critère que nous appelons aujourd'hui "de Cauchy" pour la convergence d'une série, mais auquel personne à ce moment ne se réfère sous ce nom.

Les démonstrations de Serret et de Jordan du critère de Cauchy sont mentionnées par Peano, à propos de la construction de l'ensemble des réels.

En effet, Serret et Jordan se "débarassent" du point délicat de la démonstration de ce critère par un "évidemment" que Peano ne manque pas de relever.

Jordan ([31], 102) fait suivre la définition de la convergence d'une série grâce à la convergence de la suite des sommes partielles, convergence de suite qu'il ne définit nulle part auparavant, d'un court développement sur une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série, en fait le critère de Cauchy, auquel il ne réserve pas le titre de remarque, encore moins celui de théorème.

Pour la démonstration de la condition suffisante, point qui nécessite la construction et des théorèmes sur les réels, Jordan se contente, en fait, de renvoyer à la proposition analogue pour la suite des sommes partielles qu'il n'énonce ni ne démontre à aucun moment.

Dans la note de 1887 ajoutée au troisième tome de la première édition, Jordan, démontrant le critère, énonce cette fois comme un théorème, ajoute ([33], 553) :

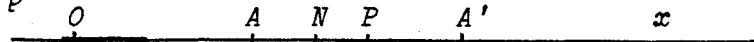
"Nous nous sommes appuyé sur cette proposition en plusieurs endroits de cet ouvrage (Tome 1, n°109,...) ((ce numéro est celui que nous venons d'étudier)), en la considérant comme suffisamment évidente par elle-même; mais on voit qu'elle peut se ramener aux autres axiomes"⁽⁸⁾

Serret ([51], 133), quant à lui, énonce et démontre la condition nécessaire (n°95) et la condition suffisante (n°96) du critère de Cauchy comme deux théorèmes dont la formulation ne fait pas intervenir les ε et les N que l'on trouve par exemple chez Peano.

La démonstration de la condition suffisante, qui contient le "évidemment", fait appel à un résultat non démontré dont il donne "pour plus de clarté" une forme géométrique :

"Le nombre n restant invariable, faisons tendre p vers l'infini, la somme S_{n+p} restera toujours comprise entre deux quantités déterminées $S_n - \varepsilon$, $S_n + \varepsilon$ dont la différence 2ε est aussi petite que l'on veut; d'où il suit évidemment que S_{n+p} tend vers une limite déterminée quand p ou $n+p$ augmente indéfiniment.

Cette démonstration acquiert plus de clarté quand on lui donne une forme géométrique. Soit O un point fixe d'un axe Ox . Prenons sur Ox à partir de O une longueur $ON = S_n$, puis faisons $AN = NA' = \varepsilon$; prenons aussi $OP = S_{n+p}$, le point P tombera entre A et A' . Ainsi



la somme S_{n+p} des $n+p$ premiers termes de notre série peut être représentée par une abscisse dont l'extrémité tombe constamment entre deux points donnés A et A' ; elle est donc finie, mais de plus elle est déterminée, car la distance AA' peut devenir moindre que toute longueur donnée"⁽⁹⁾.

Remarquons que, malgré l'insuffisance de sa démonstration, Serret, dès sa première édition, accorde plus de place au critère que Jordan qui, en fait, ne cherche pas à en donner une démonstration.

Quant au reste des résultats sur les séries, nous mentionnerons simplement ceux concernant la continuité et la dérivabilité de la somme d'une série de fonctions. Ils posent le problème de la convergence uniforme d'une série et du double passage à la limite.

Jordan donne une définition de la convergence d'une série de fonctions dans le cas où les fonctions dépendent d'une même variable complexe ([31], 116) et, après avoir donné un exemple de série non uniformément convergente, il ajoute :

"L'importance de la notion de la convergence uniforme résulte du théorème suivant, que nous démontrerons dans le Calcul Intégral ([32], 92)) .

Si la série s est convergente dans un certain intervalle et si la série $s' = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots$ des dérivées de ses différents termes est elle-même uniformément convergente dans ce même intervalle, s sera, dans cet intervalle, une fonction continue de z , et sa dérivée sera s' ".

Ainsi, de par sa présentation, Jordan ne traite pas le cas d'une série uniformément convergente de fonctions continues, théorème que l'on retrouve à la fois chez Dini ([15], 110, n°98) qui appelle la convergence uniforme "*convergenza in ugual grado*", chez Peano ([20], 107, n°95) qui l'appelle "*convergenza aquabile*" ainsi que chez Darboux dans son mémoire sur les fonctions discontinues.

L'important problème de l'interversion $\lim \sum$ et $\sum \lim$ grâce à la convergence uniforme n'est donc pas soulevé explicitement par Jordan.

Quant à la dérivation terme à terme d'une série, Jordan la démontre comme une conséquence du théorème sur l'intégration terme à terme d'une série dans le cas où la série converge uniformément.

Ce théorème, démontré de la même façon par Darboux ([10], 83), est par contre démontré directement par Dini et Peano grâce au théorème des accroissements finis (voir Peano [20], page 108)⁽¹⁰⁾.

2.3.11. Intégration et théorie des fonctions

"Quant à ce qui concerne les intégrales définies, la différentiation sous le signe $\int$, il est certain que ce sont des questions difficiles et que si l'on vous attaquerait du bon côté, vous auriez de la peine à répondre. Mais ceci n'est pas un reproche à vous faire spécialement. Bouquet et moi, nous avons vérifié que pas une des démonstrations de Serret où l'intégrale a une de ses limites infinie n'est exacte".

Quoique ce jugement de Darboux (voir la lettre à Houël du 1er mai 1880) invite à passer au crible les démonstrations de Serret concernant l'intégration et, parallèlement, celles de Jordan qui sont contenues dans le tome 2 de 1883, nous n'avons pas cherché à en vérifier le bien fondé, cette étude débordant trop largement le cadre de notre propos.

C'est uniquement en fonction des éléments supplémentaires qu'ils nous apportent sur la façon dont Jordan rendit compte des notions de topologie et de théorie des fonctions, que nous avons étudié les chapitres sur l'intégration.

Comme nous l'avons déjà signalé, Jordan ne considère dans le tome de 1883 que l'intégration des fonctions continues. Il ne considère que les cas exceptionnels suivants ([32], 59) : la fonction devient discontinue pour une des limites d'intégration ou pour des valeurs, en nombre limité, comprises dans le champ d'intégration.

Jordan se limite à l'intégrale de Cauchy et n'envisage pas d'exposer la théorie de l'intégration de Riemann.

Celle-ci a été à l'origine d'exemples de fonctions bornées avec une infinité non dénombrable de points de discontinuité. Elle a fait éclater le cadre des "*fonctions digne d'intérêt*" et a attiré l'attention sur les ensembles de points de discontinuités, premiers sous-ensembles infinis de R qui furent étudiés par Hankel, Cantor, Smith, Dini et Volterra, entre autres.

Malgré cela, Jordan ne juge pas utile d'introduire le concept de fonction intégrable Riemann et sa distinction d'avec celui de fonction continue, qu'il connaissait parfaitement comme le montre la note de 1881 dans laquelle, un an avant la parution de ce tome, il définit les fonctions à variation bornée ([29]) :

"Remarque I.- Dirichlet dit dans son mémoire qu'une fonction qui présente un nombre infini de discontinuités n'est intégrable que si, dans un intervalle quelconque ab , on peut placer deux quantités r, s assez rapprochées pour que la fonction reste continue de r à s . On voit par l'exemple qui précède, que cette assertion n'est pas exacte. Cette inadvertance d'un géomètre si justement considéré comme un modèle de précision nous paraît méritée d'être signalée"(1).

2.3.12. Conclusion

Nous arrêterons ici notre analyse détaillée du tome de 1882, en notant, une fois encore, que nous n'avons étudié que les paragraphes consacrés aux fondements, ou plutôt, traitant de questions relevant des fondements.

Il nous semble nécessaire, avant de poursuivre l'examen des traités parus entre 1870 et 1882, de tirer de premières conclusions de notre étude du tome de Jordan et de dégager certains traits remarquables de ce cours que nous retrouverons, pour l'essentiel, dans ces autres traités.

Nous avons constaté tout à la fois des "manques", ainsi que nous les avons définis dans le paragraphe 2.3.1, qui sont les conséquences de certains choix de Jordan et qui ne peuvent, à notre avis, être considérés comme une faiblesse, et un réel défaut de rigueur que nous allons tenter de mesurer et d'expliquer.

D'une part Jordan, se plaçant dans le cadre de fonctions systématiquement continues, définies sur de *bons ensembles*, ne considère comme principes de base du calcul infinitésimal que les propositions fondamentales sur les infiniment petits, ne prend en compte aucune notion d'ensemble ou topologique et, jugeant superflue toute théorie des fonctions, énonce très peu de propriétés des fonctions et ne définit que la seule intégrale de Riemann.

Mais, plus profondément, d'autres traits spécifiques de ce traité et de ceux que nous allons étudier, présentent des inconvénients majeurs et sont révélateurs de l'état d'esprit de la plupart des mathématiciens en France :

- le rôle privilégié de la différentielle au détriment de la notion de dérivée,

- la sous-utilisation du théorème des accroissements finis dans les démonstrations des propriétés élémentaires du calcul différentiel,

qui aboutissent à des démonstrations erronées (cf 2.3.8) dont celles de la définition de la différentielle totale, de la dérivée des fonctions composées, de la dérivée des fonctions implicites, du théorème même des accroissements finis.

- des propositions mal énoncées ou mal démontrées sur les fonctions.

- des propositions insuffisantes et mal démontrées sur les séries et les intégrales.

Ainsi, Jordan ne juge pas nécessaire de construire les nombres irrationnels auxquels il a recours à plusieurs reprises, entre autre pour la démonstration de la condition suffisante du critère de Cauchy; il ne démontre pas le théorème des valeurs intermédiaires, évoque d'une manière très floue les fonctions discontinues et ne s'occupe jamais de l'existence des dérivées des fonctions qu'il considère, que ce soit pour la définition des dérivées d'ordre supérieur, ou la dérivée des fonctions composées ou des fonctions implicites.

Toutes ces faiblesses tiennent à un manque de précaution dans l'utilisation de double passage à la limite (limite d'infiniment petits de deux variables, par exemple), ou d'autres propriétés élémentaires des fondements.

Elles traduisent, de la même façon que les "manques" que nous avons rappelés, une conception de l'analyse et de ses fondements contre laquelle Darboux avait mis en garde dans son mémoire de 1875 (cf 1.5) et qui peut conduire à un défaut de rigueur dans l'exposition et les démonstrations du calcul infinitésimal.

Ainsi, les mathématiciens confiants dans la solidité de l'édifice érigé à la suite de 150 ans de travaux d'analyse, considèrent comme un luxe superflu toute axiomatique, toute exposition minutieuse et rigoureuse des propriétés élémentaires des ensembles et des fonctions.

Le monde de l'analyse mathématique paraît donné; on sait de quoi on parle⁽⁴²⁾.

Or, la prise en compte de toutes ces exigences de rigueur, exigences qui sont loin d'être formelles comme le montrent ces "défauts", ainsi que l'utilisation du théorème des accroissements finis sont des caps qu'il est nécessaire de franchir pour une exposition rigoureuse du calcul différentiel.

2.4. Les fondements dans les autres traités d'analyse

Partant de la liste des livres critiqués par Peano dans [45], nous avons retenu pour notre étude les cours d'Hermite, de Serret (dans la troisième édition de 1886) et de Lipschitz.

Nous y avons ajouté le cours de Houël, au sujet duquel nous citerons les critiques de Darboux.

Nous n'avons pas fait référence, sauf à quelques exceptions près, au cours de Sturm, vu l'année de sa première édition (1857). Les passages que nous citerons sont extraits de la onzième édition qui date de 1897 mais qui n'est pas l'édition à laquelle se réfère Peano.

Plusieurs de ces livres comportent des exercices en fin de tome ou de chapitre. Il aurait pu être intéressant de les prendre comme éléments de comparaison, mais le livre de Jordan n'en comprenant pas, nous nous sommes limitée aux seuls textes des cours.

Quoique sortis pendant la période qui nous intéresse ici, nous n'avons pas retenu pour cette comparaison les cours de Dini et Peano. Ces deux livres, dont les auteurs sont les seuls alors à prendre en compte le mouvement de mise sur pied des fondements de l'analyse, sont trop différents de tous ceux que nous étudions dans cette partie pour que la comparaison soit intéressante.

Nous les étudierons plus précisément en les comparant aux tomes de 1887 et 1893 du traité de Jordan dont ils sont plus proches et nous ne mentionnerons ici que les développements de Peano qui sont dans son introduction au cours de Genocchi.

Jules Tannery, dans le compte-rendu qu'il fit pour le *Bulletin de Sciences Mathématiques* du livre de Genocchi, résume cette différence ([55], 170) :

"L'auteur ((il s'agit de Peano)) se préoccupe de l'origine des notions que l'on rencontre au début des mathématiques (...). De même encore, dans des notes nombreuses placées en tête du Livre, il précise les conditions exactes sous lesquelles sont applicables certains théorèmes qu'il démontre dans le courant de l'Ouvrage : en un mot, il recherche surtout la précision, soit dans les énoncés, soit dans les démonstrations. On aime à voir ces notions bien définies se substituer dans l'enseignement aux notions trop vagues que l'on y rencontre parfois".

Nous allons retrouver dans ces traités les mêmes caractéristiques que nous avons dégagées de l'étude du tome de 1882 de Jordan.

Nous reprendrons pour cette étude le plan suivi lors de l'analyse du tome de 1882.

2.4.1. Les Introductions

Comme Jordan, la plupart des auteurs consacrent leur introduction aux usages des infiniment petits et à l'exposé de la méthode infinitésimale. Tannery s'étonnera dans le compte-rendu déjà cité de ce que Peano ne procède pas ainsi :

"Mais justement à cause de l'esprit de précision qui règne dans ce Livre, il est permis de s'étonner que l'auteur n'ait pas cru devoir y mentionner les théorèmes classiques sur les limites des sommes et des rapports d'infiniment petits, et qui sont le fondement même de la méthode infinitésimale".

S'il est vrai que ces propositions sur les infiniment petits *"sont le fondement même de la méthode infinitésimale"*, il n'en est pas de même du calcul infinitésimal. Celui-ci, malgré toute l'utilité des infiniment petits, ne saurait se réduire, en effet, à la méthode infinitésimale.

Nous renvoyons à ce propos à l'introduction d'Hermite, à la préface de Houël qui fait explicitement référence à Duhamel et qui revient sur ces notions dans les pages 105 à 107 de son livre, et aux *"notions préliminaires"* de Serret.

Un autre trait commun à la plupart de ces traités, que l'on retrouve dans l'introduction et à de nombreuses reprises dans le corps même des traités, est le recours à la *démonstration géométrique* qui n'est le plus souvent qu'une *illustration géométrique*.

Cela ne se retrouve pas dans les livres de Dini ou Peano, ou dans le tome de 1893 de Jordan, qui ne recourent pas à cette aide.

Des exemples particuliers que l'on trouve chez Serret et Jordan dès l'introduction, chez Houël au début du chapitre 1, en sont les paragraphes sur les limites et la méthode infinitésimale : des résultats, démontrés plus ou moins bien, mais démontrés, sur les limites, sont présentés comme évidents et connus depuis longtemps en ce qui concerne la géométrie⁽¹³⁾.

2.4.2. Les tables des matières

Nous avons déjà dégagé lors de l'étude du tome de 1882 certaines caractéristiques des plans de ces ouvrages.

Nous avons mentionné la faible place accordée à la continuité, et à la notion de dérivée.

Un exemple que nous n'avons pas encore cité est le livre de Lipschitz. Alors qu'il présente la théorie des irrationnels, chose rare, nous l'avons vu, il ignore à la fois le théorème des valeurs intermédiaires et celui des accroissements finis, et il semble ne se servir ni du mot *dérivée*, ni de la notation $f'(x)$ dans son livre, le vocabulaire se référant uniquement à la différentielle.

Par contre, le plan que Darboux soumet à Houël pour son traité d'analyse, dans la lettre du 15 janvier 1875, est extrêmement novateur par l'importance qu'il accorde à certains paragraphes dont la continuité, le théorème des accroissements finis dont il fait la poutre maîtresse de tout son édifice diminuant par là le rôle de la différentielle, le sens de variation d'une fonction, les fonctions de plusieurs variables qu'il se propose d'étudier spécifiquement, etc.

Il en est de même du traité de Peano qui, lui, ne s'arrêta pas au plan de l'ouvrage.

Consacrant les deux premiers chapitres à l'étude des fonctions d'une variable réelle, n'abordant les développements en série de Taylor qu'après avoir exposé la théorie élémentaire des séries, traitant de façon spécifique les fonctions de plusieurs variables (continuité, dérivabilité, formule de Taylor, etc), Peano aborde les principes du calcul différentiel et intégral d'une façon beaucoup plus moderne que la plupart des auteurs avant lui, Jordan compris, en 1882.

La dernière question, que nous évoquerons à propos du plan et de la table des matières de ces traités d'analyse ou de calcul infini-tésimal, est la division que l'on trouve entre autres chez Jordan, entre calcul différentiel et calcul intégral.

Relevant cette division à propos de la deuxième édition du traité de Jordan où elle subsiste, Lebesgue écrit dans [41], page XXVI :

"Jordan est volontiers un novateur traditionnaliste; il conserve la division surannée en calcul différentiel et intégral; mais comme ses réflexions lui ont fait reconnaître en l'intégrale la plus simple, la plus intuitive, la plus primitive de toutes les notions de l'analyse, il commence l'exposé du calcul différentiel par la définition de l'intégrale".

Notons qu'il s'agit ici de réflexions postérieures à l'édition de 1882, et que c'est une des différences importantes entre les tomes de 1882 d'une part et 1887 et 1893 d'autre part.

En effet, contrairement à Houël et à Lipschitz qui introduisent dès le début la notion d'intégrale, Jordan ne la mentionne que dans son deuxième tome de 1883, *Calcul intégral*. Il en est de même pour Hermite et Serret.

Dans le compte-rendu qu'il fit du livre de Houël, Darboux écrit à ce propos ([12], 6) :

"L'auteur a maintenu l'innovation qui avait été approuvée, et selon nous avec raison, par M. Painvain; immédiatement après les notions fondamentales de Calcul différentiel, il donne la définition des intégrales définies et des intégrales indéfinies".

2.4.3. Les irrationnels

Absente dans le livre de Jordan, ainsi que dans ceux d'Hermite et de Serret, la construction des irrationnels est donnée dans les livres de Houël et de Lipschitz.

D'autre part, Darboux ne la mentionne à aucun moment dans le plan qu'il propose. Darboux, bien qu'il n'en traite pas dans sa correspondance, connaissait nécessairement une des constructions des nombres irrationnels, ne serait-ce que parce que Houël en expose une dans son traité.

De même dans son fameux mémoire de 1875 ([10]), il ne se sert à aucun moment des irrationnels et des propriétés des réels.

Cela peut paraître étonnant dans la mesure où Darboux est un des artisans les plus remarquables de la mise sur pied des fondements, ce qui n'est, bien évidemment, ni le cas d'Hermite, de Serret ou de Jordan à cette époque.

2.4.4. La continuité

Les traités de Lipschitz et d'Hermite ne consacrent même pas un paragraphe à la définition de la continuité. Serret en donne par contre la définition suivante ([51], 15) :

"Une fonction $f(x)$ de la variable x est dite continue pour les valeurs de x comprises entre les deux limites x_0 et X , lorsque, pour toutes ces valeurs de x , la valeur absolue de la différence
$$f(x+h) - f(x)$$
décroît indéfiniment avec h , ou est indéfiniment petite en même temps que h .

Si la fonction devient infinie pour une valeur de x comprise x_0 et X , elle ne satisfait pas à la précédente définition de la continuité; on dit alors qu'elle devient discontinue en passant par l'infini".

Nous voudrions souligner à l'occasion de ces développements sur les fonctions discontinues que les différents auteurs des traités semblent ignorer l'usage des contre-exemples. Ils auraient là, pourtant, un argument particulièrement simple pour attirer l'attention des étudiants, sans développements excessifs, sur la délicatesse de certaines propriétés considérées comme évidentes.

C'est d'ailleurs la présence de nombreux contre-exemples qui donne à la correspondance de Darboux ce caractère remarquable.

Houël, et nous venons de le voir, est en fait le seul auteur qui s'en serve et encore avec réserve. Il faut y voir très probablement l'influence de Darboux et de leur correspondance.

. La continuité pour les fonctions de plusieurs variables.

Dans l'introduction au cours de Genocchi, Peano étudie de façon spécifique la continuité pour les fonctions de plusieurs variables; les autres auteurs se contentent de mentionner rapidement une définition ou de l'ignorer.

Ainsi, Serret n'en donne pas de définition, Hermite et Lipschitz qui ne mentionnent pas la continuité pour une variable, ne traitent donc pas de la continuité pour les fonctions de plusieurs variables; Houël, ainsi que Jordan, en donne simplement la définition, sans ajouter aucune propriété ou aucun exemple ([27], 121-122).

Peano est ainsi *contraint* de choisir une erreur de Cauchy dans son *Cours d'Analyse*, où il affirme que la continuité par rapport à chacune des variables entraîne la continuité par rapport à l'ensemble des variables, pour insister à l'aide d'un contre-exemple sur la non trivialité de cette notion.

Aucun des auteurs qu'il critique dans le reste de l'Annexe ne lui donne en effet, vu la brièveté de leur développement, l'occasion de relever erreurs ou inexactitudes.

Il n'est pas sans intérêt de signaler ici l'article de 1872 ([9]) dans lequel Darboux définit la continuité pour une fonction de plusieurs variables, définition donnée pour la première fois *point par point*, et plusieurs lettres de la correspondance dans lesquelles Darboux explique très clairement la différence qu'il y a entre la continuité par rapport à l'ensemble des variables et la continuité séparément par rapport à chacune des variables. Il donne d'ailleurs dès 1873 un exemple de fonction, continue sur toute droite passant par l'origine, qui n'est pas continue (cf 1.5.2).

Peano, sans critiquer précisément les manques de ces traités, consacre plusieurs paragraphes à la continuité, et renvoie au traité de Dini pour des développements supplémentaires sur la continuité d'une fonction, ainsi qu'à Weierstrass (article de Schwarz [52]), à Cantor (article de Heine [25]) et à Darboux ([10]).

Il démontre la fausseté de la définition d'une fonction continue trouvée dans certains traités dont celui de Gilbert de 1872 qui appelle fonction continue, une fonction qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires⁽¹⁶⁾.

A cette occasion il définit les limites supérieure et inférieure d'une fonction, notions dont il se sert pour donner une définition de la continuité⁽¹⁷⁾.

2.4.5. La notion de dérivée

. Définition et existence de la dérivée

Les définitions d'Hermite, Serret, Houël et Lipschitz présentent, malgré leur diversité, le même défaut que celle de Jordan. Aucune ne spécifie que la définition donnée est celle de la dérivée en un point.

Hermite introduit la notion de dérivée pour une fonction quelconque comme *"la limite du rapport*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour $h \rightarrow 0$ ", en généralisant la notion de dérivée d'un polynôme entier $F(x)$ qui est obtenue grâce au premier terme du développement en série de Taylor mis sous la forme

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

et ajoute ([26], 40) :

"Cette définition se justifie, comme on sait, par les conséquences importantes qu'on en tire pour toutes les fonctions continues".

Il énonce ensuite deux théorèmes sur le sens de variation d'une fonction d'après la nullité ou le signe de la dérivée, puis le théorème de Rolle avec la même assimilation fonction continue / fonction dérivable.

Enchaînant avec la série de Taylor, Hermite n'ajoutera rien d'autre à propos de la notion de dérivée.

Serret, en supposant que la fonction est continue, indique qu'en général la limite du rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est indépendante du signe de h , qu'elle est fonction de x et qu'elle est appelée dérivée de la fonction $f(x)$. Il donne alors la formule $f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x) + h \cdot \varepsilon$, ε désignant une quantité infiniment petite en même temps que h .

Contrairement à Hermite, il mentionne des cas où la limite du rapport peut ne pas exister, mais n'évoque à aucun moment les rapports continuité/dérivabilité.

Houël, quant à lui, débute le chapitre 2 de son premier livre (*Dérivées et différentielles - Intégrales*) par un paragraphe "historique" sur les tangentes et sur les fluxions de Newton (p.141). Rattachant uniquement la définition de la dérivée, "*limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de la fonction à l'accroissement infiniment petit correspondant de la variable indépendante*", à ces deux points de vue, cette introduction historique dénote, à notre avis, un aspect passéiste.

Dans le même temps, il introduit la formule déjà donnée par Serret, sous la forme

$$f(x_1) - f(x) = (x_1 - x) \cdot f'(x) + (x_1 - x) \cdot \epsilon.$$

Il souligne d'autre part, de façon moins ambiguë que Jordan, l'existence de fonctions continues sans dérivées ([27], 144) :

"L'on peut exprimer par les signes de l'Analyse une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée"⁽¹⁸⁾

A propos, enfin, de la définition de Lipschitz introduite également par des considérations sur les tangentes, signalons que lui aussi suppose f continue et que la limite, lorsqu'elle existe, de

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

n'est jamais notée que $df(x)/dx$ et appelée "*Differentialquotient*". Le mot "*Ableitung*" (dérivée) n'est employé nulle part et on ne trouve aucun commentaire, aucun théorème, sauf "calculatoire", sur les dérivées.

Peano dans [45], page 54 rapproche le recours à l'interprétation géométrique de la dérivée (existence de tangente à une courbe) et l'affirmation de l'existence d'une dérivée pour toute fonction continue.

Pour sa part, se référant à Maclaurin, il montre ([45], 33) qu'on peut définir la dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point x_0 , sans avoir recours à la limite du rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nous avons déjà souligné que Peano critique plusieurs paragraphes du livre de Serret à propos d'un manque de considération pour les conditions d'existence des dérivées dont "*l'expression est tirée d'une succession d'équations*".

Il s'agit du paragraphe 46 ([51], 33) sur la dérivée des fonctions implicites, ainsi que des paragraphes 25 et 26 ([51], 33) dans lesquels Serret établit les formules de différentiation d'un quotient ou des puissances d'une fonction de façon tout à fait mécanique à partir des différentielles logarithmiques.

Serret ne donne, d'autre part, ni formule, ni théorème, pour les dérivées d'un quotient, d'un produit, d'une somme, d'une fonction de fonction, etc.

Peano n'intègre, à aucun moment, le livre de Houël dans ses critiques. Mais nous disposons des nombreuses critiques que Darboux adressa à Houël, en particulier à propos des paragraphes sur les propriétés des dérivées. La critique de Darboux porte, tout à la fois, sur les dérivées d'infiniment petits, sur la démonstration du théorème des accroissements finis, sur la façon de calculer la dérivée d'une fonction de fonction, d'une fonction composée, d'une fonction implicite, etc

Nous donnons ici deux extraits de lettres qui montrent à quel point le souci de Darboux était la justification constante des calculs effectués, c'est-à-dire l'existence, et non pas seulement la forme, de la dérivée en un point, rejoignant ainsi les préoccupations exprimées par Peano dix ans plus tard. Il s'agit des lettres des 18 et 24 janvier 1875 que nous donnons en entier dans l'annexe.

Lettre du 18 janvier 1875 :

"Pour rendre rigoureux tout cela vous seriez obligé de faire quelque chose de lourd et d'impossible. Toutes les fois que vous calculeriez une dérivée $f'(x)$ vous seriez obligé de démontrer que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

est un infiniment petit quand h tend vers zéro et x varie tendant vers une certaine limite. Comment pourriez vous faire cela pour les dérivées des fonctions composées, des fonctions de fonctions, etc".

Lettre du 24 janvier 1875 :

"Voyez ce que deviennent vos théorèmes si on veut les énoncer rigoureusement ((...)). Alors chaque fois que vous prendrez une dérivée et que vous voudrez appliquer les théorèmes fondés sur la supposition précédente, vous serez donc obligé de vérifier si elle est satisfaite. Allez donc le faire pour les fonctions de fonctions et les fonctions composées".

C'est dans cette lettre, d'autre part, que Darboux présente l'exemple $x^2 \cdot \sin(1/x)$, dont il discute l'existence de la dérivée en zéro - existence contestée par Houël - que nous avons déjà traité lors de l'étude du cours de Jordan (cf 2.3.6).

Il critique à cette occasion, dans une lettre du 31 janvier 1875, la façon dont Houël calcule la dérivée d'une fonction composée :

"Vous lisez que cette fonction n'a pas de dérivée pour $x=0$. Là n'est pas la nature de l'objection que je vous ai adressée. Je vous ai dit : D'après la règle des fonctions composées ((Darboux veut dire votre règle)) on a

$$dy/dx = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x),$$

expression indéterminée pour $x=0$, tandis que d'après le raisonnement primitif la dérivée est parfaitement déterminée, elle est nulle".

Pour permettre de saisir l'ampleur de la différence qui séparait les conceptions "nouvelles" du calcul différentiel et les conceptions alors "classiques" que nous retrouvons dans presque tous les traités, nous citerons un extrait des propos de Charles Méray dans la préface de ses *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications* parues en 1894 :

"Les dérivées se définissent, se calculent, s'entremêlent dans les expressions différentielles comme Lagrange le voulait, c'est-à-dire par le simple jeu des opérations vulgaires de l'algèbre, et la certitude de leur existence devenue tangible dispense de toute restriction à leur égard".

2.4.6. Le théorème des accroissements finis

La démonstration d'Ossian Bonnet que donne Serret dans son cours ([51], 17) est donc le premier modèle de démonstration qui utilise le théorème de Rolle, abandonne le théorème des valeurs intermédiaires jusqu'alors nécessaire à l'obtention de la formule finale et, Serret le souligne, ne suppose pas la continuité de la dérivée.

Elle présente cependant une différence notoire avec celle de Dini. A la place du théorème sur la borne supérieure d'une fonction continue auquel Dini se réfère explicitement, Serret utilise la propriété "évidente" de toute fonction continue : *"Si l'on admet qu'elle ne soit pas constamment nulle, il faudra qu'elle commence à croître en prenant des valeurs positives, ou à décroître".*

Peano relèvera cette erreur ([45], 55), et y répondra en donnant le contre-exemple $x.\sin(1/x)$ pour $x=0$. Il la minimisera toutefois dans une lettre écrite à Jordan, la considérant comme une *"imperfection de langage"*. Notons que dans la troisième édition de son cours (1886), Serret ne corrige pas son erreur et ne mentionne, même pas par une note, la remarque de Peano.

Nous pouvons également citer un autre exemple, caricatural celui-là, de version non corrigée de la démonstration de Bonnet-Serret :

Dans la préface de la onzième édition du cours de Sturm paru en 1897, un des changements signalé comme nécessaire est la démonstration de la formule de Taylor due à Rouché avec un rappel de *"la démonstration si générale que M. Bonnet a donné du théorème de Rolle"*. Cette démonstration (n°125, p.16) n'est toujours pas satisfaisante et comporte la même erreur.

Cette démonstration de Bonnet est l'objet de discussions incessantes entre Darboux et Houël dont rendent compte les lettres que nous donnons en annexe. Nous disposons à ce sujet des réponses de Houël^(M).

Nous pouvons grâce aux lettres de Darboux qui résument à plusieurs reprises les positions de Houël et les différents qui les opposent, et grâce aux réponses de Houël lui-même, retrouver la version initiale de la démonstration de Houël et la comparer à la version ou plutôt aux différentes versions de son livre, Houël choisissant de ne donner pas moins de trois démonstrations différentes du théorème des accroissements finis ([27], 145-150).

2.4.7. Dérivées partielles - différentielles

Les remarques que nous pourrions faire sur l'ensemble des traités étant pour l'essentiel semblables à celles que nous avons faites sur le tome de 1882 de Jordan (cf 2.3.8), il ne nous semble pas utile de développer ici une comparaison détaillée.

Il en est de même pour la dérivée de fonctions composées, les dérivées et différentielles d'ordre supérieur et l'interversion de l'ordre de différentiation, ainsi que pour les développements en série de Taylor (cf 2.3.9).

2.5. Les fondements en France à travers la correspondance de Darboux

L'étude que nous venons de faire des différents traités parus en France entre 1870 et 1882 a permis de montrer que leurs auteurs n'y ont en général intégré aucun des travaux liés à la mise sur pied des fondements.

Cette "unanimité" est, bien évidemment, significative d'un certain aspect de la situation des fondements en France.

Il nous a cependant paru nécessaire de confronter le contenu des différents manuels et l'état réel des mathématiques dans ce domaine, en France.

Nous nous sommes servie, à ce propos, de la correspondance de G. Darboux qui fait allusion à plusieurs reprises aux idées du monde mathématique français et international⁽²⁰⁾.

Cela nous permettra d'évaluer la distance inévitable entre la réalité du mouvement de mise sur pied des fondements et l'image que nous en donnent les traités, question que Jordan lui-même soulève dans la préface au tome de 1882 que nous étudierons dans la troisième partie (cf 3.4).

Darboux tout d'abord affirme la nouveauté, en France, de ses préoccupations à propos des principes du calcul infinitésimal (cf 1.1 et 3.4); il écrit dans la lettre du 2 février 1875 :

"Si je vous tourmente sur les principes du Calcul Infinitésimal c'est que je voudrais vous voir produire quelque chose de véritablement neuf, la rigueur au lieu de l'à-peu-près de Duhamel et de ses prédécesseurs".

"Il s'agit d'un point très délicat où je voudrais vous voir réformer des idées universellement admises et faire oeuvre de novateur", poursuit-il dans une lettre du 25 février 1875.

Par ailleurs il se réfère à un certain nombre de mathématiciens qui partagent son point de vue sur les démonstrations du calcul différentiel et cite tout à la fois Thomae, Schwarz, *"les professeurs de spéciales d'ici"*, les universités anglaises et allemandes *"où on commence à tenir à la rigueur"*, Bonnet.

Il précise, dans une lettre du 27 novembre 1875 à propos de la démonstration de Bonnet du théorème des accroissements finis :

"A titre de renseignement je dois vous dire que depuis que des objections de cette nature ont été faites ((il s'agit des objections sur les infiniment petits dont nous avons parlé, soulevées entre autres par "Weierstrass, Thomae et tous les autres")), ici même dans les cours de spéciales, on a adopté la marche que vous attribuez à Serret et qui n'est pas plus à lui qu'à un autre (Elle serait dans tous les cas à Bonnet).

Mais Darboux est en fait le seul, en France, à participer au mouvement de remise sur pied des fondements de l'analyse et cela, indépendamment de Weierstrass. Il nous apparaît, grâce à la correspondance, qu'il est surtout influencé par les réflexions d'Ossian Bonnet, dont il nous faut à nouveau signaler le rôle, et par le mémoire de Riemann qui est à l'origine du mémoire de 1875.

En fait les idées de Weierstrass sont mal connues en France. Picard fut un des seuls mathématiciens français, sinon le seul avec J. Molk, à avoir eu entre les mains des notes des cours de Weierstrass et cela seulement en 1880. Il écrit à Mittag-Leffler le 27-janvier 1880 ([17], 162) :

"Je vous remercie bien vivement des feuilles que vous m'avez envoyées sur les cours de Weierstrass. J'ai connu l'année dernière un jeune homme qui avait suivi à Berlin le cours du grand analyste et qui m'avait prêté ses cahiers de notes; les feuilles que vous m'avez envoyées vont me permettre de compléter les notes assez incomplètes que j'avais prises sur ces matières".

L'isolement de Darboux est particulièrement sensible dans les lettres du 30 mars et du 23 décembre 1873.

Dans la première de ces lettres, présentant le mémoire de Riemann, Darboux constate : *"Voilà un beau morceau et qui ne sera pas apprécié"*. Dans la conclusion de la lettre du 23 décembre où il expose le plan de son mémoire de 1875, Darboux écrit : *"Si on ne se moque pas de moi, je continuerai ces études petit à petit"*.

Il semble que ce ne fut pas le cas et que Darboux fut, dans une certaine mesure, blâmé par ses collègues qui, au nom d'autres priorités dans la science, jugeaient inopportunes de telles recherches. Il abandonne ces recherches après le mémoire de 1875, même s'il publie encore un article en 1879. Ainsi, évoquant les recherches de Darboux sur les fondements, Lebesgue écrivait (cf 2.1), ([39], 14) :

"On raconte qu'en 1875 Darboux fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de pareilles questions; soit à cause de ces remontrances, soit plutôt à cause de la beauté et de l'importance des problèmes qu'il a ensuite abordés, Darboux ne fit pas d'autre incursion dans le domaine des fonctions non analytiques".

Picard notait de son côté ([47], 19) :

"Darboux racontait plus tard que ce mémoire avait été froidement accueilli par plusieurs de ceux qui habituellement s'intéressaient à ses travaux. Ils l'avaient dissuader de labourer plus longtemps le champ stérile des fonctions qui n'ont pas de dérivées".

Ces lettres qui datent d'avant 1875 traduisent en fait la réalité jusque vers 1884. Darboux resta seul et n'eut en France aucune influence immédiate, ce qui ne fut pas le cas, en Italie, pour Dinì.

Cependant, pendant cette période, parut aux Comptes Rendus une Note de Jordan qui nous donne des indications supplémentaires sur le développement, la pénétration des nouvelles recherches sur les fondements chez les mathématiciens français.

Il s'agit de la note de 1881, *Sur la série de Fourier* (cf 3.2) dans laquelle Jordan définit les *fonctions à oscillation limitées* et revient à cette occasion sur la différence entre fonctions intégrables Riemann et fonctions continues.

Tout d'abord, c'est une des seules notes publiées en France entre 1875 et 1885 sur les fondements ou même sur ces fonctions qui sortent du cadre classique des fonctions auxquelles on s'intéressait alors, ce qui confirme le peu d'intérêt suscité par ces recherches.

De plus, Jordan n'exploite pas immédiatement ce concept de fonction à oscillation limitée, pourtant fondamental pour la théorie des fonctions à la fin du XIXe siècle. Il ne le reprendra que six ans plus tard ([33]), cet article ne semblant être ainsi qu'une remarque qui n'a rien d'essentiel.

Enfin, Jordan l'écrit un an avant la parution du tome de 1882 que nous venons d'analyser. Ainsi, même si certains mathématiciens connaissaient, et maîtrisaient, des éléments des fondements de l'analyse, ils ne les jugeaient ni utiles, ni indispensables à une

bonne exposition du calcul différentiel et intégral; c'est, à notre avis, une manifestation supplémentaire de la marginalité du mouvement de mise sur pied des fondements.

Cela soulève un problème banal mais dont l'importance et la signification ne sauraient ici nous échapper, à savoir le décalage fixé par un auteur entre le niveau et le contenu de son cours et celui de la science.

L'ampleur du décalage et les choix opérés nous semblent en effet liés à la conception globale que l'auteur a des mathématiques et des éléments qu'il reconnaît comme essentiels.

Ainsi les traités de Dini et de Peano, d'une part, des auteurs français, d'autre part, relèvent-ils de deux conceptions différentes de l'analyse et surtout de ses fondements (cf 2.3.12).

Ainsi encore, les choix différents que Jordan fera en 1882 et en 1893, pour les deux éditions de son cours, traduisent une évolution sensible dans sa conception des fondements de l'analyse et de l'analyse des fonctions d'une variable réelle (cf 3.4 et 3.5).

Le choix de Jordan pour le tome de 1882 est donc significatif de l'état réel des conceptions d'alors sur les fondements en France; et donc, si les traités ne rendent pas compte, dans le détail, du développement et de la pénétration du mouvement de mise sur pied des fondements, ils nous donnent une image relativement fidèle de la réalité de ce mouvement.

Nous allons maintenant, dans la partie suivante, éclairer les choix de Jordan en retraçant rapidement l'itinéraire personnel de Jordan et en essayant de préciser certaines des caractéristiques d'un enseignement à l'Ecole Polytechnique.

Notes sur la deuxième partie

1. Les travaux antérieurs de Darboux furent essentiellement des mémoires de géométrie.

2. Table des matières :

Nombres incommensurables - Groupes de nombres et de points, leurs limites inférieure et supérieure - Concept de limite - Infiniment petits et infini - Concept de fonction - Continuité et discontinuité - Fonctions continues dans un intervalle donné - Fonctions admettant une infinité de discontinuités - Dérivée d'une fonction - Théorèmes sur les séries - Principe de condensation des singularités - Fonctions qui ne possèdent jamais de dérivée déterminée et finie - Autres considérations générales concernant spécialement l'existence de la dérivée d'une fonction finie et continue - Intégrales définies.

3. Les différents ouvrages critiqués par Peano sont :

- Sturm, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, première édition, 1857.
- Gilbert, *Cours d'analyse infinitésimale*, 1872.
- Hermite, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, 1873.
- Bertrand, *Calcul différentiel*, 1864.
- Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, deuxième édition, 1879.
- Jordan, *Cours d'analyse*, tome 1, 1882.

Par contre, Peano se réfère plusieurs fois aux ouvrages de :

- Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, 1878.
 - Harnack, *Differential und Integralrechnung*, 1881.
 - Du Bois Raymond, *Théorie générale des fonctions*, 1882,
- ainsi qu'aux *Grundlagen der Analysis* (1877) de Lipchitz, à propos uniquement des nombres incommensurables.

Signalons l'absence du *Traité* de Houël que nous étudierons, essentiellement, à cause des critiques que formula Darboux dans sa correspondance.

4. Un troisième tome, que nous étudierons dans la quatrième partie, sortira en 1887.

5. Nous reviendrons sur cette démonstration et sur un certain nombre de lettres admirables de Darboux à propos de la limite d'infiniment petits de deux variables.

6. La première définition correcte de la différentielle des fonctions de deux variables fut donnée par Stoltz en 1885. Citons d'autre part une des rares notes de "caractère historique" qui se trouve dans le cours de Dixmier ([15 bis], 364) :

"La notion de différentielle, fondamentale, est plus difficile à assimiler que celle de dérivées partielles, mais elle est plus naturelle à beaucoup d'égards ((...)). Historiquement les différentielles étaient définies de façon fort obscure, comme des accroissements infiniment petits; ce point de vue subsiste encore dans la notation de l'intégrale définie".

7. Signalons tout de suite que Jordan ne tiendra pas compte de cette remarque dans l'édition de 1893, mais qu'il présentera alors la formule avec le reste intégral.

8. Les axiomes que Jordan mentionne, sont les axiomes sur les réels par lesquels il commence la Note de 1887.

9. Nous avons jugé intéressant de reproduire ces deux démonstrations qui comportent en fait la même faiblesse, les deux dernières lignes de la démonstration géométrique n'étant que l'affirmation d'une propriété des réels (non construits) non démontrée.

10. A propos du théorème sur l'interversion $\sum$ et $\int$, signalons la lettre du 23 décembre 1875 de Darboux qui, critiquant le théorème de Houël (l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales si la série est convergente et est fonction continue de x , et si la série des intégrales converge) donne un contre-exemple et écrit que ce théorème faux se trouve également chez "Serret, Hermite et tutti quanti".

11. En fait Jordan et Dirichlet ne traitent pas de la même chose, Jordan considérant l'intégrabilité au sens de Riemann, ce que ne fait, évidemment pas, Dirichlet.

12. Une caricature en est une des réponses que Houël envoie à Darboux à propos des discussions sur l'existence de la dérivée et de conditions supplémentaires que Darboux lui reproche d'ajouter (cf 2.4.5) :

"Oui j'admets comme un fait d'expérience (sans chercher à le démontrer en général, ce qui peut être difficile) que dans les fonctions que je traite, on peut toujours trouver h satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) ,$$

quelque soit le paramètre x , et je vous avoue que j'ignore ce que pourrait signifier le mot dérivée s'il n'en était pas ainsi. ((...)) Je crois cette hypothèse identique avec celle de l'existence de la dérivée. Si elle ne l'est pas, je l'y ajoute".

13. A la page 3 de son cours, après avoir donné une bonne définition de la limite d'une variable, Serret écrit :

"Le lecteur est déjà familiarisé avec cette notion de limite. On sait, par exemple, que la surface du cercle est la limite vers laquelle tend la surface d'un polygone régulier inscrit ou circonscrit".

De même, Jordan fait précéder les développements sur les infiniment petits d'une recherche concrète de tangente et de quadrature dans laquelle des points tendent vers d'autres points et une aire est la limite d'autres aires sans que, bien sûr, aucune définition ne soit donnée.

14. Notons à propos du théorème des valeurs intermédiaires, que Peano critique également dans l'introduction à Genocchi, la démonstration géométrique de Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires en observant qu'une fonction continue ne peut pas prendre que des valeurs rationnelles ([45], 51).

15. Le premier de ces exemples avait déjà été donné en 1821 par Cauchy qui la cite comme fonction n'ayant pas de limite ([7], 2e série, t.3, 26).

16. Cette critique à propos des fonctions continues avait déjà été faite par Darboux dans [10], ainsi que le signale Peano.

17. Ceci est d'ailleurs noté dans le compte-rendu que fait Tannery ([55]) : *"L'auteur introduit avec raison la notion de limite supérieure ou inférieure qui est si utile pour l'étude des fonctions d'une variable réelle"*.

Ce commentaire est intéressant par la mention explicite qu'il fait de *"l'étude des fonctions d'une variable réelle"*. Nous avons déjà signalé qu'il était rare à cette époque de trouver un tel point de vue à propos de l'analyse, ou plus encore du calcul différentiel et intégral.

18. Notons qu'il ne précise pas *"en aucun point"*.

19. Les lettres de Houël conservées à la bibliothèque de l'Institut nous renseignent sur ces réticences. Houël écrit dix-sept lettres, dont douze en réponse aux arguments de Darboux à propos de ce théorème des accroissements finis, entre le 12 décembre 1874 et le 26 février 1875.

En fait Houël rejette toutes les objections de Darboux, tout en exprimant son incompréhension et son inquiétude devant celles-ci :

"Vous me donnez des inquiétudes mortelles sur les points que je croyais les mieux établis" (lettre du 31 janvier 1875).

"Je comprends ce que me dit Cauchy, ou quand je ne comprends pas, je vois bien ce qui me manque pour cela. Mais votre doctrine m'épate tout simplement, et votre abîme me donne la berlue" (Lettre du 16 février 1875). Il s'agit ici de l'abîme dont parle Darboux dans sa lettre du 31 janvier 1875 à propos de la limite d'infiniment petit de deux variables dont Houël ne veut pas considérer la variation simultanée :

"Il y a d'ailleurs dans les objections que vous me présentez, fondées sur la variation simultanée de deux variables indépendantes, un point sur lequel vous ne vous êtes jamais expliqué. Je rejette complètement pour ma part la variation simultanée. Je ne considère que des variations successives des variables" (Lettre du 9 janvier 1875).

"Débarrassez vous de cette préoccupation de variation simultanée de deux quantités qui n'a rien à faire ici" (Lettre du 24 janvier 1875).

A propos de l'existence de la dérivée et des conditions supplémentaires que Darboux lui reproche d'ajouter, Houël écrit :

Oui, j'admets comme un fait d'expérience (sans chercher à le démontrer en général, ce qui peut être difficile) que dans les fonctions que je traite, on peut toujours trouver h satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) ,$$

quelque soit le paramètre x , et je vous avoue que j'ignore ce que pourrait signifier le mot dérivée s'il n'en était pas ainsi (...). Je cois cette hypothèse identique avec celle de l'existence de la dérivée. Si elle ne l'est pas, je l'y ajoute (...). Cela me semble plus clair et plus net que le maximum de Bonnet" (Lettre du 19 janvier 1875).

En fait Houël n'a rien de sérieux à reprocher à la démonstration de Bonnet que reproduit Serret. Il n'a que des "scrupules" à copier Serret "dans un livre destiné à lui faire concurrence", alors qu'il n'est pas convaincu de la faiblesse de sa propre démonstration.

Le seul reproche qu'il fait à cette démonstration est la difficulté qu'il a à la retenir ! Chaque fois qu'il a eu à la développer devant des étudiants la mémoire lui a manqué, écrit-il dans la lettre du 25 janvier 1875.

En fait, et Houël a raison quand il dit que leur désaccord ne porte pas sur des "vétilles", Houël n'a pas saisi la question importante, soulevée par Darboux dès la lettre du 26 avril 1872, de la continuité d'une fonction de deux variables ou de la limite d'une fonction de deux variables. Il pose d'ailleurs directement la question de la définition et du concept de la limite à Darboux (Lettres des 6 septembre 1872, 25 janvier 1875 et 1 février 1875).

20. Voir entre autre les lettres des 24 janvier 1874, 18 janvier, 2 février et 27 novembre 1875.

3. CAMILLE JORDAN ET L'ECOLE POLYTECHNIQUE.

3.1. Jordan, un grand algébriste

En 1873, à 35 ans, Jordan est appelé à l'Ecole Polytechnique comme examinateur des élèves pour l'analyse, en remplacement d'Ossian Bonnet.

En 1876, il est nommé professeur d'analyse en remplacement de Hermite qui allait se consacrer entièrement à son cours d'analyse de la Sorbonne; il est alors dans l'obligation de rédiger un traité à partir de son cours à l'Ecole.

La première édition commence à paraître en 1882; une deuxième édition, "*entièrement remaniée*" selon les dires de Jordan lui-même, sort en 1893.

Il nous semble important de signaler que, en 1873, les nombreuses recherches de Jordan relèvent de l'algèbre ou de la "géométrie de situation", ancêtre de la topologie algébrique. Il en sera toujours ainsi en 1876 puis au moment de la rédaction de la première édition du traité d'analyse.

Jordan ne publiera que trois articles d'analyse, les deux premiers en 1881 dans les *Comptes Rendus*, et le troisième en 1892. Ce n'est donc pas un analyste qui rédige le traité dont nous venons d'étudier quelques paragraphes.

Cependant, résumant l'activité de Jordan, E. Picard déclarait en 1922 à la mort de celui-ci ([48]) : "*Jordan a été vraiment un grand algébriste; les notions fondamentales qu'il a introduites en Analyse préserveront son nom de l'oubli*".

Confirmant l'opinion d'E. Picard, H. Lebesgue écrivait dans la *Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan* ([41]) : "*Camille Jordan doit être considéré comme le premier artisan de cette étude du réel qui vient de donner à notre science une vigueur nouvelle*" (Lebesgue traite alors de la théorie des fonctions).

Le rôle et les travaux de Jordan en analyse sont en effet exceptionnels. Algébriste avant tout, Jordan ne s'intéresse que fort tard à l'analyse; en outre, il n'y consacre que trois articles auxquels il faut cependant ajouter, comme nous le verrons, son traité d'analyse.

Seulement, chacun de ses rares travaux est d'une importance capitale. Il a ainsi introduit dans sa note de 1881 ([29]) le concept fondamental de fonction à variation bornée, dans son mémoire de 1892, *Remarques sur les intégrales définies* ([34]), les notions d'étendue intérieure et extérieure d'un ensemble et d'ensemble mesu-

nable auxquelles Lebesgue se réfèrera ([38], 37). Mais il a aussi précisé dans le Supplément au tome de 1887 du traité, les notions de *courbes rectifiables et quarrables* définissant rigoureusement la longueur d'un arc de courbe ([33], 594); il a également formulé, sinon démontré correctement, le *théorème de Jordan* qui dit que toute courbe continue divise le plan en deux régions.

Enfin, nous ne retiendrons de la deuxième édition de son cours d'analyse que les cent premières pages du tome de 1893 dans lesquelles il réussit à surmonter les limites et les difficultés auxquelles se heurtait la mise sur pied des fondements de l'analyse dans les années 1870-1880 et réalisa le premier de façon aussi complète la synthèse de toutes les idées nouvelles liées à ce mouvement, en faisant ainsi une théorie naissante.

Il se peut que la nature d'esprit de Jordan que l'on retrouve dans ses très nombreuses recherches, ainsi que son "amateurisme" en analyse explique pour une part qu'il ait su ainsi à plusieurs reprises aller à l'essentiel et découvrir ou clarifier des notions fondamentales en analyse que l'on retrouve dans les éditions du traité.

Lebesgue explique cette particularité de Jordan de la façon suivante ([41], XXIII) :

"Lorsqu'il ne peut recourir au calcul, le mathématicien doit explorer le domaine où il travaille, observer le rôle des différents êtres mathématiques qu'il y rencontre, les regarder vivre, pourrait-on dire, afin d'en discerner les qualités et reconnaître les apports de chacune des qualités. (...) Bref, le mathématicien se transforme en naturaliste. (...) Privé du calcul, l'analyste doit lui aussi, avoir recours aux raisonnements dits synthétiques. (...) Si dans la principale de ses oeuvres, Jordan a utilisé presque uniquement les raisonnements synthétiques, c'est qu'il a suivi la voie et l'exemple de Galois. L'entraînement qu'il acquit ainsi, et aussi quelque tendance naturelle, l'incitèrent à s'attaquer à des problèmes inattendus. Le mathématicien qui n'use guère du calcul substitue à la mathématique des quantités une mathématique des qualités; celle-ci soulève des questions nouvelles ou qu'on avait jusque là écartées des mathématiques; fermer les yeux et prendre parfois un air scandalisé n'était-ce pas la meilleure tactique pour renforcer le dogme que le calcul réglait tout ? Jordan ne s'est pas laissé arrêter par ces préjugés : la solution de certaines questions serait utile aux progrès de l'analyse, il est en mesure d'entreprendre cette étude, cela lui suffit; son amour de l'analyse l'oblige à en élargir le cadre. C'est par là surtout que Jordan diffère de ses contemporains; par ses recherches il nous a prouvé que la géométrie pouvait rendre à l'analyse des services comparables à ceux qu'elle en avait reçus. A ce revirement auquel nous assistons, le nom de Jordan restera éternellement attaché avec celui du génial Riemann.

((...)) Dans son cours d'analyse, ((...)) à côté de la magnifique exposition qu'il donne de la théorie des variables complexes, il commence l'édification d'une théorie des variables réelles si intimement liée et si utile à sa voisine que les barrières, élevées entre elles par des habitudes et des préjugés, tombent d'elles-mêmes. Après Jordan, on ose étudier les fonctions réelles générales un peu oubliées au cours du XIXe siècle; on avoue de nouveau que l'analyse a pour but l'étude du réel, de celui même qui ne se laisse pas prolonger dans le domaine complexe".

Est-il nécessaire de préciser que Lebesgue parle ici de la deuxième édition du cours d'analyse et plus particulièrement, pour l'étude des fonctions réelles un peu générales, du tome de 1893 que nous étudierons dans notre cinquième partie ?

3.2. La note de 1881

Nous allons revenir rapidement sur cette note aux *Comptes Rendus* de 1881 *Sur la série de Fourier*. Dans cet article, Jordan introduit le concept de fonction à oscillation limitée dont Charles de La Vallée Poussin souligna l'importance au Congrès International des Mathématiciens de 1920 à Strasbourg ([37], 1, 57).

Nous nous intéressons ici à la définition de ces fonctions dans la mesure où elle révèle que Jordan avait une connaissance très fine des fonctions "marginales" ayant une infinité de points de discontinuité et de la structure de l'ensemble des réels; son exemple de fonction à oscillation limitée ayant, dans tout intervalle, une infinité de discontinuités, le prouve :

"Soit en effet, $\Psi(m,n)$ une fonction constamment positive et telle que la somme

$$S = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi(m,n)$$

étendue à toutes les valeurs entières de m et de n , soit finie. On peut poser

$$F(x) = \sum \Psi(m,n)$$

la somme s'étendant à tous les systèmes de valeurs premières entre elles de m et de n , tels que m/n ne dépasse pas x . Cette fonction sera constamment non décroissante et aura pour oscillation S . Elle sera d'ailleurs discontinue pour toutes les valeurs rationnelles de la variable x ".

Il en est de même de la remarque I de la note dans laquelle Jordan discute de la nature des fonctions intégrables, avec les réserves que nous avons formulées (cf 2.3.11) :

"Dirichlet dit dans son *Mémoire* (*Journal de Crelle*, tome 4, p. 169) qu'une fonction qui présente un nombre infini de discontinuités n'est intégrable que si, dans un intervalle quelconque (a,b) , on peut placer deux quantités r,s assez rapprochées pour que la

fonction reste continue de r à s . On voit, par l'exemple qui précède, que cette assertion n'est pas exacte. Cette inadvertance d'un géomètre si justement considéré comme un modèle de précision nous paraît mériter d'être signalée".

Il nous semble intéressant pour notre propos, de souligner à la fois l'importance et certaines limites de cette Note.

Tout d'abord, on peut remarquer que le premier article d'analyse de Jordan est consacré à un domaine inexploité en France, celui de la série de Fourier. C'est, de plus, le seul article depuis Darboux traitant également de la théorie de fonctions de variable réelle ayant une infinité de discontinuités.

Mais, contrairement à Darboux qui donne surtout des exemples de fonctions *anormales* ou *saugrenues* selon les termes de Houël, Jordan définit une classe de fonctions de variable réelle sur laquelle il énonce un théorème.

Ceci est tout à fait nouveau, et, dans une certaine mesure, prématuré en France (Jordan d'ailleurs ne l'exploitera pas tout de suite). Comme le note Lebesgue (cf 1.7) :

"L'étude générale des fonctions ((...)) semblait sans portée mathématique véritable. On citait la définition des intégrales par excès et par défaut de Darboux comme un exemple unique de proposition générale, mais on ne l'utilisait jamais; et les travaux qu'on publiait sur les fonctions de variables réelles avaient le plus souvent pour but de montrer, par des exemples, l'impossibilité d'énoncer sans restriction telle ou telle proposition".

Ainsi, dès sa première note, on trouve chez Jordan cette faculté étonnante de dégager et d'exploiter les notions essentielles dans un domaine particulier, faculté que tant de monde relèvera dans la deuxième édition de son cours d'analyse.

Dans le même temps, la remarque I semble indiquer que cette Note a été suggérée à Jordan à l'occasion de la lecture du mémoire de Dirichlet et que c'est incidemment qu'il s'est intéressé à cette question. Il attendra d'ailleurs plusieurs années, et le troisième tome de son traité, pour développer les premiers éléments d'étude de ses fonctions à variation bornée, dont il n'a peut être pas mesuré toute l'importance.

Cette remarque I montre, d'autre part, une limite des vues de Jordan sur l'intégration et, peut-être plus généralement, sur les principes de l'analyse.

Jordan ne saisit pas la relativité de la notion d'intégrabilité en fonction de la définition de l'intégrale que l'on utilise. En fait, l'"inadvertance" de Dirichlet n'est qu'affaire de définition, Dirichlet ne pouvant connaître l'intégrale de Riemann.

Ainsi, il semble que Jordan considère cette notion comme une propriété intrinsèque et qu'il y aurait donc à découvrir des conditions d'intégrabilité et non à définir l'intégrabilité.

3.3. L'Ecole Polytechnique

"L'ouvrage dont nous publions aujourd'hui le premier volume est dans son ensemble la reproduction des leçons que nous professons depuis quelques années à l'Ecole Polytechnique. Nous y avons seulement ajouté, sur certains points, quelques développements nouveaux, mais sans altérer le caractère de ce cours".

Ainsi, dans la préface du tome de 1882, Jordan se réfère explicitement à son enseignement à l'Ecole Polytechnique, quoiqu'il ait un jour confié à Lebesgue : *"Cours de l'Ecole Polytechnique, me disait-il un jour, on met cela sur la couverture pour faire plaisir à l'Editeur"*.

Il nous semble donc intéressant de donner ici quelques éléments sur l'Ecole Polytechnique que nous avons trouvés dans la correspondance de Darboux. Il s'agit d'extraits de lettres des années 1870 à 1872 dans lesquelles Darboux apparaît très critique à propos du niveau de l'Ecole et de l'intérêt des élèves pour les mathématiques.

lettre du 5 mars 1870 :

"Tous nos géomètres d'ailleurs, quoique tous fort distingués, semblent appartenir à un autre âge. Ce sont des savants éminents restés à la Science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent et développent avec beaucoup de succès mais toutes les branches modernes sont pour eux accessoires ((...)) Mais je vous en prie, ne communiquez ce jugement à personne, il pourrait attirer sur moi la foudre et la tempête et je n'y tiens nullement. Quant à l'Ecole Polytechnique, on se rendra compte plus tard de la valeur des rengaines qui ont cours sur elle et de son influence sur le développement scientifique, je ne vous dis que ça".

lettre du 11 Janvier 1872 :

"La première Ecole du Monde est depuis cette année, dotée de conférences de première année. Mais il se trouve que l'on a demandé aux élèves de deuxième année s'ils voulaient des conférences d'Analyse. Ils ont répondu qu'ils n'en voyaient pas bien la nécessité. C'est charmant, n'est-ce-pas".

Nous tenons à signaler ici l'analyse de C. Gilain ([21], XIX) sur les contraintes que Cauchy subit à l'Ecole Polytechnique à propos de son enseignement de l'analyse et plus particulièrement de ses leçons sur les équations différentielles.

Nous ne nous sommes pas livré à une étude similaire en ce qui concerne l'enseignement de Camille Jordan, mais nous avons constaté en étudiant le cours photocopié de la deuxième division (première année) de l'année scolaire 1897-1898 conservé à la bibliothèque de l'Ecole Normale que ce dernier était plus proche de la première édition du traité (tomes de 1882 et 1883) que de la deuxième, sortie quatre ans plus tôt.

En effet si Jordan fonde les deux premiers tomes en exposant parallèlement le calcul différentiel et le calcul intégral, on ne trouve aucune trace de l'étude des fonctions réelles, de la théorie des ensembles ou de la construction des irrationnels. En 1883, Jordan succède à Liouville au Collège de France; il était depuis 1875 suppléant de Serret. Il semble d'après Lebesgue que les qualités de l'auditoire avaient permis à Jordan de se libérer de certaines contraintes imposées par le niveau et l'intérêt des élèves de l'Ecole Polytechnique ([41], XVII) :

"Déjà, en effet, la première édition du Traité déborde très largement le cours de l'Ecole; pourtant elle le fait assez exactement deviner. Les éditions suivantes furent surtout influencées par les leçons professées par Jordan au Collège de France ((...)) Les qualités de Jordan convenaient mieux encore à l'auditoire du Collège qu'à celui de l'Ecole Polytechnique; certains artifices, destinés à diminuer l'effort et que Jordan n'utilisait guère, n'avaient plus d'importance. Il avait affaire à des jeunes gens déjà instruits en mathématiques, désirant connaître et comprendre vraiment et sachant bien que cela exigeait du travail. Les raisonnements de Jordan, difficiles mais solides, affrontant les difficultés, étaient précisément ce qu'il leur fallait".

Effectivement, le cours donné au Collège de France durant l'année 1891-1892, intitulé *"Principes du calcul infinitésimal"*, est très différent tout à la fois du tome de 1882 et du cours photocopié de 1897-1898 de l'Ecole Polytechnique, consulté par nous à l'Ecole Normale; il est par contre très proche du premier volume de la deuxième édition sorti en 1893.

Il est cependant difficile de dire quelle a été l'influence réelle de l'Ecole Polytechnique. S'il est vrai que dans la préface de 1882 Jordan mentionne *"l'enseignement élémentaire"* qu'il dispense à Polytechnique :

"Nous nous sommes efforcé d'apporter dans cette discussion, parfois délicate, toute la précision et la rigueur compatibles avec un enseignement élémentaire",

il saura s'en libérer lors de la deuxième édition.

D'autre part, le cours du Collège de France de 1891-1892 est surtout, à notre avis, l'illustration des positions de Jordan, à ce moment-là, sur les principes de l'analyse; positions qui, naturellement, se retrouvent dans le volume de 1893 du traité qui paraît l'année suivante.

En fait, le cours de 1882 est surtout influencé par la conception générale du calcul infinitésimal en France, conception que Jordan partageait probablement. Son contenu évoluera essentiellement avec les idées de Jordan sur les fondements de l'analyse.

3.4. L'"enseignement élémentaire", un alibi ?

Nous avons à plusieurs reprises cité les arguments avancés par Jordan pour justifier le contenu du tome de 1882 de son cours d'analyse.

Voulant poser ici le problème plus général des différentes conceptions de l'enseignement "élémentaire" du calcul infinitésimal dans ces années, nous allons les reprendre ici. Nous les discuterons en les opposant, tout à la fois aux arguments que Darboux expose dans de nombreuses lettres consacrées à la critique du traité de Houël, et aux arguments que Jordan, lui-même, avance dans la préface à la deuxième édition du traité, en 1893.

Ainsi Jordan écrit ([31], V) :

"L'ouvrage dont nous publions aujourd'hui le premier volume est, dans son ensemble, la reproduction des leçons que nous professons depuis quelques années à l'Ecole Polytechnique. Nous y avons ajouté, sur certains points, quelques développements nouveaux, mais sans altérer le caractère de ce cours.

((...)) Le troisième volume se terminera par un Supplément sur quelques théories importantes, mais dont l'exposition exige plus de développements que n'en comporte le cadre d'un cours, dont l'objet essentiel est d'exposer les principes généraux du Calcul infinitésimal, plutôt que d'en multiplier les conséquences.

Nous avons apporté un soin particulier à l'établissement des théorèmes fondamentaux. Il n'en est aucun dont la démonstration ne soit subordonnée à certaines restrictions. Nous nous sommes efforcé d'apporter dans cette discussion, parfois délicate, toute la précision et la rigueur compatibles avec un enseignement élémentaire. Nous aurons d'ailleurs à revenir, dans le Supplément, sur quelques unes des ces démonstrations".

Jordan semble donc dans cette préface, à la fois par l'annonce du Supplément, c'est-à-dire de la *Note sur quelques points de la théorie des fonctions* parue dans le troisième volume, et par la référence à un enseignement élémentaire, être pleinement conscient des limites qu'il assigne à son cours.

Il nous paraît cependant que certains éléments peuvent mettre en cause cette interprétation de la préface qui, alors, aurait été écrite une fois le tome terminé, pour justifier et atténuer a posteriori des insuffisances et des manques, essentiellement sur les fondements, qu'il corrigera dans le Supplément.

En effet, à aucun moment dans le tome 1 et une seule fois dans le tome 2, Jordan ne mentionne l'existence du Supplément ou renvoie à celui-ci pour des compléments de démonstrations, qui s'y trouvent effectivement.

D'autre part, il nous semble que le recours à l'enseignement élémentaire et au degré de rigueur et de précision qui lui convient ne peut expliquer l'absence, par exemple, du théorème des valeurs intermédiaires, du critère de Cauchy, de la définition de la limite.

En fait, quelque soit la signification de cette préface, il nous faut surtout constater l'affirmation selon laquelle Jordan a renvoyé au Supplément tout ce qui pour lui ne fait pas partie "*des principes généraux du Calcul infinitésimal*", c'est-à-dire, d'après notre étude, les notions ayant trait aux ensembles de points ainsi que la construction des réels et les théorèmes les plus élémentaires sur les fonctions continues et dérivables dont il ne donne dans 1882 aucun énoncé satisfaisant.

L'étude de cette préface et du tome de 1882 pose en fait la question suivante : quelles sont les exigences minimales auxquelles doit satisfaire un traité d'analyse, "élémentaire", vers 1880 ?

Cette question fut longuement débattue par Darboux et Houël dans une série de lettres des années 1874 et 1875 que nous donnons dans l'annexe.

Darboux, comme nous l'avons vu dans la partie précédente, conteste les énoncés de Houël dont il prouve l'insuffisance en multipliant les contre-exemples. Houël rejette ces objections, répondant qu'il ne se préoccupe en aucune façon de ces fonctions, et qu'il n'envisage dans son cours que les fonctions "*naturelles*" pour lesquelles, alors, toutes les démonstrations qu'il donne, marchent.

Darboux précise alors l'enjeu de leur discussion dans la lettre du 24 janvier 1874 :

"Vous me demandez en quoi pêche la démonstration que vous insérez d'après Duhamel à la page 69 de votre traité. Avant de vous répondre je vous demanderai si dans l'ouvrage que vous voulez publier vous avez l'intention de faire comme plusieurs qu'il serait facile de nommer et de donner des quasi théorèmes qui sont généralement vrais mais qui peuvent être faux. Ou bien si vous avez l'intention tout en vous bornant aux fonctions les plus élémentaires d'énoncer d'une manière précise les restrictions et les hypothèses sur lesquelles s'appuient tous les théorèmes. En un mot voulez-vous introduire dans le Calcul infinitésimal la rigueur de la géométrie ou vous contentez-vous d'à peu près comme beaucoup de personnes. Dans ce dernier cas vous ne seriez pas un élève de Duhamel et par conséquent je pense qu'avant tout vous devez tenir à la rigueur".

Comme Houël prend alibi du niveau des élèves auxquels il s'adresse, Darboux précise qu'il n'est pas question ici de ces fonctions "*drôlatiques*" auxquelles il ne s'intéresse pas plus que Houël.

"Il importe beaucoup que vos raisonnements soient justes et que si certains exemples mettent vos règles en défaut, vos élèves soient en mesure de dire pourquoi. Sans cela vous justifierez ceux qui prétendent comme La Gournerie, que le Calcul infinitésimal est une affaire d'expérience et qu'il est vrai parce jusqu'ici on n'a pas pu prouver le contraire. Remarquez bien que c'est là où vous en êtes" (lettre du 31 janvier 1875).

En fait, Darboux ne demande que d'exposer avec rigueur des propositions pour les fonctions les plus usuelles :

"Il importe peu que les théorèmes établis soient plus ou moins généraux, mais il importe beaucoup d'habituer les jeunes gens à raisonner juste et c'est une condition à laquelle ne me paraît pas satisfaire votre exposition des principes du Calcul infinitésimal" (lettre du 24 janvier 1875).

"Je crois que vous pouvez fort bien avec des définitions convenables écarter les fonctions singulières. Sans cela rien ne serait possible. Il y en a de ces fonctions qui sont si bizarres qu'elles mettraient le Bon Dieu lui-même en défaut" (lettre du 26 février 1876).

Il rejoint ainsi le point de vue que Mittag Leffler exprime dans une lettre du 14 octobre 1881 à Charles Hermite :

"Les choses que vous me dites sur l'enseignement des mathématiques m'ont donné beaucoup à penser. Je me suis dit que vous lisez 30 à 40 heures pendant toute l'année et que M. Weierstrass lit 8 heures par semaine pendant les neuf mois de l'année. Vous avez créé en très peu d'années un nombre grand d'élèves vraiment supérieurs et M. Weierstrass n'a guère un seul élève qui soit vraiment un mathématicien hors de ligne. Alors c'est évident que vous avez plus de talent d'éveiller les génies mathématiques que M. Weierstrass. Mais il me paraît que votre méthode dans sa totalité soit tellement personnelle qu'elle ne peut pas être imitée par un autre. Sans votre génie c'est impossible de lire comme vous. Mais c'est très facile de lire comme M. Weierstrass si on a seulement suffisamment approfondi ses idées.

C'est vrai que les erreurs ont profité à la Science mais alors on a été naïf et on croyait à l'erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c'est une erreur. Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée quand vous savez que c'est faux ? Monsieur Serret dans la nouvelle édition de son Calcul intégral a tout un système de démonstrations qui sont toutes fautives. Et il n'en dit pas un mot. Mais ce n'est pas plus difficile de donner des démonstrations correctes. Je ne crois pas non plus qu'il soit juste de regarder le système de Weierstrass comme compliqué. C'est au contraire simple et naturel en même temps que rigoureux, mais c'est vrai qu'il faut beaucoup de temps pour le développer".

La conception que défend ici Mittag Leffler se retrouve dans les cours de Weierstrass; Mittag Leffler était d'ailleurs un de ses élèves. Dans son cours de 1874 qu'il considérait comme un enseignement propédeutique préparatoire à son enseignement sur la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, Weierstrass s'explique, au cours d'une de ses leçons sur sa façon de procéder ([18], 67) :

"Les principales difficultés de l'analyse supérieure viennent précisément d'une représentation floue et pas assez détaillée des notions de base et des opérations arithmétiques".

Il semble en fait, que là soit la différence entre les traités français que nous avons étudiés et les traités de Dini et de Peano, premiers exemples de la nouvelle "génération" de traités d'analyse qui prendront en compte les fondements de l'analyse.

C'est d'ailleurs ce que relève Tannery dans sa critique du livre de Genocchi-Peano déjà cité ([55]) (cf 2.4) .

"De même encore, dans ses Notes nombreuses placées en tête du livre, il précise les conditions exactes sous lesquelles sont applicables certains théorèmes qu'il démontre dans le courant de l'ouvrage : en un mot, il recherche surtout la précision, soit dans les énoncés, soit dans les démonstrations. On aime à voir ces notions bien définies se substituer dans l'enseignement aux notions trop vagues que l'on y rencontre parfois".

3.5. La préface de la deuxième édition

En 1893, Jordan écrit une nouvelle préface pour la deuxième édition de son traité. Il revient à cette occasion sur les choix qu'il fit à propos du contenu du tome de 1882. Il écrit ([35]) :

"Dans la précédente édition, où nous tenions à conserver toute la simplicité possible, nous avons glissé un peu rapidement sur ces premiers principes, qui ont été récemment l'objet d'études approfondies de la part des géomètres les plus éminents. Notre but actuel est un peu différent : nous les exposons avec toute la précision et la généralité que nous avons pu".

Ainsi, il apparaît qu'en dix ans Jordan change radicalement de conception dans l'exposé des principes généraux du calcul infinitésimal. Les exigences d'un enseignement élémentaire, le degré de "précision" et de rigueur que Jordan juge nécessaire à l'exposition des principes de l'analyse, ont en fait évolué au rythme de sa conception de l'analyse et de l'intérêt croissant qu'il porte au mouvement de mise sur pied des fondements.

Nous verrons dans la partie suivante que l'évolution de Jordan dont témoigne la préface de 1893 n'est qu'un exemple parmi d'autres dans une France elle-même en pleine évolution sur ces questions.

Jordan est alors plus proche des conceptions de Darboux ou de Mittag Leffler que de celles qu'expose Ph. Gilbert dans une lettre de juillet 1885 envoyée à Jordan et conservée à l'Ecole Polytechnique :

"Je m'occupe en ce moment de la révision des principes du Calcul infinitésimal pour une nouvelle édition, ce qui me donne l'occasion de rencontrer des questions que vous voulez bien m'indiquer. Assurément vous savez mieux que personne ce qui peut rester imparfait dans les principes de votre ouvrage, au point de vue de la rigueur; cependant si je remarque quelque chose de particulier, je ne manquerai pas de répondre à votre désir. L'ouvrage de M. Peano me paraît sous ce rapport, un des meilleurs qui aient paru; mais je préfère votre plan, qui consiste à rejeter dans un volume final la discussion de certains points trop ardu pour les commençants. Quant à la théorie des nombres irrationnels qui intervient forcément au début, la théorie de Dedekind-Thomae-Heine ne me paraît pas très satisfaisante".

En effet comme nous le verrons lors de notre étude du tome de 1893, dans la cinquième partie, *"les points trop ardu pour les commençants"* seront intégrés dans le corps même de l'ouvrage et longuement développés, au lieu d'être rejetés en fin de volume; cela, car Jordan les estime, alors, indispensables à la formation des étudiants et à la bonne compréhension et utilisation du calcul différentiel et intégral.

Nous verrons, dans la partie suivante, que l'utilisation dans plusieurs domaines de l'analyse des découvertes de Cantor et des travaux sur les principes de l'analyse à partir de 1885 y est pour une grande part.

A partir de 1885 également, Jordan succède à Risal à la direction du *Journal de Mathématiques*. Cette charge de directeur d'un journal mathématique telle qu'elle apparaît dans la correspondance entre Houël et Darboux, dut permettre à Jordan de se tenir au courant de l'actualité des publications, mémoires et articles qui paraissaient.

Ainsi, dans sa préface, Jordan évoque des études récentes et approfondies des géomètres les plus éminents sur les principes du calcul différentiel et intégral. L'école italienne par exemple publiée à partir de 1880, Cantor est publié en français à partir de 1883, plusieurs mathématiciens utilisent dans leurs travaux les recherches sur les fondements (Poncairé sera un des premiers en 1885) (cf 4.1).

Mais nous avons pu constater, avec l'étude menée dans notre première partie, que l'essentiel des travaux sur les fondements que Jordan reprendra dans son tome de 1893, est antérieur à 1882 donc à la parution de la première édition du traité.

En fait, les deux préfaces des deux premières éditions du traité de Jordan, qui correspondent à deux contenus différents en ce qui concerne les fondements, traduisent l'évolution des conceptions de Jordan sur l'analyse et ses fondements, et par conséquent sur son enseignement, en dix ans.

4. UNE PREMIERE ETAPE, EN FRANCE, DANS LA PRISE EN COMPTE DES NOUVEAUX FONDEMENTS DE L'ANALYSE : LA NOTE DU TOME DE 1887.

4.1. Une situation nouvelle à partir de 1885

En 1883, Mittag Leffler écrit à Cantor pour lui proposer de laisser traduire en français les mémoires : *Sur les ensembles infinis et linéaires de points* et *Sur une propriété de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels* et de les faire paraître dans le tome 2 des *Acta Mathematica*.

Il lui en donne les raisons suivantes ([17], 153) : alors qu'en Allemagne seul Weierstrass (ou presque) comprend et s'intéresse à ses travaux, il n'en serait pas de même en France où "*existe actuellement dans le monde mathématique un mouvement très intense et animé*". Ces mathématiciens (il s'agit de Poincaré, Picard, Appell et Hermite), qui comprennent très mal l'allemand, "*seront intéressés au plus haut point par vos découvertes précisément parce qu'ils ont maintenant besoin de telles recherches et parce qu'ils se sont heurtés dans leurs beaux travaux de la théorie des fonctions, à des difficultés qui ne pourront être surmontées que par vos travaux*".

Il semble que ce jugement très perçant de Mittag Leffler soit contredit par les réactions de ces mathématiciens français, dont Hermite rend compte dans des lettres à Mittag Leffler dont P. Dugac a publié des extraits ([17]).

Dans une lettre du 13 avril 1883, Hermite écrit :

"L'impression que nous ((Hermite, Appel, Picard et Poincaré)) produisent les mémoires de Cantor est désolante; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont susceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un intérêt actuel; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre" (A propos de la traduction de *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* (*Acta math.*, 2 (1883), 336-348)).

Poincaré cependant, d'après la lettre du 20 mars 1883, a une attitude différente : "Poincaré, en les jugeant bien prématurés dans l'état actuel de l'analyse, croit comme vous qu'elles ont de l'importance".

Cela sera confirmé par Mittag Leffler, lorsqu'il signale à Cantor dans une lettre du 28 décembre 1883 ([17], 159) que Henri Poincaré utilise ses recherches dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens* ([49], en particulier page 78.

Ceci, qui confirme le jugement de Mittag Leffler du 10 janvier 1883, est l'amorce d'une nouvelle période en France pour le mouvement de mise sur pied des fondements de l'analyse.

Dans l'année 1874 Cantor séjourne à Paris et a l'occasion de rencontrer Hermite, Poincaré, Appell et Picard. Il semble que ces rencontres aient permis aux Français de saisir l'importance des recherches de Cantor, ainsi que l'écrit E. Picard à Mittag Leffler dans une lettre de mai 1884 ([17], 159) :

"Quelques jours avant mon départ pour l'Ecosse, j'ai eu ici la visite de M. Cantor; c'est un bien aimable homme, dont la conversation m'a extrêmement intéressé. Je vous avoue qu'au début les spéculations de Cantor m'avaient paru sans intérêt, si ce n'est au point de vue philosophique; je commence à croire maintenant que tout cela pourra avoir des applications en analyse : quelques uns de ses théorèmes sur les séries trigonométriques, où il est question des points du premier genre, m'ont extrêmement frappé. N'allez-vous pas aussi publier bientôt quelque chose sur ces questions, cela va achever de me convertir aux ensembles de points".

Ainsi, une des limites majeures des travaux sur les fondements, à savoir cette inutilité que signalait Lebesgue ([39], 15) commence à être levée.

Ces recherches vont pouvoir sortir de leur marginalité et être prise en compte, petit à petit, par les mathématiciens français. Il ne faudrait pas croire, cependant, que l'évolution va être brutale et rapide. Ainsi, à propos de la théorie des ensembles de Cantor, Tannery écrit en 1883 ([59], 249) :

"Il est impossible, à l'heure actuelle, de savoir si les développements considérables que ce géomètre a tirés de quelques idées simples ont une autre valeur que leur intérêt propre; mais l'importance philosophique de ces idées, quand on veut établir les principes de l'analyse, sans faire appel à aucune idée étrangère, n'est pas douteuse".

Différents comptes-rendus de cours d'analyse que fit Tannery pour le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, ainsi que son propre traité sont des manifestations supplémentaires d'une évolution sur les questions des fondements en France, à cette époque.

En effet, dans la note sur le livre de Genocchi-Peano parue en juillet 1885 ([55], 171), Tannery souligne l'effort de Peano qui recherche la précision dans les énoncés ou les démonstrations et *"se préoccupe de l'origine des notions que l'on rencontre au début des mathématiques"*(cf 2.4 et 3.4).

Par contre dans la critique du tome de 1882 du cours de Jordan, Tannery ne relève à aucun moment les faiblesses des premiers chapitres, ni la démarche de Jordan qui néglige tout ce qui a trait aux fondements de l'analyse. C'est cette prise en compte des notions de base de l'analyse que Tannery saluera dans le compte-rendu qu'il fit du supplément au tome de 1887 du cours de Jordan ([58]).

C'est également celle-ci qui fait le mérite et l'originalité de son traité, en France, en 1886.

Il reprend dans son *Introduction à la théorie des fonctions* des leçons faites à l'Ecole Normale en 1883. Il serait intéressant, vu le contenu de ce livre sur les questions des fondements, de consulter, s'il en existe, des notes manuscrites de ces cours et de les comparer au texte publié trois ans plus tard. On ne trouve malheureusement aucune trace de ces cours à la bibliothèque de l'Ecole Normale de la rue d'Ulm.

4.2. La préface au traité de Tannery

Contrairement à Jordan et les autres auteurs français que nous avons étudiés dans la partie précédente, Tannery expose dans sa préface à *l'Introduction à la théorie des fonctions* les nouvelles conceptions sur les fondements de l'analyse.

Sa conclusion illustre d'ailleurs le reste de son propos et est caractéristique, pour une part, de la nature des nouveaux traités d'analyse :

"Mon but n'était pas d'écrire un Traité de calcul différentiel et intégral; j'ai glissé sur les procédés de calcul, en insistant sur les théorèmes généraux".

Tannery prend ainsi à son compte tout l'acquis des recherches sur les fondements en les situant dans l'évolution de l'analyse au dix-neuvième siècle :

"Les faits mathématiques qui constituent et constitueront toujours les éléments de l'Analyse étaient acquis pour la plupart au commencement de ce siècle; à la vérité bien des démonstrations laissaient à désirer; mais, après les exemples de rigueur donnés par Gauss, après les travaux de Cauchy, d'Abel, de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de M. O. Bonnet, de M. Heine, après l'enseignement de M. Weierstrass, divulgué et développé par ses disciples, après le mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, les livres de M. Dini et de M. Lipschitz, il ne semble pas qu'il reste quelque chose d'essentiel à élucider dans les sujets auxquels je me suis borné".

Précisant le plan suivi dans ses leçons, il montre là encore la rupture entre son traité et les précédents :

"Avant de parler des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable, j'ai donné quelques théorèmes généraux relatifs aux fonctions d'une variable : je me suis efforcé de préciser les définitions, d'éclaircir les notions de continuité, de limites supérieure et inférieure. J'ai fait grand usage, dans ce chapitre et ailleurs, du beau mémoire de M. Darboux Sur les fonctions discontinues".

Nous étudierons quelques paragraphes de ce cours après l'étude du Supplément de 1887 de Jordan, afin de mieux en saisir toute l'importance.

Il nous semble cependant intéressant de donner ici certaines des remarques que Tannery formula sur ce cours de 1886, dans la préface à la deuxième édition qui parut en 1904.

Tannery déclare tout d'abord, ce dont nous nous servirons pour l'étude du tome de 1893 de Jordan, avoir profité de "*l'exemple qu'a donné Camille Jordan dans son cours d'analyse (la deuxième édition)*". Il écrit ensuite à propos de la théorie des ensembles de Cantor :

"Il m'a paru aussi que j'avais été beaucoup trop timide en parlant des ensembles; je m'étais borné à des indications par trop discrètes, sans mettre suffisamment en lumière le rôle vraiment fondamental que cette notion doit tenir dans une exposition logique de l'analyse; elle est, à ce que je crois, aussi essentielle et plus primitive que celle de limite, qui lui est d'ailleurs liée étroitement".

D'autre part il fait remarquer qu'il eut peu de recours au langage et aux figures géométriques dans les raisonnements de peur qu'on crut qu'"il ne cachait quelque trou, impossible à combler avec les seules ressources de la logique". Il ajoute : "Aujourd'hui les craintes de cette sorte me paraissent puériles".

4.3. Le Supplément au tome de 1887

En 1887 sort le troisième tome du cours d'analyse de Camille Jordan : *Intégration des équations différentielles et éléments de calcul des variations*. A la fin de ce tome, Jordan fait figurer le Supplément annoncé en 1882, la *Note sur quelques points de la théorie des fonctions*.

Jules Tannery la résume ainsi dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* ([58]) :

"Il nous reste à parler de l'Appendice par lequel M. Jordan a terminé son bel Ouvrage. Il se rapporte aux points délicats de la théorie des fonctions d'une variable réelle et d'une variable imaginaire. Ces points n'avaient pas été touchés dans le premier Volume et, par suite, quelques démonstrations prêtaient à des objections,

qu'il est facile de lever en introduisant quelques notions, qui sont aujourd'hui familières à tous les géomètres. Ce sont ces notions que M. Jordan commence par rappeler : il débute par le concept de nombre irrationnel, fondement nécessaire de l'idée de limite; les notions de continuité, de limites supérieure et inférieure sont précisées avec une entière rigueur; elles suffisent à établir un théorème de M. Darboux relatif à l'intégration des fonctions discontinues, et à en déduire les conséquences essentielles, relatives aux fonctions intégrables. L'auteur passe de là à la définition des fonctions à variation limitée : on sait le parti qu'il a tiré de cette notion dans ses belles recherches sur la série de Fourier. Les propriétés des fonctions continues de ne pouvoir changer de signe qu'en s'annulant et d'atteindre leurs limites supérieure et inférieure dans un intervalle donné permettent d'établir rigoureusement le théorème de Rolle sans supposer la continuité de la dérivée. M. Jordan signale l'exemple que l'on doit à M. Weierstrass d'une fonction continue qui n'a point de dérivée et montre que cette fonction a une variation illimitée dans tout intervalle. Enfin la notion de fonction implicite est exposée, dans toute sa généralité, avec les détails qui conviennent".

Nous citons également la suite qui concerne la notion de courbes :

"M. Jordan passe ensuite à la notion de courbe continue, considérée comme l'ensemble des points représentés par les équations
$$x=f(t), y=\varphi(t),$$

où f et φ sont des fonctions continues de la variable t ; si la courbe est fermée sans point double, elle partage le plan en deux régions dont l'une est dite intérieure et l'autre extérieure à la courbe : cette proposition, que l'on admet habituellement, est assez malaisée à établir lorsqu'on ne veut pas faire appel à l'intuition géométrique; mais il semble bien que l'auteur ait eu raison de s'y arrêter, puisqu'il est impossible de se représenter une courbe avec tout le degré de généralité qu'il a voulu conserver".

Tannery continue le résumé de cette Note en évoquant les fonctions d'une variable imaginaire.

Nous nous attacherons ici à l'étude des divers paragraphes énumérés par Tannery.

Dans la partie de cette Note de 65 pages qui traite des fondements de l'analyse réelle, Jordan semble répondre aux objections que Peano avait formulées à propos du tome de 1882. Il ajoute et corrige de nombreuses démonstrations de propriétés jugées immédiates dans le tome premier du traité.

Cependant, nous pourrions constater dans cette Note des limites qui, pour l'essentiel, sont mises en relief par l'étude du premier tome de 1893 de la deuxième édition.

Notons tout d'abord, avant toute étude détaillée du contenu de la Note, qu'il n'y a aucun développement sur les ensembles; d'autre part, les démonstrations qui ont certes le mérite d'exister sont presque toutes lacunaires et Jordan n'en reprendra aucune dans son tome de 1893.

Nous analyserons donc les paragraphes de cette Note en les comparant au contenu, soit du tome de 1882, soit du tome de 1893 dont nous étudierons ici certains passages; nous pensons ainsi pouvoir souligner tout à la fois l'évolution de Jordan sur la question des fondements entre 1882 et 1887 et, grâce à la référence au tome de 1893, les limites de celle-ci.

4.3.1. Les irrationnels dans les tomes de 1887 et de 1893

Cette note débute par la construction des nombres irrationnels dont Peano avait souligné l'absence dans le tome de 1882.

Jordan les définit de la même façon que Dedekind en 1872 dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Il y a cependant de nombreuses lacunes et maladresses dans l'étude des nombres réels qui suit cette définition, lacunes qui vont avoir des répercussions malheureuses sur la démonstration d'une "propriété-clé" à savoir le critère de Cauchy.

La comparaison avec les paragraphes de la deuxième édition de 1893 les met encore plus en valeur. Aussi, mènerons-nous de front l'étude des nombres irrationnels dans les éditions de 1887 et de 1893, cette dernière témoignant d'une maîtrise que Jordan ne possède manifestement pas encore en 1887.

Nous pouvons déjà constater la différence dans l'énoncé des conditions auxquelles doivent satisfaire deux suites illimitées de rationnels pour définir un nombre réel :

Note de 1887 :

"Soient $a_1, \dots, a_n, \dots$ et $b_1, \dots, b_n, \dots$ deux suites illimitées de nombres irrationnels, tels que l'on ait
 (I) $a_n \geq a_m, b_n \leq b_m$, si $n \geq m$,
 $b_n - a_n < \epsilon_n$,
 ϵ_n devenant moindre que toute quantité donnée lorsque n augmente indéfiniment".

Tome de 1893 :

"Soient A et B deux systèmes de nombres rationnels jouissant des propriétés suivantes :

- 1°. Tout nombre de B est plus grand que tout nombre de A;
- 2°. On peut toujours déterminer dans A et B respectivement deux nombres a et b tels que l'on ait $b - a < \epsilon$, quelque soit le nombre positif ϵ , donné a priori".

Mais les différences entre les deux éditions sont plus fondamentales en ce qui concerne les définitions de l'ordre et des quatre opérations sur R .

Citons en effet le passage de la Note de 1887 sur l'addition et la soustraction :

"Soient C et C' deux nombres déterminés respectivement par les couples de séries

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_n, \dots; \quad b_1, \dots, b_n, \dots; \\ \text{et } a_1', \dots, a_n', \dots; \quad b_1', \dots, b_n', \dots; \end{array}$$

Formons les couples de séries

$$a_1 + a_1', \dots, a_n + a_n', \dots; \quad b_1 + b_1', \dots, b_n + b_n', \dots;$$

$$\text{et } a_1 - b_1', \dots, a_n - b_n', \dots; \quad b_1 - a_1', \dots, b_n - a_n', \dots;$$

Ils jouiront évidemment des mêmes caractères que les couples primitifs et définiront deux nouveaux nombres, respectivement égaux à $C+C'$ et $C-C'$ si C et C' sont rationnels. Nous étendrons cette propriété par voie de définition au cas où ces nombres sont irrationnels".

Tout d'abord, Jordan ne prouve pas que les nouveaux couples de séries vérifient les conditions (I). Si cela est aisé à démontrer dans le cas de l'addition et de la soustraction, il n'en est pas de même pour la multiplication et la division, ainsi que le montre la démonstration minutieuse qu'en fait Jordan dans [35], paragraphes 5 et 6.

D'autre part il s'agit de montrer, pour pouvoir effectivement travailler sur les réels, que la soustraction et la division sont les opérations inverses respectivement de l'addition et de la multiplication, ce que Jordan ne fait d'aucune façon en 1887.

Jordan le démontre par contre en 1893, et se sert d'une propriété qu'il ne signale ni ne démontre dans le tome de 1887, concernant la structure de l'ensemble des réels ([35], 5) :

"La soustraction est d'ailleurs l'opération inverse de l'addition, de telle sorte que le nombre $(c-c')+c'=c_1$ n'est autre que c . Pour le montrer, nous prouverons que tout nombre rationnel $\succ c$ est $\succ c_1$, et réciproquement.

Les nombres $\succ c$ sont ceux qui sont plus grands que l'un des nombres b , les nombres $\succ c_1$ ceux qui sont plus grands que l'un des nombres $b-a'+b'$.

Or, tout nombre x $b-a'+b'$ est a fortiori $\succ b$, car $b' \succ a'$.

D'autre part, si $x \succ c$, on pourra déterminer entre x et c une infinité de nombres rationnels encore $\succ c$. Soit $x-\xi=b$ l'un d'eux; on aura $x \succ b-a'+b'$, si l'on choisit a' et b' de telle sorte que $b'-a'$ soit $< \xi$ ".

Jordan utilise donc dans sa démonstration la propriété suivante :

"Si un rationnel r est plus grand qu'un réel c , il existe une infinité de nombres rationnels compris dans l'intervalle de c à r ".

Il la démontre dans un paragraphe précédent ([35], 3) en même temps que celle-ci :

"Entre deux nombres rationnels quelconques r et r_+ , il existe nécessairement un nombre irrationnel (et par suite une infinité)".

Dans ce paragraphe essentiel de 1893 qui est consacré à l'étude de l'ordre sur R , Jordan donne la définition suivante :

"On dira qu'un nombre réel c est plus grand qu'un autre nombre réel c' , s'il existe un nombre rationnel r qui soit c et c' ".

Par contre dans le tome de 1887, aucune étude de l'ordre sur R n'est menée. Jordan donne seulement la définition :

"On dira que c est égal à c' , plus grand que c' ou plus petit que c' , suivant que $c-c'$ sera nul, >0 ou <0 ".

Il affirme ensuite : *"l'on peut ajouter, retrancher en croix des inégalités"* ([33], 551).

Enfin ces paragraphes sur les irrationnels se terminent dans le tome de 1887 comme dans celui de 1893 par la proposition fondamentale ([33], 551) :

"Soient $a_1, \dots, a_n, \dots$ et $b_1, \dots, b_n, \dots$ deux suites de nombres rationnels ou non, satisfaisant aux relations (I). Il existera toujours, dans la série des nombres que nous avons définis, un nombre $c > a_n$ et $< b_n$, quelque soit n ".

Seulement, la démonstration de cette propriété sur les suites adjacentes de réels qui se fait par la construction de deux suites de rationnels définissant ce nombre c , utilise les propositions et la définition de l'ordre sur les réels que Jordan donne en 1893 mais non en 1887.

Ainsi si la démonstration de 1893 est rigoureuse et exacte, celle de 1887 est non seulement trop rapide, mais lacunaire.

Les conséquences en sont importantes. En effet cette proposition est indispensable à la démonstration du critère de Cauchy et de toutes les propriétés sur les limites, la borne supérieure d'un ensemble et les fonctions continues que Jordan donne dans ce Supplément.

4.3.2. Les paragraphes sur les limites

. Le critère de Cauchy

Jordan définit enfin, dans ce Supplément, la limite d'une suite :

"Soit x une quantité variable, à laquelle on donne successivement une suite illimitée de valeurs $x_1, \dots, x_n, \dots$. On dit que la variable x tend ou converge vers la limite c si, pour toute valeur de la quantité positive ϵ , on peut assigner une autre quantité N , telle que l'on ait

$\text{mod}(x_n - c) < \epsilon$

pour toutes les valeurs de n supérieures à N ".

La définition sera la même dans le tome de 1893; la seule modification sera en effet d'écrire $|x_n - c| < \epsilon$ au lieu de $\text{mod}(x_n - c) < \epsilon$.

Il donne toute sa place, d'autre part, au critère de Cauchy qu'il énonce comme théorème et qu'il démontre :

"La variable x tendra vers une limite finie, si les différences $x_{n+1} - x_n, \dots, x_p - x_n, \dots$ sont toutes inférieures en valeur absolue à une quantité variable ϵ_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment".

A cet effet, considérant une suite de Cauchy de réels, il construit deux suites adjacentes de réels qui définissent donc un réel c , ce réel étant la limite de la suite de Cauchy.

Le critère de Cauchy et sa démonstration dépendent donc directement de la construction des réels. Les insuffisances de celle-ci dans le tome de 1887 et les lacunes dans les démonstrations qui s'y rattachent, dont celle sur les suites adjacentes justement, se repercutent ainsi sur la démonstration du critère de Cauchy.

Quoique cette démonstration soit juste, on ne peut pas dire que dans le Supplément Jordan ait démontré le critère de Cauchy de façon entièrement satisfaisante (il le fera par contre en 1893).

A la suite de la démonstration, Jordan ajoute un paragraphe dans lequel il signale qu'il s'est implicitement servi du critère de Cauchy à plusieurs endroits dans les tomes de 1882 et de 1883 :

"Nous nous sommes appuyé sur cette proposition en plusieurs endroits de cet Ouvrage (tome 1, n° 109, 261, 323; tome 2, n° 54, etc), en la considérant comme suffisamment évidente par elle-même; mais on voit qu'elle peut se ramener aux autres axiomes".

De la même façon, à plusieurs reprises, Jordan critique précisément certains paragraphes des tomes précédents. Beaucoup de ses corrections seront des réponses aux critiques de Peano dans [45].

Jordan poursuit avec l'énoncé du corollaire suivant, corollaire du critère de Cauchy :

"Si la variable x va toujours en croissant, elle tendra vers une limite finie ou vers $+\infty$ ".

Jordan démontre cette proposition grâce à la négation du critère de Cauchy dans le cas où la suite ne tend pas vers une limite finie, en construisant une sous-suite qui tend vers l'infini.

C'est un des premiers exemples, dans cette première édition du traité, de démonstration "epsilonienne" établie avec un soin et une rigueur remarquables.

. Passage à la limite

"L'Arithmétique et l'Algèbre comportent quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. On peut en concevoir une cinquième, consistant à remplacer une quantité variable par sa limite. C'est l'introduction de cette nouvelle opération qui constitue l'essence de la méthode infinitésimale. Cette opération se présente d'ailleurs sous des formes variées, dont les trois principales sont : la sommation des séries, la dérivation et l'intégration".

Sous ce chapeau Jordan démontre, toujours avec autant de soin, des propriétés de cette cinquième opération, à savoir que la limite d'une suite dont le terme de rang n est la somme (le produit) des termes de rang n de deux suites convergentes est la somme (le produit) des limites des deux suites.

Rappelons à nouveau qu'aucune de ces propriétés n'avait été démontrée dans le tome de 1882.

4.3.3. Fonctions

Jordan revient, dans la Note de 1887, sur la définition d'une fonction. Il est intéressant de comparer sur ce point les tomes de 1882, 1887 et 1893. En effet les définitions en sont différentes dans les trois tomes.

Dans le Supplément de 1887 Jordan donne la définition suivante ([33], 554) :

"Soit x une variable indépendante, à laquelle on pourra assigner, soit toute la suite des valeurs possibles, soit un certain système de valeurs (...). Soit u une seconde variable, liée à x de telle sorte qu'à chaque valeur du système parcouru par x corresponde une valeur unique, finie et déterminée de u . On dira que u est une fonction de x (pour le système de valeurs que l'on considère)".

Il déclare que cette définition est "*plus nette et à certains égards plus générale que celle que nous avons donnée*" dans le tome 1 qui ne comporte aucune restriction sur les valeurs prises par u .

Il fait en effet remarquer que quoiqu' il ait considéré dans son traité des "*fonctions qui ont plusieurs valeurs pour chaque valeur de la variable ou qui deviennent infinies ou indéterminées pour certaines valeurs ((de la variable))*", il s'est toujours ramené au cas considéré dans cette définition. Ceci en considérant diverses branches de la fonction ou en établissant la distinction entre une fonction qui tend vers l'infini lorsque la variable tend vers un point en lequel la fonction n'est pas définie et les valeurs finies qu'elle prend effectivement en chaque point où elle est définie.

Il ne reste plus trace de ces considérations dans le tome de 1893 où la définition simplifiée devient ([35], 31) :

"Soit, au contraire, une nouvelle variable u , liée aux précédentes de telle sorte qu'à chaque point $(x, y, \dots)$ appartenant à un certain ensemble E corresponde une valeur déterminée de u . On dira que cette relation définit u comme fonction de $x, y, \dots$ dans l'ensemble E ".

Jordan conclut ce paragraphe de façon identique dans les tomes de 1887 et 1893. Il remarque que :

"Les valeurs d'une fonction y , correspondantes aux diverses valeurs assignées à x , peuvent être choisies d'une façon arbitraire et indépendamment les unes des autres. Par suite de cette excessive généralité, il est évidemment impossible d'établir aucune propriété générale s'étendant à toutes les fonctions sans exception; des hypothèses restrictives seront en effet nécessaires pour servir de base à un raisonnement quelconque".

Il se propose donc dans le tome de 1887 - nous verrons qu'il n'en est pas de même dans celui de 1893 - d'étudier successivement :

- les fonctions limitées;
- les fonctions intégrables;
- les fonctions à variation limitée;
- les fonctions continues.

Jordan commence ainsi à entreprendre l'étude des fonctions d'une variable réelle qu'il avait complètement négligée dans le tome de 1882. Rappelons qu'alors, ayant défini une fonction de la variable x et en ayant donné quelques exemples usuels, il ne consacre qu'une page aux fonctions continues pour entreprendre directement l'étude des dérivées et des différentielles (cf 2.3.5).

Notons enfin qu'avec l'introduction des irrationnels dans le Supplément Jordan a à sa disposition, pour le traité, un éventail de fonctions nouvelles dont il va d'ailleurs se servir dès le paragraphe suivant.

Il s'agit des fonctions définies par une certaine relation sur les rationnels et par une autre sur les irrationnels.

Le premier exemple du traité qui se trouve à la page 557 du Supplément est celui d'une fonction illimitée (non bornée) sur tout intervalle (a,b) , la fonction :

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{si } x \text{ est rationnel} \\ y &= (-1)^p q, \text{ si } x = p/q, p/q \text{ étant une fraction irréductible.} \end{aligned}$$

L'usage de ces fonctions étaient loin d'être reconnu par l'ensemble des mathématiciens, encore en 1887, comme le montre par exemple cette citation extraite du cours de J. Tannery ([56], 100) :

"Une fonction y de x est définie dans l'intervalle (a,b) si à chaque valeur de x appartenant à cet intervalle correspond une valeur déterminée de y .

La notion de fonction, ainsi étendue, est extrêmement générale; elle paraîtrait autoriser l'introduction de fonctions à définition tout à fait arbitraire : ainsi, ce serait définir une fonction dans l'intervalle $(2,3)$ que de convenir qu'on prendra $y=x$ pour toutes les valeurs rationnelles de x qui appartiennent à cet intervalle et $y=1/x$ pour toutes les valeurs irrationnelles.

En procédant ainsi, on risquerait singulièrement d'introduire des fonctions qui n'offriraient aucun intérêt aux géomètres; les fonctions dont l'étude s'est trouvée féconde n'ont pas été construites arbitrairement : dans le développement de la science, elles se sont présentées de façon nécessaire".

En 1892, dans une lettre adressée à Jordan et conservée à l'Ecole Polytechnique, Paul Mansion remet en cause leur qualité de fonctions. Il considère qu'on a à faire dans ce cas à deux fonctions distinctes et que, de fait, toute fonction est continue en un point rationnel.

. Le théorème de la borne supérieure pour les fonctions limitées

Le théorème central de ces paragraphes est le "théorème de M. Darboux" dans lequel Jordan démontre la convergence, pour les fonctions limitées (ou bornées), des "sommes de Darboux" vers les intégrales par excès et par défaut, ce qui permet d'introduire la notion de fonction intégrable et de définir l'intégrale de fonctions discontinues.

L'introduction de cette notion, dans son cours de calcul différentiel et intégral, est une preuve manifeste de l'évolution de Jordan quant aux choix du contenu de son traité. Il met ainsi au premier plan l'étude de fonctions qui peuvent ne pas être continues et admettre par exemple une infinité de points de discontinuité.

C'est un premier pas dans la prise en compte pour son enseignement des transformations de l'analyse. Il n'écarte pas comme en 1882 toute fonction qui n'est pas à la fois continue et dérivable.

Le théorème de Darboux ne nous intéresse ici, vu les limites de notre étude, que dans la mesure où sa démonstration implique l'existence du maximum et du minimum d'une fonction limitée.

Ainsi, et c'est une conséquence de l'introduction des irrationnels, Jordan introduit dans cette partie le concept fondamental de borne supérieure; cela, toutefois, de façon implicite, car, ne traitant toujours pas des ensembles de réels, il n'énonce à aucun moment le théorème sur la borne supérieure d'un ensemble majoré.

Il démontre en fait le théorème suivant dans lequel on retrouve la caractérisation de la borne supérieure :

"Si une fonction y est limitée supérieurement (inférieurement) on pourra déterminer un nombre M , tel que y ne puisse prendre aucune valeur supérieure (inférieure) à M , mais que l'une au moins de ses valeurs soit supérieure à $M - \epsilon$ (inférieure à $M + \epsilon$), ϵ étant une quantité d'une petitesse arbitraire".

Nous avons, avec la démonstration de ce théorème, le premier exemple de raisonnement topologique dans le traité de Jordan.

Jordan construit, par le principe de division des intervalles en n parties égales, n croissant indéfiniment, une suite croissante de valeurs de y et une suite décroissante de majorants qui forment un couple de suites adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, ces deux suites définissent un nombre M , et M vérifie les conditions de l'énoncé.

Il n'y a rien à redire à cette démonstration, la seule réserve étant l'utilisation du théorème sur les suites adjacentes dont la démonstration est lacunaire.

Jordan signale que ce maximum peut "suivant les circonstances" être effectivement atteint ou non. Il donne alors un deuxième exemple de fonction non classique :

$$y=x \quad (x>0<1), \quad y=0 \quad (x=1),$$

fonction qui a pour maximum 1, sans toutefois être jamais égal à 1.

. Fonctions intégrables

Dans ces paragraphes, Jordan s'inspire très probablement du mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues dans lequel il introduit l'intégrale de Riemann.

A côté des propriétés élémentaires des fonctions intégrables (somme, produit, inverses de telles fonctions), Jordan y donne les premiers résultats de la théorie des fonctions d'une variable réelle et prouve à quel point il élargit l'horizon des mathématiques abordées dans son traité.

Il commence par donner la condition pour qu'une fonction soit intégrable (les limites des sommes par excès et par défaut sont intégrables) et note ([33], 562) :

"La notion d'intégrale définie, que nous n'avions établie que pour les fonctions continues, se trouve ainsi étendue, avec les conséquences qui en résultent, à une classe de fonctions beaucoup plus générale".

Définissant l'oscillation d'une fonction, il donne une nouvelle condition d'intégrabilité :

"Si M_k et m_k sont les maxima et minima sur les intervalles partiels I_k , et ε_k l'oscillation égale à $\delta_k = M_k - m_k$, la condition d'intégrabilité est

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum \delta_k I_k = 0 \text{ " .}$$

Il étudie alors le rapport entre fonction intégrable et fonction continue, développant ainsi la remarque précédente.

Il démontre d'une part que

"Si la fonction est intégrable dans l'intervalle x X , il existe dans tout intervalle ab contenu dans celui là des valeurs de x pour lesquelles y est continue",

et, d'autre part, à l'aide d'un contre-exemple, qu'il existe des fonctions intégrables qui ont, dans tout intervalle, une infinité de points de discontinuité.

Jordan démontre la première proposition en construisant à nouveau, à l'aide des extrémités d'une suite d'intervalles emboîtés (a_m, b_m) dans lesquels l'oscillation de la fonction est moindre que $\delta/2^n$, δ étant une quantité quelconque, deux suites adjacentes dont la limite commune est un point où la fonction est continue.

Il s'agit, là encore, d'un raisonnement de nature spécifiquement topologique, mené de façon rigoureuse, avec cependant toujours la même réserve concernant les suites adjacentes.

Jordan énonce enfin une propriété pour une classe de fonctions dont les propriétés étaient encore ignorées quoique leur importance particulière en analyse fut reconnue, les fonctions croissantes. Il démontre :

"Toute fonction y non décroissante de x_0 à X est intégrable dans cet intervalle".

. Fonctions à variation limitée

Jordan reprend et développe ici la note de 1881 aux *Comptes Rendus*, *Sur la série de Fourier* ([29]), dans laquelle il revient sur le mémoire de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier (cf 3.2).

Jordan démontre en fait que "*la démonstration de Dirichlet est applicable sans modification, à toute fonction dont l'oscillation est limitée de $x=0$ à $x=\xi$, ξ étant une quantité finie quelconque*". Il énonce quelques propriétés et donne un exemple de fonction à oscillation limitée, ayant, dans tout intervalle, une infinité de discontinuités.

Ce sont ces fonctions à oscillation limitée qu'il appelle dans le Supplément de 1887, fonctions à variation limitée et dont il démontre tout d'abord qu'elles peuvent se mettre sous la forme d'une différence de deux fonctions positives, limitées et non décroissantes, mettant à nouveau au premier plan cette classe de fonctions (cf 3.2).

Suivent alors plusieurs propriétés sur les fonctions limitées et leurs intégrales.

. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Jordan rappelle la définition d'une fonction continue en un point, en utilisant cette fois-ci les limites. Il ne reprend pas en effet, quoiqu'il l'utilise bien évidemment, la définition à l'aide des ξ et η .

Mais surtout, Jordan entreprend enfin une étude rigoureuse des fonctions continues; il énonce et démontre les propriétés essentielles des fonctions qu'il avait admises implicitement dans le premier tome.

Nous allons étudier en détail les démonstrations de ces théorèmes qui font toutes intervenir des propriétés liées à la construction des réels, et notamment de façon plus ou moins explicite, la propriété sur la limite de deux suites adjacentes.

Notons par ailleurs dans les énoncés des théorèmes, le manque de précision sur la nature de l'intervalle, qui est naturellement dans tous les cas un intervalle fermé borné.

Ceci se retrouve chez tous les auteurs, Dini compris, et dans l'édition du traité de Jordan de 1893. La notion d'intervalle fermé borné en opposition à celle d'intervalle ouvert n'apparaît que plus tard dans les énoncés de manuels.

Nous ne pouvons, ici, comparer les théorèmes du tome de 1887 avec ceux du tome de 1893; les énoncés sur les fonctions continues sont en effet donnés en 1893, comme nous le verrons, dans le cas de fonctions de R^n dans R (cf 5.5).

. Théorème des valeurs intermédiaires

Il s'agit tout d'abord du théorème des valeurs intermédiaires, présenté sous la forme :

"Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle de a à b ; si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, il existera un point c intermédiaire entre a et b , et pour lequel on a $f(c)=0$ ".

Avant d'examiner la démonstration, il faut souligner que Jordan n'en conclut pas l'énoncé explicite du théorème des valeurs intermédiaires, à savoir que si μ est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un point c intermédiaire entre a et b pour lequel on a $f(c)=\mu$, donc f prend dans l'intervalle (a,b) la valeur μ .

Il l'utilise cependant dans une autre démonstration sans référence au paragraphe que nous étudions, en le formulant ainsi ([33], 575) :

"Lorsque x varie de x_0 à X , la fonction continue passera par toute la série des valeurs intermédiaires entre y_0 et Y ".

Jordan démontre l'existence du point c en construisant à nouveau deux suites adjacentes dont c est la limite commune, cela à l'aide de la partition de l'intervalle (a,b) en n intervalles égaux, puis si f ne s'annule en aucune des extrémités des n intervalles, la partition en n nouveaux intervalles d'un des intervalles précédents aux extrémités duquel f prend des valeurs de signes contraires, et ainsi de suite.

Il termine la démonstration en prouvant grâce à la continuité de la fonction que, quelque soit ε , $f(c)+\varepsilon$ et $f(c)-\varepsilon$, encadrant deux valeurs de f de signe contraire, sont de signe contraire, donc que $f(c)$ est nul.

Le point délicat de la démonstration est, là encore, comme dans la démonstration du critère de Cauchy ou de l'existence de la borne supérieure pour une fonction limitée, l'existence du point c , limite des deux suites adjacentes.

La formulation de Jordan est dans ce cas-ci particulièrement ambiguë. Alors que dans les deux autres démonstrations Jordan vérifie explicitement que les deux suites qu'il vient de construire satisfont aux conditions appelées (I) dans notre paragraphe 4.3.1, pour les suites adjacentes, il note seulement ici :

"Continuons ainsi indéfiniment; les nombres croissants $a, a_1, a_2, \dots$ et les nombres décroissants $b, b_1, b_2, \dots$ convergeront évidemment vers une limite commune c ".

Cette démonstration, dans laquelle Jordan utilise une fois encore le principe essentiel de découpage des intervalles présente ainsi une lacune non négligeable qui rappelle les "évidemment" du tome de 1882 relevés par Peano dans [45], page 48 (cf 2.3.4).

Ajoutons une autre remarque. En découpant les intervalles en n intervalles égaux, Jordan en fait plus que nécessaire. Il obtient en effet deux suites (a_p) et (b_p) telles que

$$a_p - b_p < (b-a)/n^p.$$

Il suffisait de découper les intervalles en deux intervalles égaux à chaque étape et d'obtenir ainsi deux suites (a_p) et (b_p) telles que

$$a_p - b_p < (b-a)/2^p,$$

quantité qui tend également vers zéro quand n tend vers l'infini.

. Une fonction continue atteint ses bornes

Jordan démontre ensuite une propriété fondamentale des fonctions continues dont il s'est servi à plusieurs reprises, sans la démontrer dans les tomes de 1882 et 1883 :

"Toute fonction $f(x)$ continue entre a et b est limitée dans cet intervalle tant supérieurement qu'inférieurement, et atteint effectivement son maximum et son minimum".

Jordan démontre tout d'abord que $f(x)$ est "limitée" dans l'intervalle (a,b) , et il le démontre suivant le schéma maintenant classique, de décomposition de l'intervalle en n intervalles égaux.

Raisonnant par l'absurde, il suppose que $f(x)$ n'est pas limitée sur (a,b) , et choisit à chaque étape un intervalle dans lequel elle n'est pas limitée. Il obtient ainsi deux suites adjacentes dont la limite commune est c .

Il considère alors un intervalle centré autour de la limite commune c , choisi de telle sorte qu'il y ait contradiction entre la continuité de f dans cet intervalle et l'hypothèse retenue au début, ce choix étant explicité de façon tout à fait rigoureuse. Donc, f n'est pas illimitée sur (a,b) et admet un maximum.

Jordan ne détaille pas en entier la construction des deux suites adjacentes, identique à celle de la démonstration précédente. Il ne reprend pas non plus le malencontreux "évidemment" ce qui ne nuit en rien à sa démonstration.

Se servant de la propriété caractéristique du maximum M il construit deux suites adjacentes en découpant en n nouveaux intervalles, à chaque étape, l'intervalle pour lequel $f(x)$ prend des valeurs supérieures à $M-\varepsilon$, quelque soit ε . Il en déduit donc que $f(c) = M$; donc que f atteint en c son maximum.

. Continuité uniforme

"Toute fonction $f(x)$ continue entre a et b est uniformément continue dans tout cet intervalle" ([33], 573).

C'est dans le tome 2 à l'occasion de la définition des intégrales définies ([32], 52) que Jordan donne la définition de la continuité uniforme et, en note, renvoie au Supplément du tome 3 pour la démonstration de la propriété que nous venons d'énoncer.

Pour démontrer la continuité uniforme de f dans tout l'intervalle (a,b) , Jordan reprend la preuve de Cantor donnée par Heine dans [25].

Dini dans son traité ([15], 48) expose également la démonstration de Cantor, comme il le précise. La comparaison des démonstrations des traités de Dini et Jordan ne laisse aucun doute quant à leur origine commune.

Contrairement aux démonstrations actuelles Jordan n'utilise pas le raisonnement par l'absurde. ε étant donné, il considère $\eta(x)$ tel que, pour tout point x' de $[x-\eta, x+\eta]$ on ait :

$$f(x) - \varepsilon < f(x') < f(x) + \varepsilon;$$

donc, pour tout autre point x'' de l'intervalle,

$$\text{mod}(f(x'') - f(x')) < 2\varepsilon.$$

Puis il considère H , "le maximum des valeurs de η , telles que cette dernière propriété ait lieu dans tout intervalle de $x-\eta$ à $x+\eta$; H sera une fonction de x qui, par hypothèse, est toujours 0. Nous allons montrer que cette fonction est continue".

H étant continue, Jordan affirme ensuite qu'elle admet un minimum qu'elle atteint pour au moins une des valeurs de la variable.

Comme H n'est jamais nulle, M est positif et il conclut, puis-que $|f(x'') - f(x')| < 2\varepsilon$ dès que $|x'' - x'| < \mu$, μ ne dépendant pas de x .

La démonstration que donne Dini diffère légèrement de celle de Jordan dans la mesure où il utilise une propriété sur les limites supérieure et inférieure d'une fonction que Jordan ne donne pas dans son traité, la "propriété de Weierstrass" :

"Soit la borne supérieure de $f(x)$ dans (a,b) . Dans cet intervalle il existe toujours au moins un point x' tel que sur tout intervalle $(x'-\xi, x'+\xi)$, ξ étant arbitrairement petit, la limite supérieure de f soit encore λ " (Il est manifeste que (a,b) est fermé).

Dini n'a donc pas à montrer la continuité de $H(x)$.

Remarquons que Jordan admet implicitement l'existence du maximum H des valeurs de η . Dini, lui, renvoie au paragraphe dans lequel il prouve l'existence d'une limite supérieure pour un ensemble infini de réels bornés.

Comme il ne donne aucun énoncé sur les ensembles de réels, Jordan ne peut qu'admettre celle-ci.

Le dernier théorème que Jordan énonce à propos des fonctions continues dans ce Supplément est particulièrement important pour l'analyse de cette fin du XIXe siècle. Il démontre qu'une fonction continue à variation limitée dans un intervalle est la différence de deux fonctions continues non décroissantes.

Enfin Jordan conclut ces paragraphes avec le contre-exemple "emprunté à M. Weierstrass" d'une fonction continue mais non dérivable :

"Toute fonction y , qui a une dérivée dans l'intervalle de x à X , est évidemment continue dans cet intervalle; mais la réciproque n'est pas vraie ainsi que le montre l'exemple suivant, emprunté à M. Weierstrass.

Considérons la série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \cdot x)$$

où b est une constante positive < 1 et a un entier impair > 1 .

. Le théorème des accroissements finis

Rappelons que dans le tome de 1882 Jordan donne de ce théorème une démonstration lacunaire que critique Peano dans [45], faite sur l'ancien modèle de Lagrange et Cauchy.

Il s'en suit un échange de lettres au cours duquel Peano envoie à Jordan la démonstration moderne de la formule des accroissements finis à l'aide du théorème de Rolle.

C'est celle-ci que Jordan expose dans le Supplément, avec quelques modifications.

La première, de détail, concerne le théorème de Rolle dans lequel il raisonne sur le signe de $f(c+h)-f(c)$ à partir de la formule ([33], 581) :

$$f(c+h)-f(c) = h(f'(c)+\epsilon)$$

au lieu de la limite de

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

La seconde a trait au corollaire du théorème de Rolle qui permet de déduire la formule. Jordan n'utilise pas la fonction qui permet le plus simplement de trouver la formule.

Utilisant les déterminants, il montre que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}$$

et en déduit la formule en prenant $\varphi(x)=x$.

Jordan critique sa démonstration du tome de 1882 qui "*supposait inutilement la continuité de la dérivée $f'(x)$* "; il présente la remarque sur la convergence uniforme de

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

vers $f'(x)$ que Peano démontre dans les *Nouvelles Annales*. Nous pouvons noter que Jordan ne cite Peano à aucun moment, celui-ci étant à l'origine de toutes ces corrections.

Jordan corrige également toutes les insuffisances repérées par Peano dans l'introduction au livre de Genocchi ([45]).

Il s'agit tout d'abord de la définition de la différentielle totale et des différentielles partielles dans laquelle intervenaient des infiniment petits de deux variables. Jordan change sa démonstration pour utiliser la formule des accroissements finis. Quant aux négligences concernant l'existence même des dérivées lors de l'établissement des formules, Jordan les corrige longuement pour la dérivation des fonctions implicites.

4.3.4. Les derniers paragraphes



C'est dans cette Note que Jordan énonce son théorème sur le partage du plan en deux régions par une courbe fermée et définit la longueur d'un arc. Ce théorème, que Jordan d'ailleurs ne démontre pas correctement ([28], 168), est d'une grande importance. Indispensable à la démonstration du non homéomorphisme de R^n sur R^m ([24]), il annonce la topologie algébrique dont les premiers résultats, avec Poincaré, n'allaient pas tarder à apparaître.

Cependant, jugeant qu'il débordait par trop le cadre que nous nous sommes fixé, nous ne l'étudierons pas ici.

Nous noterons seulement que dans la démonstration de ce théorème, démonstration faussée par ailleurs, Jordan n'a pas une seule fois recours aux mots *intérieur*, *frontière*, *ouvert* et *voisinage* alors qu'il construit en fait explicitement des boules ouvertes comme voisinages de points intérieurs à un polygone.

Enfin, cette Note se termine par des énoncés sur les fonctions de variable complexe dont la définition et l'existence de l'intégrale d'une fonction $f(z)=P+iQ$ le long d'une ligne arbitraire et la nullité de l'intégrale prise le long d'une ligne fermée ne contenant en son intérieur aucun point critique de $f(z)$.

Ces théorèmes sont à l'origine des résultats sur les courbes, Jordan cherchant à définir et à démontrer avec toute la rigueur souhaitée les résultats sur l'intégrale d'une fonction de la variable complexe.

4.4. Limites et continuité chez d'autres auteurs : Peano, Dini, Tannery

Nous avons regroupé ici trois livres très différents dont la comparaison avec le Supplément de 1887 de Jordan nous a paru présenter un réel intérêt.

Il s'agit tout d'abord des livres de Dini et Peano dont nous avons, à plusieurs reprises, souligné l'avance sur le tome de 1882 de Jordan.

4.4.1. Peano (1884)

Si la comparaison avec le tome de 1882 ne faisait ressortir que des aspects positifs du livre de Genocchi-Peano, il n'en est plus de même avec le Supplément de 1887.

L'analyse du Supplément met en lumière dans le cours de Peano (car rappelons que c'est à lui qu'en revient en grande part la rédaction), des insuffisances que le trop grand décalage par rapport aux livres étudiés dans la deuxième partie ne permettait pas de déceler.

S'il introduit effectivement les nombres irrationnels, et il ne pouvait pas faire moins vu ce qu'il écrit dans l'Annexe, il le fait de la façon la plus concise qui soit.

En trois petits paragraphes il présente la définition d'un *incommensurable* à l'aide des coupures, la définition de l'ordre et conclut :

"Le lecteur doit déjà connaître la façon d'exécuter sur eux les opérations algébriques et leurs propriétés".

Si Peano reconnaît la nécessité impérieuse d'introduire le concept de nombre irrationnel, il considère en fait superflue toute étude rigoureuse et détaillée de l'ensemble des réels dans le cadre de son cours.

Ceci conduit à des démonstrations lacunaires dont la première est celle du théorème 6 ([20], 7) : une suite croissante majorée converge.

Genocchi, mais en fait Peano, affirme l'existence d'un nombre L défini par la coupure réalisée par la suite croissante d'une part, et le système des majorants d'autre part et il montre que ce nombre L est la limite.

Seulement, cette coupure est définie à l'aide de deux suites de nombres réels et non rationnels. Le procédé de construction exposé au début n'est pas valable et aucun théorème ne permet d'affirmer l'existence du nombre L .

Ce théorème, dont la démonstration présente ainsi une réelle faiblesse, est la propriété clef sur laquelle Peano construit toutes ces démonstrations sur les limites et les fonctions continues sur un intervalle.

Ainsi, par exemple, le critère de Cauchy, imprimé en petits caractères dans le texte, est démontré à l'aide de deux suites adjacentes de réels qui encadrent la suite de Cauchy et dont il montre que l'une est croissante et majorée par l'autre et la seconde décroissante et minorée par les termes de la première; ces deux suites sont donc convergentes.

Comme la différence entre les termes de même rang de chacune des suites tend vers 0 avec n , les deux suites convergent vers la même limite qui est la limite de la suite de Cauchy.

Mis à part l'usage différent qu'il fait des suites adjacentes, Peano démontre le théorème des valeurs intermédiaires de la même façon que Jordan. Mais, contrairement à Jordan, il l'énonce effectivement.

Enfin il donne en petits caractères les théorèmes sur l'existence de la limite supérieure pour *"une quantité variable y qui prend des valeurs inférieures à une quantité fixe"*, sur les fonctions continues sur un intervalle qui atteignent leur limite supérieure et inférieure et qui sont uniformément continues sur un intervalle.

Peano, qui énonce la propriété de Weierstrass que nous avons donnée (cf 4.3.3., continuité uniforme), démontre le théorème sur la continuité uniforme d'une autre manière que Jordan et Dini; il reprend la démonstration exposée par Heine dans ([25], 186).

4.4.2. Dini (1878)

Ce traité de Dini, paru en 1878 mais conçu dès 1872, contient les théorèmes de l'analyse aujourd'hui classiques à propos des réels, des limites, des fonctions continues et discontinues sur la

droite réelle. Non seulement Dini démontre toutes ces propositions de la façon la plus scrupuleuse (voir en particulier la démonstration du théorème des accroissements finis ([19], 33)), mais il aborde également, et cela dès 1878, la théorie des ensembles reprenant le mémoire de Cantor [4].

Il introduit les ensembles de points, "*gruppi di numeri o di punti*", et définit les points intérieurs à un intervalle, les points limites, et les ensembles dérivés dont il se sert à plusieurs reprises, développant une recherche personnelle, à laquelle Cantor rend hommage, sur les ensembles denses.

Il donne d'autre part de nombreux résultats sur les fonctions non dérivables d'une variable réelle sur un ensemble de points, qui dépassent largement le cadre des propriétés élémentaires que nous avons rappelées dans notre deuxième partie.

Ainsi, la comparaison avec le tome de 1887, ne fait apparaître aucune faiblesse dans le livre de Dini. Elle montre cependant que l'objet des deux cours - celui de Dini et celui de Jordan - n'est pas le même.

Cela sera encore plus manifeste avec la deuxième édition du cours de Jordan.

4.4.3. J. Tannery (1886)

Nous avons étudié, au début de cette partie, la préface à l'*Introduction* de Tannery parue en 1886; nous donnerons ici, très sommairement un aperçu des chapitres sur la limite et la continuité dont Tannery souligne d'ailleurs l'importance dans sa préface.

Dans le premier chapitre (*Des nombres irrationnels et des limites*), Tannery expose plusieurs constructions de R et définitions de convergence de suites de réels; il définit les limites supérieure et inférieure d'un ensemble de nombres et donne "*le théorème suivant qui est dû à M. Weierstrass*" ([56], 42) :

"*Tout ensemble (E) dont les éléments supposés distincts et en nombre infini sont, en valeur absolue, inférieurs à un nombre A, admet au moins une valeur limite x*".

Pour le démontrer, Tannery construit deux suites adjacentes, en partageant des intervalles en dix intervalles égaux, dont il affirme sans aucune démonstration qu'elles sont convergentes et admettent une même limite.

Sa démonstration est donc elle aussi lacunaire même si, comme Peano, il montre auparavant qu'une suite croissante majorée de réels est convergente.

Ayant traité des séries et des produits infinis dans le chapitre 2, il donne dans le chapitre 3 les "*premiers principes de la théorie des fonctions d'une variable*" à savoir les principaux théorèmes sur les fonctions continues qu'il démontre, comme Jordan, à l'aide de suites adjacentes.

Dans ces démonstrations soigneuses, Tannery prouve clairement l'existence de la limite commune des suites adjacentes qu'il construit.

Notons que la démonstration de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle utilise déjà le raisonnement par l'absurde.

Enfin, dans le chapitre *Des dérivées*, Tannery donne une définition correcte de la dérivée en un point et de la dérivée à droite ou à gauche; il satisfait en tout point aux exigences de Peano pour les théorèmes sur la dérivée d'une fonction de fonction ou de l'inverse d'une fonction et donne, en le citant, la démonstration d'O. Bonnet du théorème des accroissements finis.

Il nous semble que l'étude rapide de ces quelques chapitres permet déjà d'apprécier la valeur du livre de Tannery qui est plus complet et plus moderne que ceux de Jordan (1882 et 1887) et de Peano.

5. L'ETAPE DECISIVE : LE TOME DE 1893.

En 1893 paraît le premier tome de la seconde édition du traité de Jordan. Ce tome, appelé *Calcul différentiel*, sera suivi d'un second l'année suivante, intitulé *Calcul intégral*.

Quoique paru sous le même titre, il s'agit d'un livre entièrement nouveau par rapport à celui de 1882.

Après notre étude du tome de 1882 et de la Note de 1887, il suffit de dire que les premiers chapitres de cette édition constituent une véritable globalisation, une synthèse des résultats sur les fondements obtenus jusqu'alors, pour mesurer tout ce qui sépare, sur ces matières, les deux éditions et saisir toute l'importance de cette deuxième édition dans le développement du mouvement de refonte des principes de l'analyse.

En fait Jordan s'en explique dès l'introduction du tome de 1893 dans laquelle il expose, comme nous l'avons vu, la différence de point de vue : s'il "*glisse un peu rapidement*", dans la première édition, sur les fondements dont il sous-estime en fait l'importance et l'utilité pour le reste des mathématiques, il les expose par contre avec une "*précision et une généralité*" - pour reprendre ses propres termes - remarquables dans le tome de 1893 (cf 3.5).

Nous soulignerons dans cette partie, combien est nouvelle et novatrice la "*généralité*" des énoncés sur les fondements que Jordan donne et démontre dans les cent premières pages du tome de 1893.

5.1. Une édition de référence

La seconde édition effacera rapidement toute trace de la première. En effet, les seules références que nous ayons trouvées dans la littérature ne mentionnent que les tomes de la deuxième édition.

De plus, alors que nous n'avons trouvé, pour la première édition, aucune autre appréciation que celle de Tannery dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* ([54]), les commentaires et les louanges abondent pour la seconde édition.

Cette édition sera saluée par tous les grands mathématiciens de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle qui apprirent les mathématiques de cette époque en l'étudiant, comme le signale Lebesgue ([41]).

André Weil en donne un témoignage dans [63] :

Ayant la possibilité de choisir lui-même les prix qu'il allait recevoir comme meilleur élève de "Math élem" au lycée Saint Louis, A. Weil alla consulter Hadamard qui lui indiqua entre autre les trois tomes du *Cours d'Analyse* de Jordan.

"C'est ainsi", continue A. Weil, "que j'ai appris l'analyse, non pas dans Goursat comme presque tous mes camarades, mais dans Jordan; parmi tous les motifs de reconnaissance que j'ai envers Hadamard, il m'a toujours paru que c'était peut-être le plus notable" (il s'agit là de l'année 1921).

On peut également citer une série de jugements tout aussi louangeux de la part des contemporains de Jordan.

Nous avons retrouvé dans la correspondance de Jordan qui est conservée à l'Ecole Polytechnique (il s'agit uniquement de lettres que reçut Jordan de 1867 à 1899), plusieurs commentaires sur la deuxième édition; nous n'en avons trouvé que très peu sur la première édition.

- Lettre de Peano du 6 novembre 1894 :

"En continuant l'étude de votre traité, je le trouve toujours plus intéressant; j'y apprends une foule de nouvelles cognitions".

Comparée aux critiques dont Peano n'épargne pas la première édition ou du moins le premier tome de celle-ci, cette appréciation hautement favorable, et sans complaisance nous semble-t-il, illustre à la fois les qualités de cette deuxième édition et l'écart qui la sépare de la première.

- Lettre de Cremona du 20 juillet 1894 :

"Agréez mes vifs remerciements pour le tome deuxième de la nouvelle édition de votre admirable Cours d'Analyse dont vous m'aviez déjà envoyé le tome premier. Votre cours est une mine de belles et nouvelles choses; il n'y en a aucun autre qui représente aussi bien les progrès de la Science".

- Lettre de Mansion d'avril 1896 :

"J'ai reçu récemment par l'intermédiaire de Gauthiers Villars le troisième volume de votre Cours d'Analyse. Je vous remercie ainsi que votre éditeur de m'avoir envoyé ce beau livre qui, dès maintenant, est le traité classique en Belgique servant de guide à nos jeunes docteurs en sciences mathématiques".

Au delà des formules classiques de remerciement, il faut voir dans ces lettres l'expression de la réelle impression que produisit la sortie du livre de Jordan.

Le commentaire de J. Tannery, dans le tome 17 du *Bulletin des Sciences Mathématiques* ([59], 249), reflète d'ailleurs l'opinion des correspondants de Jordan :

"L'art de l'auteur pour présenter les choses sous leur forme la plus générale, la plus abstraite et la plus condensée à la fois est vraiment singulier : pour le lecteur qui veut se donner la peine de réfléchir, la clarté de l'exposition est d'ailleurs parfaite. ((...)) On remarquera tout d'abord les huit premiers paragraphes du chapitre premier ((il s'agit essentiellement de la partie qui nous intéresse dans notre étude)) où les principes sont exposés de la façon la plus solide et sous une forme qui, bien souvent, semble devoir être définitive".

Rappelons en effet les limites, les difficultés, auxquelles se heurtait la mise sur pied des fondements de l'analyse dans les années 1870-1880.

Une foule de remarques, de définitions, de résultats avaient été trouvés; mais nombre de mathématiciens, devant ces résultats sans lien, inopérants pour l'essentiel, contestaient l'utilité de telles recherches. Comme l'écrit Lebesgue, *"ils pouvaient penser qu'il y avait plus pressé et qu'il convenait de suspendre ces recherches jusqu'au moment où leur nécessité s'imposerait"* ([39]).

Or, avec les cent premières pages de son cours d'analyse, Jordan, le premier, réussit d'une façon aussi complète à surmonter ces limites en réalisant cette synthèse nécessaire de toutes ces idées nouvelles, en faisant ainsi une théorie naissante.

L'importance du traité de Jordan, que souligne donc Tannery, ne se réduit pas, bien évidemment à ces cent premières pages. Ainsi, *"dans la seconde édition, on trouve à la fois un exposé de théories sur les ensembles, dues à Cantor, et un véritable traité des fonctions elliptiques, le premier qui ait été construit en France à partir des idées de Weierstrass. ((...)) A côté de la magnifique exposition qu'il donne de la théorie des variables complexes, il commence l'édification d'une théorie des variables réelles si intimement liée et si utile à sa voisine que les barrières, élevées entre elles par des habitudes ou des préjugés, tombent d'elles mêmes"* ([41], XXIII).

5.2. Un nouveau plan

L'évolution entre les deux éditions amène Jordan à réécrire entièrement le début de son traité. On ne peut parler pour les paragraphes qui nous concernent d'édition revue et corrigée. Mais, comme l'indique l'édition elle même, *"édition entièrement refondue"*, il s'agit en fait d'un nouveau traité qui ne se réduit pas à la juxtaposition des paragraphes de 1882 et 1887.

Le plan en est entièrement remanié, et quoique conservant la division en calcul différentiel et intégral, Jordan modernise le plan de son traité.

Il supprime tout d'abord l'introduction de 1882; les développements sur la méthode infinitésimale et les infiniment petits, considérablement réduits, sont incorporés au premier chapitre, *Limites*, de la partie *Variables réelles* du tome intitulé *Calcul Différentiel*.

Il met ainsi au premier plan la notion de limite, poursuivant les développements de la Note de 1887.

Il introduit ensuite un deuxième chapitre, entièrement nouveau consacré aux *Ensembles*, dans lequel il reprend les notions exposées par Cantor et donne sa propre théorie de l'*étendue d'un ensemble*.

Dans le troisième chapitre, *Fonctions bornées - fonctions intégrables*, Jordan aborde les notions d'intégrales et de fonctions intégrables introduites dans la Note de 1887.

Il consacre un chapitre entier, le quatrième, aux propriétés des fonctions continues, puis un autre aux fonctions à variation bornée.

Il termine la partie sur les variables réelles sans grand changement par rapport au tome de 1882, menant cependant parallèlement l'étude des dérivées et des intégrales d'une fonction.

5.3. Les énoncés sur les limites

Nous avons dans le chapitre précédent étudié les paragraphes sur les nombres irrationnels dont nous avons souligné la qualité et les différences par rapport à 1887 (cf 4.3.1).

Comme dans la Note, Jordan énonce ensuite le critère de Cauchy et le théorème sur la convergence d'une suite croissante majorée, les propositions sur les limites, d'une somme, d'un produit, d'un quotient qu'il généralise ensuite à la limite d'une expression rationnelle.

Jordan aborde alors les paragraphes sur les infiniment petits; de l'introduction initiale de 1882 il ne reste rien que les propositions très précises sur l'ordre et la valeur principale d'un infiniment petit. Il n'y a plus trace des développements sur le problème des tangentes et des quadratures.

Après avoir caractérisé le calcul infinitésimal par l'introduction d'une opération consistant à remplacer une quantité variable par sa limite, il reprend deux paragraphes entiers de 1882 sur l'objet du calcul différentiel, à savoir :

"La détermination des valeurs principales des infiniment petits et leur développement en série suivant les puissances de l'infiniment petit principal, qui en est la conséquence, formeront en grande partie l'objet de la première partie de Cours".

5.4. Les énoncés sur les ensembles

L'introduction de la théorie des ensembles que Jordan développe dans ces paragraphes est, pour une part, à l'origine de la transformation radicale du traité.

Jordan n'introduit pas seulement des notions nouvelles par rapport à 1882; il bâtit une théorie des ensembles en réunissant ici toutes les propriétés dont il aura à se servir dans les différents chapitres sur les fonctions.

C'est notamment à ces pages sur les ensembles, puis sur les fonctions de variable réelle, que s'appliquent ces phrases de Lebesgue tirées de la notice sur C. Jordan ([41], XXII) :

"Avant lui il y avait des remarques ingénieuses, des résultats isolés, des conceptions profondes, mais souvent aussi obscures que profondes; après lui il y a eu une science claire et ordonnée. ((...)) Il a su tirer des travaux antérieurs des notions qu'il a rendues simples, précises, immédiatement utiles".

Les travaux antérieurs dont il est question ici, sont bien évidemment ceux de Cantor et, entre autres, l'article des *Mathematische Annalen* de 1872 ([4], 123), *Sur l'extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* paru en français en 1883 dans le deuxième tome des *Acta Mathematica* (*Acta math.*, 2, 336-348), ainsi que plusieurs autres articles sur les ensembles de points à l'occasion desquels Cantor définit un certain nombre de notions fondamentales (cf 1.4).

5.4.1. Premières définitions

Jordan commence par donner la définition d'un point "système de valeurs simultanées $a, b, \dots$ donnés à des variables $x, y, \dots$ ", puis de l'écart de deux points :

"Nous appellerons écart de deux points $p=(a, b, \dots)$ et $p'=(a', b', \dots)$, l'expression : $pp' = |a'-a| + |b'-b| + \dots$ ",

et enfin de la limite p d'une suite de points p_n à l'aide de l'écart.

Il nomme ensemble "toute collection de points, en nombre fini ou infini" puis donne les définitions premières de topologie.

Il commence par la définition du point d'accumulation qu'il appelle, comme Cantor, *point limite* d'un ensemble - "*tout point qui est la limite d'une suite de points de l'ensemble*" - puis considère "*le système de ces points limites ((qui)) forment un nouvel ensemble*", le *dérivé*.

Il donne, ce qui est rare dans ce traité, des exemples et contre-exemples à propos des points limites et de *dérivé* d'un ensemble et définit un *point isolé*.

Après avoir appelé *ensemble parfait*, "*tout ensemble qui contient son dérivé*", il démontre qu'un ensemble *dérivé* est nécessairement parfait (un ensemble parfait est en fait, dans la dénomination actuelle, un ensemble fermé).

Jordan donne alors une définition personnelle des points intérieurs, en appelant *point intérieur* à E un point qui appartient à E sans appartenir au *dérivé* du complémentaire de E . Il définit de façon analogue un point *extérieur* à E .

Il donne pour les points intérieurs la caractérisation :

"Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ϵ telle, que tout point dont l'écart à p est $< \epsilon$ n'appartient pas au complémentaire, donc appartient à l'ensemble".

Cela revient à ce que toute boule ouverte de centre p soit incluse dans l'ensemble; donc l'ensemble des points intérieurs est un ouvert.

Mais ces mots, *ouverts* et *voisinages*, ne seront jamais employés par Jordan dans les paragraphes de topologie. En fait raisonnant sur R^n donc sur un espace métrique, il travaille avec la caractérisation des boules ouvertes prises comme système de voisinages, sans introduire de vocabulaire supplémentaire dont il peut se passer pour les espaces qu'il envisage.

Enfin Jordan définit les *points frontières* : "*ceux qui appartiennent à la fois à l'ensemble ou à son complémentaire et au dérivé de l'autre*".

Il démontre qu'il existe toujours des points frontières alors que l'existence des points intérieurs ou extérieurs n'est pas nécessaire.

Mis à part dans [20] où Peano démontre effectivement leur existence dans le cas de sous-ensembles de la droite ou du plan, nous n'avons trouvé aucun théorème spécifique, chez nos auteurs, à propos de l'existence des points frontières.

. Existence des points frontières

Jordan, en fait, établit une sorte de généralisation à R^n de l'existence de la borne supérieure pour les ensembles de réels.

Il démontre l'existence des points frontières, en construisant une suite de points :

$$(a + (\alpha - a)m/2^n, b + (\beta - b)m/2^n, \dots)$$

où, m prend successivement les valeurs $0, 1, \dots, 2^n$ et $(a, b, \dots) = p$ et $(\alpha, \beta, \dots) = \Pi$, p étant un point de l'ensemble et un point du complémentaire.

Il considère alors p_n le dernier des points de la suite à appartenir à l'ensemble et Π_n le suivant :

$$p_n = (a + t_n(\alpha - a), b + t_n(\beta - b), \dots)$$

$$\Pi_n = (a + u_n(\alpha - a), b + u_n(\beta - b), \dots),$$

où t_n et u_n , lorsque n tend vers l'infini, sont, - soit deux suites adjacentes qui convergent vers une limite commune θ , le point

$$p = (a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b), \dots),$$

étant alors un point frontière,

- soit deux suites dont l'une est stationnaire, l'autre convergeant alors vers la valeur atteinte par la première, cette valeur définissant à son tour un point frontière.

Jordan établit enfin que la frontière est un ensemble parfait.

Remarquant que l'existence des points intérieurs ou extérieurs n'est pas nécessaire, il caractérise par un nom spécifique les ensembles parfaits d'intérieur non vide qu'il appelle les *domaines* dont il souligne l'intérêt particulier. (Remarquons qu'avec cette définition, la réunion d'un ensemble parfait totalement discontinu et d'un intervalle est un domaine.)

Se servant de l'existence des points frontières dans R cette fois, il donne la caractérisation de la borne supérieure d'un ensemble d'une seule dimension borné.

Il démontre ensuite le théorème de Bolzano-Weierstrass qu'il énonce pour un ensemble quelconque mais qu'il démontre pour un ensemble à 2 dimensions :

"Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite".

On retrouve dans la conclusion de la démonstration de Jordan un *"évidemment"* qui, malgré son évidence, gagnerait à être explicité.

Jordan construit une suite d'ensembles emboîtés E_n qui contiennent une infinité de points et dont l'écart entre deux points ne peut dépasser $2(M-m)/n^2$, M et m étant les bornes de chacune des coordonnées des points de l'ensemble initial.

Prenant un point p_n dans chaque ensemble E_n , Jordan conclut que ces points tendront évidemment vers un point limite Π , sans signaler d'aucune façon que cette suite est une suite de Cauchy donc convergente.

5.4.3. Connexité

Jordan enfin, définissant l'écart de deux ensembles, traite de la connexité, quoique le mot lui-même ne soit pas présent dans 1893.

C'est la première fois que la notion de connexité est abordée dans un traité et fait l'objet d'une étude spécifique, même si certains, dont Weierstrass, l'avaient introduite à l'occasion de l'étude des séries entières $\sum a_n z^n$ avec z complexe ([18], 65).

Il se peut que la "généralité" des espaces que Jordan envisage dans cette édition du traité en soit une raison.

Considérant, dans les théorèmes sur les ensembles, des sous-ensembles de R^n et, dans les théorèmes sur les fonctions continues, des fonctions de E dans F , où E et F sont deux ensembles quelconques (de R^n bien évidemment), Jordan a en effet besoin de résultats sur la connexité.

Il n'en est pas de même lorsqu'on travaille uniquement sur des sous-ensembles de R ou des fonctions numériques d'une variable réelle, les seuls connexes de R étant les intervalles comme dans la Note de 1887 ou le traité de Dini, par exemple, où il n'y a ni définitions, ni résultats à propos de la connexité.

S'il est vrai que le nombre des résultats donnés par Jordan reste faible par rapport à ceux que peuvent comporter des cours actuels, il faut cependant souligner la démarche de Jordan qui l'amène à dégager les notions et les résultats introduits incidemment pour entreprendre leur étude systématique et l'exposer de la façon la plus complète et la plus précise qui soit.

Jordan commence par définir deux ensembles séparés :

"Soient E et E' deux ensembles formés par des points de même nature. Les écarts des divers points p de E aux divers points p' de E' forment un ensemble de nombres non négatifs. Il est donc borné inférieurement, et admet un minimum Δ , positif ou nul, que nous appellerons l'écart des ensembles E, E' . Si cet écart est > 0 , nous dirons que les ensembles E, E' sont séparés".

Se servant de cette notion, il appelle ensemble d'un seul tenant, un ensemble parfait borné qui ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés.

Un ensemble parfait étant en fait pour Jordan un ensemble fermé dans la dénomination actuelle, la définition que donne Jordan d'un ensemble d'un seul tenant est équivalente à la définition moderne d'un ensemble connexe.

Il démontre alors que la propriété caractéristique de ces ensembles est, en langage moderne, d'être bien enchaîné :

"Entre deux quelconques de ses points p, p' on peut toujours, quelque soit ϵ , intercaler une chaîne de points intermédiaires appartenant à l'ensemble, telle que l'écart de deux points consécutifs soit $< \epsilon$ ".

Pour prouver que la condition est nécessaire, Jordan construit une partition de l'ensemble en deux sous-ensembles séparés parfaits, ceux qui sont reliés à un point p donné par une chaîne de points dont l'écart est $< \epsilon$, et les autres, ce qui contredit l'hypothèse de connexité.

Pour la réciproque, il montre que si l'ensemble n'est pas connexe et est décomposable en deux ensembles parfaits séparés alors il ne peut exister de chaîne de points dont l'écart est $< \epsilon$ qui relie deux points appartenant à chacun des deux ensembles parfaits séparés.

Remarquons, ce que ne fait pas Jordan, que cette proposition devient fausse si l'on considère seulement des ensembles parfaits, comme le montre le contre-exemple Q qui est un ensemble bien enchaîné mais non connexe.

Jordan énonce ensuite comme conséquence que la réunion d'ensembles d'un seul tenant, non disjoints deux à deux, est elle-même d'un seul tenant, et démontre qu'un ensemble d'un seul tenant qui ne se réduit pas à un point, se confond avec son dérivé.

Il termine ce passage sur la connexité en remarquant que tout connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Il écrit et démontre :

"Un ensemble E , d'un seul tenant et d'une seule dimension, qui contient deux nombres donnés a et b , contient tout nombre intermédiaire entre a et b ".

Il conclut :

"Si l'ensemble parfait E est borné, il admettra un maximum M et un minimum m ; étant parfait, il les atteindra. Il est donc formé par le système de tous les nombres réels qui sont $< M$ et $> m$ ".

5.4.4. Ensembles mesurables - étendue des ensembles

Dans ces paragraphes, tirés également de [34], Jordan s'attache à examiner "ce double postulatum" admis jusque-là sur lequel reposent toutes les démonstrations sur l'intégration :

"Chaque champ E a une étendue déterminée, et si on le décompose en plusieurs parties $E_1, E_2, \dots$ la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de E ".

Jordan ajoute :

"Ces propositions sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du champ toute sa généralité. Nous nous proposons de montrer dans les pages suivantes qu'à un champ E quelconque correspondent deux nombres déterminés E' et E'' qu'on peut appeler son étendue intérieure et son étendue extérieure. Si ces deux nombres coïncident, nous dirons que E est mesurable et a pour étendue le nombre $E''=E'$ ".

Mais Jordan n'est pas le premier à avoir cherché "à attacher aux ensembles des nombres qui ((soient)) les analogues des longueurs, aires, volumes attachés aux segments, aux domaines plans ou aux domaines de l'espace". C'est à Cantor que l'on doit la première définition de ces nombres; Jordan "a simplifié et complété la définition donnée par Cantor" (Lebesgue, [38], 37).

C'est dans une lettre adressée à Mittag Leffler et publiée dans le numéro quatre des *Acta Mathematica* (1884) Sur la puissance des ensembles parfaits de points que Cantor définit:

"Une notion de volume ou de grandeur, qui se rapporte à tout ensemble P , situé dans un espace plan G_n à n dimensions, que cet ensemble P soit continu ou non".

Nous renvoyons à ce propos aux pages 388-390 de *Acta Mathematica*, et 110-111 de P. Dugac [18], signalant seulement les limites de la définition de Cantor, la mesure d'un ensemble étant égale à celle de son adhérence, ce qui contredit le deuxième postulatum auquel Jordan fait référence.

D'autre part en 1887, dans ses *Applications géométriques du Calcul infinitésimal*, Peano définit, au chapitre 5 : grandeurs géométriques, la longueur, l'aire, le volume interne et externe d'un sous-ensemble borné de R , R^2 et R^3 ([46], 152; [46], 110).

Cette définition qui précède celle de Jordan est relevée par J. Tannery dans le compte-rendu qu'il fit du livre de Peano ([57], 237) :

"Le chapitre 5 porte ce titre : Grandeurs géométriques. C'est peut-être le plus important et le plus intéressant, celui du moins, par lequel le livre de M. Peano se distingue davantage des traités

classiques : les définitions qui se rapportent aux champs de points, aux points extérieurs, intérieurs ou limites par rapport à un champ, aux fonctions distributives (coexistantes d'après Cauchy), à la longueur (à l'aire ou au volume) externe, interne ou propre d'un champ sont présentées sous une forme abstraite, très précise et très claire".

Par contre Tannery ne mentionne pas précisément les paragraphes de Jordan sur la mesure des ensembles. S'il loue la démarche de Jordan dans l'exposé des principes, s'il souligne l'intérêt de prendre,

"comme point de départ la notion d'ensemble, dans toute sa généralité; ((...)) notion ((qui)) lui permet d'exposer d'une façon extrêmement nette le concept d'intégrale simple ou multiple et toutes les propriétés essentielles qui se rapportent à ce concept",

il semble insister beaucoup plus sur les qualités avec lesquelles Jordan "rend justice à l'oeuvre de M. Cantor", que sur l'apport spécifique de Jordan dans l'élaboration d'une théorie de la mesure.

Cette théorie, voisine de celle de Peano semble d'après Lebesgue, permettre de franchir le pas le plus grand avant la théorie de la mesure de Borel, le concept de mesure extérieure et intérieure étant formulé de façon plus efficace.

En effet Jordan définit l'aire intérieure et extérieure d'un sous-ensemble E de R^2 comme

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu(S) \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mu(SUS')$$

où $\mu(S)$ et $\mu(S')$ sont les aires des ensembles S et SUS' des carrés de côtés r , parallèles à des axes rectangulaires dont tous les points sont intérieurs à E pour S et contiennent tous les points de E pour SUS' .

Peano, lui, considérait la mesure intérieure (resp. extérieure) d'un ensemble P comme

$$\limsup \sum_{j=1}^n A(I_j) \quad (\text{resp.} \quad \liminf \sum_{j=1}^n A(I_j))$$

pour toute famille finie d'aires polygonales quelconques I_j , $1 \leq j \leq n$, contenues dans P (resp. contenant P).

Un ensemble est mesurable si $\mu_E = \mu_I$.

Ainsi, ces deux théories de la mesure remédient aux faiblesses essentielles de celle de Cantor en introduisant à côté de la mesure de Cantor, une mesure intérieure de l'ensemble.

5.4.5. Des manques dans l'exposé de la théorie des ensembles

Jordan ne reprend pas dans son cours toutes les notions définies par Cantor dans la série des mémoires *Sur les ensembles infinis et linéaires de points*.

Ainsi, il ne définit à aucun moment les ensembles partout denses, nulle part denses, et denses en eux-mêmes; il n'aborde à aucun moment cette théorie que Dini avait développée sur R et Cantor sur R^n .

De même, nous avons déjà signalé que Jordan ne définit pas spécifiquement les voisinages, ce que fait pourtant Cantor dès l'article de 1872 ([4]) :

"J'appelle voisinage d'un point ((dans R)), tout intervalle qui contient le point dans son intérieur".

Il en est de même pour les ensembles ouverts ou fermés, termes que Jordan n'emploie à aucun moment. Pourtant, Cantor utilisait l'expression *"abgeschlossene Menge"* que Mittag Leffler proposa de traduire par *"ensemble fermé"* ([17], 159).

Quant à la considération de la nature des intervalles sur lesquels il travaille, nous avons constaté qu'il n'en était pas question. Jordan ne donne jamais cette précision essentielle sans laquelle les théorèmes énoncés peuvent devenir manifestement faux.

Cantor, pourtant, dans le deuxième tome des *Acta Mathematica* (*Acta Math.*, 2 (1883), 349-380), spécifie qu'il considère *"un intervalle donné continu dont les points extrêmes sont considérés comme appartenant à l'intervalle même"*.

En fait, au delà de ces quelques manques, il nous faut réaffirmer la nouveauté et l'importance de ces quelques paragraphes présentant les résultats de la théorie de Cantor.

Ainsi que l'écrivait Lebesgue dans sa notice sur ses travaux scientifiques ([39], 16) :

"En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'Ecole Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'analysis situs, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier".

5.5. Fonctions

Les paragraphes sur les fonctions ont ceci de remarquable que les propriétés sont énoncées et démontrées pour des fonctions de E , sous-ensemble de R^n , dans R .

Les définitions mêmes de fonction, puis de fonction bornée, intégrable, continue sont données uniquement dans ce cas et non pour une fonction numérique d'une variable réelle.

Jordan est le premier à avoir formulé et démontré avec cette généralité les propriétés de ces fonctions, et c'est là un progrès significatif; cependant, comme nous allons le voir, il est regrettable qu'il n'ait pas explicité, plus précisément, les cas d'une fonction numérique d'une ou deux variables.

5.5.1. Fonctions bornées - fonctions intégrables

Reprenant en partie son mémoire de 1892 ([34]) sur les intégrales définies, Jordan modifie quelque peu les paragraphes correspondants de la Note de 1887, ne mettant pas l'accent sur les mêmes choses dans les deux tomes .

S'il insistait dans la Note sur la nature des fonctions dont il définissait l'intégrale, il n'en est plus de même dans le tome de 1893.

Jordan s'en explique d'ailleurs dans [34], page 69 :

"L'intégrale définie (simple ou multiple) d'une fonction f dans un champ E s'obtient, comme on sait (lorsque le champ et les vecteurs de la fonction sont bornés), de la manière suivante :

On décompose le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens; on multiplie l'étendue d de chacun de ces éléments par la valeur de f en un point choisi à volonté dans l'élément; et l'on cherche la limite de la somme $\sum fd$ ainsi formée.

On sait en effet que cette limite a une valeur bien déterminée lorsque la fonction f est continue. Cette propriété subsiste même pour une classe de fonctions plus générale, définies d'une manière précise par un théorème bien connu de Riemann. Enfin M. Darboux a fait voir que, quelle que soit la fonction bornée f , les deux sommes

$$\sum M.d\sigma, \sum m.d\sigma$$

où M et m représentent le maximum et le minimum de f dans l'élément d , ont toujours une limite parfaitement déterminée.

Ces résultats sont nets et éclairent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale.

L'influence de la nature du champ ne paraît pas avoir été étudiée avec le même soin".

Ainsi, les exemples et contre-exemples de fonctions limitées, de fonctions atteignant leur maximum, de fonctions intégrables ayant dans tout intervalle une infinité de points de discontinuité ne se retrouvent pas dans ce tome de 1893.

Il en est de même des propositions concernant les points de continuité d'une fonction intégrable et l'intégrabilité d'une fonction non décroissante que nous avons données dans le chapitre précédent.

Par contre Jordan développe dans un nouveau paragraphe plusieurs remarques sur la définition des intégrales par excès et par défaut dans des champs E particuliers qui prolongent la définition générale de ces intégrales sur un champ E mesurable.

Nous ne nous étendrons pas plus que lors de l'étude de la Note de 1887 sur les développements spécifiques à l'intégration qui nous feraient déborder trop largement du cadre que nous nous sommes fixé; cela, même s'ils contribuent de façon non négligeable à la qualité et à la modernité de cette édition du traité.

Dans les paragraphes sur les fonctions bornées, Jordan ayant donné la définition d'une fonction, puis d'une fonction bornée, passe directement aux énoncés sur la somme, la différence, le produit, etc, de deux fonctions bornées.

Ayant démontré au préalable, dans le chapitre sur les ensembles, qu'un ensemble infini borné admet les bornes supérieure et inférieure, Jordan n'a pas besoin du *Lemme* de 1887 sur l'existence de la borne supérieure d'une fonction limitée pour démontrer le théorème de Darboux.

Il lui suffit de montrer que l'ensemble des valeurs des diverses sommes S et s pour toutes les décompositions possibles est borné, ce qui est immédiat.

Enfin, ayant présenté les remarques sur la nature du champ, il définit l'oscillation d'une fonction et traite alors des fonctions intégrables. A nouveau l'accent est mis, plus sur l'intégrale, que sur la fonction intégrable; les seules propositions, qui restent dans ce tome sur les fonctions intégrables, sont les propositions élémentaires (somme, produit, etc.).

Jordan développe ensuite les propriétés des intégrales sur un intervalle de R , puis l'existence et le calcul des intégrales multiples.

5.5.2 Fonctions continues

Comme dans les paragraphes précédents, les énoncés sont donnés dans le cas général de fonctions de R^n dans R .

La définition de la continuité elle-même est donnée uniquement dans ce cas, et non pour une fonction numérique d'une variable réelle.

On ne trouve également aucun exemple ou contre-exemple à propos de la continuité d'une fonction de deux variables par exemple, montrant qu'il peut y avoir continuité par rapport à chacune des variables sans que la fonction elle-même soit continue par rapport à l'ensemble des deux variables.

C'est à notre avis une faiblesse, car ce problème délicat a joué un rôle important dans la compréhension de la continuité et le développement de notions topologiques, comme le montre la correspondance Darboux-Houël. En effet, Darboux dans la lettre du 26 avril 1872, explique :

"Il ne revient pas au même pour les fonctions de deux variables de dire une fonction est continue quand on peut trouver autour du point x_0y_0 une courbe telle que pour tout point x_1y_1 à l'intérieur, $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) < \delta$, ou de dire : Si par le point x_0y_0 on fait passer une courbe quelconque, sur chaque courbe
$$\lim f(x_1, y_1) - \lim f(x_0, y_0) < \delta$$
quand x_1y_1 se rapproche de x_0y_0 ".

Darboux explicite cette différence et l'illustre avec deux dessins dans la suite de la lettre que nous donnons en annexe.

Il nous faut souligner le mérite de Darboux; si Jordan n'en parle pas dans son traité, personne en France n'y prête attention jusqu'à ce que Baire le redécouvre en 1896, et en fasse le point de départ de ses recherches.

Jordan prouve ensuite les propriétés classiques des fonctions continues que nous avons déjà vues dans la Note de 1887.

Seulement les énoncés en sont profondément différents :

- Après avoir défini la continuité uniforme, il prouve que si une fonction $f(x, y, \dots)$ est continue dans un ensemble E , E borné parfait, elle est uniformément continue.

- Correspondant au théorème, une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint son maximum et son minimum, Jordan énonce :

"Soient $f, f_1, \dots$ des fonctions de $x, y, \dots$ continues dans un ensemble E ; et soit F l'ensemble des points $(f, f_1, \dots)$ qui correspondent aux divers points de E .

Si E est borné et parfait, F le sera également".

- Correspondant au théorème sur les valeurs intermédiaires, avec les mêmes hypothèses que précédemment :

"si E est d'un seul tenant, F le sera également".

- dans les corollaires de ces deux derniers théorèmes, Jordan considère le cas où il n'a qu'une seule fonction f de $x, y, \dots$ continue dans E et énonce :

. "Si E est borné et parfait, F admettra un maximum et un minimum et les atteindra".

. "Si E est d'un seul tenant, F contiendra toute la suite des nombres compris entre son maximum et son minimum", ce qui est équivalent à l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

. Continuité uniforme

La démonstration que donne Jordan de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un parfait borné est différente de celle de la Note de 1887.

Jordan utilise ici le raisonnement par l'absurde pour montrer que le minimum η des nombres Δ correspondants aux divers points de l'ensemble est positif, les nombres Δ étant tels que,

ε étant donné pour chaque point $(x, y, \dots)$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$|f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots)| < \varepsilon$,
dès que $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, ..., et, alors $\Delta = \max \delta$.

Construisant une suite de points de l'ensemble qui convergent vers un point Π qui appartient à l'ensemble, car celui-ci est borné parfait, et auxquels correspondent des valeurs de Δ moindre que $\varepsilon, \dots, \varepsilon/2^n, \dots$ il montre qu'il y a contradiction avec la continuité de la fonction en ce point Π .

. L'image continue d'un borné parfait

La démonstration du théorème sur l'image F , d'un ensemble E borné parfait s'inspire par contre des mêmes principes que celle de 1887 sur le maximum d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Pour montrer que F est borné, il raisonne en effet par l'absurde : il construit une suite infinie de points de E pour lesquels la valeur de f est plus grande que toute quantité donnée. Cette suite infinie et bornée admet un point d'accumulation qui appartient à E , car E est parfait, et pour lequel la continuité de la fonction est contredite.

Rappelons que dans la démonstration de 1887, Jordan construisait une suite d'intervalles emboîtés dans lesquels la fonction était illimitée et, considérant les bornes des intervalles, construisait deux suites adjacentes; le recours à la suite infinie de points qui admet un point d'accumulation simplifie beaucoup la démonstration, mais il ne pouvait pas en être question dans la Note de 1887 qui ignorait la théorie des ensembles.

Pour montrer que F est parfait, Jordan prouve de façon classique que tout point q' du dérivé F' de F est l'image de la limite d'une suite de points de E , donc appartient à F .

. L'image continue d'un ensemble d'un seul tenant

Jordan démontre que l'image est d'un seul tenant en montrant que deux quelconques de ses points Q et q peuvent être reliés par un chaîne de points où l'écart de deux points consécutifs est moindre qu'un nombre ε choisi arbitrairement.

Grâce à la continuité uniforme de la fonction sur E , car la définition "*d'un seul tenant*" n'est donnée que pour les ensembles parfaits et bornés, l'image d'une telle chaîne de points, qui joint les deux points de E correspondants à Q et q , est la chaîne voulue.

Jordan est donc le premier à avoir formulé et démontré avec cette généralité ces propriétés, ce qui est un progrès significatif.

En effet, aucun énoncé sur les fonctions de R^n dans R^m n'était alors formulé et plus encore démontré correctement; c'est une des difficultés auxquelles s'étaient heurtés les mathématiciens qui essayèrent de montrer le non homéomorphisme de R^n sur R^m dans les premiers articles de topologie, comme l'analysèrent Cantor et Jürgens eux-mêmes ([24]), (cf 2.2).

On peut cependant regretter que Jordan n'explicite pas plus précisément les cas d'une fonction numérique d'une ou deux variables. L'importance de ces cas particuliers aurait dû conduire Jordan à ne pas les négliger au nom d'une plus grande généralité.

Jordan démontre enfin, après l'avoir défini, une propriété sur l'inverse d'un système $(u, v, \dots)$ de fonctions continues :

"Si l'ensemble E est borné et parfait, et les fonctions $u, v, \dots$ continues dans E , $x, y, \dots$ seront réciproquement des fonctions de $u, v, \dots$ continues dans F ".

Il la démontre par l'absurde en prenant comme critère de continuité que l'image d'une suite de points convergente est une suite de points qui converge vers l'image de la limite de la première suite.

Il finit le paragraphe sur les fonctions continues en montrant qu'une fonction continue dans un domaine E borné et parfait est intégrable.

5.5.3. Fonctions à variation bornée

Jordan rebaptise ainsi les fonctions à variation limitée de 1887 et à oscillation limitée de la Note de 1881 à l'Académie.

C'est cette dénomination qui sera adoptée définitivement et que l'on retrouve dans la communication de La Vallée Poussin au congrès de Strasbourg en 1920 ([37]).

Mis à part ce changement mineur, les paragraphes de 1893 sont la réplique fidèle de ceux de 1887. Nous n'y reviendrons donc pas.

5.6. Dérivées et différentielles

5.6.1 Dérivée d'une fonction d'une seule variable

C'est à l'occasion de la dérivabilité et de l'intégration que Jordan aborde enfin le cas des fonctions d'une seule variable réelle; ceci s'explique par la spécificité, là plus que pour la continuité, des résultats dans le cas d'une variable réelle.

Jordan commence par définir la dérivée d'une fonction en un point de façon particulièrement scrupuleuse :

"Soit $f(x)$ une fonction d'une variable x , définie dans l'intérieur d'un domaine D .

Soit x_0 un point fixe intérieur à D ; δ son écart de la frontière de D ; tout point x_0+h où $|h| < \delta$ sera encore intérieur à D .

Si l'expression

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

tend vers une limite fixe lorsque h tend vers zéro, cette limite s'appellera la dérivée de $f(x)$ au point x_0 et se représentera par $f'(x_0)$.

Si pour tous les points intérieurs à D , $f(x)$ admet une dérivée, l'ensemble de ces valeurs constituera une nouvelle fonction, également définie à l'intérieur de D , qu'on nomme la dérivée de $f(x)$ et qu'on représentera, avec Lagrange, par $f'(x)$, ou, avec Cauchy, par $Df(x)$ ".

La différence d'avec la définition de 1882 est une illustration significative, même si elle n'est pas essentielle, des changements que Jordan a apportés dans cette deuxième édition.

Nous les retrouverons d'ailleurs dans la suite de son exposé sur les dérivées d'une somme, d'un produit, d'une fonction de fonction et d'une fonction inverse.

Jordan modifie en effet cette dernière démonstration. Il utilisait dans le tome de 1882 une équation formelle, dont le principe était critiqué par Peano, pour trouver que

$$\text{"si } y=f(x) \text{ et } x=\varphi(y), \text{ alors } f'(x) = 1/\varphi'(f(x)) \text{ " .}$$

Calculant la dérivée de $\varphi(y) = \varphi(f(x))$, il trouvait $\varphi'(y) \cdot f'(x)$ d'une part et 1 d'autre part car $\varphi(y)=x$.

Donc $1 = \varphi'(y) \cdot f'(x)$, d'où la conclusion.

Dans le tome de 1893, supposant connue la dérivée de φ , il écrit :

$$\Delta y / \Delta x = 1 / (\Delta x / \Delta y) \quad \text{avec } \lim(\Delta x / \Delta y) = \varphi'(y) \text{ .}$$

Passant simplement à la limite, il obtient :

$$f'(x) = 1/\varphi'(y) \text{ .}$$

Par contre, toutes les précisions que Jordan avait pu donner dans la Note de 1887, sur le lien entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction, ont disparu.

Si Jordan démontre que toute fonction qui a une dérivée est continue, il n'ajoute rien et passe à la définition de la différentielle.

Il ne relève pas que toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable et ne donne plus l'exemple de la fonction de Weierstrass qu'il ne mentionne que dans le chapitre sur les séries de fonctions, comme "exemple de série continue sans dérivée".

Enfin Jordan démontre le théorème des accroissements finis de la même façon qu'en 1887.

Il prend cependant la peine de démontrer rigoureusement la propriété qu'il avait admise en 1887 :

"Si en un point donné x , la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on pourra assigner une quantité δ telle que l'expression

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

ait le signe de $f'(x) \Delta x$ pour toutes les valeurs de Δx de module $< \delta$ ".

Il montre ensuite le théorème de Rolle, qu'il donne d'ailleurs ainsi pour la première fois et donne en corollaire la formule des accroissements finis, établie toujours à l'aide des déterminants.

La nouveauté par rapport à la Note de 1887 est le théorème sur le sens de variation d'une fonction, qui ne figurait ni dans le tome de 1882 ni dans celui de 1887.

Jordan continue ce chapitre par l'étude de l'intégrale définie d'une fonction, sa continuité, sa dérivabilité par rapport à un paramètre; il mène cette étude de façon tout à fait rigoureuse, en mentionnant les conditions de convergence et de continuité uniforme lorsqu'elles sont nécessaires.

5.6.2. Dérivées partielles - différentielles totales

Rappelons que dans le tome de 1882 l'utilisation systématique et erronée d'infiniment petits de deux variables rendaient fausses la plupart des démonstrations de ces paragraphes.

Déjà en 1887 Jordan avait modifié un certain nombre des démonstrations que Peano avait critiquées.

En 1893, que ce soit ou non à cause des critiques de Peano, Jordan ne laisse échapper ni une erreur ni une négligence.

Peano, ainsi d'ailleurs que Darboux, critiquait les *calculs* de dérivée à l'aide d'équations formelles qui reposent sur le postulat que les dérivées existent, et les calculs abusifs de limite des infiniment petits de deux variables.

Jordan, par la démonstration de l'existence des dérivées dont il a besoin ou qu'il recherche, par l'utilisation systématique de la formule des accroissements finis, devient presque *irréprochable* et donne enfin une version moderne du calcul différentiel (La réserve que nous émettons, infranchissable par Jordan, tient à la nature même des différentielles comme formes linéaires).

Cela se constate dès la définition de la différentielle totale.

Dans le tome de 1882, Jordan n'utilisait pas la formule des accroissements finis et obtenait pour l'expression du taux d'accroissement de la fonction $\Delta f(x, y)$:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \varepsilon \Delta x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Delta y$$

Il envisageait alors, pour mettre en évidence la partie principale, l'expression $\varepsilon \Delta x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Delta y$, infiniment petit dont il estimait l'ordre sans tenir compte de l'ordre respectif des accroissements Δx et Δy et des infiniment petits $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ fonctions à la fois de Δx et de Δy .

Dans le tome de 1893, l'utilisation de la formule des accroissements finis le conduit à l'expression:

$f'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f'_y(x, y + \theta_1 y) \Delta y$, θ et θ_1 étant des quantités plus petites que l'unité.

Il écrit ensuite :

"Faisons tendre Δx et Δy vers zéro. $\theta \Delta x$ et $\theta_1 \Delta y$ tendent a fortiori vers zéro de quelque manière que puissent varier θ et θ_1 . Si donc les fonctions f'_x et f'_y sont continues au point x, y les multiplicateurs de Δx et Δy tendront respectivement vers $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ ".

Puis, pour pouvoir mettre en évidence la différentielle totale, partie principale lorsque Δx et Δy sont suffisamment petits, il poursuit,

"Soit d'ailleurs E un ensemble borné et parfait quelconque intérieur à D et dans lequel f'_x et f'_y soient continues. Leur continuité sera uniforme. On pourra donc, quelque soit ε , assigner une constante δ telle que pour tout point de cet ensemble les différences entre ces multiplicateurs et leurs limites deviennent $< \varepsilon$ dès que $|\Delta x|, |\Delta y|$, deviennent $< \delta$.

On aura donc

$$\Delta f(x, y) = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + R \Delta x + R_1 \Delta y,$$

R et R_1 tendant vers zéro avec x et y (et cela uniformément dans tout l'ensemble)".

Ainsi Jordan corrige la définition de 1882 dont Peano avait relevé les faiblesses et définit correctement pour la première fois, dans ce tome, la différentielle totale et les différentielles partielles.

Il corrige de la même façon les paragraphes dans lesquels il exprime la forme de la dérivée ou de la différentielle d'une fonction composée, qui sont des conséquences du paragraphe dont nous venons de donner un extrait, ainsi que ceux sur les fonctions implicites.

Nous avons déjà évoqué à propos de la Note de 1887 les corrections que Jordan apporta à ces derniers paragraphes, qu'il résume ainsi dans la Note, et reprend en 1893 ([33], 583) :

"La démonstration de la règle donnée aux n° 24 et 25 (t. 1) pour la dérivation des fonctions implicites $u, v, \dots$ liées aux variations indépendantes $x, y, \dots$ par des équations non résolues (...) repose sur ce double postulatum : 1° qu'il existe des fonctions qui satisfassent à ces équations; 2° que ces fonctions admettent des dérivées".

5.6.3. Dérivée et différentielles d'ordre supérieur

Jordan ne définit les dérivées et différentielles d'ordre supérieur qu'après avoir traité des lignes continues et rectifiables et des fonctions élémentaires, modifiant ainsi l'ordre établi dans le tome de 1882.

Tenant compte d'une remarque que nous avons faite dans l'étude de ces paragraphes dans le tome de 1882, à propos de la considération systématique de dérivées secondes et de fonctions C , nous avons relevé un changement dans la définition de la dérivée seconde entre les deux tomes premiers des deux éditions.

Dans le tome de 1893, en effet, Jordan écrit ([35], 14) :

"Soit $u=f(x)$ une fonction de x , ayant une dérivée u' ; Si cette nouvelle fonction admet elle-même une dérivée, on la représentera par u'' , $f''(x)$ ou D^2u et on l'appellera la dérivée seconde totale de u ."

Quant à la différentielle seconde, Jordan développe sa définition du tome de 1882 dans lequel il écrivait ([31], 32) :

"Soit y une fonction de x . Sa différentielle $y'dx$ sera elle-même une fonction de x dont on pourra chercher la différentielle. Cette nouvelle différentielle dépend de la relation qu'on voudra établir entre la variable x et l'accroissement dx qu'on lui fait subir. Si l'on admet que cet accroissement soit constant, quelque soit x , la différentielle sera évidemment égale à $y''dx \cdot dx = y''dx^2$ ".

En 1893 il montre ([35], 114) :

"Cette nouvelle différentielle dépend de la relation qu'on voudra établir entre la variable x et l'accroissement dx qu'on lui fait subir.

Or soient D le domaine dans l'intérieur duquel $f(x)$ est supposée définie, E l'ensemble des points intérieurs dont l'écart à la frontière est moindre que un nombre fixe δ ; pour tous les points de E , on pourra sans risquer que $x+dx$ sorte du champ, assigner à dx une même valeur constante de module $\leq \delta$; dx étant ainsi constant dans E , la différentielle de $u'dx$ y sera égale à $u''dx \cdot dx = u''dx^2$ ".

Jordan démontre enfin le théorème sur l'interversion des ordres de différentiation, qu'il avait déjà démontré en 1882 avec la formule des accroissements finis.

On peut lui reprocher encore une fois de ne pas donner de contre-exemple; Peano et Darboux en ont donné pour illustrer la nécessité de la continuité des dérivées partielles.

Ainsi les paragraphes sur les *calculs* et les définitions des différentielles d'ordre supérieur sont, parmi tous ceux que nous avons étudiés dans ce tome de 1893, ceux qui ont le plus "vieilli", malgré les corrections que Jordan a amenées, et qui ne pourraient se trouver dans les traités modernes.

On ne peut cependant faire le reproche à Jordan de ne pas avoir saisi la nature des formes différentielles en 1893, celle-ci n'étant clairement perçue que vers les années 1930.

5.7. Les autres paragraphes

Nous pensons avoir mené, dans les pages précédentes de cette cinquième partie, l'essentiel de la comparaison entre les contenus des deux éditions à propos des fondements de l'analyse.

Nous regroupons cependant ici quelques remarques sur certains paragraphes de 1893 que l'étude des tomes de 1882 et 1887 nous a amené à regarder, afin que notre comparaison soit la plus complète possible.

5.7.1. Lignes continues

Il s'agit tout d'abord d'une remarque mineure sur la partie concernant les lignes continues que nous n'étudierons toujours pas en détail.

Alors que le plan de la démonstration de la propriété : "*une ligne fermée partage le plan en deux régions*" est le même que dans la Note de 1887, le titre même des paragraphes a changé; l'exposé, qui dans [33] s'appelle "*courbes continues*", s'appelle ici "*lignes continues*", bien que le mot *courbe* soit réutilisé dès la première définition et dans la conclusion même de la démonstration.

Si Jordan améliore certains passages de sa démonstration de 1887 (voir les paragraphes 100 et 102) en introduisant les notions et les propriétés qu'il développe dans ce tome de 1893 à propos des fondements, il n'y a cependant pas de grands changements entre les démonstrations successives du théorème, démonstration qui reste fautive dans le tome de 1893.

Jordan donne également dans ce tome (voir paragraphe 104) une généralisation de son théorème à une région de R limitée par n contours fermés sans points multiples extérieurs les uns aux autres et un autre contour analogue qui les contient dans son intérieur et introduit la notion "*d'ordre de connexité de R* ".

5.7.2. Sur les séries de fonctions

Jordan ne traite spécifiquement à aucun moment des séries dans la Note de 1887; il est cependant évident que la démonstration, même lacunaire, du critère de Cauchy pour la convergence des suites dans le tome de 1887 lève une partie des objections de Peano dont, le "évidemment" de la page 102 du tome de 1882 que nous avons évoqué dans la deuxième partie (cf 2.3.4)

Dans le tome de 1893, après avoir donné la définition de la convergence uniforme d'une série, Jordan établit un théorème, dont nous avons relevé l'absence dans le tome de 1882, sur la continuité de la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues et remarque ([35], 315) :

"Les séries uniformément convergentes peuvent, à beaucoup d'égards, être assimilées aux sommes formées d'un nombre limité de termes".

De plus, fait remarquable dans ce traité, Jordan conclut le chapitre sur les séries de fonctions par plusieurs contre-exemples, pour insister sur le fait que l'"uniformité de la convergence est une condition essentielle".

Il donne ainsi la série de terme général $u_n = x(1-x^2)^{n-1}$ qui est discontinue en 0 quoique les u_n soient continues, la série de terme général

$$u_n = n.x.exp(-n.x^2) - (n-1).x.exp(-(n-1).x^2)$$
pour laquelle l'interversion des signes $\sum$ et $\int$ n'est pas vérifiée, et la série de Weierstrass qui est une fonction continue et pour laquelle on ne peut dériver terme à terme.

5.8. Conclusion

Ainsi, nous avons constaté en étudiant les cent premières pages de ce tome de 1893 que Jordan avait atteint le but qu'il s'était fixé dans sa préface : exposer "avec toute la précision et la généralité" possible les "premiers principes" du calcul infinitésimal.

Cette "généralité", dont nous avons étudié tout à la fois l'ampleur et la nouveauté, induit une double évolution par rapport à la Note de 1887.

La prise en compte des fondements dans cette Note avait fait surgir une foule de nouvelles fonctions, mises à l'écart du tome de 1882 : les exemples et contre-exemples sont effectivement nombreux dans les paragraphes de la Note concernant les propriétés des fonctions.

La réflexion de Jordan à partir de 1887, sa plus grande maîtrise de ces questions le portent à éliminer presque tous ces exemples dans le tome de 1893.

Le problème n'est plus de présenter des "*monstres*" qui montrent la complexité d'un monde que l'on croyait trop simple ou les limites de propriétés "universelles"; il s'agit de dégager de cet "*amas de fonctions*" et de résultats une théorie générale.

Ainsi Jordan élargit le cadre des définitions, propriétés et théorèmes qu'il assemble, et dépasse les cas particuliers sur lesquels il s'était arrêté dans le tome de 1887.

Nous ne reviendrons pas une nouvelle fois sur l'importance de ces paragraphes que Lebesgue (cf 3.1) et Tannery (cf 5.1) entre autres, ont soulignée en leur temps.

Nous insisterons cependant, pour conclure, sur une des caractéristiques que Tannery dégagait de la lecture du traité et que nous pouvons confirmer avec le recul : "*la forme ((des principes)) qui, bien souvent, semble devoir être définitive*".

Cet aspect, à lui seul, pourrait traduire toute l'importance et toute la qualité de ce tome de 1893.

Conclusion

Les deux éditions du traité de Jordan ont été publiées pendant une période "critique" du développement de l'analyse en France.

L'étude comparative des deux traités que nous avons menée nous a permis de mieux évaluer le degré de pénétration dans le monde mathématique de la mise sur pied des fondements de l'analyse.

Séparés par seulement dix années, les éditions de 1882 et de 1893 appartiennent à deux mondes mathématiques différents.

Nous pensons avoir montré que l'étude des traités de mathématiques pouvait servir de "révélateur" sur l'état de pénétration des idées nouvelles et de leur "appropriation" par le plus grand nombre de mathématiciens.

Rarement en avance, ils ne peuvent cependant rester longtemps en retrait sur les découvertes.

Bien que leur mise à jour soit souvent retardée par des arguments "pédagogiques", le mouvement de rénovation finit par atteindre les traités d'enseignement : c'est à de grands esprits, tel Jordan, prenant conscience de la puissance et de la richesse des nouveaux concepts, qu'il appartient, en écrivant un traité en rupture avec la tradition d'enseignement, d'assurer l'irréversibilité du mouvement.

Le traité de type nouveau devient, par là même, un détonateur : il y a, en France, les traités d'avant 1880 et les traités d'après 1893.

On pourrait même parler d'une action en retour des traités sur les recherches nouvelles : l'enseignement devient, par la formation des jeunes mathématiciens et la modification du "climat" mathématique, un élément du mouvement des mathématiques et une condition de leur développement.

Ainsi, si Borel, Baire et Lebesgue sont les fondateurs reconnus de la théorie des fonctions, il nous semble nécessaire, après l'étude du contenu et du rôle du tome de 1893, de joindre à leurs noms celui de Camille Jordan.

L'étude des traités et, à travers eux, celle de l'enseignement et de la diffusion des mathématiques nouvelles, nous paraît une approche féconde du développement de la Science.

Il est certes difficile de généraliser une période aussi spécifique que celle qui a vu la mise sur pied des fondements de l'analyse à d'autres moments de l'histoire des mathématiques.

Un travail sur d'autres périodes devrait cependant permettre d'étudier avec plus de généralité les liens riches et complexes entre les découvertes et leur prise en compte par le monde mathématique le plus large.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] APPEL P., *Notice sur Ossian Bonnet*, Paris (Gauthier-Villars), 1907
- [2] BERTRAND J., *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris (Gauthier-Villars), 1864-1870
- [3] BONNET O., *Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique*, (Bull. Sci. math., 2(1871), 215-221)
- [4] CANTOR G., *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Math. Annalen, 5(1872), 123-132)
- [4bis] CANTOR G., *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (Journal reine angew. Math., 84(1878), 242-258)
- [5] CANTOR G., *Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten* (Nachrichten K. Gessellschaft Wissen, Göttingen, 1879, 127-133)
- [6] CANTOR G., *De la puissance des ensembles parfaits de points* (Acta Math., 4(1884), 388-391)
- [7] CAUCHY A., *Oeuvres complètes*, Paris (Gauthier-Villars),
- [8] CAVAILLES J., *Philosophie mathématique*, Paris (Hermann), 1962
- [9] DARBOUX G., *Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions* (Bull. Sci. math., 3(1872), 307-313)
- [10] DARBOUX G., *Mémoire sur les fonctions discontinues* (Annales de l'Ecole Normale, 2ème série, 4(1875), 57-112)
- [11] DARBOUX G., *Addition au mémoire sur les fonctions discontinues* (Annales de l'Ecole Normale, 8(1879), 195-202)
- [12] DARBOUX G., *Houël (J) - Cours de Calcul infinitésimal* (Bull. Sci. math., 4(1880), 5-9)
- [13] DARBOUX G., *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris (Gauthier-Villars), 1884
- [14] DEDEKIND R., *Gesamellte mathematische Werke*, Braunschweig (Vieweg), 1930-1932
- [15] DINI U., *Fundamenti per la theoria delle funzioni di variabili reali*, Pise (Mistri), 1878

- [15bis] DIXMIER J., *Cours de mathématiques du premier cycle*, t.1, Paris (Gauthier-Villars), 1967
- [16] DUGAC P., *Eléments d'analyse de K. Weierstrass* (Arch. Hist. Exact. Sci., 10(1973), 42-176)
- [17] DUGAC P., *Des correspondances mathématiques des XIXe et XXe siècles* (Revue de synthèse, IIIe s., n° 81-82(1976), 149-170)
- [17bis] DUGAC P., *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris (Vrin), 1976
- [18] DUGAC P., *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire*, Paris (Université Pierre et Marie Curie), 1978
- [19] DUGAC P., *Histoire du théorème des accroissements finis*, Paris (Université Pierre et Marie Curie), 1979
- [20] GENOCCHI A., *Calcolo Differenziale e principii di calcolo integrale - Pubblicato con aggiunte dal Dr Giuseppe Peano*, Torino (Frattelli Bocca), 1884
- [21] GILAIN C., *Cauchy - équations différentielles ordinaires*, Paris (Etudes Vivantes), 1981
- [22] GILBERT Ph., *Cours d'analyse infinitésimale*, Louvain, 1872
- [23] GILBERT Ph., *Extrait d'une lettre adressée à la rédaction* (Nouvelles Annales, 2ème série, t.31(1872), 217-227)
- [24] GISPERT H., *Correspondance de Fréchet (1907-1926) et son apport à la théorie de la dimension* (Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1(1980), 69-120)
- [24bis] HANKEL H., *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* (Math. Annalen, 20(1882), 63-112)
- [25] HEINE E., *Die Elemente der Functionen lehre* (Journal reine angew Math., 74(1872), 172-188)
- [26] HERMITE Ch., *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Paris (Gauthier-Villars), 1873.
- [27] HOUEL J., *Cours de calcul infinitésimal*, Paris (Gauthier-Villars), 1878
- [28] JOHNSON D.M., *The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, I* (Arch. Hist. Exact Sci., 20(1979), 97-188)
- [29] JORDAN C., *Sur la série de Fourier* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 92(1881), 228-230) = *Oeuvres Complètes*, vol.4, Paris (Gauthier-Villars), 1964, pp. 393-395

- [30] JORDAN C., *Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 92(1881), 113-115) = OEuvres Complètes, vol.4, Paris (Gauthier-Villars), 1964, pp. 389-391
- [31] JORDAN C., *Cours d'analyse, tome 1*, Paris (Gauthier-Villars), 1882
- [32] JORDAN C., *Cours d'analyse, tome 2*, Paris (Gauthier-Villars), 1883
- [33] JORDAN C., *Cours d'analyse, tome 3*, Paris (Gauthier-Villars), 1887
- [34] JORDAN C., *Remarques sur les intégrales définies* (Journal de mathématiques, 4ème série, 8(1892), 69-99) = OEuvres Complètes, vol.4, Paris (Gauthier-Villars), 1964, pp. 427-457
- [35] JORDAN C., *Cours d'analyse, deuxième édition entièrement refondue, tome 1*, Paris (Gauthier-Villars), 1893
- [36] JUERGENS E., *Der Begriff der n -fachen stetigen Mannigfaltigkeit* (Jahresber D.M.V., 7(1899), 50-55)
- [37] LA VALLEE POUSSIN Ch. de, *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent*, Comptes Rendus du Congrès International des mathématiciens, vol.1, Toulouse(Privat), 1921, pp. 57-59
- [38] LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris (Gauthier-Villars), 1903
- [39] LEBESGUE H., *Notice sur les travaux scientifiques*, Toulouse (Privat), 1922
- [40] LEBESGUE H., *Introduction inédite à la Notice sur les travaux scientifiques de 1922*, OEuvres Scientifiques, vol.1, Genève (Enseignement mathématique), 1972, pp.89-93
- [41] LEBESGUE H., *Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan* (Mémoires de l'Acad. Sci. Paris, 2ème série, 58(1923), 29-66) = OEuvres Scientifiques, vol.4, Genève (Enseignement mathématique), 1973, pp.VIII-XXIX
- [42] LUROTH J., *Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander* (Sitzungsberichte phys. med. Societät Erlangen, 10(1878), 190-195)
- [43] NETTO E., *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (Journal reine angew. Math, 86(1878), 263-268)
- [44] PEANO G., *Extrait d'une lettre* (Nouvelles Annales de mathématiques, 3ème série, 3(1884), 45-47)

- [45] PEANO G., "Annotazioni" al trattato di calcolo del 1884, Opere Scelte, vol.1, Roma (Edizioni Cremonese), 1957, pp. 47-73
- [46] PEANO G., *Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino (Fratelli Bocca), 1887
- [47] PICARD E., *Notice historique sur Gaston Darboux*, Paris (Gauthier-Villars), 1917
- [48] PICARD E., *Travaux mathématiques de Jordan* (Comptes Rendus Acad. Sci., 174(1922), 210-211)
- [49] POINCARÉ H., *Mémoire sur les groupes kleinéens* (Acta Math., 3(1883-1884), 49-92)
- [50] RIEMANN B., *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Bull. Sci. math., 5(1873), 20-96) = *Gesammelte Mathematische Werke*, New York (Dover), 1953, 227-264
- [51] SERRET J.A., *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris (Gauthier-Villars), 1ère éd.(1868), 2ème éd.(1879)
- [52] SCHWARZ H., *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $=0$ (Journal reine angew. Math., 74(1872), 218-253)
- [53] STURM J.C.F., *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Paris (Gauthier-Villars), 1857
- [54] TANNERY J., *Jordan - Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique - tome 1* (Bull. Sci. math., 6(1882), 262-263)
- [55] TANNERY J., *Angelo Genocchi - Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* (Bull. Sci. math., 9(1885), 170-172)
- [56] TANNERY J., *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris (Hermann), 1886
- [57] TANNERY J., *Peano - Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale* (Bull. Sci. math., 11(1887), 237-239)
- [58] TANNERY J., *Jordan - Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique - tome 3* (Bull. Sci. math., 11(1887), 271-273)
- [59] TANNERY J., *Jordan - Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, deuxième édition entièrement refondue - tome 1* (Bull. Sci. math., 17(1893), 249-250)
- [60] THOMAE J., *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, Halle (Nebert), 1870
- [61] THOMAE J., *Sätze aus der Functionentheorie* (Nachrichten K. Gessellschaft Wissen. Göttingen, 1878, 466-468)

[62] VOLTERRA V., *Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX*, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici, vol.I, Roma (Accademia dei lincei), 1909, pp. 55-65

A N N E X E

Lettres inédites de Gaston Darboux à Jules Houël
(conservées aux Archives de l'Académie des Sciences)

1872 - 1882

Lettre non datée de 1872 (précède la lettre du 26 avril)

"Permettez-moi de vous faire remarquer qu'il y a deux écoles de géomètres ici et ailleurs. 1. ceux qui admettent sans démonstration beaucoup de choses vraies-semblables comme celle-ci par exemple : toute fonction positive qui n'atteint pas zéro a un minimum (proposition parfaitement fautive du reste). Cauchy l'admet dans la démonstration que toute équation a une racine, ce qui rend la démonstration illusoire. 2. ceux qui veulent une rigueur absolue et qui prétendent tout démontrer et préciser, excepté bien entendu les axiomes."

Lettre du 26 avril 1872

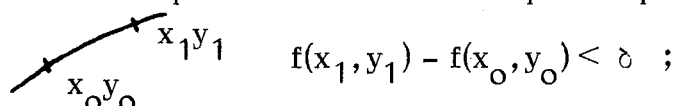
"Tudieu, mon excellent ami, vous n'y allez pas de main morte et vous m'arrangez de belle façon. Cependant j'espère cette fois que vous me donnerez pseudo raison. Je n'en demande pas davantage.

Le premier point est celui-ci :

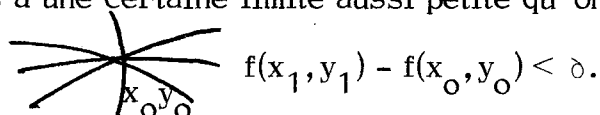
Cauchy démontre seulement que si le module a un minimum, ce minimum ne peut être que 0, mais il ne démontre pas que le module a un minimum. Cela vous paraît-il évident, soit. Mais comment se fait-il que ce fait ne soit pas exact pour les fonctions non continues. Il me semble que si vous prenez la fonction Ax^2 , A étant un de ces facteurs singuliers qu'on peut former dans le calcul intégral égal à 1, pour toute valeur de x entre 0 et 1, égal à 0 pour $x = 1$ par exemple, la fonction Ax quand x tendra vers 1 se rapprochera d'un maximum 1, mais ne l'atteindra pas pour $x = 1$ puisqu'elle devient nulle, alors. Cependant on pourrait le démontrer, il est évident que si elle a un maximum ce maximum est 1.

Concédez-vous ce point qu'il n'est pas démontré qu'une fonction continue ait une valeur minimum ou maximum entre certaines limites...

Il ne revient pas au même pour les fonctions de deux variables de dire : une fonction est continue quand on peut trouver autour du point x_0, y_0 une courbe telle que pour tout point x_1, y_1 à l'intérieur, $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) < \delta$ ou de dire : si, par le point x_0, y_0 on fait passer une courbe quelconque, sur chaque courbe $\lim(x_1, y_1) = \lim(x_0, y_0)$ quand x_1, y_1 se rapproche de x_0, y_0 . En effet admettons cette seconde définition et faisons passer par x_0, y_0 une suite de courbes, et sur chacune d'elles on pourra trouver un axe quelconque tel que



mais il n'est pas évident que pour toutes les directions possibles ces axes seront supérieurs à une certaine limite aussi petite qu'on le voudra α et qu'alors on aura



Voilà la question exposée. Accordez-vous le premier point ? Accordez-vous le second ? Après nous verrons.

Quant à Argand a-t-il exposé la démonstration de Serret avec les perfections incontestables qu'il y a dans cet ouvrage épuisé mais non dédié aux amis de l'évidence.

J'en doute fort jusqu'à preuve du contraire.

Ainsi soit $A = 1$ pour x entre 0 et 1

$A = 0$ pour $x = 1$

Ax^2 n'a pas de maximum."

Lettre du 30 avril 187? (probablement 1872)

"Votre lettre n'est qu'un aveu et cela me suffit. Vous n'avez rien à objecter, c'est évident. Du reste, je vous ferai remarquer que vous me parlez toujours de ces fonctions drôlatiques. Je ne les considère pas plus que vous. Mais il faut séparer le bon grain de l'ivraie par des caractères précis, et pour cela il ne faut admettre que ce qui est contenu clairement dans la définition d'une chose. Et bien il n'est pas évident qu'une fonction continue ait une valeur maxima qu'elle atteigne effectivement et voyez les conséquences qu'a votre manière de procéder."

Lettre non datée du 2ème semestre 1872 (publiée partiellement par P. Dugac)

"Quant à Gilbert le Grand Belge nous avons besoin d'agir avec prudence et il faut bien choisir notre moment pour lui asséner un coup terrible et dont ce Grand Belge ne puisse se relever. Il attaque Hankel. C'est bien. Hankel est de taille à répondre. Ecrivez lui puisque vous le connaissez et attendons. C'est là le premier point. Quand Hankel aura répondu d'une manière victorieuse, je n'en doute pas, nous arriverons à la rescousse et gare Gilbert. Nous aurons la partie d'autant plus belle qu'à Berlin il y a aussi des géomètres pointus et que Weierstrass a lu un article sur les fonctions continues que n'ont pas de dérivées. Je reprendrai la démonstration de Gilbert que j'affirme être fausse, sans l'avoir vue ; avec ses articles stupides des Nouvelles Annales, sur Saltet dans le Bulletin de l'Académie de Belgique et sur les Solutions singulières, je vous promets que nous l'assommerons. Mais prenons notre temps d'autant plus qu'ici Gilbert s'est fait un tort énorme par les dernières campagnes et puis nous venons de le louer dans le Bulletin, nous ne pouvons pas l'accabler tout de suite."

Lettre du 7 septembre 1872

"Vous avez dû recevoir (....) notre numéro d'octobre où figure ce diable d'article qui vous horripile. Vous avez là quelque chose de curieux et qui vous montre bien ce que font certains membres de l'Institut. Quand j'ai fait cet article en janvier, je crois, Bonnet m'a prié d'en suspendre la publication disant qu'il allait me donner dans huit jours un article sur le même sujet, je l'attends encore et remarquez que Bonnet était examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, ce qui ne lui imposait aucun travail, maître de conférences à l'Ecole Normale où il n'allait pas, professeur à l'Ecole des Beaux Arts où il se faisait suppléer, Suppléant de M. Chasles à la Sorbonne où il a fait vingt six leçons et où il a fini son cours en février. Vous comprenez qu'avec toutes ces occupations il n'avait pas le temps de me remettre son article et aussi a-t-il eu la gracieuse obligeance de me permettre de publier le mien."

Lettre du 24 septembre 1872

"... Vous m'avez montré un théorème qui ne me paraît exact qu'avec des restrictions. Si une fonction devient infinie, sa dérivée devient infinie.

Exemples,



des oscillations indéfinies. Vous voyez cela d'ici. Mais je prévois hélas votre réponse qui ne me paraît pas concluante. Toutes les fonctions qui mettent en défaut vos théorèmes sont des fonctions dont vous ne voulez pas vous occuper. Cela ne me paraît pas une raison car si votre raisonnement est exact, il doit reposer sur telles hypothèses qui écartent d'elles même une fois admises ces fonctions bizarres auxquelles vous ne voulez pas avoir à faire."

Lettre du 18 février 1873

"Gilbert m'a envoyé deux exemplaires de son fameux Mémoire et je l'ai parcouru. Rien n'est perdu mais si Gilbert rapporte exactement les raisonnements de Hankel nous sommes dans notre tort, Hankel s'est trompé dans ses raisonnements et il faudrait examiner les séries qu'il apporte de nouveau. Je me rappelle que je vous demandais des exemples. J'avais bien raison.

Heureusement que comme je l'avais prévu la démonstration de Gilbert est aussi fausse. En sorte que nous pourrions l'attrapper. J'ai bien envie de faire un article là-dessus. Voici le vice du raisonnement de Gilbert pour son premier théorème ; page 18, 2ème partie : il suppose qu'on puisse passer de x_0 à x pour deux séries de valeurs, les unes pour lesquelles les accroissements sont négatifs, les autres pour lesquelles les accroissements sont positifs. Or c'est facile de voir que cela est inexactement démontré. En effet, partons de x_0 et soit x_1 la plus grande valeur telle que $f(x_1) > f(x_0)$. Soit ensuite x_2 la plus grande valeur telle que $f(x_2) > f(x_1)$ et ainsi de suite. Rien ne prouve qu'en continuant indéfiniment ainsi on arrive à X . On peut tendre vers une limite inférieure à X et alors la démonstration de Gilbert tombe à l'eau. Je suis tout joyeux de voir que nous nous tirerons des griffes de Gilbert ; du reste j'en étais sûr a priori. K..... doit avoir le mémoire de Hankel. Je vais aller le chercher. Le sujet en vaut la peine."

Lettre du 18 mars 1873 (publiée par P. Dugac)

"Je viens de préparer la réponse à Gilbert, la première, et j'ai commencé ma semaine en traduisant ce qu'il y a de plus dur dans le mémoire de Riemann ("Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique").

Le mémoire de Riemann est un chef-d'oeuvre semblable à ces vieux tableaux dont quelques parties en pleine lumière vous font regretter ce que le temps a détruit ou ce que l'auteur a négligé.

J'attends le mémoire de Hankel ..."

Lettre du 24 mars 1873

"Vous êtes bien aimable de compléter la traduction du mémoire de Riemann. C'est le premier acte de la réponse à Gilbert. Il y a tous les principes nécessaires dans ce mémoire pour montrer une foule de fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. J'en ai indiqué l'autre jour plusieurs à la Société Mathématique. Mais il serait bien important d'avoir une réponse de Hankel que vous feriez bien de relancer. Il faut qu'il dise son opinion que diable."

Lettre du 30 mars 1873 (publiée partiellement par P. Dugac)

"Vous êtes bien aimable d'avoir fini le Riemann. Voilà un beau morceau et qui ne sera pas apprécié. Mais il y a une perle que tout le monde y découvrira je l'espère. C'est la définition de l'intégrale définie. C'est de là que j'ai tiré une foule de fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. J'en ai montré une l'autre jour à la Société Mathématique. Ce brave Gilbert va être vexé, mais je le ménagerai et tâcherai de l'écorcher sans le faire crier.

... Et Hankel, il est assomant. S'il continue à ne pas vous répondre, je l'éreinte. J'ai demandé la brochure. C'est ce qui me retarde. Espérons qu'elle finira par arriver et alors gare Gilbert."

Lettre du 12 avril 1873

"J'ai aussi reçu hier seulement le paquet qui contient Hankel et ma copie. ...

J'ai parcouru Hankel ; il est clair que Gilbert ne lui prête que les boulettes qu'il a commises ; mais comme Gilbert se trompe, nous pouvons garder nos avantages. Seulement cela va être long, je vous en préviens."

Lettre du 16 juin 1873

"Je trouve que Hankel n'est pas très net. La question n'est pas de savoir si Gilbert se trompe dans la partie positive de son Mémoire mais si lui, Hankel, a fait des raisonnements (faux) inexacts ou plutôt (il en a fait) s'il a un moyen de remplacer les raisonnements inexacts par d'autres rigoureux.

Gilbert est inouï. Il raisonne comme un Peau Rouge. Il dit le raisonnement de H. est faux (accordé) et il conclut la proposition de H. est donc fausse."

Lettre du 3 juillet 1873

"... A propos de Hankel, ce géomètre baisse décidément dans mon estime, il me paraît un singe de Riemann, mais les bottes que lui a portées Gilbert sont parfaitement justes et nous aurions été enfoncés si Gilbert après avoir démoli ses adversaires n'avait pas cédé à la malheureuse tentation d'édifier à son tour, mais hélas il a bâti sur le sable mouvant et il est obligé d'en faire son mea culpa."

Lettre du 9 décembre 1873

"... Pour ce qui concerne le Traité de Calcul infinitésimal vous savez que je vous ai toujours offert mes services. La divergence de nos idées s'oppose à ce que nous collaborions officiellement."

Lettre du 23 décembre 1873 (publiée partiellement par P. Dugac)

"J'ai reçu de mon côté la note de Schwarz et je l'ai lue avec plaisir.

Mon travail sur les principes est achevé. J'ai des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle donné. Je vous enverrai cette note et le mémoire de Hankel dès que j'en aurai terminé, ce qui ne tardera pas. Mais j'ai la tête cassée. Je vous prie de le croire.

Quant à votre point de vue sur le calcul différentiel, je ne sais trop si on peut l'admettre. Pour moi, je crois qu'il serait bon, par exemple, de démontrer avec rigueur le théorème des fonctions composées, le théorème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Remarquez que votre point de vue revient à dire : j'exclus toutes les fonctions pour lesquelles ma démonstration est inexacte. Alors à quoi bon faire une démonstration. Mais quoiqu'il en soit vous pouvez vous couvrir de l'exemple de Serret dont le calcul différentiel prête à des objections bien autrement graves que pour les autres traités. Je vous dirai même à ce propos entre nous que je trouve que son cours éreinte nos pauvres élèves sans leur apprendre grand chose

Voici quel est le plan de mon travail sur les principes du calcul différentiel. J'approfondis d'abord l'idée de limite et je montre que la condition nécessaire pour qu'un terme général d'une suite

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

ait une limite c'est qu'on puisse prendre n assez grand pour que

$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon \text{ en valeur absolue.}$$

Après cela je passe à la définition des fonctions continues, à leurs propriétés et je définis une classe de fonctions continues. Les séries dont les termes sont des fonctions de x donnent lieu à des distinctions que j'établis d'après les allemands. Il y a les séries également convergentes sur un intervalle donné (*gleichmäßig*) et celles qui ne le sont pas. Il y a une différence capitale entre ces séries. Après cela j'étudie la définition de l'intégrale de Riemann en la rendant rigoureuse (c'est bien long) et j'en déduis directement l'existence de fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. J'en donne une foule, développées en séries. Il y en a une qui n'est ni croissante, ni décroissante dans un intervalle fini. J'ai l'intention de terminer par quelques remarques sur les intégrales définies et les conditions sous lesquelles on peut différencier sous le signe $\int$ point qui est encore très difficile à élucider. Si on ne se moque pas de moi, je continuerai ces études petit à petit.

Lettre du 12 janvier 1874 (publiée partiellement par P. Dugac)

"Vous voyez que Schwarz est du même avis que moi sur la démonstration

Bonnet pour le théorème $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Je crois que comme je vous l'ai présentée, elle n'est pas trop compliquée. Quant aux théorèmes du calcul intégral, je crois de plus en plus que tout cela aurait bien besoin d'être repris à fond et que l'on devrait s'astreindre à une double loi, bien définir les hypothèses sur lesquelles on s'appuie, ne donner que celles qui sont nécessaires pour l'exactitude du théorème. Quant au

point de vue de l'enseignement, il me semble qu'il y a bien quelque avantage de ce côté à avoir la rigueur d'Euclide si c'est possible. Il faudrait qu'on n'eut plus à répéter le mot de d'Alembert, allez en avant la foi vous viendra. Si quelqu'un venait vous dire, je ne comprends pas l'égalité des triangles dans Euclide, vous ne lui diriez pas allez en avant la foi vous viendra, mais bien quelque chose comme ceci : mon ami vous êtes une oie, laissez là les mathématiques, retournez au Capitole. Pourquoi cette différence entre deux sciences qui devraient être également traitées."

Lettre du 19 janvier 1874

"Vous me demandez une réponse sur cette question. Une fonction algébrique ou quasi algébrique étant continue ainsi que toutes ses dérivées, sauf pour un nombre de valeurs fini dans un espace donné, quelles sont les propriétés que l'on peut admettre dans les théories générales ? Peut-on démontrer ou admettre que, si $f(x, \varepsilon)$ est infiniment petit d'ordre n pour ε infiniment petit quel que soit x , $D_x f(x, \varepsilon)$ sera un infiniment petit de même ordre ? A cela je réponds. On pourrait peut-être le démontrer sous certaines réserves, mais on ne doit pas l'admettre.

Pour ce qui concerne la question générale de l'enseignement du calcul différentiel voici ce que je soutiens. Il y a eu une époque où les géomètres grisés par la découverte du calcul différentiel et intégral ont fait des applications, sont allés en avant sans se préoccuper de la rigueur, en admettant un tas de choses plus ou moins bien limitées. Cette époque est passée depuis la publication de l'Analyse Algébrique. On a le droit actuellement de demander à un traité de calcul infinitésimal d'être ou d'essayer d'être dans l'exposition de la théorie, je ne dis pas dans les applications, aussi rigoureux que tout traité de géométrie. (Je parle de la géométrie des anciens car celle des modernes est du point de vue de la rigueur un micmac insensé). Voilà mon opinion.

Et remarquez que cela ne complique pas beaucoup. La démonstration, par exemple, que Bonnet a donnée du théorème des accroissements finis est d'une simplicité excessive ; elle n'admet qu'une hypothèse, c'est que la dérivée existe (si cela vous intéresse, je vous montrerai qu'elle subsiste même quand la dérivée devient infinie pourvu que ce soit de telle manière que la courbe $y = f(x)$ ait un point d'inflexion à tangente verticale, ce qui a lieu dans l'immense majorité des cas). Une fois cette démonstration admise vous démontrerez rigoureusement qu'une fonction dont la dérivée est constamment nulle se réduit à une constante, tout ce qui concerne la variation des fonctions, la série de Taylor, etc. J'ajoute que la démonstration Bonnet est plus simple que la démonstration Duhamel quoique vous vous obstiniez à soutenir le contraire....."

Lettre du 24 janvier 1874 (publiée partiellement par P. Dugac)

"Vous me demandez en quoi pêche la démonstration que vous insérez d'après Duhamel à la page 69 de votre traité.

Avant de vous répondre, je vous demanderai si dans l'ouvrage que vous voulez publier vous avez l'intention de faire comme plusieurs qu'il serait facile de nommer et de donner des quasi théorèmes qui sont généralement vrais mais qui peuvent être faux. Ou bien si vous avez l'intention tout en vous bornant aux fonctions les plus élémentaires d'énoncer d'une manière précise les restrictions et les hypothèses sur lesquelles s'appuient tous les théorèmes. En un mot voulez-vous introduire dans le calcul infinitésimal la rigueur de la géométrie ou vous contentez-vous d'à peu

près comme beaucoup de personnes. Dans ce dernier cas, vous ne seriez pas un élève de Duhamel et par conséquent je pense qu'avant tout vous devez tenir à la rigueur. Pour en revenir à votre démonstration, elle commence par un principe qui me paraît juste. Si ω est d'ordre n , dans tous les cas

$$\omega = \alpha^n X$$

X étant une fonction qui n'est ni nulle, ni infinie. Vous avez parfaitement raison à mon sens. Mais que savez-vous sur la dérivée de X ? Rien du tout. Pourquoi supposer qu'elle demeure finie ? Pourquoi n'introduirait-elle pas un dénominateur P , etc... etc. Donc je n'accorde pas qu'il soit démontré que $D_x X$ demeure fini. Premier point.

Exemple. Prenons

$$\omega = \alpha^n (x^2 + \alpha \sin \frac{x}{\alpha^n}).$$

Voilà un infiniment petit qui est à coup sûr de l'ordre n et qui satisfait à toutes les conditions auxquelles on reconnaît ces infiniment petits. Sa dérivée par rapport à x devient infiniment grande quand α est infiniment petit et je pourrai vous indiquer un nombre illimité d'exemples du même genre. Il est vrai que vous pourriez objecter à l'exemple précédent que suivant la valeur de $\frac{x}{\alpha^n}$ la dérivée

$$2x\alpha^n + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cos \frac{x}{\alpha^n}$$

est tantôt nulle, tantôt très grande ; mais à coup sûr elle n'est pas infiniment petite de l'ordre n .

.....

Pour le paragraphe 52, qui dans votre exposition est fondamental, j'ai aussi à vous présenter une objection qui est la suivante : vos quantités ϵ sont des fonctions de deux variables. Vous avez, par exemple, en posant $x_3 - x_2 = h$

$$f(x_2+h) - f(x_2) = h f'(x_2) + h \epsilon_2.$$

Il est clair que ϵ_2 est infiniment petit, fonction de x_2 et de h et dont vous connaissez l'unique propriété suivante : il tend vers zéro avec h quand x_2 reste fixe, mais alors je dis que vous ne savez plus ce qu'il devient quand, h tendant vers zéro, x_2 varie avec h , comme cela a lieu dans votre mode de décomposition.

Prenez, par exemple,

$$\frac{h_2}{x_1 - a + h}$$

quel que soit x_1 , pourvu qu'il reste fixe, cette expression tend vers zéro avec h . Mais si x varie, par exemple si l'on a

$$x_1 = a - h + h^4$$

alors l'expression se réduit à $\frac{1}{h^2}$ et devient infiniment grande quand h tend vers zéro.

Si je vous dis tout cela, c'est que j'ai la conviction qu'en vous attachant à la rigueur vous arriveriez à faire un traité de calcul infinitésimal ayant un intérêt exceptionnel.

A votre place, je lacherais le théorème sur les limites de sommes, qui ne vaut rien aussi, et bien d'autres choses. Avec le théorème des accroissements finis tel qu'il est démontré dans Serret vous pouvez élever un édifice solide. Ca et la définition de l'intégrale, il n'y a pas autre chose. C'est comme cela, je crois, que procède Weierstrass.

A propos de votre démonstration géométrique du théorème des accroissements finis, je vous dirai que j'ai rencontré dans mon travail des fonctions qui ne sont pas continues et qui ne peuvent aller d'une variable à une autre sans passer par tous les intermédiaires."

Lettre du 29 janvier 1874

"Mon cher ami, Ah oui, vous êtes un terrible homme car vous me répondez sans lire mes lettres. Je prends d'abord le point essentiel. Sur la fonction

$$\epsilon = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

vous ne savez qu'une chose. C'est qu'elle tend vers zéro, x restant fixé, quand h tend vers zéro. Est-ce vrai ? Dites-moi si vous admettez ce point. Cela étant, dans votre théorème vous faites varier à la fois h et x et vous les faites varier simultanément et vous admettez que ϵ tend vers zéro. Cela posé, la question suivante doit être introduite.

Un infiniment petit au sujet duquel on ne sait qu'une chose : il tend vers zéro avec h quand x reste fixe, et quelle que soit la valeur fixe de x , tend-il vers zéro nécessairement quand x varie en même temps vers zéro ? A cela, je réponds non et je reprends l'exemple $\frac{h^2}{x-a+h}$ même pour $x=a$. Cette expression tend vers zéro avec h , quel que soit x , pourvu que x reste fixe. Donc, il satisfait à tout ce que vous savez sur notre ϵ déjà nommé. Mais faisons varier x en même temps que h . Par exemple, posons $x-a+h = h^3$, alors x variera avec h comme dans votre théorème et l'expression $\frac{h^2}{x-a+h}$ deviendra égale à $\frac{1}{h}$ et croîtra indéfiniment. On n'a donc pas le droit d'admettre qu'un infiniment petit qui tend vers zéro avec h quel que soit x fixe, tend vers zéro quand x varie en même temps que h . Cela me paraît incontestable.

Revenons maintenant au théorème sur les infiniments petits. Je prends l'infiniment petit $\alpha^n(x + \alpha \sin \frac{x}{2n})$ et vous me dites "je suppose avant tout que

l'infiniment petit α^n , reste fini et continu et qu'il ait une dérivée pour toutes les valeurs de α de part et d'autre de zéro, zéro compris. Or, cette supposition écarte complètement des fonctions avec des $\sin x/\alpha$ ". A cela, je réponds non.

La fonction que je vous offre est finie et continue ; elle a une dérivée pour toutes les valeurs de x et de α , même pour $\alpha = 0$, puisqu'elle se réduit à zéro. Par conséquent, mon exemple subsiste. X a aussi une dérivée puisque pour $\alpha = 0$ il se réduit à x fonction bien définie. Quant aux démonstrations de Bonnet, vous ne voulez pas les lire."

Lettre du 4 février 1874

"... Quant à votre point de vue, d'après lequel vous introduiriez dans vos théorèmes toutes les restrictions nécessaires, il est évidemment inexact. Car du moment que je vous donne un exemple en contradiction avec vos propositions, quelque bizarre qu'il soit, il ne faut pas répondre : j'écarte votre exemple, mais bien : il y a dans le raisonnement un défaut que je n'aperçois pas, je vais le chercher.

Je prends par exemple votre article 52, et pour vous prouver que votre raisonnement est nécessairement inexact, je vous ferai remarquer que dans votre raisonnement, vous n'admettez qu'une chose, c'est que la dérivée existe dans le sens positif si $X \gg x_0$, comme vous le supposez. Ainsi si votre raisonnement est exact, j'espère que vous voudrez bien reconnaître qu'il s'appliquera à cette fonction pour laquelle

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe lorsque h tend vers zéro par des valeurs positives. Ce point me paraît incontestable.

Du moment que les seules hypothèses sur lesquelles repose un raisonnement sont maintenues les conclusions doivent subsister. Cela posé, soit $x_0 = 0$, $X = 2$; on aura, d'après vous,

$$f(2) - f(0) = \lim \left| f'(0) dx_0 + f'(x_1) dx_1 + \dots + f'(x_{n+1}) dx_{n+1} \right|$$

et je vous répète, la seule hypothèse sur laquelle vous vous appuyez dans le raisonnement, c'est que la dérivée existe dans le sens positif.

Cela posé, j'ajoute à $f(x)$ une fonction $\varphi(x)$ définie par les équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour } x = 0, \quad x < 1$$

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{pour } x = 1, \quad x < 1.$$

La dérivée de cette fonction, prise dans le sens positif, existe toujours et elle est égale à zéro. On a

$$\lim \frac{\varphi(x+K) - \varphi(x)}{K} = 0$$

K étant positif tendant vers zéro.

Donc, en posant $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ et en appliquant le théorème, j'aurai

$$F(2) - F(0) = \lim \sum F'(x_i) dx_i$$

et comme

$$F'(x) = f'(x)$$

$$F(2) - F(0) = \lim \sum f'(x_i) dx_i = f(2) - f(0)$$

c'est-à-dire

$$\varphi(2) - \varphi(0) = 1 - 0$$

ce qui est absurde."

Lettre du 16 février 1874 (publiée partiellement par P. Dugac)

".... Pour ce qui concerne les principes du calcul différentiel, nous ne pouvons pas nous entendre. Comment ? je vous dis à peu près : Vous faites un raisonnement ; s'il est bon, je puis l'appliquer dans les mêmes conditions à toute fonction satisfaisant à toutes les hypothèses nécessaires au raisonnement.

Or je prends le vôtre et vous en démontre l'inexactitude sur un exemple et vous me répondez à côté. Quant aux démonstrations de Bonnet que je vous signale, elles sont plus simples à mon avis que les vôtres et de plus elles résistent à toutes ces fonctions bizarres.

Vous pouvez mettre dans le premier quart de la première leçon de Calcul Différentiel le théorème des accroissements finis tel que le démontre Bonnet, et il domine alors toute la théorie. Du reste ce cours de Weierstrass que vantent tant les allemands me paraît taillé sur le même modèle ; et je crois qu'il y aurait eu un réel avantage pour vous à adopter cette démarche."

Lettre du 19 février 1874

"Mon cher ami, Que voulez-vous que je vous dise ? Vous ne voulez pas examiner mes objections. Quand on attaque un raisonnement, il y a plusieurs manières de le faire. La première consiste à dire à l'auteur : vous avancez là quelque chose que je ne puis admettre et pour tel et tel motif. Celle-là je l'ai employée. Après cela je vous ai donné des exemples dans lesquels vos propositions sont en défaut.

Mais aussitôt vous me dites, j'écarte toutes ces fonctions bizarres. Je n'en veux pas.

La question n'est pas qu'elles soient saugrenues. Il importe peu à mon avis que vous les admettiez ou que vous les rejetiez formellement. L'unique question est de savoir si vos raisonnements s'y appliquent mot pour mot, si elles satisfont à toutes les hypothèses et aux seules hypothèses sur lesquelles vous appuyez vos raisonnements et comme elles y satisfont vous n'avez pas le droit de les rejeter a priori en disant : je ne veux pas de fonctions pareilles. Vous avez beau inscrire sur la porte de votre édifice le Calcul Différentiel est la théorie des fonctions qui ont une dérivée ; pour mettre vos raisonnements en défaut j'ai le droit de prendre toute fonction pourvu qu'elle satisfasse, non pas aux conditions que vous énoncez sans vous en servir, mais aux seules conditions employées dans vos raisonnements.

.....

Ainsi, premier point, j'ai le droit de prendre tous les exemples possibles pourvu qu'ils satisfassent aux conditions de vos raisonnements et je soupçonne fort que votre définition d'exemples bizarres, saugrenus, coïncide avec la suivante, gênants, contraires au théorème. Deuxième point, je ne connais aucun exemple mettant en défaut les propositions de Bonnet (ne pas confondre avec toutes celles de Serret), en particulier la démonstration du théorème des accroissements finis. Quant à la manière dont vous définissez nos positions respectives, elle ne me paraît pas exacte. Vous voulez faire un traité sérieux, mais destiné à des commençants. Soit. Alors vous pouvez leur donner des démonstrations telles que votre aperçu géométrique sur le théorème des accroissements finis. Vous pouvez vous passer de démonstrations ou tout du moins donner les démonstrations peu rigoureuses, mais en ne vous faisant pas illusion à vous-même ce qui n'est pas le cas ici. En outre, je vous le répète, à mon avis vous gagneriez en simplicité à introduire la démonstration de Bonnet qui permet de mettre si l'on veut le théorème des accroissements finis et la série de Taylor dans la première leçon.

Quant au fond du dissentiment le voici très nettement expliqué en gros. Il y a à chaque instant dans le calcul différentiel des infiniment petits de cette forme $\varphi(x, \alpha)$ fonction de 2 variables, l'une finie x , l'autre infiniment petite α . Par exemple

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x).$$

La seule chose que l'on connaisse sur ces infiniment petits c'est qu'ils tendent vers zéro avec α , quand x reste fixe, et l'on admet à tort qu'ils continuent encore à tendre vers zéro quand, α tendant vers zéro, x ne reste plus constant mais varie infiniment peu. Cela peut être bizarre, mais je n'admets pas au sujet de ces infiniment petits $\varphi(x, \alpha)$ qui apparaissent dans toutes les questions fondamentales que, par cela seul qu'ils tendent vers zéro avec α , quel que soit x fixe, ils tendent aussi vers zéro quand x varie. Remarquez du reste que je pourrais vous citer une foule d'autorités qui sont de mon avis : Weierstrass, Bonnet, Thomae

Lettre du 16 avril 1874

".... En effet, au moment où je croyais la paix signée vous recommenciez les hostilités.

Soit $f(x)$ une fonction au sujet de laquelle je ferai simplement les suppositions suivantes. 1. $f(x)$ est continue entre a et b . 2. $f(x)$ entre les mêmes limites a une dérivée pour toutes les valeurs de x (sauf pour a et b qui n'interviennent pas dans la démonstration; il n'est pas nécessaire de supposer qu'il y ait une dérivée finie pour ces valeurs). Cela posé, je définis la constante M par l'équation

$$f(b) - f(a) - M(b-a) = 0$$

et ensuite, je considère la fonction

$$f(b) - f(x) - M(b-x) = \varphi(x).$$

Cette fonction est évidemment continue entre a et b et elle a une dérivée pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b puisqu'elle est la somme de $-f(x)$ qui jouit de ces propriétés et de fonctions simples, proportionnelles à x . Ce point étant admis, on a évidemment

$$\varphi(b) = 0 \quad \varphi(a) = 0.$$

Or on peut démontrer et on n'a aucune peine à admettre qu'une fonction continue qui varie de 0 à 0 quand x varie de a à b passe dans l'intervalle par une valeur plus grande en valeur absolue que toutes les autres correspondant à $x = x_1$. $b < x_1 < a$ par exemple, x_1 n'étant ni a ni b . On a donc

$$\varphi(x_1-h) - \varphi(x_1)$$

$$\varphi(x_1+h) - \varphi(x_1)$$

de même signe quel que soit h . Donc

$$\frac{\varphi(x_1-h) - \varphi(x_1)}{-h} \quad \frac{\varphi(x_1+h) - \varphi(x_1)}{h}$$

sont de signes contraires. Or ces deux rapports, d'après la définition de la dérivée et les hypothèses faites, ne peuvent tendre que vers une limite commune finie. Comme ils sont de signes contraires, cette limite est nécessairement zéro. Donc $\varphi(x_1) = 0$, $f'(x_1) = Mx_1$, $x_1 = a + \theta(b-a)$.

Je suis étonné de vous voir objecter à cette démonstration qu'elle est peu naturelle. Cela peut être vrai, mais ce n'est pas une objection à lui faire. Euclide n'est pas naturel. Le calcul intégral non plus. L'essentiel c'est d'admettre des notions ayant une grande portée et dispensant de considérations nouvelles. Or vous pouvez adopter le même mode de démonstration pour le théorème

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{\varphi'(x+\theta h)}{f'(x+\theta h)}$$

et dans un grand nombre de cas.

J'arrive maintenant à la démonstration que vous me proposez "la fonction $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ est infiment petite avec h quel que soit $x \geq x_0$, $x \leq X$, sa valeur dépend de h et de x . Pour chaque x elle sera plus petite que ε si $h < \delta_x$. La fonction δ_x de x a un minimum comme toute espèce de fonction, comme en a le $F'(x)$ dans votre démonstration", etc.

Ce sont vos expressions textuelles. Or je vous ferai remarquer que je ne suppose rien sur $F'(x)$ ni sur son maximum ou minimum. Il est vrai que j'admets qu'il y a une fonction allant de 0 à 0 et ayant un minimum. Mais quelque ingénieur que soit l'introduction de votre fonction δ_x , il y a entre elle et la mienne une différence capitale. La mienne est continue ; vous ne savez rien sur la vôtre, pas même si elle continue. Or admettre qu'une fonction qui peut être discontinue a des propriétés quelques simples qu'elles soient, c'est un peu hardi à mon avis. On peut fabriquer toute espèce de fonctions. Du reste, je pourrais vous fabriquer des exemples dans lesquels votre fonction n'est même pas continue. Alors l'idée de maximum ou de minimum disparaît complètement."

Lettre du 25 avril 1874

"... Je vous préviens seulement que ce n'est nullement pour vous empêcher de publier votre traité, mais tout au contraire pour contribuer dans la mesure de mes forces à le rendre aussi rigoureux que possible que je vous adresse mes objections et que je vous envoie des bombes qui peuvent fort bien être en caoutchouc mais en caoutchouc très durci, je vous prie de le croire. Ainsi, je ne vous critique pas, je ne contredis même pas vos affirmations actuelles ; elles ont bien assez de se contredire les unes les autres sans que je m'en mêle. Seulement je vous préviens que si vous conservez telle quelle votre exposition du théorème des accroissements finis et de ce qui s'y rattache, elle ne satisfera personne.

....

Vous comprendrez mon insistance sur ce point puisqu'il s'agit d'un théorème dominant le calcul infinitésimal et par conséquent l'entente sur ce point est une chose essentielle au point de vue des autres remarques que je pourrais avoir à présenter."

Lettre du 27 avril 1874

"Enfin, mon cher ami, nous allons pouvoir nous entendre grâce à votre résumé que je vais reprendre pas à pas. " $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée pour toute valeur de $x \geq x_0$ et $\leq X$ ", accordé, c'est l'hypothèse.

" $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ peut toujours, pour toute valeur de $h \leq$ une limite de H convenablement choisie, être rendue plus petite que K ", accordé encore. H devient ainsi une fonction de x définie par la phrase précédente. C'est du reste ce que vous reconnaissez par ce qui suit "la valeur limite H dépend de x mais n'est jamais nulle si K ne l'est pas", accordé encore.

"On peut toujours trouver une quantité H_0 , moindre que les valeurs limites, correspondant à un x quelconque, pris entre x_0 et X ", non accordé.

Ainsi, voilà le point précis de notre discussion et je pourrais vous arrêter là en vous demandant de me fournir une démonstration de ce dernier point.

... Remarquez premièrement que la démonstration que je vous propose admet bien qu'une certaine fonction a un maximum, mais cette fonction est continue et on peut démontrer qu'elle a un maximum. Votre fonction de x , la valeur limite H (j'adopte vos notations), est une fonction implicite. C'est la plus petite racine de l'équation en h

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = K.$$

Ainsi vous ne pouvez pas affirmer qu'elle soit continue (et dans ma correction elle ne l'est pas toujours). Peut-on maintenant admettre qu'une fonction (discontinue peut-être) et qui n'est jamais nulle reste toujours au-dessus d'une certaine quantité ? non.

Considérez par exemple la fonction $\varphi(x)$ définie par $\varphi(x) = 1$, $x \leq 0$, $\varphi(0) = 0$, il y a des fonctions de ce genre dans le calcul intégral, et formez $1 - \varphi(x)(1-x)$. Cette fonction sera égale à x , en général, sauf pour $x = 0$ elle devient égale à 1 . Elle n'est donc jamais nulle et pourtant, comme elle est égale à x pour des valeurs très voisines de 0 , elle sera au-dessous de toute quantité donnée.

Mais je vois arriver votre objection. Je ne veux pas entendre parler de telles fonctions. Vous ne pouvez pas le faire ici, puisque cette valeur limite H fonction de x que vous introduisez pour les besoins de votre démonstration, vous n'en êtes pas le maître...

Voilà donc la différence entre nos deux démonstrations. La mienne admet le maximum d'une fonction continue (point que l'on peut démontrer). La vôtre admet qu'une fonction discontinue qui n'est jamais nulle a un minimum, proposition plus que contestable puisqu'elle est fausse."

Lettre du 2 mai 1874

"... Cela posé, vous n'avez le droit de donner le nom de fonction à cette valeur H dépendante de x , qu'à la condition d'appeler fonction, toute variable définie d'une manière claire pour chaque valeur de la variable indépendante x entre des limites données.

D'après cela, si vous adoptez cette définition de la fonction, et je viens de vous prouver que vous êtes obligé de le faire, vous ne saurez pas grand chose sur H et j'aurai le droit de vous contester la proposition que vous voulez absolument regarder comme évidente. Voyez du reste à quelles conséquences inexactes vous êtes conduit. Ne soutenez-vous pas que toute fonction a pour valeur, pour $x = x_0$, la limite vers laquelle tend $f(x_0 + h)$ quand h tend vers zéro par des valeurs positives ou négatives. Et, bon dieu ! que devient cette limite quand la fonction est discontinue. On ne peut même pas en parler. Vous supposez donc implicitement que H est continue et c'est le point que je conteste.

Vous ferez ce que vous voudrez de mes objections. Mais descendez en votre for intérieur et dites-moi franchement s'il y a deux ans vous n'auriez pas accumulé contre moi les objections si j'étais venu vous raconter qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée. Vous m'auriez envoyé proposer en refusant de me lire comme vous le faites aujourd'hui, et pourtant "elle tourne".

... Mais cela me fait de la peine de voir que vous voulez absolument passer à côté de la seule exposition rigoureuse et simple du calcul différentiel pour vous faire critiquer par des Schwarz et des Gilbert et d'une manière très spécieuse car Gilbert a en partie eu raison contre vous dans la note qu'il a mise aux Annales."

Lettre du 21 mai 1874

".... Prenez une fonction égale à $\frac{1}{q}$ pour $x = \frac{p}{q}$ et à 1 pour x incommensurable. Elle ne sera jamais nulle entre 1 et 2 et n'aura pas de minimum.

Je sais bien ce que vous allez me dire, vous ne voulez pas de ces fonctions ; mais je vous répèterai pour la millièème fois que la fonction au sujet de laquelle nous discutons n'est pas de celles que vous puissiez écarter puisqu'elle s'introduit dans vos raisonnements sans que vous ayez le droit de ne rien supposer sur son compte."

Lettre du 9 décembre 1874

"Mon cher ami, Vous tenez donc à ce que nous recommençons notre discussion. Pour ma part, je ne demande pas mieux. Bien qu'il me manque une feuille de votre traité, je vais d'abord commencer par vous dire quels sont les points où selon moi vous n'êtes pas assez rigoureux.

Article 55. Si la fonction croît, la dérivée est positive ou nulle. Si elle décroît, la dérivée est négative ou nulle. Donc, si la dérivée est positive, la fonction est croissante. Si elle est négative, la fonction est décroissante. Mais qu'arrive-t-il si elle est nulle dans tout l'intervalle ? On ne le voit pas d'après les remarques que vous faites. En outre, vous prouvez bien que la fonction est croissante dans tout l'intervalle, si la dérivée est positive; en résulte-t-il que $f(x_1)$ est plus grand que $f(x_0)$ si x_1 et x_0 sont des valeurs de x dans l'intervalle telles que l'on ait $x_1 > x_0$?

Article 52. Vous savez ce que je vous reproche, je vous en ai parlé bien des fois. J'y reviendrai si vous le désirez.

Article 58. La quantité ε tendant vers zéro quand, $y+dy$ restant constant, dx tend vers zéro, vous ne pouvez rien conclure pour ce qui arrive lorsque dx , dy tendent vers zéro en même temps. C'est toujours ma remarque relative aux infiniment petits fonctions de deux variables. Par exemple $\frac{dx^2}{dx + dy}$ tend vers zéro quel que soit dy nul ou fini quand dx tend vers zéro, dy restant fixe. Mais si dy tend vers zéro, par exemple de telle manière que l'on ait $dx + dy = dx^3$, votre infiniment petit augmente indéfiniment. Cette objection se répercute sur votre théorie de la dérivée des fonctions composées.

126. Votre théorème IV est inexact. Je vous ai donné des exemples et du reste il ne sert pas.

154. Vous établissez le théorème des accroissements finis par une méthode qui suppose la continuité de la dérivée et qui est beaucoup plus longue que celle de Bonnet qui ne la suppose pas.

En outre, ce théorème des accroissements finis comprend comme simples corollaires tous les développements que vous donnez ensuite et démontrez par des méthodes directes.

Par exemple, pour la série de Taylor il faut simplement appliquer ce théorème à la fonction

$$f(a) - f(x) = \frac{a-x}{1} f'(x) - \dots - \frac{(a-x)^n}{1.2.3\dots n} f^n(x)$$

....

Vous voyez que je porte la guerre sur votre camp. Ne m'en veuillez pas. C'est que je voudrais que votre traité, d'excellent à tant d'égards, devînt tout-à-fait irréprochable. Si vous vouliez adopter la marche que je vous propose et accepter la démonstration Bonnet pour le théorème des accroissements finis, tout irait sur des roulettes. Quant à ce que vous me dites de mon travail, c'est bien vrai, mais ne croyez pas que ce soit l'ambition de l'Institut qui me guide. J'ai un but supérieur à celui d'arriver à l'Institut ; apprendre les mathématiques et rendre des services à mes élèves. Sur ce mon cher ami, Votre bien dévoué,"

Lettre du 12 décembre 1874

"Oui, nous avons de la peine à nous entendre et ce n'est pas ma faute. A chaque instant, quand je vous fais une objection, vous l'écartez pour des raisons qui équivalent à peu près à ceci : j'écarte les fonctions pour lesquelles l'objection est valable. Remarquez que je ne limite pas votre droit de traiter seulement certaines classes de fonctions, de faire dans les énoncés toutes les restrictions que vous voudrez, j'attaque seulement la logique de vos raisonnements.

(Darboux redonne alors l'exemple des infiniments petits à deux variables)

... Ainsi, je crois ainsi vous montrer clairement que vous admettez plus que vous ne savez, que vous faites une erreur de raisonnement et à cela que répondez-vous ? Montrez-moi une fonction où ε soit de cette forme. A coup sûr, je ne pourrais pas vous en montrer puisque le théorème est vrai ; mon but est de vous montrer que votre raisonnement remplace une supposition parfaitement admissible, par une autre qui n'est pas équivalente.

Et remarquez-le bien, il serait bien inutile de répondre : j'écarte les fonctions pour lesquelles on n'a pas le droit de faire cette substitution, car alors autant voudrait dire : j'écarte les fonctions pour lesquelles le théorème est inexact".

Lettre du 15 janvier 1875

(dans cette lettre Darboux propose un plan pour un traité de Calcul Infinitésimal)

- fonctions continues, leur définition, exemples, dérivées des fonctions simples ; théorème des accroissements finis (démonstration Bonnet arrangée) ; étude de la variation des fonctions.
- série de Taylor par le théorème des accroissements finis et par la démonstration que vous me donnez, de Sturm je crois ; infiniment petits d'ordres entiers, d'ordres fractionnaires, d'ordre nul ou infini.
- dérivée des fonctions de plusieurs variables.
- dérivée des fonctions composées (démonstration rigoureuse) ; différentielle, fonctions de plusieurs variables.
- dérivées d'ordres supérieurs (je vous ai quelque chose là-dessus) changement de l'ordre des dérivations.
- Note générale sur les séries, développement pour la série de Taylor et de Maclaurin, séries à plusieurs variables.

- changement de variables ; applications analytiques, théorème $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{f(x+h) - f(x)}$, vraie valeur de $\frac{0}{0} \dots$
- maximum, minimum, etc...
- applications géométriques.

Si vous tenez à l'introduction de l'intégrale dans le Calcul Différentiel, ce qui n'a plus de raison d'être avec les démonstrations que je vous propose, j'y consens. Vous le placerez où vous voudrez".

Lettre du 18 janvier 1875

"Voici la démonstration du théorème : si $f'(x) = 0$, $f(x) = \text{cte}$ comme vous l'exposez. Je la reprends. Soit x_0 et x_1 , 2 valeurs de x entre lesquelles la dérivée $f'(x) = 0$. Je pose

$$x_1 - x_0 = nh$$

et j'ai les équations

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\varepsilon_1$$

$$f(x_0+2h) - f(x_0+h) = h\varepsilon_2$$

$$\dots \dots \dots f(x_1) - f(x_0+(n-1)h) = h\varepsilon_n$$

d'où

$$f(x_1) - f(x_0) = \frac{x_1 - x_0}{n} + (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n).$$

Or lorsque n augmente indéfiniment toutes les quantités ε et par conséquent la plus grande en valeur absolue η tendent vers zéro, etc....

Voici ce que je reproche à votre raisonnement que personne ne trouve plus rigoureux. Quand on pose

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \varepsilon,$$

ε est une fonction de deux variables x et h qui tend vers zéro quand x , restant fixe, h tend vers zéro. Mais si x et h varient comme dans votre démonstration, bien mieux, si à chaque nouvelle subdivision des intervalles $x_1 - x_0$ il naît de nouvelles quantités ε , je n'y vois plus clair du tout et votre démonstration n'a plus qu'une apparence de rigueur. Ceci est tellement vrai que vous seul vous entêtez et qu'elle a été abandonnée par tous les professeurs de spéciales d'ici.

Supposez, par exemple, que vous divisiez les intervalles en 2, puis ceux-ci en 2 égaux, et ainsi de suite. Quand vous aurez 2^n intervalles la subdivision en amènera 2^{n+1} et il naîtra 2^n quantités ε . Je suppose que chacune de ces quantités qui naissent tendent vers zéro mais commencent toujours par être supérieures à $1/2$ par exemple. Vous verrez que la démonstration ne s'applique plus. Vous ne pouvez vous tirer de là que de deux manières différentes. 1. en changeant la démonstration, ce que je vous conseille. 2. en prouvant que si une fonction a toujours une dérivée entre x_0 et x_1 on peut trouver une quantité h telle que pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1 et toutes les valeurs h_1 de h plus petites qu'une certaine limite, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) < \varepsilon,$$

étant prix fixe, mais aussi petit qu'on le veut, ce qui est difficile. Pour rendre rigoureux tout cela, vous seriez obligé de faire quelque chose de lourd et d'impossible. Toutes les

fois que vous calculeriez une dérivée $f'(x)$ vous seriez obligé de démontrer que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

est un infiniment petit quand h tend vers zéro et x varie, tendant vers une certaine limite. Comment pourriez-vous faire cela pour les dérivées des fonctions composées, des fonctions de fonctions, etc... Je ne vous parle pas des autres points, les objections sont les mêmes, elles sont universellement acceptées ces objections par Thomae, Weierstrass, et tous les autres. On reprocherait beaucoup à votre traité de ne pas en tenir compte. Il n'y a que deux moyens d'établir rigoureusement le théorème des accroissements finis, le calcul intégral et la démonstration de Bonnet que du reste je donnais moi-même dans mon cours. Présentez-là comme cela :

Première leçon, définition de la dérivée ; accroissements finis.

Soit la fonction

$$\varphi(x) = f(a+h) - f(x) - M(a+h-x)$$

où M définie par

$$f(a+h) - f(a) - Mh = 0.$$

La fonction s'annule pour $x = a$ et pour $x = a+h$. Dans l'intervalle, elle passe donc par un maximum. Pour ce maximum, la dérivée est nulle, donc $M = f'(a + \theta h)$.

Supposons maintenant le théorème établi. Vous démontrez très simplement tout ce qui se rapporte à la variation des fonctions.

((Ainsi que ce qui se rapporte))

aux dérivées des fonctions composées.

Que diable voulez-vous que je vous dise de plus.

Ainsi, en résumé, je ne vous approuverais pas de conserver les démonstrations pour le théorème fondamental des accroissements finis et je vous indique pourquoi. Demandez à Bourget s'il trouve rigoureuse votre démonstration du théorème, si $f'(x) = 0$ etc... du théorème des accroissements finis, il vous répondra que non. Demandez-le à Painvin, à qui vous voudrez.

Lettre du 24 janvier 1875

".... Il importe peu que les théorèmes établis soient plus ou moins généraux, mais il importe beaucoup d'habituer les jeunes gens à raisonner juste et c'est une condition à laquelle ne me paraît pas satisfaire votre exposition des principes du calcul infinitésimal.

....

Pour que votre exposition soit juste, il faudrait que vous puissiez démontrer que ε donné, on peut toujours trouver h tel que

$$\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} - f'(x) < \varepsilon$$

pour toute valeur de x comprise entre les deux limites, θ étant plus petit que 1. Or c'est ce que vous ne prouvez pas et si vous voulez le prouver vous aurez une marche très compliquée.

La seule marche que je connaisse et qui soit conforme aux principes est la méthode si simple que j'essaie en vain de vous faire adopter. Essayer donc un peu comme application de votre méthode de démontrer que l'équation

$$\frac{\Delta_n f(x)}{\Delta x_n} = f'_n(x + n\theta h)$$

et vous verrez un peu si vous aurez une marche aussi simple que celle que je vous propose.

Les objections que vous adressez à la méthode Bonnet ne sont véritablement pas équitables. Elle est très naturelle ; quoi de plus simple que d'admettre qu'une fonction qui va de 0 à 0 passe par un maximum en valeur absolue.

La simplicité avec laquelle tout se déduit d'un principe uniforme est loin de se rencontrer dans la vôtre où vous mêlez calcul différentiel et calcul intégral. Voyez ce que deviennent vos théorèmes si on veut les énoncer rigoureusement. Parmi les fonctions satisfaisant à cette condition que pour chaque valeur de ε on peut trouver une valeur de h telle que $\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} < \varepsilon$, celles dont la dérivée est constamment nulle sont des constantes.

Alors chaque fois que vous prendrez une dérivée et que vous voudrez appliquer les théorèmes fondés sur la supposition précédente, vous serez donc obligé de vérifier si elle est satisfaite. Allez donc le faire pour les fonctions de fonctions et les fonctions composées.

Allez donc un peu m'expliquer, je vous prie, pourquoi si l'on prend la règle des fonctions composées la dérivée de $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, on trouve $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ce qui pour $x = 0$ est indéterminée tandis que la vraie valeur est $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0$, et pourtant il n'y a là que des sinus et des puissances de x . Vous craignez de paraître copier Serret. Si vous persistez dans votre méthode vous paraîtrez copier tout le monde. Voilà tout.

Ainsi en résumé, pour défendre votre méthode, vous êtes obligé d'admettre un principe dont il faudra faire la vérification à chaque instant et qui transformera la science en quelque chose d'empirique et cela parce qu'il ne vous semble pas que la démonstration de Bonnet soit naturelle. En outre vous ferez des raisonnements inexacts pour

$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}$, pour la dérivée des fonctions composées, etc. quand vous auriez un avantage énorme de simplicité et de nouveauté à adopter la méthode la plus exacte."

Lettre du 31 janvier 1875

".....

Je vous demandais de m'expliquer pourquoi la fonction $x^2 \sin \frac{1}{x}$ qui a une dérivée pour $x \neq 0$ met en défaut la règle de la dérivée des fonctions composées. Car

$$y = x^2 \sin \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Vous lisez que cette fonction n'a pas de dérivée pour $x = 0$. Là n'est pas la nature de l'objection que je vous ai adressée. Je vous ai dit, d'après la règle des fonctions composées ((la vôtre)) on a

$$\frac{dy}{dx} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

expression indéterminée pour $x = 0$, tandis que, d'après le raisonnement primitif, la dérivée est parfaitement déterminée, elle est nulle. Si vos méthodes sont bonnes, il faut que vous puissiez m'expliquer très nettement quel point de votre raisonnement est en défaut dans le cas actuel. Sans cela vos démonstrations ne sont pas des démonstrations.

Ainsi voilà la première question que je vous adresse. En second lieu, il n'est nullement exact de dire que, supposer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ quand h tend vers 0, et supposer qu'on puisse trouver pour chaque ε une quantité h telle que $\frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} - f'(x) < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites, soient une même chose absolument parlant. Il y a un abîme entre ces deux propositions et en voici la preuve.

Imaginez une fonction pour laquelle on aurait

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{h^3}{x - a+h}.$$

La première supposition serait vérifiée, la seconde ne le serait pas.

Quant à vos observations qu'il importe peu que vos théorèmes s'appliquent ou ne s'appliquent pas à de telles fonctions, je tomberai d'accord avec vous sur ce point. Mais il importe beaucoup que vos raisonnements soient justes et que si certains exemples mettent vos règles en défaut, vos élèves soient en mesure de dire pourquoi. Sans cela vous justifierez ceux qui prétendent comme la Gournerie, que le Calcul Infinitésimal est une affaire d'expérience et qu'il est vrai parce que, jusqu'ici, on n'a pas pu prouver le contraire.

Remarquez bien que c'est là que vous en êtes. Quant aux démonstrations de Bonnet, il est vrai qu'elles sont présentées de manière peu attrayante mais cela peut s'arranger."

Lettre du 2 février 1875

"Non, nous ne sommes pas aussi près de nous entendre que vous voulez bien le dire et cela par votre faute. Je vous répète que je ne fais pas plus de cas que vous des fonctions bizarres, que je ne tiens pas à les introduire, mais j'ai le droit de vous demander de raisonner juste dans un livre élémentaire.

Quand je vous présente l'exemple de $x^2 \sin \frac{1}{x}$ auquel la règle des fonctions composées ne s'applique pas, j'ai le droit de vous demander comment il se fait que votre raisonnement ne s'y applique pas. Et c'est sur ce point que vous êtes muet. Il ne suffit pas de dire : je l'écarte a priori, mais il faut montrer que vos raisonnements ne seraient pas applicables ici et c'est ce que vous ne faites pas. C'est du reste une condition à laquelle satisfait pleinement la démonstration que je vous ai proposée. En sorte que si vous ne montrez pas comment les suppositions faites dans votre raisonnement excluent cet exemple et ceux du même genre, j'aurai le droit de dire qu'il manque de netteté ou qu'il est inexact.

Je ne complique pas les raisonnements "pour le seul plaisir d'englober des fonctions comme $x^2 \sin \frac{1}{x}$ " mais je tiens à raisonner juste et à donner des théorèmes et non des à peu près de théorèmes. Voilà tout.

Quant à la question de la dérivée, cette fois vous déplacez la question. Il est clair que pour une valeur x_0 de x , dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

c'est la même chose que de dire : on peut trouver h telle que

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

pour cette valeur de h et pour toutes les valeurs plus petites. Mais il y a un abîme entre cette proposition et la suivante :

Etant donnée une fonction $f(x)$ qui a une dérivée pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b , on peut à toute quantité ϵ faire correspondre une quantité h telle que

$$\left| \frac{f(x+\theta h) - f(x)}{\theta h} - f'(x) \right| < \epsilon$$

pour toute valeur de x comprise entre a et b .

Car il est bien certain que pour toute valeur x_1 de x comprise entre a et b , il y aura une quantité h_1 telle que

$$\frac{f(x_1 + \theta h_1) - f(x_1)}{\theta h_1} - f'(x_1) < \varepsilon,$$

mais rien ne prouve ni n'exige que lorsqu'on fera varier x_1 entre a et b cette quantité h_1 demeurera au-dessus d'un certain minimum h .

Par exemple, la fonction $f(x_1)$ étant telle que pour $x = \frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ étant réduit à sa plus simple expression $h_1 = \frac{1}{q}$, vous voyez qu'entre a et b , h_1 n'aurait pas de minimum, que vous ne pourriez pas appliquer la seconde proposition, la première étant toujours vraie. Donc elles ne sont pas identiques.

Ainsi en résumé la définition de la dérivée vous donne pour chaque x_1 une quantité h_1 telle que

$$\frac{f(x_1 + \theta h_1) - f(x_1)}{\theta h_1} - f'(x_1) < \varepsilon.$$

Vous ajoutez pour obtenir l'autre proposition que h_1 demeure, quand x varie de a à b , au-dessus d'un certain minimum h . Cette seconde supposition n'est ni prouvée, ni même vraie.

Si je vous tourmente sur les principes du calcul infinitésimal, c'est que je voudrais vous voir produire quelque chose de véritablement neuf, la rigueur au lieu de l'à peu près de Duhamel et de ses prédécesseurs qui a donné lieu au mot délèbre de d'Alembert. allez en avant et la foi vous viendra. Non, on ne peut exposer toutes ces choses là comme de la géométrie. Savoir ce que l'on admet, ce qu'on démontre et c'est un grand point. Ce besoin de netteté est si répandu que Moigno a un succès fou, malgré ses démonstrations indigestes, dans les universités anglaises et allemandes. On commence à tenir à la rigueur et j'ai la conviction que vous vous trouveriez bien de suivre mes conseils."

Lettre du 25 février 1875

"... Vous exposeriez très bien, si vous suiviez mes idées, ce que Serret a gâté. Vous vous obstinez pour une vétille.

Il s'agit d'un point très délicat où je voudrais vous voir réformer des idées universellement admises et faire oeuvre de novateur."

Lettre du 27 novembre 1875

"Pour ce qui concerne ce fameux théorème des accroissements finis, je vous ai dit: votre démonstration n'est pas bonne à moins que vous n'admettiez pas un certain point Λ qui n'est pas vrai pour toutes les fonctions. Vous m'avez dit : mais j'exclue les fonctions pour lesquelles ce point Λ n'est pas vrai

...

Je vous ai proposé alors de prendre cette démonstration du théorème des accroissements finis qui se trouve dans le cours de Serret, dans celui de Weierstrass et qui n'admet pas le point Λ .

....

Ce point Λ est le suivant : si un infiniment petit $f(x, y)$ s'annule toujours quand, x restant fixe, y tend vers zéro, il ne s'annule pas nécessairement quand x et y varient.

Exemple : $\frac{y^3}{x - a + y}$ tend vers zéro avec y quel que soit x fixe, mais si x varie et tend vers a par la formule $x - a + y = y^4$, l'infiniment présumé devient infiniment grand. A titre de renseignement, je dois vous dire que depuis que des objections de cette nature ont été faites, ici même dans les Cours de Spéciales, on a adopté la marche que vous attribuez à Serret et qui n'est pas plus à lui qu'à un autre. (Elle serait dans tous les cas à Bonnet)."

Lettre du 21 octobre 1875

"Je vous ai proposé un autre plan pour le commencement et vous n'avez pas voulu me croire.

.... Si vous m'aviez écouté, vous auriez fait un traité comme il n'y en a pas encore."

Lettre du 27 décembre 1880

"Je ne demanderais pas mieux que de discuter avec vous sur tout ces principes du Calcul Infinitésimal que Mansion d'ailleurs agite sans les bien comprendre.... Quand une fonction est finie continue et réelle et que l'on considère toutes les valeurs de la variable x comprises entre a et b , la fonction a une certaine valeur minimum qui est effectivement atteinte pour une valeur de x comprise entre a et b ou égale à une des valeurs extrêmes. Vous considérez ce théorème comme évident et je le veux bien, je crois que j'en ferai de même si j'écrivais un traité élémentaire, mais la preuve qu'il n'est pas évident, c'est qu'il y a des fonctions discontinues pour lesquelles il n'est pas vrai. Du moment qu'un théorème n'est pas vrai pour toutes les fonctions, il est clair qu'il a besoin d'être démontré dans le cas des fonctions auxquelles il est applicable.

Remarquez que vous insérez une belle démonstration de Cauchy pour prouver que si une fonction continue varie de a à b , elle passe par toutes les valeurs intermédiaires. Or ce théorème à l'époque où Cauchy l'a énoncé et même plus tard, une foule de gens le considéraient comme évident."

Lettre du 1er mai 1880

"Quant à ce qui concerne les intégrales définies, la différentiation sous le signe $\int$ il est certain que ce sont des questions difficiles et que si l'on vous attaquait du bon côté, vous auriez de la peine à répondre. Mais ceci n'est pas un reproche à vous faire spécialement. Bouquet et moi, nous avons vérifié que pas une des démonstrations de Serret où l'intégrale a une de ses limites infinie n'est exacte."

Lettre du 2 janvier 1882

"Je crois que nous ne nous entendrons pas sur la discussion relative au maximum et au minimum. Je prends la fonction

$$\left| 2 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u(x^2 + y^2 + 1) \cos u}{u} du \right| (x^2 + y^2 + 2).$$

Voilà une fonction qui, tant que x et y sont différents de zéro, est égale à $x^2 + y^2 + 2$. Elle est donc toujours supérieure à 2 dont elle s'approche autant qu'on le veut lorsque x et y deviennent de plus en plus petits. Cependant si l'on fait $x = y = 0$ sa valeur devient brusquement égale à 3. Vous voyez donc bien que voilà une fonction

qui n'atteint pas la valeur qui marque la limite minimum de toutes les valeurs qu'elle prend dans une étendue quelconque comprenant l'origine."

Lettre du 11 février 1882

"Vous me demandez si votre démonstration donnée p. 245-246 de votre premier volume (....) est rigoureuse. Je ne vous cacherai pas que je préfère celle de Serret et la vôtre manque surtout de développement. Mais je ne vous engage pas à faire un carton, car les objections qu'on peut lui faire ne doivent pas à mon avis être à leur place dans l'enseignement élémentaire. Votre démonstration s'applique certainement à toutes les fonctions que vous avez considérées dans votre ouvrage."

Lettre non datée (probablement de 1875)

".... Je vous rattraperais sur ces fonctions saugrenues et vous prouverais que ce n'est pas d'elles qu'il est question mais de ce principe de logique.

Toutes les fois qu'un raisonnement A conduit à une conclusion B sans écarter expressément une hypothèse H (voilà le hic) et que B' fondée sur H est contraire à B le raisonnement est faux ou incomplet."

Lettre non datée

"Du reste, je vous ferai remarquer que vous me parlez toujours de ces fonctions drôlatiques. Je ne les considère pas plus que vous. Mais il faut séparer le bon grain de l'ivraie par des caractères précis, et pour cela il ne faut admettre que ce qui est clairement contenu dans la définition d'une chose."

