PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

85.05

LES FONCTIONS RESURGENTES
(en plusieurs volumes)

Jean ECALLE

Tome III : L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux.

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) : 30A20 - 34A20 - 34A35 - 34C05 -
34J05 - 34J10 - 39A10 - 39A15 -
39A30 - 40H05 - 44A10 - 32B30 -
32G13 - 53B99 - 32C40 - 32H99 -

Secondairement : 22E65 - 30A84 - 30A98 - 32C40 -
34A05 - 34E15 -

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

85.05

LES FONCTIONS RESURGENTES

(en plusieurs volumes)

Jean ECALLE

Tome III : L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux.

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 8 : LA NIHILENCE ET LES PETITS DIVISEURS . LES CAS HAMILTONIEN ET ISOCHORE.

CHAPITRE 9 : LA QUASIRESONANCE ET LES TOUT-PETITS DIVISEURS.

CHAPITRE 10 : LE CAS PLURITEMPOREL. RESULTATS UNIVERSELS.

CHAPITRE 11 : CONCLUSION ET COMPLEMENTS.

AVANT-PROPOS

Ce livre continue la série sur les Fonctions Résurgentes - un domaine dont nous avons inauguré l'étude il y a dix ans exactement. L'ampleur du sujet nous a toutefois conduit à revoir le plan initial. Ce qui était annoncé pour le tome 3 a dû être réparti en deux volumes (tomes 3 et 4). Et d'autres tomes suivront, qui n'étaient pas prévus à l'origine (*).

Le présent tome 3 couvre la classification analytique des objets locaux, c'est-à-dire tous les champs de vecteurs et tous les difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^\nu$, à quoi nous avons ajouté, pour faire bonne mesure, les équations différentielles locales ainsi que les équations aux différences à coefficients méromorphes à l'infini. On dégage la notion d'invariant holomorphe et l'on construit, dans chaque cas, un système complet de tels invariants. Tout repose sur les fonctions résurgentes et le calcul étranger.

A quelques exceptions près, comme le bref chapitre 9, les résultats présentés ici sont inédits. Une version manuscrite abrégée fut cependant achevée en 1983 et diffusée en quelques exemplaires sous le titre "Sept problèmes de classification analytique". Quelques aspects particuliers ont également été exposés en séminaires et regroupés dans "Cinq applications des fonctions résurgentes" (Prépub. Orsay, 1984).

Ce nous est une joie de remercier ici M. Bernard MALGRANGE, qui l'un des premiers s'est intéressé à notre travail sur la résurgence et n'a pas peu contribué à le faire connaître. Ce livre lui est dédié. Notre reconnaissance va aussi à Jean MARTINET et à Jean-Pierre RAMIS, dont les travaux géométriques nous ont

(*) En particulier :
Tome 4 : La synthèse des objets locaux
Tome 5 : Introduction à la résurgence quantique
Tome 6 : Représentations étrangères des algèbres et groupes de Lie.

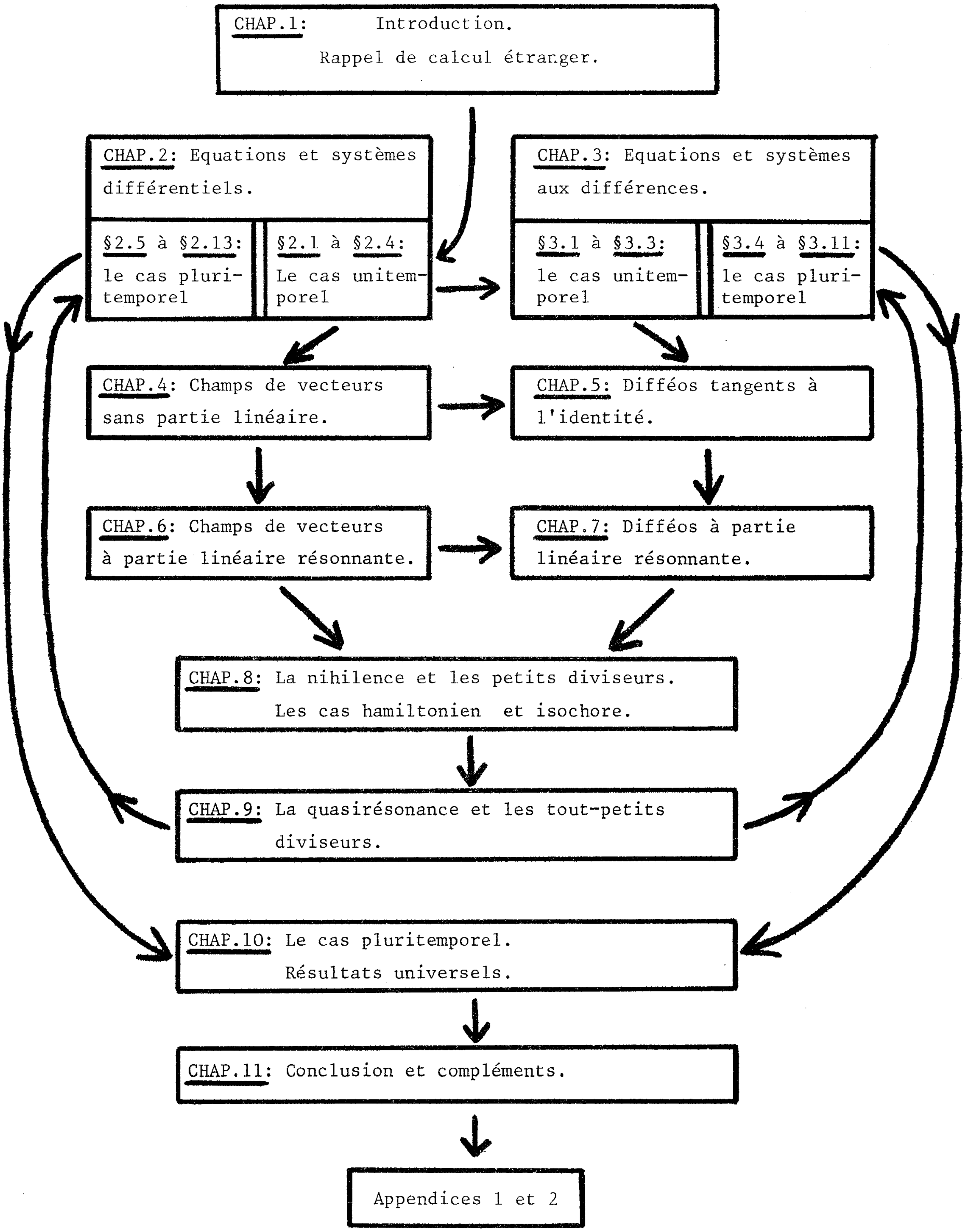
ramené à l'étude des objets locaux à une époque où nous nous orientions vers d'autres questions. Merci aussi à I. KUPKA, N. KUIPER, D. RUELLE, J.-P. KAHANE, F. PHAM, A. DOUADY, R. THIBAULT, R. MOUSSU, J.-P. ECKMANN, A. VOROS qui nous ont invité à parler en séminaire ou en colloque, ou qui ont eux-mêmesprésenté tel ou tel de nos résultats. Merci enfin à ceux qui ont relu certains passages du manuscrit, notamment G.K. IMMINK, que n'a pas rebutée le premier jet, combien imparfait, du chapitre 3 sur les équations aux différences.

<u>Orsay, juin 1985</u>

<u>ADDITION</u> (<u>novembre 1985</u>)

Depuis l'achèvement du manuscrit, nous avons constaté chez certains de la réticence à admettre que les méthodes de ce livre s'appliquent à tous les cas, y compris aux <u>problèmes à plusieurs niveaux</u> et <u>à plusieurs générations</u>. Bien que ces questions soient déjà traitées aux chapitres 2,4 et 10, nous avons rédigé deux Appendices qui les reprennent par le menu et qui donnent, pour les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$, des formules totalement explicites et garanties convergentes. Ces deux Appendices ont été regroupés dans une brochure annexée à ce livre (pp 586-630). Répétons avec force que le calcul étranger permet de calculer effectivement <u>TOUS</u> les invariants holomorphes de <u>TOUS</u> les objets locaux, linéaires ou non linéaires, en toute dimension, sans exception ni restriction aucune.

ARTICULATION ET SYMETRIES DU LIVRE



FOREWORD

The present volume continues our series on resurgent functions and alien calculus, but no thorough acquaintance with volumes 1 or 2 is required. Indeed, the sections 1.3 and 1.4 of the introductory chapter provide a vade-mecum of alien calculus and go some way towards making the present volume 3 self-contained.

1. Classification of local objects.

As its title says, this book sets itself the task of analytically classifying all local objects, in any finite dimension ν . By local objects we originally meant local analytic vector fields or diffeomorphisms of $\mathbb{C}^{\nu}$, but we later found it convenient to include local differential or difference equations with meromorphic coefficients. Though written last of all, the chapters dealing with such equations were consigned to the beginning of the book, where they logically belong. This resulted in the overall articulation and symmetries depicted on page 9 .

With a deliberate constructive bias, we set out to classify the objects under review by means of systems of scalar invariants (with respect to analytic changes of coordinates). A preliminary investigation reveals these invariants to fall into three classes (formal, holomorphic, metaholomorphic) and traces their origin to no more than three possible causes (resonance, quasiresonance, nihilence).

Formal invariants may either take a discrete range of values or depend rationally (or algebraically) on finitely many coeffients of the object. Holomorphic invariants are holomorphic functions of the object, viz. its Taylor coefficients. Since they are assumed to be non formal, they must effectively depend on infinitely many coefficients : hence their fascination. Lastly, those invariants that are neither formal nor holomorphic and cannot be derived from either, are lumped together into the pariah class of metaholomorphic invariants.

Now, to the causes of invariance. Local objects picked at random won't, of course, exhibit any invariants other than their multipliers, i.e. the eigenvalues of their linear part. When, however, those eigenvalues satisfy resonance relations (additive or multiplicative depending on whether one has to do with vector fields or diffeomorphisms), not only does the number of formal invariants increase dramatically, but there also appear enumerably many holomorphic invariants. Observe that, in the case of diffeomorphisms, resonance includes tangency to identity : it is therefore a fairly common occurence. Metaholomorphic invariants, on the other hand, occur only exceptionally, in cases of quasiresonance or nihilence. Quasiresonance, predictably, means that the multipliers "very nearly resonate", i.e. fulfil certain exceedingly stringent Liouvillian conditions. Nihilence is an equally strong, but less unnatural requirement, since it is often met by hamiltonians or volume-preserving objects and a few others besides.

In a nutshell, these three causes operate as follows : resonance creates vanishing denominators. Nihilence gives rise to small denominators, like those haunting classical mechanics. Quasiresonance induces so-called tiny denominators, which have precious little to do with the small denominators, apart from their common nuisance value.

Metaholomorphic invariants cannot, by definition, be expanded in power series of the object's coefficients. In fact, they are markedly freakish and certainly non-constructible, at any rate in scalar form. So all one can do is register their existence, accurately describe under which conditions they occur, and... forget about them. This is all the more legitimate as, with the notable exception of hamiltonian systems, there is not the slightest risk of their occuring in any natural context.

The formal invariants, at the other end of the spectrum, are faily elementary. They have no subtlety, no mystery about them. They hardly deserve to be studied for their own sake, yet they have an oblique use : that of paving the way for the computation of holomorphic invariants. Even so, it turns out that not all formal invariants are required for that purpose, but only a handful of them : namely the discrete invariants along with very few, elementary algebraic invariants. Still, even the other (useless) formal invariants will materialize along the road, as a by-product of our study of formal integrals (see below).

Thus, what really matters are the holomorphic invariants. But why restrict oneself to the complex field ? The answer is, first, that results on $\mathbb{C}$ easily particularize to results on $\mathbb{R}$ and, second, that no such problems arise on p-adic fields : local objects on those fields possess no holomorphic invariants. As to the strategy of giving priority to classification over collateral questions, its rationale is simply that, whatever the local object at hand, classification is by far the most fundamental and comprehensive problem, the one that holds the key to most other questions, such as : existence of invariant manifolds, of analytic orbits, of fractional or continuous iterates of diffeomorphisms, etc...

2. The formal integral.

The way to compute the holomorphic invariants of a local object is by forming its formal integral $x(z,u)$. If the local object under investigation is a vector field $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ or a local diffeomorphism $f : x_i \mapsto f_i(x)$, the formal integral is nothing but a resurgent, parameter-saturated solution of the dynamical system :

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\, x_i(z,u) = X_i(x_1(z,u),\dots,x_\nu(z,u)) \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

or of the system of difference equations :

$$(2) \qquad x_i(z+1\,,\,u) = f_i\big(x_1(z,u),\ldots,x_\nu(z,u)\big) \qquad (i=1,\ldots,\nu)$$

Let us elaborate a little. The letter u stands for $\nu-1$ parameters u_i , dependence upon which has to be entire. The formal integral is either resurgent in the variable z itself (basic complex time) or in a variable z_p (parallel time) simply related to z :

$$(3) \qquad z_p = z^{p_0}(\log z)^{p_1}(\log\log z)^{p_2}\ldots(\log\ldots\log z)^{p_r} \qquad (p_i \in \mathbb{Q})$$

Actually, one doesn't attempt to solve either (1) or (2) directly in the algebra of resurgent functions in z (or z_p), for generally speaking that would be impossible, but in extensions of that algebra by elementary blocs $z^{[n]}$ which, as their name suggests, are fairly simple functions : usually exponentials in z or z_p .

We thus get formal integrals of the shape :

$$(4) \qquad x(z,u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n \, z^{[n]} \, \varphi^n(z) \qquad \Bigg\| \qquad u^n = u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

or

$$(4\text{bis}) \qquad x(z_p,u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n \, z_p^{[n]} \, \varphi^n(z) \qquad \Bigg\| \qquad x(z,u) = \big(x_1(z,u),\ldots,x_\nu(z,u)\big)$$

with n ranging over a subset $\mathcal{N}$ of $\mathbb{Z}^{\nu-1}$ and with components φ^n resurgent in z or z_p . Needless to say, one doesn't go over from (4) to (4bis) by crudely effecting the change of variables (3), but by a more intricate procedure.

3. The bridge equation.

At this point we are helped out by two finiteness theorems. The one asserts that for each parallel time z_p there exist (upto elementary rescaling) only finitely many z_p-resurgent solutions to the equations (1) or (2). The other says that there are only finitely many critical times z_p, that is to say, parallel times such that the corresponding formal integrals possess at least some non-vanishing alien derivatives (with respect to z_p).

To comfort the reader, we may remark that in most problems one encounters only one critical time, namely z itself. Very often, too, there exists only one formal integral $x(z,u)$. So one should not be put off by the apparent intricacy of the times z_p in (3). Their use is restricted to situations of unusual complexity, such as objects with several levels or generations.

Now, and that's the beauty, all holomorphic invariants of a local object can be read from its formal integral(s) with the help of alien calculus. Where there is more than one such integral, the invariants contributed by $x(z_p,u)$ are said to be of order P. But no matter what the number of integrals, each of them satisfies the so-called bridge equation, which reads :

$$\text{(5)} \quad \dot{\Delta}_\omega \, x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \, x(z,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

or, if there are several critical times :

$$\text{(5bis)} \quad \dot{\Delta}_\omega \, x(z_p,u) = \mathbb{A}_\omega \, x(z_p,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega^P)$$

Here, $\dot{\Delta}_\omega$ denotes the alien derivation operator with respect to z or z_p and the index ω ranges over an enumerable set Ω or Ω^P, generated by the object's multipliers, of first or P-th order. As for the symbols $\mathbb{A}_\omega$ appearing on the right-hand side, they denote ordinary differential operators in z and the u_i. Equation (5) or (5bis) thus casts a bridge between alien and classical calculus : hence its name(*).

The operators $\mathbb{A}_\omega$ are subject to a number of easily describable constraints, such as commuting with ∂/∂_z (if they stem from a vector field X) or with the translation $\exp \partial/\partial_z$ (if they stem from a diffeomorphism f). Furthermore, these $\mathbb{A}_\omega$ have the essential property of being holomorphic invariants. Taken together, they even constitute a complete set of holomorphic invariants for the object under study.

4. Actual computation of the invariants.

We may account ourselves lucky, for rarely in mathematics does so vast a problem admits of such a short, tidy answer. We are in fact trebly fortunate :

(i) in having a uniform solution, neatly encapsulated in the bridge equation
(ii) in being able of actually computing the $\mathbb{A}_\omega$ by means of the same equation
(iii) in having the option, if we so desire, of using explicit formulae for the $\mathbb{A}_\omega$

Let us make our meaning clear. Everything in the procedure leading up to the invariants is constructive from start to finish, and so is the end product : the bridge equation fully determines the operators $\mathbb{A}_\omega$. In fact, it overdetermines them, enabling one to cross-check the numerical results.

Now, this procedure via the bridge equation is the most economical method for computing the invariants of one given local object. If, on the other hand, one wishes for explicit solutions, i.e. closed formulae giving the $\mathbb{A}_\omega$ directly in terms of the local object's Taylor coefficients, one may have that too : when properly exploited, the above construction yields the required formulae. These exhibit many interesting features, such as a perturbation-coperturbation involution.

(*) A less flippant justification, along with some insight into the larger background of general resurgence, may be found in § 11.10.c.

As might be expected, the explicit formulae aren't too simple. All the same, they are manageable and an appropriate combinatorics (relying on the so-called moulds) makes it possible to handle them effectively. Besides, the mere existence of such formulae is gratifying, in view of the innumerable mathematical situations (think of the problem of computing the conformal invariants of a disk with several holes in it) where they are lacking.

5. Advice to the reader.

As pointed out, the book was originally intended to cover only local vector fields and diffeomorphisms, both in the unitemporal (one critical time $\mathfrak{z}_p$ only) and pluritemporal case (many $\mathfrak{z}_p$). We later included two chapters on differential and difference equations, covering in particular the vexed question of many-levelled equations, that is to say, equations whose Newton polygon has more than one slope. In other words, this book, from its own vantage point, deals with the worst singularities that differential or difference equations over the complex field may present. The corresponding developments, however, are long-winded and conceptually trickier than most of the subsequent chapters. So, to avoid getting bogged down in technicalities ahead of time, the reader is advised to proceed as follows : peruse carefully the introductory chapter; then have a look at the easier parts of chapter 2 (upto § 2.5) and chapter 3 (upto § 3.4); then go through the central part of the book (chapters 4 to 9), which deals with unitemporal fields and diffeos; then revert to the skipped-over sections of chapter 2 and 3 to get acquainted with concrete instances of multitemporal objects; then turn to chapter 10, which deals with multitemporality in the most general setting; and wind up with chapter 11, which opens further vistas (on object synthesis and related topics).

This recommended reading sequence is summarized by the arrows on page 9 . Of course, the reader interested only in differential equations and vector fields should confine himself to the left-hand side on page 9 .

6. Reflecting on resurgence.

Modern mathematics is becoming so distressingly complex and labyrinthine that one should think twice before encumbering it with new concepts. Alien calculus, however, can bulster its claim to admission into this overcrowded world by pointing to the fact that, quite apart from breaking considerable new ground, it also simplifies and orders everything it touches. It is definitely not a chaos increasing factor : it does away with more cobwebs than it introduces! Indeed, its efficiency, as measured by the ratio of returns (in tangible results) to investment (in new apparatus) is staggering .

The present book deals with only one application of alien calculus. There are scores of others, to which further volumes will be devoted.

Volume 4 will deal with the synthesis (canonical or otherwise) of local objects, i.e. their reconstitution from the invariants $\mathbb{A}_\omega$. This fascinating subject, which throws up two new types of resurgence (synthesis res. and collateral res.) has been practically left out of the present book, but sections § 11.1 to § 11.4 give a foretaste of its difficulties.

Volume 5 will attempt to give an overview of so-called quantum resurgence. Research along these lines was initiated by BLOCH, BALIAN and VOROS in the semi-classical treatment of the one-dimensional Schrödinger equation, but the notion of "planckian parameter" and of rigid resurgence (in that same parameter) was later found to transcend the framework of quantum mechanics. These topics are fleetingly touched upon in section § 11.9 of the concluding chapter of this book.

Volume 6 will attempt a systematic exposition of the so-called alien representations of Lie algebras or groups. A few cursory indications may be found in section § 11.9 at the end of this book.

This list doesn't come anywhere near to exhausting the possibilities of resurgence theory. Each year brings its new spate of mathematical and physical applications. One of the latest and most momentous breakthroughs might well be the discovery by J.-P. ECKMANN, P. WITTWER and K. GAWĘDZKI of the part played by resurgence in renormalisation theory. Within mathematics itself, mould theory, so intimately connected with alien calculus, seems to hold great promises. All these developments must eventually find their way into systematic books but it would be premature at this stage to commit oneself to anything too definite.

So much about the uses of resurgence theory. But even if we mentally divest that theory of all its applications and retain only its bare essence, it still stands before us as a self-effulgent little gem of enthralling harmony, well worth a single-minded study. The crux of the matter is that the algebras of alien derivations have the distinction of being the only natural incarnation of infinite-dimensional, free Lie algebras. By way of consequence, resurgent functions and their alien derivatives take us right to the heart of total non-commutativity. Here, rather than in any particular application, lies probably the ultimate reason behind their importance and fecundity.

There is also the (not unrelated) fact that alien analysis caps complex analysis, in the sense that nearly all natural problems with analytic data but without analytic solutions lead to formal power series which turn out to be resurgent in some appropriate variable. Viewed from that angle, the world of resurgent functions is almost coextensive with the world of divergent expansions.

Lastly, alien derivatives, being totally irreducible to ordinary derivatives, can lead to the construction of "alien manifolds". On top of their finite number of ordinary (real or complex) dimensions, such manifolds possess an infinite number of "off-tangent" dimensions, each locally geared to a given $\dot{\Delta}_\omega$. Although time only can show what such speculations are worth, they already suggest tantalizing alternatives to the on-going quest for "curled-up" dimensions as possible adjuncts to space-time. (see § 11.11).

May the books of this series, for all their imperfections and provisional character, evoke the reader's interest and guide his first steps in the wonderland of resurgence.

Orsay, june 1985

THE NEED FOR MATHEMATICAL MANDALAS

1. Is prose fully adequate to mathematics ?
2. What mathematical mandalas should look like.
3. What mathematical mandalas might achieve.
4. Some practical suggestions.

The vastness of the area covered in this book induced us to pay greater attention to the clarity of the exposition than to the completeness of the proofs, which are often sketchy, especially when they merely develop or modify earlier arguments. No wonder, then, if the present volume reads in places more like a digest of commented results than a regular mathematical treatise. This terseness is deliberate and need not be apologised for. Nor does it undermine reliability, as all the gaps can easily be filled by the conscientious reader.

But the book has a more serious flaw, about which we feel deeply unhappy : its perceived failure to convey the utter simplicity and transparency of the underlying ideas. At the beginning, we undertook to tell how a baffling variety of local objects could be classified by means of a single equation the size of a postage stamp. But, try as we may, there was no short way to tell the story ! Instead of a postage stamp we ended up with an unwieldy, circumvoluted book running into the 600 typewritten pages. And we noticed with dismay how the beauty inherent in the subject now lay buried under a forbidding rubble-work. A galling defeat, no doubt, and yet one that seems almost inescapable as long as one sticks to classical modes of exposition.

Is there a way out of this predicament ? Couldn't we devise a more direct means of communicating mathematics, an alternative language that would distort to a lesser degree the simple ideas which are the life-blood of any theory ? We feel certain the solution exists and must be sought in the form of large mathematical posters, or mandalas as we prefer to call them, which would present the gist of a theory in a graphic, compellingly attractive manner. To test the idea, we shall attempt forthwith to compress the whole of resurgence theory with its main applications into a single, oversized mandala, designed to serve as a companion to this book. But we would like a few fellow mathematicians to join in this venture and come up with some mandalas of their own. To convince them, let us press here, very briefly, our case for mathematical mandalas.

1. Is prose fully adequate to mathematics ?

"Prose" here refers to the usual linear, discursive way of expounding mathematical facts —— the familiar blend of plain text (definitions, arguments, statements) and symbolic accompaniment (formulae, equations, elementary diagrams) with its heavy emphasis on logical consistency and scant regard for readability. Those who resort to "prose" —— you and me —— are of course well aware that, when communicating mathematics, they ought to be communicating "understanding". In-depth understanding, however, is a hard-won attainment, something that comes from living for months or years with a problem. In the nature of things, it cannot be passed on like that, on command. So, with this impossibility in mind, we resign ourselves to writing formal papers and still more formal books. The result tends to be both uninspiring to the reader and disappointing to the author. The hapless reader finds himself grappling with a dull, soulless concatenation of definitions and statements, all of which appear to be of equal significance or insignificance. The author, for his part, realizes with dispair that the elation which initially gripped him, sustained him during his research and impelled him to write, has all but subsided, or at any rate has left no perceptible trace in the end product. No matter how hard he strove to make his subject come to life, to put across his motivations, to explain the why and wherefore of everything, he finds at the end of the day that the compulsions of the genre "prose" have got the better of him.

We usually seek solace in the thought that the reader, after duly wading through the morass, will somehow pick up the nuggets of living truth which are all that matters. That he will eventually get the "feel" of the subject and develop his own intuitive grasp of it. As for the toil involved (on both sides !) in this dreary process, we regard it as an inevitable price to pay, a necessary tribute to the nature-given barriers on instant communicability. And we shrug off the notion that there might exist a more ductile medium for ideas than squalid "prose", a means, as it were, of translating each flash of creative mathematical vision into a pregnant pattern of mind-stirring symbols capable of kindling in the beholder a commensurate flash of recognition. The question is : are we right ?

We might well be labouring under a false conception of what mathematics really is about. Currently, we prize theorems and their proofs above all else. The while, we tend to forget that the hall-mark of great mathematical ideas is their compelling simplicity or self-proving beauty together with their capacity to interact with a host of other ideas. We blind ourselves to the fact that (in Atiyah's words) "theorems are no more than signposts" in the mathematical landscape, and proofs simply "a check on our understanding" or the flights of our imagination. Indispensable though they be, they shouldn't be mistaken for the essence of mathematics (*).

(*) Illuminating proofs should be valued more as illuminating than as proofs —— indeed, they ought to be regarded as being part and parcel of those ideas which they prove. On the other hand, hard theorems of which there exist only technical, unilluminating proofs are likely to be either prestigious dead-ends, or else deep results still awaiting a good proof.

Now, if mathematics is three quarters about meaning, harmony and interrelations, and only one quarter about mere truth, then it stands to reason that two-dimensional "pictures" must be a more adequate medium for it than "prose". Hence the idea of expressing the gist of mathematical theories through large-size drawings of mandalas, which would harness all the resources of an artful typography to bring out the essence and life of mathematical ideas —— thus bypassing the doubly wasteful process of translating live meaning first into the drudgery of formal prose, and then back into meaning, or some semblance of it.

2. What mathematical mandalas should look like.

Mathematical mandalas should be compact of truth, beauty and power. Each one should carry its main ideas, enthroned in glory at the centre and radiating their light into the outer circles. Consequences and applications should be seen gravitating at varying distances, in the proper arrangement, and each presented in such a way as to attract an amount of attention proportionate to its importance. Formulae and basic statements (definitions and theorems) should hold sway but, whenever feasible, the main links in the proofs should be indicated in small print. References to other mandalas and to mathematical literature in "prose" should also be mentioned in minute, unobtrusive print.

The optimal size and internal arrangement of mandalas will have to evolve through trial and error, but we visualize them as having the size of large posters, say 200 cm x 150 cm. As to shape, most would tend to be rectangular, but some might be oval or circular (in keeping with the etymological meaning of mandala - see below). Clearly, each theory, with its own symmetries, would call for a specific ordering pattern. Internal boundaries and sub-boundaries would enhance clarity, while a system of arrows would indicate the circulation of ideas and instil life into the whole structure. Through the use of background colours, each linked by convention to a definite area of mathematics, one could make plain in which of these areas each theorem or proof is grounded. Printing types of various sizes and thickness would reveal what is important and what is less so; bring out clearly the function of each item; and help the trained eye find its way through the maze of displayed information.

3. What mathematical mandalas might achieve.

They would not aim at displacing conventional textbooks or articles, which will always remain the ultimate reference and must go on functioning as guarantors of mathematical truth, but rather at complementing them within an optimal symbiosis, by conscientiously acting out their part, which is to bring tangible order into the mathematical jungle and to flash out essential meaning at the onlooker.

Each mandala could encompass a huge amount of selected, graded, predigested, easily graspable mathematical information. Like geographical maps, they might vary in size and scale. They might overlap, too. A dozen or so large-scale mandala might suffice to cover the whole of elementary mathematics. Then anything between 50 or 150 small-scale mandalas could deal with most of classical mathematics (over 15 or 20 years old). Lastly, an unspecified number of provisional mandalas, subject to frequent revision, would take care of more recent advances, including theories still in the making.

Mandalas would render an invaluable service to the mathematical community. They would boost general mathematical culture, help create an overview, foster a sense of interrelatedness, mitigate the feeling of helplessness which is engulfing most of us before the flood of current mathematical production. They would reveal really seminal ideas, chart out the front of mathematical research, highlight conjectures worth attacking in priority.

Indeed, the chances are that mandalas would promote a new, healthier outlook on mathematics. They would impress on all and sundry the need for synthesis and counteract the desiccating effects of overspecialisation. They could also channel the current publish-or-perish pressures on postgraduates into more meaningful avenues than the mass-production of trash. And there is little danger that the idea might be perverted or that it might, in unscrupulous hands, degenerate into cheap promotional gimmicks. Quite the opposite : under this new mode of presentation, lack of substance could not be concealed and gratuitous theories would stand exposed.

Mandalas would be far easier to write and bring up to date than conventional books. Far cheaper, too. Comparison of mandalas of different vintage (available on demand in library archives) would, like nothing else, allow an insight into the genesis and growth of theories. Mandalas would also take specialists out of their isolation and help new theories receive their due of attention. Students who want to choose their future speciality knowingly, and not at haphazard as is often the case, would find apt guidance in them. So would mature mathematicians wishing to switch specialities, or simply to have a go at something else once in a while.

4. Some practical suggestions.

Mathematical mandalas would be stored in department libraries, folded up map-wise or in scrolls. They could also be pasted all over the walls of the corridors and lecture halls, where people would study them at leisure. Indeed, the total wall surface of even the smallest mathematical department would be enough to accommodate a complete collection of them, providing what would amount to a mural encyclopedia of mathematics. If designed artfully, mandalas would also be a feast to the eye, besides being a precious prop to memory.

But for the idea to catch on, ten enterprising mathematicians should take the lead and go about mandalizing those theories of which they have an intimate knowledge. The next step would be to approach a publisher and coax him into attempting the venture.

Once the idea is afloat, it will be carried by its own momentum. Standards will improve with time, the art will be perfected, definite rules and conventions will crystallize.

Ph.D. students should also be encouraged to mandalize their results. Or, as doctoral theses seldom have enough substance in them to fill a mandala, they ought to mandalize those larger theories into which their own contribution fits. If successful, their work ought to be published and circulated.

The new genre ought to gain academic recognition. Mandalas ought to be refereed and reviewed, on a par with conventional papers or books.

Here, we feel, is a promising field for collective endeavour, a scheme apt to humanize mathematics and bring mathematicians closer to one another. The idea certainly deserves a trial. Let us translate it into reality !

About the word "mandala". To designate the objects we have just described, there were three possible words to choose from : poster, map, mandala. Poster and map we dismissed as being insufficiently evocative. Máṇḍala (stress first syllable) simply means "circle" in sanskrit, but the word acquired a highly specific meaning in later Buddhism and Tantric Hinduism, where it came to designate elaborate symbolic diagrams that were used as a support for meditation. "A mandala is a representation of the universe, a consecrated area that serves as a receptacle for the gods and a collection point of universal forces. The meditator, by mentally entering the mandala and proceeding towards its centre, identifies with the forces depicted therein and is by analogy guided through the cosmic power processes of disintegration and reintegration" (Encycl. Brit.) "Mandalas help the meditator create a significant and valid inner cosmos and become one with it (...) everything that has coagulated in his psyche is liquified and integrated into one great upsurging experience" (Anagarika Govinda). Though rather pretentious, the word mandala conveys an exact idea of what we would like to introduce into mathematics : powerful diagrams loaded with meaning and serving the purpose of mental integration.

CHAPITRE I. INTRODUCTION : RESONANCE, RESURGENCE, INVARIANCE.

SECTION 1.1. LES TROIS TYPES D'INVARIANTS : FORMELS, HOLOMORPHES, METAHOLOMORPHES.

1.1.a. Typologie des invariants.

Ce livre se propose de classer une très large gamme d'objets locaux (champs, difféos...) au moyen d'invariants scalaires, autrement dit de fonctions $I = I(\mathcal{Ob})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, calculables à partir des coefficients de Taylor $\{a_n^i = a^i_{n_1,\ldots,n_\nu}\}$ de l'objet $\mathcal{Ob}$, et invariantes par rapport aux changements de coordonnées locales.

Qui souhaite mettre de l'ordre dans la masse des invariants I a le choix entre deux points de vue :

(i) il peut regarder par rapport à quels changements de variables (formels, analytiques, Gevrey etc...) les I sont invariants.

(ii) il peut aussi regarder la nature de leur dépendance (discrète ou continue, rationnelle ou algébrique, holomorphe...) par rapport à l'objet $\mathcal{Ob}$, c'est-à-dire à ses coefficients a_n^i.

La typologie que nous adopterons s'inspire des deux points de vue à la fois. Elle distingue trois types principaux d'invariants : formels, holomorphes, métaholomorphes.

1.1.b. Invariants formels.

Ce sont les $I = I(\mathcal{Ob})$ qui sont invariants relativement à tout changement de variables formel. On est conduit à envisager deux sortes d'invariants formels : les invariants discrets (tels la dimension ν, le nombre de générations, les degrés de résonance ρ, les niveaux p, etc...) et les invariants continus, qui peuvent être pris algébriques ou même rationnels. Les invariants algébriques ou rationnels ne sont définis (ou plus exactement : ne jouissent de leur propriété d'invariance) que sur chaque classe discrète (c'est-à-dire sur chaque domaine de de constance des invariants discrets) et leur forme dépend évidemment de la classe discrète envisagée.

Pour naturel qu'il paraisse, le partage en invariants discrets et en invariants rationnels ne va pas entièrement de soi. Comment en effet écarter les invariants discrets indésirables, par exemple de la forme $J(\mathcal{O}b) = En(|I(\mathcal{O}b)|)$, où I est un invariant rationnel, $|I|$ sa valeur absolue, et $En(|I|)$ la partie entière de celle-ci ? Inversement, comment justifier la rétention, parmi les invariants discrets, des degrés de résonance ν (voir ci-après) alors que la donnée des multiplicateurs λ_i (qui sont des invariants algébriques) ou de leurs fonctions symétriques (qui sont des invariants rationnels) détermine entièrement l'entier ν ?

La notion qui permet de s'y retrouver et d'effectuer le bon partage est celle de <u>domaine de rationalité</u>. On appelle ainsi tout ensemble $\mathcal{D}$ d'objets :

(i) qui est globalement invariant par changement de variables formel

(ii) qui est défini par une condition de la forme

$$(1.1.1)\quad \begin{cases} P_1(\mathcal{O}b) = 0 \quad \underline{\underline{et}} \quad P_2(\mathcal{O}b) = 0 \quad \underline{\underline{et}} \quad P_3(\mathcal{O}b) = 0 \ \ldots \\ Q_1(\mathcal{O}b) \neq 0 \quad \underline{\underline{ou}} \quad Q_2(\mathcal{O}b) \neq 0 \quad \underline{\underline{ou}} \quad Q_3(\mathcal{O}b) \neq 0 \ldots \end{cases}$$

pour une collection finie ou dénombrable de fonctions P_i et Q_i qui sont polynomiales en l'objet, i.e. en ses coefficients de Taylor.

(iii) qui possède un système complet d'invariants rationnels, c'est-à-dire un système $\mathfrak{J}$ composé d'invariants $I = I(\mathcal{O}b)$ rationnels en l'objet et tel que, pour toute paire $\mathcal{O}b_1$, $\mathcal{O}b_2$ d'objets de $\mathcal{D}$, l'identité $I(\mathcal{O}b_1) = I(\mathcal{O}b_2)$ pour tout $I \in \mathfrak{J}$ entraîne la conjugabilité formelle de $\mathcal{O}b_1$ et $\mathcal{O}b_2$.

Cette définition acquise, <u>on réserve le nom d'invariants discrets aux invariants formels qui sont constants sur tout domaine de rationalité</u>. Inversement, <u>les domaines de constance des invariants discrets sont dits classes discrètes (*).</u>

Fixons une classe discrète $\mathcal{C}$ et considérons les objets $\mathcal{O}b$ qu'elle contient. <u>Les coefficients de Taylor qui</u> peuvent varier arbitrairement sans que $\mathcal{O}b$ sorte de

(*) Ce sont en quelque sorte les domaines de rationalité maximaux. Voir § 1.1.f.

$\mathcal{C}$ sont dits coefficients secondaires. Les autres sont dits coefficients primaires. Ces derniers sont en nombre fini (*) et sont astreints, dans leur ensemble, à un certains nombre d'égalités $P(\mathcal{O}\!\ell) = 0$ ou d'inégalités $Q(\mathcal{O}\!\ell) \neq 0$.

Les invariants formels rationnels (ou algébriques) qui ne dépendent que des coefficients primaires sont dits invariants primaires. Les autres sont dits invariants secondaires.

Dans ce livre, nous ne nous intéresserons à la classification formelle qu'accessoirement, comme préalable au calcul des invariants holomorphes. En fait d'invariants formels, nous aurons surtout besoin des invariants discrets (la dimension ν, le nombre de générations, les niveaux k, les degrés de résonance ρ, etc...) et des invariants algébriques primaires (essentiellement, les multiplicateurs λ_i, les directeurs χ_i, etc..., qui engendrent les réseaux de résurgence). Quant aux invariants algébriques secondaires, ils n'ont aucune incidence sur le calcul des invariants holomorphes et ils ne nous retiendront guère. Nous obtiendrons toutefois, comme sous-produit de notre recherche des invariants holomorphes, le moyen de les calculer tous.

1.1.c. Invariants holomorphes.

Ce sont les $I = I(\mathcal{O}\!\ell)$ qui non seulement sont invariants relativement à tout changement de variables analytique, mais encore dépendent holomorphiquement de l'objet.

Précisons un peu. On pourrait imposer aux invariants holomorphes d'être définis holomorphes sur l'ensemble de tous les objets d'une catégorie et d'une dimension données, mais ce serait une exigence exorbitante, puisque même les invariants formels rationnels ne la satisfont pas. Inversement, les invariants holomorphes étant destinés à affiner la classification formelle, on pourrait leur demander simplement de dépendre holomorphiquement de l'objet $\mathcal{O}\!\ell$ sur telle ou telle classe formelle. Mais cette

(*) Sauf sur les classes discrètes nihilentes (Voir chapitre 8).

définition, du coup, serait beaucoup trop lâche. La bonne notion se situe à mi-chemin:

Définition 1.1.1. (Notion d'invariant holomorphe).

Une fonction $I = I(\mathcal{O}\!\ell)$ de l'objet analytique local $\mathcal{O}\!\ell$ est dite invariant holomorphe si elle est définie holomorphe sur une classe discrète (domaine de constance des invariants discrets), si elle est invariante relativement aux changements de variables analytiques et si elle est indépendante des invariants formels.

Cette dernière clause signifie simplement que I ne doit pas être constant sur les classes formelles d'objets analytiques. Elle vise à exclure de la famille des invariants holomorphes les invariants rationnels ou algébriques et tout ceux qu'on pourrait en déduire.

La définition ci-dessus montre que la recherche des invariants holomorphes est largement indépendante de la classification formelle : son seul préalable est la classification discrète.

Notons aussi qu'avec notre définition les invariants holomorphes $I(\mathcal{O}\!\ell)$ apparaissent comme fonctions entières de l'infinité des coefficients secondaires de $\mathcal{O}\!\ell$ (que l'on désigne par le symbole $\underline{\underline{\mathcal{O}\!\ell}}$) et comme fonctions analytiques de la famille finie des invariants primaires (que l'on désigne par le symbole $\underline{\mathcal{O}\!\ell}$). On n'a donc nullement besoin, pour définir la notion d'invariant holomorphe, d'entrer dans la délicate théorie des fonctions analytiques d'une infinité de variables. Tout invariant holomorphe peut s'écrire :

$$I(\mathcal{O}\!\ell) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n^1,\dots,n^r} I^{i_1,\dots,i_r}_{n^1,\dots,n^r}(\underline{\mathcal{O}\!\ell})\, a^{i_1}_{n^1}\dots a^{i_r}_{n^r} \quad (1 \leq i_s \leq \nu) \tag{1.1.2}$$

avec une somme étendue à tous les multientiers $n^s = (n^s_1, \dots, n^s_\nu)$ auxquels correspondent des coefficients secondaires $a^{i_s}_{n^s}$ de $\mathcal{O}\!\ell$ et avec des scalaires $I^{i_1,\dots,i_r}_{n^1,\dots,n^r}(\underline{\mathcal{O}\!\ell})$ qui sont fonction analytique de la famille finie des coefficients primaires de $\mathcal{O}\!\ell$. Le second membre de (1.1.2) doit converger dès que l'objet

$\mathcal{O}b$ est analytique, c'est-à-dire dès que :

$$\text{(1.1.3)} \qquad \limsup_{\|n\| \to \infty} \left| a_n^i \right|^{1/\|n\|} < \infty \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, \nu \\ n = (n_1, n_2, \ldots, n_\nu) \\ \|n\| = n_1 + n_2 + \cdots n_\nu \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\text{(1.1.4)} \qquad \lim_{\|n^i\| \to \infty} \left| I^{i_1, \ldots, i_r}_{n^1, \ldots, n^r} \left(\underline{\mathcal{O}b} \right) \right|^{1/\|n^1\| + \ldots \|n^r\|} = 0$$

Nous observerons d'ailleurs (*) un phénomène très remarquable : pour tout classe discrète $\mathcal{C}$, les invariants holomorphes fondamentaux $\mathbb{A}_\omega$ que nous obtiendrons et qui a priori sont définis sur le domaine caractérisé par (1.1.3), se prolongent analytiquement à un domaine $\mathcal{C}_\theta \subset \mathcal{C}$ beaucoup plus vaste, caractérisé par :

$$\text{(1.1.5)} \qquad \limsup_{\|n\| \to \infty} \left| a_n^i \right|^{1/\|n\|} \|n\|^{-\theta} < \infty \qquad (\theta > 0)$$

Autrement dit, nos invariants holomorphes fondamentaux $\mathbb{A}_\omega$ s'étendront à des objets de classe de Gevrey $1+\theta$, pour un réel positif θ qui ne dépend que de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire des invariants discrets (en l'occurence : le ou les niveaux p). De plus, les $\mathbb{A}_\omega$ conserveront leurs propriétés d'invariance quand on soumettra l'objet à des changements de variables de classe de Gevrey $1+\theta$. Ceci montre que les invariants holomorphes ne sont pas propres aux seuls objets analytiques.

Introduisons une dernière distinction utile. A côté des invariants holomorphes <u>au sens strict</u>, qui sont invariants pour tous les changements de variables analytiques, on a des invariants holomorphes <u>au sens large</u>, qui ne sont invariants que pour les changements de variables analytiques <u>suffisamment tangents à l'identité</u>. En pratique, il suffit que les changements de variables soient tangents d'ordre $> q$ à l'identité, où q désigne le sup des degrés $\|n\|$ des invariants primaires Les invariants holomorphes au sens large sont en un sens plus naturels et plus fonda-

---

(*) Voir § 10.6.

mentaux que les invariants holomorphes au sens strict , qui d'ailleurs s'en déduisent très facilement.

Dans ce livre, nous construirons, pour tous les objets envisagés, notamment pour tous les champs de vecteurs et difféos locaux, des systèmes complets (cf. §1.1.e) d'invariants holomorphes. De plus, sauf dans des cas particulièrement complexes, nous établirons la liberté (cf. §1.1.e) des systèmes ainsi construits, ou, ce qui revient au même, nous construirons des systèmes complets dont nous décrirons explicitement les contraintes.

1.1.d. Invariants métaholomorphes.

Ce sont tous les invariants analytiques qui ne sont ni holomorphes ni formels et qui ne sont pas déduisibles des invariants holomorphes ou formels. Plus précisément, un invariant analytique I est dit métaholomorphe s'il existe au moins une paire d'objets Ob_1 et Ob_2 tels que $I(Ob_1) \neq I(Ob_2)$ mais que $J(Ob_1) = J(Ob_2)$ pour tout invariant formel ou holomorphe J .

1.1.e. Systèmes d'invariants. Complétude et liberté.

Nous venons de ranger les invariants analytiques en trois types exclusifs : formels, holomorphes, métaholomorphes. Il faut avoir cette partition présente à l'esprit quand on définit la liberté et surtout la complétude des systèmes d'invariants.

Un système $\mathcal{J}$ d'invariants formels (resp. analytiques) est dit complet s'il contient assez d'invariants pour énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de conjugabilité formelle (resp. analytique) :

$$\{ Ob_1 \text{ et } Ob_2 \text{ conjugués} \} \Longleftrightarrow \{ I(Ob_1) = I(Ob_2) \, , \forall I \in \mathcal{J} \}$$

Un système $\mathcal{J}$ d'invariants holomorphes est dit complet si, pour toute paire Ob_1, Ob_2 d'objets formellement conjugués, l'identité $I(Ob_1) = I(Ob_2)$ pour tout $I \in \mathcal{J}$ entraîne l'identité $J(Ob_1) = J(Ob_2)$ pour tout invariant holomorphe $J \notin \mathcal{J}$.

Un système $\mathfrak{J}$ d'invariants métaholomorphes est dit complet si, en lui ajoutant tous les invariants formels et tous les invariants holomorphes, on obtient un système complet d'invariants analytiques.

Enfin, un système $\mathfrak{J}$ d'invariants (de quelque type que ce soit) est dit libre s'il ne contient pas un seul invariant superflu. D'une façon précise, cela veut dire que pour tout $I \in \mathfrak{J}$ il doit exister au moins une paire $\mathcal{O}b_1, \mathcal{O}b_2$ telle que $I(\mathcal{O}b_1) \neq I(\mathcal{O}b_2)$ mais $J(\mathcal{O}b_1) = J(\mathcal{O}b_2)$ pour tout $J \in \mathfrak{J}$, $J \neq I$.

Notons que la liberté d'un système $\mathfrak{J}$ d'invariants s'oppose à l'existence d'identités du type :

$$E\left(I_1(\mathcal{O}b), I_2(\mathcal{O}b), \dots\right) \equiv 0 \qquad (\forall\, \mathcal{O}b) \tag{1.1.6}$$

où E est une fonction entière d'un nombre fini ou dénombrable d'invariants $I_i \in \mathfrak{J}$ mais qu'elle n'exclue nullement les contraintes de croissance, par exemple du type :

$$\limsup_{I \in \mathfrak{J}} \left|I(\mathcal{O}b)\right|^{1/n(I)} < \infty \tag{1.1.7}$$

pour une application convenable $I \longrightarrow n(I)$ de $\mathfrak{J}$ dans $\mathbb{N}$.

Il est a peu près évident que pour des objets de dimension ν finie (champs ou difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu$, etc...) les systèmes libres d'invariants rationnels sont nécessairement dénombrables. Nous verrons qu'il en va toujours de même pour les systèmes libres d'invariants holomorphes.

1.1.f. Complément sur les invariants formels discrets.

Donnons pour terminer quelques exemples de classes discrètes.

Premier exemple : difféos locaux de $\mathbb{C}$. L'ensemble des difféos locaux de $\mathbb{C}$:

$$f : x \longmapsto \ell x + o(x) \tag{1.1.8}$$

admet la partition suivante en classes discrètes :

$$\mathcal{C}_* \cup \mathcal{C}_{r,p'} \qquad (r, p' \text{ entiers et } 1 \leq r < \infty ; 1 \leq p' \leq \infty) \tag{1.1.9}$$

$\mathcal{C}_*$ désigne l'ensemble des f de multiplicateur ℓ non racine de l'unité. $\mathcal{C}_{\tau,p'}$ désigne l'ensemble des f de torsion τ et de niveau $p = p'\tau$, ce qui signifie que ℓ est racine τ-ème de l'unité et que l'itérée τ-ème de f s'écrit :

(1.1.10) $$\overset{\tau}{f} \; : \quad x \longmapsto x + a_p \, x^{p+1} + \dots \qquad (a_p \neq 0)$$

<u>Deuxième exemple : champs locaux de $\mathbb{C}^2$.</u> L'ensemble des champs locaux de $\mathbb{C}^2$:

(1.1.11) $$X = X_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad \left(X_1(0) = X_2(0) = 0\right)$$

admet la partition suivante en classes discrètes :

(1.1.12) $$\mathcal{C}_* \cup \mathcal{C}'_* \cup \mathcal{C}''_* \cup \mathcal{C}_{q,p} \cup (\dots) \qquad \begin{cases} q \text{ rationnel} \; ; \; p \text{ entier} \\ 0 \leq q \leq 1 \quad ; \; 1 \leq p \leq \infty \end{cases}$$

avec $\mathcal{C}_*$, $\mathcal{C}'_*$, $\mathcal{C}''_*$ définis respectivement par les conditions suivantes, portant sur les multiplicateurs λ_i de X :

(1.1.13) $$\lambda_1 \neq \lambda_2 \; , \; \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \; , \; \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^- \text{ (ensemble des rationnels nég.)}$$

(1.1.14) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$; partie linéaire de X diagonalisable

(1.1.15) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$; partie linéaire de X non diagonalisable.

et avec $\mathcal{C}_{q,p}$ défini par :

(1.1.16) $\lambda_1/\lambda_2 = -q$ (*) et X de niveau p (**)

Enfin, la parenthèse à droite de la formule (1.1.12) regroupe plusieurs classes discrètes correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et à diverses valeurs des directeurs $\lambda\!\!\!^{-}_1$ (***).

(*) pour une bonne indexation des multiplicateurs λ_i .

(**) p est l'entier $\leq \infty$ figurant dans la forme normale (6.2.5).

(***) voir §4.1.

SECTION 1.2. LES TROIS SOURCES D'INVARIANTS : RESONANCE, QUASIRESONANCE, NIHILENCE.

1.2.a. Notion de multiplicateur.

Prenons pour objet $\mathcal{O}b$ un champ local de $\mathbb{C}^\nu$:

$$X = \sum_{1\leq i,j\leq \nu} \left(\alpha_{ij}\, x_j + (\text{degré} \geq 2)\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.2.1}$$

ou un difféo local de $\mathbb{C}^\nu$:

$$f \;:\; x_i \longmapsto f_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, x_j + (\text{degré} \geq 2) \quad (1\leq i\leq \nu) \tag{1.2.2}$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ de la matrice $[\alpha_{ij}]$ sont dites <u>multiplicateurs</u> (de première génération) du champ X .

Les scalaires $\lambda_1 = \log \ell_1, \dots, \lambda_\nu = \log \ell_n$ définis modulo $2\pi i$ à partir des valeurs propres $\ell_1, \dots, \ell_\nu$ de la matrice $[a_{ij}]$ sont dits <u>multiplicateurs</u> (de première génération) du difféo f (*). On leur adjoint d'office le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$.

Quand les multiplicateurs λ_i ne vérifient "aucune relation particulière", ils sont les seuls invariants formels de l'objet $\mathcal{O}b$ et même ses seuls invariants analytiques (**). Pour qu'apparaissent d'autres invariants, il faut qu'opère l'une au moins des trois causes suivantes : résonance, quasirésonance, nihilence.

1.2.b. La résonance et les diviseurs nuls.

Désignons par $\mathcal{R}es$ le sous-espace de $\mathbb{Q}^\nu$ engendré par les <u>résonateurs</u>, c'est-à-dire les multientiers $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ de signes quelconques $(m_i \in \mathbb{Z})$ tels que :

(*) Etant un difféo, f est inversible par définition et $\ell_i \neq 0$.

(**) Voir chapitre 9.

(1.2.3) $$< m, \lambda > \; = m_1 \lambda_1 + \ldots \; m_\nu \lambda_\nu = 0 \qquad (\text{pour un champ } X)$$

(1.2.4) $$\ell^m \; = \ell_1^{m_1} \ldots \ell_\nu^{m_\nu} \; = 1 \qquad (\text{pour un difféo } f)$$

Désignons de même par $\mathcal{R}es^+$ le sous-espace de $\mathcal{R}es$ engendré par les résonateurs positifs (de coordonnées $m_i \geqslant 0$). Enfin posons :

(1.2.5) $$\mathfrak{p} = \dim(\mathcal{R}es) \quad , \; \mathfrak{p}^+ = \dim(\mathcal{R}es^+) \quad ; \; \mathfrak{p}_- = \dim(\mathcal{R}es / \mathcal{R}es^+) = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^+$$

L'entier $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}^+$ ou $\mathfrak{p}_-$) est dit degré de résonance (resp. degré de résonance positive ou virtuelle). On place le signe + en position supérieure et le signe - en position inférieure pour bien souligner la dissymétrie profonde entre résonance positive et résonance virtuelle.

Quand on cherche à conjuguer deux objets $\mathcal{O}b_1$ et $\mathcal{O}b_2$ de coefficients a_n^i et b_n^i par un changement de variables :

(1.2.6) $$h : x_i \longmapsto h_i(x) = x_i \sum c_n^i x^n \quad (*) \qquad \begin{cases} x^n = x_1^{n_1} \ldots x_\nu^{n_\nu} \\ n_i \geqslant -1 \\ n_j \geqslant 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

il est naturel de commencer par jordaniser les parties linéaires de $\mathcal{O}b_1$ et $\mathcal{O}b_2$. Le calcul des c_n^i (par récurrence sur $\|n\|$) conduit alors à diviser à chaque étape par les expressions $\langle m, \lambda \rangle$ ou $(\ell^m - 1)$.

En cas de résonance positive $(\mathfrak{p}^+ \geqslant 1)$ ces expressions peuvent s'annuler. Ce sont les DIVISEURS NULS. Nous verrons que les diviseurs nuls engendrent des invariants holomorphes (une infinité dénombrable d'invariants indépendants) et qu'ils suscitent aussi de nouveaux invariants formels (en nombre fini si $\mathfrak{p}^+ = 1$, en nombre infini si $\mathfrak{p}^+ \geqslant 2$).

A elle seule, la résonance virtuelle $(\mathfrak{p}_- \geqslant 1)$ n'engendre ni invariants

---

(*) C'est pour des raisons d'homogénéité qu'on place x_i devant le $\sum$. Cela ne signifie pas que $h_i(x)$ soit divisible par x_i .

holomorphes ni invariants formels rationnels. Elle engendre tout au plus des invariants formels discrets en cas de résonance semi-positive (c'est-à-dire à coefficients m_i tous $\geqslant 0$ sauf un qui vaut -1). En revanche, en conjonction avec la résonance positive, la résonance virtuelle modifie sensiblement l'aspect des invariants, tant formels qu'holomorphes (sans toutefois en augmenter le "nombre"). C'est pourquoi il faut inclure ℓ_- parmi les invariants formels discrets.

Notons dès à présent une chose essentielle : lorsqu'on a plus d'un degré de résonance positive $(\ell^+ \geqslant 2)$ on est conduit à adjoindre aux multiplicateurs λ_i de première génération une nouvelle série de multiplicateurs $\bar{\lambda}_i$, dits de seconde génération (aussi appelés directeurs). Les $\bar{\lambda}_i$ peuvent à leur tour résonner et, si leur degré de résonance positive $\bar{\ell}^+$ est $\geqslant 2$, on est conduit à introduire des multiplicateurs $\bar{\bar{\lambda}}_i$ de troisième génération ainsi qu'un degré $\bar{\bar{\ell}}^+$ de résonance positive de troisième génération. Le processus s'arrête nécessairement à la ν -ème gér[illegible]on (et en pratique beaucoup plus tôt).

1.2.c. La quasirésonance et les tout petits diviseurs.

Les expressions $\langle n, \lambda \rangle$ ou $(\ell^n - 1)$ ne peuvent pas seulement s'annuler; il arrive parfois qu'elles frôlent 0 d'anormalement près. Pour mesurer cette vitesse d'approche, on introduit une indicatrice de quasirésonance $\varpi(k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varpi(k)$ est égal au minimum des réels non nuls de la forme :

$$\langle n, \lambda \rangle| \quad \text{ou} \quad |\ell^n - 1| \qquad \text{pour } n_1 + \dots n_\nu \leq k \ , \ n_i \geqslant 0 \text{ ou } -1$$

Pour plus de détails, voir le chapitre 9. Comme on exclue les $\langle n, \lambda \rangle$ et les $(\ell^n - 1)$ nuls, la suite décroissante $\varpi(k)$ n'atteint jamais la valeur 0 , même en cas de résonance.

On dit qu'on a quasirésonance faible (resp. forte) de première génération si l'indicatrice $\varpi(k)$ fabriquée avec les multiplicateurs de première génération vér[illegible]fie la condition QR_* (resp. QR^*) introduite par A.D. BRJUNO et H. [illegible]

(QR$_*$) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \log \frac{1}{\varpi(k)} = \infty$$

(QR*) $$\limsup_{k} \frac{1}{k} \log \frac{1}{\varpi(k)} = \infty$$

On parle de même de quasirésonance (faible ou forte) de k-ème génération lorsque l'indicatrice $\varpi(k)$ fabriquée avec les multiplicateurs de k-ème génération vérifie QR$_*$ ou QR* .

Quand on a quasirésonance, la recherche de changements de variables conjugants conduit à diviser par des expressions $\langle n, \lambda\rangle$ ou $(\ell^n - 1)$ si petites que même les racines $|\langle n,\lambda\rangle|^{1/\|n\|}$ ou $|\ell^n - 1|^{1/\|n\|}$ approchent 0 (en cas de quasirésonance forte) ou du moins ne s'en écartent pas assez vite (quasirésonance faible) pour assurer la conjugaison analytique.

C'est ce que nous appellerons les TOUT PETITS DIVISEURS. Nous verrons qu'ils n'engendrent que des invariants métaholomorphes.

1.2.d. La nihilence et les petits diviseurs.

La notion générale de nihilence (de k-ème génération) ne sera définie proprement qu'au chapitre 8, mais nous pouvons dès maintenant définir la nihilence de première génération. Celle-ci équivaut à l'existence, pour un champ X , d'au moins une intégrale première formelle

(1.2.7) $$X \,.\, \varphi(x) \equiv 0 \qquad \left(\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x_1,\dots,x_\nu]]\right)$$

et, pour un difféo f , d'une série formelle invariante :

(1.2.8) $$\varphi(f(x)) \equiv \varphi(x) \qquad \left(\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x_1,\dots,x_\nu]]\right)$$

On vérifie tout de suite que la nihilence présuppose la résonance et que c'est une condition très forte, portant sur une infinité de coefficients de l'objet : elle implique l'existence d'une infinité de coefficients primaires a_n^i (voir §1.1.b). (Ceci reste d'ailleurs vrai pour la nihilence générale de k-ième génération).

L'existence d'un infinité de coefficients primaires est même une propriété caractéristique des objets nihilents.

L'importance de la nihilence vient de ce que les champs et difféos hamiltoniens (ou isochores, ou plus généralement tous ceux qui sont stables pour une forme différentielle donnée) sont automatiquement nihilents.

En cas de <u>nihilence active</u> (ou <u>non compensée</u> : voir chapitre 8) la recherche de changements de variables conjugants conduit à diviser par des expressions $\langle n,\lambda\rangle$ ou $(\ell^n - 1)$ qui approchent 0. Ce sont les PETITS DIVISEURS. Ils ne sont pas "spécialement" petits, mais comme ils interviennent par leur puissances (*), ils font généralement obstacle à la conjugaison analytique.

Bien qu'on assimile souvent les deux choses, les <u>petits diviseurs n'ont absolument rien à voir avec les tout petits diviseurs</u>. Nous verrons cependant (chapitre 8) que la nihilence, tout comme la quasirésonance, ne peut engendrer que des invariants <u>métaholomorphes</u>.

1.2.e. Correspondance entre sources et invariants. Importance comparée des sources.

Résumons sur un schéma les correspondances que nous venons de signaler :

(<u>source</u>)		(<u>obstruction</u>)		(<u>invariants</u>)
résonance	$\Longrightarrow$	diviseurs nuls	$\Longrightarrow$	formels
quasirésonance	$\Longrightarrow$	tout petits diviseurs		holomorphes
nihilence	$\Longrightarrow$	petits diviseurs	$\Longrightarrow$	métaholomorphes

Un mot maintenant sur l'importance comparée des trois "sources". Les multiplicateurs $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ résonnants ou quasirésonnants ne forment qu'une partie de mesure nulle de $\mathbb{C}^\nu$. Il n'empêche que la <u>résonance</u> est un phénomène important, très fréquent dans les applications. Pour s'en persuader, il suffit de se rappeler

(*) plus exactement, si $n = (n_i)$ est un multientier et q un entier, le calcul du coefficient $c^i_{qn_1,\dots,qn_\nu}$ de la conjugante formelle h peut nécessiter une division par $\langle n,\lambda\rangle^q$.

que la résonance couvre en particulier, pour les difféos, la tangence à l'identité. Ainsi les difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu$ tangents à l'identité :

$$f : x_i \longmapsto f_i(x) = x_i + o(x) \qquad (1 \leq i \leq \nu) \tag{1.2.9}$$

sont-ils résonnants d'après nos définitions. Nous verrons d'ailleurs qu'ils possèdent une infinité d'invariants holomorphes, que nous calculerons.

La quasirésonance, au contraire, est une condition très forte et pour ainsi dire jamais réalisée. Elle n'est en particulier jamais réalisée pour les objets dont les premiers coefficients, et par suite les multiplicateurs (de toute génération), sont algébriques. En fait, on a du mal à imaginer un problème naturel pouvant livrer un objet quasirésonnant. Seule l'étude d'une famille complète d'objets peut conduire à de la quasirésonance.

La nihilence aussi est une condition très forte en soi, plus forte en un sens que la quasirésonance, puisqu'elle porte sur une infinité de coefficients de l'objet. Toutefois, la nihilence est une propriété nettement moins pathologique que la quasirésonance, moins exceptionnelle aussi, puisqu'on la rencontre chez les objets hamiltoniens, ou isochores, ou préservant une forme différentielle donnée. De là sa grande importance pratique, en mécanique notamment.

Il est clair d'après nos définitions que les trois causes d'invariance (résonance, quasirésonance, nihilence) peuvent se superposer. Nous verrons qu'alors elles n'interfèrent pas et que chacune continue à produire, séparément, ses effets ordinaires : la première, des invariants formels et holomorphes; la seconde et la troisième, des invariants métaholomorphes. Le cas de superposition le plus important, en pratique, est celui des champs hamiltoniens avec résonance extrinsèque. Il est étudié en détail au §8.4.

Les invariants métaholomorphes, heureusement exceptionnels, sont essentiellement non constructibles (Voir § 9.2). Nous devons en faire notre deuil. Les invariants formels (discrets ou rationnels) sont somme toute élémentaires. Nous les calculerons tous au fur et à mesure de nos besoins, mais sans jamais leur donner la priorité.

Nous concentrerons toute notre attention sur les invariants les plus intéressants à tous égards : les invariants holomorphes. Nous verrons que ces invariants sont tous "portés" par des fonctions résurgentes fabriquées à partir des objets analysés et qu'on les obtient d'une manière étonnamment simple, en considérant les équations de résurgence vérifiées par les dites fonctions.

Mais avant d'esquisser la méthode, il nous faut intercaler un bref rappel sur les fonctions résurgentes et sur le calcul étranger, qui donnent la clef de tout.

SECTION 1.3. CALCUL DIFFERENTIEL ETRANGER. RAPPEL SUR LES FONCTIONS RESURGENTES.

1.3.a. L'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions résurgentes.

Soit $\mathbb{C}_\infty$ la surface de Riemann de $\log \zeta$ et soit $\zeta \longmapsto \dot{\zeta}$ la projection naturelle de $\mathbb{C}_\infty$ sur $\mathbb{C}$. On fixe sur $\mathbb{C}_\infty$ une détermination cohérente des fonctions $\log \zeta$ et $\arg \zeta$. $\mathbb{C}_\infty$ possède une multiplication naturelle :

$$(\zeta_3 = \zeta_1 \zeta_2) \iff (\log \zeta_3 = \log \zeta_1 + \log \zeta_2)$$

Elle ne possède pas d'addition naturelle. Toutefois, lorsque ζ_1 et ζ_2 sont dans un même secteur $S = \{\theta_1 < \arg\zeta < \theta_2\}$ d'ouverture $\theta_2 - \theta_1 < \pi$, on note souvent $\zeta_1 + \zeta_2$ l'unique point ζ_3 de S tel que $\dot{\zeta}_3 = \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2$.

<u>Définition 1.3.1</u> (<u>Surfaces sans coupures</u>).

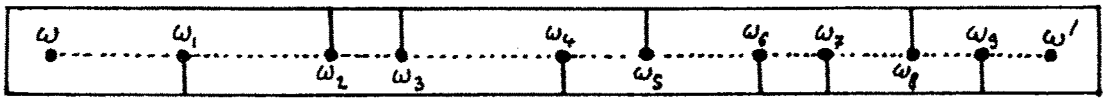
Une surface de Riemann $\mathscr{S}$ étalée sur $\mathbb{C}$ est dite <u>sans coupure</u> si à tout point ζ de $\mathscr{S}$, de projection $\dot{\zeta} = \omega$ sur $\mathbb{C}$, est associée une partie fermée discrète de $\mathbb{C}$, notée $\mathrm{sing}(\zeta)$ et possédant les trois propriétés suivantes :

(i) Tout segment $[\omega\,\omega']$ de $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas $\mathrm{sing}(\zeta)$, se relève homéomorphiquement sur $\mathscr{S}$ en un segment Γ partant de ζ .

(ii) Tout segment $[\omega\,\omega']$ de $\mathbb{C}$ qui rencontre des points $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ de $\mathrm{sing}(\zeta)$, peut être inscrit dans un petit rectangle ouvert W tel que chacun des 2^n ouverts W_j obtenus en échancrant latéralement W en $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (voir figure 1.3.1) se relève homéomorphiquement sur $\mathscr{S}$ en un ouvert $\mathcal{W}_j$ contenant ζ

(iii) Si on ôte de $\mathrm{sing}(\zeta)$ ne fût-ce qu'un point, les propriétés (i)-(ii) ne sont plus vérifiées.

<u>figure 1.3.1</u>



L'ensemble $\mathrm{sing}(\zeta)$ est parfaitement déterminé par les conditions (i), (ii), (iii). On dit que les points de $\mathrm{sing}(\zeta)$ sont les <u>obstacles vus</u> ou <u>entrevus</u> depuis ζ (*). On peut donc proposer des surfaces sans coupure cette seconde définition, plus concise et plus parlante :

<u>Définition 1.3.1 bis</u> (<u>Surfaces sans coupures</u>)

Une surface de Riemann $\mathscr{S}$ étalée sur $\mathbb{C}$ est dite <u>sans coupure</u> si, pour tout point ζ de $\mathscr{S}$, l'ensemble $\mathrm{sing}(\zeta)$ des obstacles <u>vus</u> ou <u>entrevus</u> depuis ζ est <u>fermée discret</u> (**).

(*) On dit qu'un obstacle ω_1 est <u>vu</u> (resp. <u>entrevu</u>) depuis ζ si le segment $\mathrm{sing}(\zeta)$ ne rencontre aucun autre point de $\mathrm{sing}(\zeta)$ (resp. s'il en rencontre).

(**) Autrement dit, tout disque de $\mathbb{C}$ ne porte qu'un nombre fini de points de $\mathrm{sing}(\zeta)$.

A vrai dire, pour rendre cette seconde définition complètement indépendante de la première, il faudrait préciser ce qu'on entend par "obstacle vu ou entrevu depuis ζ " dans le cas d'une surface de Riemann quelconque (étalée sur $\mathbb{C}$). Intuitivement, cela ne pose pas de problème. Si on veut une définition en forme, on peut adopter celle-ci : un point $\omega' \in \mathbb{C}$ est un obstacle vu ou entrevu depuis un point $\zeta \in \mathcal{S}$ (de projection $\omega = \dot{\zeta}$ sur $\mathbb{C}$) s'il existe sur $\mathcal{S}$ un fermé simplement connexe K qui contient ζ et dont la projection $\dot{K}$ sur $\mathbb{C}$ ne contient pas ω' , mais intersecte tout petit disque centré sur $[\omega\,\omega']$ selon un ensemble non vide et simplement connexe (donc ω' est adhérent à $\dot{K}$).

Définition 1.3.1 ter (Espace vectoriel $\mathfrak{P}$ des fonctions analytiques sans coupures)

On appelle fonction analytique sans coupure tout germe analytique Φ défini au voisinage de l'origine $\mathbb{O}$ de $\mathbb{C}_\infty$ et engendrant une surface de Riemann $\mathcal{S}(\Phi)$ sans coupure.

Si deux germes Φ_1 et Φ_2 possèdent cette propriété, leur somme $\Phi_1 + \Phi_2$ la possède aussi. Par suite, et bien qu'elles possèdent des surfaces de Riemann différentes, les fonctions analytiques sans coupure n'en forment pas moins un espace vectoriel, que l'on note $\mathfrak{P}$ (de l'initiale du mot "prolongeable").

Remarque 1 (Comportement de Φ près de $\mathbb{O}$)

Chaque germe $\Phi \in \mathfrak{P}$ est défini analytiquement sur un voisinage $\mathcal{V}$ du point de ramification $\mathbb{O}$ de $\mathbb{C}_\infty$ (surface de $\log \zeta$), c'est-à-dire sur un ensemble

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}(n, \varepsilon_n)$$

avec :

$$\mathcal{V}(n, \varepsilon_n) = \{ \zeta \; ; \; 0 < |\dot{\zeta}| < \varepsilon_n \; ; \; 2\pi n < \arg \zeta \leq 2\pi(n+1) \}$$

et avec des ε_n qui peuvent tendre vers 0 ("voisinage en colimaçon").

En fait, il suffirait de supposer Φ défini sur un seul voisinage sectoriel $\mathcal{V}(n, \varepsilon_n)$, car l'hypothèse "sans coupure" entraîne automatiquement que Φ se prolonge à un voisinage en colimaçon de $\mathbb{O}$.

On peut d'ailleurs, par extension, parler de l'ensemble $\mathrm{sing}(\mathbb{O})$ des obstacles vus ou entrevus depuis $\mathbb{O}$. Toutefois, comme $\mathbb{O}$ est en général un point de ramification de Φ (et non un point de sa surface de Riemann $\mathcal{S}(\Phi)$), l'ensemble $\mathrm{sing}(\mathbb{O})$ est une partie de $\mathbb{C}_\infty$ et non de $\mathbb{C}$. Comme partie de $\mathbb{C}_\infty$, $\mathrm{sing}(\mathbb{O})$ est discret, mais sa projection sur $\mathbb{C}$ peut ne pas l'être.

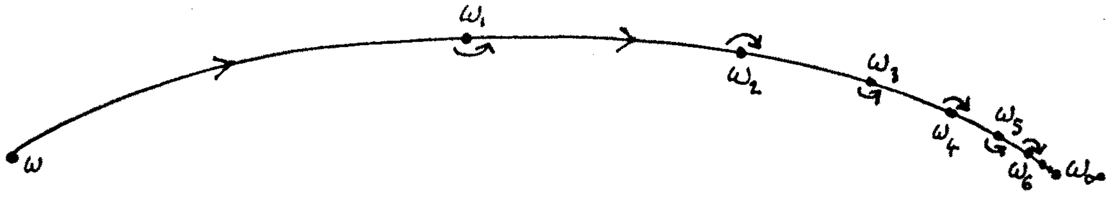
A fortiori, l'ensemble de toutes les singularités de Φ peut se projeter sur une partie non discrète de $\mathbb{C}$, voire partout dense (et cela arrive même assez souvent!).

Remarque 2 (Culs-de-sac interdits et culs-de-sac permis)

On notera que notre définition des surfaces "sans coupure" interdit les culs-de-sac rectilignes (figure a) mais qu'elle autorise les culs-de-sac curvilignes (figure b).

fig.a

fig.b



Pour que le cul-de-sac de la figure b soit possible, il faut et il suffit que l'arc $\overrightarrow{\omega\,\omega_\infty}$ ne se termine pas par un segment de droite.

Remarque 3 (Caractère minimal de l'hypothèse "sans coupure")

A l'origine, nous avions donné des surfaces "sans coupures" plusieurs définitions différentes. F. PHAM, que nous remerçions, nous a fait remarquer que ces définitions n'étaient ni équivalentes, ni tout à fait adéquates, et il en a proposé une nouvelle (surface "sans fin") qui n'équivalait à aucune des précédentes. Devant cette profusion de variantes non équivalentes et toutes entachées d'un certain arbitraire, nous avons pensé que le mieux était d'adopter les hypothèses minimales, à savoir celles qui interdisent les culs-de-sac linéaires et eux-seuls. Ces hypothèses sont en effet les seules que nous requerrons plus tard pour définir les dérivées étrangères (premières, secondes, etc.) des fonctions résurgentes. Elles ont en outre l'avantage de conduire à un énoncé simple et parlant : la définition 1.3.1 bis ci-dessus.

Cela dit, les fonctions résurgentes qu'on rencontre en pratique sont souvent beaucoup plus régulières que ne le comportent ces hypothèses minimales. Ainsi, la plupart des fonctions résurgentes usuelles n'admettent-elles jamais de cul-de-sac analytique : on peut les prolonger latéralement le long de toute courbe analytique de $\mathbb{C}$, en contournant au besoin un ensemble discret d'obstacles (chacun d'eux pouvant être contourné dans le sens qu'on veut). Souvent, les fonctions résurgentes ne possèdent même pas de culs-de-sac $\mathcal{C}^1$: on peut les prolonger latéralement le long de toute courbe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.2. Convergence séquentielle sur l'espace $\mathfrak{P}$.

Convergence forte. On dit qu'une suite $\Phi_n \in \mathfrak{P}$ converge fortement vers une limite $\Phi \in \mathfrak{P}$ s'il existe une surface de Riemann S sur $\mathbb{C}_\infty$:

(i) qui soit sans coupures (*)

(ii) telle que Φ soit holomorphe sur S (**)

(iii) telle que pour tout domaine borné $D \subset S$ intérieur à S (***) et tout arc analytique $\gamma \subset S$ joignant 0 à D, les fonctions Φ_n sont, à partir d'un certain $n = n(D, \gamma)$, définies holomorphes sur γ et D et qu'elles convergent uniformément vers Φ sur D (****).

Convergence faible : On dit qu'une suite $\Phi_n \in \mathfrak{P}$ converge faiblement vers une limite $\Phi \in \mathfrak{P}$ s'il existe sur $\mathbb{C}_\infty$ un voisinage fixe D de $\mathbb{O}$ tel que les Φ_n convergent vers Φ uniformément sur tout compact de D.

Il existe une topologie sur $\mathfrak{P}$ sous-jacente à cette notion de convergence séquentielle forte (resp. faible). Nous l'appellerons topologie forte (resp. faible).

Proposition 1.3.1. (L'algèbre $\mathfrak{R}$ des fonctions résurgentes)

On note $\mathfrak{R}$ le quotient de l'espace $\mathfrak{P}$ des fonctions analytiques sans coupures par le sous-espace $\mathfrak{P}_{reg}$ formé des fonctions régulières en $\mathbb{O}$ (*****). Si $\Phi \in \mathfrak{P}$, la classe de Φ modulo $\mathfrak{P}_{reg}$ est notée $\widetilde{\Phi}$.

(*) Cela veut dire que S est la surface de Riemann d'une certaine $\Psi \in \mathfrak{P}$.

(**) S est donc soit la surface de Riemann $S(\Phi)$ de Φ, soit une surface de de Riemann définie sur $S(\Phi)$ et plus ramifiée qu'elle.

(***) Cela veut dire qu'aucun des points de ramification de S (en particulier l'origine 0) n'est adhérent à D.

(****) Mais pas nécessairement sur γ.

(*****) Ce sont les Φ qui, au voisinage de $\mathbb{O}$, s'écrivent :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\dot{z})^n$$

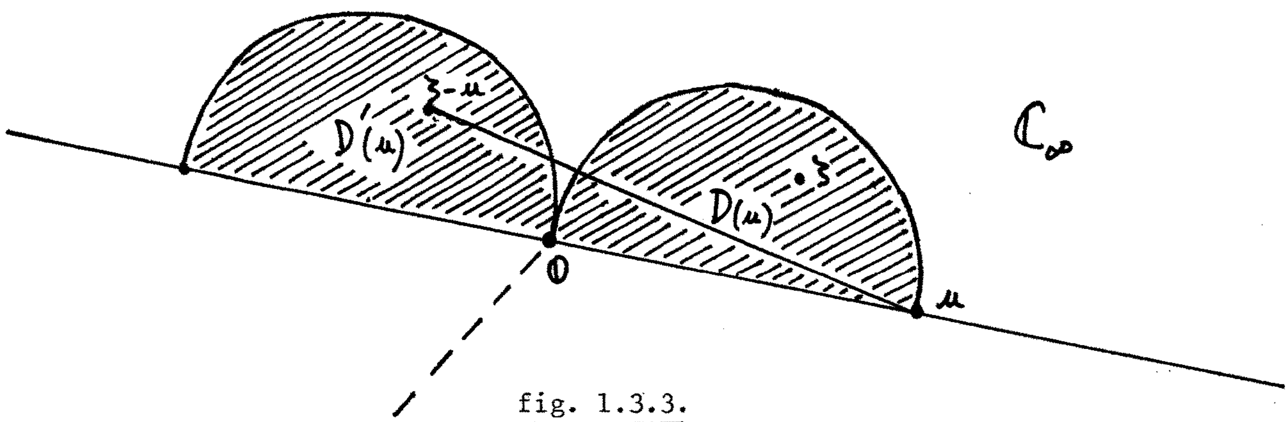
Pour tous $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \in \mathcal{P}$ et pour tout $u \in \mathbb{C}_\infty$ suffisamment voisin de $\mathbf{0}$, la convolution tronquée :

$$
(1.3.1) \quad \begin{cases} \left(\boldsymbol{\varphi}_1 *_u \boldsymbol{\varphi}_2\right)(\zeta) = \displaystyle\int_u^{\zeta-u} \boldsymbol{\varphi}_1(\zeta_1)\, \boldsymbol{\varphi}_2(\zeta-\zeta_1)\, d\zeta_1 \\ \zeta \in D(u) \quad , \quad \zeta-u \in D'(u) \quad \text{(voir figure 1.3.3)} \end{cases}
$$

définit, par prolongation analytique en ζ, un élément $\boldsymbol{\varphi}_1 *_u \boldsymbol{\varphi}_2$ de $\mathcal{P}$ dont la classe $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}_1 *_u \boldsymbol{\varphi}_2}$ ne dépend pas de u. Cette classe ne dépend pas non plus du choix des représentants $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2$ mais uniquement de leurs classes $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2$. La convolution tronquée induit donc une loi de composition sur $\mathcal{R}$:

$$
(1.3.2) \quad \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 * \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}_1 *_u \boldsymbol{\varphi}_2}
$$

Cette loi est commutative et associative. Elle est aussi bicontinue, tant pour la topologie forte que pour la topologie faible (induites sur $\mathcal{R}$ par celles de $\mathcal{P}$). Elle fait de $\mathcal{R}$ une algèbre commutative, dite <u>algèbre des fonctions résurgentes</u>.



<u>fig. 1.3.3.</u>

<u>Définition 1.3.3</u>. (<u>Algèbre polaire</u> $\mathcal{R}^{pol}$)

Les relations :

$$
(1.3.3) \quad \bullet \doteq (1/2\pi i\zeta)^\sim
$$

(1.3.3bis) $\delta^{(n)} \doteq \left((-1)^n\, n! \,/ (2\pi i\, \zeta^{n+1})\right)^{\sim}$

définissent des éléments $\delta, \delta', \delta'' \ldots$ de $\mathcal{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \delta * \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi} & \\ \delta^{(m)} * \widetilde{\Phi} = \left(\dfrac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \Phi\right)^{\sim} & (\forall m \in \mathbb{N}) \\ \delta^{(m)} * \delta^{(n)} = \delta^{(m+n)} & (\forall m,n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

δ est l'unité de l'algèbre $\mathcal{R}$. Les éléments $\delta, \delta', \delta'' \ldots$ engendrent une sous-algèbre de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^{pol}$ et dite algèbre polaire.

Définition 1.3.4 (Qualifiés et qualifiants)

Pour tout $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{R} = \mathcal{P} / \mathcal{P}_{reg}$, la relation :

(1.3.4) $\varphi(\zeta) = \Phi(\zeta) - \Phi(\zeta') \quad \begin{cases} \log \zeta - \log \zeta' = 2\pi i \\ \zeta \text{ et } \zeta' \text{ sur } \mathbb{C}_\infty \text{ et voisins de } 0 \end{cases}$

définit une fonction analytique sans coupure $\varphi \in \mathcal{P}$ qui est indépendante du choix du représentant Φ de $\widetilde{\Phi}$. On peut donc noter :

(1.3.5) $\varphi = (1-R)\, \widetilde{\Phi} = \min \widetilde{\Phi}$ (*)

φ est dit mineur de Φ. L'application $\widetilde{\Phi} \mapsto \varphi$ est surjective de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}$ mais non injective (**).

Comme la manipulation des classes $\widetilde{\Phi}$ est assez malcommode (***) et que le mineur φ contient à lui seul presque toute l'information, on assimilera souvent les fonctions résurgents à des fonctions analytiques sans coupures φ qualifiées chacune par une

(*) R désigne la rotation de $+2\pi$ (Bien sûr $R.\Phi = \Phi \circ R^{-1}$)

(**) Tout $\varphi \in \mathcal{P}$ est le mineur d'une infinité de $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{R}$ qui diffèrent par des séries de Laurent en 0 : $\left(\min \widetilde{\Phi}_1 = \min \widetilde{\Phi}_2\right) \Longleftrightarrow \widetilde{\Phi_1 - \Phi_2} = \sum a_n \delta^{(n)}$

(***) du fait surtout de l'information surabondante que comporte la donnée des majeurs Φ

<u>fonction Φ vérifiant (1.3.4) et définie modulo une fonction régulière à l'origine.</u>

En résumé :

$$\begin{cases} \varphi & \text{est } \underline{\text{le}} \text{ qualifié (ou } \underline{\text{le}} \text{ mineur)} \\ \Phi & \text{est } \underline{\text{un}} \text{ qualifiant (ou } \underline{\text{un}} \text{ majeur)} \\ \widetilde{\Phi} & \text{est } \underline{\text{la}} \text{ (classe) qualifiante} \end{cases}$$

La plupart des fonctions résurgentes qu'on rencontre en pratique ont <u>une partie polaire analysable</u> (*). On peut donc sans inconvénient les représenter sous la forme :

$$\varphi = \min \widetilde{\Phi} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \delta^{(n)}$$

<u>Proposition 1.3.2.</u> <u>(Interprétation de la convolution)</u>

Soit $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{R}$. Si un majeur $\Phi \in \widetilde{\Phi}$ (et donc <u>tout</u> majeur) vérifie :

(1.3.7) $\quad \zeta \, \Phi(\zeta) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \zeta \to 0$

alors la classe $\widetilde{\Phi}$ est dite <u>intégrable</u>(**). Les classes intégrables $\widetilde{\Phi}$ sont complètement déterminées par la donnée de leur mineur φ. Si $\widetilde{\Phi}_1, \widetilde{\Phi}_2$ sont intégrables, alors $\widetilde{\Phi}_3 = \widetilde{\Phi}_1 * \widetilde{\Phi}_2$ est elle aussi intégrable et on a au niveau des mineurs $\varphi_3 = \varphi_1 * \varphi_2$ pour la <u>convolution complète</u> (i.e. non tronquée) :

(1.3.8) $\quad \varphi_3(\zeta) = \int_0^{\zeta} \varphi_1(\zeta_1) \, \varphi_2(\zeta - \zeta_1) \, d\zeta_1 \quad (\zeta \text{ voisin de } 0)$

<u>Remarque</u>. Même si les majeurs Φ_1 et Φ_2 sont eux-mêmes intégrables on n'a pas (même modulo $\mathcal{P}_{reg}$) :

$$\Phi_3 = \Phi_1 * \Phi_2 \qquad \text{(convolution complète)}$$

(*) Cela veut dire que les majeurs $\Phi(\zeta)$ se décomposent d'une manière naturelle et unique en une partie polaire $\sum \alpha_n \zeta^{-n}$ et un germe "sans pôles à l'origine". C'est le cas en particulier pour toutes les sous-algèbres de résurgence examinées à l'alinéa <u>1.3.e.</u>

(**) c'est justifié car le mineur $\varphi(\zeta)$ est alors intégrable sur tout petit segment issu de l'origine 0 .

mais on a

$$\Phi_3 = \Phi_1 \ast_u \Phi_2 \qquad \text{(modulo } \mathcal{P}_{reg}\text{)}$$

où $\ast_u$ désigne la convolution tronquée (1.3.1) de paramètre u fixe (si bien qu'on ne peut pas faire tendre u vers 0 à ζ fixé).

Proposition 1.3.3. (Eléments exponentiables et éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{R}$)

Un élément $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}$ est dit exponentiable si les sommes partielles de la série exponentielle :

(1.3.9) $$\delta + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \tilde{\Phi}^{*n}$$

convergent fortement vers un élément de $\mathcal{R}$, que l'on note alors $\exp_* \tilde{\Phi}$. Les éléments exponentiables forment un sous-espace, noté $\mathcal{R}^{exp}$ et caractérisé par :

(1.3.10) $$\left(\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}^{exp}\right) \iff \left(\zeta^2\, \Phi(\zeta) \to 0 \text{ quand } \zeta \to 0\right)$$

Les éléments de $\mathcal{R}$ ne sont pas tous inversibles (*). Ceux qui le sont engendrent un groupe multiplicatif (*) que l'on note $\mathcal{R}^{inv}$, et l'application exponentielle

(1.3.11) $$\tilde{\Phi} \longmapsto \exp_* \tilde{\Phi} \; : \left(\mathcal{R}^{exp}/2\pi i\delta\right) \longrightarrow \left(\mathcal{R}^{inv}\right)$$

réalise un isomorphisme du groupe additif (quotienté par l'espace $2\pi i\delta\mathbb{Z}$) dans le groupe multiplicatif $\mathcal{R}^{inv}$.

Proposition 1.3.4. (Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{R}$)

L'algèbre $\mathcal{R}$ possède trois sortes d'automorphismes :

(i) la conjugaison complexe

(1.3.12) $$\tilde{\Phi} \longmapsto \tilde{\Psi} \qquad \text{avec } \Psi(\zeta) = \overline{\Phi(\bar{\zeta})}$$

(*) pour le produit de convolution.

(ii) les <u>similitudes</u> $\mathcal{S}_a$ de rapport $a \in \mathbb{C}_\infty$:

(1.3.13) $\widetilde{\Phi} \longmapsto \mathcal{S}_a\, \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Psi}$ avec $\Psi(\zeta) \equiv \dot{a}\, \Phi(\zeta/a)$ (pour ζ voisin de 0)

(iii) les <u>compositions</u> par des éléments $\delta' + \widetilde{\Psi}$ avec $\widetilde{\Psi} \in \mathcal{R}^{exp}$:

(1.3.14) $$\widetilde{\Phi} \longmapsto \widetilde{\Phi} \circ (\delta' + \widetilde{\Psi}) = \widetilde{\Phi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\widetilde{\Psi})^{*n} * (\partial^n \widetilde{\Phi})$$

où ∂ désigne la dérivation naturelle :

(1.3.15) $$\partial \widetilde{\Phi} = (-\zeta\, \Phi)^{\sim}$$

Toute automorphisme continu (pour la topologie faible ou forte) de l'algèbre $\mathcal{R}$ s'écrit d'une façon unique comme produit d'une composition et d'une similitude, suivies éventuellement de la conjugaison complexe.

<u>Remarque 1</u> : La composition $\circ$ induit sur l'ensemble $\delta' + \mathcal{R}^{exp}$ une structure de groupe non commutatif.

<u>Remarque 2</u> : Si on n'imposait pas aux fonctions résurgentes d'être prolongeables partout sans coupure, leur algèbre possèderait d'avantage d'automorphismes.

<u>Remarque 3</u> : On verra (alinéa <u>1.3.b</u>) qu'il existe sur $\mathcal{R}$ des dérivations Δ très nombreuses qui ne sont pas de la forme $\widetilde{\Phi}\partial$ ($\widetilde{\Phi} \in \mathcal{R}$, $\partial =$ dérivation naturelle). Pour une telle dérivation "étrangère" Δ et un élément fixe $\widetilde{\Psi} \in \mathcal{R}$, l'application :

(1.3.14) $$\widetilde{\Phi} \longmapsto \widetilde{\Phi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\widetilde{\Psi})^{*n} * (\Delta^n \widetilde{\Phi})$$

est <u>formellement</u> un automorphisme, mais elle n'est pas définie sur $\mathcal{R}$ tout entier.

1.3.b. Transformations de Laplace-Borel. Modèle formel et modèles sectoriels.

Avant de définir la transformation de Laplace sur l'algèbre $\mathcal{R}$, il faut commencer par la définir sur la sous-algèbre $\underline{\mathcal{R}}$ des constantes de résurgence :

<u>Définition 1.3.5.</u> (L'algèbre convolutive $\underline{\mathcal{R}}$ et l'algèbre multiplicative $\underline{\mathcal{R}}$)

On note $\underline{\mathcal{R}}$ l'espace des fonctions résurgentes $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}$ dont le mineur $\varphi(\zeta)$ est <u>holomorphe</u> sur $\mathbb{C}_\infty$ tout entier et de croissance (au plus) exponentielle à l'infini (*) :

(1.3.15) $$\limsup_{\zeta \to \infty} \frac{\log|\varphi(\zeta)|}{|\zeta|} < \infty \quad \left(\text{uniformément sur tout secteur } \theta_1 < \arg\zeta < \theta_2\right)$$

$\underline{\mathcal{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}$ (pour le produit de convolution). On note de même $\underline{\mathcal{R}}$ l'algèbre multiplicative des germes $\varphi(z)$ définis holomorphes au voisinage de l'infini et de croissance sous-exponentielle :

(1.3.16) $$\limsup_{|z| \to \infty} \frac{\log|\varphi(z)|}{|z|} = 0 \quad \left(\text{uniformément sur tout secteur } \theta_1 < \arg z < \theta_2\right)$$

<u>Proposition 1.3.5.</u> <u>(Transformations de Laplace-Borel)</u>

A tout élément $\tilde{\Phi} \in \underline{\mathcal{R}}$ de mineur φ , la transformation de Laplace

(1.3.17) $$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L} : \tilde{\Phi} \longrightarrow \varphi = \mathcal{L}\tilde{\Phi} & (\arg z = \theta)_{(**)} \\ \varphi(z) = \displaystyle\int_{\infty : \theta - 2\pi}^{\infty : \theta} e^{-(z\zeta)} \, \Phi(\zeta) \, d\zeta & \end{array}\right.$$

associe un élément $\varphi \in \underline{\mathcal{R}}$ qui ne dépend pas du choix du majeur $\Phi \in \tilde{\Phi}$ (pourvu qu'on l'ait choisi exponentiel à l'infini, ce qui est toujours possible).

De même, à tout germe $\varphi \in \underline{\mathcal{R}}$, la transformation de Borel :

(*) Auquel cas on montre qu'il existe toujours un majeur Φ possédant les mêmes propriétés.

(**) Les notations $\infty : \theta$ et $0 : \theta$ signifient que l'on intègre sur $\mathbb{C}_\infty$ le long d'une chemin partant de ∞ ou de 0 (ou y aboutissant) selon la direction radiale d'angle θ .

$$(1.3.18)\quad \begin{cases} \mathcal{B} : \varphi \longrightarrow \tilde{\Phi} = \mathcal{B}\varphi \qquad \text{avec } \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_u \text{ et} \\ \Phi_u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_u^{\infty : -\theta-\pi} e^{+(\zeta z)^{\bullet}} \varphi(z)\, dz \qquad (u \in \mathbb{C}_\infty) \end{cases}$$

associe un élément $\tilde{\Phi} \in \underline{\mathcal{R}}$ qui ne dépend pas du choix du point u (voisin de ∞ sur $\mathbb{C}_\infty$) .

Les applications $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ sont inverses l'une de l'autre et réalisent des isomorphismes de l'algèbre convolutive $\underline{\mathcal{R}}$ sur l'algèbre multiplicative $\underline{\mathcal{R}}$. En résumé :

$$(1.3.19)\quad \begin{cases} \mathcal{B}.\mathcal{L} = \text{identité de } \underline{\mathcal{R}} \\ \mathcal{L}.\mathcal{B} = \text{identité de } \underline{\mathcal{R}} \\ \mathcal{L}(\tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_2) = (\mathcal{L}\tilde{\Phi}_1).(\mathcal{L}\tilde{\Phi}_2) \\ \mathcal{B}(\varphi_1 . \varphi_2) = (\mathcal{B}\varphi_1) * (\mathcal{B}\varphi_2) \end{cases}$$

Remarque 1 : Si on veut éviter de chercher dans la classe $\tilde{\Phi}$ un majeur Φ exponentiel à l'infini, on peut remplacer l'intégrale (1.3.17) par :

$$(1.3.20)\quad \begin{cases} \varphi(z) = \displaystyle\int_u^{u'} e^{-(z\zeta)^{\bullet}} \Phi(\zeta) d\zeta + \int_u^{\infty:\theta} e^{-(z\zeta)^{\bullet}} \varphi(\zeta) d\zeta \\ \hat{\varphi} = \min \tilde{\Phi} \quad , \quad u \in \mathbb{C}_\infty \quad , \quad \log u - \log u' = 2\pi i \end{cases}$$

Remarque 2 : Si $\tilde{\Phi}$ est "sans pôles", autrement dit si un (et donc tout) majeur Φ vérifie :

$$(1.3.21)\quad \zeta\,\Phi(\zeta) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \zeta \longrightarrow 0$$

alors le mineur $\varphi = \min \tilde{\Phi}$ est intégrable en 0 :

$$(1.3.22)\quad \int_I |\varphi(\zeta)|\, d\zeta < \infty \qquad (*)$$

(*) pour tout rayon fini I issu de 0 et assez petit.

et $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ est déterminée par son mineur $\boldsymbol{\varphi}$. La tranformation de Laplace peut s'écrire :

(1.3.23) $$\varphi(z) = \int_{0:\theta}^{\infty:\theta} e^{-(z\zeta)^{\cdot}}\, \boldsymbol{\varphi}(\zeta)\, d\zeta \qquad (\arg z = -\theta)$$

<u>Remarque 3</u> : Si $\varphi \in \underline{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{B}\varphi = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$, le mineur $\boldsymbol{\varphi} = min\,\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ est donné par :

(1.3.24) $$\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty:-\theta-\pi}^{\infty:-\theta+\pi} e^{+(\zeta z)^{\cdot}}\, \varphi(z)\, dz \qquad (\arg \zeta = +\theta)$$

<u>Définition 1.3.6</u> (<u>Modèle formel</u> $\mathcal{R}$)

On note $\mathcal{R}$ l'espace formé par les séries

(1.3.25) $$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \qquad (\varphi_n \in \underline{\mathcal{R}})$$

dont la transformée de Borel :

(1.3.26) $$\mathcal{B}\varphi \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}\varphi_n \qquad (\mathcal{B}\varphi_n = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_n \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}})$$

converge <u>faiblement</u> vers un élément $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ (*). Si on identifie les élements de $\mathcal{R}$ dont les transformées de Borel coïncident, on obtient une algèbre multiplicative $\mathcal{R}$ isomorphe à l'algèbre convolutive $\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

$\mathcal{R}$ est le <u>module formel</u> de l'algèbre des fonctions résurgentes. Tout $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ peut s'écrire comme somme d'une série faiblement convergente :

(1.3.27) $$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_n \qquad (\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_n \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}})$$

et la transformée de Laplace de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$:

(*) Cela veut dire qu'on peut trouver des majeurs $\boldsymbol{\phi} \in \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ et $\boldsymbol{\phi}_n \in \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_n = \mathcal{B}\varphi_n$ et un voisinage $\mathcal{D}$ de $\mathbb{O}$ sur $\mathbb{C}_\infty$ tels que les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{\phi}_n$ convergent vers $\boldsymbol{\phi}$ uniformément sur tout compact $K \subset D$.

$$(1.3.28) \qquad \mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_n \qquad (\mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \in \mathcal{R}, \mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_n \in \underline{\mathcal{R}})$$

est dite modèle formel de $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Proposition 1.3.6. (Dérivation naturelle et automorphismes de $\mathcal{R}$)

La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ transmute la dérivation naturelle $\boldsymbol{\partial}$ de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ en la dérivation ordinaire $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ de $\mathcal{R}$.

Elle ne change pas la forme de la conjugaison complexe :

$$(1.3.29) \qquad \varphi(z) \longrightarrow \overline{\varphi(\bar{z})}$$

Elle transmute les similitudes $\boldsymbol{S}_\alpha$ en S_α :

$$(1.3.30) \qquad (S_\alpha \varphi)(z) = \varphi(\alpha^{-1} z) \qquad (\alpha, z \in \mathbb{C}_\infty)$$

Enfin elle transmute la composition $\bullet$ en la composition $\circ$ ordinaire (produit de substitution formel) :

$$(1.3.31) \qquad \varphi \circ (z + \psi) = \varphi(z+\psi) = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} \varphi$$

où $\varphi \in \mathcal{R}$ et $\psi \in \mathcal{R}^{exp} = \mathcal{L}\,\boldsymbol{\mathcal{R}}^{exp}$. Cet espace $\mathcal{R}^{exp}$ des éléments exponentiables peut s'interprêter symboliquement comme l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{R}$ tels que :

$$(1.3.32) \qquad \lim_{z \to \infty} \varphi(z)/z = 0 \qquad (*)$$

et le groupe de composition $z + \mathcal{R}^{exp} = \mathcal{L}(\delta' + \boldsymbol{\mathcal{R}}^{exp})$ peut s'interprêter comme l'ensemble des $f \in \mathcal{R}$ tels que :

$$(1.3.33) \qquad \lim_{z \to \infty} f(z)/z = 1 \qquad (*)$$

(*) Ce ne sont bien sûr que des écritures symboliques car en général ni $\varphi(z)$ ni $f(z)$ ne sont des fonctions numériques de z.

avec pour produit :

(1.3.34) $$f, g \longmapsto f \circ g = f(g)$$

Dans la plupart des applications, on a affaire à des élements φ de $\mathcal{R}$ qui peuvent s'écrire comme séries (faiblement convergentes) de monômes logarithmiques :

(1.3.35) $$\begin{cases} J^{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_r}(z) = z^{\alpha_0}(\log z)^{\alpha_1}(\log\log z)^{\alpha_2}\ldots(\log\ldots\log z)^{\alpha_r} \\ z, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}_\infty \;;\; z \text{ grand} \end{cases}$$

Les transformées de Borel de ces monômes logarithmiques ont des mineurs $\mathbf{J}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_r}(\zeta)$ qui, pour $\zeta \to 0$, sont équivalentes à :

(1.3.36) $$\mathbf{J}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_r}(\zeta) \sim \frac{1}{\Gamma(-\alpha_0)}\, \zeta^{-\alpha_0-1}\left(\log\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha_1}\left(\log\log\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\log\ldots\log\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha_r}$$

On peut même souvent se contenter des monômes simples :

(1.3.37) $$J^{\alpha_0}(z) = z^{\alpha_0}$$

dont les transformées de Borel sont données par :

modèle formel	modèle convolutif	
	mineur	majeur canonique
(1.3.38) $z^{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$	$\dfrac{\zeta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\zeta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-e^{-2\pi i\alpha})} = \dfrac{e^{i\pi\alpha}}{2\pi i}\Gamma(1-\alpha)\,\zeta^{\alpha-1}$
(1.3.39) z^{-n} $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{\log\zeta}{2\pi i} \cdot \dfrac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$
(1.3.40) z^{n} $(n \in \mathbb{N})$	0	$\dfrac{(-1)^n}{2\pi i} \cdot \dfrac{n!}{\zeta^{n+1}} = \delta^{(n)}(\zeta)$

Notons $\underline{\underline{\mathcal{R}}}$ la sous-algèbre (car c'en est une) de $\mathcal{R}$ formée des $\tilde{\Phi}$ dont le mineur φ est à <u>croissance exponentielle</u> : cela veut dire que pour tout $\varepsilon = \pm$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ on peut trouver un chemin $\mathcal{J}_{\theta,\varepsilon}$ qui part de l'origine $\mathbb{O}$, qui longe l'axe $\arg \zeta = \theta$ tout en contournant les éventuelles singularités dans le sens positif (resp. négatif) si $\varepsilon = -$ (resp. $+$) et sur lequel :

(1.3.41) $$|\varphi(\zeta)| < A(\theta)\; e^{|\zeta|\, B(\theta)} \qquad \forall \zeta \in \mathcal{J}_{\theta,\varepsilon} \;,\; |\zeta| > 1 \quad (*)$$

Dans ce cas il existe toujours dans la classe $\tilde{\Phi}$ des majeurs Φ qui sont eux aussi à croissance exponentielle et on peut sans difficulté définir la <u>transformée de Laplace sectorielle</u> de direction θ^{ε} au moyen des intégrales :

(1.3.41) $$\varphi^{\theta^{\varepsilon}}(z) = \mathcal{L}^{\theta^{\varepsilon}}\, \tilde{\Phi}(z) = \int_{\mathcal{C}(\theta,\varepsilon)} e^{-(z\zeta)^{\cdot}}\, \Phi(\zeta)\, d\zeta$$

(1.3.42) $$\ldots = \int_{\mathcal{C}'(\theta,\varepsilon)} e^{-(z\zeta)^{\cdot}}\, \Phi(\zeta)\, d\zeta + \int_{\mathcal{C}''(\theta,\varepsilon)} e^{-(z\zeta)^{\cdot}}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \qquad \Bigg\|\; \varepsilon = \pm$$

Ici $\mathcal{C}(\theta,\varepsilon)$ désigne le chemin qui part de ∞ selon l'axe d'angle $(\theta - 2\pi)^{\varepsilon}$, contourne l'origine et repart vers ∞ selon l'axe d'angle θ^{ε} . Au contraire $\mathcal{C}'(\theta,\varepsilon)$ désigne un chemin joignant un point u (d'argument θ et proche de $\mathbb{O}$) au point u' qui s'en déduit par une rotation de un tour dans le sens négatif $(\log u - \log u' = 2\pi i)$ et suffisamment proche de $\mathbb{O}$ pour n'enlacer aucune singularité de $\varphi(\zeta)$. Enfin le chemin $\mathcal{C}''(\theta,\varepsilon)$ joint le point u à ∞ en longeant l'axe d'angle θ^{ε} .

Bien entendu le germe analytique $\varphi^{\theta^{\varepsilon}}(z)$, fruit de ces intégrations, est défini dans un secteur de bissectrice $\arg z = -\theta$ et d'ouverture $\geqslant 2\pi$ (ou $> 2\pi$ lorsqu'on peut faire pivoter l'axe d'intégration sans rencontrer de singularités). Comme on a pris soin de contourner toutes les singularités de dans le <u>même</u> sens (<u>positif</u> si $\varepsilon = -$, <u>négatif</u> si $\varepsilon = +$), la transformation de Laplace d'axe θ^{ε} (notée $\mathcal{L}^{\theta^{\varepsilon}}$) transmute la convolution $\ast$ de $\mathcal{R}$ en multiplication des germes en z .

(*) L'apparente incohérence de cette définition ($\mathcal{J}_{\theta,\varepsilon}$ contourne les singularités dans le sens positif si $\varepsilon = -$ et vice versa) est justifiée par le fait que $\mathcal{J}_{\theta,\pm}$ correspond à l'axe de direction "$\theta \pm 0$" au sens des physiciens.

En fait il est commode (cela simplifie maints énoncés) de définir les transformées de Laplace $\mathcal{L}^{\theta^\varepsilon}$ non seulement sur l'algèbre $\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}$ des fonctions résurgentes à croissance exponentielle, mais sur l'algèbre $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ toute entière. Pour cela, on exprime (c'est toujours possible) les $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ comme séries <u>fortement</u> convergentes d'éléments $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_n$ de $\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_3 + \dots \qquad (\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \ , \ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_n \in \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}) \tag{1.3.43}$$

et on convient de dire que la série :

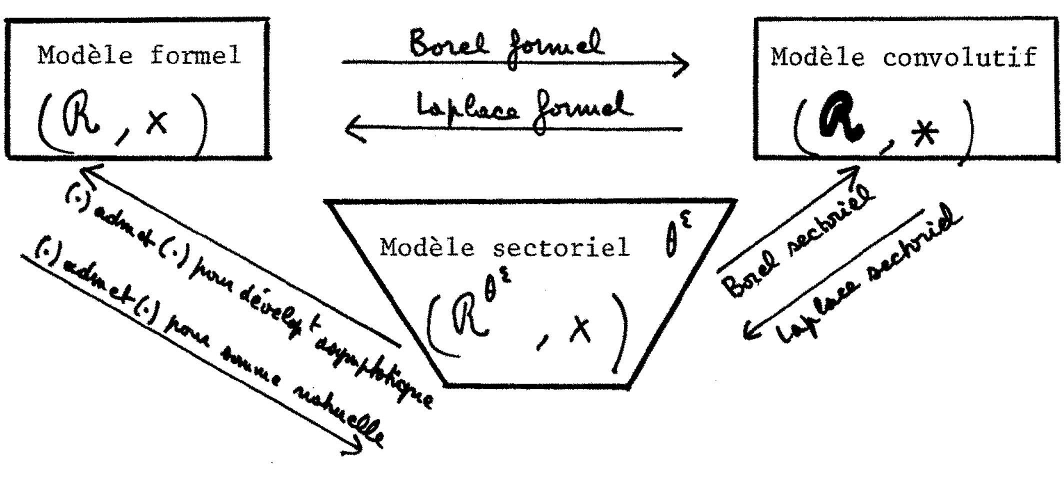
$$\mathcal{L}^{\theta^\varepsilon} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}} \doteq \mathcal{L}^{\theta^\varepsilon} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 + \mathcal{L}^{\theta^\varepsilon} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 + \mathcal{L}^{\theta^\varepsilon} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_3 + \dots \tag{1.3.44}$$

est la transformée de Laplace (d'axe θ^ε) de $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$. Bien entendu, on identifie les séries (1.3.44) qui proviennent de décompositions (1.3.43) distinctes. Il est clair que lorsque $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$ n'est pas à croissance exponentielle, sa transformée de Borel n'a pas d'interprétation simple, car alors la série de germes en z :

$$\varphi_1^{\theta^\varepsilon}(z) + \varphi_2^{\theta^\varepsilon}(z) + \varphi_3^{\theta^\varepsilon}(z) + \dots \qquad (\varphi^{\theta^\varepsilon} = \mathcal{L}^{\theta^\varepsilon} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) \tag{1.3.45}$$

ne converge pas vers un germe en z . Mais cette extension de la transformation de Laplace sectorielle à toute l'algèbre $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ permet de définir un <u>modèle sectoriel</u> $\mathcal{R}^{\theta^\varepsilon}$ qui est en bijection avec $\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

On a ainsi pour l'algèbre des fonctions résurgentes trois modèles concurrents, en bijection deux à deux :



La flèche allant de $\mathcal{R}^{\theta^\varepsilon}$ à $\mathcal{R}$ doit se lire " $\varphi^{\theta^\varepsilon}(z)$ admet $\varphi(z)$ comme développement asymptotique radial pour $z \to \infty$ " et la flèche inverse doit se lire "le développement $\varphi(z)$ admet φ^{θ^+} et φ^{θ^-} pour sommes naturelles dans le demi-plan de bissectrice $-\theta$ ".

On appelle parfois <u>modèle sectoriel</u> (tout court) l'ensemble de tous les modèles sectoriels θ^ε pour $\varepsilon = \pm$ et pour tous les $\theta \in \mathbb{R}$.

Les formules permettant de passer d'un modèle sectoriel à un autre seront données là où nous en aurons besoin, c'est-à-dire lorsque nous étudierons les contraintes de croissance sur les invariants holomorphes (§ 10.5).

Un mot, pour finir, sur les mérites de chaque modèle :

Le <u>modèle convolutif</u> $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ est fondamental pour la définition des fonctions résurgentes et des dérivations étrangères et c'est presque toujours lui qu'on utilise pour les démonstrations.

Le <u>modèle formel</u> $\mathcal{R}$ est le plus commode dans les énoncés, d'autant plus qu'on travaille presque toujours dans des "<u>domaines d'unicité</u>" de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire des sous-algèbres de $\mathcal{R}$ dont tous les éléments φ se décomposent d'une manière unique et naturelle en sommes (1.3.25), avec des $\varphi_n(z)$ qui sont généralement des monômes logarithmiques du type (1.3.35).

Les <u>modèles sectoriels</u> $\mathcal{R}^{\theta^\varepsilon}$ sont cruciaux pour l'interprétation géométrique des résultats et ont aussi, du point de vue heuristique, le mérite de suggérer diverses propriétés des fonctions résurgentes.

<u>Remarque</u> : Pour certaines sous-algèbres de résurgence, on dispose d'autres modèles que ces trois modèles fondamentaux. Ainsi définit-on un <u>modèle de Poincaré</u> pour les algèbres de résurgence dont les éléments, dans le modèle convolutif, ont toutes leurs singularités au-dessus d'un réseau discret de $\mathbb{C}$. Voir [E1] §3.C.

1.3.c. L'algèbre $\mathbb{\Delta}$ des dérivations étrangères.

Définition 1.3.9. (Les opérateurs Δ_ω)

A tout $\omega \in \mathbb{C}_\infty$ on fait correspondre un opérateur linéaire

$$\Delta_\omega \quad : \quad \mathcal{R} \to \mathcal{R} \tag{1.3.50}$$

en posant :

$$\Delta_\omega \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_\omega \qquad (\forall \widetilde{\Phi} \in \mathcal{R}) \tag{1.3.51}$$

où Φ_ω est la fonction analytique sans coupure entièrement définie par la condition :

$$\Phi_\omega(\zeta) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{n-1} = \pm} \frac{p_\varepsilon! \, q_\varepsilon!}{(p_\varepsilon + q_\varepsilon + 1)!} \, {}^{\varepsilon}\varphi(\zeta + \omega) \qquad (\varphi = \min \widetilde{\Phi}) \tag{1.3.52}$$

pour ζ proche de 0 et sur l'arc $\arg \zeta = \arg \omega$. Ici, φ désigne le mineur de $\widetilde{\Phi}$ et ${}^{\varepsilon}\varphi(\zeta+\omega)$ désigne la détermination de $\varphi(\zeta+\omega)$ obtenue par prolongation analytique de $\varphi(\zeta)$ à partir de 0 , en suivant le rayon $\arg \zeta = \arg \omega$ (sans jamais revenir en arrière) et en contournant les singularités intermédiaires ω_i dans le sens positif ou négatif selon que $\varepsilon_i = +$ ou $-$ (la dernière singularité, $\omega_n = \omega$, est toujours contournée dans le sens positif). L'entier p_ε (resp. q_ε) est égal au nombre de signes + (resp. −) dans la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$. Bien sûr $1 + p_\varepsilon + q_\varepsilon = n$ (Voir figure).

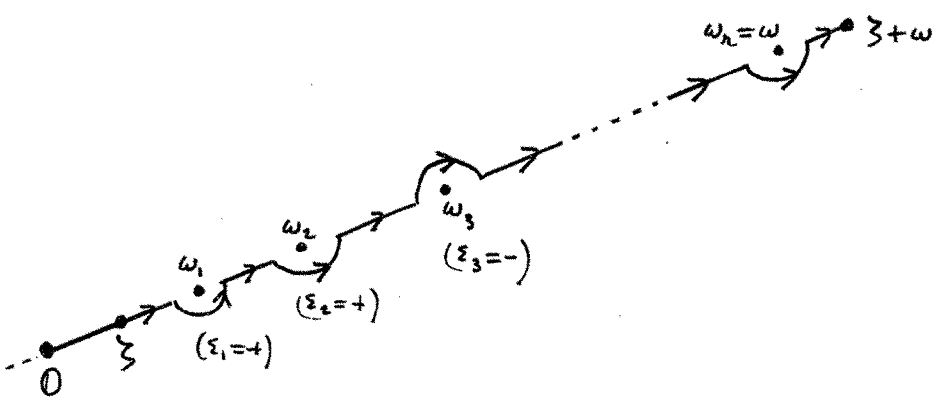


Figure 1.3.4.

Notons que la définition ci-dessus est cohérente en ce sens que le résultat ne change pas si l'on ajoute des singularités fictives ω_i sur le rayon $[0,\omega]$. Cela tient à la nature de la somme pondérée (1.3.52).

Notons aussi que le mineur φ_ω de $\tilde{\Phi}_\omega$ est donné par :

(1.3.53) $$\varphi_\omega(\zeta) = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}=\pm} \frac{p_\varepsilon!\, q_\varepsilon!}{(p_\varepsilon+q_\varepsilon+1)!}\left[{}^{\varepsilon}\varphi(\zeta+\omega) - {}^{\varepsilon^*}\varphi(\zeta+\omega)\right]$$

pour ζ proche de 0 et sur l'axe $\arg\zeta = \arg\omega$. Ici ${}^{\varepsilon}\varphi(\zeta+\omega)$ est défini comme en (1.3.52), c'est-à-dire en contournant <u>positivement</u> la dernière singularité $\omega_n = \omega$, tandis que ${}^{\varepsilon^*}\varphi(\zeta+\omega)$ correspond au choix opposé (ω contourné négativement).

<u>Proposition 1.3.9</u>. (<u>Dérivations étrangères</u>)

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}_\infty$ l'opérateur Δ_ω est une <u>dérivation</u> de l'algèbre $\mathcal{R}$:

(1.3.54) $$\Delta_\omega(\tilde{\Phi} * \tilde{\Psi}) = (\Delta_\omega \tilde{\Phi}) * \tilde{\Psi} + \tilde{\Phi} * \Delta_\omega \tilde{\Psi}$$

Les dérivations Δ_ω sont dites <u>dérivations étrangères</u> (*). Elles ne vérifient aucune relation a priori : l'algèbre associative $\mathbf{\Delta}$ qu'elles engendrent est <u>libre</u> (**). Avec la dérivation naturelle ∂, au contraire, les Δ_ω interagissent comme suit :

(1.3.55) $$\Delta_\omega \cdot \partial = (\partial - \dot{\omega})\,\Delta_\omega \qquad (\dot{\omega} = \text{projection de } \omega \text{ sur } \mathbb{C})$$

Il faut toujours avoir présentes à l'esprit deux propriétés essentielles des dérivations étrangères. La première, c'est que les Δ_ω suffisent à décrire toutes les ramifications des fonctions résurgentes. Plus précisément, si $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}$ et si $\varphi = \min \tilde{\Phi}$, on peut reconstituer, par combinaisons entières simples, la

(*) par opposition à la dérivation naturelle ∂ introduite en (1.3.15)

(**) c'est sans doute l'exemple le plus intéressant — sinon le seul — de <u>réalisation</u> concrète d'une algèbre de Lie de dimension infinie.

fonction φ sur tous ses feuillets, si l'on connaît φ et ses dérivées étrangères (**) successives $\Delta_{\omega_1}\varphi, \Delta_{\omega_2}\Delta_{\omega_1}\varphi, \ldots$ sur leur feuillet principal (c'est-à-dire sur leur étoile d'holomorphie de centre 0).

La seconde propriété, c'est que les dérivations étrangères Δ_ω sont des opérateurs continus pour la topologie forte de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, mais pas pour la topologie faible. C'est d'ailleurs ce qui permet de représenter tout $\tilde{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ comme somme faible d'éléments $\tilde{\varphi}_n \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ dont les dérivées étrangères sont nulles. (*)

Proposition 1.3.10. (Les dérivations étrangères et les automorphismes de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)

Voici comment les Δ_ω interagissent avec les différents automorphismes de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$:

a) Conjugaison complexe Conj:

(1.3.56) $$\mathrm{Conj}\,.\,\Delta_\omega = \Delta_{\bar{\omega}}\,\mathrm{Conj} \qquad (\bar{\omega} \text{ est le conjugué de } \omega \text{ sur } \mathbb{C}_\infty)$$

b) similitude S_α :

(1.3.57) $$\Delta_\omega\, S_\alpha = S_\alpha\, \Delta_{\omega\alpha^{-1}} \qquad (\omega, \alpha, \omega\alpha^{-1} \in \mathbb{C}_\infty)$$

c) Composition par $\delta' + \tilde{\psi}$ avec $\tilde{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^{exp}$

(1.3.58) $$\Delta_\omega\big((\tilde{\varphi})\circ(\delta'+\tilde{\psi})\big) = \begin{cases} \big(\exp_*(-\dot{\omega}\tilde{\psi})\big) * \big((\Delta_\omega\tilde{\varphi})\circ(\delta'+\tilde{\psi})\big) \\ +\big((\partial\tilde{\varphi})\circ(\delta'+\tilde{\psi})\big)\,.\,(\Delta_\omega\tilde{\psi}) \end{cases}$$

Proposition 1.3.11. (Modèle formel et dérivations étrangères pointées)

La transformation de Laplace transmute les dérivations étrangères Δ_ω de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ en dérivations de $\mathcal{R}$ que l'on note encore Δ_ω , car aucune confusion n'est à craindre. Dans le modèle formel $\mathcal{R}$ les propriétés des dérivations étrangères s'écrivent :

(*) C'est justement pour cela que les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sont dits "constantes de résurgence". (**) Bien distinguer les dérivations étrangères, qui sont des opérateurs, et les dérivées étrangères, qui sont des opérées.

(1.3.59) $$\Delta_\omega(\varphi.\psi) = (\Delta_\omega\varphi).\psi + \varphi.(\Delta_\omega\psi) \qquad (\forall \varphi, \psi \in \mathcal{R})$$

(1.3.60) $$\Delta_\omega \, \partial = (\partial - \dot{\omega})\,\Delta_\omega \qquad (\partial = \partial/\partial_z)$$

(1.3.61) $$\Delta_\omega(\varphi \circ f) = e^{-\dot{\omega}(f-z)}(\Delta_\omega\varphi)\circ f + \varphi' \circ f . \Delta_\omega f \quad \left(\varphi' = \tfrac{\partial}{\partial_z}\varphi\right)$$

Si on introduit les dérivations étrangères pointées :

(1.3.62) $$\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega} z}\,\Delta_\omega$$

les deux dernières relations se simplifient :

(1.3.63) $$\dot{\Delta}_\omega \, \partial = \partial \, \dot{\Delta}_\omega \qquad (\partial = \partial/\partial_z)$$

(1.3.64) $$\dot{\Delta}_\omega(\varphi\circ f) = (\dot{\Delta}_\omega\varphi)\circ f + (\varphi'\circ f)(\dot{\Delta}_\omega f)$$

Remarque : Comme le monôme z ne vérifie pas (1.3.32), il n'appartient pas à l'espace $\mathcal{R}^{exp}$ des éléments exponentiables de $\mathcal{R}$. Les $e^{-\dot{\omega} z}$ ne sont donc pas des éléments de $\mathcal{R}$ (fonctions résurgentes) mais de purs symboles. Les dérivations étrangères pointées font donc sortir de l'algèbre $\mathcal{R}$. Ce sont en fait des dérivations de l'algèbre $\mathcal{E} \otimes \mathcal{R}$ engendrée par les sommes finies de la forme

$$\sum e^{\alpha z} \varphi_\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ \varphi_\alpha \in \mathcal{R})$$

Mais comme les dérivations étrangères pointées sont plus simples à manier, on les utilise souvent dans les énoncés.

1.3.d. L'algèbre Δ' des pseudovariables.

L'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions résurgentes possède un nombre énorme de dérivations. Cela suggère l'existence de "variables cachées" (cryptovariables) ou plutôt de "fausses variables" (pseudovariables). Pour mettre cette intuition en forme, il faut envisager l'algèbre associative Δ engendrée par tous les Δ_ω

(pour $\omega \in \mathbb{C}_\infty$). Les relations :

(1.3.65) $$\Delta_\omega \longmapsto \Delta_\omega \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_\omega$$

induisent sur $\mathbb{\Delta}$ un <u>coproduit</u> commutatif :

(1.3.66) $$\mathbb{\Delta} \longmapsto \mathbb{\Delta} \otimes \mathbb{\Delta}$$

qui munit $\mathbb{\Delta}$ d'une structure de cogèbre. Cette cogèbre admet pour duale une <u>algèbre commutative</u> $\mathbb{\Delta}'$ engendrée par des <u>pseudovariables</u>

(1.3.67) $$Z^{\omega_1,\dots,\omega_r} \qquad \left(\omega_1,\dots,\omega_r \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{N}\right)$$

qui sont duales des éléments $\Delta_{\omega_r}\dots\Delta_{\omega_2}\Delta_{\omega_1}$ de $\mathbb{\Delta}$ et qui vérifient la <u>table de multiplication</u> suivante :

(1.3.68) $$Z^{\omega_1} Z^{\omega_2} = Z^{\omega_1,\omega_2} + Z^{\omega_2,\omega_1}$$

(1.3.68bis) $$Z^{\omega_1} Z^{\omega_2,\omega_3} = Z^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} + Z^{\omega_2,\omega_1,\omega_3} + Z^{\omega_2,\omega_3,\omega_1}$$

et plus généralement :

(1.3.69) $$Z^{\omega^1} Z^{\omega^2} = \sum_{\omega^1,\omega^2 \sqsubset \omega} Z^{\omega}$$

Ici $\omega, \omega^1, \omega^2$ sont des multiindices (suites finies d'éléments $\omega_i \in \mathbb{C}_\infty$) et la notation $\omega^1, \omega^2 \sqsubset \omega$ ("shuffle" ou "battage") signifie que le multiindice ω s'obtient en imbriquant les uns dans les autres les multiindices ω^1 et ω^2 tout en préservant l'ordre interne de chacun.

D'autre part $\mathbb{\Delta}$ est une algèbre associative (non commutative) et cette structure supplémentaire induit par dualité <u>une action de l'algèbre $\mathbb{\Delta}$ des dérivations étrangères dans l'algèbre $\mathbb{\Delta}'$</u> <u>des pseudovariables</u>. Cette action est ainsi définie :

(1.3.70) $$\Delta_{\omega_0} Z^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \begin{cases} Z^{\omega_2,\dots,\omega_r} & si \quad \omega_1 = \omega_0 \\ 0 & si \quad \omega_1 \neq 0 \end{cases}$$

et on vérifie à partir de la table de multiplication (1.3.69) que l'on a bien :

(1.3.71) $$\Delta_{\omega_0}(Z^{\omega^1}.Z^{\omega^2}) = (\Delta_{\omega_0} Z^{\omega^1}) Z^{\omega^2} + Z^{\omega^1}(\Delta_{\omega_0} Z^{\omega^2})$$

pour tout indice ω_0 et pour tous multiindices ω^1 et ω^2 .

Les pseudovariables servent entre autres à construire les formes <u>déployées</u> et <u>restreintes</u>, dont voici la définition (relativement au modèle formel $\mathcal{R}$) :

<u>Propostion 1.3.12</u>. <u>(Forme déployée)</u>

L'application :

(1.3.72) $$\varphi \longmapsto dpl(\varphi) \doteq \varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \mathbb{C}_\infty} (\Delta_{\omega_r} \cdots \Delta_{\omega_1} \varphi) Z^{\omega_1,\dots,\omega_r}$$

définit un homomorphisme <u>dpl</u> ("forme déployée") de l'algèbre $\mathcal{R}$ dans l'algèbre $\mathcal{R} \otimes \Delta'$:

(1.3.73) $$dpl(\varphi_1 . \varphi_2) = (dpl\, \varphi_1).(dpl\, \varphi_2) \qquad (\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{R})$$

La forme restreinte n'est définie que sur certaines sous-algèbres de $\mathcal{R}$ dont la principale est l'algèbre $\mathcal{R}^+$.

<u>Définition 1.3.10</u>. <u>(Algèbre</u> $\mathbf{R}^+$)

On note $\mathbf{R}^+$ la sous-algèbre de $\mathbf{R}$ formée des fonctions résurgentes à <u>pôles simples</u>. Ce sont les $\tilde{\Phi}$ dont les majeurs Φ vérifient :

(1.3.74) $$\zeta\, \Phi(\zeta) \longrightarrow \text{limite finie quand } \zeta \to 0 \text{ radialement}$$

et dont le mineur φ a au voisinage de chaque singularité ζ_0 le comportement suivant:

(1.3.75) $\quad \zeta\, \varphi(\zeta) \longrightarrow$ limite finie quand $\zeta \to \zeta_0$ radialement

L'algèbre $\mathcal{R}^+$ est stable pour les dérivations étrangères et, si l'on pose :

(1.3.76) $$\sigma(\tilde{\Phi}) = \lim_{\zeta \to 0} \zeta\, \Phi(\zeta) \qquad (\forall\, \Phi \in \tilde{\Phi})$$

l'application $\sigma : \mathcal{R}^+ \to \mathbb{C}$ est un homomorphisme d'algèbres :

(1.3.77) $$\sigma(\tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_2) = \sigma(\tilde{\Phi}_1) \cdot \sigma(\tilde{\Phi}_2)$$

Pour définir la forme restreinte, nous utiliserons le modèle formel $\mathcal{R}^+$ de l'algèbre $\mathcal{R}^+$.

Proposition 1.3.13. (Forme restreinte)

L'application

(1.3.78) $$\varphi \mapsto \mathrm{rst}(\varphi) \doteq \varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \mathbb{C}_\infty} \sigma(\Delta_{\omega_r} \cdots \Delta_{\omega_1} \varphi)\, Z^{\omega_1, \ldots, \omega_r}$$

définit un homomorphisme rst ("forme restreinte") de l'algèbre $\mathcal{R}^+$ dans l'algèbre Δ' des pseudovariables :

(1.3.79) $$\mathrm{rst}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = (\mathrm{rst}\, \varphi_1) \cdot (\mathrm{rst}\, \varphi_2)$$

Proposition 1.3.14. (Propriétés des formes déployée et restreinte)

Les homomorphismes dpl et rst commutent avec la composition $\circ$, la dérivation naturelle ∂ et les dérivations étrangères Δ_ω.

Cet énoncé suppose évidemment qu'on ait convenablement défini l'action de ∂ et $\circ$ sur les pseudovariables :

(1.3.80) $$\partial.\, Z^{\omega_1, \ldots, \omega_r} = (\dot{\omega}_1 + \ldots \dot{\omega}_r)\, Z^{\omega_1, \ldots, \omega_r}$$

(1.3.81) $$Z^{\omega_1, \ldots, \omega_r} \circ f = e^{-(\dot{\omega}_1 + \ldots \dot{\omega}_r) f}\, Z^{\omega_1, \ldots, \omega_r} \quad (*)$$

(*) Pour tout $f \in z + \mathcal{R}^{exp}$

Si, parallèlement aux dérivations étrangères pointées $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega} z}\Delta_\omega$, on introduit des pseudovariables pointées :

(1.3.82) $$\underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0$$

celles-ci auront l'avantage d'être "inertes" à l'égard de ∂ et $\circ$:

(1.3.83) $$\partial \,.\, \underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0$$

(1.3.84) $$\underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \circ f = \underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\dots,\omega_r}$$

Pour les détails, voir [E.1] chaptitre 4. Pour les applications, voir ci-après, §10-7.

1.3.e. Les principales sous-algèbres de résurgence.

On appelle algèbre de résurgence les sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}$ qui sont stables pour la dérivation étrangère.

(1.3.85) $$\Delta_\omega \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \qquad (\forall \omega \in \mathbb{C}_\infty)$$

On a déjà vu (définition 1.3.10) l'algèbre $\mathcal{R}^+$ des fonctions résurgentes dites "à pôles simples" (dans le modèle convolutif) et l'algèbre $\underline{\underline{\mathcal{R}}}$ des fonctions résurgentes à croissance exponentielle (encore dans le modèle convolutif). Voyons d'autres exemples utiles.

On note $\mathcal{R}_\infty$ ou $\mathcal{R}_p$ (pour $p \in \mathbb{N}$) l'algèbre des fonctions résurgentes φ qui, dans le modèle formel, peuvent s'écrire, respectivement :

(1.3.86) $$\varphi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} c_\alpha z^{-\alpha} \qquad (c_\alpha \in \mathbb{C})$$

(1.3.86bis) $$\varphi(z) = \sum_{\alpha \in p^{-1}\mathbb{Z}} c_\alpha z^{-\alpha} \qquad (c_\alpha \in \mathbb{C})$$

et dont toutes les dérivées étrangères $\Delta_\omega \varphi$ peuvent aussi s'écrire sous cette forme. Bien entendu, l'appartenance de φ à $\mathcal{R}$ impose aux coefficients c_α certaines contraintes de croissance. On a en particulier :

$$(1.3.87) \qquad \limsup_{\begin{cases}\alpha \to +\infty \\ \alpha > 0\end{cases}} \left| c_\alpha / \Gamma(\alpha) \right|^{1/\alpha} < \infty$$

$$(1.3.88) \qquad \lim_{\begin{cases}\alpha \to +\infty \\ \alpha > 0\end{cases}} \left| c_{-\alpha} \, \Gamma(\alpha) \right|^{1/\alpha} = 0$$

On a également les sous-algèbres

$$(1.3.89) \qquad \mathcal{R}^+_\infty \doteq \mathcal{R}_\infty \cap \mathcal{R}^+ \quad ; \quad \mathcal{R}^+_p \doteq \mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}^+$$

$$(1.3.90) \qquad \underline{\underline{\mathcal{R}}}_\infty \doteq \mathcal{R}_\infty \cap \underline{\underline{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\mathcal{R}}}_p = \mathcal{R}_p \cap \underline{\underline{\mathcal{R}}}$$

Les algèbres $\mathcal{R}^+_1$ et $\mathcal{R}_1$ sont particulièrement importantes et possèdent une interprétation remarquable dans le modèle convolutif : les éléments $\tilde{\Phi}$ de $\mathbf{R}^+_1$ (resp. $\mathbf{R}_1$) ont des mineurs $\varphi(\zeta)$ ne possédant que des poles simples et des singularités logarithmiques (resp. des poles d'ordre quelconque et des singularités logarithmiques). Autrement dit, au voisinage des singularités ζ_0 , on a respectivement :

$$(1.3.91) \qquad \varphi(\zeta) = \varphi_{reg}(\zeta-\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i}\frac{A_0}{\zeta-\zeta_0} + \frac{1}{2\pi i}\varphi_0(\zeta-\zeta_0)\log(\zeta-\zeta_0)$$

$$(1.3.92) \qquad \varphi(\zeta) = \varphi_{reg}(\zeta-\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i}\sum \frac{n!\,A_n}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\varphi_0(\zeta-\zeta_0)\log(\zeta-\zeta_0)$$

avec φ_{reg} et φ_0 fonctions régulières de $\zeta-\zeta_0$. Appliquer une dérivation étrangère Δ_ω à un élément $\varphi \in \mathbf{R}^+_1$ (par exemple) revient à prendre une combinaison linéaire d'un nombre fini de φ_0 (pour des singularités ζ_0 au-dessus de ω) et à ajouter un dirac $A\,\delta(\zeta)$ dont le coefficient A est lui-même combinaison linéaire finie de résidus A_0 .

Les algèbres de résurgence énumérées ci-dessus sont les plus importantes. Certaines applications conduisent bien à en considérer d'autres, mais jusqu'à présent toutes les sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}$ issues de problèmes naturels se sont avéré posséder deux propriétés remarquables - la représentabilité et la restrictibilité - qui en facilitent beaucoup l'étude.

La représentabilité signifie qu'il existe dans $\underline{\mathcal{R}}$ (voir § 13b) une famille $\{J^\alpha\}$ de fonctions résurgentes telles que tout élément φ de $\mathcal{A}$ admette (dans le modèle formel) un développement unique du type

(1.3.93) $$\varphi(z) = \sum_\alpha c_\alpha \, J^\alpha(z) \qquad (c_\alpha \in \mathbb{C} \text{ ; convergence faible})$$

En pratique, la famille $\{J^\alpha\}$ en question est toujours une famille $\left\{ J^\alpha(z) = J^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(z) \right\}$ de monômes logarithmiques du type (1.3.35) avec des multiindices α de longueur r fixée.

La restrictibilité signifie qu'on peut définir sur $\mathcal{A}$ une forme restreinte. C'est le cas chaque fois que l'on a :

(1.3.94) $$\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^+$$

et qu'il existe une fonction résurgente exponentiable $K(z)$ ne dépendant que de $\mathcal{A}$ et telle que :

(1.3.95) $$\Delta_\omega \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \, . \exp(\dot{\omega} K) \qquad (\forall \omega \in \mathbb{C}_\infty) \quad (*)$$

On peut alors définir sur $\mathcal{A}$ une forme restreinte au moyen de la formule:

(1.3.96) $$\operatorname{rest}(\varphi) = \sigma(\varphi) + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \mathbb{C}_\infty} \sigma\left(e^{-(\dot{\omega}_1+\ldots\dot{\omega}_r)K} \Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_1} \varphi\right) . Z^{\omega_1,\ldots,\omega_r}$$

(*) On n'a donc pas toujours $\Delta_\omega \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Ce n'est donc pas $\mathcal{A}$ elle-même qui est une algèbre de résurgence, mais $\mathcal{A}$ enrichie par les exponentielles de K.

et avec le même homomorphisme σ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ qu'en (1.3.76). On dispose donc d'un homomorphisme rst de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre Δ' des pseudo-variables. Cette "forme restreinte" est analogue à celle de la proposition 1.3.13 et rend les mêmes services (cf. § 10.7).

1.3.f. Les suralgèbres de fonctions résurgentes monogènes

On a parfois, quoique rarement, à considérer une extension des fonctions résurgentes qui revient à admettre, dans le modèle convolutif (variable ζ) des singularités partout denses (non plus seulement en projection sur $\mathbb{C}$, mais sur chaque feuillet). Les fonctions (de ζ) en question sont analogues aux fonctions monogènes introduites par Emile Borel [Bo] mais avec cette différence qu'elles sont multiformes (ramifiées) alors que les fonctions monogènes de Borel étaient uniformes (*)

Esquissons seulement une construction (**) de l'algèbre des fonctions résurgentes monogènes (dans le modèle convolutif). Les majeurs $\Phi(\zeta)$ sont des fonctions de ζ définies sur tout chemin $\Gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ qui part de l'origine 0 et évite un certain ensemble $K = K(\Phi)$ de mesure nulle, stable par rotation d'un tour. Ces majeurs vérifient la propriété de monogénéité de Borel (voir [Bo], page 134) qui garantit l'existence des dérivées

$$\Phi'(\zeta_0) = \lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 \\ \zeta \neq K}} \frac{\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \quad \text{presque sûrement} \quad (**) \tag{1.3.97}$$

(*) Voici deux exemples typiques de fonctions monogènes, respectivement uniforme et multiforme :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{m_i, n_i \in \mathbb{N}^*} e^{-e^{m_1+m_2+n_1+n_2}} \left(\zeta - \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\, i\right)^{-1}$$

$$\varphi(\zeta) = \sum_{m_i, n_i \in \mathbb{N}^*} e^{-e^{m_1+m_2+n_1+n_2}} \log\left(\zeta - \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\, i\right)$$

(**) Tout comme pour les fonction monogènes (uniformes) de Borel, on a le choix entre plusieurs constructions, dont chacune couvre tous les cas pratiques, mais dont aucune ne semble pouvoir englober toutes les autres.

(***) c'est-à-dire sur presque tout les rayons $\arg(\zeta - \zeta_0) = \theta$.

et ils vérifient une condition de "multiformité tempérée" qui dit grosso modo qu'en notant γ les divers chemins de $\mathbb{C}_\infty \dot{-} K$ issus de $\mathcal{O}$ et aboutissant en ζ_0, on a :

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \left(\Phi_\gamma(\zeta_0) - \Phi_{\gamma_0}(\zeta_0) \right) = 0 \qquad (\gamma_0 \text{ chemin fixe}) \tag{1.3.98}$$

où $\Phi_\gamma(\zeta_0)$ désigne bien sûr la valeur en ζ_0 du prolongement "monogène" de $\Phi(\zeta)$ selon le chemin γ.

Le mineur φ est bien entendu défini par :

$$\varphi_\gamma(\zeta) = \Phi_\gamma(\zeta) - \Phi_{\gamma'}(\zeta) \qquad (\forall \zeta_0, \forall \gamma) \tag{1.3.99}$$

où γ' se déduit de γ par rotation de -2π autour de $\mathcal{O}$.

Un majeur Φ est dit régulier en $\mathcal{O}$ si son mineur φ est nul. On note $\mathcal{R}^{mono}$ l'espace de tous les majeurs quotienté par l'espace des majeurs réguliers en $\mathcal{O}$. Les éléments de $\mathcal{R}^{mono}$ sont notés $\tilde{\Phi}$. Il y a quelque difficulté à définir sur $\mathcal{R}^{mono}$ une convolution(*) et des dérivations étrangères. Le plus simple est de considérer l'espace $\mathcal{R}^{mono}$ comme le complété de l'espace $\mathcal{R}$ par une infinité de semi-normes qui mesurent la "taille" des $\tilde{\Phi}$ et de leur dérivées étrangères $\Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} \tilde{\Phi}$ sur certains ensembles parfaits et ramifiés au-dessus de $\mathbb{C}_\infty$.

Nous n'avons heureusement pas à entrer dans les détails de cette construction, car les fonctions résurgentes monogènes que nous aurons à envisager seront d'un type particulièrement simple. Elles seront toutes de la forme :

(*) En considérant des limites d'intégrales du type [E1](1b13) on peut sans mal définir la valeur du mineur de $\tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_2$ en des points ζ radialement accessibles à partir de l'origine, mais le difficile est de montrer la prolongeabilité monogène non radiale.

(1.3.100) $$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \mathbb{C}_\infty} c_{\omega_1,\dots,\omega_n} \mathcal{W}^{\omega_1,\dots,\omega_n}(\zeta)$$

avec des coefficients $c_{\omega_1,\dots,\omega_n}$ scalaires et des monômes de résurgence $\mathcal{W}^{\omega_1,\dots,\omega_n}(\zeta)$ de définition relativement élémentaire. Comme ces monômes vérifient une table de multiplication simple (voir § 1.4) et que leurs dérivées étrangères sont faciles à calculer, on peut aisément manipuler les φ de la forme (1.3.100). Comme d'autre part les $\mathcal{W}^{\omega_1,\dots,\omega_n}$ sont aisément majorables (dans le modèle convolutif) et leurs coefficients $c_{\omega_1,\dots,\omega_n}$ explicitement donnés, on parvient dans chaque cas à vérifier que le second membre de (1.3.100), prolongé dans le plan des ζ à partir de 0 le long de n'importe quel chemin évitant un ensemble $K = K(\varphi)$ de mesure nulle, converge effectivement (voir §6.2).

1.3.g. Les suralgèbres de fonctions résurgentes stellaires.

Les fonctions résurgentes monogènes ne sont pas la seule extension utile des fonctions résurgentes ordinaires. Certains problèmes (*) obligent à considérer l'algèbre $\mathcal{R}(\theta_1,\theta_2)$ des fonctions résurgentes dont les majeurs $\phi(\zeta)$ ne sont définis que dans un secteur $\theta_1 < \arg \zeta < \theta_2$ (d'ouverture $\theta_2 - \theta_1$ toujours supérieure à π). Les éléments de $\mathcal{R}(\theta_1,\theta_2)$ sont les classes $\widetilde{\phi}$ modulo les germes réguliers en 0 .

La convolution sur $\mathcal{R}(\theta_1,\theta_2)$ est définie de la manière suivante. On pose :

(1.3.101) $$\widetilde{\phi}_1 * \widetilde{\phi}_2 = \widetilde{\phi_1 *_u \phi_2} = \widetilde{\phi_1 *^u \phi_2}$$

avec $\phi_1 *_u \phi_2(\zeta)$ défini par l'intégrale (1.3.1) et $\phi_1 *^u \phi_2$ défini par l'intégrale suivante :

(*) tels l'inversion des fonctions résurgentes (voir ci-après) ou le changement de variable $z \to z' = h(z)$ dans les fonctions résurgentes ou encore la résolution des équations différentielles à plusieurs niveaux et non "unilatérales" (voir §2.4 et suivants).

$$(1.3.102) \qquad \varphi_1 *^u \varphi_2(\zeta) = -\int_u^{\zeta-u} \varphi_1(\zeta_1)\,\varphi_2(\zeta-\zeta_1)\,d\zeta_1 \qquad (*)$$

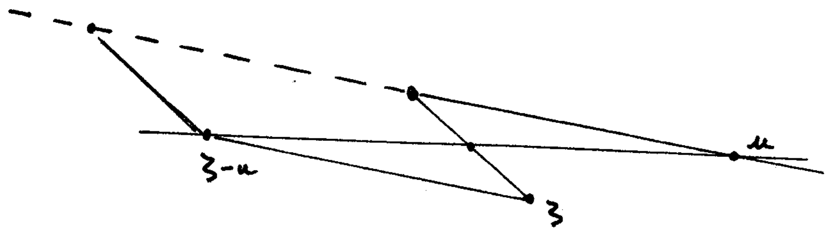


Figure 1.5

Pour les points ζ situés dans le demi-plan $\theta_2-\pi < \arg\zeta < \theta_2$ on prend comme représentant de la classe $\tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_2$ le majeur $\varphi_1 *_u \varphi_2(\zeta)$ défini à partir d'un point u d'argument $\theta_2-\pi$. Pour les points ζ situés dans le demi-plan $\theta_1 < \arg\zeta < \theta_2+\pi$ on prend $\varphi_1 *^u \varphi_2(\zeta)$ défini à partir d'un point u d'argument $\theta_1+\pi$. Pour les autres points ζ (il y en a lorsque $\theta_2-\theta_1 > 2\pi$) on peut prendre indifféremment $\varphi_1 *_u \varphi_2$ ou $\Phi_1 *^u \Phi_2$ pour des u bien choisis. On peut ainsi fixer un nombre fini de points u tels que les demi-plans correspondants, de la forme $0<\arg\pm\zeta/u<\pi/2$, recouvrent tout le secteur stellaire considéré. Or on vérifie que les $\Phi_1 *_u \Phi_2$ et les $\varphi_1 *^u \varphi_2$, sur leurs secteurs communs de définition, ne diffèrent que par des fonctions régulières en $\mathbb{O}$.

Remarque 1 : On ne peut pas définir la convolution $*$ quand le secteur de base (pour les majeurs) est d'ouverture $\theta_2-\theta_1 < \pi$. Quand il est exactement d'ouverture π, on peut la définir, mais à condition d'imposer aux majeurs une condition d'intégrabilité sur les bords du secteur.

Remarque 2 : Lorsque le secteur de base est d'ouverture $\theta_2-\theta_1 > 2\pi$, la formule (1.3.4) permet d'associer aux classes $\tilde{\Phi}$ des mineurs φ définis sur le secteur $\{\theta_1+2\pi < \arg\zeta < \theta_2\}$

(*) Notons que l'intégrale (1.3.102) est précédée du signe - alors que l'intégrale (1.3.1) est précédée du signe + .

Remarque 3 : Toujours dans le cas $\theta_2 - \theta_1 > 2\pi$, on n'a aucun mal à définir les dérivées étrangères $\Delta_\omega \widetilde{\varphi}$ des éléments $\widetilde{\varphi}$ de $\mathcal{R}(\theta_1, \theta_2)$ pourvu que $\theta_1 + 2\pi < \arg \omega < \theta_2$. On impose à ces dérivées d'appartenir encore à $\mathcal{R}(\theta_1, \theta_2)$ si bien qu'on a pour les mineurs φ des domaines de définition du type suivant :

Figure 1.6. Cas $\theta_1 + 2\pi < \theta_2 < \theta_1 + 3\pi$, $\theta_1 + 2\pi < \theta < \theta_2$

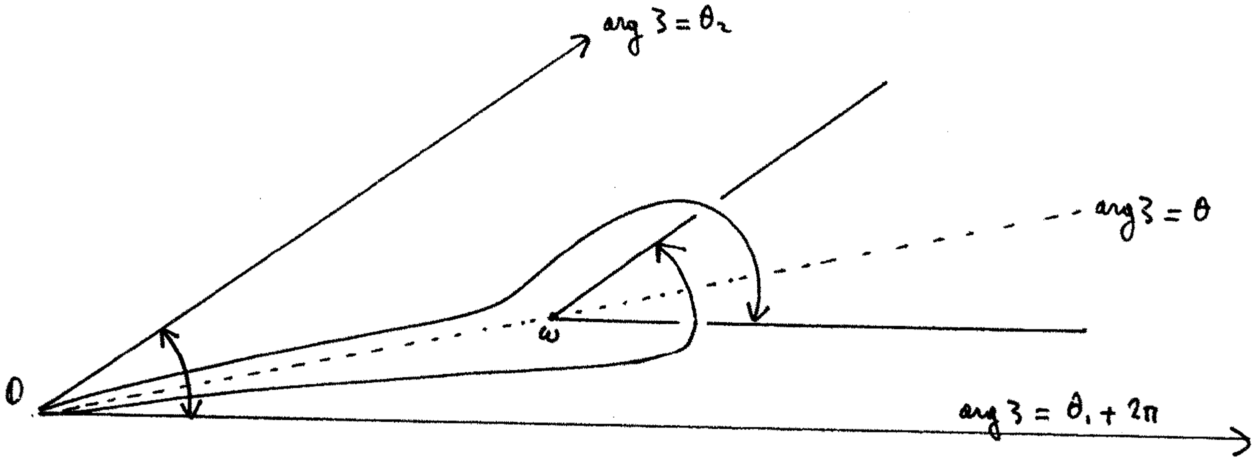


Figure 1.7. Cas $\theta_1 + 4\pi < \theta_2 < \theta_1 + 5\pi$, $\theta_1 + 2\pi < \theta < \theta_2 - 2\pi$

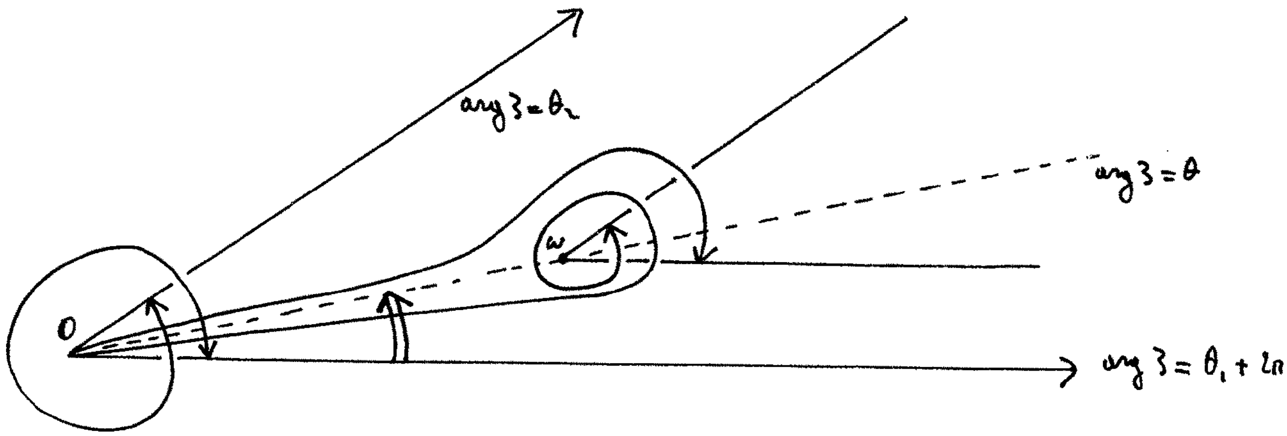
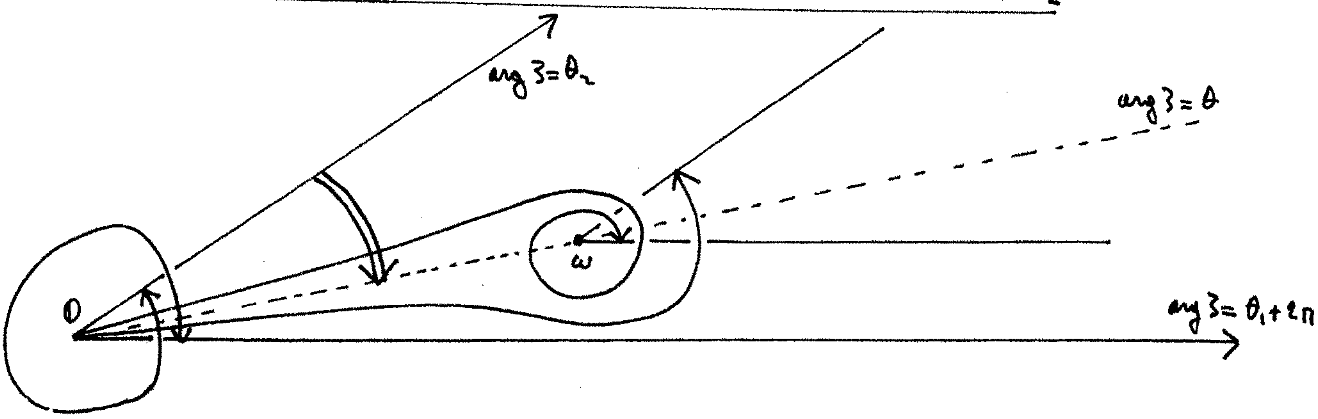


Figure 1.8. Cas $\theta_1 + 4\pi < \theta_2 < \theta_1 + 5\pi$, $\theta_1 + 4\pi < \theta < \theta_2$



Sur chacune des trois figures, les flèches indiquent les limites radiales du secteur de définition du mineur $\varphi(\zeta) = \min \tilde{\varphi}(\zeta)$ et ω désigne la première singularité de $\varphi(\zeta)$ sur l'axe $\arg \zeta = \theta$.

Remarque 4 : Lorsque l'ouverture du secteur de base est $< 2\pi$, les dérivées étrangères sont plus délicates à définir. Comme nous n'aurons à utiliser cette construction qu'une seule fois, aux §§ 3/6 et 3.7, c'est là que nous la ferons.

Remarque 5 : Les cas les plus simples de coupures stellaires sont fournis par l'inversion de certaines fonctions résurgentes. Fixons par exemple ν nombres $\omega_1, \dots, \omega_\nu$ non nuls tels que :

(1.3.103) $$0 < \operatorname{Arg} \omega_1 < \operatorname{Arg} \omega_2 < \dots \operatorname{Arg} \omega_\nu \leq 2\pi$$

et considérons l'équation différentielle :

(1.3.104) $$\prod_{i=1}^{\nu} \left(\omega_i + \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \mathcal{U}(z) \quad = z^{-1}$$

ainsi que l'équation :

(1.3.105) $$\prod_{i=1}^{\nu} \left(\omega_i + 2\, z_*^{1/2} \frac{\partial}{\partial z_*}\right) \mathcal{U}_*(z_*) = z_*^{-1/2}$$

qui s'en déduit par le changement de variables :

(1.3.106) $$z \longmapsto z_* = z^2$$

L'équation (1.3.104) possède une seule solution résurgente en z . Celle-ci s'obtient dans le modèle formel en prorésolvant l'équation (1.3.104), c'est-à-dire en formant son unique solution en puissances décroissantes de z ; dans le modèle convolutif en posant :

(1.3.107) $$\mathcal{U}(\zeta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\omega_i - \zeta} \qquad (\mathcal{U} = \text{mineur})$$

et dans les modèles sectoriels en soumettant $\mathcal{U}(z)$ à la transformation de Laplace d'axe θ (ou d'axe θ^{ε} s'il y a des singularités sur le trajet). Pour θ compris entre $\theta_i = \mathrm{Arg}\,\omega_i$ et $\theta_{i+1} = \mathrm{Arg}\,\omega_{i+1}$ cette transformée de Laplace $\mathcal{U}^{\theta}(z)$ est un germe analytique à l'infini, admettant $\mathcal{U}(z)$ pour développement asymptotique dans le secteur :

$$-\theta_{i+1} - \frac{\pi}{2} < \arg z < -\theta_i + \frac{\pi}{2}$$

et de croissance exponentielle dans toutes les autres directions.

L'équation (1.3.105) au contraire possède une infinité de solutions résurgentes en z_*, qui ne diffèrent entre elles que par des combinaisons linéaires d'exponentielles $e^{-\omega_i z_*^{1/2}}$. On obtient ces solutions dans le modèle formel en retrorésolvant (1.3.105), c'est-à-dire en formant ces solutions en puissances positives de $z_*^{1/2}$ (avec un premier terme exceptionnel $z_*^{-1/2}$); dans le modèle convolutif en soumettant les solutions formelles (ou plus exactement, les solutions dans le modèle formel) à la transformation de Borel; et dans les modèles sectoriels, à partir des modèles sectoriels des solutions de (1.3.104), par simple changement de variable (1.3.106) suivi de l'addition de combinaisons exponentielles $\sum \alpha_i\, e^{-\omega_i z_*^{1/2}}$

Cherchons maintenant à inverser (au sens de la multiplication d'algèbre) les fonctions résurgentes obtenues. Pour $\mathcal{U}$, pas de difficulté : l'inverse existe, est unique et facile à construire dans chacun des trois modèles. Dans le modèle formel, par exemple, on a :

$$(1.3.108) \qquad \left(\mathcal{U}(z)\right)^{-1} = a_{-1} z + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

Il n'en va plus de même pour $\mathcal{U}_*$. Bien qu'appartenant à l'algèbre $\mathcal{R}$ (et même à $\mathcal{R}_2$) la fonction résurgente $\mathcal{U}_*$ ne possède pas d'inverse dans $\mathcal{R}$, mais seulement dans les algèbres stellaires :

(1.3.109) $$\mathcal{R}\left(2\theta_i - \frac{5}{2}\pi\ ,\ 2\theta_{i+1} + \frac{1}{2}\pi\right)$$

Dans le <u>modèle sectoriel</u> (*) l'inverse de $\mathcal{U}_*$ s'obtient par simple changement de variable à partir de l'inverse de $\mathcal{U}$. Dans le <u>modèle convolutif</u>(*), l'inverse de $\mathcal{U}_*$ a un <u>majeur</u> $\mathcal{W}^1_*$ qui s'obtient au moyen des intégrales :

(1.3.110)
$$\begin{cases} \mathcal{W}^1_*(\zeta_*) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_u^{\infty:\theta_*} e^{z_*\zeta_*}\,\dfrac{dz_*}{\mathcal{U}^\theta_*(z_*)} & (-2\theta_{i+1}-\pi<\theta_*<-2\theta_i+\pi) \\ \qquad\quad\ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_u^{\infty:\theta} e^{z^2\zeta_*}\,\dfrac{dz^2}{\mathcal{U}^\theta(z)} & (-\theta_{i+1}-\frac{\pi}{2}<\theta<\theta_i+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

où $\mathcal{U}^\theta$ et $\mathcal{U}^\theta_*$ désignent les modèles sectoriels des solutions de nos équations différentielles. Ce majeur $\mathcal{W}^1_*$ est bien défini dans le secteur :

(1.3.111) $$2\theta_i - \frac{5\pi}{2} < \arg \zeta_* < 2\theta_{i+1} + \frac{1}{2}\pi$$

et on montre qu'il possède, sur les deux axes limitant le secteur (1.3.111), des <u>coupures stellaires</u>, c'est-à-dire des coupures :

(i) qui commencent en 0 et se poursuivent sans interruption sur toute la longueur des axes en question.

(ii) qui sont totalement infranchissables (même au sens du prolongement analytique monogène).

C'est de là que les algèbres de résurgence stellaires tirent leur nom. Notons que, dans cet exemple très simple, la fonction résurgente stellaire $\tilde{\mathcal{W}}^1_*$ a toutes ses dérivées étrangères nulles.

<u>Remarque 6</u>. Pour les algèbres de résurgence stellaires on définit facilement un modèle formel au moyen de séries faiblement convergentes(**) du type (1.3.27) mais

(*) de ces algèbres stellaires.
(**) dans le secteur stellaire du plan des ζ .

il importe de noter qu'ici le modèle formel n'est pratiquement d'aucun secours, car il n'a pas d'interprétation simple : en effet, si une fonctions résurgente est strictement stellaire (i.e. si elle n'appartient pas à $\mathcal{R}$), on ne peut en général pas la développer en une série de puissances de z ni même de monômes logarithmiques du type (1.3.35). C'est en particulier le cas de la fonction $\widetilde{w}_*$ construite à la remarque 5, qui n'admet aucun modèle formel simple.

§1.3.h. Les principales sources de résurgence. Equations de résurgence et résurgence équationnelle.

Bien que la définition des fonctions résurgentes ne comporte aucune hypothèse sur la nature des dérivées étrangères, toutes les fonctions résurgentes qu'on rencontre en pratique se trouvent vérifier des équations de résurgence : cela veut dire que les dérivées étrangères $\Delta_\omega \varphi$ sont liées à la fonctions d'origine par des relations implicites ou explicites :

$$E_\omega(\varphi, \Delta_\omega \varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_\omega \varphi = F_\omega(\varphi)$$

Interprétée dans le modèle convolutif, la deuxième équation (par exemple) signifie qu'en ses singularités le mineur $\varphi(\zeta)$ a un comportement qui reproduit(*) ou qui rappelle celui de $\varphi(\zeta)$ à l'origine. D'une façon imagée, on peut dire que la fonction originelle "ressuscite" en ses singularités - telle quelle (*) ou plus ou moins altérée selon la complexité des équations de résurgence. D'où le nom de fonctions résurgentes donné à ces fonctions et étendu, par commodité, à tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{R}$ (**).

La nature concrète des équations de résurgence dépend beaucoup de l'origine des fonctons considérées. On trouvera décrits au §11.9 les principaux types de résurgence connus jusqu'à ce jour :

(*) si $F_\omega(\varphi) = A_\omega \varphi$ (**) Il n'est pas rare qu'introduisant un être mathématique nouveau, on choisisse (par commodité) d'exclure de sa définition ce qui (moralement) constitue sa propriété essentielle.

(i) résurgence équationnelle

(ii) résurgence de synthèse

(iii) résurgence paramétrique

(iiii) résurgence quantique

(iiiii) résurgence collatérale

(iiiiii) résurgence artificielle

La résurgence que nous rencontrerons dans ce livre sera du type équationnel. Ce type regroupe toutes les fonctions résurgentes :

(i) qui sont solutions locales (dans le modèle formel) d'équations ou de systèmes (différentiels ou aux différences, fonctionnels, mixtes, etc.) :

$$(E) \qquad\qquad E(\varphi) = 0$$

à coefficients analytiques

(ii) telles que la variable z (modèle formel) par rapport à laquelle il y a résurgence soit la variable même de l'équation (E) ou bien lui soit liée simplement.

Il existe dans ce cas des règles fort simples permettant de déduire de $E(\varphi) = 0$ des équations de résurgence $E_\omega(\varphi, \Delta_\omega \varphi) = 0$ d'une forme bien particulière (notamment <u>linéaires homogènes</u> en $\Delta_\omega \varphi$. Voir §11.8.

En fait, les problèmes de classement d'objets que nous traiterons nous conduirons à un sous-cas très spécial de <u>résurgence équationnelle</u> (en effet, les équations $E(\varphi) = 0$ seront soit purement différentielles soit purement aux différences) et à des <u>équations de résurgence</u> elles aussi d'un type très spécial (ce sera l'équation du pont).

1.3.i. Fonctions résurgentes et microfonctions

Dans le modèle convolutif, les fonctions résurgentes $\tilde{\Phi}(\zeta)$ peuvent être envisagées de deux points de vue :

(i) comme des hyperfonctions en $\mathbb{O}$ dont les mineurs $\varphi = \min \tilde{\Phi}$ se trouvent être prolongeables partout sans coupure (*)

(ii) comme des fonctions analytiques sans coupures qui se trouvent posséder un point particulier (l'origine $\mathbb{O}$) et être définies modulo les fonctions régulières en $\mathbb{O}$.

Ces deux présentations sont logiquement équivalentes. La première nous a été signalée par B. Malgrange (**), qui l'a exposée dans [Ml.2] . Elle est intéressante et permet de faire l'économie de quelques petites démonstrations (associativité de la convolution, etc.). Elle a toutefois, à nos yeux, l'inconvénient de privilégier l'aspect local de $\tilde{\Phi}(\zeta)$, alors que c'est l'aspect global qui prime et sur quoi tout repose, à commencer par l'opération de dérivation étrangère, qui n'est pas une opération locale. De plus, de nombreuses applications ne font appel qu'à l'algèbre $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$. Or les éléments $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}^+$ sont déterminés (***) par leurs mineurs $\varphi = \min \tilde{\Phi}$, si bien que pour eux l'aspect "hyperfonction" disparaît complètement.

De toute façon, l'intersection entre le microcalcul (théorie des hyperfonctions et microfonctions)et le calcul étranger (théorie des fonctions résurgentes) est extrêmement mince et nulle connaissance du premier n'est requise pour l'étude du second.

(*) B. Malgrange nous a signalé la notation $\mathrm{var}\,\tilde{\Phi}$ (variation de $\tilde{\Phi}$) utilisée par P. Deligne pour désigner les mineurs.

(**) Quand nous avons introduit dans [E1] les fonctions résurgentes à l'aide de la notion de "germe qualifié", nous ignorions la théorie des hyper- et microfonctions, dont les "germes qualifiés" sont un cas particulier.

(***) au dirac près.

1.3.j. La bonne définition des transformations de Laplace-Borel

Il existe plusieurs variantes de la transformation de Laplace. Les deux plus courantes associent aux $\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$ intégrables en $\zeta = 0$ les $\varphi(z)$ suivants :

(1.3.112)	$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta}\,\boldsymbol{\varphi}(\zeta)\,d\zeta$	(1.3.112bis)	$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta z}\,d\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$

Elles admettent pour inverses les transformations de Borel ainsi définies :

(1.3.113)	$\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\zeta z}\,\varphi(z)\,dz$	(1.3.113bis)	$\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\zeta z}\,\varphi(z)\,\frac{dz}{z}$

Ces transformations possèdent les propriétés suivantes :

(1.3.114)	$\varphi(z) \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(\zeta)$	(1.3.114bis)	$\varphi(z) \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(\zeta)$
(1.3.115)	$z^{-\alpha} \longmapsto \zeta^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$	(1.3.115bis)	$z^{-\alpha} \longmapsto \zeta^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)\ (-\alpha \notin \mathbb{N})$
(1.3.116)	$\varphi(\lambda z) \longmapsto \lambda\,\boldsymbol{\varphi}(\lambda^{-1}\zeta)$	(1.3.116bis)	$\varphi(\lambda z) \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(\lambda^{-1}\zeta)\quad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$
(1.3.117)	$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z) \longmapsto -\zeta\,\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$	(1.3.117bis)	$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z) \longmapsto -\int_0^{\zeta} \zeta_1\,d\boldsymbol{\varphi}(\zeta_1)$
(1.3.118)	$\varphi(z+\lambda) \longmapsto e^{-\lambda\zeta}\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$	(1.3.118bis)	$\varphi(z+\lambda) \longmapsto \int_0^{\zeta} e^{-\lambda\zeta_1}\,d\boldsymbol{\varphi}(\zeta_1)$
(1.3.119)	$z\,\varphi(z) \longmapsto \frac{\partial}{\partial\zeta}\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$	(1.3.119bis)	$z\,\varphi(z) \longmapsto \frac{\partial}{\partial\zeta}\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$

Ces formules sont toutes simples, sauf (1.3.117bis) et (1.3.118bis). Or on est constamment amené, dans le modèle formel, à dériver ou à translater en z, ne serait-ce que dans l'étude des fonctions résurgentes solutions d'équations ou de systèmes différentiels ou aux différences. Ceci impose le choix de la colonne de gauche et conduit à définir les transformations de Laplace-Borel par (1.3.112) et (1.3.113) pour l'algèbre $\mathcal{R}^{+}$ et plus généralement par (1.3.17) et (1.3.18) pour $\mathcal{R}$.

SECTION 1.4 : CALCUL INTEGRAL ETRANGER. RAPPEL SUR LES MOULES.

1.4a Les deux faces du calcul étranger

Le calcul étranger a deux faces :

(i) le calcul différentiel étranger, qui est un calcul d'analyse : étudier des fonctions résurgentes données, trouver les équations de résurgence qu'elles vérifient, décrire les idéaux de dérivations étrangères qui les annulent, etc. Ce calcul, dont les principes sont résumés à la section précédente, repose tout entier sur les dérivations étrangères Δ_ω et leur mode d'emploi, ainsi que sur les pseudovariables.

(ii) le calcul intégral étranger, qui est un calcul de synthèse : résoudre une équation ou un système d'équations de résurgence, discuter la régularité des solutions, en rechercher qui soient particulièrement simples ou "canoniques", etc. Ce calcul, dont la présente section donnera un aperçu, repose essentiellement sur les monômes de résurgence et la notion de représentation des pseudovariables.

Dans ce livre, c'est surtout le calcul différentiel étranger qui nous servira. Nous verrons qu'il suffit à la construction des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ des objets locaux. Le calcul intégral étranger nous servira surtout à établir les formules explicites donnant les $\mathbb{A}_\omega$. Il se révèle également indispensable dans les problèmes de synthèse (étant donné une classe analytique d'objet locaux, définie par une famille d'invariants $\mathcal{A}_\omega$, construire un représentant, si possible canonique, de cette classe) mais ceux-ci ne sont pas du ressort de ce livre (*). Nous en dirons toutefois un mot à la fin de ce livre (§§11.2 et 11.3)

1.4.b. Monômes de résurgence et représentations des pseudovariables

Les monômes (ordinaires) sont très faciles à dériver (au sens ordinaire) et permettent de développer en séries les fonctions analytiques (ordinaires). Par analogie, nous nous proposons ici de construire des monômes de résurgence, c'est-à-dire des fonctions résurgentes élémentaires qui permettent d'approximer toutes les autres et qui soient faciles à dériver étrangèrement.

D'une façon générale, appelons représentation des pseudovariables tout homomorphisme

$$h \;:\; Z^{\omega_1,\dots,\omega_r} \longmapsto \mathcal{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \qquad (\omega_1,\dots,\omega_r \in \mathbb{C}_\infty) \tag{1.4.1}$$

de l'algèbre Δ' des pseudovariables dans l'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions résurgentes (**). Se donner une représentation h revient donc à se donner des $\mathcal{W}^\omega$ (ω multiindices) qu'on nomme monômes de résurgence et qui doivent vérifier la même table de multiplication que les pseudovariables (**) :

$$\mathcal{W}^{\omega^1} * \mathcal{W}^{\omega^2} = \sum_{\omega \,\sqsubset\, \omega^1,\omega^2} \mathcal{W}^{\omega} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{(modèle convolutif)}\\ \omega, \omega^1, \omega^2 \text{ multiindices}\\ \sqsubset \text{ désigne le battage (cf §1.3.d)}\end{array}\right. \tag{1.4.2}$$

En fait, les représentations intéressantes sont :

(i) les représentations Δ-stables qui commutent avec les dérivations étrangères, soit $h \circ \Delta_\omega = \Delta_\omega \circ h$ ou encore :

(*) Nous comptons leur consacrer un jour un volume à part dans cette série.

(**) Comme tous les monômes de résurgence que nous utilisons sont en fait à valeur dans l'algèbre $\mathcal{R}^+$, nous les représentons (dans le modèle convolutif) par leur mineur $\mathcal{W}^\omega$.

$$(1.4.3) \qquad \Delta_{\omega_0} \mathcal{W}^{\omega_1,\ldots,\omega_r} = \begin{cases} \mathcal{W}^{\omega_2,\ldots,\omega_r} & \text{si } \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \omega_0 \neq \omega_1 \end{cases}$$

(ii) Les représentations ∂-stables qui "commutent presque" avec la dérivation naturelle $\partial = \partial/\partial z$ (modèle formel). En effet, la commutation rigoureuse $h \circ \partial = \partial \circ h$ conduirait aux équations :

$$(1.4.4) \qquad \left(\|\dot{\omega}\| + \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{W}^{\omega}(z) = 0 \ (\text{modèle formel}) \qquad \omega = (\omega_1,\ldots,\omega_r)$$

$$(1.4.4\text{bis}) \qquad \left(\|\dot{\omega}\| - \zeta\right) \mathcal{W}^{\omega}(\zeta) = 0 \ (\text{modèle convolutif}) \qquad \|\dot{\omega}\| = \dot{\omega}_1 + \ldots \dot{\omega}_r$$

qui n'ont pas de solutions (autres que triviales) dans l'algèbre des fonctions résurgentes. On impose donc une forme affaiblie de (1.4.4) :

$$(1.4.5) \qquad \left(\|\dot{\omega}\| + \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{W}^{\omega} = \text{"quelque chose de simple"}$$

le quelque chose de simple étant en général de la forme $\mathcal{W}^{\omega_1,\ldots,\omega_{r-1}} \mathcal{H}^{\omega_r}$ avec des $\mathcal{H}^{\omega_r}$ qui sont des constantes de résurgence[(*)].

En pratique, on commence par les représentations ∂-stables, faciles à construire, puis on en déduit les représentations Δ-stables, plus directement utiles. Nous ferons la construction dans le cas de l'algèbre de résurgence $\mathcal{R}_1$ (celle dont les éléments sont stables par rotation d'un tour, dans le plan des z ou celui des ζ), ce qui permettra de prendre les indices ω non plus dans $\mathbb{C}_\infty$ mais dans $\mathbb{C}_1$.

Mais il faut au préalable introduire la notion de moule, qui simplifie considérablement tous les calculs relatifs aux monômes de résurgence.

(*) Voir §1.3.b.

1.4.c L'algèbre des moules

Un moule $A^{\bullet} = \{A^{\omega} ; \omega = (\omega_1,\dots,\omega_r)\}$ à valeurs dans une algèbre commutative est une famille d'éléments $A^{\omega} = A^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ appartenant à cette algèbre et multiindexés sur $\mathbb{C}$ (*) Autrement dit les ω_i parcourent $\mathbb{C}$ et r parcourt $\mathbb{N}$.

On a trois opérations sur les moules :

(i) l'addition

(1.4.6) $$A^{\bullet} = B^{\bullet} + C^{\bullet} \iff A^{\omega} = B^{\omega} + C^{\omega}$$

(ii) la multiplication :

(1.4.7) $$A^{\bullet} = B^{\bullet} \times C^{\bullet} \iff A^{\omega} = \sum_{\omega^1\omega^2=\omega} B^{\omega^1} C^{\omega^2}$$

La somme $\sum$ est étendue à toutes les factorisations du multiindice ω en produit de deux multiindices ω^1 et ω^2 (qui peuvent être le multiindice vide ϕ).

Autrement dit :

$$A^{\omega_1,\dots,\omega_r} = B^{\phi} C^{\omega_1,\dots,\omega_r} + B^{\omega_1,\dots,\omega_r} C^{\phi} + \sum_{j=1}^{r-1} B^{\omega_1,\dots,\omega_j} C^{\omega_{j+1},\dots,\omega_r}$$

(iii) la composition :

(1.4.8) $$A^{\bullet} = B^{\bullet} \circ C^{\bullet} \iff A^{\omega} = \sum_{\begin{cases} s \in \mathbb{N} \\ \omega^1 \dots \omega^s = \omega \end{cases}} B^{\|\omega^1\|,\dots,\|\omega^s\|} C^{\omega^1} \dots C^{\omega^s}$$

Soit plus explicitement :

(1.4.8bis) $$A^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \sum B^{\omega_1+\dots\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s+1}+\dots\omega_r} C^{\omega_1,\dots,\omega_{r_1}} \dots C^{\omega_{r_s+1},\dots,\omega_r}$$

La compostion à gauche par $C^{\bullet}$ n'est définie que si $C^{\phi} = 0$.

(*) Ou plus généralement sur un semi-groupe abélien quelconque. On rencontrera au §1.4.c des moules indexés sur le semi-groupe multiplicatif des constantes de résurgence.

Les trois opérations $(+,\times,\circ)$ sur les moules possèdent exactement les mêmes propriétés (pas une de plus, pas une de moins) que les opérations correspondantes sur les séries formelles (à une indéterminée et à coefficients non commutatifs). Par exemple :

$$(1.4.9)\qquad (A^\bullet + B^\bullet)\circ C^\bullet = A^\bullet \circ C^\bullet + B^\bullet \circ C^\bullet$$

$$(1.4.10)\qquad (A^\bullet \times B^\bullet)\circ C^\bullet = (A^\bullet \circ C^\bullet)\times(B^\bullet \circ C^\bullet)$$

Ces moules forment donc une <u>algèbre de compostion</u>.

La multiplication des moules possède un élément neutre, noté $1^\bullet$ et dit <u>moule unité</u> :

$$(1.4.11)\qquad 1^\phi = 1 \quad \text{et} \quad 1^{\omega_1,\dots,\omega_n} = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1.$$

La composition des moules possède un élément neutre, noté $I^\bullet$ et dit <u>moule identité</u> :

$$(1.4.12)\qquad I^\phi = 0 \quad \text{et} \quad I^{\omega_1} = 1 \ (\forall \omega_1) \quad \text{et} \quad I^{\omega_1,\dots,\omega_n} = 0 \quad (\text{si } n \geqslant 2)$$

Un moule $A^\bullet$ possède un inverse multiplicatif, noté $A^{\bullet-1}$, <u>ssi</u> $A^\phi \neq 0$. Il possède un inverse de composition, encore noté $A^{\bullet-1}$, <u>ssi</u> $A^\phi = 0$ et $A^{\omega_1} \neq 0$ pour tout indice simple ω_1. Comme ces deux cas sont mutuellement exclusifs, l'uniformité de la notation $A^{\bullet-1}$ ne peut pas prêter à confusion.

Un moule $A^\bullet$ est dit <u>symétral</u> si, pour toute paire ω^1,ω^2 de multiindices non-vides, on a :

$$(1.4.13)\qquad \sum_{\omega \in \omega^1,\omega^2} A^\omega = A^{\omega^1} A^{\omega^2}$$

et il est dit alternal(*) si $A^{\phi}=0$ et si pour tous ω^1 et ω^2 :

$$\sum_{\omega \sqsubset \omega^1, \omega^2} A^{\omega} = 0 \tag{1.4.14}$$

On a plusieurs relations de stabilité, dont les plus utiles sont les suivantes :

$$(A^{\bullet}, B^{\bullet} \text{ symétraux}) \Longrightarrow (A^{\bullet} \times B^{\bullet} \text{ symétral}) \tag{1.4.15}$$

$$(A^{\bullet}, B^{\bullet} \text{ alternaux}) \Longrightarrow (A^{\bullet} \circ B^{\bullet} \text{ alternal}) \tag{1.4.16}$$

$$(A^{\bullet} \text{ symétral}) \Longrightarrow (A^{\bullet -1} \times I^{\bullet} \times A^{\bullet} \text{ alternal}) \text{(**)} \tag{1.4.17}$$

$$(A^{\bullet} \text{ alternal}) \Longrightarrow (\exp A^{\bullet} \text{ symétral}) \quad \text{(***)} \tag{1.4.18}$$

Les moules symétraux tels que $A^{\phi} \neq 0$ forment un groupe (non commutatif) pour la multiplication $\times$. Les moules alternaux tels que $A^{\omega_i} \neq 0$ (pour tout ω_i indice simple) forment un groupe pour la composition $\circ$.

1.4.d Les représentations canoniques $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

D'après ce qui précède, se donner une représentation

$$h \; : \; Z^{\omega} \longmapsto \mathcal{W}^{\omega} \qquad (\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)) \tag{1.4.19}$$

des pseudovariables de l'algèbre de résurgence $\mathcal{R}_1$ revient à se donner un moule

(*) Un moule symétral (resp. alternal) n'est évidemment pas symétrique (resp. alterné) au sens ordinaire, c'est-à-dire relativement aux permutations des indices ω_i dans $A^{\omega_1, \ldots, \omega_r}$. C'est pour éviter toute confusion que nous parlons ici de symétralité (d'alternalité) au lieu de symétrie (alternance) comme dans [E1].

(**) $A^{\bullet -1}$ désigne ici l'inverse multiplicatif du moule $A^{\bullet}$.

(***) Il s'agit évidemment de l'exponentielle des moules :

$$\exp A^{\bullet} = 1^{\bullet} + A^{\bullet} + \frac{1}{2!} A^{\bullet} \times A^{\bullet} + \frac{1}{3!} A^{\bullet} \times A^{\bullet} \times A^{\bullet} + \ldots$$

symétral $\mathcal{W}^\bullet$ à valeurs dans $\mathcal{R}_1$. Dans toute la suite, les moules à valeurs fonctionnelles seront désignés par des majuscules cursives $\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet, \mathcal{C}^\bullet \ldots$ et les moules à valeurs scalaires par des majuscules droites $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet \ldots$

Proposition 1.4.1 (Représentations canoniques)

Il existe une unique représentation ∂-stable $Z^\omega \mapsto \mathcal{V}^\omega$ et une unique représentation Δ-stable $Z^\omega \mapsto \mathcal{U}^\omega$, caractérisées dans le modèle convolutif par :

$$(1.4.20)\quad \begin{cases} \mathcal{U}^\omega(\zeta) \text{ et } \mathcal{V}^\omega(\zeta) \longrightarrow 0 \text{ quand } \zeta \longmapsto \infty & (\forall \omega) \\ \mathcal{U}^\omega(\zeta) \text{ et } \mathcal{V}^\omega(\zeta) \text{ ne comportent pas de dirac en } 0 & (\forall \omega \neq \emptyset) \end{cases}$$

et dans les modèles sectoriels par :

$$(1.4.21)\quad \begin{cases} \mathcal{U}^\omega(z) \text{ et } \mathcal{V}^\omega(z) = o(z^{-\varepsilon}) \text{ quand } z \longrightarrow 0 & (\forall \omega, \varepsilon) \\ \mathcal{U}^\omega(z) \text{ et } \mathcal{V}^\omega(z) \longrightarrow 0 \text{ quand } z \longmapsto \infty & (\text{dans le secteur régulier}) \end{cases}$$

Ces deux représentations $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont dites canoniques. Elles présentent une propriété d'homogénéité :

$$(1.4.22)\quad \begin{cases} \mathcal{U}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}(\alpha z) = \mathcal{U}^{\alpha\omega_1,\ldots,\alpha\omega_r}(z) \\ \mathcal{V}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}(\alpha z) = \mathcal{V}^{\alpha\omega_1,\ldots,\alpha\omega_r}(z) \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \forall r \in \mathbb{N} \\ \forall \omega_1,\ldots,\omega_r \in \mathbb{C}^* \end{array} \right.$$

Proposition 1.4.2. (Représentation canonique ∂-stable)

Les monômes ∂-stables canoniques $\mathcal{V}^\omega$ se calculent par récurrence au moyen des formules :

$$(1.4.23)\quad \begin{cases} \mathcal{V}^\emptyset(z) = 1 & (\text{modèle formel}) \\ \left(\omega_1 + \ldots \omega_r + \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{V}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}(z) = -\dfrac{1}{2\pi i z}\, \mathcal{V}^{\omega_1,\ldots,\omega_{r-1}}(z) \end{cases}$$

(1.4.23bis)
$$\begin{cases} \mathcal{V}^{\phi}(\zeta) = \delta(\zeta) & \text{(modèle convolutif)} \\ \mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - (\omega_1 + \dots \omega_r)} \int_0^{\zeta} \mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}(\zeta_1)\, d\zeta_1 & (*) \end{cases}$$

et il existe un moule scalaire alternal $V^{\bullet}$, parfaitement déterminé par les équations de résurgences suivantes :

(1.4.24)
$$\Delta_{\omega_0} \mathcal{V}^{\omega} = \sum_{\substack{\omega^1\omega^2 = \omega \\ \|\omega\| = \omega_1}} V^{\omega^1} \mathcal{V}^{\omega^2} \qquad \begin{cases} \omega_0 \text{ indice simple} \\ \omega, \omega^1, \omega^2 \text{ multiindices} \end{cases}$$

Proposition 1.4.3 (Représentation canonique Δ-stable)

Si l'on note $U^{\bullet}$ le moule (scalaire) alternal inverse de composition du moule scalaire alternal $V^{\bullet}$:

(1.4.25)
$$U^{\bullet} \circ V^{\bullet} = V^{\bullet} \circ U^{\bullet} = I^{\bullet}$$

et si on note $\mathcal{U}^{\bullet}$ le moule (fonctionnel) symétral donné explicitement par :

(1.4.26)
$$\mathcal{U}^{\bullet} = \mathcal{V}^{\bullet} \circ U^{\bullet}$$

ou implicitement par la relation équivalente :

(1.4.27)
$$\mathcal{V}^{\bullet} = \mathcal{U}^{\bullet} \circ V^{\bullet}$$

on définit là une représentation $Z^{\omega} \mapsto \mathcal{U}^{\omega}$ qui se trouve être la représentation canonique Δ-stable. Les monômes $\mathcal{U}^{\omega}$ appartiennent à $\mathcal{R}_1^+$ et vérifient :

(1.4.28)
$$\Delta_{\omega_0} \mathcal{U}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \mathcal{U}^{\omega_2,\dots,\omega_r} \text{ si } \omega_0 = \omega_1 \text{ (et 0 sinon)}$$

(*) La formule vaut pour ζ petit. Pour les autres ζ, on prolonge analytiquement à partir de 0.

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\mathcal{U}^{\omega} = -\|\omega\|\,\mathcal{U}^{\omega} - \frac{1}{2\pi i z}\sum_{\omega^1\omega^2=\omega}\mathcal{U}^{\omega^1}\,U^{\omega^2}\quad(\text{modèle formel}) \tag{1.4.29}$$

1.4.e Propriétés des moules hyperlogarithmiques $U^{\bullet}$ et $V^{\bullet}$.

Les moules alternés $U^{\bullet}$ et $V^{\bullet}$ sont d'un emploi constant en calcul étranger(*). Ils permettent aussi d'exprimer certaines constantes transcendantes intervenant dans diverses théories mathématiques. Ces deux moules sont dit hyperlogarithmiques, car leur dépendance par rapport aux indices est bien de ce type, comme le montrent les relations différentielles :

$$2\pi i\,\frac{\partial}{\partial\omega_j}\,U^{\omega} = \sum_{\begin{cases}\omega^1\omega^2=\omega\\ \omega_j\in\omega^1\end{cases}}\frac{1}{\|\omega^1\|}\,U^{\omega^1}U^{\omega^2} - \sum_{\begin{cases}\omega^1\omega^2=\omega\\ \omega_j\in\omega^2\end{cases}}\frac{1}{\|\omega^2\|}\,U^{\omega^1}U^{\omega^2} \tag{1.4.30}$$

$$2\pi i\,\frac{\partial}{\partial\omega_j}\,V^{\omega_1,\dots,\omega_n} = \frac{1}{\omega_j}\,V^{\omega_1,\dots,\omega_{j-1}+\omega_j,\dots,\omega_n} - \frac{1}{\omega_j}\,V^{\omega_1,\dots,\omega_j+\omega_{j+1},\dots,\omega_n} \tag{1.4.31}$$

qu'ils vérifient sur chacun de leurs domaines d'holomorphie(**). $U^{\bullet}$ et $V^{\bullet}$ possèdent en fait de nombreuses propriétés remarquables, par exemple une propriété de factorisation :

$$U^{\bullet}\circ R_{\theta}^{\bullet\,-1} = U_{\theta}^{\bullet\,-1}\times I^{\bullet}\times U_{\theta}^{\bullet}\qquad(\forall\theta\in\mathbb{R}/2\pi) \tag{1.4.32}$$

$$R_{\theta}^{\bullet}\circ V^{\bullet} = V_{\theta}^{\bullet}\times I^{\bullet}\times V_{\theta}^{\bullet\,-1}\qquad(\forall\theta\in\mathbb{R}/2\pi) \tag{1.4.33}$$

Expliquons ces deux formules. $R_{\theta}^{\bullet}$ désigne le moule rotationnel d'indice $\theta\in\mathbb{R}/2\pi$. C'est par définition le moule (scalaire) alternal dont l'exponentielle :

$$E_{\theta}^{\bullet} = \exp R_{\theta}^{\bullet} = 1^{\bullet} + R_{\theta}^{\bullet} + \frac{1}{2!}\,R_{\theta}^{\bullet}\times R_{\theta}^{\bullet} + \dots \tag{1.4.34}$$

(*) Cela tient à ce qu'ils condensent toute l'irrationnalité des monômes de résurgence de $\mathcal{R}_1$. Voir alinéa 1.4.f.

(**) Voir [E1], §7.b.

est le moule symétral $E_\theta^\bullet$ défini par :

(1.4.35) $E_\theta^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0$ si l'on n'a pas $\theta \leq \mathrm{Arg}\,\omega_1 \leq \mathrm{Arg}\,\omega_2 \leq \dots \mathrm{Arg}\,\omega_r \leq \theta + 2\pi$ (*)

(1.4.36) $E_\theta^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \dfrac{1}{r_1!\dots r_s!}$ si l'on a $\theta \leq \mathrm{Arg}\,\omega_1 \leq \mathrm{Arg}\,\omega_2 \leq \dots \mathrm{Arg}\,\omega_r \leq \theta + 2\pi$ (*)

et si la suite $\{\mathrm{Arg}\,\omega_i\}$ prend r_1 fois sa "plus petite" valeur, r_2 fois la valeur "suivante", etc... Le moule $R_\theta^{\bullet\,-1}$ désigne l'inverse de composition de $R_\theta^\bullet$. Enfin les moules $U_\theta^\bullet$ et $V_\theta^\bullet$ ainsi que leurs inverses multiplicatifs $U_\theta^{\bullet\,-1}$ et $V_\theta^{\bullet\,-1}$ sont des moules symétraux (contrairement à $U^\bullet$ et $V^\bullet$) mais de type hyperlogarithmique (tout comme $U^\bullet$ et $V^\bullet$). Voir à ce sujet [E1], (6d67) et (6d68).

Les transformées de Fourier des U^ω et des V^ω ont aussi des expressions remarquables. Voir [E1], §7.c. Chose plus curieuse encore, le comportement différentiel de $U^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ est, en un sens précis, exactement analogue au comportement de $V^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ en ses singularités et vice versa. Voir dans [E1] la proposition 7b2 et son corollaire. Il existe d'ailleurs une très profonde dualité entre les moules $\mathcal{U}^\bullet, U^\bullet$ et les moules $\mathcal{V}^\bullet, V^\bullet$.

Signalons pour terminer que dans les modèles sectoriels d'axe θ^+ ou θ^- le moule canonique ∂-stable $\mathcal{V}^\bullet$ admet une factorisation unique du type $CST^\bullet \times LOG^\bullet \times ENT^\bullet$ et le moule canonique Δ-stable $\mathcal{U}^\bullet$ admet une factorisation unique du type $LOG^\bullet \times CST^\bullet \times ENT^\bullet$, où les notations $CST^\bullet$ désignent des moules symétraux à valeurs scalaires, $LOG^\bullet$ des moules symétraux à valeurs dans l'espace des polynomes en $\log z$ sans terme constant, et $ENT^\bullet$ des moules symétraux à valeur dans l'espace des fonctions entières de z nulles à

(*) cette chaine d'inégalités est abusive, car elle porte sur des éléments de $\mathbb{R}/2\pi$ mais sa signification n'est pas ambiguë.

l'origine. Pour plus de détails, voir [E1], formules (6d51) et (6d52). Ces factorisations revêtent une très grande importance pratique, ne serait-ce que parce qu'elles précisent le comportement asymptotique, au voisinage de $z=0$, des monômes canoniques $\mathcal{U}^{\omega}(z)$ et $\mathcal{V}^{\omega}(z)$ (dans le modèle sectoriel)

1.4.f. Représentations générales. Représentations n-canoniques.

Proposition 1.4.4. (Représentations Δ-stables générales)

Toute représentation Δ-stable $Z^{\omega} \longmapsto \mathcal{W}^{\omega}$ se déduit de la représentation Δ-stable canonique $Z^{\omega} \mapsto \mathcal{U}^{\omega}$ par la formule :

$$\mathcal{W}^{\bullet} = \mathcal{U}^{\bullet} \times \mathcal{M}^{\bullet} \tag{1.4.37}$$

où $\mathcal{M}^{\bullet}$ désigne n'importe quel moule symétral à valeur dans l'algèbre des constantes de résurgence(*)

En fait, à chaque représentation Δ-stable fait pendant une représentation ∂-stable duale. Pour présenter commodément la question, on doit introduire deux dérivations Δ et $\square$ sur l'algèbre des moules à valeurs dans l'algèbre des monômes de résurgence :

$$\Delta = \sum_{\omega \in \mathbb{C}^*} \Delta_{\omega} \quad \left(\Leftrightarrow \Delta \mathcal{W}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \mathcal{W}^{\omega_2,\dots,\omega_r} \text{ (pour } \mathcal{W} \ \Delta\text{-stable)}\right) \tag{1.4.38}$$

$$\square = -2\pi i \left(\|\cdot\| + \partial\right) \left(\Leftrightarrow \square \mathcal{M}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z) = -2\pi i\left(\omega_1 + \dots \omega_r + \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{M}^{\omega_1,\dots,\omega_r}(z)\right) \tag{1.4.39}$$

et on doit utiliser le lemme suivant :

(*) Autrement dit $\Delta_{\omega_0} \mathcal{M}^{\omega} = 0$ pour tout ω_0 simple et tout ω multiple. Si on se restreint à l'algèbre $\mathcal{R}_1^+$, cela veut dire que $\mathcal{M}^{\omega}(z)$ est une série entière en z^{-1}, convergente à l'infini (modèle formel) et que $\mathcal{M}^{\omega}(z)$ est une fonction entière de z (modèle convolutif).

Lemme 1.4.1.

Soient $A^\bullet$ et $B^\bullet$ deux moules alternaux et soit der une dérivation de l'algèbre des moules. L'équation :

$$\mathrm{der}\ M^\bullet = A^\bullet \times M^\bullet - M^\bullet \times B^\bullet \tag{1.4.40}$$

admet pour solution un moule symétral $M^\bullet = M^\bullet_{A,B}$ avec

$$M^\bullet_{A,B} \times M^\bullet_{B,C} = M^\bullet_{A,C} \tag{1.4.41}$$

Proposition 1.4.5. (Représentations Δ-stables et ∂-stables générales)

A tout moule alternal $\mathcal{H}^\bullet$ à valeurs dans l'algèbre des constantes de résurgence(*) se trouvent associéesdeux représentations duales : une représentation Δ-stable $\mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}}$ et une représentation ∂-stable $\mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}}$ qui satisfont aux relations :

$$\Delta\ \mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}} = I^\bullet \times \mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}} \qquad (\Delta\text{-stabilité}) \tag{1.4.42}$$

$$\square\ \mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}} = \mathcal{V}^\bullet \times \mathcal{H}^\bullet \qquad (\partial\text{-stabilité}) \tag{1.4.43}$$

avec des formules de passage :

$$\mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}} = \mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}} \circ U^\bullet_{\mathcal{H}} \tag{1.4.44}$$

$$\mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}} = \mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}} \circ V^\bullet_{\mathcal{H}} \tag{1.4.45}$$

où figurent deux moules alternaux scalaires $U^\bullet_{\mathcal{H}}$ et $V^\bullet_{\mathcal{H}}$ qui sont inverses de composition :

$$U^\bullet_{\mathcal{H}} \circ V^\bullet_{\mathcal{H}} = V^\bullet_{\mathcal{H}} \circ U^\bullet_{\mathcal{H}} = I^\bullet \tag{1.4.46}$$

(*) autrement dit $\Delta_{\omega_0} \mathcal{H}^{\omega_1,\dots,\omega_n}(z) = 0 \quad (\forall \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$

On passe du quadruplet canonique $(\mathcal{U}^\bullet, U^\bullet; \mathcal{V}^\bullet, V^\bullet)$ au quadruplet général $(\mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}}, U^\bullet_{\mathcal{H}}; \mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}}, V^\bullet_{\mathcal{H}})$ par les formules :

(1.4.47) $\mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}} = \mathcal{U}^\bullet \times \mathcal{M}^\bullet$ ‖ $\mathcal{C}^\bullet$ symétral fonctionnel

(1.4.48) $\mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}} = (\mathcal{V}^\bullet \circ C^\bullet) \times \mathcal{C}^\bullet$ ‖ $C^\bullet$ alternal scalaire

Le passage inverse fait intervenir des moules $\mathcal{D}^\bullet$ (symetral fonctionnel) et $D^\bullet$ (alternal scalaire) qui sont liés à $\mathcal{C}^\bullet$ et $C^\bullet$ par des formules en tout point analogues à (1.4.25), (1.4.26) et (1.4.27) :

(1.4.49) $\mathcal{C}^\bullet = \mathcal{D}^\bullet \circ C^\bullet \quad ; \quad \mathcal{D}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet \circ D^\bullet$

(1.4.50) $C^\bullet \circ D^\bullet = D^\bullet \circ C^\bullet = I^\bullet$

On calcule simultanément $\mathcal{C}^\bullet$ et $C^\bullet$ à partir de $\mathcal{H}^\bullet$ au moyen de :

(1.4.51) $\square\, \mathcal{C}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet \times \mathcal{H}^\bullet - z^{-1}\, C^\bullet \times \mathcal{C}^\bullet$ (modèle formel)

et on calcule simultanément $\mathcal{D}^\bullet$ et $D^\bullet$ à partir de $\mathcal{H}^\bullet$ au moyen de

(1.4.52) $\square\, \mathcal{D}^\bullet = \mathcal{D}^\bullet \times (\mathcal{H}^\bullet \circ D^\bullet) - z^{-1}\, I^\bullet \times \mathcal{D}^\bullet$ (modèle formel)

Enfin on calcule simultanément $\mathcal{M}^\bullet$ et $U^\bullet_{\mathcal{H}}$ à partir de $\mathcal{H}^\bullet$ au moyen de :

(1.4.53) $\square\, \mathcal{M}^\bullet = \mathcal{M}^\bullet \times (\mathcal{H}^\bullet \circ U^\bullet_{\mathcal{H}}) - z^{-1}\, U^\bullet \times \mathcal{M}^\bullet$

Dans le cas particulier très important où $\mathcal{H}^\bullet = z^{-1-r}\, I^\bullet \, (r \in \mathbb{N})$ les moules $\mathcal{U}^\bullet_{\mathcal{H}}, \mathcal{V}^\bullet_{\mathcal{H}}, U^\bullet_{\mathcal{H}}, V^\bullet_{\mathcal{H}}$ sont notés $\mathcal{U}^\bullet_r, \mathcal{V}^\bullet_r, U^\bullet_r, V^\bullet_r$ et sont dits moules r-canoniques. Les formules ci-dessus se simplifient et deviennent :

$$\begin{aligned}
&(1.4.54) \quad && \square\, \mathcal{V}_n^\bullet = -z^{-1}\, \mathcal{V}_n^\bullet \times I^\bullet \\
&(1.4.55) \quad && \square\, \mathcal{C}^\bullet = z^{-1-n}\, \mathcal{C}^\bullet \times I^\bullet - z^{-1}\, C^\bullet \times \mathcal{C}^\bullet \\
&(1.4.56) \quad && \square\, \mathcal{D}^\bullet = z^{-1-n}\, \mathcal{D}^\bullet \times D^\bullet - z^{-1}\, I^\bullet \times \mathcal{D}^\bullet \\
&(1.4.57) \quad && \square\, \mathcal{M}^\bullet = z^{-1-n}\, \mathcal{M}^\bullet \times U_n^\bullet - z^{-1}\, U^\bullet \times \mathcal{M}^\bullet
\end{aligned}$$

Explicitant ces formules, on s'aperçoit qu'on passe des représentations canoniques $(n=0)$ aux représentations n-canoniques ou aux représentations générales (d'indice $\mathcal{H}$) par des transformations qui ne font intervenir, aux facteurs $2\pi i$ près, que des moules qui sont rationnels ou entiers (en leurs indices $\omega_1, \ldots, \omega_n$). Toutes les données irrationnelles sont donc contenues dans les quatre moules hyperlogarithmiques $U^\bullet, \mathcal{U}^\bullet, V^\bullet, \mathcal{V}^\bullet$ et ceci explique leur importance.

D'ailleurs, en plus de leurs propriétés de "minimalité" (voir (1.4.20) et (1.4.21)) et d'homogénéité (voir (1.4.22)) les moules hyperlogarithmiques sont les seuls à avoir un comportement différentiel simple par rapport à leurs indices ω_i (voir (1.4.30) et (1.4.31)) et surtout à avoir un comportement "dual" en leurs singularités (voir [E1], §7b).

1.4.g. Les moules universels $\langle\bullet\rangle$ et $[\bullet]$.

Nous allons introduire deux moules symétraux $\langle\bullet\rangle$ et $[\bullet]$ qui suffisent à l'analyse de tous les objets locaux, d'où leur nom de moules universels. Le moule $\langle\bullet\rangle$ sert pour les équations différentielles et les champs de vecteurs locaux (colonne de gauche de la page 9.) tandis que le moule $[\bullet]$ sert pour les équations aux différences et les difféos locaux (colonne de droite de la page 9). Contrairement aux moules introduits précédemment, ils ne sont pas indexés sur le groupe additif $\mathbb{C}$, mais sur le semi-groupe multiplicatif des constantes de résurgence, et ils prennent leurs valeurs dans l'algèbre des monômes de résurgence.

L'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions résurgentes et la sous-algèbre $\underline{\mathcal{R}}$ des constantes de résurgence ont été introduites en §1.3.a et §1.3.b respectivement. Rappelons que dans le modèle sectoriel les éléments de $\underline{\mathcal{R}}$ sont des germes $\varphi(z)$ de fonctions définies holomorphes sur $\mathbb{C}_\infty$ au voisinage de ∞ et de croissance sous-exponentielle. Dans le modèle convolutif, au contraire, les éléments de $\underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ ont des mineurs $\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$ holomorphes sur $\mathbb{C}_\infty$ tout entier et de croissance au plus exponentielle à l'infini.

Cela étant, introduisons maintenant le semi-groupe multiplicatif $\mathcal{E}\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{E}\underline{\mathcal{R}}$) dont les éléments $\mathcal{b}(z)$ se présentent, dans le modèle formel, comme des produits d'un monôme exponentiel par un élément de $\mathcal{R}$ (resp. $\underline{\mathcal{R}}$). Soit respectivement :

$$(1.4.58) \qquad \mathcal{b}(z) = e^{\omega z}\,\beta(z) \qquad \text{avec } \omega\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C}_\infty,\ \beta\in\mathcal{R}$$

$$(1.4.59) \qquad \mathcal{b}(z) = e^{\omega z}\,\beta(z) \qquad \text{avec } \omega\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C}_\infty,\ \beta\in\underline{\mathcal{R}}$$

Ces deux semi-groupes sont évidemment <u>gradués</u> par les <u>fréquences</u> $\omega=\omega(\mathcal{b})$ de leurs éléments $\mathcal{b}$.

Notons $\partial = \partial/\partial z$ la dérivation naturelle et D l'opérateur de différence finie :

$$(1.4.60) \qquad \mathrm{D}\,\varphi(z) \equiv \varphi(z+1) - \varphi(z) \qquad (\forall\varphi)$$

Le moule $\langle\bullet\rangle$ et le moule $(\bullet)^{+}$, qui nous servira à fabriquer le moule $(\bullet)$, sont définis (*) par récurrence au moyen des relations :

(*) Voir toutefois (1.4.69) et après.

$$(1.4.61)\quad \begin{cases} \langle \emptyset \rangle = 1 \quad ; \quad \partial \langle \mathscr{b}_1 \rangle = \mathscr{b}_1 \\ \partial \langle \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \rangle = \mathscr{b}_r \cdot \langle \mathscr{b}_{r-1}, \ldots, \mathscr{b}_1 \rangle \\ \text{avec } \mathscr{b}_i \in e^{\omega_i \dot{z}} \underline{\mathcal{R}} \quad \text{et } \langle \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \rangle \in e^{(\omega_1 + \ldots \omega_r)\dot{z}} \mathcal{R} \end{cases} \quad (*)$$

$$(1.4.62)\quad \begin{cases} \mathbf{C} \emptyset \mathbf{D}^{+} = 1 \quad ; \quad D . \mathbf{C} \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+} = \mathscr{b}_1 \\ D . \mathbf{C} \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+} = \mathscr{b}_r . \mathbf{C} \mathscr{b}_{r-1}, \ldots, \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+} \\ \text{avec } \mathscr{b}_i \in e^{\omega_i \dot{z}} \underline{\mathcal{R}} \quad \text{et } \mathbf{C} \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+} \in e^{(\omega_1 + \ldots \omega_r)\dot{z}} \mathcal{R} \end{cases} \quad (*)$$

Ils peuvent donc se noter symboliquement :

$$(1.4.63)\quad \langle \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \rangle = \int \mathscr{b}_r \int \mathscr{b}_{r-1} \ldots \int \mathscr{b}_1$$

$$(1.4.64)\quad \mathbf{C} \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+} = D^{-1} \mathscr{b}_r D^{-1} \mathscr{b}_{r-1} \ldots D^{-1} \mathscr{b}_1$$

Observons que si on introduit les éléments φ_r et ψ_r de $\mathcal{R}$ en posant :

$$(1.4.65)\quad \varphi_r = e^{-(\omega_1 + \ldots \omega_r)\dot{z}} \quad \langle \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \rangle$$

$$(1.4.66)\quad \psi_r = e^{-(\omega_1 + \ldots \omega_r)\dot{z}} \quad \mathbf{C} \mathscr{b}_r, \ldots, \mathscr{b}_1 \mathbf{D}^{+}$$

et si on note $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_r(\zeta)$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_r(\zeta)$ les éléments (majeurs) correspondant de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, les relations de récurrence (1.4.61) et (1.4.62) s'écrivent respectivement :

$$(1.4.67)\quad (\omega_1 + \ldots \omega_r - \zeta)\, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_r(\zeta) = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}(\zeta) \qquad \Big\| \quad \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$$

$$(1.4.68)\quad (e^{\omega_1 + \ldots \omega_r - \zeta} - 1)\, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_r(\zeta) = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{r-1}(\zeta) \qquad \Big\| \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{r-1}, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$$

Ces relations déterminent sans ambiguité $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_r$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_r$ à partir de $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-1}$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{r-1}$, sauf si :

(*) Bien distinguer $\mathcal{R}$ et $\underline{\mathcal{R}}$.

(1.4.69) $\quad \omega_1 + \ldots \omega_r = 0$ (respectivement dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$)

auquel cas $\widetilde{\Phi}_r$ et $\widetilde{\Psi}_r$ ne sont déterminés que modulo un dirac (dans le modèle convolutif $\mathfrak{R}$) ou une constante (dans les modèles formel et sectoriel $\mathcal{R}$). Heureusement, dans tous les cas pratiques, les éléments de $\mathfrak{R}$ auxquels on a affaire sont analysables à l'origine (en séries de puissances ou apparentées) ce qui permet de choisir la solution de (1.4.67) ou (1.4.68) qui est sans dirac.

Le moule $\langle\cdot\rangle$ est symétral. Ainsi :

$$\text{(1.4.70)}\quad \begin{cases} \langle b_2\rangle\langle b_1\rangle = \langle b_2,b_1\rangle + \langle b_1,b_2\rangle \\ \langle b_3\rangle\langle b_2,b_1\rangle = \langle b_3,b_2,b_1\rangle + \langle b_2,b_3,b_1\rangle + \langle b_2,b_1,b_3\rangle \\ \text{etc}\ldots \end{cases}$$

Le moule $\llbracket\cdot\rrbracket^+$ vérifie des relations moins simples. Ainsi :

$$\text{(14.71)}\quad \begin{cases} \llbracket b_2\rrbracket^+\llbracket b_1\rrbracket^+ = \llbracket b_2,b_1\rrbracket^+ + \llbracket b_1,b_2\rrbracket^+ + \llbracket b_2\,b_1\rrbracket^+ \\ \llbracket b_3\rrbracket^+\llbracket b_2,b_1\rrbracket^+ = \llbracket b_3,b_2,b_1\rrbracket^+ + \llbracket b_2,b_3,b_1\rrbracket^+ + \llbracket b_2,b_1,b_3\rrbracket^+ \\ \quad + \llbracket b_3\,b_2,b_1\rrbracket^+ + \llbracket b_2,b_3\,b_1\rrbracket^+ . \qquad \text{etc}\ldots \end{cases}$$

On peut toutefois tirer de $\llbracket\cdot\rrbracket^+$ un moule symétral $\llbracket\cdot\rrbracket$ au moyen des formules réciproques :

$$\text{(1.4.72)}\quad \llbracket\cdot\rrbracket = \llbracket\cdot\rrbracket^+ \circ (E^\bullet - 1^\bullet)$$

$$\text{(1.4.73)}\quad \llbracket\cdot\rrbracket^+ = \llbracket\cdot\rrbracket \circ L^\bullet$$

qui font intervenir le moule exponentiel $E^\bullet$ et le moule logarithmique $L^\bullet$ ainsi définis (*) :

(*) Ils sont mutuellement inverses pour la composition des moules :

$$(E^\bullet - 1^\bullet)\circ L^\bullet = I^\bullet \quad \text{ou encore} \quad E^\bullet \circ L^\bullet = 1^\bullet + I^\bullet$$

$$(1.4.74)\qquad E^{\phi} = 1 \quad , \quad E^{b_1,\dots,b_n} = \frac{1}{n!} \qquad (\forall n \geqslant 1)$$

$$(1.4.75)\qquad L^{\phi} = 0 \quad , \quad L^{b_1,\dots,b_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad (\forall n \geqslant 1)$$

Ces deux formules s'explicitent selon :

$$(1.4.76)\qquad \begin{cases} \llbracket b_1 \rrbracket = \llbracket b_1 \rrbracket^+ \\ \llbracket b_2, b_1 \rrbracket = \llbracket b_2, b_1 \rrbracket^+ + \frac{1}{2} \llbracket b_2 b_1 \rrbracket^+ \\ \llbracket b_3, b_2, b_1 \rrbracket = \llbracket b_3, b_2, b_1 \rrbracket^+ + \frac{1}{2} \llbracket b_3 b_2, b_1 \rrbracket^+ + \frac{1}{2} \llbracket b_3, b_2 b_1 \rrbracket^+ + \frac{1}{6} \llbracket b_3 b_2 b_1 \rrbracket^+ \\ \text{etc}\dots \end{cases}$$

$$(1.4.77)\qquad \begin{cases} \llbracket b_1 \rrbracket^+ = \llbracket b_1 \rrbracket \\ \llbracket b_2, b_1 \rrbracket^+ = \llbracket b_2, b_1 \rrbracket - \frac{1}{2} \llbracket b_2 b_1 \rrbracket \\ \llbracket b_3, b_2, b_1 \rrbracket^+ = \llbracket b_3, b_2, b_1 \rrbracket - \frac{1}{2} \llbracket b_3 b_2, b_1 \rrbracket - \frac{1}{2} \llbracket b_3, b_2 b_1 \rrbracket + \frac{1}{3} \llbracket b_3 b_2 b_1 \rrbracket \\ \text{etc}\dots \end{cases}$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}_\infty$ il existe des scalaires $\langle \cdot \rangle_\omega$, $\llbracket \cdot \rrbracket_\omega$ et $\llbracket \cdot \rrbracket^+_\omega$ parfaitement déterminés et tels que :

$$(1.4.78)\qquad \dot{\Delta}_\omega \langle b_n,\dots,b_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle b_n,\dots,b_{i+1} \rangle \langle b_i,\dots,b_1 \rangle_\omega \qquad (*)$$

$$(1.4.79)\qquad \dot{\Delta}_\omega \llbracket b_n,\dots,b_1 \rrbracket = \sum_{i=1}^{n} \llbracket b_n,\dots,b_{i+1} \rrbracket \llbracket b_i,\dots,b_1 \rrbracket_\omega \qquad (*)$$

$$(1.4.80)\qquad \dot{\Delta}_\omega \llbracket b_n,\dots,b_1 \rrbracket^+ = \sum_{i=1}^{n} \llbracket b_n,\dots,b_{i+1} \rrbracket^+ \llbracket b_i,\dots,b_1 \rrbracket^+_\omega \qquad (*)$$

Les scalaires $\langle b_n,\dots,b_1 \rangle_\omega$, $\llbracket b_n,\dots,b_1 \rrbracket_\omega$ et $\llbracket b_n,\dots,b_1 \rrbracket^+_\omega$ ne peuvent être $\neq 0$ que si :

$$(1.4.81)\qquad \dot{\omega} = \omega(b_1) + \dots \omega(b_n) \qquad (\omega \in \mathbb{C}_\infty \; ; \; \omega(b_i) \in \mathbb{C})$$

(*) Pour $i = n$ le multiindice $(b_n,\dots,b_{i+1})$ devient ϕ (= indice vide)

Les $\langle \cdot \rangle_\omega$ vérifient les relations d'alternalité :

$$(1.4.81)\quad \begin{cases} \langle b_2, b_1 \rangle_\omega + \langle b_1, b_2 \rangle_\omega = 0 \\ \langle b_3, b_2, b_1 \rangle_\omega + \langle b_2, b_3, b_1 \rangle_\omega + \langle b_2, b_1, b_3 \rangle_\omega = 0 \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Les $(\cdot)_\omega$ vérifient les mêmes relations et les $(\cdot)^+_\omega$ des relations modifiées, faciles à obtenir :

$$(1.4.83)\quad (b_2, b_1)^+_\omega + (b_1, b_2)^+_\omega + (b_2\ b_1)^+_\omega = 0\ ; \text{ etc...}$$

Remarque 1 : Lorsque les b_i sont dans $\mathcal{E}\underline{\mathcal{R}}_1 \subset \mathcal{E}\underline{\mathcal{R}}$, l'indice ω parcourt non plus $\mathbb{C}_\infty$ mais $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}^*$. On peut donc l'omettre et poser :

$$(1.4.84)\quad \langle b_n, \ldots, b_1 \rangle_* = \langle b_n, \ldots, b_1 \rangle_\omega \text{ avec } \omega = \omega(b_1) + \ldots \omega(b_n)$$

On définit de même $(\cdot)_*$ et on obtient ainsi deux moules scalaires alternaux $\langle \cdot \rangle_*$ et $(\cdot)_*$.

Remarque 2 : Dans le cas particulier très important où les b_i sont monomiaux :

$$(1.4.85)\quad b_i(z) = e^{\omega_i z}\ z^{\sigma_i} \qquad (\omega_i \in \mathbb{C}\ ;\ \sigma_i \in -\mathbb{N})$$

on pose (en inversant l'ordre des indices!) :

$$(1.4.86)\quad \langle b_n, \ldots, b_1 \rangle = (-1)^n\, e^{(\omega_1 + \cdots \omega_n)z}\ \mathcal{V}^{\omega_1, \ldots, \omega_n}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}(z)$$

$$(1.4.87)\quad \langle b_n, \ldots, b_1 \rangle_* = (-1)^n\ V^{\omega_1, \ldots, \omega_n}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}$$

Pour $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots \sigma_n = -1$ on retrouve les moules canoniques $\mathcal{V}^\bullet$ et $V^\bullet$.

D'ailleurs, à condition de permuter <u>conjointement</u> (lors du battage $\sqsubset$) les indices supérieurs et inférieurs, les fonctions résurgentes $\mathcal{V}^{\omega}_{\sigma}$ et les scalaires V^{ω}_{σ} vérifient exactement les mêmes relations, de symétralité et d'alternalité respectivement, que $\mathcal{V}^{\omega}$ et V^{ω}. Ainsi :

$$\sum_{\binom{\omega}{\sigma} \sqsubset \binom{\omega^1}{\sigma^1},\binom{\omega^2}{\sigma^2}} \mathcal{V}^{\omega}_{\sigma}(\zeta) \equiv \mathcal{V}^{\omega^1}_{\sigma^1}(\zeta) \cdot \mathcal{V}^{\omega^2}_{\sigma^2}(\zeta) \tag{1.4.88}$$

$$\sum_{\binom{\omega}{\sigma} \sqsubset \binom{\omega^1}{\sigma^1},\binom{\omega^2}{\sigma^2}} V^{\omega}_{\sigma} = 0 \qquad (\omega,\omega^1,\omega^2 \text{ et } \sigma,\sigma^1,\sigma^2 \text{ sont des multiindices}). \tag{1.4.89}$$

Moyennant certaines précautions (*) tout ceci s'étend d'ailleurs à des indices σ_i complexes quelconques.

Donnons, en vue de la suite, deux majorations, valables pour $\|\sigma\| + \frac{r}{2} + 1 < 0$.

$$\left|\mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(\zeta)\right| < \Big(\gamma(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r) + \gamma(-\zeta,\omega_1,\dots,\omega_r)\Big) \frac{(2|\zeta|)^{-\|\sigma\|-\frac{r}{2}-1}}{\left|\Gamma(-\|\sigma\|-\frac{r}{2})\right|} \tag{1.4.89'}$$

$$\left|V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right| < \Big(\gamma(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r) + \gamma(\omega_r,\omega_{r-1},\dots,\omega_1)\Big)\, 2^r \frac{\left|2\,\|\omega\|\right|^{-\|\sigma\|-\frac{r}{2}-1}}{\left|\Gamma(-\|\sigma\|-\frac{r}{2})\right|} \tag{1.4.89''}$$

Comme d'habitude $\|\omega\| = \sum \omega_i$ et $\|\sigma\| = \sum \sigma_i$. Ces majorations s'établissent par récurrence sur r , à partir des relations :

$$\mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \|\omega\|} \left(\frac{\zeta^{-\sigma_r-1}}{\Gamma(-\sigma_r)} * \mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}_{\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1}}(\zeta) \right) \tag{1.4.89'''}$$

Des majorations tout à fait analogues valent pour le cas $\|\sigma\| + \frac{r}{2} + 1 > 0$ (très rare en pratique, car en général les σ_i sont < -1).

(*) pour définir l'intégration (en ζ)" sans terme constant" lors du calcul par récurrence des $\mathcal{V}^{\omega}_{\sigma}$. Notons que dans la plupart des cas on a affaire à des multi-indices $\binom{\omega}{\sigma}$ <u>licites</u> (voir note au bas de la page 335) pour lesquels aucune ambiguité ne se présente.

1.4.h. Quelques autres moules importants

Les moules sont d'un usage constant en calcul étranger, mais ils devraient aussi trouver des applications dans d'autres branches des mathématiques. On s'habitue très vite à leur maniement. C'est un monde foisonnant (rien que dans cette série [E1,2,3...] nous usons d'une cinquantaine de moules) mais aussi très fortement structuré. Par la nature des services qu'ils rendent, les moules s'apparentent aux matrices. Ils permettent de condenser des formules, des calculs et des raisonnements qui, sans eux, seraient d'une longueur redhibitoire. Gageons qu'ils ont un bel avenir devant eux.

En plus des moules introduits ci-avant, signalons :

(i) les moules rotationnels, dont nous avons vu un exemple en 1.4.e et dont d'autres variantes interviennent dans les formules de passage d'un modèle sectoriel à un autre (voir §10.5).

(ii) les moules zetaïques, qui généralisent la fonction zêta de Riemann et servent notamment à exprimer les invariants holomorphes des difféos locaux et des équations aux différences. Voir [E1] (4c31) et [E2] §12c.

(iii) les huit moules élémentaires qui constituent l'octuple fondamental, aux symétries merveilleuses (voir [E1], §4c). Ces moules figurent dans les transformées de Fourier des moules hyperlogarithmiques $U^\bullet$ et $V^\bullet$ (voir [E1], §7c) mais apparaissent aussi dans d'autres contextes.

Signalons pour finir qu'on a souvent à contracter les moules avec des algèbres de Lie. Plus précisément, on est amené à envisager des sommes de la forme :

$$\langle M, d \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\omega_i} M^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r} d_{\omega_r} \dots d_{\omega_2} d_{\omega_1} \tag{1.4.90}$$

où $M^\bullet$ désigne un moule, $\mathbb{L}$ une algèbre de Lie et

(1.4.91) $$d : \omega \longmapsto d_\omega$$

une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{L}$ d'images d_ω nulles sauf tout au plus pour un nombre dénombrable de ω .

Lorsque $M^\bullet$ est un moule symétral (resp. alternal) la série (1.4.67) définit, sous réserve de convergence, un automorphisme formel (resp. une dérivation formelle). Autrement dit, si $\mathbb{L}$ agit sur une algèbre $\mathbb{A}$, on a identiquement, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$:

(1.4.92) $$\langle M, d\rangle\,(a.b) = (\langle M, d\rangle . a)\;(\langle M, d\rangle . b)$$

respectivement

(1.4.93) $$\langle M, d\rangle\,(a.b) = (\langle M, d\rangle . a).b + a.(\langle M, d\rangle . b)$$

SECTION 1.5. LA CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES OBJETS LOCAUX : INTEGRALES FORMELLES ET EQUATION DU PONT.

1.5.a. Invariants formels et invariants métaholomorphes.

Nous construirons pas à pas, au fur et à mesure de nos besoins, tous les invariants formels discrets des objets locaux ainsi que leurs invariants formels primaires. Les invariants formels secondaires ne nous retiendront guère mais nous indiquerons quand même (au §10.4) comment les construire à partir de l'intégrale formelle (voir ci-après). Pour les objets les plus simples (objets à une ou deux générations) la construction sera explicitée.

A l'opposé, en quelque sorte, des invariants formels se situent les invariants métaholomorphes. On ne peut guère qu'enregistrer leur existence et cerner au plus près les conditions, heureusement très exceptionnelles, où ils se manifestent. La vraie tâche est donc le calcul des invariants holomorphes.

1.5.b. Intégrales formelles.

La méthode consiste à associer à l'objet considéré une ou plusieurs intégrales formelles $x(z,u)$ qui sont fonction du temps complexe z et de paramètres $u = (u_1, u_2, \ldots)$, puis à constater que cette intégrale formelle "contient" de la résurgence et enfin à analyser cette résurgence.

Pour un système d'équations différentielles ou aux différences, une intégrale formelle est tout simplement une solution du système qui contient le maximum de paramètres indépendants (constantes d'intégration). Pour un champ $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, c'est une solution "saturée" en paramètres (i.e. à ν paramètres u_i) du système dynamique :

$$\frac{\partial}{\partial z} x_i(z,u) = X_i\left(x_1(z,u), \ldots, x_\nu(z,u)\right) \quad (1 \leq i \leq \nu) \tag{1.5.1}$$

Pour un difféo local de $\mathbb{C}^\nu$, c'est une solution, également "saturée" en paramètres u_i, du système d'équations aux différences :

$$x_i(z+1, u) = f_i\left(x_1(z,u), \ldots, x_\nu(z,u)\right) \quad (1 \leq i \leq \nu) \tag{1.5.2}$$

On pose dans tous les cas :

$$x(z,u) = \left(x_1(z,u), \ldots, x_\nu(z,u)\right) \tag{1.5.3}$$

et l'idée est de développer formellement en z, au voisinage de l'infini, de "toutes les manières possibles".

Les intégrales formelles sont toujours en nombre fini, à un reparamétrage élémentaire près. Elles s'écrivent :

$$x_i(z,u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} u^n \cdot z^{[n]} \cdot \varphi_i^n(z) \quad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{1.5.4}$$

(i) avec une sommation étendue à une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{Z}^{\nu-1}$

(ii) avec des monômes $u^n = u_1^{n_1} \ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$

(iii) avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$

(iiii) avec des composantes $\Phi_i^n(z)$ qui sont des fonctions résurgentes soit en z lui-même (c'est le cas le plus fréquent) soit en une variable z_p liée à z et dite <u>temps parallèle</u> (critique).

Sans anticiper sur les énoncés détaillés du §10.4, précisons un peu la nature des composantes et des blocs élémentaires.

Les composantes $\Phi_i^n(z)$ sont des fonctions résurgentes de z_p (par exemple de z). Elles se présentent, selon le cas, comme des séries infinies de puissances négatives de z_p (séries dites progrades)(*) ou de puissances mixtes, négatives ou positives (séries dites bigrades). Il existe dans chaque cas un algorithme simple pour calculer les coefficients des séries $\Phi_i^n(z)$ en fonction des coefficients de Taylor de l'objet dont on part.

Les blocs $z^{[n]}$ sont des fonctions élémentaires de z , la plupart du temps monomiales (produit d'exponentielles, de puissances, de logarithmes simples ou itérés) fabriquées avec les seuls invariants formels <u>discrets</u> et <u>primaires</u> de l'objet. On sait soumettre ces blocs aux trois opérations suivantes :

(i) <u>multiplication</u> : $z^{[n]} \cdot z^{[n']} = z^{[n+n']} \cdot \{\text{série formelle}\}$

(ii) <u>dérivation</u> : $\frac{\partial}{\partial_z} z^{[n]} = z^{[n]} \cdot \{\text{série formelle}\}$

(iii) <u>translation</u> : $(z+1)^{[n]} = z^{[n]} \cdot \{\text{série formelle}\}$

Puisque l'on sait multiplier, dériver et translater les blocs $z^{[n]}$ et bien sûr les composantes $\Phi_i^n(z)$, on peut effectivement <u>porter</u> les $x_i(z,u)$ dans les systèmes (1.5.1) ou (1.5.2). Cela a donc un sens de dire que $x(z,u)$ est <u>solution</u> de ces systèmes.

(*) c'est le cas en particulier quand $z_p = z$.

On peut d'ailleurs considérer les blocs élémentaires $\mathfrak{z}^{[n]}$ comme de purs symboles, soumis aux seules règles (i) + (ii) + (iii), et dire que l'on résout le système (1.5.1) ou (1.5.2) non pas directement dans l'algèbre des fonctions résurgentes (en $\mathfrak{z}$ ou en $\mathfrak{z}_p$), ce qui serait impossible en général, mais dans une <u>extension</u> de cette algèbre, obtenue en lui adjoignant les symboles $\mathfrak{z}^{[n]}$. Dans ces extensions la résolution est toujours possible et ce d'un nombre <u>fini</u> de manière. A des reparamétrages élémentaires près, chacune des solutions est parfaitement déterminée, car fonctions résurgentes et blocs élémentaires "ne se mélangent pas".

<u>1.5c</u> : <u>Equation du pont.</u>

Non seulement les intégrales formelles sont résurgentes en $\mathfrak{z}$ ou en $\mathfrak{z}_p$ (ou plutôt possèdent des composantes $\varphi^n_i(\mathfrak{z})$ qui le sont) mais, comme toutes les fonctions résurgentes issues de problèmes naturels, elles se trouvent vérifier des équations de résurgence remarquables. Il s'agit en l'occurence de <u>l'équation du pont</u> :

(1.5.5) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(\mathfrak{z},u) = \mathbb{A}_\omega \; x(\mathfrak{z},u) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

$\dot{\Delta}_\omega$ désigne ici la dérivation étrangère (pointée) par rapport à $\mathfrak{z}$ ou $\mathfrak{z}_p$ et $\mathbb{A}_\omega$ dénote un opérateur différentiel ordinaire en $\mathfrak{z}$ et u , soumis à divers contraintes a priori, dont les principales sont la commutation avec $\partial/\partial_\mathfrak{z}$ (si l'objet analysé est un champ de vecteur X) ou la commutation avec la translation en $\mathfrak{z}$ de pas 1 (si l'objet analysé est un difféo f). Soit respectivement :

(1.5.6) $$\left[\mathbb{A}_\omega \,,\, \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\right] = 0 \qquad (*)$$

(1.5.6bis) $$\left[\mathbb{A}_\omega \,,\, \exp \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\right] = 0 \qquad (*)$$

La condition (1.5.6) impose aux coefficients de $\mathbb{A}_\omega$ d'être constants en $\mathfrak{z}$. La condition (1.5.6bis) permet un facteur périodique en $\mathfrak{z}$ de période 1. Quant à

(*) Même quand $x(\mathfrak{z},u)$ est résurgente en $\mathfrak{z}_p$, l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$ commute avec $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}$ ou $\exp \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}$ et non $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_p}$ ou $\exp \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_p}$.

l'indice ω , il parcourt un ensemble discret Ω , dit réseau de résurgence et engendré par les multiplicateurs λ_i (de première génération ou d'une génération ultérieure) attachés à l'objet analysé.

L'équation (1.5.5) est dite équation du pont car elle exprime que l'application à $x(z,u)$ d'une dérivation étrangère équivaut à l'application d'un opérateur différentiel ordinaire. En d'autres termes, elle jette un pont entre le calcul étranger et le calcul différentiel ordinaire.

Bien entendu, l'équation (1.5.5) est écrite sous une forme très compacte et condense une quantité énorme d'information. Elle implique en effet une équation de résurgence différente pour chacune des composantes $\varphi_i^n(z)$ coefficients des monômes u^n et ces équations de résurgence, interprétées dans le modèle convolutif (variable ζ) décrivent complètement le comportement des fonctions $\hat{\varphi}_i^n(\zeta)$ sur leurs différents feuillets de Riemann.

1.5d. Calcul des invariants holomorphes. Méthodes constructives et méthodes explicites.

Il se trouve que les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont des invariants de l'objet considéré ; que ce sont des invariants non seulement analytiques mais aussi holomorphes; et que si on les rassemble tous, c'est-à-dire si on considère tous les $\mathbb{A}_\omega$ $(\omega \in \Omega)$ relatifs aux N intégrales formelles et aux divers temps parallèles critiques z_p (toujours en nombre fini) on obtient un système complet d'invariants holomorphes de l'objet.

La définition des intégrales formelles et celle des dérivations étrangères étant entièrement constructives et l'équation du pont (1.5.5) déterminant complètement l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$, il est clair qu'on tient là un procédé effectif de calcul des invariants holomorphes. Mais on peut faire mieux et établir des formules complètement et indiscutablement explicites(*) fournissant les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$.

(*) En un sens on pourrait soutenir que le premier procédé est déjà quasiment explicite, puisqu'on pourrait indiquer des formules donnant, à partir des coefficients de Taylor de l'objet, ceux des composantes $\varphi_i^n(z)$ de ses intégrales formelles, et que tout se déduit de là. De toute façon, dans la graduation :

"non constructif" — "constructif non explicite" — "constructif explicite"
la seconde frontière est beaucoup plus floue que la première.

Nous donnerons ces formules dans le cas des champs de vecteur $\mathcal{X}$. Ils utilisent les symboles $\langle\,\cdot\,\rangle$ introduits en §1.4.g et font intervenir une involution non linéaire :

$$(1.5.7) \qquad \mathcal{X} \rightleftarrows \widetilde{\mathcal{X}} \qquad \text{(relativement à } {}^{\circ}\mathcal{X}\text{)}$$

entre le champ de vecteur donné $\mathcal{X}$ et un cochamp $\widetilde{\mathcal{X}}$. Cette involution est définie relativement à une partie principale ${}^{\circ}\mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ (et aussi de $\widetilde{\mathcal{X}}$) . Lorsque le champ $\mathcal{X}$ est hamiltonien, le cochamp $\widetilde{\mathcal{X}}$ ne l'est pas en général, mais il subsiste quand même une involution au niveau des hamiltoniens :

$$(1.5.8) \qquad \mathcal{H} \rightleftarrows \widetilde{\mathcal{H}} \qquad \text{(relativement à } {}^{\circ}\mathcal{H}\text{)}$$

Des formules analogues existent pour les difféos f et les équations aux différences.

On dispose donc, avec l'équation du pont, d'un procédé constructif et remarquablement uniforme (compte tenu de l'ampleur du problème) pour calculer <u>tous</u> les invariants holomorphes de <u>tous</u> les objets locaux et on a en sus des formules explicites développant ces mêmes invariants en fonction des coefficients de Taylor de l'objet.

CHAPITRE 2 : CLASSIFICATION DES EQUATIONS ET SYSTEMES DIFFERENTIELS.

SECTION 2.1 : INTRODUCTION. NOTION DE NIVEAU. SOLUTION FORMELLE ET INTEGRALE FORMELLE.

Les équations différentielles les plus générales se ramènent évidemment à des systèmes différentiels d'ordre 1, qui peuvent eux-mêmes être mis en correspondance avec des champs de vecteurs d'une nature assez particulière . Or l'étude des champs de vecteurs sera menée d'une manière systématique dans la suite de l'ouvrage (aux chapitres 4,6,8,9). On pourrait donc se dispenser complètement de traîter les équations et systèmes différentiels, mais ce serait maladroit, car ces objets comptent parmi les sources de résurgence les plus simples qui soient et ils constituent la meilleure introduction possible à l'étude des problèmes de classification analytique.

Considérons par exemple les équations différentielles analytiques de la forme:

(2.1.1) $$t^2 \frac{d}{dt} x + x = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 0}} a_{m,n}\, t^m x^n \qquad \left(x = x(t),\ a_{1,1} = 0,\ \sum a_{m,n} t^m x^n \in \mathbb{C}\{t,x\} \right)$$

Elles sont formellement (mais en général pas analytiquement) conjuguées à une équation parfaitement élémentaire, dite équation d'Euler :

(2.1.2) $$t^2 \frac{d}{dt} y + y = 0 \qquad\qquad (y = y(t))$$

L'équation (2.1.1) possède une solution formelle unique

(2.1.3) $$x(t) = \sum a_m\, t^m$$

qui est presque toujours <u>divergente</u> en t (*) , mais qui est toujours <u>résurgente</u> en la variable $z = t^{-1}$ et qui livre (**) la <u>totalité</u> des invariants holomorphes qui caractérisent la classe analytique de (2.1.1).

Ayant une solution formelle résurgente en $z = t^{-1}$, l'équation (2.1.1)

(*) même lorsque le second membre de (2.1.1) est simple; même lorsqu'il est polynomial; même lorsqu'il vaut $t^2 + t\, x^3$!).

(**) sauf cas exceptionnels: voir proposition 2.2.1 ci-après.

est dite de niveau 1. Plus généralement, une équation ou système différentiel est dite de niveau p si sa solution formelle est résurgente en $z = t^{-p}$. Et le niveau p en question est dit unique si la résurgence correspondante livre tous les invariants holomorphes. Ce n'est pas toujours le cas : il arrive qu'il faille, pour obtenir tous les invariants holomorphes, envisager plusieurs types de solutions, résurgentes par rapport à des variables distinctes, de la forme $z_p = t^{-p}$, qui sont dites temps parallèles. On parle alors de problèmes à plusieurs niveaux et de résurgence pluritemporelle.

Nous suivrons dans ce chaptitre le plan suivant. Nous commencerons par la résurgence unitemporelle, c'est-à-dire par les équations différentielles (d'ordre quelconque) et les systèmes différentiels (d'ordre 1) à niveau unique (d'abord $p=1$ puis p quelconque). Nous préciserons à ce propos la notion de solution formelle $x(z)$ (série formelle d'une seule variable) et la notion voisine d'intégrale formelle $x(z,u_1,\dots,u_\nu)$ (série formelle d'une variable z et de ν paramètres ou "constante d'intégration" u_i). L'intégrale formelle contient évidemment la solution formelle puisque $x(z,0) = x(z)$. En fait, nous verrons que la solution formelle porte en général toute l'information invariante, mais qu'il est quand-même préférable de considérer l'intégrale formelle avec tous ses paramètres, et ceci pour trois raisons :

(i) parce que l'intégrale formelle porte toujours (au lieu de presque toujours pour la solution formelle) la totalité de l'information invariante.

(ii) parce que, même lorsque la solution formelle suffit, l'information invariante est plus facile à extraire de l'intégrale formelle.

(iii) parce que, paradoxalement, la résurgence de l'intégrale formelle est plus facile à décrire globalement que celle de la seule solution formelle, qu'elle contient pourtant.

Après cette initiation à la résurgence unitemporelle, nous préciserons la notion de niveau multiple et aborderons de plein pied les problèmes pluritemporels.

Pour changer, nous commencerons cette fois-ci par les systèmes différentiels (d'ordre 1) qui couvrent automatiquement les équations différentielles (d'ordre quelconque). Toutefois, vu l'importance des équations différentielles, nous indiquerons aussi comment les traiter directement, sans passer par les systèmes.

A chaque fois nous consacrerons quelques lignes au cas linéaire et nous verrons quelle forme revêtent alors les énoncés généraux. Le lecteur est cependant convié à ne voir en ces problèmes linéaires qu'une illustration ou récréation et à se souvenir que le calcul étranger est une méthode adaptée d'emblée aux situations non-linéaires et que c'est là surtout qu'il se révêle indispensable.

SECTION 2.1 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES A NIVEAU UNIQUE.

Considérons les équations différentielles locales(*) analytiques et de degré ν :

(2.2.1) $$a(t, x, x', \ldots, x^{(\nu)}) = 0 \qquad \left(x = x(t),\ x^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i}x\right)$$

avec $a(0,\ldots,0) = 0$ et $a(t,x,x',\ldots,x^{(\nu)}) \in \mathbb{C}\{t,x,x',\ldots,x^{(\nu)}\}$. L'équation (2.2.1) est dite de niveau 1 si le changement de variable $z = t^{-1}$ la met sous la forme :

(2.2.2) $$b(z, x, x', \ldots, x^{(\nu)}) = 0 \qquad \left(x = x(z),\ x^{(i)} = \frac{d^i}{dz^i}x\right)$$

avec $b(z,x,x',\ldots,x^{(\nu)}) \in \mathbb{C}\{z^{-1},x,x',\ldots,x^{(\nu)}\}$ et avec :

(2.2.2bis) $$b(\infty,0) = 0\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}b(\infty,0) \neq 0\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^{(\nu)}}b(\infty,0) \neq 0$$

Il est commode d'isoler les termes linéaire en x et z^{-1} et d'écrire (2.2.2) sous la forme suivante, dite forme préparée :

(2.2.3) $$\sum_{i=0}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1})\ x^{(i)} = b(z, x, x', \ldots, x^{(\nu)})$$

avec un b privé de sa partie linéaire en x :

(2.2.3bis) $$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\, b(z, x, x', \ldots, x^{(\nu)}) = o(z^{-1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu)$$

(*) aussi appellées germes d'équations différentielles.

et avec :

(2.2.3ter) $\alpha_0 \neq 0 \;,\; \alpha_\nu \neq 0 \;,\; b(z,0) = o(z^{-1})$

Les conditions $\alpha_0 \neq 0$ et $\alpha_\nu \neq 0$ découlent simplement de(2.2.2bis). La condition de préparation proprement dite, c'est l'absence de termes en z^{-1} dans $b(z,0)$. Quitte à faire un changement d'inconnue de la forme $x(z) \mapsto x(z) + \alpha z^{-1}$, on peut toujours la supposer réalisée.

Enonçons d'un seul coup les principales propriétés des équations différentielles de niveau 1. De brèves indications sur les démonstrations seront données en fin de section.

Proposition 2.2.1 (Résurgence de $x(z)$)

L'équation (2.2.3) admet une unique solution formelle(*) du type :

(2.2.4) $$x(z) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^{-n}$$

Celle-ci est généralement divergente à l'infini, mais sa transformée de Borel :

(2.2.5) $$\hat{x}(\zeta) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$$

est toujours convergente à l'origine et le germe analytique qu'elle y définit est prolongeable "partout sans coupures". La solution formelle $x(z)$ est donc une fonction résurgente.

Proposition 2.2.2 (Singularités de $\hat{x}(\zeta)$)

La fonction $\hat{x}(\zeta)$ a toutes ses éventuelles singularités au-dessus de l'ensemble :

(2.2.6) $$-(\lambda_1 \mathbb{N} + \lambda_2 \mathbb{N} + \ldots \lambda_\nu \mathbb{N})$$

(*) Cette solution peut parfaitement être $\equiv 0$. Elle l'est très exactement quand $b(z,0) \equiv 0$.

où les complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ sont les zéros du polynôme :

(2.2.7) $$P(z) = \sum_{m=0}^{\nu} \alpha_m z^m$$

Puisque $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_\nu \neq 0$, les λ_i sont tous $\neq 0$ et $\neq \infty$. Supposons en outre qu'ils soient <u>sans résonance</u>, c'est-à-dire rationnelement indépendants; sans <u>quasi-résonance</u>, c'est-à-dire diophantiens dans leur ensemble (cf. §1.2).

<u>Proposition 2.2.3</u> (<u>Réseau de résurgence</u>)

La fonction résurgente $x(z)$ admet pour réseau de résurgence l'ensemble Ω formé des points ω de la forme :

(2.2.8) $$\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{N})$$

ou de la forme :

(2.2.8bis) $$\omega = -\lambda_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{N})$$

D'une façon plus précise :

α) Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir sur x (sous entendu : sans l'annuler) sont $\Delta_{-\lambda_1}, \Delta_{-\lambda_2}, \ldots, \Delta_{-\lambda_\nu}$

β) Bien qu'en général non commutatives, les dérivations $\Delta_{-\lambda_i}$ commutent quand on les applique à x. Pour tous entiers $m_1, \ldots, m_\nu$ et pour toute permutation σ des nombres $1, \ldots, \nu$ on peut donc écrire :

(2.2.9) $$\begin{cases} \left(\Delta_{-\lambda_{\sigma(1)}}\right)^{m_1} \cdots \left(\Delta_{-\lambda_{\sigma(\nu)}}\right)^{m_\nu} . \, x(z) = x_{\omega_0}(z) \\ \text{avec} \quad \omega_0 = m_1 \lambda_1 + \ldots m_\nu \lambda_\nu \end{cases}$$

sans se soucier de l'ordre des opérations.

γ) Les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur la fonction résurgente x_{ω_0} correspondent à des indices ω de la forme :

(2.2.10) $$\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i \qquad \text{avec} \quad -1 \leq n_i \leq m_i$$

et avec au plus un indice n_i égal à -1 .

Introduisons maintenant ν paramètres $u_1, \ldots, u_\nu$ et posons, pour tout ω de Ω:

(2.2.11) $$u^{n(\omega)} = u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu} \qquad \text{si} \quad \omega = n_1\lambda_1 + \ldots n_\nu \lambda_\nu$$

Désignons par $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ l'algèbre de Lie libre engendrée par les dérivations étrangères Δ_ω indexées sur le réseau de résurgence Ω et appelons idéal annulateur de $x(z)$ le plus grand idéal de $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ qui annule $x(z)$.

Proposition 2.2.4 (Idéal annulateur et algèbre agissante)

Lorsqu'aucun des opérateurs $\Delta_{-\lambda_1}, \ldots, \Delta_{-\lambda_\nu}$ n'annule $x(z)$, il existe une famille d'opérateurs différentiels de la forme :

(2.2.12) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\nu} A_\omega^i \; u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (\omega \in \Omega ; A_\omega^i \in \mathbb{C})$$

unique modulo une dilatation $u_i \longmapsto c_i u_i$ des paramètres(*), soumise aux contraintes(**) :

(2.2.13) $$A_\omega^i = 0 \quad \text{pour } \omega \text{ de la forme } (2\text{-}2\text{-}8\,\text{bis}) \text{ et } i \neq i_0$$

(*) pour des constantes $c_1, \ldots, c_\nu$ indépendantes de ω .

(**) ces contraintes font que, pour ω de la forme (2.2.8bis), on a :

$$\mathbb{A}_\omega = \left(\prod_{i \neq i_0} u_i^{n_i} \right) A_\omega^{i_0} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

si bien qu'aucune puissance négative de u_i ne figure jamais dans les coefficients de $\mathbb{A}_\omega$. Cette absence nécessaire de puissances négatives est d'ailleurs, mnémotechniquement, le meilleur moyen pour retenir la forme des contraintes (2.2.13).

et telle que l'homomorphisme :

(2.2.14) $$\Delta_\omega \longmapsto \mathbb{A}_\omega$$

de l'algèbre de Lie libre $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ dans l'algèbre de Lie $\mathrm{Cart}(u_1,\ldots,u_\nu)$ formée des opérateurs en $\frac{\partial}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u_\nu}$ à coefficients dans $\mathbb{C}[u_1,\ldots,u_\nu]$, ait exactement pour noyau l'idéal annulateur $\mathbb{J}(\Omega)$ de $x(z)$. La solution formelle $x(z)$ de l'équation (2.2.3) admet donc une algèbre agissante $\mathfrak{A}$

(2.2.15) $$\mathfrak{A} = \mathbb{\Delta}(\Omega) \,/\, \mathbb{J}(\Omega)$$

qui est isomorphe à l'algèbre de Cartan $\mathrm{Cart}(u_1,\ldots,u_\nu)$.

Proposition 2.2.5. (Invariants holomorphes)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$, considérés comme définis modulo les dilations $u_i \longmapsto c_i\, u_i$, sont invariants relativement à tout changement analytique (d'inconnue ou de variable) effectué dans l'équation (2.2.3). L'ensemble des $\mathbb{A}_\omega$, pour ω parcourant Ω, constitue un système complet et libre d'invariants holomorphes de l'équation (2.2.3).

Comme, en l'absence de quasirésonance entre les λ, il n'y a pas d'invariants métaholomorphes, deux équations du type (2.2.3) sont analytiquement conjuguées dès lors qu'elles le sont formellement et que leurs invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ coincident.

Rappelons que le procédé ci-dessus de calcul des invariants holomorphes ne s'applique tel quel que lorsque $\Delta_{-\lambda_i}\, x(z) \not\equiv 0$ pour tout i, autrement dit lorsque les ν opérateurs $\mathbb{A}_{-\lambda_i}$ sont $\neq 0$. Ces opérateurs sont dits cruciaux. D'après (2.2.12) ils sont de la forme :

(2.2.16) $$\mathbb{A}_{-\lambda_i} = u^{n(-\lambda_i)}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = A_{-\lambda_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (A_{-\lambda_i} \in \mathbb{C})$$

et ceci explique pourquoi les $\Delta_{-\lambda_i}$ commutent modulo $\mathbb{J}(\Omega)$.

Lorsque certains des invariants cruciaux sont nuls, soit :

(2.2.17) $$\mathcal{A}_{-\lambda_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad i \in I \subset \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

On a automatiquement

(2.2.18) $$\Delta_\omega \Delta_{\omega_1} \ldots \Delta_{\omega_r} x(z) = 0 \qquad (\omega, \omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega)$$

pour tout ω dont l'expression fait intervenir l'un des λ_i critiques $(i \in I)$ et ceci quels que soient $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Mais il n'en résulte nullement qu'il faille associer à Δ_ω un opérateur $\mathcal{A}_\omega$ nul. On peut en effet trouver une équation très voisine de (2.2.3), possédant même réseau de résurgence Ω, mais dont la solution $x(z) + \delta x(z)$ possède des invariants cruciaux $\mathcal{A}_{-\lambda_i} + \delta \mathcal{A}_{-\lambda_i}$ non nuls, même pour les i critiques $(i \in I)$. On peut donc, par le procédé de la proposion 2.2.4, définir des invariants $\mathcal{A}_\omega + \delta \mathcal{A}_\omega$ associés à $x(z) + \delta x(z)$. Et bien que par hypothèse :

(2.2.19) $$\mathcal{A}_{-\lambda_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad i \in I .$$

il n'y a aucune raison pour que les parties finies $\mathcal{A}_\omega$ des autres invariants $\mathcal{A}_\omega + \delta \mathcal{A}_\omega$ soient nulles, même pour les ω dont l'expression fait intervenir les λ_i critiques $(i \in I)$. On voit donc que les invariants cruciaux, lorsqu'ils viennent à s'annuler, occultent une très riche information invariante, qu'on récupère en considérant des équations infiniment voisines. D'une façon précise :

<u>Proposition 2.2.6</u> <u>(Calcul des invariants holomorphes dans le cas général : première méthode)</u>

Soit une équation (2.2.3) de solution formelle $x(z)$. Si on considère toutes les équations voisines dont les solutions $x(z) + \delta x(z)$ possèdent même réseau de résurgence Ω , alors la borne inférieure des idéaux annulateurs :

(2.2.20) $$\mathcal{J}^*_x(\Omega) = \liminf_{\delta x \to 0} \mathcal{J}_{x+\delta x}(\Omega)$$

existe et définit un idéal $\mathcal{J}^*_x(\Omega)$ qui est le noyau d'un endomorphisme du type (2.2.14). Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ ainsi définis constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes de l'équation (2.2.3).

La non continuité en x de l'idéal $\mathcal{J}_x(\Omega)$ rend donc nécessaire le recours aux équations "infiniment voisine". Le procédé reste constructif, car on n'a pas en fait à considérer toutes les équations voisines : il suffit de prendre une famille (bien choisie à un paramètre, par exemple la famille des équations déduites de (2.2.3) par adjonction du terme εz^{-2} (ε petit) au second membre. Mais il ne vaut pas la peine de s'attarder à cette méthode, car il en existe une autre, plus explicitement constructive et ayant l'avantage de s'en tenir à l'équation donnée. Cette seconde méthode, très préférable, consiste à envisager non la simple solution formelle $x(z)$ de (2.2.3), mais l'intégrale formelle $x(z,u)$, fonction de ν paramètres u_i .

Proposition 2.2.7 (Intégrale formelle)

L'équation différentielle (2.2.3) possède une intégrale formelle $x(z,u)$ du type :

$$x(z, u_1, \dots, u_\nu) = \sum_{n_i \in \mathbb{N}} u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \, z^{[n_1, \dots, n_\nu]} \, \Phi^{n_1, \dots, n_\nu}(z) \tag{2.2.21}$$

avec des composantes $\Phi^{n_1,\dots,n_\nu}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ et avec des blocs élémentaires:

$$z^{[n_1, \dots, n_\nu]} = \prod_{i=1}^{\nu} \left(e^{n_i \lambda_i z} \, z^{n_i \tau_i} \right) \tag{2.2.22}$$

Les λ_i sont définis comme ci-avant et les τ_i valent :

$$\tau_i = - Q(\lambda_i) \,/\, P'(\lambda_i) \qquad (*) \tag{2.2.23}$$

avec

(*) Notons que $P'(\lambda_i) \neq 0$ puisqu'on a supposé les λ_i non résonnants, donc distincts.

(2.2.24) $$P(\lambda) = \sum \alpha_m \lambda^m \quad \text{et} \quad Q(\lambda) = \sum \beta_m \lambda^m$$

Cette intégrale est unique (*) et ses composantes $\Phi^n(z)$ sont explicitement calculables grâce à une récurrence de la forme :

(2.2.25) $$\sum_{q=0}^{\nu} b_q(z) \frac{d^q}{dz^q} \Phi^{n_1,\ldots,n_\nu}(z) = K^{n_1,\ldots,n_\nu}(z)$$

avec $b_q(z) = \alpha_q + \beta_q z^{-1} - \frac{\partial}{\partial x^{(q)}} b(z, x(z), x'(z), \ldots, x^{(\nu)}(z))$ et avec un second membre $K^n(z)$ ne faisant intervenir que les composantes Φ^m d'indice $m < n$ (pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}^\nu$).

Proposition 2.2.8 (Equation du pont)

Les composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle sont résurgentes en z et possèdent toutes le même réseau de résurgence que la solution formelle $x(z)$. De plus, elles vérifient des équations de résurgence qui peuvent s'écrire sous forme compacte :

(2.2.26) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \, x(z,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

avec $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z} \Delta_\omega$ (dérivation pointée) et avec pour $\mathbb{A}_\omega$ des opérateurs différentiels ordinaires de la forme (2.2.12).

Proposition 2.2.9 (Calcul des invariants holomorphes : deuxième méthode)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ qui interviennent dans (2.2.26) coïncident avec ceux de la proposition 2.2.6. L'équation du pont livre donc explicitement et dans tous les cas (même quand les invariants cruciaux sont nuls) un système complet et libre d'invariants holomorphes.

L'équation du pont a aussi l'avantage de permettre le calcul des dérivées étrangères (premières et successives) de chaque composante. Ainsi pour $\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i$ on aura :

(*) à une dilatation près des paramètres

$$\Delta_\omega \, \Phi^m(z) = \sum_{i=1}^{\nu} (m_i - n_i) \, A^i_\omega \; z^{-\sum_i n_i \tau_i} \; \Phi^{m-n}(z) \tag{2.2.27}$$

On peut aussi itérer, en prenant bien garde à l'inversion des facteurs :

$$\dot{\Delta}_{\omega_r} \ldots \dot{\Delta}_{\omega_2} \dot{\Delta}_{\omega_1} \; x(z,u) = \mathbb{A}_{\omega_1} \mathbb{A}_{\omega_2} \ldots \mathbb{A}_{\omega_r} \; x(z,u) \tag{2.2.28}$$

Bien entendu, lorsque les invariants cruciaux sont tous $\neq 0$, chacune des composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle (et en particulier, comme on l'a déjà vu, la première : $\Phi^0(z) = x(z,0) = x(z)$) porte à elle seule toute l'information invariante, puisqu'alors les $\Phi^n(z)$ possèdent toutes le même idéal annulateur $\mathfrak{I}(\Omega)$ et que les coefficients A^i_ω des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ peuvent se calculer comme "constantes de structure" de cet idéal $\mathfrak{I}(\Omega)$.

Equations de niveau unique p .

On dit que l'équation différentielle (2.2.1) est de niveau p si, faisant $z = t^{-p}$, on peut la mettre sous la forme :

$$0 = b(z, x, x', \ldots, x^{(\nu)}) \in \mathbb{C}\{z^{-1/p}, x, x', \ldots, x^{(\nu)}\} \quad \left(x' = \frac{d}{dz} x\right) \tag{2.2.29}$$

avec $b(\infty,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x} b(\infty,0) \neq 0,\ \frac{\partial}{\partial x^{(\nu)}} b(\infty,0) \neq 0$. On peut alors, comme en niveau 1, se ramener à une forme préparée :

$$\sum_{i=0}^{\nu} \left(\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{q-p}{p} \beta_{i,q} z^{-q/p}\right) x^{(i)} = b(z, x, x', \ldots, x^{(\nu)}) \tag{2.2.30}$$

et tous les résultats précédents restent en vigueur, à ceci près qu'il faut remplacer le réseau Ω par son relevé Ω_p sur $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $z^{1/p}$) et qu'il faut remplacer les blocs (2.2.22) par les blocs :

$$z^{[n]} = \prod_{i=1}^{\nu} \left(z^{n_i \tau_i} \cdot \exp\left(n_i \left(\lambda_i z + \sum_{q=1}^{p-1} \lambda_{i,q} \, z^{\frac{p-q}{p}}\right)\right)\right) \tag{2.2.31}$$

Schéma pour la démonstration des principaux résultats de cette section.

On commence par modifier l'équation (2.2.3) en affectant le second membre, et aussi chaque β_i du premier membre, d'un facteur ε petit. Puis on développe en puissances de ε les composantes φ^n de l'intégrale formelle :

(2.2.32) $$\varphi^{n_1,\dots,n_\nu}(z) = \sum_{n_0=1}^{\infty} \varepsilon^{n_0}\, \varphi^{n_0;n_1,\dots,n_\nu}$$

Les $\varphi^{n_0,n}$ vérifient une récurrence de la forme :

(2.2.33) $$\left(\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i\, \partial^i\right) \varphi^{n_0,n}(z) = K^{n_0,n}(z) \qquad (\partial = \partial/\partial z)$$

avec un second membre $K^{n_0,n}$ fonction des seuls $\varphi^{m_0,m}$ pour $m_0 < n_0$.

Passant aux transformées de Borel on trouve :

(2.2.34) $$\boldsymbol{\Phi}^{n_0,n}(\zeta) = \left(\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i\, (-\zeta)^i\right)^{-1} \mathbf{K}^{n_0,n}(\zeta)$$

Il apparaît donc à chaque fois des poles simples aux points $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_\nu$.

Mais $\mathbf{K}^{n_0,n}$ est un polynôme de convolution en les $\boldsymbol{\Phi}^{m_0,m}$ avec $m_0 < m$.

Ces convolutions successives font apparaître des singularités logarithmiques au-dessus de l'ensemble :

$$\mathbb{S} = -\left(\lambda_1 \mathbb{N} + \lambda_2 \mathbb{N} + \dots \lambda_\nu \mathbb{N}\right)$$

On vérifie ensuite sans difficulté que, pour tout ε et en particulier pour $\varepsilon = 1$ les séries :

(2.2.35) $$\boldsymbol{\Phi}^{n}(\zeta) = \sum_{n_0=1}^{\infty} \varepsilon^{n}\, \boldsymbol{\Phi}^{n_0,n}(\zeta)$$

convergent uniformément sur tout compact de $\widetilde{\mathbb{C}-\mathbb{S}}$ (recouvrement universel de $\mathbb{C}-\mathbb{S}$). Il ne reste plus qu'à appliquer les techniques du calcul étranger pour déterminer successivement :

(i) la forme du réseau de résurgence (on trouve l'ensemble Ω de la proposition

2.2.3, qui ne coïncide pas avec le lieu $\mathbb{S}$ des singularités).

ii) la forme exacte des singularités (logarithmiques si tous les τ_i sont nuls; puissances complexes sinon)

(iii) la forme des équations de résurgence (par des arguments purement formels on aboutit à $\dot{\Delta}_\omega . x = \mathbb{A}_\omega . x$)

(iiii) et enfin à vérifier (par des arguments perturbatifs et une amorce de synthèse constructive : voir §§2.12 et 11.1) l'absence de contrainte à priori sur les (autres que les contraintes universelles de croissance : voir § §10.5).

SECTION 2.3 : SYSTEMES DIFFERENTIELS A NIVEAU UNIQUE.

Etudions maintenant les systèmes différentiels locaux de niveau 1, c'est-à-dire les systèmes du type :

$$(2.3.1) \qquad t^2 \frac{d}{dt} x_i + a_i(t,x) = 0 \qquad \left(1 \leq i \leq \nu \ ;\ a_i(t,x) \in \mathbb{C}\{t,x_1,\dots,x_\nu\}\right)$$

avec $a_i(0,0) = 0$ et avec une matrice $[\alpha_{ij}] = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\alpha_i(0,0)\right]$ de spectre $\{\lambda_1,\dots,\lambda_\nu\}$ non résonnant(*). Le système (2.3) est formellement conjugable à un système élémentaire du type :

$$(2.3.2) \qquad t^2 \frac{d}{dt} y_i + (\lambda_i + \tau_i t)\, y_i = 0 \qquad \left(1 \leq i \leq \nu,\ \lambda_i \in \mathbb{C}^*,\ \tau_i \in \mathbb{C}\right)$$

mais les transformations conjugantes :

$$(2.3.3) \qquad x_i = h_i(t,y) \qquad \left(1 \leq i \leq \nu ;\ h_i(t,y) \in \mathbb{C}[[t,y_1,\dots,y_\nu]]\right)$$

sont généralement divergentes en t . Transportons-nous à l'infini, comme à la section précédente. Relativement à la variable $z = t^{-1}$, les systèmes (2.3.2) et (2.3.3) s'écrivent :

(*) ce qui implique que les λ_i sont tous distincts.

$$(2.3.4)\quad \frac{d}{dz} x_i = (\lambda_i + \tau_i z^{-1})\, x_i + b_i(z,x) \qquad 1 \leq i \leq \nu$$

$$(2.3.5)\quad \frac{d}{dz} y_i = (\lambda_i + \tau_i z^{-1})\, y_i \qquad b_i(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x_1, \ldots, x_\nu\}$$

La série $b_i(z,x)$ n'a bien sûr ni terme constant, ni terme en x_i, ni terme en $z^{-1} x_i$. Au prix d'un changement d'inconnue $x_i \mapsto x_i + \gamma_i z^{-1}$ on peut aussi supprimer le terme en z^{-1}. On obtient alors la forme préparée de l'équation (2.3.4) avec :

$$(2.3.4\text{bis})\quad b_i(z,0) = o(z^{-1}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(z,0) = o(z^{-1})$$

Ce que nous venons d'apprendre des équations différentielles nous incite à rechercher non pas la solution formelle $x(z) = (x_i(z))$ du système (2.3.4), mais directement son intégrale formelle $x(z,u) = (x_i(z,u))$.

Proposition 2.3.1 (Intégrale formelle)

Le système (2.3.4) possède une intégrale formelle $x(z,u)$ du type :

$$(2.3.6)\quad x_i(z, u_1, \ldots, u_\nu) = \sum_{n_i \in \mathbb{N}} u_1^{n_1} \cdots u_\nu^{n_\nu}\, z^{[n_1, \ldots, n_\nu]}\, \Phi_i^{n_1, \ldots, n_\nu}(z)$$

avec $\Phi_i^n(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ et $z^{[n]} = \prod_{i=1}^{\nu} \left(e^{n_i \lambda_i z} z^{n_i \tau_i}\right)$. Cette intégrale formelle est unique modulo une dilatation $u_i \mapsto c_i u_i$ des paramètres.

L'intégrale formelle s'obtient immédiatement à partir de la transformation conjugante (2.3.3) en posant $t = z^{-1}$ et en substituant à y_i la solution $u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i}$ du système élémentaire (2.3.5).

Proposition 2.3.2 (Réseau de résurgence)

Les composantes $\Phi_i^n(z)$ de l'intégrale formelle sont toutes résurgentes en z et possèdent un même réseau de résurgence Ω formé des complexes de la forme $\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i$ avec des n_i entiers tous $\geqslant 0$ sauf au plus un qui peut valoir -1.

Proposition 2.3.3 (Equation du pont)

Pour tout $\omega \in \Omega$ on a l'équation de résurgence :

(2.3.7) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z,u)$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme

(2.3.8) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\nu} A_\omega^i \, u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

avec $u^{n(\omega)} = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu}$ si $\omega = n_1\lambda_1 + \dots n_\nu\lambda_\nu$ et avec

(2.3.8bis) $$A_\omega^i = 0 \quad \text{si} \quad n_{i_0} = -1 \quad \text{et} \quad i \neq i_0 .$$

Proposition 2.3.4 (Invariants holomorphes)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont entièrement déterminés (et même surdéterminés) par l'équation (2.3.8). Ce sont des invariants holomorphes du système (2.3.4). Ensemble, ils constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes du système différentiel (2.3.4).

Si les λ_i ne sont pas quasi-résonnants (i.e. si Ω n'est pas Liouvillien) il n'existe pas d'invariants métaholomorphes et deux systèmes (2.3.4) sont analytiquement conjugués s'ils possèdent mêmes invariants formels λ_i et τ_i et mêmes invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$.

Proposition 2.3.5 (Invariants cruciaux)

Lorsque les ν invariants cruciaux, qui s'écrivent :

$$\mathbb{A}_{-\lambda_i} = A_{-\lambda_i}^i \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

sont tous $\neq 0$, chacune des composantes Φ_i^n de l'intégrale formelle $x(z,u)$ porte à elle seule toute l'information invariante. Dans ce cas, en effet, l'idéal étranger $\mathfrak{J}(\Omega)$ qui annule Φ_i^n ne dépend pas de n ni de i et c'est le noyau d'un homomorphisme $\dot{\Delta}_\omega \mapsto \mathbb{A}_\omega$ caractérisé par des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ qui ne sont autres que les invariants holomorphes du système (2.3.4).

Passage d'un système à l'autre.

Toutes les fonctions divergentes qu'on peut fabriquer "naturellement" à partir d'un ou plusieurs systèmes (2.3.2) sont résurgentes et vérifient des équations de résurgence facilement explicitables à partir de l'équation du pont. Justifions ces assertions dans quelques cas simples. Supposons $\tau_i = 0$ et considérons les transformations formelles :

$$\left\{\begin{array}{l} y_i \mapsto x_i = h_i(z,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, y_1, \ldots, y_\nu]] \\ x_i \mapsto y_i = k_i(z,x) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, x_1, \ldots, x_\nu]] \end{array}\right. \tag{2.3.9}$$

qui font passer du système (2.3.2) au système élémentaire (2.3.4). Notons A^i_ω, comme en (2.3.8), les coefficients des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ du système (2.3.2). Fixons dans Ω un $\omega = \sum n_j \lambda_j$. A partir de l'équation du pont on trouve facilement :

$$\Delta_\omega h_i(z,y) = y^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\nu} A^i_\omega y_i \frac{\partial}{\partial y_i} h_i(z,y) \qquad \left(y^{n(\omega)} = \prod_j y_j^{n_j}\right) \tag{2.3.10}$$

$$\Delta_\omega k_i(z,y) = - A^i_\omega k_i(z,x)\, k^{n(\omega)}(z,x) \qquad \left(k^{n(\omega)} = \prod_j k_j^{n_j}\right) \tag{2.3.11}$$

On a donc deux types de résurgence bien différents : le second membre de (2.3.10) est linéaire, mais fait intervenir les dérivées de h ; tandis que le second membre de (2.3.11) est rationnel en k , mais non linéaire.

Soit maintenant un autre système de la forme (2.3.2), d'inconnues $\tilde{x}_i$ et d'invariants $\tilde{\mathbb{A}}_\omega$. Lui aussi peut être conjugué au système élémentaire (2.3.4) :

$$\left\{\begin{array}{l} y_i \longmapsto \tilde{x}_i = \tilde{h}_i(z,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, y_1, \ldots, y_\nu]] \\ \tilde{x}_i \longmapsto y_i = \tilde{k}_i(z,\tilde{x}) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\nu]] \end{array}\right. \tag{2.3.12}$$

et, par composition, au premier de nos systèmes (2.3.2) :

$$x_i \longmapsto \tilde{x}_i = \ell_i(z,x) = \tilde{h}_i(z,k(z,x)) \in \mathbb{C}[[z^{-1},x_1,\dots,x_\nu]] \qquad (2.3.13)$$

Ici encore, les $\ell_i(z,x)$ vérifient des équations de résurgence facilement explicitable :

$$\Delta_\omega \ell_i(z,x) = k^{n(\omega)}(z,x) \sum_{j=1}^{\nu} \left(A^j_\omega - \tilde{A}^j_\omega\right) k_j(z,x) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \tilde{h}_i(z,k(z,x)) \qquad (2.3.14)$$

Systèmes de niveau unique p .

On peut se les donner directement sous forme préparée :

$$\frac{d}{dz} x_i = \left(\lambda_i + z^{-1}\tau_i + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{q-p}{p} \lambda_{i,q} z^{-q/p}\right) x_i + b_i(z,x) \quad \begin{cases} b_i \text{ sans termes} \\ \text{bilinéaires} \\ \text{en } z^{-1} \text{ et } x \end{cases} \qquad (2.3.15)$$

Tous les résultats précédents restent en vigueur à ceci près qu'il faut remplacer le réseau Ω par son relevé Ω_p sur $\mathbb{C}_p$ et qu'on doit définir les blocs $z^{[n]}$ comme en (2.2.31) et non plus comme en (2.2.22).

Cas exceptionnels :

Quand on a des λ_i résonnants et en particulier des λ_i multiples, de légères modifications sont requises. Voir à ce sujet la fin du §2.7 .

Principe des démonstrations :

C'est le même exactement que pour les équations différentielles de la section précédente. On prend les systèmes différentiels sous forme préparée, puis on isole la partie principale $\frac{d}{dz} x_i = \lambda_i x_i$ en affectant tous les autres termes d'un petit facteur ε . Après quoi on développe tout en séries de ε et on raisonne comme au §2.2.

SECTION 2.4 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.

Illustrons nos résultats sur le cas linéaire. Considérons donc une équation linéaire de niveau 1:

(2.4.1) $$\sum_{m=0}^{\nu} a_m(z) \frac{\partial^m}{\partial z^m} x(z) = 0$$

avec $a_m(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$ et :

(2.4.1bis) $$a_i(z) = \alpha_i + \beta_i z^{-1} + o(z^{-1}) \qquad (\alpha_0 \neq 0, \alpha_\nu \neq 0)$$

les multiplicateurs λ_i désignant comme d'habitude les zéros du polynome $\sum \alpha_m \zeta^m$ et les τ_i étant calculables à partir des β_i selon la formule (2.2.27).

Considérons parallèlement un système linéaire préparé :

(2.4.2) $$\frac{\partial}{\partial z} x_i(z) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(z) \; x_j(z) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

avec $a_{ij}(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$ et

(2.4.2bis) $$a_{ii}(z) = \lambda_i + \tau_i z^{-1} + o(z^{-1}) \quad , \quad a_{ij}(z) = o(1)$$

S'agissant de problèmes linéaires, il n'est plus nécessaire de postuler la non-résonance des λ_i . Il suffit de supposer les différences $\lambda_i - \lambda_j$ toutes distinctes:

(2.4.3) $$(\lambda_i - \lambda_j = \lambda_{i'} - \lambda_{j'}) \implies (i = i', j = j')$$

L'intégrale formelle (scalaire pour l'équation et vectorielle pour le système) est ici linéaire en u . Elle s'écrit :

(2.4.4) $$x(z, u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \; z^{<i>} \; \phi^{<i>}(z)$$

avec $\phi^{<i>}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ et avec :

(2.4.5) $$z^{\langle i\rangle} = z^{\tau_i}\, e^{\lambda_i z}$$

Les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur $x(z,u)$ correspondent (toujours à cause de la linéarité) à des indices de la forme $\omega = \lambda_i - \lambda_j$. Elles donnent lieu aux équations de résurgence habituelles :

(2.4.6) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z,u)$$

mais (encore à cause de la linéarité) avec des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ homogènes en u de degré 0 , c'est-à-dire de la forme :

(2.4.7) $$\mathbb{A}_\omega = A_\omega \; u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad si \;\; \omega = \lambda_i - \lambda_j \qquad (A_\omega \in \mathbb{C})$$

Passant des $\dot{\Delta}_\omega$ aux Δ_ω et traduisant (2.4.6) composante par composante on obtient :

(2.4.8) $$\Delta_{\lambda_i-\lambda_j} \; \phi^{\langle i\rangle}(z) = z^{\tau_j-\tau_i} A_{\lambda_i-\lambda_j} \; \phi^{\langle j\rangle}(z)$$

Les équations linéaires <u>non homogènes</u> se traitent de la même manière. Simplement, on doit ajouter à l'intégrale formelle un terme constant en u et, à la collection des dérivations étrangères agissantes, on doit adjoindre les $\Delta_{-\lambda_i}$ $(1 \leq i \leq \nu)$ et leur faire corespondre des opérateurs :

(2.4.7bis) $$\mathbb{A}_{-\lambda_i} = A_{-\lambda_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad\qquad (A_{-\lambda_i} \in \mathbb{C})$$

Lorsque les multiplicateurs λ_i demeurent distincts, mais que certaines des différences $\lambda_i - \lambda_j$ viennent à coïncider, on est conduit à des opérateurs de la forme :

(2.4.9) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{\lambda_i-\lambda_j=\omega} A^{(i,j)} u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad\qquad (A^{(i,j)} \in \mathbb{C})$$

Lorsqu'enfin les λ_i eux-mêmes cessent d'être tous distincts, on se trouve en général en présence de problèmes à plusieurs niveaux (cf. §§2.8 et 2.11).

Remarque : Le lecteur rapprochera les résultats de cette section des travaux d'OKUBO [Ok.1], [Ok.2], de SIBUYA [Si.1], de MALGRANGE [Ml.3] et d'une façon générale de l'immense littérature sur la monodromie. De fait, dans le cas linéaire, les phénomènes de résurgence peuvent s'interprêter dans le langage plus familier de la monodromie. Signalons d'ailleurs que les constantes de monodromie peuvent se calculer explitement grâce aux moules hyperlogarithmiques (Voir §§2.12, 10.2, 10.3). Signalons enfin que l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2}{dq^2}\Psi = (V(q)-E)\,\Psi \tag{2.4.10}$$

avec un potentiel $V(q)$ polynomial de degré ν (ou plus généralement méromorphe à l'infini avec un pole d'ordre ν) possède une intégrale formelle résurgente en $z = q^{1+\frac{\nu}{2}}$ et que les coefficients de Stokes s'interprêtent et se calculent aisément grâce à cette résurgence et aux invariants holomorphes. Voir à ce sujet [e.1].

SECTION 2.5 : INTRODUCTION AUX SYSTEMES A PLUSIEURS NIVEAUX. MULTIPLICATEURS ET TEMPS PARALLELES.

L'exemple le plus simple de problème de niveau p est fourni par les équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{1}{p}\, t^{1+p}\frac{d}{dt}x + a(t,x) = 0 \qquad \left(a \in \mathbb{C}\{t,x\}\right) \tag{2.5.1}$$

avec $a(0,0) = 0$ et avec un multiplicateur λ non nul :

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial x}a(0,0) \neq 0 \quad (*) \tag{2.5.2}$$

Gardant cet exemple présent à l'esprit, nous allons introduire une notion commode de système différentiel à plusieurs niveaux. La première chose est d'étendre la condition (2.5.2) aux systèmes. Pour cela, on a besoin des déterminants de niveau p.

(*) Pour une étude détaillée de ces équations, voir [Si.2], [Vo.1], [Vo.2], [e.1], [E.S].

Définition 2.5.1 (Systèmes différentiels à plusieurs niveaux. Déterminants de niveau p)

Un système différentiel analytique de niveaux

(2.9.3) $$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \cdots p_\nu \geqslant 1 \qquad (p_i \in \mathbb{N})$$

est par définition un système de la forme (*) :

(2.5.4) $$\frac{1}{p_i} t^{1+p_i} \frac{d}{dt} x_i + a_i(t,x) = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{C}\{t,x\})$$

avec $a_i(0,0) = 0$ et avec

(2.5.5) $$\delta(p_1) \neq 0,\ \delta(p_2) \neq 0,\ \ldots,\ \delta(p_\nu) \neq 0$$

où $\delta(p)$ est le déterminant de niveau p, ainsi défini :

(2.5.6) $$\delta(p) = \det_{p_i, p_j \geqslant p} [\alpha_{ij}] \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i(0,0)$$

Pour chaque niveau p, on note $\theta(p)$ la multiplicité de p et $\theta^{\pm}(p)$ le nombre des niveaux supérieurs (inférieurs) comptés avec leur multiplicité :

(2.5.7) $$\theta(p) = \sum_{p_i = p} 1\ ,\ \theta^+(p) = \sum_{p_i > p} 1\ ,\ \theta^-(p) = \sum_{p_i < p} 1 .$$

A vrai dire, les relations (2.5.5) n'étendent que la condition "multiplicateur non nul". Pour étendre la définition (2.5.2) des multiplicateurs, il faut introduire les matrices carrées $M(p)$ et $I(p)$ d'ordre $\theta(p) + \theta^+(p)$:

(*) En fait, les systèmes (2.5.4) ne sont pas stables pour tous les changements de variables inversibles $x_i \longmapsto y_i = h_i(t,x)$. On rétablirait facilement cette stabilité en envisageant des systèmes un peu plus généraux, de la forme :

(2.5.4bis) $$\sum_{j=1}^{\nu} P_{ij}(t) \frac{d}{dt} x_j + a_i(t,x) = 0 \qquad (1 \leq i \leq \nu\ ;\ P_{ij}(t) \in \mathbb{C}[t])$$

Mais le gain serait mince : on y gagnerait surtout des complications d'écriture.
De toute façon, les systèmes (2.5.4bis) sont, à d'infimes modifications près, justiciables des mêmes méthodes que les systèmes (2.5.4).

(2.5.8) $$M(p) = \left[\alpha_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i(0,0) \; ; \quad p_i, p_j \geqslant p \right]$$

(2.5.9) $$I(p) = \left[\delta_{ij}(p) ; p_i, p_j \geqslant p \right] \quad \text{avec} \begin{cases} \delta_{ij}(p) = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ii}(p) = 0 & \text{si } p_i > p \\ \delta_{ii}(p) = 1 & \text{si } p_i = p \end{cases}$$

Définition 2.5.2 (Multiplicateurs de niveau p)

Les multiplicateurs de niveau p sont par définition les $\theta(p)$ zéros du polynome

(2.5.10) $$P_p(\lambda) = \det \left[M(p) - \lambda I(p) \right]$$

Ces zéros sont notés λ_i avec un indice i parcourant le segment entier $]\theta^+(p), \theta^+(p)+\theta(p)]$. Par suite :

(2.5.11) $$P_p(\lambda) = (-1)^{\theta(p)} \cdot \prod_{p_i = p} (\lambda - \lambda_i) \quad \delta(1+p)$$

(2.5.12) $$\prod_{p_i = p} \lambda_i = \delta(p) / \delta(1+p) \neq 0$$

Les multiplicateurs λ_i ne sont donc jamais nuls. Lorsque le niveau p_i est simple, son unique multiplicateur λ_i est immédiat à calculer, puisqu'alors :

(2.5.12) $$\lambda_i = \delta(p_i) / \delta(p_{i-1})$$

Définition 2.5.3 (Systèmes non résonnants)

Le système différentiel (2.5.4) est dit non résonnant si ses multiplicateurs de même niveau sont rationnellement indépendants :

(2.5.13) $$\left(\sum_{p_i = p} n_i \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad n_i \in \mathbb{Z} \right) \Rightarrow (n_i = 0)$$

Nous allons commencer par l'étude des systèmes non résonnants.

Lemme 2.5.1 (Forme préparée)

Si le système (2.5.4) est non résonnant, il peut, au prix d'une transformation analytique ou même polynomiale, se mettre sous la forme suivante, dite forme préparée :

(2.5.14) $$\frac{1}{p_i}\, t^{1+p_i} \frac{d}{dt} x_i + x_i P_i(t) + x_i \sum_{\|n\| \geq -1} a_i^n(t)\, x^n = 0$$

avec des polynômes $P_i(t)$ de degré $\leq p_i$ et avec :

(2.5.15) $$a_i^n(t) = o(t^{p_i}) \quad \text{si} \quad \|n\| = 0 \text{ ou } 1$$

Les polynômes $P_i(t)$ sont des invariants formels du système. Leurs termes constants ne sont autres que les multiplicateurs :

(2.5.16) $$P_i(0) = \lambda_i$$ (pour une indexation cohérente)

Explications : Les multiindices $n = (n_i)$ ont leurs coordonnées n_i toutes ≥ 0 sauf au plus une qui peut valoir -1 . On a bien sûr :

$$x^n = x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu} \quad \text{et} \quad \|n\| = n_1 + \dots n_\nu$$

La condition (2.5.15) ne porte que sur les termes affines en x . La notation $x_i \sum a_i^n(t)\, x^n$ ne signifie aucunement que cette expression soit divisible par x_i , car elle peut comporter, et comporte en général, des termes de la forme :

(2.5.17) $$a_i^{n_1, \dots, n_{i-1}, -1, n_{i+1}, \dots, n_\nu} \quad x_1^{n_1} \dots x_{i-1}^{n_{i-1}}\, x_{i+1}^{n_{i+1}} \dots x_\nu^{n_\nu}$$

La forme préparée n'est évidemment pas unique et les polynômes $P_i(t)$ ne sont pas les seuls invariants formels du système :

Lemma 2.5.2 (Forme normale)

Tout système (2.5.4) non résonnant est formellement conjugable à un système :

$$(2.5.18) \qquad \frac{1}{p_i}\, t^{1+p_i} \frac{d}{dt} x_i + x_i\, P_i(t) + x_i \sum_{\|n\|\geq 1} P_i^n(t)\, x^n = 0$$

avec les mêmes $P_i(t)$ que précédemment et avec :

$$(2.5.19) \qquad \begin{cases} P_i^{n_1,\dots,n_\nu}(t) = 0 & \text{si } \sum\limits_{p_j \geq p_i} |n_j| \neq 0 \\ P_i^{n_1,\dots,n_\nu}(t) = \text{polynôme de degré} \leq p_i & \text{si } \sum\limits_{p_j \geq p_i} |n_j| = 0 \end{cases}$$

La forme (2.5.18) est déterminée à une dilatation près sur les x_i . Elle est dite forme normale. Les polynômes $P_i^n(t)$ constituent un système complet d'invariants formels du système (2.5.4).

Notons que dans la forme normale le $\sum'$ est étendu aux n de somme $\|n\| \geq 1$ (donc pas de partie affine en dehors des $x_i\, P_i(t)$) tandis que dans la forme préparée le $\sum'$ est étendu à tous les n , y compris ceux dont la somme $\|n\|$ vaut -1 (termes constants en x) ou 0 (termes linéaires en x).

Il est exceptionnel que le système (2.5.4) soit analytiquement conjugué à sa forme normale. Il possède donc des invariants analytiques non triviaux, qu'il s'agit de calculer. Pour ce faire, on commence par mettre le système (2.5.4) sous forme préparée (2.5.14) + (2.5.15). Puis on en cherche des intégrales formelles du type :

$$(2.5.20) \qquad x_i(t,u) = u_i\, y_i \sum_{\|m\|\geq -1} u^m\, y^m\, h_i^m(t)$$

avec $u = (u_1, \dots, u_\nu)$ et avec y_i solution du système élémentaire :

$$(2.5.21) \qquad \frac{1}{p_i}\, t^{1+p_i} \frac{d}{dt} y_i + y_i\, P_i(t) = 0$$

obtenu en ne retenant que le début de la forme normale. On se laisse ensuite guider par l'analogie avec l'équation (2.5.1) de niveau p . Puisque celle-ci admet des solutions résurgentes par rapport au "temps" $z = t^{-p}$, on est conduit, dans le cas des systèmes à plusieurs niveaux, à introduire des temps parallèles z_p et des dérivations ∂_p :

(2.5.22) $$z_p = t^{-p} \quad , \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial z_p}$$

avec les formules de passage :

(2.5.23) $$z_p = (z_q)^{p/q} \quad , \quad \partial_p = \frac{q}{p} (z_q)^{1-\frac{p}{q}} \partial_q$$

Relativement aux temps z_{p_i} le système élémentaire s'écrit :

(2.5.24) $$\partial_{p_i} y_i = \left(\tau_i z_{p_i}^{-1} + \partial_{p_i} \sigma_i(z_{p_i})\right) y_i$$

avec

(2.5.25) $$\begin{cases} \sigma_i(z_{p_i}) = \int_0^{z_{p_i}} \left(P_i(z^{-1/p_i}) - \tau_i z^{-1}\right) dz \\ \qquad = \lambda_i z_{p_i} + \sum_{0<q<p_i} \lambda_{i,q} (z_{p_i})^{q/p_i} \quad (\lambda_i \text{ et } \lambda_{i,q} \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

D'où la solution :

(2.5.26) $$y_i = (z_{p_i})^{\tau_i} \exp \sigma_i(z_{p_i})$$

De même le système initial (1.5.14) s'écrit :

(2.5.27) $$\partial_{p_i} x_i = \left(\tau_i z_{p_i}^{-1} + \partial_{p_i} \sigma_i(z_{p_i})\right) x_i + x_i \sum_{\|n\| \geq -1} a_i^n x^n = 0$$

Supposons provisoirement que :

(2.5.28) $$a_i^n \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \|n\| = -1 \quad \text{et} \quad \|n\| = 0$$

Comme on l'a vu, cela revient à supposer que la série $x_i \sum a_i^n x^n$ ne comporte pas de tenues affines en x, mais n'implique aucunement sa divisibilité par x_i. Pour tout multiindice $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ posons :

(2.5.29) $$z_p^{[[n]]} = z_p^{(\sum n_i \tau_i p_i)/p} = \prod_{i=1}^{\nu} (z_{p_i})^{n_i \tau_i}$$

(2.5.30) $$z_{\rho}^{[n]} = z_{\rho}^{[[n]]} \exp\left(\sum n_i \sigma_i(z_{\rho_i}^{\rho_i/\rho})\right) = \prod_{i=1}^{\nu} (y_i)^{n_i}$$

Portant (2.5.20) dans (2.5.27) on trouve que le coefficient h_i^n de l'intégrale formelle (2.5.20) vérifie l'équation différentielle :

(2.5.31) $$\partial_{\rho_i}\left(z_{\rho_i}^{[n]} . h_i^n\right) = z_{\rho_i}^{[n]} . K_i^n \qquad (n = (n_1, \ldots, n_\nu))$$

avec des K_i^n qui sont des expressions "homogènes" de degré $\|n\|$ ne faisant intervenir que les h_j^m d'indice $\|m\| < \|n\|$ et les a_j^m d'indice $\|m\| \leq \|n\|$. Rapportant tout à un même variable z_ρ et isolant le facteur $z_\rho^{[[n]]}$ on aboutit à un système plus commode :

(2.5.32) $$D_\rho^n \left(z_\rho^{[[n]]} . h_i^n\right) = z_\rho^{[[n]]} . K_i^n . \frac{dz_{\rho_i}}{dz_\rho}$$

avec $\frac{dz_{\rho_i}}{dz_\rho} = (\rho_i/\rho)\, z_\rho^{(\rho_i-\rho)/\rho}$ et avec

(2.5.33) $$\begin{cases} D_\rho^n = \partial_\rho + \sum_{i=1}^{\nu} n_i\, \partial_\rho\, \sigma_i(z_{\rho_i}) \\ = \partial_\rho + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{q=1}^{\rho_i-1} (n_i \rho_i q/\rho)\, \lambda_{i,q}\, z_\rho^{(\rho_i q-\rho)/\rho} \end{cases}$$

Par analogie avec les problèmes à un seul niveau, on peut espérer trouver les invariants analytiques du système (2.5.14) en construisant pour chaque niveau ρ, si faire se peut, des $h_i^n(z_\rho)$ qui soient à la fois résurgentes en z_ρ et solutions du système (2.5.32). C'est effectivement possible mais il faut, pour s'en convaincre, étudier de plus près les opérateurs D_ρ^n.

SECTION 2.6 : PROSOLUTIONS ET RETROSOLUTIONS.

Posons

(2.6.1) $$\begin{cases} D = \omega_1 z^{\alpha_1} + \omega_2 z^{\alpha_2} + \ldots \omega_\nu z^{\alpha_\nu} + \partial \quad \text{avec} \\ \infty > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \ldots \alpha_\nu > -1 \\ \partial = \partial/\partial z \; ; \; \omega_i \in \mathbb{C}^* ; \; \alpha_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et cherchons les solutions résurgentes(*) de l'équation

(2.6.2) $$D\,\varphi = \Psi$$

d'inconnue φ et de second membre Ψ résurgent général(*).

Lemme 3.6.1 (Equation $D\,\varphi = \Psi$)

Si $\alpha_1 > 0$ l'équation (3.6.2) possède une unique solution résurgente :

(2.6.3) $$\varphi = D_+^{-1}\,\Psi$$

avec

(2.6.3bis) $$\begin{cases} D_+^{-1} = \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\omega_i}{\omega_1} z^{\alpha_i - \alpha_1} + \frac{1}{\omega_1} z^{-\alpha_1}\partial \right\}^{-1} \left(\omega_1 z^{\alpha_1}\right)^{-1} \\ \quad\;\; = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\omega_1)^{-n} \left[\sum_{i=2}^{\nu} \omega_i z^{\alpha_i - \alpha_1} + z^{-\alpha_1}\partial \right]^n \left(\omega_1 z^{\alpha_1}\right)^{-1} \end{cases}$$

Si $\alpha_1 = 0$ l'équation (3.6.2) possède une unique solution résurgente :

(2.6.4) $$\varphi = D_0^{-1}\,\Psi$$

avec

(2.6.4.bis) $$\begin{cases} D_0^{-1} = (\partial + \omega_1)^{-1} \left\{ 1 + \left(\sum_{i=2}^{\nu} \omega_i z^{\alpha_i} \right) (\partial + \omega_1)^{-1} \right\}^{-1} \\ \quad\;\; = (\partial + \omega_1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\sum_{i=2}^{\nu} \omega_i z^{\alpha_i} \right) (\partial + \omega_1)^{-1} \right]^n \end{cases}$$

Si $\alpha_1 < 0$ l'équation (3.6.2) possède une infinité de solutions résurgentes qui sont toutes de la forme :

(2.6.5) $$\varphi = D_-^{-1}\,\Psi + c_0 \exp\left(- \sum_{i=1}^{\nu} \left(\omega_i / (1+\alpha_i)\right) z^{1+\alpha_i} \right) \quad (**)$$

avec $c_0 \in \mathbb{C}$ et avec

(*) Voir §1.3 pour les généralités sur les fonctions résurgentes.

(**) On peut généralement définir une rétrosolution "sans terme constant", dite rétrosolution absolue (naïvement : $c_0 = 0$) et diverses rétrosolutions polarisées (pour des valeurs remarquables de c_0). Voir Appendice 1, p.586.

(2.6.5bis)
$$\begin{cases} D_-^{-1} = \partial^{-1}\left\{1+\sum_{i=1}^{\nu}\omega_i\, z^{\alpha_i}\,\partial^{-1}\right\}^{-1} \\ \phantom{D_-^{-1}} = \partial^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{i=1}^{\nu}\omega_i\, z^{\alpha_i}\,\partial^{-1}\right)^n \end{cases}$$

Interprétation : Ici φ et ψ désignent des fonctions résurgentes du type le plus général, sans impliquer l'existence d'un modèle formel simple (séries de Taylor ou apparentées). Le modèle formel $\mathcal{R}$ des fonctions résurgentes (voir §1.3.b) n'est donc ici qu'une simple commodité de notation et les opérateurs $\partial^{\pm}$ et $(\partial+\omega_0)^{-1}$ doivent s'interpréter dans le modèle convolutif $\mathcal{R}$, où ils équivalent à la multiplication par $(-\zeta)^{\pm 1}$ et $(-\zeta+\omega_0)^{-1}$.

Le seul point un peu délicat est la convergence de l'opérateur (3.6.5bis) appliqué à un ψ quelconque. Cette convergence peut s'établir soit par un calcul direct soit, sans calculs, en observant que $D_-^{-1}\psi = H^{-1}\partial^{-1}H\;\psi$ avec $H(z) = \exp\sum_i \frac{\omega_i}{1+\alpha_i}\, z^{1+\alpha_i}$ et que $H(z)$ est résurgente en z puisque $1+\alpha_i<1$.

Restreignons-nous maintenant au modèle formel. Prenons des α_i toujours soumis aux inégalités $\alpha_1 > \dots > \alpha_\nu > -1$ mais supposons-les rationnels :

(2.6.6) $$\alpha_1,\dots,\alpha_\nu \in p^{-1}\mathbb{Z} \qquad (p\in\mathbb{N}^*)$$

Lemme 2.6.2 (Prosolutions et rétrosolutions)

Si la fonction résurgente ψ possède un modèle formel du type ;

(2.6.7) $$\psi(z) = \sum_\sigma \alpha_\sigma\, z^{-\sigma} \qquad (\sigma\in\sigma_0+p^{-1}\mathbb{Z}\,;\ \sigma_0 \text{ irrationnel})$$

alors l'équation $D\varphi=\psi$ possède une unique solution résurgente qui soit de la même forme :

(2.6.8) $$\varphi(z) = \sum_\sigma \beta_\sigma\, z^{-\sigma} \qquad (\sigma\in\sigma_0+p^{-1}\mathbb{Z}\,;\ \text{même } \sigma_0)$$

Lorsque $\alpha_1 \geqslant 0$ cette solution est donnée par :

(2.6.9) $\varphi = D_{pro}^{-1}\,\psi$ = <u>prosolution</u>

avec

(2.6.9bis)
$$\left\{\begin{aligned} D_{pro}^{-1} &= \left\{1+\sum_{i=2}^{\nu}\frac{\omega_i}{\omega_1}\,z^{\alpha_i-\alpha_1}+\frac{1}{\omega_1}\,z^{-\alpha_1}\partial\right\}^{-1}\left(\omega_1 z^{\alpha_1}\right)^{-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\omega_1)^{-n}\left[\sum_{i=2}^{\nu}\omega_i\,z^{\alpha_i-\alpha_1}+z^{-\alpha_1}\partial\right]^n\left(\omega_1 z^{\alpha_1}\right)^{-1}\end{aligned}\right.$$

et lorsque $\alpha_1 < 0$ elle est donnée par :

(2.6.10) $\varphi = D_{retro}^{-1}\,\psi$ = <u>rétrosolution</u> (*)

(2.6.10bis)
$$\left\{\begin{aligned} D_{retro}^{-1} &= \partial^{-1}\left\{1+\sum_{i=1}^{\nu}\omega_i\,z^{\alpha_i}\partial^{-1}\right\}^{-1}\\ &= \partial^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{i=1}^{\nu}\omega_i\,z^{\alpha_i}\partial^{-1}\right)^n\end{aligned}\right.$$

Il faut donc tantôt prorésoudre, tantôt rétrorésoudre l'équation (2.6.2) pour obtenir les solutions résurgentes. On adopte cette terminologie parce que, pour un ψ "polynomial", c'est-à-dire avec un nombre fini de coefficients α_σ non nuls, la prosolution admet un développement <u>prograde</u> (β_σ nul pour σ négatif et grand) tandis que la rétrosolution admet un développement <u>rétrograde</u> (β_σ nul pour σ positif et grand). Bien entendu, lorsque ψ est bigrade, chaque β_σ s'exprime comme somme infinie de coefficients α_σ mais les lemmes 3.1 et 3.2 nous <u>garantissent</u> que ces sommes convergent toujours.

<u>Lemme 2.6.3.</u> <u>(Dérivation étrangère et échange pro-rétro)</u>

Soit ω dans $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de $\log z$) et $\dot\omega$ sa projection sur $\mathbb{C}$. On a alors :

(2.6.11) $$\Delta_\omega\; D = (D-\dot\omega)\,\Delta_\omega$$

Il en résulte en particulier, dans le cas $0>\alpha_1>\ldots\;\alpha_\nu>-1$ et en se plaçant dans le modèle formel :

(*) C'est la <u>rétrosolution absolue</u>. Voir Appendice 1, p.586.

$$\text{(2.6.12)}\qquad \Delta_\omega \, D^{-1}_{retro}\, \psi = (D-\dot\omega)^{-1}_{pro}\, \Delta_\omega \psi$$

$$\text{(2.6.13)}\qquad \Delta_\omega (D+\dot\omega)^{-1}_{pro}\, \psi = D^{-1}_{retro}\, \Delta_\omega \psi + c_0 \exp - \sum_i \frac{\omega_i}{1+\alpha_i} z^{1+\alpha_i}$$

pour une constante c_0 bien déterminée.

Il faut bien saisir ce que signifient ces relations, surtout la dernière. Prenons par exemple ψ telle que :

$$\text{(2.6.14)}\qquad \hat{\Psi}(\zeta) = (\zeta-\omega)^{-1-\sigma_0} \qquad \text{(\underline{modèle additif} ; } \Psi = \underline{\text{mineur}}\text{)}$$

Alors ψ est <u>prograde</u> et son unique dérivée étrangère, qui vaut :

$$\text{(2.6.15)}\qquad \Delta_\omega \psi(z) = c\, z^{\sigma_0} \quad \text{avec} \quad c = \left(e^{-2\pi i \sigma_0} - 1\right) \Gamma(-\sigma_0) \qquad \text{(\underline{modèle formel})}$$

est également <u>prograde</u>. La prosolution φ de l'équation

$$\text{(2.6.16)}\qquad (D+\omega)\, \varphi = \psi \qquad \left(\text{pour } 0 > \alpha_1 > \dots \alpha_\nu > -1\right)$$

est elle aussi <u>prograde</u> et résurgente d'après le lemme 2.6.2. Toutefois la formule (2.6.13) nous dit que la dérivée étrangère $\Delta_\omega \varphi$ est <u>rétrograde</u>. Autrement dit, <u>du prograde pur peut déboucher sur du rétrograde</u>. Cette remarque donne la clef de tous les problèmes à plusieurs niveaux.

SECTION 2.7 : SYSTEMES DIFFERENTIELS A PLUSIEURS NIVEAUX. INTEGRALE FORMELLE DE NIVEAU p ET INVARIANTS HOLOMORPHES.

Tout au long de cette section nous considérerons des systèmes différentiels analytiques à plusieurs niveaux. Nous les supposerons à multiplicateurs λ_i non résonnants (hypothèse (2.5.13)), ce qui permet de se les donner sous forme préparée (2.5.14). Nous supposerons également les τ_i rationnellement indépendants :

$$\text{(2.7.1)}\qquad \left(n_0 + n\, \tau_1 + \dots n_\nu \tau_\nu = 0 \text{ et } n_i \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow (n_i = 0)$$

et nous ajouterons l'hypothèse (2.5.28) sur les termes affines. Ces trois hypothèses simplificatrices, de nature et d'importance très inégales, seront levées à la fin de cette section.

<u>Proposition 2.7.1</u> (<u>Existence et unicité de l'intégrale formelle de niveau</u> p)

A tout niveau p effectivement atteint par le système (2.5.14) correspond une intégrale formelle $x(z_p, u)$ résurgente en z_p et du type :

(2.7.2) $$x_i(z_p, u) = \sum_{\|n\| \geq 1} u^n \, z_p^{[n]} \, \varphi_i^n(z_p) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

avec $u^n = u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu}$, avec $z_p^{[n]}$ comme en (2.5.30) et avec des composantes φ_i^n résurgentes en z_p et développables sous la forme :

(2.7.3) $$\varphi_i^n(z_p) = \sum_{-\infty < q < \infty} c_{i,q}^n \, z_p^{-q/p} \qquad (c_{i,q}^n \in \mathbb{C})$$

Cette intégrale formelle de niveau p est unique modulo une dilatation $u_i \mapsto c_i u_i$ des paramètres et elle est donnée par la formule :

(2.7.4) $$\varphi_i^{n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_\nu}(z_p) = h_i^{n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_\nu}(z_p) \qquad (n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_\nu \geq 0)$$

où les h_i^n se calculent par récurrence sur $\|n\|$ en <u>prorésolvant</u> l'équation (2.5.32) si $\sum_{p_i \geq p} |n_i| \neq 0$ et en la <u>rétrosolvant</u> si $\sum_{p_i \geq p} |n_i| = 0$. Autrement dit on prend tantôt :

(2.7.5) $$z_p^{[[n]]} \, h_i^n(z_p) = D_{pro}^{-1}\left(z_p^{[[n]]} \cdot K_i^n(z_p) \, \frac{dz_{p_i}}{dz_p} \right)$$

et tantôt

(2.7.6) $$z_p^{[[n]]} \, h_i^n(z_p) = D_{retro}^{-1}\left(z_p^{[[n]]} \, K_i^n(z_p) \, \frac{dz_{p_i}}{dz_p} \right)$$

avec bien sûr $D = D_p^n$.

<u>Remarque</u> : Dire que l'intégrale formelle $x(z_p, u)$ est résurgente signifie simplement que ses composantes $\varphi^n(z_p)$ le sont chacune séparément. Quant aux blocs

élémentaires $\mathfrak{z}^{[n]}$, leur expression (2.5.30) montre qu'ils sont résurgents en z_p si et seulement si $\sum_{p_i \geq p} |n_i| = 0$

Définition 2.7.1 (Réseau de niveau p)

Le "réseau" de niveau p est par définition l'ensemble Ω^p formé des complexes ω de la forme :

(2.7.7) $$\omega = \sum_{p_i = p} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{N})$$

ou de la forme :

(2.7.7bis) $$\omega = -\lambda_{i_0} + \sum_{\substack{p_i = p \\ i \neq i_0}} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{N}\,;\, p_{i_0} = p)$$

On désigne comme d'habitude par Ω^p_p le relevé de Ω^p sur $\mathbb{C}_p$ et par $\omega \longmapsto \dot{\omega}$ la projection naturelle de Ω^p_p sur Ω^p.

Proposition 2.7.2 (Equations de résurgence)

Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir sur $x(z_p, u)$ sont de la forme Δ_ω avec $\omega \in \Omega^p_p$. Si on introduit les dérivations étrangères pointées :

(2.7.8) $$\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega} z_p} \Delta_\omega$$

on a les équations de résurgence :

(2.7.9) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z_p, u) = A_\omega \, x(z_p, u) \qquad (\forall \omega \in \Omega^p_p)$$

où A_ω est un opérateur différentiel ordinaire de la forme :

(2.7.10) $$A_\omega = u^{n(\omega)} \left(\sum_{p_i \geq p} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{p_i < p} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right)$$

avec

(2.7.10bis) $$u^{n(\omega)} = \prod_{p_i = p} u_i^{n_i} \quad \text{si} \quad \dot{\omega} = \sum_{p_i = p} n_i \lambda_i$$

et avec

(2.7.10ter) $$A_\omega^1(u), \ldots, A_\omega^\nu(u) \quad \in \mathbb{C}[[u_i ; (p_i < p)]]$$

Si $\dot{\omega}$ est de la forme (2.7.7), les coefficients $A_\omega^i(u)$ ne sont soumis à aucune contrainte a priori(*). Si au contraire $\dot{\omega}$ est de la forme (2.7.7bis) on a :

(2.7.11) $$A_\omega^i(u) \equiv 0 \quad \text{si} \quad i \neq i_0$$

Pour ces ω très particulièrs (**) seul demeure le coefficient $A_\omega^{i_0}(u)$ qui peut d'ailleurs être quelconque.

Notons dans (2.7.10) la présence côte à côte des $u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ (pour $p_i \geqslant p$) et des $\frac{\partial}{\partial u_i}$ (pour $p_i < p$). Notons aussi que les seuls u_i figurant dans le facteur $u^{n(\omega)}$ correspondent à $p_i = p$ tandis que les seuls u_i figurant dans les coefficients $A_\omega^j(u)$ correspondent à $p_i = p$ (et ceci indépendamment de l'indice j). Par suite, si p est le plus bas niveau du système, les coefficients A_ω^j sont de simples scalaires.

Proposition 2.7.3 (Invariants holomorphes de niveau p)

Les opérateurs A_ω ci-dessus sont des invariants analytiques(***) et holomorphes(****). Ils sont dits invariants de niveau p . En réunissant les invariants relatifs aux différents niveaux, on obtient un système complet et libre d'invariants holomorphes du système différentiel (2.5.14).

(*) En dehors évidemment des "contraintes universelles de croissance". Voir à ce sujet §10.5.

(**) Les opérateurs A_ω avec $\dot{\omega}$ de la forme (2.7.7bis) jouent un rôle à part. On les nomme invariants cruciaux.

(***) Ce sont des invariants relativement à la conjugaison analytique.

(****) Ils sont fonction holomorphe de l'objet, en l'occurence le système (2.5.14) et ses coefficients de Taylor.

En général, les multiplicateurs λ_i de même niveau ne sont pas quasi-résonnants : les combinaisons entières $\sum n_i \lambda_i$ approchent 0 à la vitesse "normale" ou "diophantienne". Les systèmes (2.5.14) ne possèdent alors aucun invariant métaholomorphe. Deux tels systèmes sont donc analytiquement conjuguables dès lors qu'ils le sont formellement et qu'ils possèdent un même système d'invariants holomorphes A_ω.

Remarque 1 : (Mutuelle irréductibilité des intégrales formelles)

Les intégrales relatives aux différents niveaux sont irréductibles les unes aux autres. Il est clair en particulier que l'on ne passe pas de l'intégrale de niveau p à l'intégrale de niveau q en faisant $z_p = z_q^{p/q}$ — sauf bien sûr lorsque tous les invariants analytiques sont nuls, car alors le système (2.5.14) est analytiquement conjugué au système élémentaire (2.5.21), lequel système élémentaire a des intégrales formelles $y_i(z_p, u) = u_i\, z_p^{\langle i \rangle}$ qui s'équivalent toujours selon le changement de variable $z_p = z_q^{p/q}$.

Remarque 2 : (Profacteur et rétrofacteur)

Pour tout niveau p on peut "factoriser" l'intégrale formelle :

$$x(z_p, u) = \vec{h}\left(z_p, \overleftarrow{h}(z_p, u)\right) \tag{2.7.12}$$

avec un profacteur $\vec{h}$ (prograde en z_p) et un rétrofacteur $\overleftarrow{h}$ (bigrade en z_p). Le profacteur $\vec{h}$ porte à lui seul toute l'information invariante. Toutefois, lorsqu'on écrit les équations de résurgence qu'il vérifie, on trouve au second membre des termes qui proviennent du rétrofacteur $\overleftarrow{h}$. Le rétrofacteur est donc indissolublement lié au problème. Ceci tient en fin de compte à la relation (2.6.13).

Calculons le profacteur et le rétrofacteur de niveau p pour un système différentiel donné sous forme préparée (2.5.27) et vérifiant l'hypothèse (2.5.28) sur les termes affines. Il existe un changement d'inconnues formel unique(*), résurgent en z_p, purement prograde, de la forme :

(*) à une dilatation près des inconnues.

$$(2.7.13)\quad \begin{cases} x_i = f_i(z_p, \tilde{x}) = \tilde{x}_i + \tilde{x}_i \sum_n f_i^n(z)\, \tilde{x}^n \\ f_i^n(z_p) \equiv 0 \quad si \sum_{p_j \geq p} |n_j| = 0 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad f_i^n(z) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/p}]]$$

et qui conjugue le système initial (2.5.27) à un système intermédiaire, lui aussi unique(*), d'inconnues $\tilde{x}_i$, encore du type (2.5.27), mais avec des coefficients $\tilde{a}_i^n(z_p)$ généralement divergents (quoique progrades) et de la forme :

$$(2.7.14)\quad \tilde{a}_i^n(z_p) = 0 \quad si \sum_{p_j \geq p} |n_j| \neq 0 \quad \Big\| \quad \tilde{a}_i^n(z_p) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/p}]]$$

On peut enfin conjuguer ce système intermédiaire au système élémentaire (2.5.24) par un changement d'inconnues formel unique(*).

$$(2.7.15)\quad \begin{cases} \tilde{x}_i = y_i + y_i \sum_n g_i^n(z_p)\, y^n \\ g_i^n(z_p) \equiv 0 \quad si \sum_{p_j \geq p} |n_j| \neq 0 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad g_i^n(z_p) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/p}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{1/p}]]$$

à coefficients $g_i^n(z_p)$ bigrades en z_p .

Le premier changement de variable livre directement le profacteur :

$$(2.7.16)\quad \vec{h}_i(z_p, u_1, \ldots, u_v) \equiv f_i(z_p, u_1, \ldots, u_v)$$

et le rétrofacteur se calcule à partir du second par la formule

$$(2.7.17)\quad \overleftarrow{h}_i(z_p, u_1, \ldots, u_v) \equiv g_i(z_p, u_1 y_1, \ldots, u_v y_v)$$

où les y_i sont les fonctions de z_p (via les z_{p_i}) qui sont données en (2.5.26).

Dans le cas particulier important où le système différentiel (2.5.27) est factorisable (cela veut dire que sa i-ème équation a un second membre effectivement divisible par x_i , autrement dit que $a_i^n = 0$ si $n_i = -1$) f et g ont une interprétation très simple. En effet, si on note :

(*) à une dilatation près des inconnues.

(2.7.18) $$x_i = k_i(z_p, y) = y_i + y_i \sum k_i^n(z_p)\, y^n$$

le changement d'inconnues résurgent de niveau p qui conjugue directement (2.5.27) au système élémentaire (2.5.24), on a

(2.7.19) $$\begin{cases} \text{pour } \sum_{p_j \geq p} |n_j| \neq 0 \ : \quad f_i^n(z_p) = k_i^n(z_p) \ , \quad g_i^n(z_p) = 0 \\ \text{pour } \sum_{p_j \geq p} |n_j| = 0 \ : \quad f_i^n(z_p) = 0 \ , \quad g_i^n(z_p) = f_i^n(z_p) \end{cases}$$

Le lecteur est invité à calculer les dérivées étrangères du profacteur $\vec{k}$ (d'abord pour des systèmes factorisables, puis quelconques) et à vérifier qu'elles ne sont généralement pas progrades, bien que $\vec{k}$, par construction, le soit toujours.

<u>Remarque 3</u> : (<u>Intégrale de plus bas niveau</u>)

Parmi toutes les intégrales formelles relatives aux différents niveaux, seule l'intégrale de niveau p_v (le plus bas) est <u>prograde</u>. Pour ce dernier niveau, en effet, le rétrofacteur $\overleftarrow{k}$ se réduit à l'identité. Mais il se trouve que dans ce cas les opérateurs A_ω ont des coefficients A_ω^i qui sont de simples scalaires. On voit donc qu'à vouloir se limiter à la seule intégrale prograde, on n'obtiendrait qu'une partie infime de l'information invariante.

<u>Remarque 4</u> : (<u>Intégrale de plus haut niveau</u>)

Soit un niveau p et soit q le niveau immédiatement supérieur à p . A moins que tous les invariants de niveau q ne soient nuls, l'intégrale formelle de niveau p a des composantes $\varphi_i^n(z_p)$ dont les transformées de Borel $\hat{\varphi}_i^n(\zeta_p)$ ont une croissance d'allure :

(2.7.20) $$\exp\left(\text{Cste}\,.\,|\zeta_p|^{q/q-p}\right)$$

Par suite seule l'intégrale de plus haut niveau $(p = p_1)$ a des composantes qui sont toujours de croissance exponentielle. Elle seule possède des <u>modèles sectoriels</u> (transformées de Laplace; voir §1.3) et elle seule fournit des <u>solutions sectorielles</u>

du système (2.5.14). Mais cette intégrale de plus haut niveau se trouve être aussi celle qui a la plus forte partie rétrograde : elle possède le plus "gros" rétrofacteur $\overleftarrow{k}$. Les solutions sectorielles qu'elle fournit sont donc fortement irrégulières pour $t \to 0$. Ceci ne les empêche pas d'exister et d'être calculables par le procédé indiqué.

Remarque 5 : (Systèmes à niveaux tous distincts)

Les résultats revêtent une forme particulièrement simple pour les systèmes à niveaux p_i tous distincts, vu qu'alors les multiplicateurs λ_i sont explicitement données par (2.5.12bis) et que chaque réseau Ω_{p_i} s'identifie à p_i copies de l'ensemble

(2.7.21) $$\{ -\lambda_i , \lambda_i , 2\lambda_i , 3\lambda_i , \ldots \}$$

Remarque 6 : (Systèmes à niveau unique)

Dans le cas opposé où tous les niveaux p_i sont égaux, il n'y a qu'une seule intégrale formelle et celle-ci est prograde. Son réseau de résurgence est très riche, mais chaque opérateur $\mathbb{A}_\omega$, ayant ses coefficients A^i_ω constants, ne porte que ν invariants scalaires : le réseau s'est enrichi, mais les opérateurs se sont appauvris.

Remarque 7 : (La quantité d'invariants fonction "continue" des niveaux)

En fin de compte, les invariants holomorphes d'un système différentiel à plusieurs niveaux forment une famille de scalaires naturellement indexée sur un ensemble du type :

(2.7.22) $$\mathbb{J} = \bigcup_{i=1}^{\nu} q(i)\, \mathbb{N}^i \qquad (q(i) \in \mathbb{N})$$

Le lecteur est invité à écrire cet ensemble $\mathbb{J}$ d'abord pour un système à niveaux multiples, puis pour un système (*) à niveaux tous distincts, mais voisins des

(*) de même dimension ν évidemment.

précédents : il vérifiera que $\mathbb{J}$ varie peu (*) et que par suite la quantité d'invariants reste à peu près constante.

Remarque 8 (Cardinalité fine)

Certes, les ensembles $\mathbb{J}$ ont toujours la même puissance : celle du dénombrable. Il n'empêche - ceux qui ont une prédilection pour les mathématiques constructives le savent bien - qu'il y a "dénombrable et dénombrable". Ainsi les suites complexes indexées sur $\mathbb{N}$ ne sont pour ainsi dire jamais en bijection naturelle avec les suites indexées sur $\mathbb{Z}$ et encore moins avec celles qui sont indexées sur $\mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{Z}^2$. Cela tient évidemment à ce que chacun de ces ensembles possède son ordre interne propre. Ces ordres n'étant pas totaux, on ne peut pas recourir aux nombres ordinaux pour les distinguer. Peut-être vaudrait-il la peine de développer une notion de "cardinalité fine" qui permettrait de les mesurer ? En tout cas, à assimiler purement et simplement les différents $\mathbb{J}$ sous prétexte que tous sont dénombrables, on passerait à côté du remarquable phénomène de la continuité de la "quantité d'invariance" par rapport aux niveaux.

Pour compléter cette section, il nous reste à lever une à une les trois hypothèses restrictives que nous avons faites :

a) Systèmes à partie affine quelconque. (**)

Si on lève l'hypothèse (2.5.28), autrement dit si on admet dans le système (2.5.14) des termes $a_i^n\, x_i\, x^n$ constants en x (pour $\|n\| = -1$) ou linéaires en x (pour $\|n\| = 0$), les h_i^n ne vérifient plus de système récurrent de la forme (2.5.32). A côté des termes h_j^m avec $\|m\| < \|n\|$, le second membre K_i^n fait maintenant intervenir des termes h_j^m avec $\|m\| = \|n\|$ (s'il y a des termes linéaires) ou même $\|m\| = 1 + \|n\|$ (s'il y a des termes constants).

(*) en particulier on a toujours $q(v) = v.p_1 \quad (p_1 = \sup_i p_i)$

(**) Ce cas est repris plus en détail à la fin du livre. Voir Appendice 1, p.586.

Pour rétablir la récurrence, il faut remplacer le système donné (2.5.14) par un système épsilonnisé, obtenu en affectant d'un petit facteur ε chacun des termes $a_i^n\, x_i\, x^n$ qui font difficulté (à savoir les ν termes constants et les ν^2 termes linéaires). On développe ensuite en puissances de ε :

(2.7.23) $$h_i^{n_1,\dots,n_\nu}(z_p) = \sum_{n_0=0}^{\infty} \varepsilon^{n_0}\, h_i^{n_0;n_1,\dots,n_\nu}(z_p)$$

Cette fois-ci les $h_i^{n_0;n}$ vérifient une véritable récurrence :

(2.7.24) $$\left\{\begin{array}{l} D_p^n\left(z_p^{[[n]]}\, h_i^{n_0;n}\right) = z_p^{[[n]]}\cdot\left(K_i^{n_0;n}\right)\cdot\left(dz_{p_i}/dz_p\right) \\ K_i^{n_0;n} \text{ fonction des seuls } h_j^{m_0;m} \text{ pour } m_0<n_0 \end{array}\right.$$

que l'on prorésout quand $\sum_{p_j \geq p} |n_j| > 0$ et que l'on rétrorésout (*) quand $\sum_{p_j \geq p} |n_j| = 0$. On obtient ainsi, via la formule (2.7.4), une intégrale formelle épsilonnisée sous forme d'une série en ε :

(2.7.25) $$x(z_p, u) = \sum_{n=0}^{\infty} x(z_p\,;u\,;m)\ \varepsilon^m$$

série dont chaque coefficient $x(z_p\,;u\,;m)$ est résurgent en z_p et vérifie des équations de résurgence qu'on peut écrire sous forme compacte :

(2.7.26) $$\dot{\Delta}_\omega\ x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega\ x(z_p, u)$$

avec des opérateurs épsilonnisés :

(2.7.27) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{A}_{\omega;m}\ \varepsilon^m$$

Bien entendu (2.7.26) ne signifie rien d'autre que :

(2.7.28) $$\dot{\Delta}_\omega\ x(z_p, u\,;m) = \sum_{m_1+m_2=m} \mathbb{A}_{\omega;m_1}\ x(z_p, u\,;m_2) \quad (\forall m)$$

et ne préjuge aucunement de la sommabilité en ε de (2.7.25) ou (2.7.27). On vérifie

(*) Mais en prenant cette fois-ci des rétrosolutions polarisées. Pour les détails, voir l'Appendice 1, p.586.

toutefois sans trop de peine que le second membre de (2.7.27) converge (*) et livre, pour $\varepsilon = 1$, des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ qui épuisent bien les invariants holomorphes du système différentiel considéré.

Aucune difficulté sérieuse, donc, pour les invariants holomorphes. Il en va autrement de la résolution numérique du système différentiel ou, si l'on préfère, de la construction de ses solutions sectorielles fondamentales au voisinage de la singularité. Cette question s'écartant de l'objet principal du présent ouvrage, nous nous bornons à quelques indications succintes.

D'après la remarque 4 ci-dessus, seule l'intégrale formelle de plus haut niveau, ayant sa transformée de Borel de croissance toujours exponentielle, peut livrer les solutions sectorielles que nous cherchons. L'ennui est que, pour tout niveau p supérieur au plus bas niveau et donc a fortiori pour le plus haut niveau, l'intégrale formelle epsilonnisée (2.7.25) n'est généralement pas sommable en ε directement dans l'espace des fonctions résurgentes en z_p . Pour rétablir la sommabilité, il faut se placer dans un espace un peu plus vaste : celui des fonctions résurgentes stellaires , dont la construction est esquissée en §1.3.g.

Pour mieux cerner ce phénomène, examinons le cas le plus simple où il puisse se rencontrer. (**) Ce cas, c'est celui d'un système à deux niveaux, linéaire par rapport à la variable de niveau supérieur :

$$(2.7.29)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dz_{p_1}}x_1 = \lambda_1 x_1 + \displaystyle\sum_{n_2=0}^{\infty} a^1_{-1,n_2}(z)\, x_2^{n_2} \\ \dfrac{d}{dz_{p_2}}x_2 = \lambda_2 x_2 + \displaystyle\sum_{n_2=-1}^{\infty} a^2_{0,n_2}(z)\, x_2^{1+n_2} \end{array}\right. \quad \left\| \begin{array}{l} a^1_{-1,n_2}(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\} \\ a^2_{0,n_2}(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\} \end{array}\right.$$

(Ici, bien sûr, $p_1 > p_2$ et $z_{p_i} = z^{p_i}$)

Considérons en même temps le système élémentaire auquel (2.7.29) est formellement conjugué :

(*) La méthode consiste à prendre des rétrosolutions polarisées. Elle est exposée à la fin du livre (Voir Appendice 1, p.586). (**) Pour un exposé détaillé et totalement explicite du cas général, voir l'Appendice 1, p.586.

(2.7.30) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dz_{p_1}} y_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dfrac{d}{dz_{p_2}} y_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

ainsi que le système intermédiaire :

(2.7.31) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dz_{p_1}} \tilde{x}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \dfrac{d}{dz_{p_2}} \tilde{x}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 + \sum\limits_{n=-1}^{\infty} a^2_{0,n_2}(z) \; \tilde{x}_2^{\,1+n_2} \end{cases}$$

Pour le <u>niveau</u> p_2 (<u>niveau inférieur</u>) il n'y a aucune difficulté. L'intégrale formelle $x(z_{p_2}, u)$ est prograde en z_{p_2}, avec un réseau de résurgence :

(2.7.32) $$\Omega = \{-\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2, \dots\}$$

et, pour tout $\omega \in \Omega_{p_2}$, elle vérifie l'équation du pont avec des opérateurs invariants :

(2.7.33) $$\mathbb{A}_\omega = u_2^{1+n_2} A_\omega \frac{\partial}{\partial u_2} \qquad \left(A_\omega \in \mathbb{C} \; ; \; \dot{\omega} = n_2 \lambda_2\right)$$

qui contiennent toute l'information invariante de niveau p_2.

Pour le <u>niveau</u> p_1 (<u>niveau supérieur</u>) c'est différent. D'après la théorie générale, toute l'information invariante de niveau p_1 est contenue dans des opérateurs invariants qui ici, du fait de la linéarité en x du système, revêtent nécessairement la forme :

(2.7.34) $$\mathbb{A}_\omega = A_\omega(u_2) \frac{\partial}{\partial u_1} \qquad \left(\dot{\omega} = -\lambda_1 \; ; \; A_\omega(u_2) \in \mathbb{C}[[u_2]]\right)$$

avec un indice ω qui parcourt l'ensemble des p_1 points de $\mathbb{C}_{p_1}$ qui sont situés au-dessus de $-\lambda_1$.

Nous reviendrons un peu plus loins sur le mode de calcul des $\mathbb{A}_\omega$ de niveau

μ_1. Occupons-nous pour l'instant des solutions fondamentales du système (2.7.29). On construit celles-ci en cinq étapes :

(i) On conjuge le système donné (2.7.29) au système intermédiaire (2.7.31) par :

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 + \varphi(z_{\mu_1}, \tilde{x}_2) \\ x_2 = \tilde{x}_2 \end{cases} \tag{2.7.35}$$

avec $\varphi(z_{\mu_1}, \tilde{x}_2)$ résurgente et prograde en z_{μ_1}.

(ii) On conjugue le système intermédiaire (2.7.31) au système élémentaire (2.7.30) par :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = y_1 \\ \tilde{x}_2 = \Psi(z_{\mu_2}, y_2) \end{cases} \tag{2.7.36}$$

avec $\Psi(z_{\mu_2}, y_2)$ résurgente et prograde en z_{μ_2}.

(iii) recourant au procédé (1.3.110) on fabrique à partir de $\Psi(z_{\mu_2}, y_2)$ une fonction $\Psi(z_{\mu_1}, y_2)$ résurgente stellaire (*) en z_{μ_1}.

(iiii) on calcule l'intégrale formelle (résurgente sectoriale) de niveau μ_1 en posant :

$$\begin{cases} x_1(z_{\mu_1}, u_1, u_2) = u_1 e^{\lambda_1 z_{\mu_1}} + \varphi(z_{\mu_1}, u_2 e^{\lambda_2 z_{\mu_1}^{\mu_2/\mu_1}}) \\ x_2(z_{\mu_1}, u_1, u_2) = \Psi(z_{\mu_1}, u_2 e^{\lambda_2 z_1^{\mu_2/\mu_1}}) \end{cases} \tag{2.7.37}$$

(iiiii) on obtient enfin ce que l'on cherche, à savoir les solutions fondamentales du système donné (2.7.29), en prenant les modèles sectoriels de l'intégrale formelle stellaire de niveau μ_1.

(*) Voir §1.3.

On saisit bien sur ce cas combien la construction des invariants holomorphes de niveau p_1 est plus simple que celle des solutions fondamentales. On peut certes calculer les invariants holomorphes en appliquant l'équation du pont à l'intégrale formelle sectoriale que nous venons de construire. Mais on a aussi le choix entre les deux procédés suivants, qui court-circuitent la construction de l'intégrale sectoriale.

(i) Il y a d'abord la méthode indiquée plus haut, qui consiste à construire l'intégrale formelle epsilonnisée (2.7.25) de niveau p_1, à calculer les opérateurs épsilonnisés correspondants $\mathbb{A}_\omega$ à partir de (2.7.26), puis à faire $\varepsilon = 1$.

(ii) Et il y a la méthode, encore plus directe, qui consiste à calculer le profacteur $\vec{h}$ de niveau p_1 à partir de (2.7.35) :

$$\text{(2.7.38)} \qquad \begin{cases} \vec{h}_1(z_{p_1}, u_1, u_2) = u_1 + \varphi(z_{p_1}, u_1) \\ \vec{h}_2(z_{p_1}, u_1, u_2) = u_2 \end{cases}$$

Ce profacteur est une banale fonction de z_{p_1}, prograde et résurgente. Elle vérifie des équations de résurgence :

$$\text{(2.7.39)} \qquad \Delta_\omega \varphi(z_{p_1}, u_2) = A_\omega\left(e^{-\lambda_2 z_{p_1}^{p_2/p_1}} \theta(z_{p_1}, u_2)\right) \quad (\dot{\omega} = -\lambda_1)$$

Ici, les $A_\omega(\dots)$ désignent les même séries formelles d'une variable que celles qui figurent au second membre de (2.7.34). Elles sont déterminées par (2.7.39) et portent toute l'information invariante. Quant à $y_2 = \theta(z_{p_1}, \tilde{x}_2)$, c'est le changement d'inconnue (résurgent et bigrade en z_{p_1}) qui fait passer de la deuxième équation du système élémentaire (2.7.30) à la deuxième équation du système intermédiaire (2.7.31).

On note d'ailleurs que, bien que le changement d'inconnue θ inverse le changement d'inconnue Ψ, qui est résurgent stellaire en z_{p_1}, θ lui-même est une banale fonction résurgente (bigrade) en z_{p_1}. Cela tient à ce que, contrairement à Ψ, θ est solution d'un système linéaire. Il ne pouvait d'ailleurs pas en être autrement : la dérivation étrangère d'une fonction résurgente ordinaire telle que $\varphi(z_{\lambda_1}, u_2)$ ne saurait livrer qu'une fonction résurgente ordinaire (encore qu'on puisse, comme ici, passer du prograde au bigrade) et en aucun cas une fonction résurgente stellaire au sens strict.

Débarassons-nous maintemant des deux dernières hypothèses restrictives que nous avons faites au début de cette section.

b) Cas de τ_i quelconques.

Si on lève l'hypothèse (2.7.1) sur l'incommensurabilité des τ_i , on s'expose, lorsqu'on rétrorésout, à voir apparaître des termes logarithmiques dans les composantes ϕ^n des intégrales formelles. Il faut aussi prendre certaines précautions pour distinguer, dans l'intégrale formelle de niveau p , les composantes ϕ^n et $\phi^{n'}$ dont les indices n et n' coincident jusqu'au niveau p (autrement dit $n_i = n_i'$ pour $p_i \geq p$). A ceci près, rien ne change .

c) Cas de multiplicateurs λ_i résonnants.

Si enfin on lève l'hypothèse (2.5.13) sur l'indépendance des multiplicateurs λ_i de même niveau(*), il faut mettre en oeuvre, relativement à chaque niveau p de multiplicateurs λ_i résonnants, les techniques élaborées aus §§6.5, 6.6, 6.7 pour les systèmes dynamiques à plusieurs degrés de résonance(**).

En présence de résonance virtuelle(***) l'intégrale formelle de niveau p reste unique et seule change (fort peu d'ailleurs) la dépendance en u des opéra-

(*) L'éventuelle résonance de multiplicateurs de niveaux distincts est sans aucune importance.

(**) Il faut prendre garde en effet que le degré de résonance augmente d'une unité quand on traduit un système différentiel en un système dynamique. Voir à ce sujet l'alinéa g du §2.13.

(***) C'est-à-dire quand $\sum n_i \lambda_i = 0$ n'est possible que pour des entiers de signes mixtes.

teurs $\mathcal{A}_\omega$. En présence de résonance positive(*) les changements sont plus sérieux : pour chaque niveau p résonnant il faut, à l'intégrale formelle de la proposition 2.7.1, adjoindre de nouvelles intégrales(**) mutuellement indépendantes mais vérifiant toutes l'équation du point et livrant chacune son cortège d'invariants holomorphes. Le procédé reste entièrement constructif.

SECTION 2.8 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.

Illustrons les résultats généraux sur le cas d'un système linéaire homogène donné sous forme préparée :

$$(2.8.1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{p_i}\, t^{1+p_i} \dfrac{d}{dt} x_i + P_i(t)\, x_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(t)\, x_j = 0 & (1 \le i \le \nu) \\ \text{avec } a_{ij}(t) = o(t^{p_i}) \quad \text{et} \quad P_i(t) = \lambda_i + \ldots \tau_i\, t^{p_i} \end{cases}$$

Supposons pour commencer que les multiplicateurs λ_i de même niveau soient distincts deux à deux et que les τ_i de tous les niveaux soient eux aussi distincts et non entiers(***). Le système (2.8.1) est formellement conjugué à sa forme normale :

$$(2.8.2)\quad \frac{1}{p_i}\, t^{1+p_i} \frac{d}{dt} y_i + P_i(t)\, y_i = 0$$

Introduisons σ_i comme en (2.5.25). Relativement aux temps parallèles (2.5.22) les systèmes (2.8.1) et (2.8.2) s'écrivent

$$(2.8.3)\quad \partial_{p_i} x_i = \left(\tau_i\, z_{p_i}^{-1} + \partial_{p_i} \sigma_i(z_{p_i})\right) x_i + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, x_j$$

$$(2.8.4)\quad \partial_{p_i} y_i = \left(\tau_i\, z_{p_i}^{-1} + \partial_{p_i} \sigma_i(z_{p_i})\right) y_i$$

(*) c'est-à-dire quand on a $\sum n_i \lambda_i = 0$ pour des entiers n_i tous $\geqslant 0$.

(**) autant exactement qu'il existe de couples "graduation, rayon propre". Voir à ce sujet le §6.5.

(***) Grâce à la linéarité ce n'est plus l'indépendance entière des λ_i ou des τ_i qui compte mais le fait qu'ils soient distincts.

Fixons un niveau p et inroduisons l'intégrale formelle $x(z_p, u)$ correspondante. Manifestement :

$$x_i(z_p, u) = \sum_{j=1}^{\nu} u_j \, z_p^{\langle j\rangle} \, \varphi^{\langle ij\rangle}(z_p) \tag{2.8.5}$$

avec

$$z_p^{\langle j\rangle} = z_p^{\tau_j p_j/p} \exp\left(\sigma_j\left(z_p^{p_j/p}\right)\right) \tag{2.8.5bis}$$

$$\varphi^{\langle ij\rangle} \in \mathbb{C}[[z_p^{1/p}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{-1/p}]] \tag{8.8.5ter}$$

Chaque composante $\varphi^{\langle ij\rangle}$ admet un développement

$$\varphi^{\langle ij\rangle}(z_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{\langle ij\rangle}(z_p) \tag{2.8.6}$$

avec

$$\varphi_0^{\langle ij\rangle} \equiv 1 \ \text{si } i=j \text{ et } 0 \text{ si } i \neq j \tag{2.8.7}$$

$$D^{\langle ij\rangle} \varphi_m^{\langle ij\rangle} = -\left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} \, \varphi_{m-1}^{\langle kj\rangle}\right)\left(dz_{p_i} / dz_p\right) \quad (\text{si } m \geq 1) \tag{2.8.8}$$

pour des opérateurs $D^{\langle ij\rangle}$ valant :

$$\left\{\begin{aligned} D^{\langle ij\rangle} &= \partial_p + \lambda_i \frac{d\sigma_i(z_{p_i})}{dz_p} - \lambda_j \frac{d\sigma_i(z_{p_j})}{dz_p} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_p} + \frac{\lambda_i p_i}{p} z_p^{(p_i-p)/p} - \frac{\lambda_j p_j}{p} z_p^{(p_j-p)/p} \left(\text{si } \sigma_i(z_{p_i}) = \lambda_i z_{p_i}\right) \end{aligned}\right. \tag{2.8.9}$$

On a donc une récurrence qui permet de calculer $\varphi_m^{\langle ij\rangle}$ tantôt par simple intégration (quand $i = j$) :

$$\varphi_m^{\langle ij\rangle} = -\int \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} \, \varphi_{m-1}^{\langle ki\rangle}\right)\left(\frac{dz_{p_i}}{dz_p}\right) dz_p \tag{2.8.10}$$

tantôt par les relations (quand $i \neq j$) :

$$\varphi_m^{\langle ij\rangle} = -\left(D_{pro}^{\langle ij\rangle}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} \, \varphi_{m-1}^{\langle kj\rangle}\right)\left(\frac{dz_{p_i}}{dz_p}\right) \ \text{si } \sup(p_i, p_j) \geq p \tag{2.8.11}$$

$$(2.8.12)\qquad \varphi_m^{<ij>} = -\left(D_{retro}^{<ij>}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}\,\varphi_{m-1}^{<kj>}\right)\left(\frac{dz_{p_i}}{dz_p}\right) \quad si\ \sup(p_i,p_j)<p$$

La récurrence, on le voit, entremêle prosolutions et rétrosolutions. (*)

Soit comme d'habitude $\mathbb{C}_p$ la surface de Riemann de $z^{1/p}$ et, pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$ soient $[\omega]_1, [\omega]_2, \dots [\omega]_{p-1}, [\omega]_p$ les p points de $\mathbb{C}_p$ situés au-dessus de ω . D'après (2.8.11) et (2.8.12) les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale $x(z_p, u)$ sont de la forme :

$$(2.8.13)\qquad \Delta_{[\lambda_i-\lambda_j]_q} \qquad pour\ p_i = p_j = p\ \ et\ \ q \le p$$

ou encore (quand il existe des niveaux autres que p) de la forme :

$$(2.8.14)\qquad \Delta_{[\lambda_i]_q}\ \ ou\ \ \Delta_{[-\lambda_i]_q} \qquad pour\ p_i = p\ \ et\ \ q \le p$$

On a bien entendu les équations de résurgence

$$(2.8.15)\qquad \Delta_\omega\, x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z_p, u)$$

mais ici les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ doivent être homogènes de degré 0 en u pour pouvoir préserver la linéarité en u de l'intégrale $x(z_p, u)$. Compte tenu de (2.7.10) et (2.7.11) cela donne :

$$(2.8.16)\begin{cases} A_{[\lambda_i-\lambda_j]_q} = A_{ij}^q\ u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (p_i = p_j = p) \\ A_{[\lambda_i]_q} = \displaystyle\sum_{p_j<p_i} A_{ij}^q\ u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (p = p_i) \\ A_{[-\lambda_j]_q} = \displaystyle\sum_{p_i<p_j} A_{ij}^q\ u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (p = p_j) \end{cases}$$

avec q parcourant $\{1, 2, \dots, p\}$ et avec des scalaires complexes A_{ij}^q a priori quelconques. Les coefficients des $\mathbb{A}_\omega$ sont notés uniformément A_{ij}^q dans les trois cas, mais comme le signe de $p_i - p_j$ est différent (nul, positif, négatif) dans chaque cas, aucune confusion n'est à craindre. Il n'est pas non plus nécessaire d'indiquer de quel niveau provient l'invariant A_{ij}^q car ce niveau vaut nécessairement $p = \sup(p_i, p_j)$. En fin de compte et quelle que soit la configuration des

(*) Les rétrosolutions étant ici polarisées. Voir à la fin du livre l'Appendice 1, p.586.

niveaux μ_i , les invariants analytiques du système linéaire (2.8.1) sont entièrement contenus dans le tableau scalaire :

$$\left\{ A_{ij}^{q} \ ; \ 1 \leq i \neq j \leq \nu \ ; \ 1 \leq q \leq \sup(\mu_i, \mu_j) \right\} \tag{2.8.17}$$

On voit donc qu'un système de niveau μ unique (et grand) possède à peu près la même quantité d'invariants analytiques qu'un système de niveaux μ_i voisins de μ mais tous distincts.

Remarque sur les systèmes affines :

Si au lieu du système linéaire homogène (2.8.1) on considère un système affine

$$\frac{1}{\mu_i} t^{1+\mu_i} \frac{d}{dt} x_i + P_i(t)\, x_i + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(t)\, x_j = a_i(t) \quad (1 \leq i \leq \nu) \tag{2.8.18}$$

les résultats présédents restent en vigueur à condition d'ajouter à chaque intégrale formelle $x(\gamma_\mu, u)$ un terme constant en u et de compléter certains des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ par des termes homogènes de degré −1 en u . D'une façon précise on doit remplacer (2.8.16) par :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{[\lambda_i - \lambda_j]_q} &= 0 + A_{ij}^{q}\, u_j \frac{\partial}{\partial u_j} && (\mu_i = \mu_j = \mu) \\ A_{[\lambda_i]_q} &= 0 + \sum_{\mu_j < \mu_i} A_{ij}^{q}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} && (\mu = \mu_i) \\ A_{[-\lambda_j]_q} &= A_j^{q} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\mu_i < \mu_j} A_{ij}^{q}\, u_j \frac{\partial}{\partial u_j} && (\mu = \mu_j) \end{aligned} \right. \tag{2.8.19}$$

On voit donc qu'au tableau des $\left\{ A_{ij}^{q} \right\}$ vient s'ajouter le tableau des $\left\{ A_j^{q} \right\}$. Ici non plus, on n'a pas besoin de spécifier le niveau dont provient l'invariant A_j^{q} puisque ce niveau est automatiquement p_j .

Remarque sur la nature des solutions :

Même dans le cas affine (i.e. linéaire non homogène) les intégrales formelles ont des composantes qui sont résurgentes(*) au sens ordinaire et jamais au sens stellaire strict, comme on pourrait le craindre d'après l'alinéa(a) à la fin du §2.7 (**). C'est là une simplification notable, propre d'ailleurs à tous les problèmes linéaires(***).

SECTION 2.9 : OPERATEURS DIFFERENTIELS A PLUSIEURS NIVEAUX. OPERATEURS DIVISEURS ET OPERATEURS DIVIDENDES.

Bien que les équations différentielles d'ordre quelconque se ramènent à des systèmes différentiels d'ordre 1, elles méritent une étude directe, à quoi sont consacrées cette section et les deux suivantes. Dans [Ra.1] RAMIS a, par des méthodes géométriques et cohomologiques, étudié les équations différentielles linéaires et notamment le type Gevrey de leurs solutions. Nous traitons ici, par la méthode des fonctions résurgentes, la classification analytique des équations différentielles à plusieurs niveaux. La présente section dégage quelques généralités utiles sur les opérateurs différentiels analytiques, la suivante traite des équations différentielles non linéaires les plus générales, et celle d'après particularise au cas linéaire.

Plaçons-nous d'emblée au voisinage de l'infini et considérons l'opérateur différentiel analytique $\mathcal{D}$ le plus général. Pour des raisons d'homogénéité, il est commode de l'écrire :

(2.9.1) $$\mathcal{D} = \sum_{m=1}^{\nu} \varphi_m(z)\, z^m\, \partial^m \qquad \left(\partial = \frac{\partial}{\partial z}\,,\ \varphi_0 \neq 0\,,\ \varphi_\nu \neq 0\right)$$

avec des φ_m germes de fonctions méromorphes à l'infini, de valuation $v(m)$:

(2.9.1bis) $$\varphi_m(z) = \sum_{n \geq v(m)} a_{m,n}\, z^{-n} \qquad \left(v(m) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}\,;\ a_{m,v(m)} \neq 0\right)$$

(*) progrades pour le plus bas niveau; bigrades pour les autres niveaux.

(**) depuis (2.7.23) jusqu'à (2.7.39)

(***) Ainsi la fonction θ de la formule (2.7.39) était-elle résurgente (bigrade) au sens ordinaire, bien qu'inverse d'une fonction Ψ stellaire stricte.

Définition 2.9.1 (Polygône de Newton et niveaux)

Notons $\mathrm{supp}(D)$ la partie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ formée des points (m,n) tels que $a_{m,n} \neq 0$ et notons $\overline{\mathrm{supp}}\,(D)$ l'intersection de tous les demi-plans d'équation $n \geqslant p\,m + q \quad (p \in \mathbb{Q}^+,\ q \in \mathbb{Q})$ qui contiennent $\mathrm{supp}\,(D)$. La frontière $\mathrm{new}\,(D)$ de $\overline{\mathrm{supp}}\,(D)$ est une ligne polygonale, dite polygône de Newton(*). On note $\mathrm{new}^p(D)$ la partie du polygône qui est de pente p . Le rationnel non-négatif p est dit niveau de D . Sa multiplicité $\theta(p)$ est par définition l'entier qui mesure la projection horizontale de $\mathrm{new}^p(D)$. Comme en (2.5.7) on note $\theta^{\pm}(p)$ le nombre des niveaux strictement supérieurs (inférieurs) comptés avec leur multiplicité :

$$\theta^+(p) = \sum_{q>p} \theta(q) \qquad , \quad \theta^-(p) = \sum_{q<p} \theta(q)$$

Il est commode de noter les niveaux :

(2.9.2) $\qquad p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \cdots\ p_\nu \geqslant 0$

en commençant par les plus élévés et en comptant chacun autant de fois que le réclame sa multiplicité :

$$\theta(p) = \sum_{p_i = p} 1 .$$

Définition 2.9.2 (Multiplicateurs λ_i)

A tout niveau $p > 0$ effectivement atteint on associe un polynôme P_p de degré $\theta(p)$.

(2.9.3) $$P_p(\lambda) = \sum_{(m,n)} a_{m,n}\,(p\,\lambda)^{m-\theta^-(p)} \qquad \left(\theta^-(p) \leq m \leq \theta^-(p)+\theta(p)\right)$$

où (m,n) parcourt l'arête $\mathrm{new}^p(D)$ du polygône de Newton.

De même, si le niveau 0 est atteint, on lui associe le polygône de degré $\theta(0)$:

(*) on la suppose complétée, à droite, par la verticale $(m = \nu\ ,\ n \geqslant v(\nu))$

(2.9.3bis) $$P_0(\lambda) = z^{-\lambda}\left\{\sum_{(m,n)} a_{m,n}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\right\} z^{\lambda} \qquad (0 \le m \le \theta(0))$$

où (m,n) parcourt l'arête $new^{\circ}(D)$.

Les $\theta(p)$ zéros du polynôme $P_p(\lambda)$ sont notés λ_i avec un indice entier i parcourant le segment $]\theta^+(p), \theta^+(p)+\theta(p)]$. Moyennant cette indexation on a :

(2.9.4) $$P_p(\lambda) = c_p \prod_{p_i=p}(\lambda-\lambda_i) \qquad (c_p \in \mathbb{C}^*)$$

<u>Lemme 2.9.1</u> <u>(Solutions formelles et amorces de solutions)</u>

Si les multiplicateurs de même niveau sont tous distincts, l'équation $D\varphi=0$ possède, pour chaque i , une unique solution formelle du type :

(2.9.5) $$\varphi_i(z) = \underline{y}_i(z)\ \underline{\underline{y}}_i(z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}\right) \qquad (1 \le i \le \nu)$$

avec

(2.9.6) $$\underline{y}_i(z) = z^{\tau_i}$$

(2.9.7) $$\underline{\underline{y}}_i(z) = \exp\left(\lambda_i z^p + \lambda_{i,p-1} z^{p-1} + \dots \lambda_{i,1}\right)$$

Le facteur $y_i = \underline{y}_i\ \underline{\underline{y}}_i$ est dit <u>amorce</u> de la solution formelle.

<u>Remarque sur le niveau nul</u> :

Lorsque $p_i = 0$ il faut évidemment prendre $\tau_i = \lambda_i$ et poser :

(2.9.6bis) $$\underline{y}_i(z) = z^{\lambda_i} = z^{\tau_i}$$

(2.9.7bis) $$\underline{\underline{y}}_i(z) = 1$$

Pour le niveau nul, les scalaires $\tau_i = \lambda_i$ ont un double caractère : <u>comme les</u> τ_i , ils servent d'exposants à z et <u>comme les</u> λ_i , ils provoquent, en cas de résonance, les phénomènes propres à la résonance des multiplicateurs(*).

Définition 2.9.3 (Opérateur diviseur et opérateur dividende)

Tout opérateur $\mathcal{D}$ de la forme (2.9.1) s'écrit d'une façon unique :

(2.9.8) $$\mathcal{D} = c\, z^{\alpha} \left(\underline{D} + \underline{\underline{D}} \right)$$

avec

(2.9.9) $$\begin{cases} c \in \mathbb{C}^* , \quad \alpha \in \mathbb{Z} \\ \underline{D} = \sum_{m=0}^{M} b_m\, \partial^m & (b_m \in \mathbb{C},\ b_M = 1) \\ \underline{\underline{D}} = \sum_{m=1}^{\nu} c_m(z)\, \partial^m & (c_m(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\},\ c_m(\infty) = 0) \end{cases}$$

L'opérateur $\underline{D}$ est un polynôme monique en ∂, de valuation $\theta(0)$ et de degré $\theta(0) + \theta(1)$. Ses coefficients sont constants en z. Il est dit opérateur diviseur(**). Le polynôme $\underline{\underline{D}}$ à coefficients variables fait figure de perturbation. Il est dit opérateur dividende.

Pour tout multiindice entier $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ notons $\mathcal{D}^n$ l'opérateur conjugué de $\mathcal{D}$ par $\underline{\underline{y}}^n$:

(2.9.10) $$\mathcal{D}^{n_1, \ldots, n_\nu} = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\underline{\underline{y}}_i(z) \right)^{-n_i} . \mathcal{D} . \prod_{i=1}^{\nu} \left(\underline{\underline{y}}_i(z) \right)^{n_i}$$

et introduisons les temps parallèles :

(2.9.11) $$z_p = z^p , \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial z_p}$$

(*) On verra en fin de section que le résonance (quasirésonance) des λ_i engendre de nouveaux invariants holomorphes (quasiholomorphes) tandis que la résonance des τ_i est un phénomène tout à fait anodin, ne nécéssitant qu'une légère retouche des résultats.

(**) On l'appelle ainsi parce que c'est par lui qu'il faudra diviser pour obtenir les solutions résurgentes.

ainsi que les opérateurs D_p et D_p^n déduits D et D^n par le changement de variables $z \mapsto z_p$:

(2.9.12) $$D(z,\partial) = D_p(z_p,\partial_p) \; ; \; D^n(z,\partial) = D_p^n(z_p,\partial_p)$$

Nous avons encore des décompositions de type (7.8) :

(2.9.13) $$D_p = c_p \, z^{\alpha_p} \left(\underline{D}_p + \underline{\underline{D}}_p\right) \qquad c_p, c_p^n \in \mathbb{C}^*$$

(2.9.14) $$D_p^n = c_p^n \, z^{\alpha_p^n} \left(\underline{D}_p^n + \underline{\underline{D}}_p\right) \qquad \alpha_p, \alpha_p^n \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$$

et nous avons besoin pour la suite de connaître les opérateurs diviseurs $\underline{D}_p$ et $\underline{D}_p^n$:

<u>Lemme 2.9.2</u> <u>(Opérateurs diviseurs; suite)</u>

$$\underline{D}_p = (\partial_p)^{\theta^-(p)} \prod_{p_j=p} (\partial_p - \lambda_i)$$

$$\underline{D}_p^n = \Big(\partial_p + \sum_{p_j=p} n_j\lambda_j\Big)^{\theta^-(p)} \prod_{p_i=p} \Big(\partial_p - \lambda_i + \sum_{p_j=p} n_j\lambda_j\Big) \qquad \text{si } \sum_{p_i>p} |n_i| = 0$$

$$\underline{D}_p^n = \partial_p + \sum_{p_j=p} n_j\lambda_j \qquad \text{si } \sum_{p_i>p} |n_i| = 1$$

$$\underline{D}_p^n = 1 \qquad \text{si } \sum_{p_i>p} |n_i| > 1$$

Dans le cas particulier très important des multiindices $\langle i \rangle$ à coordonnées toutes nulles sauf une :

(2.9.15) $$\langle i \rangle = (0,\ldots,1,\ldots,0) \qquad (i\text{-ème coordonnée égale à } 1)$$

on obtient

<u>Lemme 2.9.2bis</u> <u>(Opérateurs diviseurs; fin)</u>

$$\underline{D}^{\langle j \rangle} = (\partial_p)^{\theta^-(p)} \prod_{p_i=p} (\partial_p - \lambda_i) \qquad \text{si } p_j < p$$

$$\underline{D}_p^{\langle j \rangle} = (\partial_p + \lambda_j) \prod_{p_i=p} (\partial_p - \lambda_i + \lambda_j) \qquad \text{si } p_j = p$$

$$\underline{D}_p^{\langle j \rangle} = \partial_p \qquad \text{si } p_j > p$$

SECTION 2.10 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES A PLUSIEURS NIVEAUX.

Plaçons-nous ici encore au voisinage de l'infini et considérons l'équation différentielle la plus générale :

(2.10.1) $$a(z, x, x', \dots, x^{(\nu)}) = 0 \qquad \left(x = x(z), x' = \frac{d}{dz} x(z) \dots\right)$$

avec b analytique en $z^{-1}, x, x', \dots, x^{(\nu)}$ et la condition $a(\infty, 0, \dots, 0) = 0$ qui exprime la localité. L'équation (2.10.1) peut toujours se mettre sous la forme :

(2.10.2) $$D.x = b(z, x, x', \dots, x^{(\nu)}) \qquad \left(b \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x, x', \dots, x^{(\nu)}\}\right)$$

avec un opérateur D de la forme (2.9.1) et avec un second membre b nul en $(\infty, 0, \dots, 0)$ et sans termes linéaires en x :

(2.10.3) $$b(\infty, 0, \dots, 0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial x} b(z, 0, \dots, 0) = \dots \frac{\partial}{\partial x^{(\nu)}} b(z, 0, \dots, 0) = 0$$

Nous dirons qu'une équation différentielle (2.10.2) est sous forme préparée si on a (2.10.3) et si, pour toute solution formelle

(2.10.4) $$x(z) = \sum_{n \geq n_0} \alpha_n z^{-n}$$

de l'équation on a pour $m = 0, 1, \dots, \nu$:

(2.10.5) $$\frac{\partial}{\partial x^{(m)}} b(z, x(z), x'(z), \dots, x^{(\nu)}(z)) = \theta\left(z^{m - v(m) - \mu_{\nu - m + 1}}\right)$$

avec $v(m)$ et μ_m comme à la section précédente. On pourrait d'ailleurs remplacer uniformément $\mu_{\nu-m+1}$ par $\mu_1 = \sup \mu_i$. La condition (2.10.5) nous assure que D constitue vraiment la "partie principale" de l'équation (2.10.2). En fait, par un changement élémentaire d'inconnue :

(2.10.6) $$x \longmapsto x + \sum_{n = n_0}^{n_1} \alpha_n z^{-n}$$

on peut toujours se ramener à une forme préparée.

Supposons provisoirement que $x(z) \equiv 0$ soit solution formelle de l'équation (2.10.2). Cela équivaut à :

(2.10.7) $$b(z, 0, \dots, 0) = 0$$

et cela assure automatiquement la condition (2.10.5) de préparation. Faisons aussi, jusqu'à spécification du contraire, l'hypothèse (2.5.13) sur la non-résonance des λ_i de même niveau(*) et l'hypothèse (2.7.1) sur l'incommensurabilité de tous les τ_i. Reprenons les notations $\underline{y}_i$ et $\underline{\underline{y}}_i$ du lemme 2.9.1 et posons pour tout multiindice entier $n = (n_1, \dots, n_\nu)$:

(2.10.8) $$z_p^{[n]} = \underline{y}^n \, \underline{\underline{y}}^n = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\underline{y}_i(z_p^{1/p}) \; \underline{\underline{y}}_i(z_p^{1/p}) \right)^{n_i}$$

(2.10.9) $$z_p^{[[n]]} = \underline{y}^n = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\underline{y}_i (z_p^{1/p}) \right)^{n_i}$$

Intorduisons aussi les opérateurs :

(2.10.10) $$D_p^{\langle\langle j \rangle\rangle} = y_j^{-1} . D_p . y_j = z_p^{-\tau_j/p} . D_p^{\langle j \rangle} . z_p^{\tau_j/p} \qquad (1 \leq j \leq \nu)$$

Les opérateurs $D_p^{\langle j \rangle}$ et $D_p^{\langle\langle j \rangle\rangle}$ sont très voisins et possèdent en particulier mêmes opérateurs diviseurs :

(2.10.11) $$D_p^{\langle\langle j \rangle\rangle} = c_{p,j} \, z^{\alpha_{p,j}} \left(\underline{D}_p^{\langle j \rangle} + \underline{\underline{D}}_p^{\langle\langle j \rangle\rangle} \right) \qquad (1 \leq j \leq \nu)$$

De plus, d'après les formules du lemme (2.9.2bis) on a dans tous les cas :

(2.10.12) $$D_p^{\langle j \rangle} . 1 = 0$$

<u>Propositions 2.10.1</u> <u>(Intégrale formelle de niveau p)</u>

Pour chaque niveau $p > 0$ effectivement atteint, l'équation (2.10.2) possède une intégrale formelle $x(z_p, u)$ résurgente en $z_p = z^p$. Celle-ci est unique modulo une dilatation des u_i et s'écrit :

(*) Cette hypothèse implique que les niveaux p sont tous entiers (Voir §2.10.c : résonance intrinsèque). Elle sera levée à la fin de cette section, ainsi que les deux autres hypothèses simplificatrices que nous faisons ici pour alléger l'exposé.

(2.10.13) $$x(z_\mu, u) = \sum_{\|n\| \geq 1} u^n \; z_\mu^{[n]} \; \Phi^n(z_\mu)$$

avec $u^n = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu}$, avec $z_\mu^{[n]}$ comme en (2.10.8) et avec :

$$\Phi^n(z_\mu) \in \mathbb{C}[[z_\mu^{1/\mu}]] \oplus \mathbb{C}[[z_\mu^{-1/\mu}]]$$

Les composantes $\Phi^n(z_\mu)$ se calculent de la manière suivante. Pour la partie linéaire en u , c'est-à-dire pour $\|n\| = 1$, on prend :

(2.10.14) $$\Phi^{\langle i\rangle}(z_\mu) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[-\left(\underline{D}_\mu^{\langle i\rangle}\right)^{-1} \left(\underline{\underline{D}}_\mu^{\langle\langle i\rangle\rangle}\right)\right]^r . \, 1$$

avec les mêmes notations qu'en (2.10.11) et avec l'opérateur diviseur $\underline{D}_\mu^{\langle i\rangle}$ explicité au lemme 2.9.2. (*)

Pour $\|n\| > 1$ on utilise la récurrence :

(2.10.15) $$\Phi^n(z_\mu) = \left(D_\mu^n\right)^{-1} . \; K^n(z_\mu)$$

avec au second membre un K^n fonction des seuls Φ^m d'indice $\|m\| < \|n\|$ et avec :

(2.10.15bis) $$\left(D_\mu^n\right)^{-1} = (1/c_\mu^n) \sum_{r=0}^{\infty} \left[-\left(\underline{\underline{D}}_\mu^n\right) \left(\underline{D}_\mu^n\right)^{-1}\right]^r . \, z^{-\alpha_\mu^n}$$

pour les mêmes notations qu'en (2.9.14) et pour les opérateurs diviseurs $\underline{\underline{D}}_\mu^n$ explicités au lemme 2.9.2. (*)

<u>Proposition 2.10.2</u> <u>(Equation du pont)</u>

L'intégrale formelle de niveau $\mu > 0$ vérifie des équations de résurgence :

(2.10.16) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z, u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z_\mu, u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_\mu^\mu)$$

pour un réseau Ω^μ défini comme en (2.7.7) + (2.7.7bis) et pour des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ de la forme (2.7.10) +(2.7.11).

(*) Il est parfois nécessaire de prendre des <u>rétrosolutions polarisées</u>, même sous l'hypothèse (2.10.7). Les $\mathbb{A}_\omega$ sont alors eux-mêmes polarisés. Pour les formules de passage d'une polarisation à l'autre, voir l'Appendice 1, p.586.

Proposition 2.10.3 (Invariants holomorphes)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes de l'équation (2.10.2). En l'absence de quasi-résonance entre les λ_i (c'est bien sûr le cas générique) ils constituent même un système complet et libre d'invariants analytiques.

Ainsi donc bien que les équations différentielles équivalent à des systèmes différentiels d'ordre 1 d'un type très particulier (elles possèdent " ν fois moins" de coefficients que les systèmes!), leurs invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ sont aussi nombreux et d'une forme aussi générale que ceux des systèmes différentiels.

Notons aussi que, contrairement aux niveaux positifs, le niveau nul, même lorsqu'il est effectivement atteint (i.e. $\theta(0) > 0$) ne livre aucun invariant holomorphe, à moins que ses multiplicateurs λ_i $(p_i = 0)$ ne soient en résonance (voir ci-après).

Pour compléter cette section il nous reste à lever une à une les trois hypothèses restrictives que nous avons faites

a) Le cas où $b(z, 0, \ldots, 0) \neq 0$.

Si on lève l'hypothèse (2.10.7), la série nulle $x(z) = 0$ n'est plus solution de l'équation (2.10.2) et les intégrales formelles $x(z_p, u)$ (*) comportent des termes constants en u . Il faut alors procéder exactement comme à l'alinéa a vers la fin du §2.7. Voir aussi l'Appendice 1, p.586.

Le calcul des invariants holomorphes ne présente pas de difficultés particulières : on affecte d'un petit facteur ε les termes du second membre de l'équation (2.10.2) qui sont constants en x ; on calcule l'intégrale formelle épsilonnisée sous forme (2.7.25); grâce aux équations de résurgence (2.7.28) on en tire les invariants épsilonnisés (2.7.27); puis on fait $\varepsilon = 1$ dans (2.7.27).

(*) Relativement à des rétrosolutions polarisées. Voir Appendice 1, p.586.

Si au contraire on s'intéresse aux solutions fondamentales de l'équation (2.10.2), il faut calculer l'intégrale formelle résurgente stellaire de plus haut niveau en procédant comme en §2.6.a. (Pour un traitement détaillé et totalement explicite, voir l'Appendice 1, en fin de livre, p.586).

b) Le cas de τ_i quelconques.

La levée de l'hypothèse (2.7.1) sur l'incommensurabilité des τ_i entraîne les mêmes conséquences exactement qu'en §2.7.b, c'est-à-dire essentiellement l'apparition de termes logarithmiques dans les composantes des intégrales formelles. A ceci près, rien ne change.

c) Cas de multiplicateurs λ_i résonnants.

La situation est ici un peu plus compliquée que pour les systèmes différentiels résonnants à niveaux entiers (cf. §2.7.c) car les équations différentielles possèdent souvent des niveaux fractionnaires, lesquels induisent automatiquement une résonance de type spécial. Commençons par bien dégager ce fait nouveau.

c-a) Niveaux entiers : résonance virtuelle et résonance positive.

A toute arête de pente entière p du polygône de Newton correspondent des multiplicateurs λ_i qui n'ont aucune raison particulière de résonner. Et quand d'aventure ils résonnent, leur résonance peut être de deux sortes:

(i) positive, si on a des relations $\sum n_i \lambda_i = 0$ avec des n_i tous positifs.

(ii) virtuelle, si on a des relations $\sum n_i \lambda_i = 0$ avec des n_i de signes mixtes et si ces relations ne sont pas engendrables à partir des relations de résonance positive.

c-b) Niveaux fractionnaires : résonance intrinsèque et résonance extrinsèque.

Supposons, comme il arrive souvent, que le polygône de Newton possède une arête de pente fractionnaire $p = p'/p''$ avec p'/p'' irréductible. Les multiplicateurs λ_i de niveau p sont racines du polynôme $P_p(\lambda)$ qui d'après (2.9.3) est en réalité un polynôme en $\lambda^{p''}$. Il s'ensuit que tout multiplicateur λ_j de niveau p est automatiquement en résonance avec les multiplicateurs $\lambda_j\, e^{2\pi i k/p''}$ pour $k = 1,2,\dots,p''-1$. On a en effet :

$$\sum_{k=0}^{p''-1} \lambda_j\, e^{2\pi i k/p''} = 0 \tag{2.10.17}$$

et plus généralement, pour tout diviseur p''' de p'' :

$$\sum_{k=0}^{p''/p'''-1} \lambda_j\, e^{2\pi i k p'''/p''} = 0 \tag{2.10.18}$$

Les multiplicateurs λ_j d'un niveau fractionnaire peuvent donc présenter deux sortes de résonance :

(i) intrinsèque, c'est-à-dire du type (2.10.17) ou (2.10.18) ou déduisible de ces relations.

(ii) extrinsèque, c'est-à-dire indépendante des relations (2.10.17) et (2.10.18).

La résonance intrinsèque est évidemment générique et la résonance extrinsèque, exceptionnelle. Quant à la résonance virtuelle, elle est exclue ici : en effet, toute relation de résonance $\sum n_i \lambda_i = 0$ avec des n_i de signes mixtes peut, après addition d'un nombre suffisant de relations intrinsèques (2.10.17), se mettre sous la forme $\sum n_i' \lambda_i = 0$ avec des n_i' tous positifs. Ainsi donc, la dichotomie "résonance positive, résonance virtuelle" fait place ici à une dichotomie "résonance intrinsèque, résonance extrinsèque". Nous retrouverons une situation analogue beaucoup plus loin, au chapitre 8, lorsque nous classerons les objets (champs de vecteurs et difféos) isochores ou hamiltoniens.

c-c) Intégrale formelle de niveau p.

Ecrivons les différents niveaux de l'équation (2.10.2) sous forme de fractions irréductibles $p_i = p_i'/p_i''$ et notons p_* le plus petit commun multiples des dénominateurs p_i'' . Fixons ensuite un niveau particulier $p = p'/p''$. L'intégrale formelle $x(z_p, u)$ de niveau p est encore définissable et calculable comme à la proposition 2.10.1. Elle est encore résurgente en z_p et bigrade (ou prograde si p est le plus bas niveau). Mais cette fois-ci ses composantes ϕ^n appartiennent à

$$\mathbb{C}[[z_p^{-1/pp_*}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{1/pp_*}]]$$

et non plus à

$$\mathbb{C}[[z_p^{-1/p}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{1/p}]]$$

<u>c-d)</u> <u>Amorces de solutions formelles et réseau de niveau p</u> .

On introduit comme au lemme 2.9.1 les amorces de solutions formelles, mais avec des notations légèrement différentes.

(2.10.19) $$y_i = z^{\tau_i} \exp\Big(\sum_{\substack{0<q\leq p_i \\ q\in(1/p_i'')\mathbb{N}}} \lambda_{i,q}\, z^q \Big) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

<u>Proposition 2.10.4</u> <u>(réseau de résurgence)</u>

Dans le cas le plus général, le réseau de résurgence Ω^p de niveau p est l'ensemble des ω de $\mathbb{C}^*$ qui peuvent s'écrire sous la forme :

(2.10.20) $$\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_{i,p}$$

avec des entiers n_i tous <u>positifs ou nuls</u> (sauf au plus un, qui peut valoir -1) et <u>orthogonaux aux</u> $\lambda_{i,q}$ <u>antérieurs</u> :

(2.10.21) $$0 = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_{i,q} \qquad (\text{pour tout } q > p)$$

<u>c-e)</u> <u>Equation du pont et invariants holomorphes.</u>

<u>Proposition 2.10.5</u> <u>(Equation du pont et invariants holomorphes)</u>.

L'intégrale formelle de niveau p vérifie les équations de résurgence :

(2.10.22) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z_p, u)$$

pour tout ω appartenant à l'ensemble $\Omega^p_{pp_*}$ qui relève le réseau Ω^p sur $\mathbb{C}_{pp_*}$ (surface de Riemann de z^{1/pp_*}) . Les $\mathbb{A}_\omega$ sont des opérateurs différentiels en les u_i . Ensemble, ils constituent un système complet d'invariants holomorphes de niveau p . Ils sont de la forme :

(2.10.23) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\nu} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

avec un facteur $u^{n(\omega)}$ qui ne fait intervenir que les paramètres de niveau p :

(2.10.23bis) $$u^{n(\omega)} = \prod_i u_i^{n_i} \quad si \quad \omega = \sum_{p_i = p} n_i \lambda_{i,p}$$

et avec des coefficients $A^i_\omega(u)$ qui sont des éléments de $\mathbb{C}[[u]]$ ne comportant que des termes "p-homogènes de degré ω ". Cela veut dire que chacun de ces coefficients est de la forme :

(2.10.23ter) $$A^i_\omega(u) = \sum_n \gamma^i_{\omega; n_1, \dots, n_\nu} u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \quad (\gamma^i_{\omega;n} \in \mathbb{C})$$

avec

(2.10.23quarto) $$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1} n_i \lambda_{i,p} = \omega \\ \sum_{i=1} n_i \lambda_{i,q} = 0 \quad si \quad q > p \end{array} \right.$$

Le lecteur vérifiera, compte tenu de (2.10.23, bis-quarto), que les opérateurs invariants (2.10.23) revêtent bien la forme usuelle (2.7.10) lorsque les multiplicateurs ne sont pas résonnants.

c-f) Etoile $\star$ et contraintes a priori.

Ici apparaît une nouveauté supplémentaire : l'existence, induite par la résonance intrinsèque, de contraintes a priori sur les invariants holomorphes. Pour exprimer commodément ces contraintes, il est commode d'introduire une "étoile" $\star$

et de la faire opérer sur les intégrales formelles :

(2.10.24)
$$\left\{\begin{array}{l} \bigstar\ x(z_p, u_1, \ldots, u_\nu) = x(z_p', u_1', \ldots, u_\nu') \\ \text{avec} \left\{\begin{array}{ll} z_p' = R\, z_p & (R = \text{rotation d'un tour positif sur } \mathbb{C}_\infty) \\ u_i' = u_{\sigma(i)} \quad \text{ou} & \lambda_{p,\sigma(i)} = e^{2\pi i/p_i''}\,\lambda_{p,i} \end{array}\right.\end{array}\right.$$

ainsi que sur les opérateurs invariants :

(2.10.25)
$$\left\{\begin{array}{l} \bigstar\ \mathbb{A}_\omega\left(u_i, \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \mathbb{A}_{\omega'}\left(u_i', \frac{\partial}{\partial u_i'}\right) \\ \text{avec} \left\{\begin{array}{l} \omega' = R'\,\omega \\ u_i' = u_{\sigma(i)} \quad \text{avec} \quad \sigma(i) \text{ comme en } (2.10.24) \end{array}\right.\end{array}\right.$$

Or l'équation (2.10.2) ne comporte dans ses coefficients que des puissances entières de z^{-1}. On en tire aussitôt.

(2.10.26)
$$\varphi^{<i>}(R.z_p) = \varphi^{<\sigma(i)>}(z_p)$$

Par suite :

(2.10.27)
$$\bigstar\left(\sum_i u_i\, z^{<i>}\, \varphi^{<i>}(z_p)\right) = \sum_i u_i\, z^{<i>}\, \varphi^{<i>}(z_p)$$

Se reportant au mode de construction (par récurrence sur $\|n\|$) des composantes de l'intégrale formelle, on voit que la relation de stabilité (2.10.27) s'étend à $x(z_p, u)$ toute entière et, ipso facto, aux invariants $\mathbb{A}_\omega$ qu'elle détermine. On peut donc énoncer :

<u>Proposition 2.10.6</u> (<u>Contraintes a priori</u>)

L'étoile $\bigstar$ laisse inchangés les intégrales formelles et les invariants holomorphes :

(2.10.28)
$$\bigstar\ x(z_p, u) = x(z_p, u)$$

(2.10.29) $$\star\, \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega$$

Avec les relations d'homogénéité (2.10.23ter+quarto) et les contraintes universelles de croissance (cf. §9.6) les relations (2.10.29) sont les seules contraintes a priori auxquelles soient asujettis les invariants holomorphes.

Corollaire de la proposition 2.10.6 (Continuité de la quantité d'information invariante par rapport aux niveaux).

Les contraintes a priori font qu'il suffit de connaître les $\mathbb{A}_\omega$ pour un indice ω parcourant Ω^k_p , cet ensemble Ω^k_p désignant n'importe quelle "tranche" de $\Omega^k_{pp_*}$ contenue dans un secteur d'angle $2\pi p$ (*)

Ainsi donc, pour tout niveau p , même fractionnaire, il suffit de faire parcourir à ω un ensemble Ω^k_p qui est exactement "p fois plus gros" que Ω^k (ce qui a un sens, compte tenu des symétries radiales que la résonance intrinsèque impose à Ω^k).

Ceci apporte une confirmation éclatante au principe de continuité de la quantité d'information invariante par rapport aux niveaux. Soit par exemple un opérateur différentiel D , du type (2.9.1), dont le polygône de Newton possède une arête unique, de pente p entière. Si cette arête est très longue (i.e. si la multiplicité $\theta(p)$ du niveau p est très grande) on peut toujours trouver un opérateur D' , voisin de D , mais dont le polygône de Newton possède, au lieu de l'arête de pente entière p , deux arêtes de pentes p_1 et p_2 très voisines de p ($p_1 < p < p_2$) mais aussi "très fractionnaires", autrement dit de la forme :

(*) C'est-à-dire dans un secteur de la forme :

$$\{\theta_0 \le \arg \omega < \theta_0 + 2\pi p\}$$

Rappelons que $\Omega^k_{pp_*}$ est situé sur $\mathbb{C}_{pp_*}$, surface de Riemann de z^{1/pp_*}

(2.10.30) $\quad p_1 = p_1' / p_1''$, $p_2 = p_2' / p_2''$ (irréductibles)

avec des dénominateurs p_1'' et p_2'' possédant un plus petit commun multiple p_* énorme. En l'absence de relations a priori, les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ de l'équation différentielle générale (2.10.2) de "partie-principale" D' seraient indexées sur les réseaux très riches $\Omega^{p_1}_{p_1 p_*}$ et $\Omega^{p_2}_{p_2 p_*}$. Ils seraient donc incomparablement plus nombreux que les invariants de l'équation différentielle (2.10.2) de "partie principale" D , lesquels sont indexés sur le réseau Ω^p_p . Mais les contraintes a priori (2.10.29) empêchent une telle discontinuité : le passage de D à D' ne s'accompagne que d'une infime modification de la masse invariante totale.

Nous rencontrerons un phénomène analogue (à savoir des contraintes a priori, facilement descriptibles au moyen d'une étoile $\ast$) au chapitre 7, lorsque nous classerons les difféos à torsion de $\mathbb{C}^\nu$ (voir §7.5).

c-g) Aperçu sur l'arborescence. Polygône de Newton principal et polygônes de Newton parasites.

Si un multiplicateur λ_i (de niveau p_i) est multiple de multiplicité n , on est en présence de résonance virtuelle. Au multiplicateur λ_i correspondent alors n amorces y_i de solutions formelles (cf. lemma 2.9.1) qui ne diffèrent entre elles que par les $\lambda_{i,q}$ de niveau inférieur ($q < p_i$) . Pour calculer ces $\lambda_{i,q}$ il faut construire le polygône de Newton de l'opérateur $D^{[i]} = e^{\lambda_i z^{p_i}} . D . e^{-\lambda_i z^{p_i}}$
Ce polygône est en quelque sorte un polygône de Newton secondaire, ou parasite, directement attaché au multiplicateur multiple λ_i . S'il existe de nouveaux multiplicateurs multiples de niveau inférieur, eux aussi possèdent "leurs" polygônes de Newton parasites, et ainsi de suite. ON A DONC UNE ARBORESCENCE DE POLYGONES DE NEWTON. Toutefois, appliquant les règles(2.10.20) et (2.10.21) de formation du réseau Ω^p de niveau p , le lecteur vérifiera que LES POLYGONES PARASITES JOUENT UN RÔLE TRES DIFFERENT DU POLYGONE PRINCIPAL et qu'ILS CONTRIBUENT BEAUCOUP MOINS QUE LUI AUX RESEAUX Ω^p . La seule exception est LE CAS DES EQUATIONS LINEAIRES HOMOGENES :

pour celles-ci, LES POLYGONES DE NEWTON SONT TOUS SUR LE MEME PLAN.

Illustrons cela sur un exemple simple. Considérons l'équation différentielle générale (2.10.2) avec au premier membre un opérateur D de la forme :

$$D = (\partial-\lambda_1)^2 (\partial-\lambda_2)^2 + z^{-1} Q(\partial) \qquad \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \neq \lambda_2 , \partial = \partial/\partial z \\ Q(\lambda_1) \neq 0 \neq Q(\lambda_2) \end{array}\right) \tag{2.10.31}$$

pour un polynôme $Q(\partial)$ de degré 4 ne s'annulent ni en λ_1 ni en λ_2 . Fixons des déterminations de $\sqrt{Q(\lambda_1)}$ et $\sqrt{Q(\lambda_2)}$ et posons :

$$\lambda_1' = 2 \frac{\sqrt{Q(\lambda_1)}}{\lambda_1-\lambda_2} , \quad \lambda_2' = 2 \frac{\sqrt{Q(\lambda_2)}}{\lambda_2-\lambda_1} \tag{2.10.32}$$

<u>Si</u> $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, le polygône de Newton principal n'a qu'une seule arête, de pente $\mu = 1$. A chacun des multiplicateurs doubles λ_1 et λ_2 est attaché un polygône parasite, de pente 1 et 1/2. On a les amorces de solutions formelles :

$$y_1 = z^{\tau_i} \exp\left(\lambda_{i,1} z + \lambda_{i,1/2} z^{1/2}\right) \qquad (i=1,2,3,4) \tag{2.10.33}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_{1,1} = \lambda_1 & ; & \lambda_{1,1/2} = \lambda_1' \\ \lambda_{2,1} = \lambda_1 & ; & \lambda_{2,1/2} = -\lambda_1' \\ \lambda_{3,1} = \lambda_2 & ; & \lambda_{3,1/2} = \lambda_2' \\ \lambda_{4,1} = \lambda_2 & ; & \lambda_{3,1/2} = -\lambda_2' \end{array}\right. \tag{2.10.34}$$

Compte tenu de la règle (2.10.20) + (2.10.21) les seules susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1 sont de la forme :

$$\omega = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 \qquad \text{avec } n_1, n_2 \geqslant -1 \text{ et } n_1+n_2 \geqslant 0 \tag{2.10.35}$$

et les seules Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1/2 sont de la forme :

(2.10.36) $\quad \omega = \pm 2\lambda_1' \quad$ ou $\quad \omega = \pm 2\lambda_2'$

Les deux polygônes parasites (attachés à λ_1 et λ_2) sont donc chacun sur le même plan, mais leur importance est bien moindre que celui du polygône principal.

Si maintenant $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, le polygône de Newton principal a deux arêtes, de pentes 1 et 1/2, et au multiplicateur double λ_2 est attaché un polygône de Newton parasite, dont les pentes sont aussi 1 et 1/2, mais qui va jouer un rôle très différent du polygône principal.

Les amorces de solutions formelles sont toujours données par les formules (2.10.33) et (2.10.34) mais avec maintenant $\lambda_1 = 0$. Compte tenu de la règle (2.10.20) + (2.10.21), les seules Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1 sont de la forme

(2.10.37) $\quad \omega = n_2 \lambda_2 \quad$ avec $\quad n_2 = -1, 1, 2, 3, \ldots$

et les seules Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1/2 sont de la forme :

(2.10.37bis) $\omega = n_1 \lambda_1' + n_2 \lambda_2' \quad$ avec $\quad n_1 \in \mathbb{Z}$ et $n_2 \in \{-2, 0, 2\}$

On voit donc que le polygône parasite joue un rôle bien moindre que le polygône principal : le multiplicateur λ_2' (de niveau 1/2) associé au polygône parasite ne contribue au réseau $\Omega^{1/2}$ (de niveau 1/2) que par ses multiples $2\lambda_2'$ et $-2\lambda_2'$ tandis que le multiplicateur λ_1' (de niveau 1/2) associé au polygône principal, y contribue par tous ses multiples entiers $n_1 \lambda_1'$.

Si toutefois on considère l'équation <u>linéaire homogène</u> $D.x = 0$, on doit appliquer la règle (2.10.20) + (2.10.21) avec des n_i tels que $\sum_{i=1}^{\nu} n_i = 0$. Cela veut dire que les n_i sont tous nuls, sauf un qui vaut 1 et un autre qui vaut -1 . Il en résulte que les seules Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1/2 correspondent à des indices ω de la forme (2.10.36) et ceci non seulement dans le cas $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, ce qui était déjà vrai, mais aussi dans le cas $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, ce qui est nouveau.

On voit donc que dans le cas d'équations linéaires homogènes, et dans ce cas seul, les divers polygônes de Newton sont d'égale importance. Pour les équations générales il existe un polygône principal, qui prime tous les autres.

c-h) Cas de niveau nul résonnant.

Rappelons que, paradoxalement, les multiplicateurs λ_i de niveau nul ($\rho_i = 0$) coincident avec les τ_i de même indice. Lorsque ces multiplicateurs résonnent (entre eux ou avec le nombre 1) on dit qu'on est en présence de résonance de niveau nul. L'équation (2.10.2) possède alors une intégrale formelle de niveau 0, de la forme :

(2.10.38) $$x\,(z_{0,1}, u) \quad \text{avec} \quad z_{0,1} = \log z$$

et cette intégrale est résurgente en $z_{0,1}$ avec un réseau de résurgence engendré par les λ_i de niveau 0. L'exemple le plus simple est fourni par l'équation (2.10.2) avec au premier membre un opérateur de la forme :

(2.10.39) $$D = \gamma z^{-1} + \partial \qquad\qquad (\partial = \partial/\partial_z \ , \ \gamma \in \mathbb{Q}^+)$$

On calcule alors les invariants holomorphes de niveau 0 à partir de l'équation du pont appliquée à l'intégrale formelle de niveau 0. On peut aussi préférer la méthode qui consiste à transformer l'équation différentielle de degré ν en un système dynamique à $\nu+1$ inconnues (cf. §2.13 et chapitre 6)

SECTION 2.11 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.

Illustrons nos résultats sur le cas linéaire. Considérons donc les équations linéaires homogène et non-homogène de degré ν :

(2.11.1) $$D \,.\, x(z) = 0$$

(2.11.2) $$\mathcal{D} . x(z) = b(z) \qquad (b(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\})$$

pour l'opérateur différentiel le plus général à coefficients méromorphes à l'infini, c'est-à-dire avec $\mathcal{D}$ comme en (2.9.1). Supposons d'abord les distincts et irrationnels. Supposons aussi les différences $\lambda_i - \lambda_j$ toutes distinctes pour $p_i = p_j$.

Proposition 2.11.1 (Intégrale formelle)

Pour tout niveau $p > 0$ effectivement atteint, l'équation homogène (2.11.1) possède une unique intégrale formelle résurgente en z_p :

(2.11.3) $$x(z_p, u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z_p^{<i>} \, \varphi^{<i>}(z_p)$$

avec

(2.11.4) $$z_p^{<i>} = y_i = z_p^{\tau_i/p} \exp\left(\lambda_i \, z_p^{p_i/p} + \sum_{q=1}^{p_i-1} \lambda_{i,q} \, z_p^{q/p}\right)$$

et avec $\varphi^{<i>}(z_p)$ comme en (2.10.14). Pareillement, l'équation inhomogène (2.11.2) possède pour intégrale formelle de niveau p :

(2.11.5) $$x(z_p, u) = \varphi(z) + \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z_p^{<i>} \, \varphi^{<i>}(z_p)$$

avec $z_p^{<i>}$ et $\varphi^{<i>}$ comme précédemment et avec φ donné par :

(2.11.6) $$\varphi(z_p) = \mathcal{D}_p^{-1} . \, b(z_p^{-1/p})$$

avec

(2.11.7) $$\mathcal{D}_p^{-1} = (1/c_p) \, \underline{D}_p^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \underline{\underline{D}}_p \, \underline{D}_p^{-1} \right]^n z^{-\alpha_p}$$

les notations étant bien sûr les mêmes qu'en (2.9.13).

Comme d'habitude, quand on dit que l'intégrale formelle est résurgente, on entend par là que chacune de ses composantes l'est séparément, sans préjuger de la nature des blocs élémentaires $z_p^{[n]}$. Ici les formules (2.11.4) montrent que les blocs $z_p^{<i>}$ ne sont résurgents que pour $p_i < p$ (*). Les équations (2.11.1) et (2.11.2) possèdent donc chacune exactement $\theta^-(p)$ solutions indépendantes qui soient résurgentes en $z_p = z^p$.

Proposition 2.11.2 (Equation du pont)

Les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle $x(z_p, u)$ de l'équation linéaire (homogène ou inhomogène) sont de la forme

(2.11.8) $$\Delta_{[\lambda_i]_q} \text{ ou } \Delta_{[-\lambda_i]_q} \quad \text{pour } p_i = p_j = p \text{ et } i \neq j \quad (^*)$$

ou de la forme :

(2.11.9) $$\Delta_{[\lambda_i]_q} \text{ ou } \Delta_{[-\lambda_i]_q} \quad \text{pour } p_i = p \quad (^{**})$$

et on a les équations de résurgence :

(2.11.10) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega \cdot x(z_p, u)$$

pour des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ de la forme (2.8.16) dans le cas homogène et de la forme (2.8.19) dans le cas inhomogène (affine).

Composante par composante, cela donne :

(2.11.11) $$\begin{cases} \dot{\Delta}_{[\lambda_i - \lambda_j]_q} \, \varphi^{<i>}(z_p) = A^q_{ij} \, \varphi^{<j>}(z_p) \; z_p^{<j>}/z_p^{<i>} & (p_i = p_j = p) \\ \dot{\Delta}_{[\lambda_i]_q} \, \varphi^{<i>}(z_p) = \displaystyle\sum_{p_j < p_i = p} A^q_{ij} \, \varphi^{<j>}(z_p) \; z_p^{<j>}/z_p^{<i>} \\ \dot{\Delta}_{[-\lambda_j]_q} \, \varphi^{<i>}(z_p) = \begin{cases} A^q_{ij} \, \varphi^{<j>}(z_p) \; z_p^{<j>}/z_p^{<i>} & \text{si } p_i < p_j = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

(*) En effet la fonction $\varphi(z) = e^{z^\alpha}$ (modèle formel) n'est résurgente en z que si $\alpha < 1$.

(**) on reprend les notations $[\omega]_1, \ldots, [\omega]_p$ du §2.8 pour désigner les p points de $\mathbb{C}_p$ qui sont au-dessus de ω.

avec en plus, dans le cas inhomogène (affine) :

$$\dot{\Delta}_{[-\lambda_j]_q} \, \phi^{\circ}(z_p) = \begin{cases} A^q_j \quad \phi^{<j>}(z_p) \; z_p^{<j>} / z_p^{<i>} & \text{si } p_j = p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.11.12}$$

Comme les invariants holomorphes de l'équation homogène sont évidemment ceux de l'opérateur $\mathcal{D}$ lui-même, on peut énoncer :

Proposition 2.11.3 (Invariants analytiques des opérateurs différentiels)

Le tableau $\{A^q_{ij}\}$ donné en (2.8.17) constitue un système complet et libre d'invariants holomorphes (et analytiques) de l'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ à plusieurs niveaux.

Il ne reste plus qu'à lever les deux hypothèses restrictives que nous avons faites au début de cette section :

a) Lorsque les τ_i ou leurs différences $\tau_i - \tau_j$ ne sont plus tous irrationnels, il faut prendre certaines précautions pour distinguer les composantes des intégrales formelles.

b) Lorsque les λ_i de niveau ou leurs différences $\lambda_i - \lambda_j$ ne sont plus tous distincts, il faut appliquer la méthode du §2.10.c mais avec des simplifications considérables tenant au faut que la règle (2.10.20) + (2.10.21) de formation du réseau Ω^p de niveau p ne met plus en oeuvre que des n_i tous nuls, sauf deux qui valent 1 et -1. Rappelons aussi (cf. §2.10.c) qu'en présence de multiplicateurs multiples $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots \lambda_{i+n-1}$ il faut envisager plusieurs polygônes de Newton et que ceux-ci (c'est exceptionnel et cela tient à la linéarité) sont tous sur le même plan.

SECTION 2.12 : CALCUL EXPLICITE DES INVARIANTS HOLOMORPHES. NOTION DE REPRESENTANT CANONIQUE.

Raisonnons sur le cas le plus simple, celui des systèmes différentiels analytiques de niveau 1 et à multiplicateurs λ_i non résonnants. Soit un tel système donné sous forme préparée :

$$\frac{d}{dz} x_i = \left(\lambda_i + \tau_i z^{-1}\right) x_i + x_i \sum_{\binom{n_i \geq -1}{n_j \geq 0}} B^i_n(z)\, x^n \qquad \left(B^i_n(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}\right) \tag{2.12.1}$$

et soit le système élémentaire auquel il est formellement conjugué :

$$\frac{d}{dz} y_i = \left(\lambda_i + \tau_i z^{-1}\right) y_i \tag{2.12.2}$$

Posons :

$$B^i_n(z) = \sum_{m \geq 0} B^{i,m}_n z^{-m} \qquad \left(B^{i,m}_n \in \mathbb{C}\right) \tag{2.12.3}$$

et notons comme d'habitude Ω le réseau de résurgence du système (2.12.1) engendré par les multiplicateurs λ_i selon les formules (2.2.8) et (2.2.8bis). Considérons aussi l'application :

$$\tau : \Omega \to \mathbb{C} \; ; \quad \omega = n_1\lambda_1 + \dots n_\nu\lambda_\nu \mapsto \tau(\omega) = n_1\tau_1 + \dots n_\nu\tau_\nu \tag{2.12.4}$$

A tout ω de Ω et à tout complexe σ de la forme $\sigma(\omega) - m$ $(m \in \mathbb{N})$ associons l'opérateur :

$$\mathbb{B}^\sigma_\omega = u^n \sum_{i=1}^{\nu} B^{i,m}_n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad \begin{cases} \omega = \sum n_i \lambda_i \\ \sigma = \sum \tau_i \lambda_i - m \\ u^n = \prod u_i^{n_i} \end{cases} \tag{2.12.5}$$

Puis introduisons les opérateurs formels :

$$\Theta = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{\binom{\omega_i \in \Omega}{\sigma_i \in \tau(\omega_i) - \mathbb{N}}} e^{(\omega_1 + \dots \omega_r) z}\, \mathcal{V}^{\omega_1, \dots, \omega_r}_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}\, \mathbb{B}^{\sigma_r}_{\omega_r} \dots \mathbb{B}^{\sigma_1}_{\omega_1} \quad (*) \tag{2.12.6}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\binom{\omega_i \in \Omega}{\sigma_i \in \tau(\omega_i) - \mathbb{N}}} e^{(\omega_1 + \dots \omega_r) z}\, \mathcal{V}^{\omega_1, \dots, \omega_r}_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}\, \mathbb{B}^{\sigma_1}_{\omega_1} \dots \mathbb{B}^{\sigma_r}_{\omega_r} \quad (*) \tag{2.12.7}$$

(*) Attention à l'ordre des facteurs $\mathbb{B}^{\sigma_i}_{\omega_i}$

fabriqués avec les moules des formules (1.4.88) et (1.4.89). Ce sont des automorphismes formels, formellement inverses l'un de l'autre :

(2.12.8) $$\Theta\,(\varphi.\psi) \equiv (\Theta\varphi).(\Theta\psi),\quad \Theta^{-1}(\varphi.\psi)\equiv(\Theta^{-1}\varphi).(\Theta^{-1}\psi),\quad \Theta^{-1}\Theta = 1$$

Ils vont d'abord nous servir à calculer explicitement l'intégrale formelle du système (2.12.1) :

<u>Proposition 2.12.1</u> <u>(Intégrale formelle)</u>

L'intégrale formelle

(2.12.9) $$x_i(z,u) = \sum u^n\, z^{[n]}\, \varphi_i^n(z) \qquad \left(z^{[n]} = e^{(\sum n_i\lambda_i)z}\, z^{(\sum n_i\tau_i)}\right)$$

du système (2.12.1) s'exprime à partir de l'intégrale formelle

(2.12.10) $$y_i(z,u) = u_i\, e^{\lambda_i z}\, z^{\tau_i} \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

du système élémentaire (2.12.2) au moyen des formules :

(2.12.11) $$x_i(z,u) = \Theta^{-1}.\, y_i(z,u) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

La formule (2.12.11) ne présente aucune difficulté d'interprétation ou de convergence, vu que pour tout z^{-m}, seuls un nombre fini de termes contribuent au monômes z^{-m}. Voir à ce sujet les formules (1.4.86). Les opérateurs Θ et Θ^{-1} permettent aussi d'exprimer les invariantes holomorphes du système (2.12.1) ainsi que les changements d'inconnues (direct et inverse) qui font passer de (2.12.1) à (2.12.2) :

<u>Proposition 2.12.2</u> <u>(Changements d'inconnues normalisant)</u>

Les changements d'inconnues formels :

(2.12.12) $$y_i \mapsto x_i = h_i(z,y) = y_i + y_i \sum_{\|n\| \geq -1} h_i^n(z)\, y^n \qquad \left(h_i^n(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]\right)$$

(2.12.13) $$x_i \longmapsto y_i = k_i(z,x) = x_i + x_i \sum_{\|n\|\geq -1} k_i^n(z)\, x^n \quad \left(k_i^n(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]\right)$$

qui font passer de (2.12.1) à (2.12.2) sont donnés par les formules :

(2.12.14) $$h_i^n(z) = \text{coéfficient de } u_i u^n \text{ dans } \left(\Theta^{-1}.\, u_i\right)$$

(2.12.15) $$k_i^n(z) = \text{coéfficient de } u_i u^n \text{ dans } \left(\Theta .\, u_i\right)$$

<u>Proposition 2.12.3</u> <u>(Invariants holomorphes)</u>

Les invariants holomorphes :

(2.12.16) $$\mathbb{A}_\omega = u^n \sum_{i=1}^{\nu} A_\omega^i \quad u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

du système (2.12.1) s'expriment à partir des opérateurs $\mathbb{B}_\omega^\tau$ qui regroupent les coefficients de ce système, au moyen des formules équivalentes :

(2.12.17) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega \\ \tau_i \in \tau(\omega_i)-\mathbb{N}}} V_{\tau_1,\dots,\tau_r}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \, \mathbb{B}_{\omega_1}^{\tau_1} \dots \mathbb{B}_{\omega_r}^{\tau_r}$$

(2.12.17bis) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega \\ \tau_i \in \tau(\omega_i)-\mathbb{N}}} V_{\tau_1,\dots,\tau_r}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \left[\left[\mathbb{B}_{\omega_1}^{\tau_1}, \mathbb{B}_{\omega_2}^{\tau_2}\right] \dots \mathbb{B}_{\omega_r}^{\tau_r}\right]$$

Examinons de plus près le cas particulièrement simple où les τ_i sont tous nuls et où chaque série $B_n^i(z)$ se réduit à un seul monôme $z^{-q-1} B_n^{i,q+1}$ pour une puissance $-(q+1)$ indépendante de n et i . Le système (2.12.1) s'écrit alors :

(2.12.18) $$\frac{d}{dz} x_i = \lambda_i x_i + z^{-q-1} x_i \sum_{\|n\|\geq -1} B_n^i . x^n \qquad \left(B_n^i \in \mathbb{C}\right)$$

et on peut omettre l'indice supérieur τ dans les opérateurs $\mathbb{B}_\omega^\tau$:

(2.12.19) $$\mathbb{B}_\omega = u^n \sum_{i=1}^{\nu} B_n^i \qquad \left(u^n = \prod u_i^{n_i} \text{ si } \omega = \sum n_i \lambda_i\right)$$

Les opérateurs $\textcircled{H}$ et $\textcircled{H}^{-1}$ s'obtiennent alors par simple sommation en les ω_i :

$$(2.12.20) \quad \textcircled{H} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{\omega_i \in \Omega} e^{(\omega_1 + \dots \omega_r) z}\, \mathcal{V}_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, \mathbb{B}_{\omega_r} \dots \mathbb{B}_{\omega_1}$$

$$(2.12.21) \quad \textcircled{H}^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \Omega} e^{(\omega_1 + \dots \omega_r) z}\, \mathcal{V}_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, \mathbb{B}_{\omega_1} \dots \mathbb{B}_{\omega_r}$$

avec les moules q-canoniques $\mathcal{V}_q^{\bullet}$ des formules (1.4.54) et (1.4.57). Pareillement, les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ du système (2.12.18) sont donnés par les formules :

$$(2.12.22) \quad \begin{cases} \mathbb{A}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_1 + \dots \omega_r = \omega} V_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, \mathbb{B}_{\omega_1} \dots \mathbb{B}_{\omega_r} \\ \phantom{\mathbb{A}_\omega} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\omega_1 + \dots \omega_r = \omega} V_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, [[\mathbb{B}_{\omega_1}, \mathbb{B}_{\omega_2}] \dots \mathbb{B}_{\omega_r}] \end{cases}$$

qui s'inversent formellement selon :

$$(2.12.23) \quad \begin{cases} \mathbb{B}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_1 + \dots \omega_r = \omega} U_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, \mathbb{A}_{\omega_1} \dots \mathbb{A}_{\omega_r} \\ \phantom{\mathbb{B}_\omega} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\omega_1 + \dots \omega_r = \omega} U_q^{\omega_1, \dots, \omega_r}\, [[\mathbb{A}_{\omega_1}, \mathbb{A}_{\omega_2}] \dots \mathbb{A}_{\omega_r}] \end{cases}$$

où $U_q^{\bullet}$ et $V_q^{\bullet}$ désignent les moules scalaires alternaux q-canoniques des formules (1.4.44) et (1.4.45) pour $\mathcal{H}^{\bullet} = I^{\bullet} z^{-1-q}$

Comparant (2.12.16) à (2.12.19) et (2.12.22) à (2.12.23) on est frappé par la parfaite symétrie formelle entre la famille (indexée sur Ω) des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ qui sont de <u>véritables invariants holomorphes</u> et la famille (également indexée sur Ω) des opérateurs $\mathbb{B}_\omega$, qui regroupent les coefficients du système différentiel q-canonique (2.12.18) et qu'on qualifie de <u>coinvariants</u> parce qu'ils ne sont que "<u>localement invariants</u>", c'est-à-dire invariants seulement par rapport à des transformations analytiques proches de l'identité.

Cette symétrie remarquable entre les $\mathbb{A}_\omega$ et les $\mathbb{B}_\omega$ suggère de rechercher, dans chaque classe analytique de systèmes différentiels (2.12.1), des représentants q-canoniques de la forme (2.12.18) et en particulier des représentants 0-canoniques. C'est le problème de la <u>synthèse canonique</u>, qui sort du cadre de cet ouvrage, mais qui sera examiné brièvement aux §§11.2 et 11.3. On sera conduit à distinguer le cas <u>sesquilatéral</u> (invariants cruciaux $\mathbb{A}_{-\lambda_i}$ non nuls) et le cas <u>unilatéral</u> ($\mathbb{A}_{-\lambda_i} = 0$). On verra en gros que, pour q-fixé, une classe sesquilatérale possède une infinité de représentants q-canoniques. Une classe sesquilatérale au contraire, ne possède presque jamais de représentant q-canonique analytique, mais elle a toujours un représentant q-canonique "formel" ou "extérieur" aux propriétés de résurgence extraordinairement intéressantes.

Pour finir, nous allons concrétiser les énoncés de cette section dans deux cas particuliers remarquables : le cas à une dimension ($\nu = 1$) et le cas linéaire (pour ν quelconque).

<u>Le cas à une dimension (non linéaire)</u>

Il n'y a alors qu'une seule inconnue $x_1 = x$, un seul paramètre $u_1 = u$, un seul multiplicateur $\lambda_1 = \lambda$ et un seul $\tau_1 = \tau$. Supposons pour fixer les idées que $\lambda = 1$ et $\tau = 0$ et considérons l'équation :

$$\frac{d}{dz} x = x + z^{-1-q} \left\{ B_{-1} + B_1 x^2 + B_2 x^3 + B_3 x^4 + \dots \right\} \left(B_n \in \mathbb{C} \right) \tag{2.12.24}$$

Le réseau de résurgence est de la forme :

$$\Omega = \{-1, 1, 2, 3, \dots\} \tag{2.12.25}$$

et on a une famille d'opérateurs coinvariants :

$$\left\{ \mathbb{B}_n = B_n \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \; ; \; n \in \Omega \; ; \; B_n \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.12.26}$$

à laquelle correspond une famille d'opérateurs invariants :

$$\left\{ \mathbb{A}_n = A_n \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \; ; \; n \in \Omega \; ; \; A_n \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.12.27}$$

selon la formule (2.12.22), qui se traduit ici par des relations scalaires :

(2.12.28) $$A_n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n_1+\dots n_r = n} B_{n_1} \dots B_{n_r} \Gamma_{[n_1,\dots,n_r]} V_q^{n_1,\dots,n_r}$$

avec

(2.12.29) $$\Gamma_{[n_1,\dots,n_r]} = (n_1 - n_2)(n_1+n_2-n_3)\dots(n_1+\dots+n_{r-1}-n_r)$$

On note que le second membre de (2.12.28) comporte un nombre infini (resp. fini) de termes si le coinvariant "crucial" B_{-1} est $\neq 0$ (resp. $=0$). Bien sûr, l'application $B_n \mapsto A_n$ s'inverse formellement en permutant les A_n et les B_n dans (2.12.28) et en y remplaçant le moule $V_q^{\bullet}$ par le moule inverse $U_q^{\bullet}$. Pour l'inversion effective, et non plus formelle, de (2.12.28), voir les §§11.2 et 11.3.

Le cas linéaire (pour une dimension V quelconque).

Soit le système linéaire

(2.12.30) $$\frac{d}{dz} x_i = \lambda_i x_i + z^{-1-q} \sum_{j\neq i}^{V} x_i B_{j,i} \qquad (1 \leq i \leq v, B_{j,i} \in \mathbb{C})$$

On a un seul niveau $p=1$ et un réseau de résurgence Ω réduit aux points ω de la forme :

(2.12.31) $$\omega = \lambda_i - \lambda_j \qquad (1 \leq i \neq j \leq v)$$

A la famille des opérateurs coinvariants :

(2.12.32) $$\left\{ \mathbb{B}_{\lambda_i - \lambda_j} = B_{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} , B_{i,j} \in \mathbb{C} \;;\; 1 \leq i \neq j \leq v \right\}$$

correspond une famille d'opérateurs invariants :

(2.12.33) $$\left\{ \mathbb{A}_{\lambda_i - \lambda_j} = A_{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} , A_{i,j} \in \mathbb{C} \;;\; 1 \leq i \neq j \leq v \right\}$$

selon la formule (2.12.22) qui se traduit ici par les relations scalaires :

$$A_{i,j} = \sum_{i_1,\dots,i_r} B_{i,i_1} B_{i_1,i_2} B_{i_2,i_3} \dots B_{i_{r-1},i_r} B_{i_r,j} V^{\lambda_i-\lambda_{i_1},\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2},\dots,\lambda_{i_r}-\lambda_j} \tag{2.12.34}$$

On note que la somme $\sum$ de (2.12.34) est finie si la matrice $[B_{i,j}]$ est triangulaire. Bien sûr, l'application $A_{i,j} \mapsto B_{i,j}$ s'inverse formellement en permutant les $A_{i,j}^{\bullet}$ et les $B_{i,j}^{\bullet}$ dans (2.12.34) et en y remplaçant le moule $V_q^{\bullet}$ par le moule inverse $U_q^{\bullet}$. Pour l'inversion effective, et non plus formelle, de (2.12.34), voir les §§11.2 et 11.3.

Le lecteur est également invité à jeter un coup d'oeil au §11.5 où l'on étudie les <u>déformations isorésurgentes</u>, c'est-à-dire les déformations qui changent le réseau de résurgence sans changer les invariants holomorphes. Il constatera alors que les classiques équations aux dérivées partielles vérifiées par les $B_{i,j}^{\bullet}$ (considérées comme fonction des λ_i et des $A_{i,j}^{\bullet}$) se généralisent à <u>toutes les transformations isorésurgentes</u>, y compris celles qui affectent des objets non linéaires.

Répétons, pour conclure, que le recours aux formules explicites de cette section (et à celles qui les généralisent) ne s'impose que lorsqu'on veut <u>soit</u> calculer d'un seul coup les invariants holomorphes d'un grand nombre d'objets (de même type) <u>soit</u> étudier en détail la nature de leur dépendance par rapport à l'objet. Lorsqu'il s'agit simplement de calculer les invariants holomorphes d'<u>un</u> objet donné, le plus simple, et de loin, est d'appliquer l'équation du pont. Celle-ci détermine complètement les invariants holomorphes et même les surdétermine, ce qui permet de vérifier les résultats numériques obtenus. Pour faire la vérification en question, on écrit l'équation du pont dans le modèle convolutif(*) :

$$\dot{\Delta}_\omega \, \mathfrak{x}(\zeta, u) = \mathbb{A}_\omega \, \mathfrak{x}(\zeta, u) \tag{2.12.35}$$

et on prend plusieurs valeurs distinctes de ζ.

(*) Cela veut dire qu'on soumet à la transformation de Borel les composantes ϕ^n de l'intégrale formelle, mais bien sûr pas les blocs $\mathfrak{z}^{[n]}$, qu'on doit traiter comme de purs symboles.

SECTION 2.13 : RECAPITULATION. RAPPORTS ENTRE EQUATIONS DIFFERENTIELLES, SYSTEMES DIFFERENTIELS, SYSTEMES DYNAMIQUES, CHAMPS DE VECTEURS.

Nous avons vu que les équations ou systèmes différentiels possédaient des intégrales formelles (uniques et progrades pour les problèmes à niveau unique, multiples et bigrades pour les problèmes à plusieurs niveaux) qui sont résurgentes, vérifient l'équation du pont et livrent, constructivement et explicitement, la totalité des invariants holomorphes. Il nous reste, en guise de conclusion, à préciser les relations entre les équations ou systèmes différentiels, objets de ce chapitre, et les systèmes dynamiques ou champs de vecteurs, objets des chapitres 4 et 6[(*)].

Rappelons d'abord comment on passe de chacune de ces catégories à la suivante, en nous limitant, pour plus de clarté, à des objets de niveau unique p = 1.

L'équation différentielle générale de niveau 1, donnée sous forme préparée[(**)]

$$(2.13.1) \qquad \sum_{m=0}^{\nu} (\alpha_m + \beta_m z^{-1})\, x^{(m)}(z) = b(z, x, x', \dots, x^{(\nu)}) \qquad \left(b \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x, x', \dots, x^{(\nu)}\}\right)$$

avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\alpha_\nu \neq 0$, peut facilement se mettre sous la forme :

$$(2.13.2) \qquad \sum_{m=0}^{\nu} (\alpha_m + \beta_m z^{-1})\, x^{(m)}(z) = \tilde{b}(z, x, x', \dots, x^{(\nu-1)}) \qquad \left(\tilde{b} \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x, x', \dots, x^{(\nu-1)}\}\right)$$

avec un second membre ne dépendant pas explicitement de $x^{(\nu)}$. Un changement d'inconnues :

$$(2.13.3) \qquad x_1 = x \;,\; x_2 = x' \;,\; x_3 = x'' , \dots , x_\nu = x^{(\nu-1)}$$

transforme alors l'équation (2.13.2) en un système différentiel[(***)] de niveau 1, mais d'une forme très particulière :

(*) Pour les relations entre équations différentielles et équations aux différences, voir §3.11.

(**) Voir §2.2.

(***) D'ordre 1. Cela est toujours sous-entendu quand on parle de systèmes différentiels.

(2.13.4) $$\begin{cases} \frac{d}{dz} x_1 = x_2 , \quad \frac{d}{dz} x_2 = x_3 , \dots , \quad \frac{d}{dz} x_{v-1} = x_v , \\ \frac{d}{dz} x_v = - \sum_{i=0}^{v-1} \frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1}}{\alpha_v + \beta_v z^{-1}} x_{i+1} + \frac{1}{\alpha_v + \beta_v z^{-1}} \tilde{b}(z, x_1, \dots, x_v) \end{cases}$$

Enfin, un changement d'inconnues linéaire $x_i \longmapsto y_i$ du type :

(2.13.5) $$x_m = \sum_{i=1}^{v} \left(\lambda_i^{m-1} + (m-1) \lambda_i^{m-2} \tau_i z^{-1} + \dots \right) y_i \qquad (1 \leq m \leq v)$$

met ce système sous une forme préparée :

(2.13.6) $$\frac{d}{dz} y_i = (\lambda_i + \tau_i z^{-1}) y_i + Q_i(z, x_1, \dots, x_v) \qquad (**)$$

qui est elle aussi très particulière puisque les Q_i sont tous déduisibles les uns des autres. Ainsi, lorsque les τ_i sont tous nuls, on doit effectuer le changement d'inconnue :

(2.13.7) $$x_m = \sum_{i=1}^{v} \lambda_i^{m-1} y_i$$

et on aboutit au système préparé :

(2.13.8) $$\frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i + \gamma_i \frac{1}{\alpha_v} \tilde{b}(z, x_1, \dots, x_v)$$

avec $\gamma_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}$

Considérons maintenant le système différentiel de niveau 1 le plus général, toujours sous forme préparée :

(2.13.9) $$\frac{d}{dz} x_i = (\lambda_i + z^{-1} \tau_i) x_i + Q_i(z, x) \qquad (1 \leq i \leq v)$$

Un changement de variable $x_{v+1} = z^{-1}$ le transforme en système dynamique à $v+1$ dimensions :

(*) Les λ_i et τ_i sont définis comme en §2.2.

$$(2.13.10)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\, x_i = X_i(x) & (1 \leq i \leq \nu+1) \\ \text{avec } X_{\nu+1}(x) = -x_{\nu+1}^2 \quad \text{et } X_i = x_i\,(\lambda_i + \tau_i\, x_{\nu+1}) + \ldots \quad \text{si } 1 \leq i \leq \nu \end{cases}$$

Enfin, la donnée du système dynamique local le plus général :

$$(2.13.11)\qquad \frac{d}{dz}\, x_i = X_i(x) \qquad \left(X_i(0) = 0 \,,\ X_i \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_\nu\} \right)$$

équivaut à la donnée du champ de vecteurs local :

$$(2.13.12)\qquad X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Enumérons maintenant les principales analogies et différences entre ces quatre catégories d'objets.

a) L'équation différentielle (2.13.1), comme équation différentielle, possède un nombre énorme d'invariants formels. Toutefois, le système correspondant (2.13.4), comme système différentiel, n'en possède qu'un nombre fini, à savoir les λ_i et les τ_i .

b) Cette disparité s'efface quand on passe aux invariants holomorphes. En effet, l'équation différentielle (2.13.1) possède, relativement aux changements d'inconnue analytiques :

$$x \mapsto h(z, x) \qquad \left(h(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x\} \right)$$

exactement autant d'invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ que le système différentiel correspondant (2.13.9) relativement aux changements d'inconnues analytiques infiniment plus nombreux :

$$x_i \longmapsto h_i(z, x_1, \ldots, x_\nu) \qquad \left(i = 1, \ldots, \nu \,;\ h_i(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x\} \right)$$

auquel on peut le soumettre.

c) De plus, bien que le système différentiel général (2.13.9) possède " ν fois plus" de coefficients (cardinalité fine!) que le système (2.13.4) issu d'une équation différentielle, les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ d'une équation différentielle ne sont astreints à aucune contrainte supplémentaire. Il en résulte que dans chaque classe analytique de systèmes différentiels généraux (2.13.6) on peut trouver un représentant qui soit de la forme (2.13.8) ou, si l'on préfère, de la forme (2.13.4) et qui, par conséquent, représente une équation différentielle.

d) Des considérations immédiates de "cardinalité fine"(*) interdisent de chercher, dans une classe analytique d'équations différentielles (2.13.1), des représentants q-canoniques de la forme :

$$(2.13.13)\quad \begin{cases} \sum_{m=0}^{\nu} (\alpha_m + \beta_m z^{-1})\, y^{(m)} = z^{-1-q} \sum_n B_n\, y^n \\ B_n \in \mathbb{C}\ ,\ y^n = (y)^{n_0} (y')^{n_1} \cdots (y^{(\nu-1)})^{n_{\nu-1}} \end{cases}$$

analogues aux représentants q-canoniques

$$(2.13.14)\quad \begin{cases} \frac{d}{dz} y_i = (\lambda_i + \tau_i z^{-1})\, y_i + z^{-1-q}\, x_i \sum_n B_n^i\, y^n \\ B_n^i \in \mathbb{C}\ ,\ y^n = y_1^{n_1} \cdots y_\nu^{n_\nu} \end{cases}$$

des systèmes différentiels. Dans le cas des équations différentielles il faut, pour disposer d'un nombre suffisant de paramètres, envisager les représentants $(q_1,\dots,q_\nu)$-canoniques de la forme :

$$(2.13.15)\quad \begin{cases} \sum_{m=0}^{\nu} (\alpha_m + \beta_m z^{-1})\, y^{(m)} = \sum_{i=1}^{\nu} z^{-1-q_i} \sum_n B_n^i\, y^n \\ q_1 < q_2 < \cdots q_\nu\ ;\ B_n^i \in \mathbb{C}\ ;\ y^n = (y)^{n_0} (y')^{n_1} \cdots (y^{(\nu-1)})^{n_{\nu-1}} \end{cases}$$

Comparons maintenant, en anticipant quelque peu sur la suite de l'ouvrage, les systèmes différentiels aux systèmes dynamiques.

e) Une première différence tient en ceci : les intégrales formelles des systèmes différentiels ont des composantes $\varphi^n(z)$ qui sont des séries entières en z^{-1}

(*) cf. §2.7, remarque 8.

(ou en $z^{-1/p}$ pour les problèmes de niveau p , avec éventuellement une partie retrograde s'il y a plusieurs niveaux) tandis que les intégrales formelles des systèmes dynamiques ont des composantes $\phi(\mathfrak{z})$ qui sont des séries entières en $\mathfrak{z}^{-1}$ (ou en $\mathfrak{z}^{-1/p}$ pour les problèmes de niveau p , avec éventuellement une partie retrograde s'il y a plusieurs niveaux) pour un temps perturbé $\mathfrak{z}$ équivalent à z (*)

f) Les intégrales formelles $x(z,u)$ des systèmes différentiels de dimension ν dépendent de ν paramètres u_i , mais leurs opérateurs invariants A_ω ne comportent pas de terme en $\frac{\partial}{\partial z}$. Au contraire, les intégrales formelles des systèmes dynamiques de dimension ν ne dépendent que de $(\nu-1)$ paramètres u_i , mais leurs opérateurs invariants A_ω comportent un terme en $\frac{\partial}{\partial z}$, terme dont le coefficient est dit invariant précaire, vu qu'il n'est invariant que pour les changements de variables analytiques, mais pas pour la multiplication des $X_i(x)$ par un même facteur.

g) Avec les notions de résonance que nous avons introduites, il faut prendre garde qu'à un système différentiel (2.13.9) non résonnant correspond un système dynamique (2.13.10) à un degré de résonance, puisqu'on a la relation de résonance non triviale $\lambda_{\nu+1} = 0$. Plus généralement, le passage de (2.13.9) à (2.13.10) s'accompagne d'un saut d'une unité dans le degré de résonance. C'est bien sûr une simple affaire de définition.

h) Le phénomène de la quasirésonance peut se produire à propos de n'importe quel problème (équation differentielle, système différentiel, système dynamique) Il suffit pour cela que les multiplicateurs λ_i soient Liouvilliens dans leur ensemble. Au contraire, le phénomène de la nihilence est propre aux systèmes (différentiels ou dynamiques) et n'affecte jamais les équations différentielles. Soit en effet

(*) C'est-à-dire $\mathfrak{z} \sim z$ pour z grand. Dans les problèmes à niveau unique, $\mathfrak{z}$ est lié à z par $z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$ pour un certain $\rho \in \mathbb{C}$.

une équation différentielle (2.13.1) de multiplicateurs λ_i résonnants. Il lui correspond un système différentiel (2.13.6), qui lui même peut s'écrire comme système dynamique (2.13.10) ou comme champ de vecteurs (2.13.12). Or on vérifie que le champ de vecteurs X ainsi construit ne possède jamais d'intégrale première entière : il n'existe pas de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{C}[[x]]$ telle que $X.\varphi = 0$. C'est ici (pour la première fois!) que se fait sentir la forme très particulière des systèmes (2.13.6) qui sont issus d'équations différentielles.

CHAPITRE 3 : CLASSIFICATION DES EQUATIONS ET SYSTEMES AUX DIFFERENCES(*)

SECTION 3.1 : LIMITES DE L'ANALOGIE ENTRE EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET EQUATIONS AUX DIFFERENCES. LE NIVEAU 1^+ ET LE DOUBLE POLYGONE DE NEWTON.

Les équations aux différences ont été intensément étudiées vers le début du siècle. NÖRLUND leur consacra un ouvrage [Nö] demeuré classique. Aujourd'hui, après une longue éclipse, le sujet semble connaître un regain d'intérêt, comme en témoignent les thèses de G.K. IMMINK [Im.1], C. PRAAGMAN [Pr] et de récents articles de J.P. RAMIS [Ra.1], B.L. BRAAKSMA [Br] etc... (**)

Nous allons quant à nous aborder la question du point de vue de la résurgence. Il se trouve en effet que les équations aux différences sont, à l'égal des équations différentielles, une mine inépuisable de résurgence, sur laquelle il y aurait énormement à dire. Toutefois, dans l'optique particulière de cet ouvrage, les équations aux différences constituent moins un objet d'étude autonome qu'une introduction à l'étude des difféomorphismes locaux, de même que les équations différentielles, objet du précédent chapitre, nous intéressaient surtout comme préparation à l'étude des champs de vecteurs locaux. Le présent chapitre ne sera donc pas entièrement systématique et les démonstrations y seront plus schématiques que dans la suite de l'ouvrage.

Un coup d'oeil sur le tableau de la page 9 montre que, dans la symétrie générale de ce livre, les équations aux différences font pendant aux équations différentielles. La symétrie est cependant loin d'être complète. Des disparités sensibles existent, qui se préciseront tout au long de ce chapitre et seront reprises dans la section finale. Mais parmi ces disparités, il en est cinq, essentielles, qu'il faut

(*) Ce chapitre ne figurait pas dans notre texte provisoire sur les "Sept Problèmes". Une première version du chapitre 3, achevée en 1984, bénéficia d'une lecture attentive et de plusieurs corrections de G.K. IMMINK. Les §§ 3.5, 3.6, 3.7 ont été refondus et sensiblement étoffés.

(**) Pour une bibliographie récente voir [Ra.1], [Im.1] et surtout [Pr].

tout de suite signaler. Elles ont trait au niveau 1^+, au multiplicateur imaginaire, au double polygône de Newton, aux changements de variables et aux changements d'inconnues. Expliquons de quoi il s'agit, en commençant par les deux derniers points.

a) Changement d'inconnue et notion d'invariant.

Un changement d'inconnue $x \mapsto y$ inversible formel :

(3.1.1) $$x = h(z,y) = y + \dots \qquad \text{avec } h(z,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1},y]]$$

transforme l'équation différentielle (du premier ordre et de niveau 1) la plus générale :

(3.1.2) $$x'(z) = a(z,x(z)) \qquad \text{avec } \begin{cases} a(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1},x\} \\ a(\infty,0)=0,\ a(z,x)=\lambda x+\dots,\ \lambda\neq 0 \end{cases}$$

en l'équation :

(3.1.3) $$y'(z)\cdot \frac{\partial}{\partial y}h(z,y) + \frac{\partial}{\partial z}h(z,y) = a(z,h(z,y))$$

Comme $\frac{\partial}{\partial y}h(z,y) = 1 + \dots$, l'équation (3.1.3) devient après division par $\frac{\partial}{\partial y}h(z,y)$:

(3.1.4) $$y'(z) = b(z,y(z)) = \left(a(z,h) - \frac{\partial}{\partial z}h\right) \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial y}h\right)$$

avec $b(z,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1},y]]$, $b(\infty,0) = 0$, $b(z,y) = \lambda y + \dots$

A l'analyticité près, (3.1.4) est de la même forme que (3.1.2). Au contraire, ce même changement d'inconnue (3.1.1), appliqué à l'équation aux différences (du premier ordre et de niveau 1) la plus générale :

(3.1.5) $$x(z+1) = a(z,x(z)) \qquad \text{avec } \begin{cases} a(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1},x\} \\ a(\infty,0)=0,\ a(z,x)=\ell x+\dots,\ \ell\neq 0 \end{cases}$$

la transforme dans un premier temps en une équation :

(3.1.6) $$h(z+1, y(z+1)) = a(z, h(z, y(z)))$$

qui en diffère profondément, n'étant plus affine en $y(z+1)$. En fait (3.1.6) est de la forme :

(3.1.6bis) $$f(z, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\, y_1^n = f_0(z, y)$$

avec $y = y(z)$, $y_1 = y(z+1)$, $f(z, y_1) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, y_1]]$ et $f_1(z) = 1 + \ldots$

Il existe donc une unique $g(z, y_1) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, y_1]]$ telle que :

(3.1.7) $$y_1 \equiv g(z, f(z, y_1))$$

Portant (3.1.6bis) dans le second membre de (3.1.7) on trouve :

(3.1.8) $$y_1 = g(z, f_0(z, y))$$

c'est-à-dire finalement :

(3.1.9) $$y(z+1) = b(z, y(z)) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} b(z, x) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, x]] \\ b(\infty, 0) = 0 \;,\; b(z, y) = \ell y + \ldots \end{array} \right.$$

A l'analyticité près, (3.1.9) est de la même forme que (3.1.5). De plus le second membre $b(z, y)$ appartient manifestement à $\mathbb{C}\{z^{-1}, y\}$ si et seulement si $h(z, y)$ y appartient. On a donc pour les équations aux différences une notion de changement d'inconnue (formel ou analytique) analogue à celle qu'on avait pour les équations différentielles, mais un peu moins naturelle.

b) Changement de variable et notion d'équation différentielle d'ordre infini.

Alors qu'un changement de variable :

(3.1.10) $$z \mapsto f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

transforme l'équation différentielle (3.1.2) en une équation de même forme, ce même changement de variable bouleverse profondément l'équation aux différences (3.1.5), la changeant d'un seul coup en ce qu'on peut appeler une équation différentielle d'ordre infini. Bien qu'elles s'écartent sensiblement du sujet de ce livre, les équations différentielles d'ordre infini et notamment les cas particuliers des équations aux translations et des équations aux composées (qui généralisent directement les équations aux différences) seront examinées au §3.9. Nous verrons qu'elles donnent lieu au même type de résurgence que les équations différentielles ou aux différences, bien que leurs intégrales formelles comportent en général une infinité de paramètres u_i .

c) Le double polygône de Newton.

Considérons l'opérateur aux différences (d'ordre ν et de coefficients méromorphes à l'infini) le plus général :

(3.1.11) $$D \; : \; x(z) \longmapsto D\,x(z) = \sum_{m=0}^{\nu} \Psi_m(z) \;\; x(z+m)$$

avec

(3.1.12) $$\Psi_m(z) = \sum_{n \geqslant w(m)} b_{m,n}\, z^{-n} \qquad \left(b_{m,n} \in \mathbb{C},\, b_{m,w(m)} \neq 0\right)$$

Puisque ∂ désigne la dérivation $\partial/\partial z$, il est naturel de noter $e^{m\partial}$ l'opérateur translation de pas m :

(3.1.13) $$e^{m\partial}\, x(z) = x\,(z+m)$$

D se présente alors sous forme d'un opérateur différentiel d'ordre infini :

(3.1.14) $$D = \sum_{m=0}^{\nu} \Psi_m(z)\; e^{m\partial}$$

analogue aux opérateurs (2.9.1). On va voir cependant qu'il faut associer aux opérateurs aux différences non pas un, mais deux polygônes de Newton principaux (sans compter la série des polygônes parasites).

Définition 3.1.1 : (Le grand polygone de Newton et les étages q_i).

Soit $SUPP(D)$ la partie de $[0,\nu] \times \mathbb{R}$ faite des points (m,n) tels que $b_{m,n} \neq 0$ et soit $\overline{SUPP}(D)$ l'intersection des demi-plans fermés qui contiennent $SUPP(D)$ et qui sont de la forme $n \geqslant mq+q'$ avec $q, q' \in \mathbb{Q}$. On appelle grand polygone de Newton, et on note $NEW(D)$ la ligne polygonale frontière de $\overline{SUPP}(D)$. Par construction, $NEW(D)$ a pour pentes des rationnels positifs ou négatifs q, qui sont dits étages de D (*).

L'arête de pente q est notée $NEW^q(D)$. La longueur de sa projection horizontale est notée $\Theta(q)$: c'est par définition la multiplicité de l'étage q. On numérote les étages q en commençant par le plus grand et en comptant chacun avec sa multiplicité. On a ainsi :

(3.1.15) $$\infty > q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots q_\nu > -\infty$$

avec

(3.1.16) $$\Theta(q) = \sum_{q_i=q} 1 \quad , \quad \Theta^+(q) = \sum_{q_i>q} 1 \quad , \quad \Theta^-(q) = \sum_{q_i<q} 1 .$$

Développons maintenant D en puissances de ∂, en isolant, pour des raisons d'homogénéité, les blocs $z^m \partial^m$:

(3.1.17) $$\begin{cases} D = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(z)\, z^m \partial^m \\ \varphi_m(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant v(m)} a_{m,n}\, z^{-n} \end{cases} \qquad \left\| \begin{array}{l} a_{m,n} \in \mathbb{C} \\ a_{m,v(m)} \neq 0 \end{array} \right.$$

et introduisons un "petit polygone" de Newton, analogue au polygône $new(D)$ que nous avons associé aux opérateurs différentiels d'ordre ν (cf. §2.9) :

Définition 3.1.2 (Le petit polygone de Newton et les niveaux p_i)

Soit $supp(D)$ la partie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ faite des points (m,n) tels que

(*) Ne pas confondre les étages q_i avec les niveaux p_i, introduits ci-après.

$a_{m,n} \neq 0$ et soit $\overline{supp}\,(D)$ l'intersection des demi-plans fermés qui contiennent $supp\,(D)$ et qui sont de la forme $n \geqslant m\mu + \mu'$ avec $\mu \in \mathbb{Q}^+$ et $\mu' \in \mathbb{Q}$. On appelle petit polygône de Newton et on note $new(D)$ la ligne polygonale frontière de $\overline{supp}\,(D)$. Les pentes de $new\,(D)$ sont dit niveaux de D. Par construction, ce sont des rationnels $\mu \geqslant 0$ mais aussi $\leqslant 1$ (puisque D est un polynome en e^{∂}).

L'arête de pente μ est notée $new^{\mu}\,(D)$. Si $\mu < 1$, cette arête est finie et la longueur de sa projection horizontale, notée $\theta(\mu)$, est dite multiplicité du niveau μ.

L'arête $new^{1}(D)$ de pente 1 est toujours de longueur infinie, mais il est commode d'attribuer au niveau 1 une multiplicité $\theta(1)$ finie, de manière à avoir :

(3.1.18) $$\theta(1) + \sum_{0 \leq \mu < 1} \theta(\mu) = \Theta(0) = \text{multiplicité de l'étage } 0 \ (*)$$

Enfin, s'il existe d'autres étages que l'étage nul, on introduit un niveau supplémentaire, le niveau 1^+, auquel on attribue la multiplicité $\theta(1^+)$ égale par définition à la multiplicité totale des étages non nuls :

(3.1.19) $$\theta(1^+) = \sum_{q_i \neq 0} 1 = \sum_{q \neq 0} \Theta(q) = \Theta^{+}(0) + \Theta^{-}(0)$$

On numérote les niveaux de 1 à ν en commençant par le plus grand (c'est-à-dire le niveau 1^+ s'il est atteint, ou le niveau 1 sinon) et en comptant chaque niveau avec sa multiplicité. On a ainsi :

(3.1.20) $$1^+ \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \mu_\nu \geqslant 0$$

avec

(3.1.21) $$\theta(\mu) = \sum_{\mu_i = \mu} 1 \ , \ \theta^+(\mu) = \sum_{\mu_i > \mu} 1 \ , \ \theta^-(\mu) = \sum_{\mu_i < \mu} 1$$

(*) cela a un sens car $\sum_{0 \leq \mu < 1} \theta(\mu) \leqslant \Theta(0)$

d) Les multiplicateurs λ_j . Le multiplicateur imaginaire λ_0 .

Définition 3.1.3. (Les polynômes $Q_q(\ell)$ et $P_p(\lambda)$).

A tout étage q on associe le polynôme $Q_q(\ell)$ de degré $\Theta(q)$:

$$Q_q(\ell) = \ell^{-\Theta^-(q)} \cdot \sum_{(m,n)} b_{m,n} \, e^{mq} \, \ell^m \tag{3.1.22}$$

avec une somme étendue à tous les (m,n) de l'arête $NEW^q(D)$ du grand polygône de Newton.

De même, à tout niveau $p \in]0,1[$ on associe le polynome $P_p(\lambda)$ de degré $\theta(p)$:

$$P_p(\lambda) = \lambda^{-\theta^-(p)} \cdot \sum_{(m,n)} a_{m,n} \, p^m \lambda^m \tag{3.1.23}$$

avec une somme étendue à tous les (m,n) de l'arête $new^p(D)$ du petit polygône de Newton.

Enfin, pour le niveau 0, on pose :

$$P_0(\lambda) = z^{-\lambda}\Big(\sum_{(m,n)} a_{m,n} \, \partial^m\Big) \, z^\lambda \qquad (\partial = \partial/\partial z) \tag{3.1.24}$$

avec une somme étendue à tous les (m,n) de l'arête $new^0(D)$ du petit polygône de Newton.

Définition 3.1.4 (Multiplicateurs)

Les $\Theta(q)$ zéros du polynôme $Q_q(\ell)$ sont notés ℓ_i (avec $q_i = q$) si bien que l'on a :

$$Q_q(\ell) = C^{te} \cdot \prod_{q_i = q} (\ell - \ell_i) \qquad (\ell_i \neq 0) \tag{3.1.25}$$

α) Multiplicateurs de niveau 1^+.

Ce sont par définition les étages q non nuls.

β) Multiplicateurs de niveau 1.

Les multiplicateurs principaux de niveau 1 sont par définition les $\theta(1)$ scalaires $\lambda_i = \log \ell_i$ (on fixe une détermination quelconque) pour $q_i = 0$.

On leur adjoint les multiplicateurs secondaires de niveau 1, qui sont les $\theta(1^+)$ scalaires $\lambda_i = \log \ell_i$ (on fixe une détermination quelconque) pour $q_i \neq 0$.

On leur adjoint enfin le multiplicateur imaginaire, qui vaut par définition $\lambda_0 = 2\pi i$.

γ) Multiplicateurs de niveau $\mu \in [0,1[$.

Ce sont par définition les zéros du polynôme $P_\mu(\lambda)$. Ils sont notés λ_i (avec $\mu_i = \mu$) si bien que l'on a :

(3.1.26) $$P_\mu(\lambda) = \text{Cste.} \prod_{\mu_i=\mu} (\lambda - \lambda_i)$$

Les multiplicateurs de niveau 0 sont notés indifféremment λ_i ou τ_i (pour $\mu_i = 0$).

Il peut sembler bizarre de définir les multiplicateurs de niveau 1^+ comme étant égaux aux étages q non nuls. Quant aux scalaires $\lambda_i = \log \ell_i$ (pour $q_i \neq 0$) il serait tentant de les considérer comme multiplicateurs de niveau 1^+, plutôt que d'y voir des multiplicateurs secondaires de niveau 1, comme nous avons fait. Mais ce serait une erreur. En réalité, les choix de la définition 3.1.4 nous sont imposés par la considération suivante : on appelle systématiquement multiplicateurs de niveau μ les scalaires qui engendrent le réseau de résurgence Ω^μ de niveau μ. Or nous verrons que le réseau de résurgence Ω^{1^+} de niveau 1^+ (relatif au temps $z_{1^+} = z^{\log z}$) est bel et bien engendré par les étages q et non pas par les $\lambda_i = \log \ell_i$ pour $q_i \neq 0$. Ces λ_i, comme nous verrons, contribuent, encore que d'une façon accessoire, au réseau de résurgence Ω^1 de niveau 1 (relatif au temps $z_1 = z$), d'où leur nom de <u>multiplicateurs secondaires de niveau 1.</u>

Nous verrons aussi que le réseau de niveau 1 est toujours périodique de période $2\pi i$. D'où la nécessité d'introduire, à ce niveau, un <u>multiplicateur imaginaire</u> $\lambda_0 = 2\pi i$.

e) <u>Le niveau 1^+.</u>

C'est peut-être la nouveauté la plus remarquable et la plus inattendue. Nous n'avons eu jusqu'ici à envisager que des temps parallèles du type $z_\mu = z^\mu$ (*). Il va maintenant falloir, pour les équations aux différences, introduire un temps logarithmique $z_{1^+} = z \log z$. On verra que la résurgence en z_{1^+} se distingue des autres à trois égards :

(i) l'intégrale formelle de niveau 1^+ est, comme fonction résurgente, en général de type strictement <u>stellaire</u>.

(ii) le réseau de résurgence Ω^{1^+} de niveau 1^+ est <u>rigide</u> en ce sens qu'il est toujours engendré par un nombre fini de rationnels (les étages q).

(iii) les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ ont pour coefficients A_ω^i des fonctions entières périodiques en $z_1 = z$.

On a donc au niveau 1^+ un réseau de résurgence <u>pauvre</u> et <u>rigide</u> mais des invariants très <u>riches</u>.

Nous allons maintenant, en cette fin de section, regrouper quelques définitions et lemmes qui nous serviront tout au long du chapitre.

(*) ou à la rigueur $z_{0,1} = \log z$ pour les équations différentielles dont le niveau 0 est résonnant (cf. §2.10, alinéa c.h).

f) Résonance.

Définition 3.1.5 (Opérateurs aux différences "non résonnants").

Un opérateur aux différences de la forme (3.1.11) est dit "non-résonnant" :

α) s'il ne présente pas de résonance de niveau 1, ce qui d'une façon précise signifie pour l'étage nul :

(3.1.27) $$\left(\prod_{q_i=0} \ell_i^{n_i} = 1 \ ; \ n_i \in \mathbb{Z}\right) \Longrightarrow \left(n_i = 0\right)$$

et pour chaque étage q non nul :

(3.1.28) $$\left(\ell_i/\ell_j = \ell_{i'}/\ell_{j'} \ ; \ q_i = q_j = q_{i'} = q_{j'} = q\right) \Longrightarrow \left(i = i', \ j = j'\right)$$

β) s'il ne présente pas non plus de résonance extrinsèque de niveau $p \in]0,1[$ autrement dit si toute relation de la forme $\sum_{p_i=p} n_i \lambda_i = 0 \ (n_i \in \mathbb{Z})$ est engendrable à partir des relations de résonance intrinsèques (2.10.17) ou (2.10.18).

γ) si enfin il ne présente pas de résonance de niveau 0, c'est à dire si les $\lambda_i = \tau_i$ (pour $p_i = 0$) sont irrationnels et indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Remarque : On ne pouvait pas imposer la non-résonance de niveau 1^+ puisque les multiplicateurs de niveau 1^+ , étant tous rationnels (ce sont les étages) résonnent automatiquement dès qu'ils sont plus d'un. On ne pouvait pas davantage imposer la non résonance complète pour les niveaux intermédiaires entre 0 et 1 car ces niveaux, étant fractionnaires, présentent toujours de la résonance intrinsèque.

g) Solutions élémentaires et blocs élémentaires.

Lemme 3.1.1 (Solutions élémentaires des opérateurs aux différences non résonnants)

Soit D un opérateur aux différences non résonnant. L'équation homogène $D\,x(z) = 0$ possède ν solutions formelles $x_i(z)$ qui se factorisent selon :

(3.1.29) $$x_i(z) = y_i(z) \quad Y_i(z)$$

Plus précisément, à chaque niveau μ correspondent $\theta(\mu)$ solutions formelles $x_i(z)$ et l'on a :

α) si $\mu_i = 1^+$:

(3.1.30) $$y_i(z) = z^{q_i z} \cdot \ell_i^{z} \cdot z^{\tau_i} \quad \text{et} \quad Y_i(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{i,n} z^{-n}$$

β) si $\mu_i = 1$:

(3.1.31) $$y_i(z) = \ell_i^{z} \cdot z^{\tau_i} \quad \text{et} \quad Y_i(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{i,n} z^{-n}$$

γ) si $\mu_i = \mu_i'/\mu_i''$ (fraction irréductible < 1 et > 0)

(3.1.32) $$y_i(z) = z^{\tau_i} \cdot \exp\left(\lambda_i z^{\mu_i} + \sum_{n=1}^{\mu_i'-1} \lambda_{i,n/\mu_i''} z^{n/\mu_i''}\right) \text{ et } Y_i(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{i,n} z^{-n/\mu_i''}$$

δ) si $\mu_i = 0$:

(3.1.33) $$x_i(z) = z^{\tau_i} \quad \text{et} \quad Y_i(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{i,n} z^{-n}$$

Les $y_i(z)$ sont dits amorces de solutions élémentaires. On s'en sert pour fabriquer les blocs élémentaires $z^{[n]} = y^n$:

(3.1.34) $$z^{[n_1,\dots,n_\nu]} = y_1^{n_1}(z) \cdots y_\nu^{n_\nu}(z)$$

qui figurent dans les intégrales formelles de tout niveau.

Remarque : pour $\mu_i = 1$, la solution formelle $x_i(z)$ semble dépendre de la détermination de $\log \ell_i$ et pour $\mu_i = 1^+$ elle semble en outre dépendre de la détermination de $\log z$. Mais c'est illusoire : le choix des déterminations n'influe pas sur le facteur $Y_i(z)$.

Le lemme 3.1.1 reste valable pour les opérateurs aux différences résonnants, sauf lorsque ceux-ci possèdent des multiplicateurs multiples (de quelque niveau que ce soit). Pour couvrir ce cas, il est commode de modifier légèrement les notations des blocs y_i . On aboutit alors à l'énoncé suivant :

Lemme 3.1.2 (Solutions élémentaires des opérateurs aux différences les plus généraux)

Dans le cas le plus général (y compris en présence de multiplicateurs multiples) l'équation $D\ x(z) = 0$ possède ν solutions formelles du type :

(3.1.35) $$x_i(z) = y_i(z)\ Y_i(z)$$

avec $Y_i(z) = 1 + \ldots$ et avec

(3.1.36) $$x_i(z) = z^{q_i z} \cdot \ell_i^{z}\ z^{\tau_i} \cdot \exp\Big(\sum_{0<p<1} \lambda_{i,p}\ z^{p}\Big) \qquad (*)$$

h) Polygones de Newton parasites. Arborescence.

Les coefficients $\lambda_{i,p}$ du lemme 3.1.2, qui sont des espèces de "multiplicateurs subdominants" et qui vont d'ailleurs contribuer aux réseaux de résurgence Ω^{p} (voir ci-dessous), se calculent à partir de polygones de Newton parasites, attachés aux multiplicateurs multiples.

Ces polygones parasites sont apparentés non pas au grand, mais au petit polygone de Newton. Ils ne sont autres, en fait, que les petits polygones de Newton des opérateurs $\underline{y}_i^{-1}\, D\, \underline{y}_i$ où $\underline{y}_i$ désigne un y_i tronqué. Ainsi, à tout multiplicateur $\lambda_i = \log \ell_i$ multiple de niveau 1, correspond le polygone parasite :

(3.1.37) $$new_{q_i,\ell_i}(D) = new\left(z^{-q_i z}\, \ell_i^{-z} \cdot D \cdot z^{q_i z}\, \ell_i^{z}\right)$$

Si $new_{q_i,\ell_i}(D)$ possède lui-même un (ou plusieurs) multiplicateurs multiples λ_{i_2} de niveau $p_2 < 1$, il faut envisager un (ou plusieurs) polygones parasites "accrochés" à $new_{q_i,\ell_i}(D)$ et de la forme :

(3.1.38) $$new_{q_{i_1},\ell_{i_1};p_{i_2},\lambda_{i_2}}(D) = new\left(z^{-q_{i_1} z} \cdot \ell_{i_1}^{-z} \cdot e^{-\lambda_{i_2} z^{p_{i_2}}} \cdot D \cdot z^{q_{i_1} z} \cdot \ell_{i_1}^{z}\, e^{\lambda_{i_2} z^{p_{i_2}}}\right)$$

(*) des termes en $\log z$ s'introduisent parfois dans (3.1.36) mais cela ne change rien.

On peut ainsi, dans certains cas, obtenir toute une arborescence de polygones parasites :

(3.1.39) $$\mathrm{new}_{q_{i_1}, \ell_{i_1}; p_{i_2}, \lambda_{i_2}; p_{i_3}, \lambda_{i_3}, \ldots, p_{i_s}, \lambda_{i_s}}(\mathcal{D}) \quad \text{avec } 1 > p_{i_2} > p_{i_3} > \cdots$$

Une telle arborescence est évidemment un phénomène très rare et exceptionnel : elle suppose, chez les multiplicateurs, de la multiplicité à répétition et en cascade. L'applicabilité à ce cas de l'équation du pont (voir la fin du §3.7) n'en est que plus remarquable.

i) Réseaux de résurgence.

Fixons un opérateur aux différences $\mathcal{D}$ de la forme (3.1.11) et associons-lui, pour chaque niveau p, un ensemble Ω^p destiné à jouer le rôle de "réseau" de résurgence.

Définition 3.1.6 (Réseaux de résurgence : le cas non résonnant).

Si l'opérateur $\mathcal{D}$ est "non résonnant" (*), l'ensemble Ω^p est par définition la partie de $\mathbb{C}^*$ contenant les ω de la forme :

α) si $p = 1^+$:

(3.1.40) $$\omega = \sum_q n_q \cdot q \qquad (n_q \in \mathbb{N})$$

ou de la forme

(3.1.40bis) $$\omega = -q_i + \sum_{q \neq q_i} n_q \cdot q \qquad (n_q \in \mathbb{N})$$

les sommes étant étendue aux étages q de $\mathcal{D}$.

β) si $p = 1$:

(3.1.41) $$\omega = n_0 \lambda_0 + \sum_{p_i = 1} n_i \lambda_i + \sum_{p_i = 1^+} n_i \lambda_i \qquad (\lambda_0 = 2\pi i)$$

(*) voir la définition 3.1.5 ci-dessus.

avec $n_0 \in \mathbb{Z}$;

avec sous le premier $\sum$ des n_i tous $\geqslant 0$ sauf au plus un qui peut valoir -1 ;

avec sous le second $\sum$ des $n_i \in \{-1,0,1\}$ et vérifiant $\sum\limits_{q_i=q} n_i = 0 \quad (\forall q \neq 0)$

γ) si $p \in]0,1[$

(3.1.42) $$\omega = \sum_{p_i=p} n_i \lambda_i$$

avec des n_i tous $\geqslant 0$ sauf au plus un qui peut valoir -1

δ) si $p = 0$:

(3.1.42) $$\omega = n_0 + \sum_{p_i=0} n_i \lambda_i \qquad (\text{avec } n_0 \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{N})$$

Définition 3.1.7 (Réseaux de résurgence : le cas général)

Pour l'opérateur D le plus général (possédant éventuellement des multiplicateurs multiples) les ensembles Ω^{1+} et Ω^{1} sont définis comme précédemment et, pour $p < 1$, l'ensemble Ω^{p} est par définition la partie de $\mathbb{C}^*$ contenant les ω de la forme :

(3.1.43) $$\omega = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_{i,p}$$

avec des n_i tous $\geqslant 0$, sauf au plus un qui peut valoir -1, et avec

(3.1.44) $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\nu} q_i \cdot n_i = 0. \\ \prod\limits_{i=1}^{\nu} \ell_i^{n_i} = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_{i,q} = 0 \qquad (\forall q > p) \end{cases}$$

Notons que l'ensemble des relations (3.1.43) et (3.1.44) équivaut à l'unique relation :

(3.1.45) $$z^{[n_1,\ldots,n_\nu]} = \exp\left[\omega . z^p + o(z^p)\right]$$

Notons aussi que la définition 3.1.7 contient la définition 3.1.6. Notons enfin que les $\lambda_{i,q}$ attachés aux polygones parasites contribuent "beaucoup moins" à Ω^{p} que les $\lambda_{i,q} = \lambda_i$ attachés au "petit polygone". On retrouve ici la disparité (déjà observée au §2.10, alinéa c.g) entre polygones parasites et polygone principal. Cette disparité ne s'efface que dans les problèmes linéaires (voir §3.8).

SECTION 3.2 : EQUATIONS ET SYSTEMES AUX DIFFERENCES DE NIVEAU 1.

Pour aller plus vite, travaillons directement sur les formes préparées. Autrement dit, considérons des équations de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1})\, x_{(i)} = a(z, x, x_{(1)}, \ldots, x_{(\nu)}) \tag{3.2.1}$$

avec

$$\begin{cases} x = x(z) \quad , \quad x_{(i)} = x(z+i) \\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_0 \neq 0 \, , \, \alpha_\nu \neq 0 \\ a(z, x, x_{(1)}, \ldots, x_{(\nu)}) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x, x_{(1)}, \ldots, x_{(\nu)}\} \end{cases}$$

et avec

$$a(z,0,\ldots,0) = o(1) \; , \; \frac{\partial}{\partial x_{(i)}} a(z,0,\ldots,0) = o(z^{-1}) \qquad (0 \leq i \leq \nu) \tag{3.2.2}$$

$$\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \ell^i = \alpha_\nu \prod_{i=1}^{\nu} (\ell - \ell_i) \qquad (\ell_i \neq 0) \tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases} \tau_i = -\left(\sum_{j=0}^{\nu} \beta_i (\ell_i)^j\right) \Big/ \left(\sum_{j=0}^{\nu-1} j \cdot \alpha_j (\ell_i)^{j-1}\right) \\ \quad\; = -\left(\sum_{j=0}^{\nu} \beta_i (\ell_i)^j\right) \Big/ \left(\alpha_\nu \prod_{j \neq i} \ell_i - \ell_j\right) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

et considérons parallèlement des systèmes de la forme :

$$x_i(z+1) = (\ell_i + \tau_i z^{-1})\, x_i(z) + a_i(z, x_1(z), \ldots, x_\nu(z)) \tag{3.2.5}$$

avec $\ell_i \in \mathbb{C}^*$, $\tau_i \in \mathbb{C}$; $a_i(z, x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x_1, \ldots, x_\nu\}$

et avec

$$a_i(z,0,\ldots,0) = o(1) \; ; \; \frac{\partial}{\partial x_j} a_i(z,0,\ldots,0) = o(z^{-1}) \qquad (\forall i,j) \tag{3.2.6}$$

Supposons aussi (tant pour les équations que pour les systèmes) que les ℓ_i ne présentent pas de résonance multiplicative :

(3.2.7) $$\left(\prod_{i=1}^{\nu} \ell_i^{n_i} = 1 \text{ et } n_i \in \mathbb{Z}\right) \Longrightarrow (n_i = 0)$$

ce qui implique évidemment qu'ils sont distincts et qu'aucun d'eux n'est racine de l'unité.

Proposition 3.2.1 (Intégrale formelle : allure et résurgence)

L'équation (3.2.1) et le système (3.2.5) possèdent une intégrale formelle du type suivant (*)

(3.2.8) $$x(z,u) = \sum_{n} u^{n} z^{[n]} \Phi^{n}(z)$$

avec $u^{n} = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu}$ et avec :

(3.2.9) $$z^{[n]} = z^{[n_1,\dots,n_\nu]} = z^{\sum n_i \tau_i} \exp(z \sum n_i \lambda_i)$$

(3.2.10) $$\Phi^{n}(z) = \Phi^{n_1,\dots,n_\nu}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \quad (**)$$

Cette intégrale formelle, essentiellement indépendante du choix des déterminations λ_i, est unique modulo une dilatation $u_i \longmapsto c_i u_i$ des paramètres et elle est résurgente en z.

Cela signifie que chaque composante Φ^{n} est résurgente, et en particulier la première, Φ^{0}, qui n'est autre que l'unique solution dans $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ du système (resp. de l'équation).

Proposition 3.2.2 (Equation du pont et invariants holomorphes).

L'intégrale formelle $x(z,u)$ a pour réseau de résurgence l'ensemble Ω

(*) Dans le cas du système (3.2.5) l'intégrale $x(z,u)$ et ses composantes $\Phi^{n}(z)$ sont bien sûr des vecteurs : $x(z,u) = (x_1(z,u),\dots,x_\nu(z,u))$ et $\Phi^{n}(z) = (\Phi_1^{n}(z),\dots,\Phi_\nu^{n}(z))$

(**) Ou $\mathbb{C}^{\nu}[[z^{-1}]]$ dans le cas d'un système.

formé des ω de la forme :

(3.2.11) $$\omega = n_0\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i\lambda_i \qquad\qquad n_0 \in \mathbb{Z} \ , \ n_i \in \mathbb{N}$$

ou de la forme

(3.2.12) $$\omega = n_0\lambda_0 - \lambda_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} n_i\lambda_i \qquad\qquad \lambda_0 = 2\pi i \ , \ \lambda_i = \log \ell_i$$

et elle vérifie les équations de résurgence :

(3.2.13) $$\dot{\Delta}_\omega \ x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \ x(z,u) \qquad\qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

(3.2.14) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\overset{\circ}{\omega} z} \, u^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\nu} A_\omega^i \ u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

avec $A_\omega^i \in \mathbb{C}$ et avec :

(3.2.14bis) $$\begin{cases} \overset{\circ}{\omega} = n_0\lambda_0 = n_0 2\pi i \\ u^{n(\omega)} = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \end{cases} \qquad \text{si } \ \omega = n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + \dots n_\nu\lambda_\nu$$

Quand ω est de la forme (3.2.11), les composantes A_ω^i ne sont soumises à aucune contrainte. Quand ω est de la forme (3.2.12), elles sont toutes nulles sauf pour $i = i_0$. Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$, pris tous ensemble, constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes de l'équation (3.2.1) ou du système (3.2.5).

Ils constituent même un système complet et libre d'invariants analytiques dans le cas (évidemment générique) où les ℓ_i ne présentent pas de quasi-résonance multiplicative, c'est-à-dire quand les monômes $\ell^n = \prod_i \ell_i^{n_i}$ n'approchent pas trop vite le nombre 1.

Cas exceptionnels.

Lorsque les τ_i ne sont plus rationnellement indépendants, les modifications à apporter sont minimes : elles ne touchent qu'à la forme des composantes ϕ^n de l'intégrale formelle, où peuvent apparaître des termes logarithmiques. Lorsque les ℓ_i sont en résonance, les modifications sont plus profondes. On peut tomber dans un cas à plusieurs niveaux, si par exemple certains des ℓ_i sont multiples. Ces problèmes à plusieurs niveaux sont traités aux sections 4 et 7. Mais on peut aussi avoir l'un (un seul) des ℓ_i égal à 1 sans que le problème cesse d'être de niveau unique 1. Il faut alors changer quelque peu la forme de l'intégrale formelle et introduire un paramètre μ_1 dans les coefficients A^i_ω des invariants formels. On trouvera un exemple traité à la section 3.9, équations (3.9.28) et (3.9.32).On peut, de toute façon, appliquer les énoncés de la section 3.7, qui couvrent tous les cas sans exception.

Principes des démonstrations.

C'est le même que pour les équations différentielles de niveau 1. On prend le second membre de l'équation (3.2.1), on affecte tous ses termes (à l'exception, si l'on veut, des termes constants en x) d'un coefficient ε , puis on développe formellement en ε les composantes φ^n de l'intégrale formelle :

(3.2.15) $$\varphi^n(z) = \sum_{n_0=1}^{\infty} \varepsilon^{n_0}\, \varphi^{n_0,n}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}^\nu)$$

tout comme en (2.2.33). On calcule alors les $\varphi^{n_0,n}$ par la récurrence

(3.2.16) $$D\ \varphi^{n_0,n}(z) = K^{n_0,n}(z)$$

qui est analogue à (2.2.34) à ceci près que D est ici un opérateur aux différences :

(3.2.17) $$D = \sum_{m=0}^{\nu} \left(\alpha_m\, e^{m\partial} + \beta_m\, z^{-1} e^{m\partial}\right) \qquad (\partial = \partial/\partial z)$$

D'où, après transformation de Borel :

(3.2.18) $$\mathbf{D} = \sum_{m=0}^{\nu} \left(\alpha_m\, e^{-m\zeta} + \beta_m\, \mathbf{M}\, e^{-m\zeta}\right)$$

avec pour $\mathbf{M}$ l'opérateur "primitive" :

$$\mathbf{M} \quad : \quad \varphi(\zeta) \longmapsto \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta_0)\, d\zeta_0 \tag{3.2.19}$$

Divisant $K^{n_0,n}(\zeta)$ par $\mathbf{D}$ on s'explique la forme (3.2.11) + (3.2.12) du réseau de résurgence et la présence du multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$. On établit enfin, sans plus de peine que pour les équations différentielles, la possibilité de resommer en $\Sigma = 1$ (avec croissance exponentielle en ζ) ainsi que la forme précise des équations de résurgence.

SECTION 3.3 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.

Illustrons nos résultats généraux en les appliquant aux problèmes aux différences linéaires. Considérons donc une équation linéaire préparée :

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z)\quad x(z+i) = 0 \tag{3.3.1}$$

avec

$$a_i(z) = \alpha_i + \beta_i z^{-1} + o(z^{-1}) \quad \in \mathbb{C}\{z^{-1}\} \tag{3.3.1bis}$$

et avec les ℓ_i, τ_i définis à partir des α_i, β_i comme en (3.2.3) et (3.2.4). Considérons parallèlement un système linéaire préparé :

$$x_i(z+1) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(z)\quad x_j(z) \qquad (1 \leq i \leq \nu) \tag{3.3.2}$$

avec

$$a_{ii}(z) = \ell_i + \tau_i z^{-1} + o(z^{-1}) \quad \text{et} \quad a_{ij}(z) = o(1) \tag{3.3.2bis}$$

S'agissant de problèmes linéaires, il n'est plus nécessaire de postuler la non-résonance des ℓ_i . Il suffit de supposer leurs rapports tous distincts. Autrement dit on remplace l'hypothèse (3.2.7) par l'hypothèse affaiblie:

$$\left(\ell_i/\ell_j = \ell_{i'}/\ell_{j'} \neq 1\right) \Longrightarrow \left(i = i' \text{ et } j = j'\right) \tag{3.3.3}$$

Pareillement, il suffit de supposer les différences $\tau_i - \tau_j$ irrationnelles.

L'intégrale formelle (scalaire pour l'équation et vectorielle pour le système) est ici linéaire en u . Elle s'écrit :

(3.3.4) $$x(z,u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z^{\langle i \rangle} \, \varphi^{\langle i \rangle}(z)$$

avec $\varphi^{\langle i \rangle}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ (*) et avec :

(3.3.5) $$z^{\langle i \rangle} = z^{\tau_i} \cdot \exp(\lambda_i z)$$

Les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur $x(z,u)$ correspondent ici (toujours à cause de la linéarité) à des indices ω de la forme :

(3.3.6) $$\omega = n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j \qquad (n_0 \in \mathbb{Z}\,;\ 1 \leq i\,,\, j \leq \nu)$$

avec comme d'habitude $\lambda_0 = 2\pi i$.

Les équations de résurgence s'écrivent encore :

(3.3.7) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \, x(z,u)$$

mais pour des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ homogènes de degré 0 en u , c'est-à-dire de la forme :

(3.3.8) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z} A_\omega \, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \quad \text{si } \omega = n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j \quad (A_\omega \in \mathbb{C})$$

Passant des $\dot{\Delta}_\omega$ aux Δ_ω et traduisant (3.3.7) composante par composante, on obtient :

(3.3.9) $$\begin{cases} \Delta_{n_0\lambda_0+\lambda_i-\lambda_j} \, \varphi^{\langle k \rangle}(z) \equiv 0 & \text{si } k \neq i \\ \Delta_{n_0\lambda_0+\lambda_i-\lambda_j} \, \varphi^{\langle i \rangle}(z) = z^{\tau_j - \tau_i} \, A_{n_0\lambda_0+\lambda_i-\lambda_j} \, \varphi^{\langle j \rangle}(z) \end{cases}$$

Que se passe-t-il maintenant quand les ℓ_i restent distincts, mais pas les rapports ℓ_i / ℓ_j ? L'intégrale formelle $x(z,u)$ garde sa forme (3.3.4) mais les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$, au lieu de se réduire à un seul terme comme en (3.3.8), s'écrivent maintenant

(3.3.10) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z} \sum_{\ell_i/\ell_j = e^\omega} A_\omega^{\langle ij \rangle} \cdot u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad (A_\omega^{\langle ij \rangle} \in \mathbb{C})$$

(*) ou $\mathbb{C}^\nu[[z^{-1}]]$ dans le cas d'un système.

si bien que les équations (3.3.9) peuvent comporter plusieurs termes au second membre.

Equations linéaires non homogènes.

Si on ajoute des termes constants en x au second membre de l'équation (3.3.1) ou du système (3.3.2), les résultats précédents restent en vigueur à condition de compléter l'intégrale formelle par un terme constant en u et d'adjoindre aux opérateurs (3.3.8) ou (3.3.10) des opérateurs de la forme :

$$\mathbb{A}_\omega = A_\omega \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad \text{pour} \quad \omega = n_0\lambda_0 - \lambda_j \tag{3.3.11}$$

ou plus généralement, lorsque les ℓ_i ne sont pas tous distincts, de la forme :

$$\mathbb{A}_\omega = \sum_{\ell_j = +e^{-\omega}} A_\omega^{\langle j\rangle} \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad \text{pour} \quad \omega = n_0\lambda_0 - \lambda_j \tag{3.3.12}$$

Cas exceptionnels :

Lorsque les τ_i ou leurs différences ne sont plus tous irrationnels, les modifications à apporter sont minimes et elles ne touchent qu'à la forme des composantes $\Phi^{\langle i\rangle}$ de l'intégrale formelle. En revanche, lorsque certains des ℓ_i sont multiples, il leur correspond des polygones de Newton parasites et des niveaux $p < 1$. On tombe alors dans le cas de la section 3.5 ci-après.

Interprétation des invariants $\mathbb{A}_\omega$.

Dans le cas linéaire les invariants s'interprètent d'une manière remarquablement simple au moyen des matrices de connection $C^{ij}(z)$. Soient en effet :

$$\begin{cases} x_+(z,u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z^{\langle i\rangle} \, \Phi_+^{\langle i\rangle}(z) \\ x_-(z,u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z^{\langle i\rangle} \, \Phi_-^{\langle i\rangle}(z) \end{cases} \tag{3.3.13}$$

les solutions sectorielles fondamentales du système (3.3.2). Ce sont des solutions définies dans des domaines S_+ et S_- de la forme :

(3.3.14) $$S_\pm = \{|\operatorname{Im} z| > R_1\} \cup \{\pm \operatorname{Re} z > R_2\}$$

et possédant dans toute direction (autre que la direction $\operatorname{Arg}(\pm z) = \pi$ parallèle à la frontière du domaine) une croissance subexponentielle en z . Ces solutions sectorielles remarquables s'obtiennent par transformation de Laplace à partir des transformées de Borel $\boldsymbol{\Phi}^{\langle i\rangle}(\zeta)$ des composantes de l'intégrale formelle:

(3.3.15) $$\Phi_\pm^{\langle i\rangle}(z) = \int_0^{\pm\infty} e^{-\zeta z}\, \boldsymbol{\Phi}^{\langle i\rangle}(\zeta)\, d\zeta \qquad (*)$$

et elles s'expriment linéairement l'une à partir de l'autre :

(3.3.16) $$\Phi_-^{\langle i\rangle}(z) = \sum_{j=1}^{\nu} C^{ij}(z)\ \Phi_+^{\langle j\rangle}(z) \qquad (|\operatorname{Im} z| > R_1)$$

avec des fonctions $C^{ij}(z)$ définies holomorphes dans $|\operatorname{Im} z| > R_1$ et périodiques de période 1 :

(3.3.17) $$\begin{cases} C^{ij}(z) = \sum\limits_{n_0 \geq 0} C^{ij}_{n_0}\ e^{n_0\lambda_0 z} & (\operatorname{Im} z > R_1\ ;\ \lambda_0 = 2\pi i) \\ C^{ij}(z) = \sum\limits_{n_0 \geq 0} C^{ij}_{-n_0}\, e^{-n_0\lambda_0 z} & (\operatorname{Im} z < -R_1\ ;\ \lambda_0 = 2\pi i) \end{cases}$$

Les scalaires $C^{ij}_{n_0}$ sont évidemment des invariants du problème. Tout comme les scalaires $A^{ij}_{n_0} = A_{n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j}$, ils constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes du problème (**). On peut d'ailleurs exprimer les $C^{ij}_{n_0}$ en fonction des $A^{ij}_{n_0}$ (et réciproquement) selon des formules polynomiales à coefficients rationnels (***).

(*) Si d'aventure l'axe réel porte des singularités, on les contourne toutes dans le même sens (positif, par exemple). (**) C'est-à-dire de l'équation (3.3.1) ou du système (3.3.2). (***) G.K. IMMINK a effectué le détail des calculs dans [Im.2]. Les $A^{ij}_{n_0}$ et les $C^{ij}_{n_0}$ sont exprimables en fonction des moules $\mathbf{(\cdot)}^+$ apparentés au moule zêta. Voir les §§1.4 et 3.10. Notons que si l'on prend l'intégrale de Laplace le long de demi-axes $\arg \zeta = \pm\theta$ avec $\theta \neq 0$, on obtient des solutions sectorielles $x_\pm(z, u)$ différentes, des scalaires $C^{ij}_{n_0}$ différents et des formules de passage des $C^{ij}_{n_0}$ aux $A^{ij}_{n_0}$ elles-aussi différentes. Les scalaires $A^{ij}_{n_0}$ sont donc plus fondamentaux (intrinsèques) que les $C^{ij}_{n_0}$.

SECTION 3.4 : EQUATIONS AUX DIFFERENCES DE NIVEAU ≤ 1 .

Raisonnons sur une équation aux différences d'ordre ν , directement donnée sous forme préparée (*)

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} D.x(z) = a(z, x(z), x(z+1), \dots, x(z+\nu)) \\ a(z, x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(\nu)}) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(\nu)}\} \,;\; a(\infty; 0, \dots, 0) = 0 \end{cases}$$

avec un opérateur linéaire $D = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z)\, e^{m\partial}$:

$$(3.4.2) \quad D : x(z) \longmapsto D\,x(z) = \sum_{m=0}^{\nu} a_m(z)\, x(z+m) \,,\; a_m(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$$

n'atteignant pas le niveau 1^+ :

$$(3.4.3) \quad a_0(\infty) \neq 0 \quad ; \quad a_\nu(\infty) \neq 0$$

et avec un second membre sans termes linéaires en x :

$$(3.4.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_{(m)}} a(z, x_{(0)}, \dots, x_{(\nu)}) = 0 \qquad \text{pour} \quad x_{(0)} = x_{(1)} = \dots x_{(\nu)} = 0$$

et enfin avec la condition de préparation proprement dite :

$$(3.4.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_{(m)}} a(z, x_{(0)}, \dots, x_{(\nu)}) = o\left(z^{m-v(m)-p_{\nu-m-1}}\right) \quad \text{pour} \;\; x_{(k)} = x(z+k)$$

où $x(z)$ désigne la solution formelle de (3.4.1) et où $v(m)$, p_m sont définis commeau §3.1. La condition de préparation est l´analogue de la condition (2.10.5)

(*) Notons au passage une légère différence entre cette forme préparée et la forme préparée (3.2.1) utilisée à la section 3.2. Ici, tous les termes linéaires en x figurent au premier membre. A la section 3.2, au contraire, on ne gardait au premier membre que la partie principale de la partie linéaire et on rejettait au second membre les termes en $o(z^{-1})$. C'est simple affaire de convention : ici, pour les problèmes à plusieurs niveaux, la partie principale de l'opérateur D (celle qui détermine la forme des blocs $z^{<i>}$) serait plus difficile à isoler que dans les problèmes à un seul niveau. Aussi est-il plus simple de mettre tous les termes linéaires au premier membre.

déjà rencontrée à propos des équations différentielles. Quitte à faire un changement d'inconnues du type (2.10.6), on peut toujours la supposer réalisée.

Définissons les ℓ_i , λ_i et τ_i comme au §3.1 et faisons provisoirement les trois hypothèses simplificatrices auxquelles nous sommes déjà habitués :

(i) Non résonance des multiplicateurs de même niveau.

Pour le niveau 1 cela veut dire :

(3.4.6) $$\left\{ \prod_{p_i=1} \ell_i^{n_i} = 1 \; ; n_i \in \mathbb{Z} \right\} \Longrightarrow \left\{ n_i = 0 \right\}$$

et pour tout niveau $p_i < 1$ cela veut dire qu'il n'y a pas de résonance extrinsèque (cf. définition 3.1.15). Autrement dit, que toutes les relations de résonance $\sum_{p_i=p} n_i \lambda_i = 0$ sont engendrables à partir des relations de résonance intrinsèque (2.10.17) ou (2.10.18).

(ii) Incommensurabilité des τ_i de tous les niveaux.

Autrement dit :

(3.4.8) $$\left\{ n_0 + n_1\tau_1 + \ldots n_\nu \tau_\nu = 0 \; ; \; n_i \in \mathbb{Z} \right\} \Longrightarrow \left\{ n_i = 0 \right\}$$

(iii) Absence de termes constants dans l'équation aux différences.

Autrement dit :

(3.4.9) $$a(z, 0, \ldots, 0) = 0$$

Proposition 3.4.1 (Intégrale formelle de niveau p. Allure et résurgence).

Ecrivons sous forme de fractions irréductibles $p_i = p_i'/p_i''$ les niveaux effectivement atteints par D et notons p_* le plus petit commun multiple des dénominateurs p_i'' . Introduisons comme d'habitude les temps parallèles $z_p = z^p$. Alors pour tout niveau $p > 0$, l'équation (3.4.1) possède une intégrale formelle $x(z_p, u)$ résurgente en z_p (c'est-à-dire de composantes résurgentes en z_p) et unique modulo une dilatation des paramètres. Cette intégrale formelle s'écrit :

(3.4.10) $$x(z_p, u) = \sum_{u} u^n . z^{[n]} . \Phi^n(z_p)$$

avec des composantes Φ^n qui sont des séries bigrades en z_p^{1/pp_*} :

(3.4.11) $$\Phi^n(z_p) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/pp_*}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{1/pp_*}]]$$

Principe de la démonstration.

Pour les multiindices n de somme $\|n\| = 1$, c'est-à-dire pour les n de la forme :

(3.4.12) $$\langle i \rangle = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \quad (\text{i-ème coordonnée égale à } 1)$$

on calcule $\Phi^{\langle i\rangle}$ comme en (2.10.14) avec des $D_n^{\langle\langle i\rangle\rangle}$ définis comme en (2.10.10) puis décomposés comme en (2.10.11) en somme d'un opérateur diviseur et d'un opérateur dividende. Pour les multiindices n de somme $\|n\| > 1$, on calcule Φ^n par la même récurrence qu'en (2.10.15) et (2.10.15bis) avec des D_p^n définis comme en (2.9.10) et (2.9.12) et décomposés comme en (2.9.14) (*).

Proposition 3.4.2 (Equation du pont et invariants holomorphes).

Considérons les mêmes ensembles Ω^p qu'à la définition 3.1.6. Alors, pour tout niveau p effectivement atteint, l'intégrale formelle de niveau p admet pour réseau de résurgence l'ensemble $\Omega^p_{pp_*}$ qui relève Ω^p sur $\mathbb{C}_{pp_*}$ et elle vérifie des équations de résurgence :

(3.4.13) $$\dot{\Delta}_\omega\, x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z_p, u)$$

Pour le niveau 1 on a :

(3.4.14) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\overset{\circ}{\omega} z} u^{n(\omega)} \left(\sum_{p_i = 1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{p_i < 1} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right)$$

avec $A^i_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_j ; p_j < 1]]$ et avec :

(*) Il faut en général prendre des rétrosolutions polarisées. Voir Appendice 1,p.586.

(3.4.14bis) $\quad {}^{\circ}\omega = n_0\lambda_0 \quad \text{et} \quad u^{n(\omega)} = \prod_{p_i=1} u_i^{n_i} \quad \text{si} \quad \dot{\omega} = n_0\lambda_0 + \sum_{p_i=1} n_i\lambda_i$

Pour tout niveau $p \in]0,1[$ on a :

(3.4.15) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{i=1}^{\nu} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad \left(A^i_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u]]\right)$$

avec des coefficients $A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$ qui sont chacun "p-homogènes de degré ω" : (le sens de cette expression est le même qu'à la proposition 2.10.5).

Mais ici, puisque les niveaux autres que 1 sont automatiquement fractionnaires, les invariants $\mathbb{A}_\omega$ correspondants sont asujettis à des contraintes a priori. Pour exprimer ces contraintes, il est commode d'introduire une "étoile" $\star$ qu'on fait agir sur l'intégrale formelle $x(z_p, u)$ comme en (2.10.24) et sur les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ comme en (2.10.25). On montre alors, en raisonnant comme au §2.10 (alinéa c.f) :

Proposition 3.4.3 : (Contraintes a priori)

L'étoile $\star$ laisse invariante l'intégrale formelle et les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$:

(3.4.16) $$\star\, x(z_p, u) = x(z_p, u)$$

(3.4.17) $$\star\, \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega$$

Avec les relations d'homogénéité (2.10.23bis) et les contraintes universelles de croissance (voir §10.5), les relations (3.4.7) sont les seules contraintes a priori auxquelles soient soumis les invariants $\mathbb{A}_\omega$.

Comme au §2.10 c.f., on s'aperçoit ici que les contraintes a priori "divisent par p_*" la quantité irréductible d'information invariante, si bien qu'il suffit de connaître les $\mathbb{A}_\omega$ pour ω parcourant non pas $\Omega^p_{pp_*}$ tout entier, mais n'importe quelle "tranche" Ω^p_p d'angle $2\pi p$ (voir le corollaire de la proposition 2.10.6). Donc, ici encore, la "masse invariante totale" varie continument en fonction des niveaux.

Il ne reste plus qu'à lever les trois hypothèses restrictives (i), (ii), (iii) faites au début de cette section.

La présence de <u>résonance extrinsèque</u> force à prendre les réseaux Ω^{p} de la définition (3.1.6) et à envisager, à chaque niveau p , des opérateurs invariants $\mathbb{A}_{\omega}$ qui sont p -<u>homogènes de degré</u> ω . Cela signifie que la composante $A^{i}_{\omega}(u)$ ne doit comporter que des termes en u^{n} avec

$$z^{[n]} / z^{<i>} = \exp\left(\omega z^{p} + o(z^{p})\right) \tag{3.4.18}$$

Ceci couvre en particulier le cas de ℓ_i ou λ_i multiples, cas où surgissent des polygones de Newton parasites (3.1.37) ou (3.1.38) voire même une arborescence (3.1.39) de type essentiellement <u>dissymétrique</u>, puisqu'elle possède un axe ou "tronc" privilégié.

Quant à la commensurabilité des τ_i elle ne peut, au pire, qu'introduire des logarithmes dans les composantes $\Phi^{n}(z_p)$.

Enfin, la présence dans l'équation aux différences (3.4.1) de termes constants en x $\left(a(z,0,\ldots,0) \neq 0\right)$ a exactement les mêmes conséquences que pour les équations différentielles : elle peut susciter chez les transformées de Borel $\mathbf{\Phi}^{n}(\zeta_p)$ des <u>coupures stellaires</u> (à moins que p ne soit le plus bas niveau) mais ne complique pas sensiblement le calcul des invariants holomorphes $\mathbb{A}_{\omega}$ car ceux-ci peuvent se lire sur une <u>intégrale epsilonnisée</u> du type (2.7.25) dont les composantes sont, elles, résurgentes au sens ordinaire (sans coupures stellaires). Voir Appendice 1, p.586.

<u>SECTION 3.5 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.</u>

Illustrons nos résultats généraux sur le cas linéaire. Considérons donc une équation linéaire homogène :

$$D \cdot x(z) = 0 \tag{3.5.1}$$

avec pour $\mathcal{D}$ un opérateur aux différences n'atteignant pas le niveau 1^{+} , c'est-à-dire de la forme (3.4.2).

S'agissant d'une équation linéaire, les hypothèses du début de la section 3.4 se simplifient. Il suffit de postuler que les rapports des ℓ_i de niveau 1 ainsi que les différences des λ_i de niveaux <1 sont distincts :

$$(3.5.2)\quad \begin{cases} \left(\ell_i/\ell_j = \ell_{i'}/\ell_{j'} \neq 1\ ,\ p_i=p_j=p_{i'}=p_{j'}=1\right) \Longrightarrow (i=i'\ ;\ j=j') \\ \left(\lambda_i-\lambda_j = \lambda_{i'}-\lambda_{j'} \neq 0\ ,\ p_i=p_j=p_{i'}=p_{j'}<1\right) \Longrightarrow (i=i'\ ,\ j=j') \end{cases}$$

et que les τ_i sont irrationnels et de différences irrationnelles.

Pour tout niveau $p=p'/p''$ l'intégrale formelle de (3.5.1) est évidemment linéaire en u . Elle s'écrit :

$$(3.5.3)\qquad x(z_p, u) = \sum_{i=0}^{\nu} u_i\ z^{\langle i\rangle}\ \phi^{\langle i\rangle}(z_p)$$

avec $\phi^{\langle i\rangle}(z_p) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/pp_*}]]$, avec p_* comme à la section précédente et avec :

$$(3.5.4)\qquad z^{\langle i\rangle} = z^{\tau_i}\ \ell_i^{z}\ \exp\Big(\sum_{0<p<p_i} \lambda_{i,p}\, z^{p}\Big) \qquad (1\leq i\leq \nu)$$

Au niveau $p=1$, les seuls Δ_ω susceptibles d'agir sur $x(z_1,u)$ correspondent à des indices ω de la forme :

$$(3.5.5)\qquad \omega = [n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j]_q \qquad (n_0\in\mathbb{Z},\ i\neq j,\ p_i=p_j=1,\ 1\leq q\leq p_*)$$

$$(3.5.5\text{bis})\quad \omega = [n_0\lambda_0+\lambda_i]_q \ \text{ ou }\ \omega=[n_0\lambda_0-\lambda_i]_q \quad (n_0\in\mathbb{Z}\ ;\ p_i=p,\ 1\leq q\leq p_*)$$

et on a les équations de résurgence :

$$(3.5.6)\qquad \dot{\Delta}_\omega\ x(z_1,u) = \mathbb{A}_\omega\ x(z_1,u)$$

avec, dans les cas (3.5.5) et (3.5.5bis) respectivement :

$$(3.5.7)\qquad \mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}\ A_{i,j}^{n_0\|q}\ u_i\,\frac{\partial}{\partial u_j} \qquad\qquad (A_{i,j}^{n_0\|q}\in\mathbb{C})$$

$$(3.5.7\text{bis})\quad \mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}\sum_{p_j<p_i} A_{i,j}^{n_0\|q}\, u_i\frac{\partial}{\partial u_j}\ \text{ ou }\ \mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}\sum_{p_j<p_i} A_{j,i}^{n_0\|q}\ u_j\frac{\partial}{\partial u_i}$$

A chaque niveau $\rho \in]0,1[$ les seules Δ_ω susceptibles d'agir sur $x(z_\rho, u)$ correspondent à des indices ω de la forme :

(3.5.8) $$\omega = [\lambda_i - \lambda_j]_q \qquad \text{avec} \quad \rho_i = \rho_j = \rho$$

ou (s'il existe d'autres niveaux $< \rho$) de la forme :

(3.5.9) $$\omega = [\pm \lambda_i]_q \qquad \text{avec} \quad \rho_i = \rho$$

On a encore l'équation de résurgence (3.5.6) mais avec cette fois-ci des opérateurs de la forme :

(3.5.10) $$\begin{cases} A_{[\lambda_i - \lambda_j]_q} = A_{ij}^q \, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (\rho_i = \rho_j = \rho) \\ A_{[\lambda_i]_q} = \displaystyle\sum_{\rho_j < \rho_i} A_{ij}^q \, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (\rho = \rho_i) \\ A_{[-\lambda_j]_q} = \displaystyle\sum_{\rho_i < \rho_j} A_{ij}^q \, u_i \dfrac{\partial}{\partial u_j} & (\rho = \rho_j) \end{cases}$$

Pas plus qu'au §2.8, l'emploi dans ces trois cas d'une même notation A_{ij}^q ne prête à confusion, puisque le signe de $\rho_i - \rho_j$ diffère à chaque fois.

Bien entendu, pour tout niveau, les invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont soumis aux contraintes a priori :

(3.5.11) $$\maltese\, \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega$$

qui "divisent par ρ_* " la quantité totale d'information invariante (et qui ici, dans le cas linéaire, sont très simples à interpréter).

Levons pour finir les deux hypothèses restrictives du début.

La rationnalité éventuelle de certains τ_i ou de certains $\tau_i - \tau_j$ ne peut, au pire, qu'introduire des $\log z_\rho$ dans les composantes $\Phi^n(z_\rho)$.

(*) Comme d'habitude, on note $[n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j]_q$ les points situés au-dessus de $n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j$ avec un indice q pour désigner le feuillet.

L'égalité éventuelle de certains rapports ℓ_i / ℓ_j (au niveau 1) ou de certaines différences $\lambda_i - \lambda_j$ (aux niveaux $\mu < 1$) conduit à remplacer l'identité (3.5.7) par

$$\mathbb{A}_\omega = e^{-n_0 \lambda_0 z} \sum_{\omega = n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j} A^{n_0}_{i,j} \; u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \tag{3.5.12}$$

et à remplacer la première des identités (3.5.10) par :

$$\mathbb{A}_\omega = \sum_{\lambda_i - \lambda_j = \omega} A^q_{ij} \; u_i \frac{\partial}{\partial u_j} \tag{3.5.13}$$

Enfin l'éventuelle multiplicité de certains ℓ_i au niveau 1 ou de certains λ_i au niveaux inférieurs provoque, comme à la section précédente, une arborescence, mais avec cette différence (tenant à la linéarité) que tous les multiplicateurs multiples (nuls ou non nuls) et les polygones de Newton (principal ou parasites) qui leur sont attachés (voir §3.1h) jouent maintenant des rôles symétriques, si bien qu'il n'y a plus dans l'arborescence, d'axe ou de "tronc" privilégié" (voir aussi la fin de §2.11).

SECTION 3.6:INTRODUCTION AU NIVEAU 1^+.

Le niveau 1^+ , c'est la grande nouveauté par rapport aux équations différentielles. Jusqu'à présent, le parallélisme avec le chapitre 2 était à peu près parfait : il suffisait de transposer démonstrations et énoncés. Maintenant, il va falloir innover et entrer dans les détails. Nous allons, dans cette section, nous familiariser avec le niveau 1^+ , en étudiant la plus simple de toutes les équations qui le manifeste. Il s'agit de l'équation affine :

$$x(z) - b(z)\, x(z+1) = a(z) \qquad (a(z), b(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}) \tag{3.6.1}$$

avec

$$a(z) = o(1) \quad , \quad b(z) = \mathcal{O}(z^{-1}) \tag{3.6.1bis}$$

L'opérateur aux différences est ici :

(3.6.2) $$D = 1 - b(z)\, e^{\partial}$$

avec une série $b(z)$ qu'il est commode d'écrire sous la forme :

(3.6.3) $$b(z) = e^{-1-\lambda} \cdot z^{-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-n}\right)$$

pour un scalaire λ défini modulo $\lambda_0 = 2\pi i$.

Nous allons voir que l'équation (3.6.1) possède deux niveaux. Le plus bas des deux est le niveau 1. Bien qu'il présente un intérêt moindre, c'est par lui qu'il faut commencer. L'intégrale formelle qui lui correspond est facile à construire:

<u>Lemme 3.6.1</u> <u>(Intégrale formelle de niveau 1)</u>

Soit $z_1 = z$ le temps de niveau 1. L'équation (3.6.1) possède une unique intégrale formelle de niveau 1. Elle est prograde et de la forme :

(3.6.4) $$x(z_1, u) = \varphi^0(z_1) + u\, z^{\langle 1 \rangle}\, \varphi^1(z_1)$$

avec $\varphi^0(z_1)\,,\ \varphi^1(z_1) \in \mathbb{C}[[z_1^{-1}]]$ et avec :

(3.6.5) $$z^{\langle 1 \rangle} = e^{\lambda z} z^{z} z^{\tau} \qquad \left(\tau = -\tfrac{1}{2} - \beta_1\right)$$

Elle est résurgente, avec pour réseau l'ensemble :

(3.6.6) $$\Omega^1 = \lambda_0 \mathbb{Z} = 2\pi i\, \mathbb{Z}$$

et pour tout $\omega \in \Omega$ elle vérifie les équations de résurgence :

(3.6.7) $$\dot{\Delta}_\omega\, x(z_1, u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z_1, u) \quad \text{avec } \mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z} A'_\omega\, u \frac{\partial}{\partial u} \ (A'_\omega \in \mathbb{C})$$

Soit, composante par composante :

(3.6.7bis) $$\Delta_\omega\, \varphi^0 = 0 \ , \quad \Delta_\omega\, \varphi^1 = A^1_\omega\, \varphi^1 \qquad (\forall \omega \in$$

Lemme 3.6.2 (Transformées de Borel et solutions sectorielles)

α) La composante $\varphi^1(z_1)$ possède une transformée de Borel $\boldsymbol{\varphi}^1(\zeta_1)$ qui est de croissance exponentielle dans toute direction (*). Soumettant $\boldsymbol{\varphi}^1$ à la transformation de Laplace, on obtient deux fonctions $\varphi^1_+(z_1)$ et $\varphi^1_-(z_1)$ qui sont définies respectivement sur des domaines $\mathcal{J}_+$ et $\mathcal{J}_-$ de la forme :

(3.6.8) $$\mathcal{J}_+ = -\mathcal{J}_- = \{\operatorname{Re} z_1 > R\} \cup \{|\operatorname{Im} z_1| > R'\} \qquad (R, R' \gg 1)$$

et qui livrent deux solutions $z^{<1>}\varphi^1_\pm(z_1)$ de l'équation sans second membre associée à (3.6.1). Chacune des fonctions $\varphi^1_\pm(z_1)$ possède, à l'infini sur son domaine de définition, un même développement asymptotique, qui est $\varphi^1(z_1)$. Sur chacune des deux parties connexes de $\mathcal{J}_+ \cap \mathcal{J}_-$ (domaine commun de définition) on a les formules de connexion :

(3.6.8bis) $$\varphi^1_+(z_1) = \varphi^1_-(z_1)\ \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_{2\pi i m}\, e^{-2\pi i m z_1}\Big) \qquad (-\operatorname{Im} z_1 > R')$$

(3.6.8ter) $$\varphi^1_-(z_1) = \varphi^1_+(z)\ \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_{-2\pi i m}\, e^{+2\pi i m z_1}\Big) \qquad (+\operatorname{Im} z_1 > R')$$

β) La composante $\varphi^0(z_1)$ possède une transformée de Borel $\boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_1)$ qui est une fonction entière de ζ_1. Cette fonction entière est de croissance exponentielle (et même bornée) sur toute direction $|\operatorname{Arg}\zeta_1| < \pi/2$. Au contraire, sur toute direction $|\operatorname{Arg}(-\zeta_1)| < \pi/2$, $\boldsymbol{\varphi}^0$ est en général de croissance supra-exponentielle. D'une façon précise on a la majoration suivante (**) :

(3.6.9) $$|\boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_1)| \leqslant c_1\ \exp\left(c_2\ \exp|\zeta_1|\right) \qquad (c_1, c_2 > 0)$$

(*) Sauf évidemment sur l'axe imaginaire, puisque celui-ci porte le réseau de résurgence Ω^1. Mais $\boldsymbol{\varphi}^1$ est de croissance exponentielle sur toute parallèle à l'axe imaginaire et la fonction $(e^{\zeta_1}-1)\,\boldsymbol{\varphi}^1(\zeta_1)$ qui est définie et localement bornée sur l'axe imaginaire "approché par la droite" ainsi que sur l'axe imaginaire "approché par la gauche", y est de croissance exponentielle.

(**) elle peut encore être affinée mais suffira à nos besoins.

Soumettant $\boldsymbol{\Phi}^{\circ}$ à la transformation de Laplace (avec un axe d'intégration dans le demi-plan droit) on obtient une fonction $\Phi^{\circ}_{+}(z_1)$ définie sur un domaine $\mathcal{G}_{+}$ de la forme (3.6.8). Cette fonction $\Phi^{\circ}_{+}(z_1)$ est solution de l'équation (3.6.1) et admet à l'infini le développement asymptotique $\Phi^{\circ}(z_1)$. On peut aussi la calculer comme somme de la série :

$$(3.6.11)\quad \begin{cases} \Phi^{\circ}_{+}(z_1) & = a(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b(z_1)\, e^{\partial_1} \right]^{n} a(z) \\ & = a(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} b(z_1)\, b(z_1+1)\, b(z_1+2) \ldots b(z_1+n-1)\, a(z_1+n) \end{cases}$$

Schéma des démonstrations.

La composante $\Phi'(z_1)$ satisfait l'équation :

$$(3.6.12)\quad z^{\langle 1\rangle}\ \Phi'(z_1) = b(z_1)\ (z+1)^{\langle 1\rangle}\ \Phi'(z_1+1)$$

D'où

$$(3.6.13)\quad \log \Phi'(z_1) - \log \Phi'(z_1+1) = S(z_1)$$

avec, compte tenu de (3.6.3) et (3.6.5) :

$$(3.6.14)\quad \begin{cases} S(z_1) & = \log \left(e^{\lambda}\cdot(z_1+1)\, b(z_1)\, (1+z_1^{-1})^{z_1+\tau}\right) \\ & = -1 + \log\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z_1^{-n}\right) + (1+z_1+\tau)\log(1+z_1^{-1}) \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} s_n\, z_1^{-n} \in \mathbb{C}\{z_1^{-1}\} \end{cases}$$

D'où, pour tout ω de la forme $2\pi i n$, les équations de résurgence :

$$(3.6.15)\quad \Delta_{\omega} \log \Phi'(z_1) = A_{\omega} = \mathrm{Cte}$$

avec

$$(3.6.16)\quad A_{\omega} = 2\pi i\ \mathbf{S}(\omega) = 2\pi i \sum_{n=2}^{\infty} s_n \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$

Passons maintenant à la composante $\varphi^{\circ}(\mathfrak{z}_1)$. C'est l'unique série entière en $\mathfrak{z}_1^{-1}$ qui vérifie (3.6.1). Formellement, $\varphi^{\circ}(\mathfrak{z}_1)$ est donnée par la série figurant au second membre de (3.6.11). D'où, après transformation de Borel :

$$(3.6.17)\quad \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}^{\circ}(\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}_n(\zeta_1) & \text{avec} \\ \mathbf{K}_0(\zeta_1) = \mathbf{a}(\zeta_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_n = \boldsymbol{b} * \left(e^{-\zeta_1}\mathbf{K}_{n-1}\right) & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

A partir de là on montre facilement que $\boldsymbol{\varphi}^{\circ}(\zeta_1)$ est de croissance exponentielle dans le demi-plan droit, mais pas dans le demi-plan gauche, où l'on n'a que la majoration (3.6.9). Grâce à la croissance exponentielle dans le demi-plan droit (ou, plus simplement, grâce à la sommabilité de la série (3.6.11)) on peut construire la solution sectorielle $\varphi^{\circ}_{+}(\mathfrak{z}_1)$, mais la question des invariants n'en est pas pour autant résolue. En effet, les A_ω livrés par l'équation (3.6.7) permettent uniquement de discuter l'analycité de φ^1 et de classer analytiquement les équations homogènes :

$$(3.6.18)\qquad x(\mathfrak{z}) - b(\mathfrak{z})\; x(\mathfrak{z}+1) = 0$$

mais ils ne permettent ni de discuter l'analycité de φ° ni de classer analytiquement les équations inhomogènes (3.6.1). Ces équations possèdent donc d'autres invariants analytiques que les A_ω portés par la résurgence de niveau 1. D'où deux questions du plus vif intérêt :

(i) ces invariants analytiques supplémentaires sont-ils holomorphes ?

(ii) si oui, sont-ils portés par une résurgence relative à un temps parallèle à $\mathfrak{z}_1$? et lequel ?

Il se trouve que la réponse aux deux questions est <u>oui</u> et que le temps parallèle en question est le temps de niveau 1^{+} :

(3.6.19) $$z_{1+} = z^{\log z} = z_1^{\log z_1} \qquad (*)$$

si bien que les invariants supplémentaires que nous cherchons sont des invariants de niveau 1^+ .

L'existence d'une résurgence de niveau 1^+ demandera évidemment à être démontrée, mais il y a déjà un indice qui incite à chercher dans cette direction : C'est la forme du bloc élémentaire $z^{\langle 1\rangle}$ qui, relativement au temps z_{1+} , s'écrit :

(3.6.20) $$z^{\langle 1\rangle} = z^{\tau}.\exp\left(z_{1+} + \lambda z_1\right) \quad \text{avec} \quad z_1 = o(z_{1+})$$

Jusqu'à présent, chaque fois que nous avions des blocs $z^{[n]}$ de la forme $\exp\left(\omega(n) z^{k} + o(z^{k})\right)$ pour z grand et $\omega(n) \neq 0$, nous avions de la résurgence en $z_k = z^k$. Or le terme dominant dans le bloc (3.6.20) est justement z_{1+} puisque $z_1 \sim z_{1+} / \log z_{1+}$. Plus précisément :

(3.6.21) $$z_1 = h(z_{1+}) = \left(z_{1+} / \log z_{1+}\right) \left\{1 + H(z_{1+})\right\}$$

avec

(3.6.22) $$H(z_{1+}) \sim \left(\log\log z_{1+}\right) / \log z_{1+} \quad \text{quand} \quad z_{1+} \to \infty$$

D'une façon plus précise encore :

(3.6.23) $$H(z_{1+}) \in \mathbb{C}\left\{\left(\log z_{1+}\right)^{-1}, \left(\log z_{1+}\right)^{-1}\left(\log\log z_{1+}\right)\right\}$$

(*) Dans des problèmes plus complexes, par exemple dans l'étude de certains <u>systèmes</u> aux différences à inconnues nombreuses, on est conduit à introduire des temps parallèles

$$z_{\alpha_0;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = z^{\alpha_0}(\log z)^{\alpha_1}(\log\log z)^{\alpha_2}\ldots(\log\ldots\log z)^{\alpha_n}$$

Avec ces notations on a bien sûr $z_{1+} = z_{1;1}$. Toutefois, comme les temps parallèles généraux $z_{\alpha_0;\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ n'interviennent <u>jamais</u> dans les <u>équations</u> aux différences (même non linéaires; même d'ordre élevé) nous préférons user ici de la notation z_{1+} .

Ceci suggère d'examiner si, par hasard, on n'aurait pas résurgence en z_{1+}. Pour plus de clarté, nous commencerons par donner d'un seul coup tous les énoncés relatifs au niveau 1^+. Les démonstrations suivent, dans un ordre légèrement différent.

Une remarque préliminaire, relative aux notations : jusqu'ici nous avions l'habitude de noter uniformément $\varphi^n(z_p)$ les composantes des intégrales formelles des différents niveaux p. Ici, toutefois, il faudra examiner de très près les rapports entre les composantes de niveaux 1 et 1^+. Nous les noterons donc respectivement φ^n et ϕ^n $(n=0,1)$ pour éviter toute confusion. Nous aurons ainsi pour l'intégrale de niveau 1^+ une expression :

$$(3.6.24) \qquad x(z_{1+}, u) = \phi^0(z_{1+}) + u.z^{<1>}. \phi^1(z_{1+})$$

avec $z^{<1>}$ comme en (3.6.20).

Lemme 3.6.3 (Intégrale de niveau 1^+ : modèles formel et sectoriel)

α) Seule la composante ϕ^0 possède un modèle formel simple (*). Il est prograde et, au changement de variable près, coincide avec celui de φ^0 :

$$(3.6.25) \qquad \phi^0(z_{1+}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, h^{-n}(z_{1+}) \quad \left(\text{avec } \varphi^0(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z_1^{-n}\right)$$

β) ϕ^0 et ϕ^1 possèdent toutes deux des modèles sectoriels de niveau 1^+. Eux aussi se déduisent des modèles sectoriels de niveau 1 (décrits au lemme 3.6.2) par simple changement de variable. Ainsi, pour toute détermination de la fonction $h(z_1) = z_1 \log z_1$, la composante ϕ^0 possède un modèle sectoriel :

$$(3.6.26) \qquad \phi^0_+(z_{1+}) = \varphi^0_+(z_1) \qquad \text{sur le domaine } h(S_+)$$

et la composante ϕ^1 possède deux modèles sectoriels :

(*) Cela tient en définitive à ce que $\phi^0(z_{1+})$, contrairement à $\phi^1(z_{1+})$, ne possède pas de coupures stellaires issues de l'origine. Voir le lemme 3.6.4 ci-après.

(3.6.27) $$\varphi^1_+(z_{1+}) = \varphi^1_+(z_1) \quad \text{sur le domaine } k(\mathcal{S}_+)$$

(3.6.28) $$\varphi^1_-(z_{1+}) = \varphi^1_-(z_1) \quad \text{sur le domaine } k(\mathcal{S}_-)$$

avec, sur les domaines $k(\mathcal{S}_+) \cap k(\mathcal{S}_-)$, les formules de connexion transposées de (3.6.8bis) et (3.6.8ter).

Bien entendu, la seule information nouvelle qu'apporte ce lemme, c'est l'existence pour φ^0 d'un modèle formel simple (et de caractère prograde). Pour le reste (modèles sectoriels) ce lemme ne fait que reprendre le lemme 3.6.2 avec la variable z_{1+}. Mais les modèles sectoriels de niveau 1^+ vont nous aider (surtout pour la composante φ^1) à construire les transformées de Borel de niveau 1^+ qui, elles, n'ont plus aucun rapport avec les transformées de Borel de niveau 1.

Lemme 3.6.4 (Intégrale de niveau 1^+ : modèle convolutif)

Dans le modèle convolutif, l'intégrale de niveau 1^+ est résurgente stellaire (*). Cela veut dire que les composantes $\varphi^0(z_{1+})$ et $\varphi^1(z_{1+})$ possèdent des transformées de Borel $\boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_{1+})$ et $\boldsymbol{\varphi}^1(\zeta_{1+})$ qui peuvent présenter des coupures, mais uniquement de type stellaire (**). Ces transformées de Borel (***) sont des germes de fonctions analytiques ramifiées à l'origine, donc définies soit au-dessus de $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de $\log \zeta_{1+}$) soit au-dessus de secteurs de $\mathbb{C}_\infty$. De plus

α) La composante $\boldsymbol{\varphi}^1(\zeta_{1+})$ est définie analytique dans tout feuillet de $\mathbb{C}_\infty$ situé au-dessus de $\{\mathrm{Re}\,\dot{\zeta}_{1+} > 0\}$ ou de $\{\mathrm{Re}\,\dot{\zeta}_{1+} < 0\}$. Elle présente

(*) Voir §1.3.

(**) Rappelons que les coupures stellaires sont rectilignes; qu'elles commencent soit à l'origine, soit au-dessus d'un point ω du réseau de résurgence de la fonction; et enfin qu'elles ne s'interrompent pas.

(***) On note $\boldsymbol{\varphi}^i(\zeta_{1+})$ le mineur et $\boldsymbol{\Phi}^i(\zeta_{1+})$ le majeur. Quand on dit "transformée de Borel" (sans plus) on a en vue le mineur.

en général des coupures stellaires, nécessairement situées au-dessus de l'axe imaginaire (Voir figures 1,2,3,4).

Au-dessus du demi-plan droit on a :

$$(3.6.29)\quad \Phi^1(\zeta_{1+}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{J}} \Phi^1_+(z_{1+})\, e^{z_{1+}\zeta_{1+}}\, dz_{1+} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(\mathcal{J})} \Phi^1_+(z_1)\, e^{k(z_1)\zeta_{1+}}\, dk(z_1)$$

et au-dessus du demi-plan gauche on a :

$$(3.6.30)\quad \Phi^1(\zeta_{1+}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{J}} \Phi^1_-(z_{1+})\, e^{z_{1+}\zeta_{1+}}\, dz_{1+} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(\mathcal{J})} \Phi^1_+(z_1)\, e^{k(z_1)\zeta_{1+}}\, dk(z_1)$$

pour un chemin infini $\mathcal{J}$ convenablement choisi (*) dans $k(\mathcal{S}_+)$ et $k(\mathcal{S}_-)$ respectivement.

β) La composante $\Phi^0(\zeta_{1+})$ est définie par la série :

$$(3.6.31)\quad \Phi^0(\zeta_{1+}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k^{-n})^{\wedge}(\zeta_{1+}) \quad \begin{cases} (\,)^{\wedge} = \text{Borel de}(\,) \\ 0 < |\dot{\zeta}_{1+}| < \varepsilon \end{cases}$$

au voisinage de l'origine. Elle se prolonge analytiquement le long de tout chemin de $\mathbb{C}_\infty$ qui ne rencontre pas l'origine et ne passe pas au-dessus de l'axe vertical d'abscisse -1 . Elle possède en général des singularités au-dessus du point -1 et des coupures stellaires au-dessus de la verticale d'abcisse -1 . Ces dernières peuvent être visibles de l'origine (figure 5) ou seulement après un tour de $\pm 3\pi/2$ autour de -1 (figure 6) ou encore après un tour de $\pm 5\pi/2$ (figure 7). Elles peuvent aussi faire totalement défaut (figure 8). Ce sont là les seuls cas possibles.

(*) Dans (3.6.29) (resp. 3.6.30) on prend le chemin $\{ z_{1+} ;\ \mathrm{Re}(z_{1+}\zeta_{1+}) = r \}$ pour r réel grand, puis on l'infléchit vers la gauche (resp. vers la droite) à ses deux extrémités, mais sans sortir de $k(\mathcal{S}_+)$ (resp. $k(\mathcal{S}_-)$).

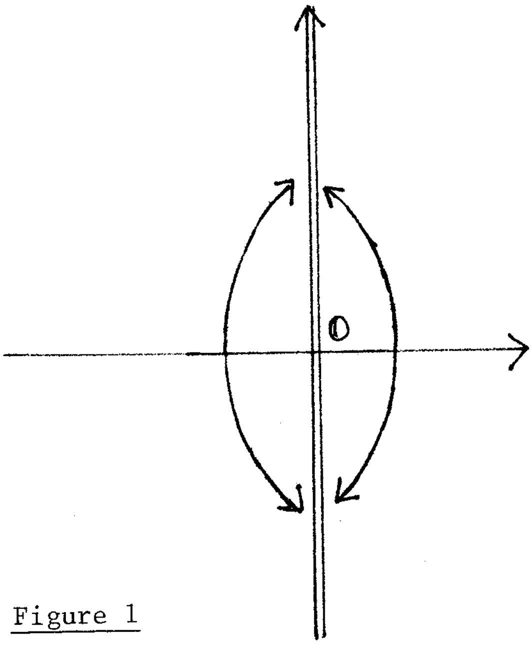


Figure 1

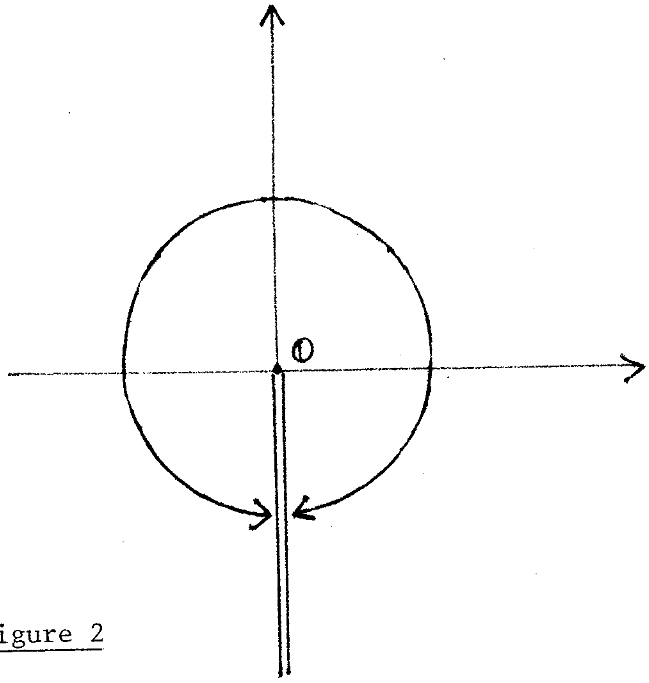


Figure 2

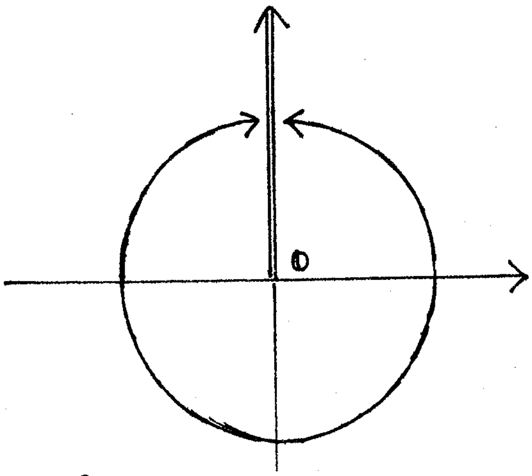


Figure 3

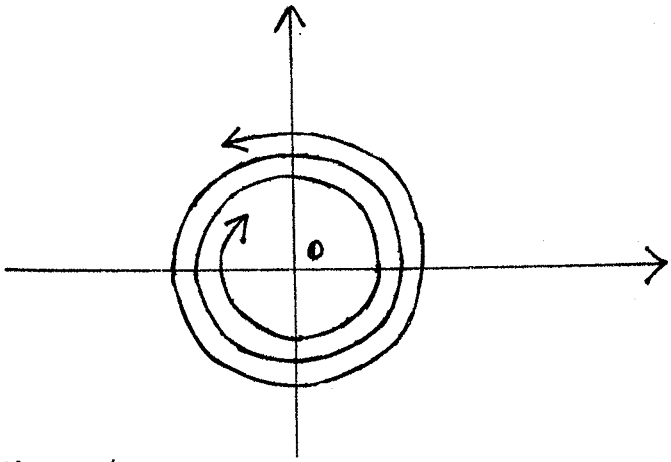


Figure 4

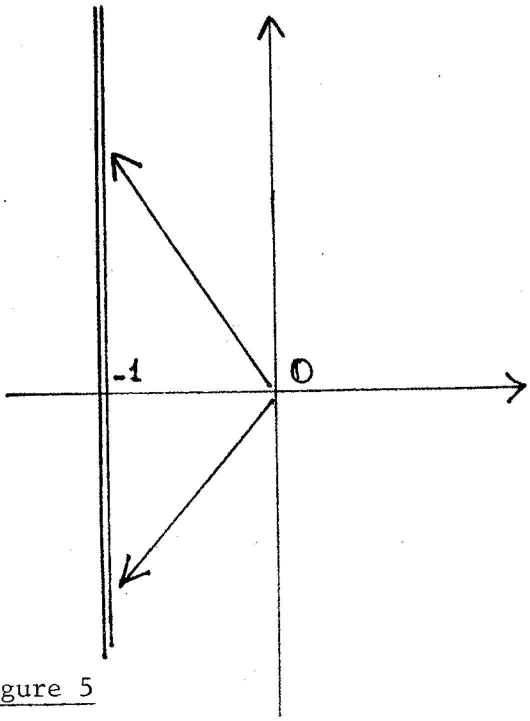


Figure 5

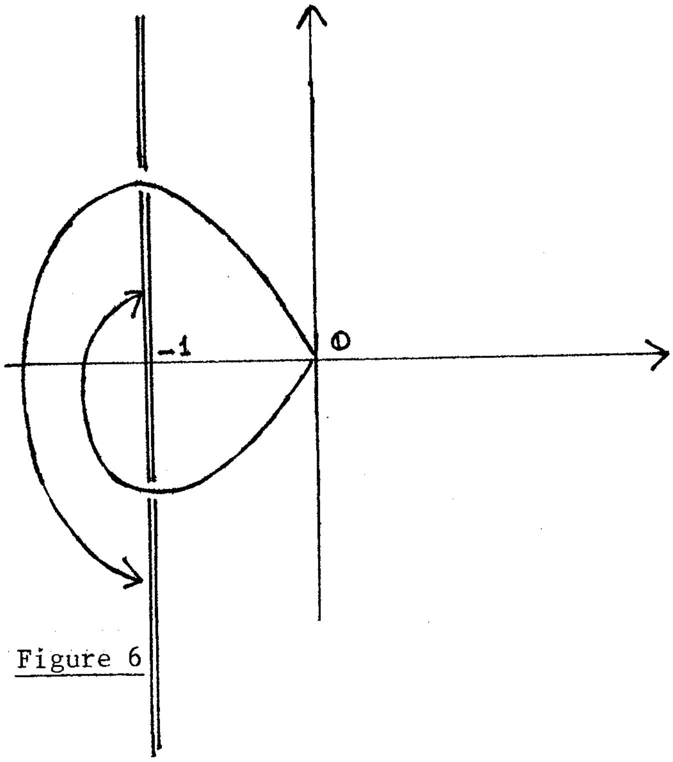


Figure 6

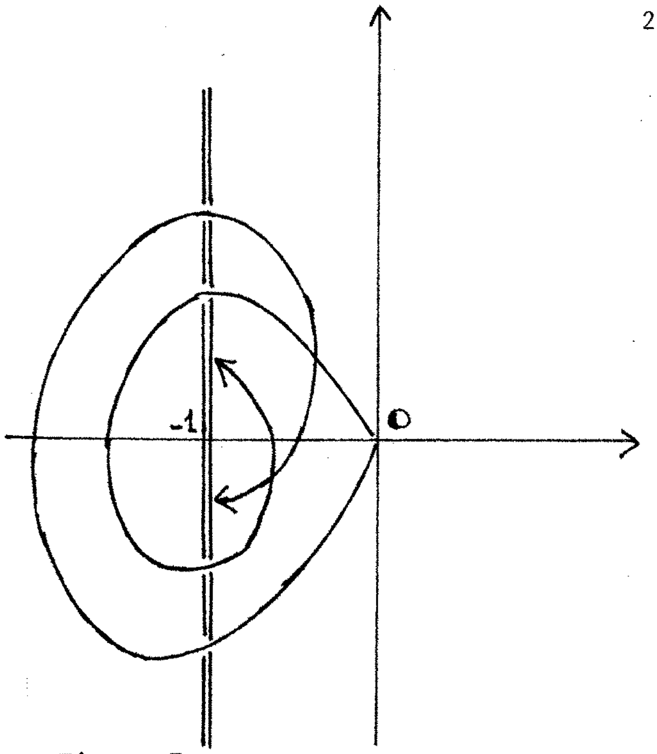


Figure 7

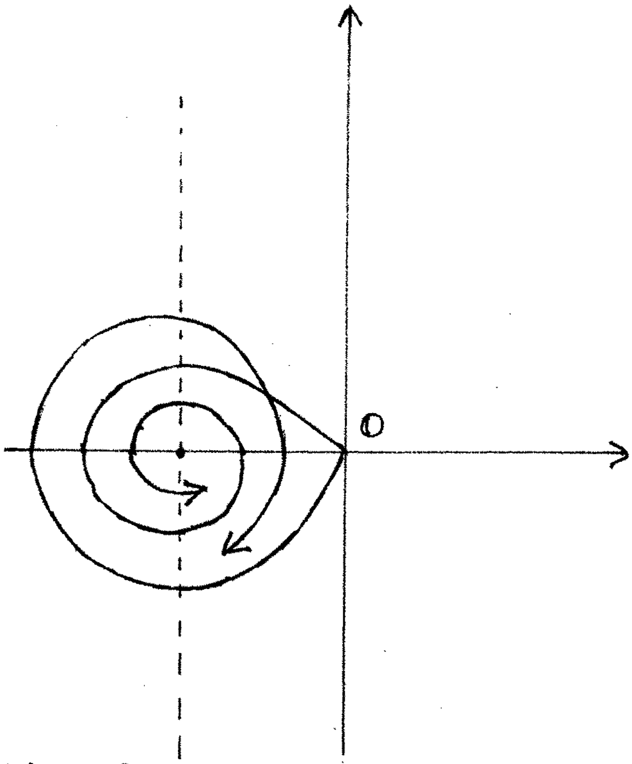


Figure 8

(Les figures 1,2,3,4 sont relatives à $\boldsymbol{\varphi}^1$ et les figures 5.6.7,8 sont relatives à $\boldsymbol{\varphi}^0$. Les traits doubles représentent des coupures stellaires).

Remarque 1 : Au-dessus du demi-plan droit, $\boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_{1+})$ peut aussi être défini au moyen d'une intégrale analogue à (3.6.29)

$$(3.6.32) \qquad \boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_{1+}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi^0(z_{1+})\, e^{z_{1+}\zeta_{1+}}\, dz_{1+} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k(\gamma)} \varphi^0_+(z_1)\, e^{k(z_1)\zeta_{1+}}\, dk(z_1)$$

Remarque 2 : Comme toujours quand on parle de fonctions résurgentes, le germe $\boldsymbol{\varphi}^n(\zeta_{1+})$ est qualifié par un germe antécédent, ou majeur, noté $\boldsymbol{\Phi}^n(\zeta_{1+})$ qui est défini modulo un germe régulier à l'origine. Le majeur $\boldsymbol{\Phi}^n$ est lié au mineur $\boldsymbol{\varphi}^n$ par :

$$(3.6.33) \qquad \boldsymbol{\Phi}^n(\zeta_{1+}) - \boldsymbol{\Phi}^n(\zeta'_{1+}) \equiv \boldsymbol{\varphi}^n(\zeta_{1+}) \quad \text{avec } \log \zeta_{1+} = 2\pi i + \log \zeta'_{1+}$$

Ici, la composante $\boldsymbol{\varphi}^0(\zeta_{1+})$ est intégrable à l'origine et son antécédent $\boldsymbol{\Phi}^0(\zeta_{1+})$ est l'antécédent canonique (voir §1.3.a). La composante $\boldsymbol{\varphi}^1(\zeta_{1+})$ en revanche n'est généralement pas intégrable à l'origine et il importe de connaître explicitement son antécédent $\Phi^1(\zeta_{1+})$. On l'obtient à partir des modèles sectoriels $\Phi^1_\pm(\zeta_{1+}) = \Phi^1_\pm(\zeta_1)$ au moyen d'une intégrale de type (1.3.18) dont la borne initiale u (proche de 0) est sans importance puisque l'antécédent n'est défini que modulo un germe régulier à l'origine. Quand les mineurs présentent des coupures stellaires, les majeurs en présentent aussi, mais ils sont définis dans des secteurs plus grands (d'ouverture supérieure de 2π aux précédents).

Lemme 3.6.5 (Intégrale de niveau 1^+ : équation du pont)

Les seules dérivations Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle de niveau 1^+ correspondent à des indices ω de $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de $\log \zeta_{1+}$) qui sont au-dessus du point -1 (donc $\dot\omega = -1$). Ces dérivations donnent lieu aux équations de résurgence :

(3.6.34) $$\dot\Delta_\omega \; x(z_{1+}, u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z_{1+}, u) \qquad (\dot\omega = -1)$$

avec

(3.6.35) $$\mathbb{A}_\omega = A_\omega(z_1)\,\frac{\partial}{\partial u} \qquad (*)$$

(3.6.36) $$A_\omega(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\omega^n \; e^{2\pi i n z_1}$$

Composante par composante cela donne :

(3.6.37) $$\Delta_\omega \; \Phi^0(z_{1+}) = z_1^{\tau}\, e^{\lambda z_1}\, A_\omega(z_1)\, \Phi^1(z_{1+}) \qquad (*)$$

(3.6.38) $$\Delta_\omega \; \Phi^1(z_{1+}) = 0$$

Pour l'interprétation de (3.6.36) et (3.6.37) voir (3.6.5) et (3.6.5bis). Pour le calcul effectif de $\mathbb{A}_\omega$ et des A_ω^n voir §3.6.f et §3.10.

(*) Bien distinguer $z_1 = z$ et $z_{1+} = z^{\log z}$.

<u>Lemme 3.6.6</u> <u>(Invariants holomorphes de niveau 1^+ et contraintes a priori)</u>

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ (et donc les scalaires A_ω^n qui les définissent) sont des invariants analytiques et holomorphes de l'équation (3.6.1). Ils sont dits invariants de niveau 1^+. Ils ne sont toutefois pas indépendants. Si en effet on note $\overset{\circ}{\omega}$ le point de $\mathbb{C}_\infty$ obtenu en appliquant à ω une rotation de r tours, autrement dit :

(3.6.39) $$\log \overset{\circ}{\omega} = 2\pi i\, r + \log \omega$$

alors les invariants d'indices ω et $\overset{\circ}{\omega}$ sont liés par :

(3.6.40) $$\mathbb{A}_{\overset{\circ}{\omega}} = e^{2\pi i\, r\, z_1}\, \mathbb{A}_\omega$$

ce qui, pour leurs coefficients de Fourier, se traduit par :

(3.6.41) $$A_{\overset{\circ}{\omega}}^{n+r} = A_\omega^n$$

On voit que si on note $-1:r$ le point qui relève -1 sur le r-ème feuillet de $\mathbb{C}_\infty$, l'opérateur $e^{-2\pi i r z_1}\, \mathbb{A}_{-1:r}$ et ses coefficients de Fourier $A_{-1:r}^{n+r}$ seront indépendants de r. Il suffit donc de connaître $\mathbb{A}_\omega$ pour <u>un seul</u> point ω, par exemple le point $-1:0$ qui relève -1 sur le feuillet principal de $\mathbb{C}_\infty$ (avec coupure sur l'axe réel positif). Pour simplifier, on note -1 ce relevé privilégié de -1 et on dit que l'on n'a essentiellement qu'<u>une seule</u> équation de résurgence de niveau 1^+, à savoir :

(3.6.42) $$\dot{\Delta}_{-1}\, x(z_{1^+}, u) = \mathbb{A}_{-1}\, x(z_{1^+}, u) \quad \text{(avec } -1 \text{ pour } -1:0)$$

<u>Conjecture 1.</u> <u>(Croissance des invariants de niveau 1^+)</u>

Il y a des indices (cf. §3.10) qui suggèrent que la série de Fourier formelle (3.6.36) converge pour tout z_1 et que sa somme $A(z_1)$ est sous-exponentielle en $z_{1^+} = z_1 \log z_1$. Soit :

(3.6.43) $$\lim_{|\zeta_1|\to\infty} \frac{\log |A_\omega(\zeta_1)|}{|\zeta_1|\,|\log \zeta_1|} = 0$$

Relativement aux coefficients A_ω^n cette conjecture s'écrit :

(3.6.44) $$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log\log\left(1/|A_\omega^n|\right) = \infty \qquad A_\omega^n \to 0.$$

Corollaire de la conjecture 1 :

Si (3.6.43) est réalisée, le cas de figure 5 n'est pas possible. Les seules coupures stellaires que $\Phi^0(\zeta_{1^+})$ puisse posséder sont celles des figures 6 ou 7. Elle peut aussi ne pas en posséder (figure 8).

Conjecture 2. (Liberté des invariants de niveau 1^+)

Les invariants $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ ne sont soumis à aucune autre contrainte a priori que (3.6.41) et (3.6.44) et forment, avec les invariants de niveau 1, un système complet d'invariants analytiques de l'équation (3.6.1).

Indiquons succintement les démonstrations.

3.6.a. La composante Φ^1 et sa transformée de Borel. Coupures stellaires.

Les définitions (3.6.29) et (3.6.30) sont conformes aux règles générales de la section 1.3.b. La possibilité de coupures stellaires verticales tient aux formules de connexion (3.6.8bis)et (3.6.8ter) qui font obstacle au pivotage indéfini du chemin d'intégration $\mathcal{J}$. La présence effective, dans la majorité des cas, de telles coupures s'établit par un raisonnement plus poussé. Notons toutefois que si les invariants A_ω de niveau 1 (*) sont tous nuls ou simplement s'ils satisfont aux conditions :

(*) Voir lemme 3.6.1.

$$\left.\begin{array}{ll}(3.6.45) & \exp\left|\sum_{m\geq 1} A_{2\pi i m}\, e^{-2\pi i m z_1}\right| \leq o(\exp|z_1 \log z_1|) \\ (3.6.46) & \exp\left|\sum_{m\geq 1} A_{-2\pi i m}\, e^{+2\pi i m z_1}\right| \leq o(\exp|z_1 \log z_1|)\end{array}\right\} z_1 \text{ grand}$$

alors on n'a pas de coupures stellaires et le germe $\boldsymbol{\Phi}'(\zeta_{1+})$ est défini holomorphe sur $\mathbb{C}_\infty$ tout entier (figure 4). Lorsqu'enfin seule (3.6.45) (resp. 3.6.46)) est réalisée, seules subsistent les coupures stellaires situées au-dessus du demi-axe vertical supérieur (resp. inférieur) et on est dans le cas de la figure 2 (resp. 3).

3.6.b. La composante Φ° et sa transformée de Borel.

$\Phi^\circ(z_1)$ admet le développement prograde (3.6.25). Par suite, si le second membre de (3.6.31) converge au voisinage de l'origine, sa somme ne peut que coïncider (pour $\operatorname{Re} \dot{\zeta}_{1+} > 0$) avec les intégrales (3.6.32). Reste à montrer cette convergence.

Une première méthode consiste à travailler non pas avec la variable $z_{1+} = z \log z$ mais avec une variable z_* équivalente, définie implicitement par :

$$(3.6.49) \qquad z = z_* / \log z_* \qquad\qquad (z_* \sim z_{1+} \text{ quand } z \to \infty)$$

On pose alors $\underline{\Phi}^\circ(z_*) = \Phi^\circ(z_*/\log z_*)$ et on note $\boldsymbol{\Phi}^\circ(\zeta_*)$ la transformée de Borel (*) de $\underline{\Phi}^\circ(z_*)$. Comme $z_* \sim z_{1+}$ quand $z \to \infty$, la résurgence en z_{1+} de $\Phi^\circ(z_{1+})$ équivaut à la résurgence en z_* de $\underline{\Phi}^\circ(z_*)$ et les transformées de Borel $\boldsymbol{\Phi}^\circ(\zeta_{1+})$ et $\boldsymbol{\Phi}^\circ(\zeta_*)$, quoique d'expressions

(*) ou, plus exactement, le mineur de cette transformée de Borel. Cela suffit ici car, $\underline{\Phi}^\circ(z_*)$ étant prograde en z_*, sa transformée de Borel est entièrement caractérisée par son mineur.

fort différentes, ont exactement la même surface de Riemann (*).

On part alors du développement :

(3.6.50) $$\varphi^\circ(z) = \sum a_n z^{-n}$$

et de la majoration

(3.6.31) $$|a_n| < K_0 (C_0)^n \left(\frac{n}{\log n}\right)^n \qquad (K_0 , C_0 > 0)$$

que l'on déduit de l'inégalité (3.69) relative à la transformée de Borel $\Phi^\circ(\zeta)$ de niveau 1.
On utilise ensuite les expressions (exactes) des transformées de Borel (**) des monômes $z_*^{-n} \log^n z_*$. Il vient :

(3.6.52) $$\mathcal{B}\left(z_*^{-n} \log^n z_*\right) = (-1)^n \zeta_*^{n-1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 \geq 0}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!} \left(\log \zeta_*\right)^{n_2} \gamma^{(n_1)}(n)$$

Ici, ζ_* désigne la variable conjuguée de z_* et γ la fonction entière inverse de la fonction gamma classique :

(3.6.53) $$\gamma(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \quad , \quad \gamma^{(n)} = \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\Gamma(s)}$$

Si $n_3 + n_4 = n$ et $\frac{n}{2} \leq n_3 \leq n$, on a, pour s pris sur le cercle de centre n et de rayon n_4 , la majoration :

(3.6.54) $$|\gamma(s)| < K_3 \; C_3^{\,n_3} \; \frac{1}{n_3^{\,n_3}}$$

(*) cf. §1.3a.

(**) Il s'agit ici encore des <u>mineurs</u> :

$$\mathcal{B}\left(z_*^{-n} \log^n z_*\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(z_*^{-n} \log^n z_*\right) e^{(z_* \zeta_*)^\bullet} \, dz_* \qquad (\text{si } \zeta_* \in \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}_\infty)$$

D'où, par la formule de Cauchy :

(3.6.55) $$\left|\gamma^{(n_1)}(n)\right| < K_3\, C_3^{\,n_3}\, \frac{1}{n_3^{\,n_3}}\, \frac{n_1!}{n_4^{\,n_1}}$$

Prenant $n_4 = n/\log n$ on trouve, si $n_1 > n/\log n$:

(3.6.56) $$\begin{cases} \left|\gamma^{(n_1)}(n)\right| & < K_3\, C_3^{\,n}\, \dfrac{n!}{n_3^{\,n_3}\, n_4^{\,n}} \\ & < K_3\, C_3^{\,n}\, \dfrac{n!}{n_3^{\,n_3}\, n_4^{\,n_4}}\, \dfrac{1}{n_4^{\,n_3}} \\ & < K_3\, K_4\, (C_3 C_4)^n \left(\dfrac{\log n}{n}\right)^{\left(n - \frac{n}{\log n}\right)} \\ & < K_3\, K_4\, K_5\, (C_3 C_4 C_5)^n \left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n \end{cases}$$

et si $n_1 \leq n_4 = n/\log n$ on trouve :

(3.6.57) $$\begin{cases} \left|\gamma^{(n_1)}(n)\right| & < K_3\, C_3^{\,n} \left(n - \dfrac{n}{\log n}\right)^{-n/\log n} \\ & < K_3\, C_3^{\,n}\, K_6\, C_n^{\,n}\, \dfrac{1}{n^n} \end{cases}$$

Dans l'un et l'autre cas on a :

(3.6.58) $$\left|\gamma^{(n_1)}(n)\right| < K_1\, C_1^{\,n} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n \qquad (0 \leq n_1 \leq n)$$

Combinant (3.6.52) et (3.6.58) on trouve :

(3.6.59) $$\left|\Phi(z_*)\right| < \sum_{n=1}^{\infty} K_0 K_1 K_2\, (C_0 C_1 C_2)^n \left|z_* \log \frac{1}{z_*}\right|^n$$

avec des constantes C_i et $K_i > 0$.

Ceci montre que $\Phi(z_*)$ et par suite aussi $\Phi(z_{1+})$ sont bien définies holomorphes sur un voisinage complet de $\mathbb{O}$ sur $\mathbb{C}_\infty$. (Mais pas en $\mathbb{O}$ lui-même).

Une deuxième méthode (qui ne fait que généraliser la première) consiste à invoquer le lemme suivant :

Lemme 3.6.7. (Passage à un niveau supérieur)

Soit $h(z)$ définie holomorphe sur $\mathbb{C}_\infty$ pour z grand, réelle pour $\arg z = 0$, de croissance suffisamment régulière et telle que $h(z)/z \to 0$ quand $z \to \infty$. Soit $z \mapsto H(z)$ l'application inverse de $z \mapsto z/h(z)$. Si

$$\varphi(z) = \sum a_n z^{-n} \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$$

et si la transformée de Borel (i.e. son mineur) vérifie :

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| < c_1 \, e^{c_2 H(|\zeta|)} \qquad (\forall \zeta \in \mathbb{C})$$

alors la série $\varphi \circ h(z)$ possède une transformée de Borel :

$$(\varphi \circ h)^{\wedge}(\zeta) = \sum a_n (h^{-n})^{\wedge}(\zeta)$$

qui converge pour ζ petit $(\zeta \in \mathbb{C}_\infty, \zeta \neq 0)$.

Une troisième méthode, beaucoup plus précise, consiste à remarquer que Φ° est solution de l'équation :

(3.6.60) $$\Phi^\circ(z_{1+}) - b(h(z_{1+}))\, \Phi^\circ(g(z_{1+})) = a(h(z_{1+}))$$

avec

(3.6.61) $$b(h(z_{1+})) = e^{-1-\lambda}\, \frac{\log z_{1+}}{z_{1+}} + o(h(z_{1+})) \qquad (*)$$

(3.6.62) $$g(z_{1+}) = k(1+h(z_{1+})) = z_{1+} + \log z_{1+} + o(\log z_{1+}) \qquad (*)$$

(*) Rappelons que $k(z) = z \log z$ et que $h(z_{1+}) = \dfrac{z_{1+}}{\log z_{1+}} + o\left(\dfrac{z_{1+}}{\log z_{1+}}\right)$

On en tire le développement prograde :

$$\Phi^{\circ}(z_{1+}) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[b(h(z_{1+})) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(g(z_{1+}) - z_{1+}\right)^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_{1+}}\right)^{n} \right]^{r} . a(h(z_{1+})) \tag{3.6.63}$$

dont la transformée de Borel est facile à estimer terme à terme. Pour simplifier, faisons les calculs pour l'équation :

$$\Phi(z) - z^{-1}\,\Phi(z + \log z) = \alpha(z) \tag{3.6.64}$$

qui est très voisine de (3.6.60). Par un calcul élémentaire on vérifie que la transformation de Borel transmute l'opérateur :

$$S \;:\; \varphi(z) \longmapsto S\varphi(z) = z^{-1}\,\varphi(z + \log z) \tag{3.6.65}$$

en un opérateur :

$$\mathbf{S} \;:\; \boldsymbol{\varphi}(\zeta) \longmapsto \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = (S\varphi)^{\wedge}(\zeta) \tag{3.6.66}$$

avec

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta-\zeta_0)^{\zeta_0}}{\Gamma(1+\zeta_0)}\, \boldsymbol{\varphi}(\zeta_0)\, d\zeta_0 \qquad (\zeta \text{ petit}) \tag{3.6.67}$$

L'opérateur $\mathbf{S}$ peut aussi s'écrire sous la forme suivante, qui fait mieux ressortir ses propriétés de prolongeabilité analytique (*) :

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{q} \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta-\zeta_0)^{\zeta_0+q}}{\Gamma(1+q+\zeta_0)}\, \boldsymbol{\varphi}(\zeta_0)\, d\zeta_0 \quad (\forall q \in \mathbb{N}) \tag{3.6.67bis}$$

Par suite Borel transforme la solution prograde :

(*) à savoir que $\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$ est holomorphe sur tout $\mathbb{C}_{\infty}$ lorsque $\boldsymbol{\varphi}(\zeta)$ l'est.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \alpha(z) \tag{3.6.68}$$

de l'équation (3.6.64) en la série :

$$\Phi(z) = \alpha(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0<z_1<z_2<\dots z_n<z} \frac{(z-z_n)^{z_n}}{\Gamma(1+z_n)} \cdots \frac{(z_3-z_2)^{z_2}}{\Gamma(1+z_2)} \frac{(z_2-z_1)^{z_1}}{\Gamma(1+z_1)} \alpha(z_1)\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n \tag{3.6.69}$$

dont on établit sans peine qu'elle converge lorsque $\operatorname{Re} z \geqslant -1$. Or l'équation (3.6.63) donne lieu exactement au même type de majorations que l'équation (3.6.64).

3.6.c : Prolongeabilité de φ° et équations de résurgence.

Nous venons de voir que $\varphi^\circ(z_{1+})$ était analytiquement prolongeable à tout le domaine $\{\operatorname{Re} \dot{z}_{1+} > -1\}$ de $\mathbb{C}_\infty$. Il n'empêche que les seules dérivations étrangères Δ_ω (relativement à la variable z_{1+}) susceptibles d'agir sur φ° correspondent à des indices ω situés au-dessus du point -1 . En effet, en appliquant Δ_ω aux deux membres de (3.6.60) on trouve, compte tenu de la règle (1.3.58) :

$$\Delta_\omega \varphi^\circ(z_{1+}) = b(h(z_{1+}))\, e^{-\dot\omega g(z_{1+})} \Delta_\omega \varphi^\circ(z_{1+}) \tag{3.6.70}$$

avec h comme en (3.6.21) et g comme en (3.6.62). Or cette équation n'a de solution formelle que du type :

$$(\Delta_\omega \varphi^\circ)(z_{1+}) = z_1^{\tau} \cdot e^{(\dot\omega+1) z_{1+}} A_\omega(z_1)\, e^{\lambda h(z_{1+})}\, \varphi^1(z_{1+}) \quad (*) \tag{3.6.71}$$

avec $A_\omega(z_1)$ périodique de période 1 en z_1 . Or Borel ne peut faire correspondre un élément de $\mathcal{R}$ non nul au second membre de (3.6.71) que si :

(*) bien distinguer z_{1+} et $z_1 = h(z_{1+})$.

(3.6.72) $$\dot{\omega} + 1 = 0$$

3.6.d. Contraintes a priori sur les invariants holomorphes de niveau 1^+.

La relation (3.6.25) peut s'écrire :

(3.6.73) $$\Phi^{\circ}(z_{1^+}) = \phi^{\circ}(h(z_{1^+}))$$

Elle exprime que, dans le modèle formel, Φ° est une série entière en $1/h(z_{1^+})$. Or $h(z_{1^+})$ est multiforme. On pourrait donc craindre que les invariants $\mathbb{A}_{\omega}$ de niveau 1^+ associés aux divers points ω de projection $\dot{\omega} = -1$ ne soient complètement indépendants. Heureusement, il n'en est rien (*). Il se trouve en effet que h n'est que "faiblement multiforme". Nous entendons par là que si $\overset{\circ}{z}_{1^+}$ désigne le point déduit de z_{1^+} par une rotation positive de r tours, autrement dit si :

(3.6.74) $$\log \overset{\circ}{z}_{1^+} = 2\pi i\, r + \log z_{1^+}$$

alors la fonction h vérifie, pour z_{1^+} grand, l'identité :

(3.6.75) $$h(\overset{\circ}{z}_{1^+}) = h(f(z_{1^+}))$$

avec

(3.6.76) $$f(z_{1^+}) = z_{1^+} - 2\pi i\, r \frac{z_{1^+}}{\log z_{1^+}} + o\left(\frac{z_{1^+}}{\log z_{1^+}}\right)$$

ainsi qu'on le vérifie immédiatement à partir de la définition (3.6.21) de h.
On a donc :

(*) <u>Heureusement</u>, car l'indépendance des $\mathbb{A}_{\omega}$ remettrait en cause le principe de continuité de la quantité d'invariance par rapport aux niveaux. Voir §3.6.h ci-après.

(3.6.77) $$\varphi^{\circ}(\mathring{z}_{1+}) \equiv \varphi^{\circ}(f(z_{1+}))$$

Le fait essentiel est que $f(z_{1+})/z_{1+} \longrightarrow 1$ quand $z_{1+} \longrightarrow \infty$. On sait en effet (*) que la composition à droite par une telle f préserve la résurgence et le réseau de résurgence. Appliquant la règle (1.3.58) de dérivation étrangère des produits de composition, on trouve :

(3.6.78) $$\Delta_{\omega}(\varphi^{\circ} \circ f)(z_{1+}) = e^{-\omega(f(z_{1+})-z_{1+})}(\Delta_{\omega}\varphi^{\circ}) \circ f(z_{1+})$$

Il est clair d'autre part que si l'on désigne par $\mathring{\omega}$ le point de $\mathbb{C}_{\infty}$ déduit de ω par une rotation positive de r tours, soit :

(3.6.79) $$\log \mathring{\omega} = 2\pi i\, r + \log \omega$$

et par R^{-} l'opérateur défini par :

(3.6.80) $$R^{-r}\varphi(z_{1+}) = \varphi(\mathring{z}_{1+})$$

on aura, d'après (1.3.57) et (1.3.58) :

(3.6.81) $$\left\{\begin{aligned} \Delta_{\mathring{\omega}}\varphi^{\circ}(z_{1+}) &= (R^{-r}\Delta_{\omega}R^{r}\varphi^{\circ})(z_{1+}) \\ &= (R^{-r}\Delta_{\omega}(\varphi^{\circ}\circ f^{-1}))(z_{1+}) \\ &= R^{-r}(\Delta_{\omega}\varphi^{\circ})\circ f^{-1} \,.\, e^{-\omega(f^{-1}(z_{1+})-z_{1+})} \\ &= (\Delta_{\omega}\varphi^{\circ})(z_{1+}) \,.\, e^{-\mathring{\omega}(z_{1+}-f(z_{1+}))} \end{aligned}\right.$$

Or d'après (3.6.76) et puisque $\mathring{\omega} = -1$, on a :

(3.6.82) $$-\mathring{\omega}(z_{1+} - f(z_{1+})) = 2\pi i\, r \frac{z_{1+}}{\log z_{1+}} + o\left(\frac{z_{1+}}{\log z_{1+}}\right)$$

(*) voir §1.3.a et §1.3.c.

Compte tenu de (3.6.71) et de la périodicité de $A_\omega(\zeta_1)$ en $\zeta_1 \sim \zeta_{1+}/\log \zeta_{1+}$ cela entraine l'identité :

$$A_{\dot\omega}(\zeta_1) = e^{2\pi i n \zeta_1} A_\omega(\zeta_1) \tag{3.6.83}$$

D'où s'ensuivent toutes les relations a priori du lemme 3.6.6 (*).

3.6.e. Interprétation des équations de résurgence de niveau 1^+.

Partons de $A_\omega(\zeta_1)$ et de son développement (3.6.36) en série de Fourier formelle. Les transformées de Borel de Ψ et θ

$$\Psi(\zeta_{1+}) = A(h(\zeta_{1+})) \quad , \quad \theta(\zeta_{1+}) = A(h(\zeta_{1+}))\, \Phi'(\zeta_{1+}) \tag{3.6.84}$$

demandent à être interprétées correctement.

Les majeurs $\boldsymbol{\Psi}(\zeta_{1+})$ et $\boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+})$ de ces transformées peuvent toujours être définies, modulo un germe régulier en 0 , par les formules suivantes :

$$\boldsymbol{\Psi}(\zeta_{1+}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\omega^n \int_{u_n}^{\infty} e^{2\pi i n h(\zeta_{1+})}\, e^{(\zeta_{1+}\dot\zeta_{1+})}\, d\zeta_{1+} \tag{3.6.85}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\omega^n \int_{u_n}^{\infty} e^{2\pi i n h(\zeta_{1+})}\, \Phi'(\zeta_{1+})\, e^{(\zeta_{1+}\dot\zeta_{1+})}\, d\zeta_{1+} \tag{3.6.85bis}$$

Quand $\mathrm{Re}\,\dot\zeta_{1+} < 0$ (resp. $\mathrm{Re}\,\dot\zeta_{1+} > 0$) les intégrales doivent être prises entre des bornes u_n et ∞ d'arguments égaux à 0 (resp. π) mod 2π . Plus précisément, elles doivent être prises sur des segments $[u_n, \infty]$ inscrits sur $\mathbb{C}_\infty$ et situés au-dessus du demi-axe réel positif (resp. négatif). Quelle que soit la croissance (en n) des A_ω^n , on peut toujours choisir des u_n

---

(*) Pour une confirmation de (3.6.83) voir les formules explicites de la section 3.10.

qui s'éloignent assez vite de $\mathcal{O}$ pour assurer la convergence de (3.6.85) et (3.6.85bis) uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_\infty \cap \{ \operatorname{Re} \dot{\zeta}_{1+} < 0 \}$ ou de $\mathbb{C}_\infty \cap \{ \operatorname{Re} \dot{\zeta}_{1+} > 0 \}$.

En général, les majeurs $\boldsymbol{\Psi}(\zeta_{1+})$ et $\boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+})$ ainsi définis présentent des coupures stellaires au-dessus de l'axe imaginaire. Ils sont donc définis dans des secteurs d'ouverture π et ne possèdent pas de mineur. On est alors dans le cas de la figure 5 et l'équation de résurgence (3.6.37) s'interprète de la manière suivante (*) :

$$(3.6.86) \qquad \boldsymbol{\Phi}^{\circ}(\zeta_{1+}) = \boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+} - \omega) + \mathbf{Reg}(\zeta_{1+} - \omega) \qquad (\zeta_{1+} \sim \omega)$$

Ici, $\mathbf{Reg}(\zeta_{1+} - \omega)$ désigne une fonction analytique régulière en $\zeta_{1+} - \omega = 0$ et la notation légèrement impropre $\zeta_{1+} - \omega$ s'interprète sans ambiguité.

Au contraire, lorsque les coefficients A_ω^m vérifient la conjecture (3.6.44) qui assure d'un seul coup :

(i) leur forte décroissance

(ii) la sommabilité de la série (3.6.36)

(iii) la croissance infraexponentielle de $A(h(\zeta_{1+}))$; alors les majeurs $\boldsymbol{\Psi}(\zeta_{1+})$ ne présentent pas de coupures stellaires : ils sont définis sur tout $\mathbb{C}_\infty$ et possèdent des mineurs $\Psi(\zeta_{1+})$ définis eux aussi sur tout $\mathbb{C}_\infty$. Quant aux majeurs $\boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+})$, ils ne présentent pas de coupures stellaires, mais à condition que les invariants $A_{2\pi i m}$ de <u>niveau 1</u> soient à croissance modérée, i.e. satisfassent à (3.6.45) et (3.6.46). Dans le cas contraire, les majeurs $\boldsymbol{\Theta}(\zeta_{1+})$ peuvent présenter des coupures stellaires au-dessus de l'axe imaginaire; mais ils n'en sont pas moins définis holomorphes dans des secteurs d'ouverture 3π (auquel cas le mineur $\theta(\zeta_{1+})$ présente les coupures de la figure 1) ou dans des secteurs d'ouverture 4π (auquel cas le mineur $\theta(\zeta_{1+})$

(*) elle couvre d'ailleurs tous les cas .

présente les coupures des figures 2 ou 3).

Comme d'après (3.6.86), ce sont les coupures stellaires (au-dessus de $\mathrm{Re}\, \dot{\zeta}_{1+} = 0$) du majeur Θ qui fournissent les coupures stellaires (au-dessus de $\mathrm{Re}\, \dot{\zeta}_{1+} = -1$) du mineur Φ° , on voit que ces dernières peuvent provenir soit de la croissance trop lente des invariants de niveau 1 (figure 5) soit de la croissance trop rapide des invariants de niveau 1^{+} (figures 6 et 7). Bien entendu, les coupures "issues du niveau 1^{+} ", lorsqu'elles existent, occultent les coupures "issues du niveau 1 ". Toutefois, si la conjecture (3.6.44) est vraie, cela n'arrive jamais.

3.6.f. Calcul pratique des invariants holomorphes.

Le calcul des invariants de niveau 1 ne présente aucune difficulté. Au niveau 1^{+} , les logarithmes compliquent la situation, mais les invariants de niveau 1^{+} n'en sont pas moins parfaitement constructibles. Il existe même des formules explicites les exprimant, comme nous le verrons au §3.10. Nous indiquons ici une méthode de calcul moins avantageuse, mais qui colle de plus près aux définitions.

Définissons $\theta(z_{1+})$ comme en (3.6.84) et notons $\boldsymbol{\theta}$ et Θ le majeur et le mineur de sa transformée de Borel :

(3.6.87) $$(\boldsymbol{\theta}, \widetilde{\Theta}) = \mathcal{B}\, \theta$$

Le majeur $\Theta(\zeta_{1+})$ est toujours accessible (modulo un germe régulier en 0) par la formule (3.6.37). Lorsqu'en outre les inégalités (3.6.43) sont vérifiées (elles le sont toujours si la conjecture 1 est vraie) on est dans le cas des figures 6,7 ou 8 : le mineur $\boldsymbol{\theta}(\zeta_{1+})$ existe et s'obtient directement par différence des valeurs de Φ° en deux points a et b situées au-desus de $\dot{\zeta}_{1+}-1$:

(3.6.88) $$\boldsymbol{\theta}(\zeta_{1+}) = \Phi^{\circ}(a) - \Phi^{\circ}(b) \qquad (\dot{\omega} = -1,\ \dot{a} = \dot{b} = \dot{\zeta}_{1+} - 1)$$

avec a et b comme sur la figure 9 :

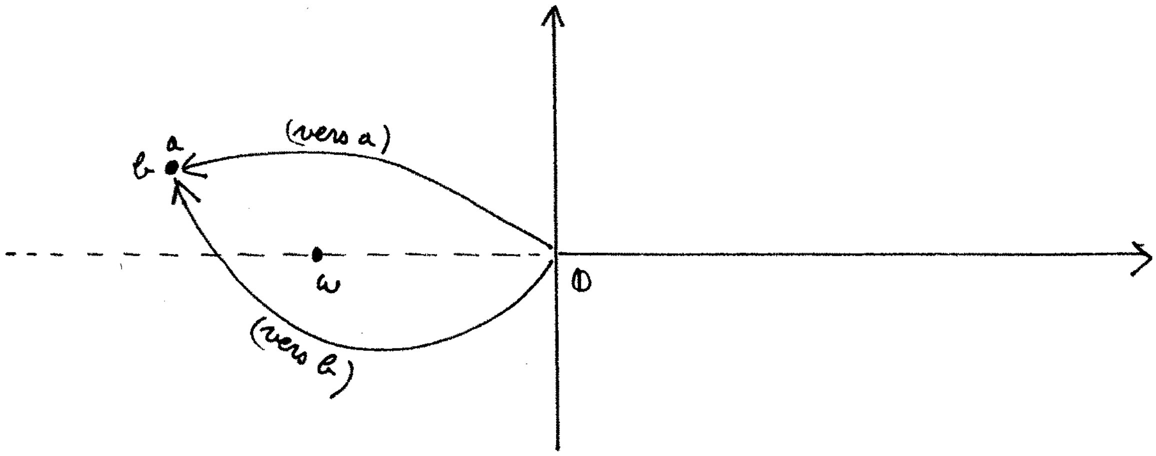


Figure 9

Dans un cas comme dans l'autre, que l'on travaille sur le majeur Θ ou le mineur θ , on peut lui appliquer l'opérateur $\mathbf{t}_\alpha$ transmuté par Borel de l'opérateur t_α ,lui-même transmuté par le changement de variable :

$$\mathcal{H} \ : \ z_1 \longmapsto z_{1+} = k(z_{1+})$$

de l'opérateur L_α de translation de pas α , comme l'indique le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(z_1) \arrow[r, "L_\alpha"] \arrow[d] & \varphi(z_1+\alpha) \arrow[d] \\
\phi(z_{1+}) \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d] & \phi \circ t_\alpha(z_{1+}) \arrow[d] \\
(\boldsymbol{\phi}(z_{1+}), \boldsymbol{\Phi}(z_{1+})) \arrow[r, "\mathbf{t}_\alpha"] & (\boldsymbol{\phi} \circ \mathbf{t}_\alpha(z_{1+}), \boldsymbol{\Phi} \circ \mathbf{t}_\alpha(z_{1+}))
\end{tikzcd}$$

$$\phi(z_{1+}) = \varphi \circ h(z_{1+})$$

$$t_\alpha(z_{1+}) = k(\alpha + h(z_{1+}))$$

$\left\{ \begin{array}{l} k \text{ et } h \text{ comme en} \\ (3.6.19) \text{ et } (3.6.21) \end{array} \right.$

Il ne reste plus qu'à calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\alpha_0}^{1+\alpha_0} (\mathbf{t}_\alpha \, \Theta)(\zeta_{1+})\, d\alpha = A^0_\omega \, \mathbf{\Phi}^1(\zeta_{1+}) \quad \text{(majeur)} \tag{3.6.89}$$

$$\int_{\alpha_0}^{1+\alpha_0} (\mathbf{t}_\alpha \, \theta)(\zeta_{1+})\, d\alpha = A^0_\omega \, \mathbf{\Phi}^1(\zeta_{1+}) \quad \text{(mineur)} \tag{3.6.90}$$

dont la somme ne comporte plus (aux seconds membres) que la transformée de Borel de φ^1 affectée du seul coefficient scalaire A^0_ω. On en déduit les autres scalaires A^n_ω grâce aux contraintes a priori (3.6.41). On pourrait d'ailleurs calculer directement A^n_ω en convolant les intégrandes de (3.6.89) ou (3.6.90) avec la transformée de Borel de $e^{-2\pi i n k(\zeta_{1+})}$, ce qui ferait apparaître aux seconds membres A^n_ω à la place de A^0_ω et permettrait une vérification des contraintes (3.6.41). Rappelons que, de toute façon, le procédé qu'on vient d'indiquer n'est pas le plus commode. Pour la meilleure méthode, voir §3.10.

3.6.g. Absence probable d'interprétation géométrique

Il est sans doute très difficile et peut-être impossible de "lire" les invariants de niveau 1^+ directement sur le comportement asymptotique de la solution sectorielle $\varphi^0_+(z_1) = \varphi^0_+(z_{1+})$ de l'équation (3.6.1). Cela tient à ce que les singularités ω de $\mathbf{\Phi}^0_+(\zeta_{1+})$ qui "portent" ces invariants sont situées au-dessus de -1. Or $\mathbf{\Phi}^0_+(\zeta_{1+})$ n'est peut-être pas prolongeable aux domaines $\{\mathrm{Re}\, \zeta_{1+} < -1\}$ et, même si elle l'est (en cas de vérité de la conjecture 1), elle n'y est probablement pas de croissance exponentielle. Par suite, dans le passage de $\mathbf{\Phi}^0_+(\zeta_{1+})$ à $\varphi^0_+(z_{1+})$ par Laplace, on ne peut pas faire basculer le demi-axe d'intégration jusqu'à lui faire frôler les points ω de manière à "manifester" les invariants. Les invariants holomorphes de niveau 1^+ semblent donc inaccessibles à la géométrie, même dans les problèmes linéaires comme (3.6.1) et à plus fortes raisons dans les problèmes non linéaires généraux dont traitera la section 3.7.

3.6.h. Equations d'étage q unique (nul ou non). Continuité de la quantité d'invariance.

(3.6.91) $$x(z) - b(z)\ x(z+1) = a(z)$$

avec $a(z)$ et $b(z)$ méromorphes à l'infini et avec :

(3.6.92) $$b(z) \sim z^{-q}\ e^{-\lambda-q} \quad \text{quand } z \Rightarrow \infty \qquad (q \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C})$$

Les intégrales formelles s'écrivent toujours :

(3.6.93) $$x(z_1, u) = \varphi^{0}(z_1) + z^{\langle 1\rangle}\ \varphi^{1}(z_1) \qquad (\text{niveau } 1)$$

(3.6.94) $$x(z_{1^+}, u) = \varphi^{0}(z_{1^+}) + z^{\langle 1\rangle}\ \varphi^{1}(z_{1^+}) \qquad (\text{niveau } 1^+)$$

mais avec un bloc élémentaire $z^{\langle 1\rangle}$ de la forme :

(3.6.95) $$z^{\langle 1\rangle} = z^{qz}\ e^{\lambda z}\ z^{\tau}$$

Lorsque $q \neq 0$, on a toujours au niveau 1 l'infinité d'équations de résurgence :

(3.6.96) $$\Delta_\omega\ \varphi^{0} = 0 \qquad \Bigg\| \qquad A_\omega \in \mathbb{C}$$

(3.6.97) $$\Delta_\omega\ \varphi^{1} = A_\omega\ \varphi^{1} \qquad \Bigg\| \qquad \forall \omega \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$$

tandis qu'au niveau 1^+ on a essentiellement une unique équation de résurgence non triviale :

(3.6.98) $$\Delta_{-q}\ \varphi^{0} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{-q}^{n}\ e^{2\pi i n z_1}\right) e^{\lambda z_1}\ \varphi^{1}$$

(3.6.99) $$\Delta_{-q}\ \varphi^{1} = 0 \qquad (\text{avec } A_{-q}^{n} \in \mathbb{C})$$

où l'indice $-q$ désigne bien sûr le relevé de $-q$ sur le feuillet principale de $\mathbb{C}_\infty$.

Au contraire, lorsque l'étage q est nul, on n'a plus que du niveau 1. L'unique équation (3.6.87) de niveau 1^+, qui portait à elle seule une infinité dénombrable d'invariants scalaires A_{-q}^{n}, est alors remplacée par une infinité dénombrable d'équations de niveau 1 :

(3.6.100) $$\Delta_\omega \, \varphi^\circ = A^*_\omega \qquad (\omega \in \lambda + 2\pi i \mathbb{Z} \; , \; A^*_\omega \in \mathbb{C})$$

mais qui portent chacune un seul invariant scalaire. Il en résulte que la "quantité totale" d'information invariante ne change pas (*) quand on passe du niveau 1^+ au niveau 1, autrement dit quand on fait $q = 0$ dans l'équation (3.6.81).

3.6.i Pourquoi les blocs z^{qz} sont préférables aux blocs $\Gamma(qz)$.

Soit l'équation linéaire homogène d'étage q :

(3.6.101) $$x(z) - b(z) \; x(z+1) = 0$$

avec $b(z)$ méromorphe à l'infini et $b(z) \approx \mathrm{Cste} \cdot z^{-q}$. Il est d'usage de représenter les solutions de (3.6.101) sous la forme :

(3.6.102) $$x(z) = \Gamma(qz) \; e^{\lambda' z} \; z^{\tau'} \; \psi(z) \qquad (\lambda', \tau' \in \mathbb{C} \, ; \, \psi(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]])$$

avec pour Γ la fonction gamma classique. Nous avons choisi au contraire de représenter les solutions sous la forme :

(3.6.103) $$x(z) = z^{qz} \cdot e^{\lambda z} \cdot z^{\tau} \cdot \varphi(z) \qquad (\lambda, \tau \in \mathbb{C} \, ; \, \varphi(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]])$$

On passe très facilement d'une représentation à l'autre grâce à la formule de Stirling :

(*) Si la conjecture 1 est vraie, les invariants A^{n}_{-q} de niveau 1^+ sont soumis aux contraintes de croissance (3.6.44) plus draconiennes que les contraintes $\limsup_n |A^*_{\lambda + 2\pi i n}|^{1/n} < \infty$ imposées aux invariants A^*_ω de niveau 1 qu'ils remplacent. Mais ceci ne change rien à la constance de la "masse invariante".

(3.6.104) $$\Gamma(z) = z^z \cdot e^{-z} \cdot z^{-1/2} \cdot \gamma(z) \qquad (\gamma(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]])$$

avec une fonction $\gamma(z)$ qui est résurgente de réseau $\Omega = 2\pi i\,\mathbb{Z}$ et qui vérifie les équations de résurgence :

(3.6.105) $$\begin{cases} \Delta_{2\pi i m} \log \gamma(z) = \dfrac{1}{m} \\ \Delta_{2\pi i m}\ \gamma(z) = \dfrac{1}{m}\,\gamma(z) \end{cases} \qquad (\forall m \in \mathbb{Z}^*)$$

que l'on déduit immédiatement des relations :

(3.6.106) $$\begin{cases} \log \gamma(z) - \log \gamma(z+1) = S(z) = -1 + (z+\frac{1}{2}) \log (1+z^{-1}) \\ \mathbf{S}(\zeta) = ((2+\zeta)\, e^{-\zeta} + \zeta - 2) / 2\,\zeta^2 \\ \text{Résidu en } 2\pi i m \text{ de } (\mathbf{S}(\zeta)\,(1-e^{-\zeta})^{-1}) = 1/2\pi i m \end{cases}$$

Apparemment la représentation (3.6.102) vaut la représentation (3.6.103). Elle est moins élémentaire mais elle a l'avantage de mettre en évidence l'uniformité à l'infini (et partout ailleurs) de $\Gamma(z)$, tandis que l'uniformité du produit $z^z \cdot e^{-z} \cdot z^{-1/2}\,\gamma(z)$ est cachée : elle résulte des équations de résurgence (3.6.105) qui impliquent, pour les modèles sectoriels γ_+ (pour $\mathrm{Re}\, z > 0$) et γ_- (pour $\mathrm{Re}\, z < 0$) :

(3.6.107) $$\gamma_+(z) / \gamma_-(z) = (1 - e^{-2\pi i z})^{-1} \qquad (\mathrm{Im}\, z < 0)$$

(3.6.108) $$\gamma_-(z) / \gamma_+(z) = 1 - e^{2\pi i z} \qquad (\mathrm{Im}\, z > 0)$$

D'où il s'ensuit qu'une rotation d'un tour au voisinage de l'infini multiplie $\gamma_+(z)$ et $\gamma_-(z)$ par un même facteur $-e^{-2\pi i z}$ tandis qu'elle multiplie $z^z e^{-z} z^{-1/2}$ par le facteur inverse $-e^{2\pi i z}$, ce qui compense exactement et rétablit l'uniformité.

On peut donc, dans les problèmes <u>linéaires homogènes</u>, user indifféremment de la représentation gammaïque (3.6.102) ou de la représentation élémentaire (3.6.103). Les blocs $\Gamma(qz)$ présentent toutefois trois inconvénients qui en interdisent l'emploi dans les problèmes plus compliqués, notamment non linéaires.

D'abord, à cause du facteur résurgent $\gamma(z)$ dans la formule de Stirling (3.6.104), les dérivations étrangères ne "passent pas à travers" $\Gamma(qz)$ comme elles "passent à travers" les blocs élémentaires z^{qz}. Traduisant l'équation du pont composante par composante on peut écrire :

(109) $$\dot{\Delta}_\omega \left(z^{zq}\, e^{\lambda z}\, z^{\tau} \ldots \right) = z^{qz}\, e^{\lambda z}\, z^{\tau}\, \dot{\Delta}_\omega (\ldots)$$

mais on ne pourrait pas écrire :

(3.6.110) $$\dot{\Delta}_\omega \left(\Gamma(qz)\, e^{\lambda' z}\, z^{\tau'} \ldots \right) = \Gamma(qz)\, e^{\lambda' z}\, z^{\tau'}\, \dot{\Delta}_\omega (\ldots)$$

Ensuite les blocs élémentaires $z^{qz}\, e^{\lambda z}\, z^{\tau}$ sont immédiats à multiplier et à dériver (pour la dérivation naturelle) alors que ce n'est pas le cas des blocs gammaïques. On a par exemple :

(3.6.111) $$\Gamma(q_1 z)\; \Gamma(q_2 z) = \Gamma((q_1+q_2) z)\; B(q_1, q_2 ; z)$$

avec un facteur correctif $B(q_1, q_2 ; z)$ qui n'est nullement élémentaire, mais <u>résurgent</u> en z. Ceci rendrait extrèmement lourd l'emploi des blocs $\Gamma(qz)$ dans les problèmes non linéaires.

Enfin le passage des intégrales formelles de niveau 1 à celles de niveau 1^+ serait très malcommode avec les blocs $\Gamma(qz)$ alors que, relativement aux blocs élémentaires, il s'effectue le plus naturellement du monde.

Une dernière remarque : la fonction résurgente $\gamma(z)$ qui intervient dans la formule de Stirling (3.6.103) possède évidemment un modèle sectoriel :

$$(3.6.112)\qquad \gamma_+(z) = \frac{\Gamma(z)}{z^z}\, e^z\, z^{1/2} \qquad (z \in \mathbb{C}_\infty)$$

Cette fonction $\gamma_+(z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}_\infty$ et possède une infinité de pôles simples au-dessus des entiers négatifs. Au contraire, son inverse $1/\gamma_+(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_\infty$ et de croissance exponentielle. Il en résulte, au niveau 1^+, que la fonction

$$(3.6.113)\qquad \gamma(z_{1+}) = \gamma(h(z_{1+})) \qquad (h \text{ comme en } (3.6.21))$$

possède une transformée de Borel $\hat{\gamma}(\zeta_{1+})$ qui présente (*) des coupures stellaires (situées au-dessus de l'axe imaginaire) tandis que la fonction inverse $1/\gamma(z_{1+})$ a une transformée de Borel qui ne présente pas de coupures stellaires.

On voit par là que dans les problèmes à étage q négatif, le passage de la représentation gammaïque (3.6.102) à la représentation élémentaire (3.6.103) est <u>régulière</u>, en ce sens qu'elle n'introduit pas de coupures stellaires nouvelles. Dans les problèmes à étage q positif, au contraire, c'est le passage inverse qui est régulier. Ce détail est d'ailleurs sans grande importance, car on sait manipuler les coupures stellaires.

SECTION 3.7 : EQUATIONS AUX DIFFERENCES DE NIVEAU $\leqslant 1^+$

Maintenant que nous nous sommes familiarisés avec le niveau 1^+ dans la situation la plus simple qui soit, il ne nous reste plus qu'à faire tourner la machine résurgente et à traiter, à grands coups de calcul étranger, les équations <u>aux différences les plus générales</u>. Ces équations, rappelons-le, atteignent <u>toujours</u> le niveau 1, <u>souvent</u> le niveau 1^+ et <u>parfois</u> des niveaux fractionnaires <1. Comme nous sommes en terrain de connaissance, nous allons limiter les explications au strict minimum.

(*) qu'il s'agisse de son mineur ou de ses majeurs.

Considérons donc la même équation qu'à la section 3.4 :

(3.7.1) $$D \cdot x(z) = a(z, x(z), x(z+1), \dots, x(z+\nu))$$

mais avec cette fois-ci un opérateur D de la forme générale (3.1.11), c'est-à-dire un opérateur aux différences de coefficients méromorphes à l'infini mais de niveaux p_i et d'étages q_i absolument quelconques.

Supposons réalisée la condition de <u>préparation</u> (3.4.4) ou, si elle ne l'est pas, effectuons un changement d'inconnue polynomial pour nous y ramener. Faisons aussi, <u>provisoirement</u>, les trois hypothèses simplificatrices dont nous avons l'habitude, c'est-à-dire :

(i) les hypothèses de la définition 3.1.5 sur la non résonance des multiplicateurs de même niveau (pour les niveaux fractionnaires, s'il y en a, cela veut dire : pas de <u>résonance extrinsèque</u>)

(ii) l'hypothèse (3.4.8) sur l'incommensurabilité des τ_i de tous les niveaux.

(iii) l'hypothèses (3.4.9) sur l'absence de termes constants en x dans l'équation aux différences (i.e. $a(z, 0, \dots, 0) = 0$).

<u>Porposition 3.7.1</u> (<u>Intégrales formelles : allure et résurgence</u>)

Pour tout niveau p non nul, y compris le niveau 1^+ lorsqu'il est atteint, l'équation (3.7.1) possède une intégrale $x(z_p, u)$ résurgente en z_p :

(3.7.2) $$x(z_p ; u) = \sum_n u^n \, z^{[n]} \, \Phi^n(z_p)$$

avec n parcourant $\mathbb{N}^\nu$ et avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$ définis comme en (3.1.34). Cette intégrale est unique modulo une dilatation des u_i . De plus :

α) Pour $0 < p \leqslant 1$ les composantes $\varphi^n(z_p)$ sont bigrades en $z_p^{1/p p_*}$:

(3.7.3) $$\varphi^n(z_p) \in \mathbb{C}[[z_p^{-1/p p_*}]] \oplus \mathbb{C}[[z_p^{1/p p_*}]]$$

et on a résurgence au sens ordinaire : les transformées de Borel $\Phi^n(\zeta_1)$ ne présentent pas de coupures stellaires.

β) Pour $r = 1^+$, les composantes (*) ne possèdent pas toutes de <u>modèle formel simple</u> (**) et la nature de leurs <u>modèles sectoriels</u>, en particulier l'ouverture de leurs secteurs de régularité, varie beaucoup d'un cas à l'autre (***). Mais l'étude dans le <u>modèle convolutif</u> est plus simple : les transformées de Borel des composantes φ^n ne peuvent pas présenter de coupure stellaire ailleurs qu'au-dessus des axes verticaux d'abscisse $q \in \Omega^{1+}$ (****).

Plus précisément, les mineurs $\varphi^n(\zeta_{1+})$ sont définis dans des secteurs stellaires d'ouverture π (*****) et les majeurs $\Phi^n(\zeta_{1+})$ le sont dans des secteurs stellaires d'ouverture 3π . Quant aux autres coupures stellaires, deux cas sont à envisager :

(i) ou bien les invariants holomorphes A_ω de niveau 1^+ (******) ne sont pas de croissance subexponentielle en $\mathfrak{z}_{1+}$ et alors les coupures stellaires ne passant pas par l'origine sont visibles de l'origine (voir figure 1) et les deux coupures qui sont les plus voisines de l'origine (à droite et à gauche) occultent toutes les autres (*******).

(*) Que nous avons notées $\overset{\vee}{\varphi}{}^n(\mathfrak{z}_{1+})$ à la section précédente mais qu'ici nous notons simplement $\varphi^n(\mathfrak{z}_{1+})$ pour alléger et aussi pour nous conformer à nos conventions générales.

(**) à cause de la stellarité : Voir § 1.3.

(***) On trouvera dans G.K. IMMINK [Im1] des énoncés relatifs aux problèmes linéaires.

(****) avec Ω^{1+} comme à la définition 3.1.6. Rappelons que Ω^{1+} est contenu dans $(1/q_*)\mathbb{Z}$ où q_* désigne le plus petit commun multiple des numérateurs q_i'' des étages $q_i = q_i'/q_i''$

(*****) à savoir $\{k\pi < \arg \zeta_{1+} < (k+1)\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$

(******) voir proposition 3.7.2 ci-après.

(*******) lesquelles n'en sont pas moins réelles : voir remarque 2 ci-après.

(ii) ou bien les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ sont de croissance subexponentielle en z_{1^+} et alors les coupures stellaires ne passant pas par l'origine ne sont pas visibles de l'origine : pour les rencontrer, il faut tourner de $\pm 3\pi/2$ autour d'un point situé au-dessus de $\frac{1}{q_*}\mathbb{Z}$ (voir figure 2)

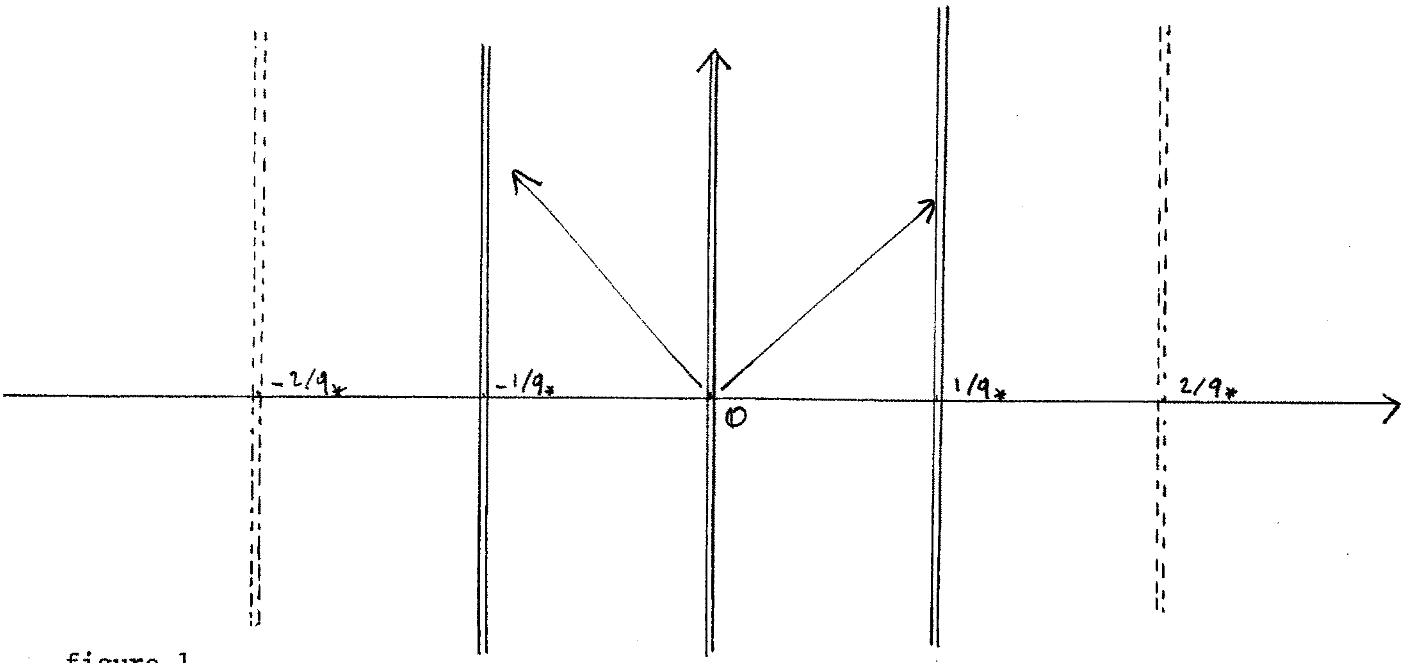


figure 1

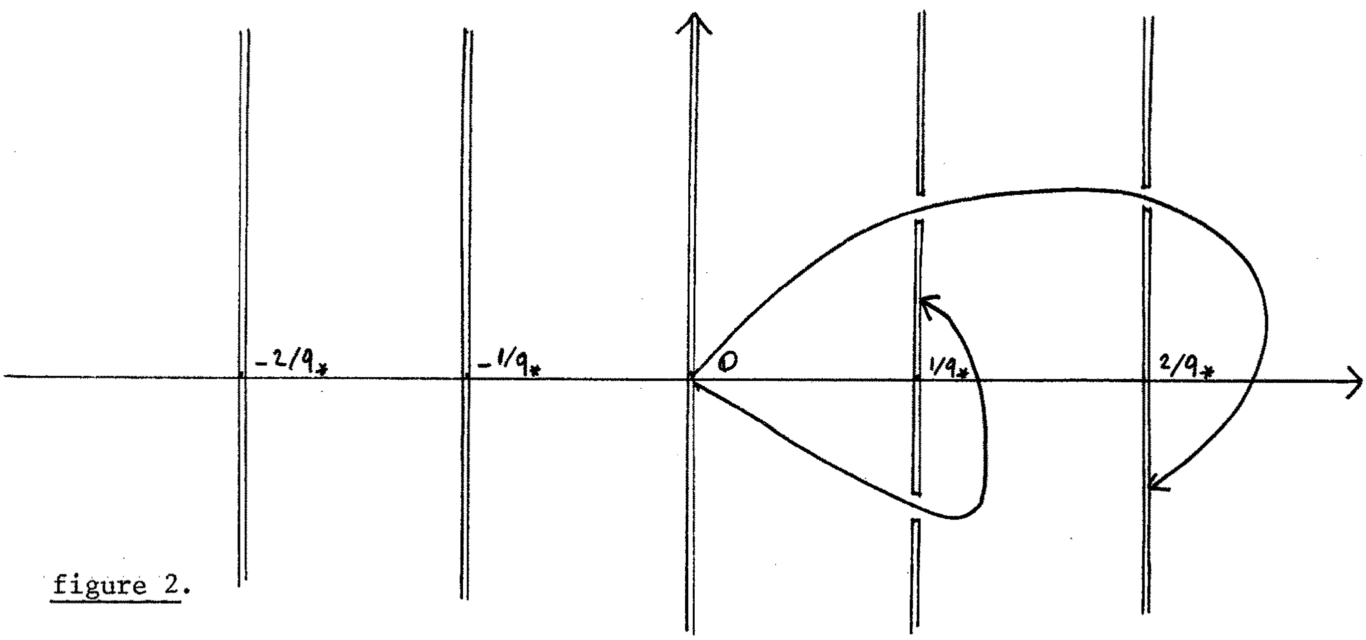


figure 2.

N.B. Les traits doubles figurent des coupures stellaires (occultées si les traits sont en pointillé).

Proposition 3.7.2 (Equation du pont et invariants holomorphes)

Pour chaque niveau $p > 0$ effectivement atteint, l'intégrale de niveau p vérifie les équations de résurgence :

$$(3.7.5) \qquad \dot{\Delta}_\omega \quad x(z_p, u) = \mathbb{A}_\omega \quad x(z_p, u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p^p)$$

qui déterminent les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$, lesquels épuisent tous les invariants holomorphes de niveau p. D'une façon plus précise :

α) Si $0 < p < 1$, les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont de la forme (3.4.15) et ω parcourt le réseau $\Omega^p_{pp_*}$ qui relève sur $\mathbb{C}_{pp_*}$ le réseau Ω^p décrit à la définition 3.1.6. Toutefois, on a encore les relations de stabilité (3.4.16) et (3.4.17). Il suffit donc de faire parcourir à ω un ensemble Ω^p_p qui est exactement " p fois plus gros" que Ω^p et " p_* fois plus petit" que $\Omega^p_{pp_*}$.

β) Si $p = 1$, on a le réseau de résurgence $\Omega^1_1 = \Omega^1$ décrit à la définition (3.1.6) et les opérateurs invariants sont de la forme :

$$(3.7.6) \qquad \mathbb{A}_\omega = e^{-n_0 \lambda_0 z_1} u^{n(\omega)} \Big\{ \sum_{p_i = 1 \text{ ou } 1^+} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{p_i < 1} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big\} \quad (\forall \omega \in \Omega^1)$$

avec ω de la forme $n_0 \lambda_0 + \sum_{p_i = 1} n_i \lambda_i + \sum_{p_i = 1^+} n_i \lambda_i$ comme en (3.1.41)

avec $u^{n(\omega)} = \prod_{p_i = 1} u_i^{n_i} \prod_{p_i = 1^+} u_i^{n_i}$

avec $A^1_\omega(u), \dots, A^\nu_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_j \,;\, p_j < 1]]$

et avec comme seules contraintes a priori les contraintes universelles de croissance(*) et celles qui stipulent que :

$$(3.7.7) \qquad A^i_\omega(u) = 0 \quad \text{si } n_j = -1 \quad \text{et si } i \neq j$$

(*) Voir §10.5.

γ) Si $p = 1^+$, il faut prendre le réseau Ω^{1^+} décrit à la définition 3.1.6. Rappelons qu'il est contenu dans $(1/q_*)\mathbb{Z}$ et par suite dans $\mathbb{Q}$. Le réseau de niveau 1^+ est donc rigide et particulièrement pauvre. En revanche (et ceci va compenser cela) les invariants $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ sont les seuls qui dépendent effectivement du temps (*) et non pas uniquement des paramètres u_i.

En principe, il faudrait faire parcourir à ω l'ensemble $\Omega^{1^+}_\infty$ qui relève Ω^{1^+} sur $\mathbb{C}_\infty$, mais les invariants $\mathbb{A}_\omega$ et $\mathbb{A}_{\omega^*}$ qui correspondent à des indices de même projection sur $\mathbb{C}$:

$$(3.7.8) \qquad \dot{\omega} = \dot{\omega}^* \quad ; \quad \log \omega^* = 2\pi i r + \log \omega \quad (r \in \mathbb{Z})$$

sont liés par des relations a priori :

$$(3.7.9) \qquad \mathbb{A}_{\omega^*} = e^{2\pi i r z_1}\, \mathbb{A}_\omega$$

parfaitement analogues à (3.6.42). On peut donc se contenter de faire parcourir à ω une seule "feuille" (n'importe laquelle) de l'ensemble $\Omega^{1^+}_\infty$. Une fois fixée, cette "feuille" se trouve en bijection naturelle avec Ω^{1^+}. On peut sans inconvénient l'identifier à Ω^{1^+} et, pour tout ω dans Ω^{1^+} (c'est-à-dire dans cette "feuille"), l'opérateur invariant revêt la forme :

$$(3.7.10) \qquad \mathbb{A}_\omega = \sum_{i=1}^{\nu} A^i_\omega(z_1, u)\, \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad \left(z_1 = h(z_{1^+})\ ;\ z_{1^+} = z_1 \log z_1\right)$$

avec des composantes $A^i_\omega(z, u)$ de la forme :

$$(3.7.11) \qquad A^i_\omega(z_1, u) = \sum_{m_1 q_1 + \dots m_\nu q_\nu = \omega + q_i} A^{i;m_1,\dots,m_\nu}_\omega(z_1)\, u_1^{m_1} \dots u_\nu^{m_\nu}$$

pour des coefficients $A^{i;m}_\omega(z_1)$ qui sont eux-mêmes des séries de Fourier

(*) Les $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1 dépendent eux aussi du temps, mais trivialement, par le biais du facteur $\exp(-n_0 \lambda_0 z_1)$ qui, étant entièrement déterminé par ω, ne livre aucune information invariante supplémentaire.

formelles, périodiques de période 1 en z_1 :

$$(3.7.12) \qquad A_\omega^{i,m}(z_1) = \sum_{-\infty < m_0 < +\infty} A_\omega^{i;m_0,m}\, e^{m_0 \lambda_0 z_1} \qquad (\lambda_0 = 2\pi i)$$

Quant à la convention $m_1 q_1 + \dots m_\nu q_\nu = \dot{\omega} + q_i$ qui règle la sommation au second membre de (3.7.11), elle ne fait qu'exprimer la 1^+-homogénéité de degré ω de l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$. Autrement dit, si on attribue à chaque u_j l'homogénéité q_j et à chaque $\partial/\partial u_j$ l'homogénéité $-q_j$, l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$ se trouve être homogène de degré $\dot{\omega}$.

Remarque 1 : Tout comme dans les cas élémentaires traités en § 3.6, il y a des indices qui poussent à conjecturer que les invariants $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ sont des fonctions entières de z_1, de croissance subexponentielle en $z_{1^+} = h(z_1)$ Cette conjecture équivaut à la décroissance rapide des coefficients de Fourier :

$$(3.7.13) \qquad \frac{1}{|m_0|} \log\log\left(1 / |A_\omega^{i;m_0,m}|\right) \longrightarrow \infty \qquad \text{quand } m_0 \to \pm\infty$$

Remarque 2 : Si toutefois cette conjecture n'est pas vraie, les coupures stellaires les plus voisines de l'origine (qui coupent l'axe réel en ω_+ et ω_-) peuvent occulter les coupures suivantes : celles-ci ne sont plus accessibles par prolongement analytique des $\Phi^n(z_{1^+})$ à partir de l'origine (cf. figure 1 ci-dessus). Mais en prolongeant le mineur $\hat{\Phi}^n$ jusqu'au voisinage de ω_+ et ω_- et en retranchant le majeur de $\Delta_{\omega_\pm} \varphi$ (lequel peut se construire à partir de l'équation du pont, car les opérateurs $\mathbb{A}_{\omega_\pm}$ correspondants sont calculables!) on rétablit la prolongeabilité analytique au-delà de l'intervalle $[\omega_-, \omega_+]$ et on peut ainsi atteindre, de proche en proche, toutes les singularités $\omega \in \Omega^{1^+}$ et y "lire" les invariants $\mathbb{A}_\omega$ qui leur sont attachés.

Remarque 3 : Pour chaque composante φ^n, l'équation du pont de niveau 1^+ se traduit par :

(3.7.14) $$\Delta_\omega \, \varphi^n(\mathfrak{z}_{1+}) = \sum A_\omega(\mathfrak{z}_1)\, \varphi^{n^i}(\mathfrak{z}_{1+}) \qquad \text{(modèle formel)}$$

avec une somme $\sum$ finie, des fonctions résurgentes $\varphi^{n^i}(\mathfrak{z}_{1+})$ connues, et des séries de Fourier formelles $A_{\omega_i}(\mathfrak{z}_1)$ que l'on calcule selon la "méthode de séparation des composantes" indiquée à la fin de la section 7.8 (voir formule (3.8.18)).

Il nous reste à démontrer succintement les proposition 3.7.1 et 3.8.2.

Pour $0 < p \leq 1$ on procède comme à la proposition 3.4.1.

Pour $p = 1^+$, on se place dans le modèle convolutif et on calcule les composantes φ^n par récurrence sur $\|n\|$. On commence par la partie linéaire $(\|n\| = 1)$, c'est-à-dire par les ν composantes $\varphi^{\langle i \rangle}$ qui accompagnent les ν paramètres u_i. Indiquons trois méthodes différentes (3.7.a, 3.7.b, 3.7.c) dont seules les deux dernières s'appliquent à tous les cas.

3.7.a. Le cas à un seul étage $q \neq 0$.

Supposons que l'opérateur D n'ait qu'un seul étage q. Cet étage unique doit être supposé $\neq 0$, car sinon le niveau 1^+ ne serait pas atteint et on retomberait dans le cas du § 3.4.

Les composantes $\varphi^{\langle i \rangle}$ de la partie linéaire de l'intégrale formelle possèdent des transformées de Borel $\Phi^{\langle i \rangle}(\zeta_1)$ de niveau 1 qui ont leurs singularités au-dessus d'un ensemble Ω^1_{LIN} stable par translation de pas $\lambda_0 = 2\pi i$ et de projection finie sur $\mathbb{R}$. De plus les $\Phi^{\langle i \rangle}(\zeta_1)$ sont de croissance exponentielle en ζ_1. Il en résulte des modèles sectoriels $\varphi_\pm^{\langle i \rangle}(\mathfrak{z}_1)$ qui sont des germes analytiques définies et de croissance au plus exponentielle en $\mathfrak{z}_1$ dans des domaines $\mathcal{S}_\pm$ comme en (3.6.8) (*). Les $\varphi_\pm^{\langle i \rangle}(\mathfrak{z}_1)$ sont donc de croissance subexponentielle en $\mathfrak{z}_{1+}$ et des intégrales du type (3.6.29) et (3.6.30) ou (1.3.18) fournissent respectivement, dans le modèle convolutif de niveau 1^+, un mineur $\Phi^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ et un majeur $\underline{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ qui sont holomorphes sur $\mathbb{C}_\infty$

(*) Dans des secteurs plus réduits, ils possèdent des développements asymptotiques.

au-dessus des demi-plans droit et gauche mais possèdent en général des coupures stellaires au-dessus de l'axe imaginaire.

3.7.b. Le cas à plusieurs étages q. Méthode directe.

La méthode précédente peut s'étendre aux composantes $\varphi^{<i>}$ d'étage q_i extrémal (*) et à d'autres cas encore, mais autant donner tout de suite une méthode s'appliquant indistinctement à toutes les situations.

Pour l'opérateur aux différences général D introduisons une décomposition

$$D = c\, z^{\alpha}\, (\underline{D} + \underline{\underline{D}}) \tag{3.7.15}$$

analogue à la décomposition (2.9.8) des opérateurs différentiels, mais avec cette fois :

$$c \in \mathbb{C}^* \quad , \quad \alpha \in \mathbb{Q} \tag{3.7.16}$$

$$\underline{D} = \sum_{m=0}^{M} b_m\, e^{m\partial} \qquad (b_m \in \mathbb{C}) \tag{3.7.16bis}$$

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{m=0}^{\nu-1} c_m(z)\, e^{m\partial} \qquad \left(c_m(z) \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}\}\right) \tag{3.7.16ter}$$

Ici encore, $\underline{D}$ est dit opérateur diviseur et $\underline{\underline{D}}$ opérateur dividende. Pour $n = (n_1, \dots, n_{\nu-1})$ introduisons les opérateurs conjugués :

$$D^n = z^{-[n]}\, D \,.\, z^{[n]} \qquad \left(\text{avec } z^{-[n]} = 1/z^{[n]}\right) \tag{3.7.17}$$

et décomposons-les eux aussi en un diviseur et un dividende :

$$D^n = c_n\, z^{\alpha_n}\, (\underline{D}^n + \underline{\underline{D}}^n) \tag{3.7.18}$$

On aura en particulier, pour $n = \langle i \rangle$:

(*) autrement dit $q_i = \sup\limits_j q_j$ ou $q_i = \inf\limits_j q_j$

(3.7.19) $$D^{<i>} = c_{<i>}\, z^{\alpha_{<i>}} \left(\underline{D}^{<i>} + \underline{\underline{D}}^{<i>} \right)$$

avec

(3.7.19bis) $$\underline{D}^{<i>}\, 1 = 0$$

La composante $\varphi^{<i>}$ admet donc le développement formel :

(3.7.20) $$\varphi^{<i>}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \left(\underline{D}^{<i>}\right)^{-1} \left(\underline{\underline{D}}^{<i>}\right)\right)^{n} . 1$$

Par rapport à la variable $z_1 = z$ les opérateurs $\underline{D}^{<i>}$ et $\underline{\underline{D}}^{<i>}$ s'écrivent :

(3.7.21) $$\underline{D}^{<i>}\, \varphi(z_1) = \sum \beta_m^{<i>}\, \varphi(z_1 + m) \qquad \Bigg\| \qquad \beta_n^{<i>} \in \mathbb{C}$$

(3.7.22) $$\underline{\underline{D}}^{<i>}\, \varphi(z_1) = \sum c_m^{<i>}(z_1)\, \varphi(z_1 + m) \qquad \Bigg\| \qquad c_m^{<i>}(z_1) \in z_1^{-1}\, \mathbb{C}\{z_1^{-1}\}$$

Par rapport à la variable $z_{1+} = z \log z$ cela devient :

(3.7.23) $$\underline{\mathcal{D}}^{<i>}\, \mathcal{f}(z_{1+}) = \sum \beta_m^{<i>}\, \mathcal{f}(z_{1+} + m \log z_{1+} + o(\log z_{1+}))$$

(3.7.24) $$\underline{\underline{\mathcal{D}}}^{<i>}\, \mathcal{f}(z_{1+}) = \sum \mathcal{c}_m^{<i>}(z_{1+})\, \mathcal{f}(z_{1+} + m \log z_{1+} + o(\log z_{1+}))$$

avec bien sûr $\mathcal{f} = \varphi \circ h$ et $\mathcal{c}_m^{<i>} = c_m^{<i>} \circ h$

On estime les "parties principales" des opérateurs $\underline{\mathcal{D}}^{<i>}$ et $\underline{\underline{\mathcal{D}}}^{<i>}$ au moyen des opérateurs $S_{\sigma,\tau}$:

(3.7.25) $$S_{\sigma,\tau}\, \mathcal{f}(z_{1+}) = z^{\tau}\, \varphi(z_{1+} + \sigma \log z_{1+})$$

que Borel transmute en $\mathbf{S}_{\sigma,\tau}$:

(3.7.26) $$\mathbf{S}_{\sigma,\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{f}}(\zeta_{1+}) = \int_0^{\zeta_{1+}} \frac{(\zeta_{1+} - \zeta_0)^{\sigma \zeta_0 + \tau - 1}}{\Gamma(\sigma \zeta_0 + \tau)}\, \boldsymbol{\mathcal{f}}(\zeta_0)\, d\zeta_0$$

Supposons pour fixer les idées que $\underline{D}^{\langle i \rangle} = 1 - e^{\partial}$. On transpose alors (3.7.20) dans le modèle convolutif de niveau 1^+ (variable ζ_{1+}) en prenant, selon que l'on travaille au-dessus du demi-plan gauche ou droite :

(3.7.27) $$\left(\underline{\not{D}}^{\langle i \rangle}\right)^{-1} = 1 + S^*_{1,0} + S^*_{2,0} + S^*_{3,0} + \ldots$$

(3.7.28) $$\left(\underline{\not{D}}^{\langle i \rangle}\right)^{-1} = - S^*_{-1,0} - S^*_{-2,0} - S^*_{-3,0}$$

pour des opérateurs $S^*_{m,0}$ de partie principale $S_{m,0}$. Dans la somme :

(3.7.29) $$\not{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+}) = \delta(\zeta_{1+}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\left(\underline{\not{D}}^{\langle i \rangle}\right)^{-1}\left(\underline{\underline{\not{D}}}^{\langle i \rangle}\right)\right)^n \delta(\zeta_{1+})$$

ainsi obtenue, grâce au même type exactement de majorations qu'en (3.6.69), des coupures stellaires d'abscisse $q_j - q_i \neq 0$. L'essentiel est de voir qu'il n'y aura pas de difficulté de convergence au voisinage (droit et gauche) de l'origine . Les sommes (3.7.27) et (3.7.28), avec les intégrations répétées (3.7.26) qu'elles comportent, semblent devoir en créer, mais on les surmonte facilement en travaillant non sur les <u>mineurs</u>, mais sur les <u>majeurs</u>, ce qui évite d'intégrer sur des chemins partant de l'origine.

Mais il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails, car nous allons indiquer une autre méthode, qui donne le résultat presque <u>sans calculs</u>.

<u>3.7.c</u>. <u>Le cas à plusieurs étages</u> : <u>Méthode indirecte</u> (<u>mais sans calculs</u>).

Cette méthode est indirecte en ce sens qu'elle consiste à considérer (*) de préference à l'equation homogène (3.8.1) dont les solutions $\varphi^{\langle i \rangle}$ n'ont pas de modèle formel <u>simple</u> de niveau 1^+ , l'équation homogène (3.8.2) de second membre arbitraire (mais non nul), dont la solution particulière φ^{o} présente elle l'énorme avantage de posséder un modèle formel simple (et même prograde) de niveau 1^+

(*) En anticipant sur le § 3.8, mais sans cercle vicieux ! (Le § 3.7 ne fait que particulariser le § 3.8).

Plus précisément, prenons q_0 réel, différent des q_i et considérons l'équation affine :

$$z^{-q_0 z} . D . z^{q_0 z} \varphi(z) = \alpha(z) \qquad (\alpha(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}) \tag{3.7.30}$$

de second membre $\alpha(z)$ arbitraire. (3.7.31) possède une unique solution formelle $\varphi^{\circ}(z)$ en puissances (réelles) décroissantes de z. Passant à la variable z_{1+} puis à la variable ζ_{1+} (modèle convolutif de niveau 1^+) on montre sans peine, en démarquant presque mot pour mot les trois méthodes de §3.6.b (et surtout la dernière) que le mineur $\Phi(\zeta_{1+})$ de la transformée de Borel de $\varphi(z_{1+}) = \varphi \circ k(z_{1+})$ converge au voisinage de l'origine $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}_{\infty}$ et se prolonge sur toute une région de $\mathbb{C}_{\infty}$ située au-dessus d'une bande verticale (*) limitée par :

$$\mathrm{Re}\ \dot{\zeta}_{1+} = q_0 - q' \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\ \dot{\zeta}_{1+} = q_0 - q'' \tag{3.7.31}$$

où q' et q'' sont les deux étages q_i qui encadrent q_0 . Et au voisinage de tout point ω de $\mathbb{C}_{\infty}$ situé au-dessus de $q_0 - q'$ ou de $q_0 - q''$ la partie irrégulière de $\Phi^{\circ}(\zeta_{1+} - \omega)$ est nécessairement égale à une combinaison linéaire, à coefficients périodiques en z_1 , des <u>majeurs</u> $\underline{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$. Plus précisément, la partie irrégulière de $\underline{\Phi}^{\circ}(\zeta_{1+} - \omega)$ est égale au majeur de la transformée de Borel de niveau 1^+ de :

$$\sum B^i_{\omega}(z_1)\, z^{\langle i \rangle}\, z^{-q_i z}\, \varphi^{\langle i \rangle}(z_{1+}) \qquad (**) \tag{3.7.32}$$

avec des facteurs élémentaires $z^{\langle i \rangle} z^{-q_i z}$ et des facteurs $B^i_{\omega}(z_1)$ périodiques en z_1 de période 1 .

En prenant q_0 <u>réel</u> à droite puis à gauche de q_i , on prouve déjà que les majeurs $\underline{\Phi}^{\langle i \rangle}$ sont holomorphes au voisinage de $\mathcal{O}$ dans les secteurs :

(*) ou d'un demi-plan vertical si tous les q_i sont d'un même côté de q_0 .

(**) somme étendue aux seuls i tels que $q_i = q'$ (resp. q'').

(3.7.33) $\quad (k-\frac{1}{2})\pi < \arg \zeta_{1+} < (k+\frac{1}{2})\pi \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}$; voir figure 1)

Puis, en réduisant $B_\omega(\zeta_1)$ à son seul terme constant (*) au moyen d'une intégration de la forme (3.6.89), on montre aussitôt que le majeur $\mathbf{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ est en fait holomorphe au voisinage de Φ dans les secteurs :

(3.7.34) $\quad (k-1)\pi < \arg \zeta_{1+}) < (k+1)\pi \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}$; voir figure 2)

Enfin, prenant q_0 complexe et le faisant varier au-dessus d'une même verticale, on montre l'holomorphie des majeurs $\mathbf{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ au voisinage de Φ dans des secteurs :

(3.7.35) $\quad (k-\frac{3}{2})\pi < \arg \zeta_{1+} < (k+\frac{3}{2})\pi \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}$; voir figure 3)

D'où l'holomorphie des mineurs $\phi^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ au voisinage de l'origine dans les secteurs (3.7.33).

Les deux seules suppositions tacites que nous ayons faites sont :

(i) la possibilité d'isoler les composantes $\varphi^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ de (3.7.32)

(ii) l'existence, pour chaque i , d'un second membre $\alpha(\zeta)$ de (3.7.30) tel que la solution (mineure) $\phi^{0}(\zeta_{1+})$ "manifeste" effectivement $\mathbf{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$ en au moins un point ω (**).

Le premier point découle de la méthode de séparation des composantes, indiqué à la fin du § 3.8 (Voir formule (3.8.18)).

Le deuxième point est à peu près évident, par symétrie en i , dès lors qu'il existe, comme on sait que c'est le cas, des second membres $\alpha(\zeta)$ tels que la solution $\varphi^{0}(\zeta)$ ne soit pas analytique et tels, par suite, que $\phi^{0}(\zeta_{1+})$ "manifeste" au moins l'une des $\mathbf{\Phi}^{\langle i \rangle}(\zeta_{1+})$.

(*) ou, si celui-ci est nul, à l'un quelconque de ses termes non nuls $B_\omega^n e^{2\pi i n \zeta}$

(**) autrement dit, tel que les $B_\omega^i(\zeta_1)$ de (3.7.32) ne soient pas tous $\equiv 0$.

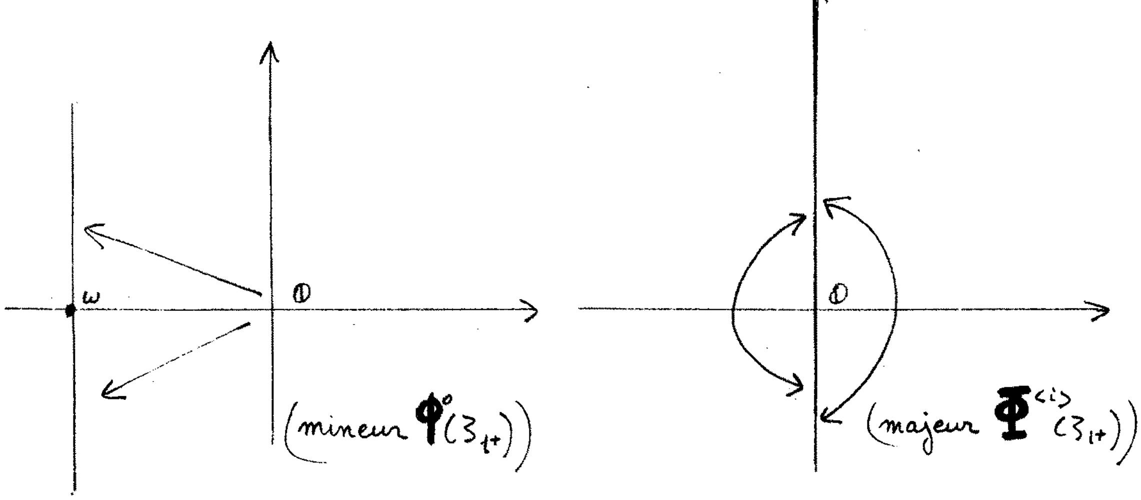


Figure 1

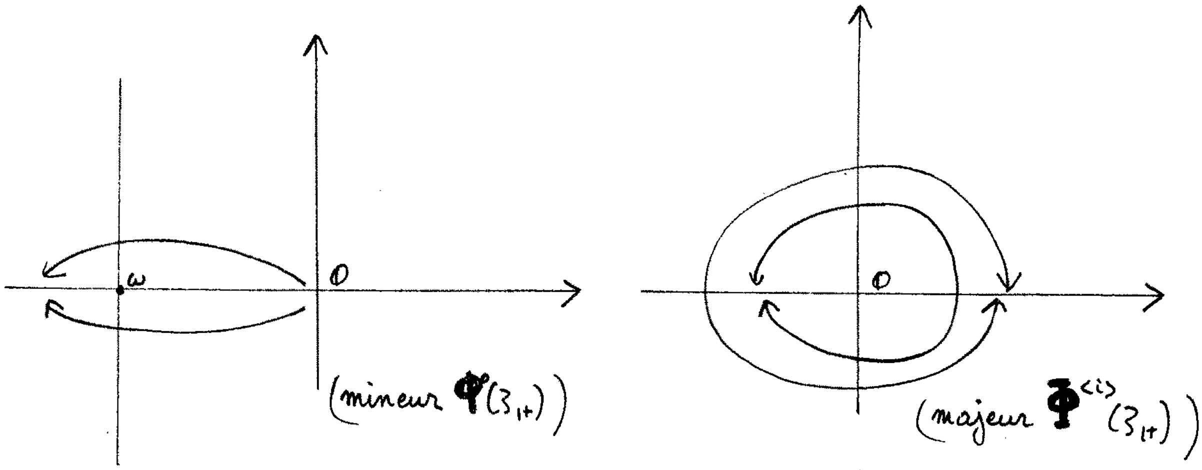


Figure 2

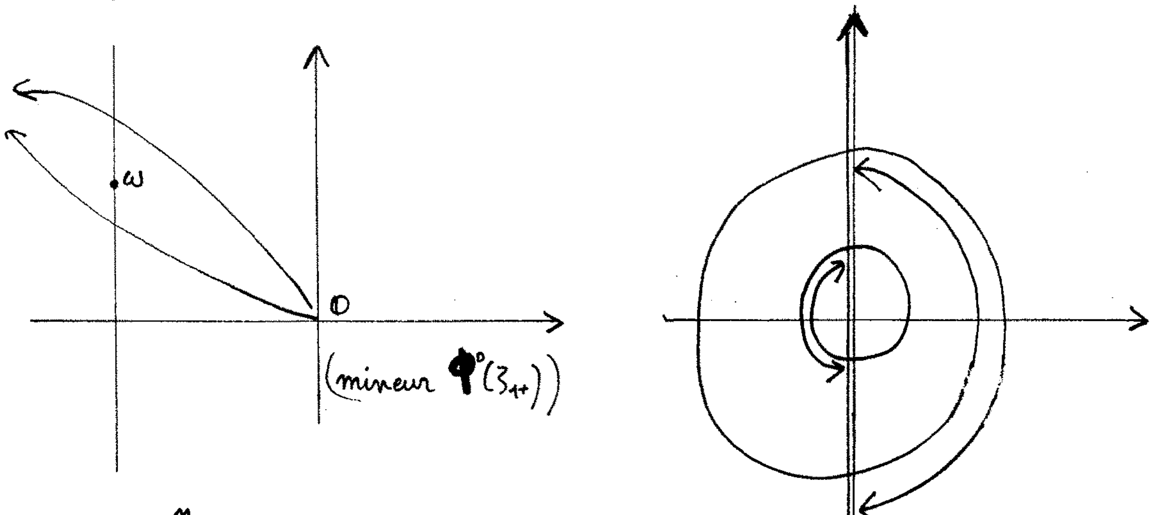


Figure 3

3.7.d. Composante φ^n pour $\|n\| > 1$

Quand on tient les $\Phi^{\langle i\rangle}(\zeta_{1+})$ on en tire les $\Phi^{\langle n\rangle}(\zeta_{1+})$ d'indice $\|n\| > 1$ en utilisant la récurrence :

(3.7.36) $$\Phi^n(\zeta_{1+}) = \left(\mathbb{D}^n\right)^{-1}_{pro} \quad \mathbf{K}^n(\zeta_{1+})$$

(i) avec un $\mathbf{K}^n$ polynome de convolution en les Φ^m d'indices $\|m\| < \|n\|$

(ii) avec un opérateur $\mathbb{D}^n$ défini comme en (3.7.18).

(iii) avec $\dot{\mathcal{D}}^n$ déduit de $\mathcal{D}^n$ par passage de z_1 à z_{1+}

(iiii) avec $\boldsymbol{\dot{\mathcal{D}}}^n$ transmuté de $\dot{\mathcal{D}}^n$ par Borel

(iiiii) avec un développement prograde de $(\boldsymbol{\dot{\mathcal{D}}}^n)^{-1}_{pro}$ identique à celui de la formule (2.10.15bis).

La convergence du second membre de (3.7.36) s'établit au choix, par la méthode du § 3.7.b ou du § 3.7.c. La seule différence est qu'il faut maintenant travailler systématiquement sur les majeurs, vu que les $\mathbf{K}^n(z_{1+})$ ne sont pas en général dans $\mathbb{C}[[h^{-1}(z_{1+})]]$

3.7.e. Remarque sur la quantité d'information invariante.

Interprétant la proposition 3.7.2, on observe que, pour les équations aux différences, le niveau 1 et (lorsqu'il est atteint) le niveau 1^+ portent chacun beaucoup plus d'information invariante que les autres niveaux, et ceci pour trois raisons :

(i) d'abord parce que les $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1 et 1^+ font intervenir dans leurs coéfficients davantage de paramètres μ_i que les $\mathbb{A}_\omega$ des niveaux inférieurs.

(ii) ensuite parce que le réseau de résurgence de niveau 1 se trouve automatiquement enrichi par le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$

(iii) enfin parce que les $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1^+ dépendent de z_1 : ils sont périodiques de période 1 en z_1 (*).

Le point (i) est somme toute banal : on sait en effet que, d'une façon générale, l'information invariante augmente avec le niveau. Les points (ii) et (iii) sont beaucoup plus remarquables. D'autant que, comme on l'a déjà observé à la section précédente, l'enrichissement (ii) et l'enrichissement (iii) sont exactement complémentaires: l'un et l'autre ont pour effet de multiplier par $\mathbb{Z}$ l'ensemble

(*)les $\mathbb{A}_\omega$ de niveau 1 aussi, mais par le biais du facteur trivial $e^{-n_0\lambda_0 z_1}$ qui ne porte aucune information invariante.

$\mathbb{J}$ (voir (2.7.22)) qui indexe naturellement les invariants holomorphes scalaires de niveau 1 et 1^+. D'où cette conséquence très satisfaisante pour l'esprit : si on perturbe les coefficients d'une équation aux différences de façon à modifier les multiplicités $\theta(1)$ et $\theta(1^+)$ des niveaux 1 et 1^+ tout en respectant la somme $\theta(1)+\theta(1^+)$, on ne change pas la quantité globale d'information invariante.

3.7.f. Equations aux différences les plus générales.

Il ne reste plus qu'à lever les trois hypothèses restrictives (i), (ii), (iii) faites en début de section. On procède exactement comme à la fin de la section 3.4 mais avec cette différence que l'on peut maintenant voir se superposer deux types de coupures stellaires : celles qui sont propres au niveau 1^+ (voir proposition 3.7.2 ci-avant) et celles qui proviennent de l'introduction dans l'équation (3.7.1) de termes constants en x, quand on lève l'hypothèse $a(z,0,\dots,0)=0$. Ces deux sortes de coupures stellaires sont de nature et surtout d'origine sensiblement différentes, mais elles n'interfèrent ni les unes ni les autres avec le calcul des invariants holomorphes (*).

SECTION 3.8 : APPLICATION AU CAS LINEAIRE.

Prenons ici encore un opérateur D de la forme le plus générale (3.1.11) c'est-à-dire un opérateur aux différences de coefficients méromorphes à l'infini, mais d'ordre ν quelconque, de niveaux p_i quelconques et d'étages q_i quelconques. Envisageons simultanément l'équation linéaire homogène :

(3.8.1) $$D.\, x(z) = 0$$

et l'équation linéaire inhomogène :

(3.8.2) $$D.\, x(z) = a(z) \qquad \left(a(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}\right)$$

(*) En dehors des cas "unilatéraux stricts" toutes les rétrosolutions envisagées dans les sections §§3.4 à 3.8 sont polarisées. Par suite les invariants $\mathbb{A}_\omega$ le sont aussi. Pour les formules de passage d'une polarisation à une autre, voir l'Appendice 1.

Pour chaque niveau ρ effectivement atteint ces équations admettent des intégrales qui sont respectivement de la forme :

$$(3.8.3) \qquad x(z_\rho, u) = \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z^{<i>} \, \phi^{<i>}(z_\rho)$$

$$(3.8.4) \qquad x(z_\rho, u) = \phi^{0}(z_\rho) + \sum_{i=1}^{\nu} u_i \, z^{<i>} \, \phi^{<i>}(z_\rho)$$

avec des blocs élémentaires de la forme :

$$(3.8.5) \qquad z^{<i>} = z^{\tau_i} \cdot z^{q_i z} \cdot \ell_i^{z} \cdot \exp\Big(\sum_{0<\rho<\rho_i} \lambda_{i,\rho} \, z^{\rho}\Big)$$

où les ℓ_i^{z} doivent s'entendre relativement à une détermination de $\lambda_i = \log \ell_i$ choisie une fois pour toutes (si $\ell_i = 1$, on prend $\lambda_i = 0$).

Invariants de niveau 1^+.

Au niveau 1^+ l'équation du pont fait intervenir des invariants $\mathbb{A}_\omega$ qui s'écrivent dans le cas homogène :

$$(3.8.6) \qquad \mathbb{A}_\omega = \sum_{q_i - q_j = \omega} A_\omega^{i,j}(z_1) \; u_i \, \frac{\partial}{\partial u_j}$$

et dans le cas inhomogène :

$$(3.8.7) \qquad \mathbb{A}_\omega = \sum_{-q_j = \omega} A_\omega^{j}(z_1) \, \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{q_i - q_j = \omega} A_\omega^{i,j}(z_1) \, u_i \, \frac{\partial}{\partial u_j}$$

avec des coefficients $A_\omega^{j}(z_1)$ et $A_\omega^{ij}(z_1)$ qui sont des fonctions entières de z_1 , périodiques de période 1 et de croissance infraexponentielle. On voit par là qu'une équation aux différences linéaire homogène (ou, ce qui revient au même, un opérateur aux différences linéaire homogène ne présente d'invariants holomorphes de niveau 1^+ que si elle (il) possède au moins deux étages q distincts.

Invariants de niveau 1.

Ces invariants, eux, existent toujours. Ils s'écrivent dans le cas homogène

(3.8.8) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}\left(\sum{}'' A_\omega^{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum{}''' A_\omega^{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

et dans le cas inhomogène

(3.8.9) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}\left(\sum{}' A_\omega^{j} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum{}'' A_\omega^{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum{}''' A_\omega^{i,j}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

avec des $\sum'$ étendus à tous les i,j tels que

(3.8.10) $$p_j = 1 \quad \text{et} \quad n_0\lambda_0 - \lambda_j = \omega \qquad\qquad (n_0 \in \mathbb{Z})$$

avec des $\sum''$ étendus à tous les i,j tels que

(3.8.11) $$(p_i = p_j = 1,\ n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j = \omega) \text{ ou } (p_i = 1 > p_j,\ n_0\lambda_0 + \lambda_i = \omega) \text{ ou } (p_j = 1 > p_i,\ n_0\lambda_0 - \lambda_j = \omega)$$

et avec des $\sum'''$ étendus à tous les i,j tels que :

(3.8.12) $$q_i = q_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega = n_0\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j \text{ ou } n_0\lambda_0 + \lambda_i \text{ ou } n_0\lambda_0 - \lambda_j$$

Comme toujours, λ_0 désigne le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$.

Invariants de niveau $p \in]0,1[$.

Les formules sont exactement les mêmes qu'à la section 3.5.

Remarque : Méthode de séparation des composantes.

Appliquée à la composante φ^0 de l'intégrale formelle (3.8.4) de l'équation inhomogène (3.8.2), l'équation du pont de niveau 1^+ fournit

(3.8.13) $$\Delta_\omega \varphi^0(z_{1^+}) = \sum_{q_i = q} A_\omega^i(z_1)\, \varphi^i(z_{1^+})\, z^{\langle i\rangle} z^{-q_i z} \qquad \left\{\begin{array}{l}\underline{\text{modèle formel}}\\ \dot{\omega} = -q\end{array}\right.$$

C'est une relation du type :

(3.8.14) $$R(z_{1+}) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_i(z_{1+})\ R_i(z_{1+})$$

avec des fonctions R et R_j résurgentes en z_{1+} et des séries de Fourier formelles en z_1 :

(3.8.15) $$\mathcal{A}_i(z_{1+}) = A^i_\omega(h(z_{1+})) = A^i_\omega(z_1)$$

qu'on veut <u>isoler</u> pour pouvoir ensuite les <u>analyser</u> (*) et obtenir ainsi les invariants holomorphes de niveau 1.

Reprenons les opérateurs t_α de la section 3.6.g (**), ainsi définis

(3.8.16) $$t_\alpha \varphi(z_{1+}) = \varphi(k(\alpha + h(z_{1+}))) \qquad (\forall \varphi)$$

Comme les $A^i_\omega(z_1)$ sont périodiques en z_1 de période 1, on a aussi :

(3.8.17) $$t_m\ \mathcal{A}_i(z_{1+}) \equiv \mathcal{A}_i(z_{1+}) \qquad (\forall m \in \mathbb{Z})$$

A partir de là on vérifie facilement la formule :

(3.8.18) $$A^i_\omega(z_1) = \mathcal{A}_i(z_{1+}) = \frac{\mathcal{D}_i(z_{1+})}{\mathcal{D}(z_{1+})} \qquad \text{(modèle formel)}$$

où $\mathcal{D}$ désigne le déterminant $n \times n$ dont la j-ème ligne vaut :

(3.8.18bis) $$\{R_j,\ t_1 R_j,\ t_2 R_j,\ \ldots,\ t_{n-1} R_j\}$$

et où $\mathcal{D}_i$ désigne le déterminant déduit de $\mathcal{D}$ en remplaçant la i-ème ligne par :

(*) par le procédé (3.6.89) et (3.6.90) par exemple.

(**) Voir (3.6.89) et (3.6.90).

(3.8.18ter) $\{R, t_1 R, t_2 R, \ldots, t_{n-1} R\}$

Pour calculer concrètement $A^i_\omega(z_1)$ on opère dans le modèle convolutif de niveau 1^+ avec les opérateurs $\boldsymbol{t}_m$ transmutés des t_m par Borel (***).

SECTION 3.9. EQUATIONS AUX TRANSLATIONS OU AUX COMPOSEES. EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE INFINI.

Nous avons déjà noté (*) qu'on avait sur les équations aux différences une notion naturelle de changement d'inconnue analytique :

(3.9.1) $$x(z) \longmapsto h(z, x(z)) = \alpha\, x(z) + \ldots \quad (\alpha \neq 0,\ h(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x\})$$

mais pas de notion de changement de variable analytique :

(3.9.2) $$z \longmapsto \alpha z + k(z, x(z)) \qquad\qquad (\alpha \neq 0,\ k(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x\})$$

car un tel changement de variable (quand il ne se réduit pas à une simple similitude sur z) mue toute équation aux différences d'ordre fini Y en une équation différentielle d'ordre infini. Et l'équation obtenue, pour peu qu'on la perturbe d'une manière arbitraire, cesse d'équivaloir à une équation aux différences.

C'est également à des équations différentielles infinies qu'on aboutit si on perturbe directement (c'est-à-dire antérieurement à tout changement de variables) des équations aux différences, même très simples. Si par exemple au premier membre de l'équation aux différences :

(3.9.3) $$x(z) - x(z+1) = z^2 + z^{-1} \cdot x^3(z)$$

on ajoute un terme aussi anodin que $\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} x(z)$, on bouleverse complètement la nature de l'équation (**), qui ne peut plus se traiter que dans le cadre des équa-

(*) Voir §3.1.

(**) On provoque en particulier un accroissement vertigineux du nombre des invariants holomorphes. Voir ci-après les équations (3.9.28), (3.9.29), (3.9.30).

(***) Ces opérateurs $\boldsymbol{t}_m$ ont pour "partie principale" $\boldsymbol{S}_{m,1}$. Voir (3.7.26).

tions différentielles d'ordre infini.

Heureusement, le calcul étranger continue de s'appliquer à ces équations. Nous allons illustrer la méthode sur quatre exemples particulièrement importants d'équations différentielles d'ordre infini. Ce sont : les équations aux translations, les équations aux composées, les équations différentielles-et-aux-translations et les équations différentielles-et-aux-composées. L'importance de ces équations vient de ce qu'elles présentent encore un certain caractère fini : elles ne font intervenir l'inconnue $x(z)$ que par le biais d'un nombre fini de "transformées élémentaires" $x_i(z)$ de $x(z)$.

D'une façon précise, ces équations sont toutes de la forme :

(3.9.4) $$\varphi(z, x_1(z), \ldots, x_\nu(z)) \equiv 0$$

avec

(3.9.5) $$\varphi(z, x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x_1, \ldots, x_\nu\}$$

et avec :

(i) pour l'équation aux translations $\qquad x_i(z) = x(z+K_i)$

(ii) pour l'équation aux composées $\qquad x_i(z) = x(f_i(z))$

(iii) pour l'équation différentielle-et-aux-translations $\qquad x_i(z) = \frac{\partial^{n_i}}{\partial z^{n_i}} x(z+K_i)$

(iiii) pour l'équation différentielle-et-aux-composées $\qquad x_i(z) = \frac{\partial^{n_i}}{\partial z^{n_i}} x(f_i(z))$

où bien sûr $K_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$ et $f_i(z) = z + K_i + \sum_{n=1}^{\infty} K_{i,n} z^{-n} \in z + \mathbb{C}\{z^{-1}\}$

L'équation différentielle-et-aux-composées est évidemment la plus générale : elle coiffe toutes les autres. Mettons ces équations sous forme préparée en isolant leur partie principale. (3.9.4) s'écrit alors :

(3.9.6) $$D \cdot x(z) = a(z, x_1(z), \ldots, x_\nu(z))$$

avec $a(z,x_1,\dots,x_\nu) \in \mathbb{C}\{z^{-1},x_1,\dots,x_\nu\}$ et avec un opérateur <u>linéaire</u> D ainsi défini :

- pour l'équation aux translations :

$$D.x(z) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots) \quad x(z+\kappa_i) \tag{3.9.7}$$

- pour l'équation aux composées :

$$D.x(z) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots)\, x(f_i(z)) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots) x(z+\kappa_i+\chi_i z^{-1}+\dots) \tag{3.9.8}$$

- pour l'équation différentielle-et-aux-translations :

$$D.x(z) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots) \frac{\partial^{n_i}}{\partial z^{n_i}} x(z+\kappa_i) \tag{3.9.9}$$

- pour l'équation différentielle-et-aux-composées :

$$D.x(z) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots) \frac{\partial^{n_i}}{\partial z^{n_i}} x(f_i(z)) = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \dots) \frac{\partial^{n_i}}{\partial z^{n_i}} x(z+\kappa_i+\chi_i z^{-1}+\dots) \tag{3.9.10}$$

On ajoute une <u>condition de préparation</u> proprement dite, copiée sur (3.4.5) et garantissant que l'opérateur D décrit vraiment la "partie principale" de l'équation. Quand cette condition n'est pas réalisée, on peut toujours s'y ramener. Ce n'est donc pas une <u>restriction</u>.

Associons à l'opérateur D un polynôme exponentiel $P(\lambda)$ ainsi défini :

- pour les équations aux translations ou aux composées :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \, e^{\kappa_i \lambda} \tag{3.9.11}$$

- pour les équations différentielles-et-aux-translations ou différentielles-et-aux composées :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \, \lambda^{n_i} \, e^{\kappa_i \lambda} \tag{3.9.12}$$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ l'infinité des zéros de $P(\lambda)$, les zéros multiples étant comptés plusieurs fois. Supposons pour commencer que les coefficients α_i des polynômes P soient tous différents de zéro :

(3.9.13) $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_\nu \neq 0$

et que l'infinité des zéros λ_i soit sans résonance :

(3.9.14) $\left(\sum^* n_j \lambda_j = 0 ; n_j \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow (n_j = 0)$ (avec $\sum^*$ somme finie)

ce qui implique en particulier qu'aucun zéro n'est multiple. C'est évidemment le cas générique. On est alors en présence d'un problème à un seul niveau, ce niveau valant 1 . L'équation homogène :

(3.9.16) $D \cdot x(z) = 0$

possède dans ce cas une infinité de solutions formelles du type :

(3.9.17) $e^{\lambda_j z} z^{\tau_j} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{j,n} z^{-n}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$

avec des exposants τ_j bien déterminés (*) et on a les énoncés suivants, qui donnent la classification analytique des équations considérées.

Proposition 3.9.1. (Allure de l'intégrale formelle)

Dans le cas générique, c'est-à-dire sous les hypothèses (3.9.13) et (3.9.14), l'équation (3.9.6) admet une intégrale formelle du type :

(3.9.18) $x(z; u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} u^n \cdot z^{[n]} \cdot \phi^n(z)$

qui est fonction d'une infinité de paramètres u_i , mais qui est unique modulo les dilatations $u_i \mapsto c_i u_i$. Le multiindice n parcourt l'ensemble $\mathcal{N} = \mathbb{N}_0^\infty$ formé des suites entières $(n_1, n_2, \ldots)$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. On a bien sûr :

(*) ils sont calculables à partir des λ_i et des seuls coefficients $\alpha_i, \beta_i, \kappa_i, \chi_i$.

$$(3.9.19)\qquad \varphi^{n}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(3.9.20)\qquad u^{n} = \prod_i{}^{*} u_i^{n_i} \qquad (\textstyle\prod^{*} \text{produit fini})$$

$$(3.9.21)\qquad z^{[n]} = z^{(\Sigma^{*} n_i \tau_i)}\, e^{z(\Sigma^{*} n_i \lambda_i)} \qquad (\textstyle\sum^{*} \text{somme finie})$$

<u>Proposition 3.9.2</u> (<u>Résurgence de l'intégrale formelle</u>)

L'intégrale formelle $x(z,u)$ est résurgente en z , autrement dit chacune de ses composantes $\varphi^{n}(z)$ l'est. Son réseau de résurgence est l'ensemble Ω constitué par les ω de la forme :

$$(3.9.22)\qquad \omega = \sum_i{}^{*} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{Z},\ \textstyle\sum^{*} \text{finie})$$

ou de la forme :

$$(3.9.23)\qquad \omega = -\lambda_{i_0} + \sum_{i \neq i_0}{}^{*} n_i \lambda_i \qquad (n_i \in \mathbb{Z},\ \textstyle\sum^{*} \text{finie})$$

<u>Proposition 3.9.3</u> (<u>Equation du pont et invariants holomorphes</u>).

L'intégrale formelle vérifie les équations de résurgence

$$(3.9.24)\qquad \dot{\Delta}_\omega\, x(z,u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z,u) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

pour des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

$$(3.9.25)\qquad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \sum_{i=1}^{\infty} A_\omega^{i}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (\text{somme infinie})$$

avec $u^{n(\omega)} = \prod^{*} u_i^{n_i}$ (produit <u>fini</u>) si $\omega = \sum^{*} n_i \lambda_i$ (somme <u>finie</u>).
Les seules contraintes a priori sur les $\mathbb{A}_\omega$ sont celles-ci :

$$(3.9.26)\qquad A_\omega^{i} = 0 \quad \text{pour } \omega \text{ de la forme (3.9.23) et } i \neq i_0 .$$

<u>Remarque</u> : Nous venons de qualifier les $\mathbb{A}_\omega$ d'invariants. Invariants par rapport à quoi ? Cela dépend du point de vue qu'on adopte. Si on veut préserver le caractère

"fini" de l'équation (3.9.4), on ne peut la soumettre qu'aux changements d'inconnue analytiques du type (3.9.1). Mais si on ne craint pas de plonger (3.9.4) dans la catégorie générale des équations différentielles d'ordre infini, on peut aussi la soumettre aux changements de variable analytiques du type (3.9.2). Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont invariants par rapport à ces deux types de changement. On peut aussi, oubliant l'invariance des $\mathbb{A}_\omega$, ne voir en leurs coefficients A_ω^i que des "constantes importantes" attachées à l'équation (3.9.4).

Bien entendu, quand on lève les hypothèses (3.9.13) et (3.9.14), l'équation (3.9.6) peut présenter d'autres niveaux que le niveau 1. Chaque niveau possède alors ses invariants holomorphes, qu'on calcule par le procédé habituel. Plutôt que d'entrer dans les détails, bornons-nous à dire quelques mots des trois grandes nouveautés que présente l'étude des équations (3.9.6) les plus générales et qui sont :

- l'apparition, à tous les niveaux, d'une infinité de paramètres u_i
- la disparition, au niveau 1, du multiplicateur imaginaire λ_0
- apparition, au niveau 1^+, d'étages q_i qui ne sont plus nécessairement rationnels.

a) Première nouveauté : l'infinité des paramètres u_i .

C'est peut-être la différence la plus frappante. Ainsi, même en cas de niveau unique, chaque opérateur (3.9.25) comporte une infinité de composantes A_ω^i, contre un nombre fini dans (3.2.14). Cette infinité ne pose toutefois aucune difficulté (d'interprétation ou de convergence) quand on applique les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ à l'intégrale formelle ou quand on prend leur crochet de Lie. Ainsi :

$$(3.9.27)\qquad [\mathbb{A}_{\omega_1}, \mathbb{A}_{\omega_2}] = u^{n(\omega_1)} u^{n(\omega_2)} \sum_{i=1}^{\infty} B^i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

avec un $\sum$ infini, mais des B^i qui sont chacun des sommes finies, bilinéaires en les $A_{\omega_1}^j$ et les $A_{\omega_2}^k$.

b) Deuxième nouveauté : la disparition du multiplicateur imaginaire au niveau 1.

Les invariants A_ω de niveau 1 des équations aux différences comportaient un facteur $e^{-n_0 \lambda_0 z}$ fabriqué avec le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$ et un entier n_0 fonction de ω. Quand on s'écarte tant soit peu de la catégorie des équations aux différences, ce facteur disparaît. Il disparaît même pour les équations différentielles-et-aux-différences, c'est-à-dire les équations (3.9.6) + (3.9.10) avec des pas de translation K_i tous entiers, bien qu'alors $P(\lambda)$ soit un polynôme en λ et e^λ et parfois en e^λ seul.

Illustrons ce fait inattendu sur le cas de trois équations en apparence très voisines, la première étant une équation aux différences ordinaire et les deux dernières des équations différentielles-et-aux-différences.

(3.9.28) $$x(z+1) - x(z) = a(z, x(z))$$

(3.9.29) $$x(z+1) - x(z) + \alpha z^{-2} x'(z) = a(z, x(z))$$

(3.9.30) $$x(z+1) - x(z) + \alpha x'(z) = a(z, x(z))$$

avec $\alpha \neq 0$, $a(z,x) \in \mathbb{C}\{z^{-1}, x\}$ et $a(z,x)$ sans termes linéaires en x (*)

Les polynômes exponentiels $P(\lambda)$ valent respectivement :

$$P(\lambda) = P_1(\lambda) = e^\lambda - 1$$
$$P(\lambda) = P_2(\lambda) = e^\lambda - 1$$
$$P(\lambda) = P_3(\lambda) = e^\lambda - 1 + \alpha\lambda$$

et leurs zéros λ_i engendrent le réseau de résurgence Ω.

Dans le cas de l'équation (3.9.30) le polynôme exponentiel $P_3(\lambda)$ possède

(*) Pour fixer les idées, on peut prendre :

$$a(z, x) = 2 z^{-5} + 7 z^{-4} x^3 + 4 z^{-9} x^2$$

une infinité de zéros λ_i qui (pour presque toute valeur de α) sont distincts et rationnellement indépendants. Le réseau Ω est donc très riche; l'intégrale formelle $x(z,u)$ dépend d'une infinité de paramètres u_i ; et les invariants $\mathbb{A}_\omega$ ont la forme (3.9.25).

Les équations (3.9.28) et (3.9.29), au contraire, possède un même polynôme exponentiel $P_1(\lambda) = P_2(\lambda)$ dont les zéros, de la forme

$$\lambda_n = 2\pi i\, n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{3.9.31}$$ (*)

sont tous commensurables et engendrent un même réseau de résurgence $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$. Mais bien que l'équation (3.9.29) paraisse - et soit - bien plus voisine de (3.9.28) que ne l'était (3.9.30), il existe encore un abîme entre (3.9.29) et (3.9.28).

En effet, dans le cas de la véritable <u>équation aux différences</u> (3.9.28) on doit, d'après la théorie générale, envisager une intégrale formelle :

$$x(z,u) = \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} u_1^{n_1}\, z^{[n_1]}\, \phi^{n_1}(z) \tag{3.9.32}$$

qui ne comporte qu'<u>un seul</u> paramètre u_1 et dont les blocs $z^{[n_1]}$ valent ici $z^{n_1 \tau}$ (**). Quant aux opérateurs invariants, ils sont de la forme :

$$\mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z} A_\omega(u_1) \frac{\partial}{\partial u_1} \qquad (\forall \omega \in \Omega = 2\pi i \mathbb{Z}) \tag{3.9.33}$$

avec à chaque fois un seul coefficient $A_\omega(u_1) \in \mathbb{C}[[u_1]]$

Au contraire, dans le cas de l'<u>équation différentielle-et-aux-différences</u> (3.9.29), et bien que le réseau de résurgence soit toujours $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$, il faut envisager une intégrale formelle :

$$x(z,u) = \sum_{n} u^n .\, z^{[n]} .\, \phi^n(z) \tag{3.9.34}$$

(*) Dans ce cas précis, il est plus naturel d'indexer les λ_n sur $\mathbb{Z}$ que sur $\mathbb{N}$.

(**) pour un scalaire τ fonction des premiers coefficients de $a(z,x)$.

qui comporte une infinité de paramètres u_i :

(3.9.35) $$\ldots\ u_{-2}\ ,\ u_{-1}\ ,\ u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ldots$$

et des blocs $z^{[n]}$ de la forme :

(3.9.36) $$z^{[n]} = e^{2\pi i \|n\| z}\, z^{\|n\|\tau} \quad \text{avec } \|n\| = \textstyle\sum^* n_i \ \text{(somme finie)}$$

Et cette fois on obtient des opérateurs invariants de la forme :

(3.9.37) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (\forall \omega \in \Omega = 2\pi i \mathbb{Z})$$

avec des composantes $A_\omega(u)$ appartenant à l'algèbre $\mathbb{C}_0[[u]]$ engendrée par tous les monômes $u^n = \prod^* u_i^{n_i}$ (produits finis).

Il apparaît donc que la famille des invariants holomorphes <u>scalaires</u> de l'équation aux différences (3.9.28) est naturellement indexée sur l'ensemble :

(3.9.38) $$\mathbb{J} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

tandis que celle de l'équation différentielle-et-aux-différences (3.9.29) est indexée sur :

(3.9.39) $$\mathbb{J} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{P}_0(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{P}_0(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathbb{J}$ reste dénombrable, mais sa "cardinalité fine" augmente prodigieusement. Pourquoi cette différence ? Parce que les composantes ϕ^n de l'intégrale formelle (3.9.34) sont distinctes pour $\alpha \neq 0$ mais tendent, lorsque $\alpha \to 0$, vers des limites $\psi^{\|n\|}$ qui (à un facteur scalaire près) ne dépendent que de la somme $\|n\| = \sum^* n_i$ du multiindice n. A la limite, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, il devient impossible de distinguer entre ϕ^n et $\phi^{n'}$ si $\|n\| = \|n'\|$. Les paramètres u_i se fondent tous en un seul paramètre (que nous avons appelé u_1)

et l'on passe des invariants "riches" de la formule (3.9.37) aux invariants "pauvres" de la formule (3.9.33).

Notons toutefois que ce fantastique appauvrissement n'infirme aucunement le principe de continuité de la quantité d'invariance en fonction des niveaux. Ce principe, que nous avons déjà maintes fois vérifié, vaut à ordre ν constant. Or ici ce n'est pas le niveau $\not{p}$ qui change ($\not{p}$ reste égal à 1) mais l'ordre. L'équation (3.9.29) doit en effet être assimilée à une équation différentielle d'ordre $\nu = \infty$ tandis que l'équation (3.9.28) rentre dans la catégorie des équations aux différences d'ordre 1.

c) Troisième nouveauté : apparition d'étages q_i irrationnels au niveau 1^+.

Soit par exemple l'équation aux translations (3.9.6) + (3.9.7) avec un premier membre de la forme :

$$\sum_{i=1}^{\nu} z^{-\delta_i} \, x(z+\kappa_i) \qquad (\delta_i \in \mathbb{N}, \kappa_i \in \mathbb{C}) \tag{3.9.40}$$

Elle possède en général plusieurs étages q_i qui sont tout aussi incommensurables que les κ_i . D'où des blocs élémentaires $z^{<i>}$ qui commenceront par des termes $z^{q_i z}$ a priori quelconques. Or les étages, on s'en souvient, font figure de multiplicateurs de niveau 1^+ : ils engendrent le réseau Ω^{1^+}. Ce réseau Ω^{1^+}, qui pour les équations aux différences était pauvre et rigide, peut donc, pour les équations aux translations (ou apparentées) être aussi riche et variable que les réseaux Ω^{p} des autres niveaux.

SECTION 3.10. CALCUL EXPLICITE DES INVARIANTS HOLOMORPHES.

3.10.a. Equations non linéaires unilatérales du premier ordre.

Considérons les équations aux différences holomorphes à l'infini

$$x(z+1) = (1+z^{-1})^{\tau}.\ \ell.\ x(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1}(z)\, x^{n+1}(z) \qquad \begin{cases} \tau, \ell \in \mathbb{C},\ \ell \neq 0,1 \\ B_n(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\} \end{cases} \tag{3.10.1}$$

formellement conjuguées (*) à l'équation élémentaire :

$$x(z+1) = (1+z^{-1})^{\tau}.\ \ell.\ x(z) \tag{3.10.2}$$

et unilatérales (**). Notons comme d'habitude Ω le réseau de résurgence, ici formé des ω de la forme :

$$\omega = n_0 \lambda_0 + n\lambda \qquad \begin{cases} n_0 \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \\ \lambda_0 = 2\pi i\ ,\ \lambda = \log \ell \end{cases} \tag{3.10.3}$$

Introduisons la série

$$b(z,u) = u + \sum B_n(z)\, u^{n+1} \tag{3.10.4}$$

ainsi que des opérateurs B et P qui agissent respectivement sur les séries de la variable u ou z :

$$B\,\varphi(u) = \varphi(b(z,u)) - \varphi(u) \tag{3.10.5}$$

$$P\,\varphi(z) = \varphi(z+1) - \varphi(z) \tag{3.10.6}$$

(*) par une transformation formelle du type (3.1.1) suivie d'une transformation formelle du type (3.1.7).

(**) puisque le $\sum$ du second membre de (3.10.1) n'est étendu qu'aux $n \geq 1$. Le cas sesquilatéral sera examiné à l'alinea suivant.

Notons Q comme en § 1.4.g l'inverse principal de P et introduisons l'opérateur formel :

(3.10.7) $$\Theta = 1 - QB\| + QBQB\| - QBQBQB\| + \dots \quad (*)$$

ainsi que son inverse formel Θ^{-1}. On s'assure aisément que Θ et Θ^{-1} sont des automorphismes formels, vérifiant (2.12.8) et aussi :

(3.10.8) $$P\Theta = \Theta P - B\Theta$$

(3.10.9) $$P\Theta^{-1} = \Theta^{-1}P + \Theta^{-1}B$$

<u>Proposition 3.10.1</u> (<u>Intégrale formelle</u>)

L'intégrale formelle

(3.10.10) $$x(z,u) = \sum u^n z^{[n]} \varphi^n(z) \qquad \left(z^{[n]} = e^{nz} \cdot z^{n\tau}\right)$$

de l'équation (3.10.1) s'exprime à partir de l'intégrale formelle

(3.10.11) $${}^\circ x(z,u) = u \cdot e^z \cdot z^\tau$$

de l'équation élémentaire (3.10.2) au moyen de la formule :

(3.10.12) $$x(z,u) = \Theta^{-1}\, {}^\circ x(z,u)$$

(*) Les doubles traits verticaux indiquent qu'on ne doit pas étendre l'action des Q à ce qui se trouve à droite. Ainsi :

$$QB\| \varphi(z,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi(b(z-n), z) - \varphi(u,z)\right]$$

et non pas $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi(b(z-n), z+n) - \varphi(u, z+n)\right]$$

Notons que, développée, cette formule fait intervenir les symboles • de (1.4.g) et qu'elle ne comporte aucune difficulté d'interprétation ou de convergence vu que, pour tout entier m , seul un nombre fini de termes en • contribuent au monôme z^{-m} .

Pour tout multiindice $n = (n_1, \ldots, n_r)$ posons :

(3.10.13) $$d_n = u^{1+\|n\|}\frac{\partial}{\partial u} = u^{1+n_1+\ldots n_r}\frac{\partial}{\partial u}$$

et pour tout opérateur différentiel D en u posons

(3.10.14) $$\mathrm{lin}\ D = \text{partie de premier ordre de } D$$

Autrement dit :

(3.10.15) $$(\mathrm{lin}\ D)\ \varphi(u) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u)\right)(D.u)$$

et pour tous multiindices $n^1, n^2, \ldots, n^r$ on a :

(3.10.16) $$\mathrm{lin}\left(d_{n^r}\cdots d_{n^2}d_{n^1}\right) = (1+\|n^1\|)(1+\|n^1\|+\|n^2\|)\ldots(1+\|n^1\|+\ldots\|n^{r-1}\|)\ u^{1+\|n^1\|+\ldots\|n^r\|}\frac{\partial}{\partial u}$$

Proposition 3.10.2 (Invariants holomorphes)

Les invariants holomorphes :

(3.10.17) $$\mathbb{A}_\omega = u^{1+n}A_\omega\frac{\partial}{\partial u} \qquad (\omega = n_0\lambda_0 + n\lambda)$$

de l'équation (3.10.1) s'expriment, au choix, au moyen de la formule :

(3.10.18) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_s \sum_{\|n^1\|+\cdots\|n^s\|=n} (B_{n^s},\ldots,B_{n^1})^+_\omega\ \mathrm{lin}\,(d_{n^1},\ldots,d_{n^s})$$

ou de la formule :

$$(3.10.19) \quad \mathbb{A}_\omega = \sum_s \frac{1}{s} \sum_{\|n^1\|+\dots\|n^s\|=n} (B_{n^s},\dots,B_{n^1})^{+}_{\omega} \; lin[\partial_{n^1}[\partial_{n^2}[\dots \partial_{n^s}]]\dots]$$

avec bien sûr $B_{n_1,\dots,n_r} = B_{n_1} B_{n_2} \dots B_{n_r}$

Notons que la formule (3.10.18) fait intervenir le moule pseudoalternal $(\cdot)^{+}_{\omega}$ tandis que la formule (3.10.19) comporte le vrai moule alternal $\{\cdot\}_\omega$. La démonstration se fait à partir de (3.10.8), (3.10.9), (3.10.12) en raisonnant comme pour la proposition 6.2.6. On notera aussi le parallélisme avec les résultats de la section 2.12. Malgré ce parallélisme, il n'existe pas, pour les classes analytiques d'équations aux différences, de notion naturelle de représentant canonique.

§ 3.10.b. Equations non linéaires sesquilatérales du premier ordre.

Si au second membre de (3.L0.1) on étend la somme aux $n \geqslant -1$ (et non $\geqslant 1$) on obtient l'équation sesquilatérale du premier ordre la plus générale. Les résultats ne changent pas, à ceci près que le réseau Ω s'enrichit un peu, puisque dans (3.10.3) n peut prendre la valeur -1 . D'autre part, on a maintenant deux coefficients B_{-1} et B_0 d'indices $\leqslant 0$, ce qui fait que, pour tout ω donné, le second membre de (3.10.18) ou (3.10.19) se présente maintenant comme une somme infinie, sans d'ailleurs que cela entraine la moindre difficulté de convergence.

§ 3.10.c. Le cas $\ell = 1$.

Lorsqu'on considère l'équation (3.10.1) pour $\ell = 1$, on a un réseau de résurgence Ω plus pauvre, puisqu'il ne possède plus qu'un seul générateur (à savoir $\lambda_0 = 2\pi i$) mais des invariants $\mathbb{A}_\omega$ plus riches, puisque ceux-ci ne sont plus des monômes en u comme en (3.10.17) mais des séries entières :

$$(3.10.20) \quad \mathbb{A}_\omega = \sum A^n_\omega \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (A^n_\omega \in \mathbb{C})$$

avec une somme étendue aux entiers $n \geqslant 1$ (resp. $\geqslant -1$) dans le cas unilatéral (resp. sesquilatéral). Quant aux formules (3.7.18) et (3.7.19), elles restent en vigueur, mais à condition de sommer par rapport à tous les multiindices $n^1, \ldots, n^s$ sans la restriction :

(3.10.21) $$\|n^1\| + \ldots \|n^s\| = n$$

Notons que lorsque $\ell = 1$ et qu'en outre $\tau = 0$, les moules scalaires $(\cdot)^+_\omega$ et $(\cdot)_\omega$ peuvent s'exprimer à partir du moule zêta. Voir § 1.4.g. Lorsque $\ell = 1$ mais $\tau \neq 0$, la relation avec le moule zêta est moins simple. Lorsqu'enfin $\ell \neq 1$, les moules $(\cdot)^+_\omega$ et $(\cdot)_\omega$ ne sont plus zêtaïques purs, mais hyperlogarithmico-zêtaïques. Voir § 1.4.g.

§ 3.10.d. Le cas de systèmes de niveau 1.

Si au lieu de l'unique équation (3.10.1) on considère un système

(3.10.22) $$x_i\,(z+1) = (1+z^{-1})^{\tau} \cdot \ell_i \cdot x_i(z) + x_i(z) \sum_{n_1,\ldots,n_\nu} B^i_{n_1,\ldots,n_\nu}(z)\, x_1^{n_1}(z) \ldots x_\nu^{n_\nu}(z) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

avec des coefficients $B^i_n(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$, les résultats précédents demeurent, mais pour un réseau de résurgence enrichi (ses générateurs sont $\lambda_0 = 2\pi i$ et les $\lambda_i = \log \ell_i$) et pour un opérateur B défini non plus comme en (3.10.5) mais comme ceci :

(3.10.23) $$B\,\varphi\,(u_1,\ldots,u_\nu) = \varphi(b_1(z,u),\ldots,b_\nu(z,u)) - \varphi(u_1,\ldots,u_\nu)$$

avec

(3.10.24) $$b_i\,(z,u) = u_i + u_i \sum B^i_{n_1,\ldots,n_\nu}(z)\; u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu}$$

Les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont monomiaux en u lorsque les ℓ_i ne présentent pas de résonance multiplicative. Sinon, en cas de résonance de degré ρ^+ , les $\mathbb{A}_\omega$ se présentent comme des séries entières de ρ^+ blocs indépendants de variables u_i .

§ 3.10.e. Equations affines de niveau 1 et 1^+.

Après avoir indiqué les formules relatives aux équations et systèmes de niveau unique (forcément égal à 1) les plus généraux, tournons-nous vers les équations à plusieurs niveaux. Le cas des équations aux différences dont tous les niveaux sont $\leqslant 1$ ne mérite pas qu'on s'y arrête, car il donne lieu au même genre de formules (et de moules) que les équations différentielles à plusieurs niveaux. La situation intéressante et vraiment nouvelle est celle où le niveau 1^+ est atteint. Traitons-la dans le cas le plus simple, qui est le cas affine.

Reprenons donc l'équation déjà envisagée à la section 3.6 :

$$x(z) - b(z)\ x(z+1) = a(z) \tag{3.10.25}$$

avec $a(z), b(z) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$ et

$$b(z) = e^{-1-\lambda} \cdot z^{-1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-n}\right) \qquad (\lambda, \beta_n \in \mathbb{C}) \tag{3.10.26}$$

Pour éviter toute confusion, notons respectivement Δ_ω et $\not\Delta_\omega$ les dérivations étrangères par rapport aux variables $z_1 = z$ et $z_{1^+} = z \log z$ et distinguons soigneusement les intégrales formelles en z_1 et z_{1^+} :

$$x(z_1, u) = \varphi^0(z_1) + u\ z^{\langle 1 \rangle}\ \varphi^1(z_1) \tag{3.10.27}$$

$$\mathscr{x}(z_{1^+}, u) = \not\varphi^0(z_1) + u\ z^{\langle 1 \rangle}\ \not\varphi^1(z_{1^+}) \tag{3.10.28}$$

avec comme bloc élémentaire :

$$z^{\langle 1 \rangle} = e^{\lambda z} \cdot z^{z} \cdot z^{\tau} \qquad \left(\tau = -\tfrac{1}{2} - \beta_1\right) \tag{3.10.29}$$

Les invariants de niveau 1 se calculent sans difficulté (voir lemme 3.6.1) et il ne vaut pas la peine de s'y arrêter. Les invariants de niveau 1^+ sont déterminés (voir lemme 3.6.5) par les équations de résurgence :

(3.10.30) $$\Delta_\omega \, \varphi^0(z_{1+}) = z_1^{\tau} \, e^{\lambda z_1} \, A_\omega(z_1) \, \varphi^1(z_{1+}) \qquad (\dot{\omega} = -1) \quad (*)$$

avec une série de Fourier

(3.10.31) $$A_\omega(z_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\omega^n \, e^{2\pi i n z} \qquad (A_\omega^n \in \mathbb{C})$$

dont il s'agit de déterminer les coefficients. Grâce aux contraintes a priori (3.5.43) il suffit en fait de calculer le terme constant A_ω^0 pour tous les ω de $\mathbb{C}_\infty$ situés au-dessus de -1 .

Puisque l'on a $\Delta_\omega \varphi^1 \equiv 0$, si l'on pose :

(3.10.32) $$\varphi(z) = \varphi(z_{1+}) = e^{-\lambda z} \, z^{-\tau} \, \varphi^0(z) / \varphi^1(z)$$

l'équation (3.10.30) se simplifie :

(3.10.33) $$\Delta_\omega \, \varphi(z_{1+}) = A_\omega(z)$$

et si l'on introduit l'application $z_{1+} \longmapsto \ell_a(z_{1+})$ définie par :

(3.10.34) $$\ell_a(z \log z) \equiv (z+a) \log(z+a)$$

on tire de (3.10.33) :

(3.10.35) $$\Delta_\omega \, \varphi \circ \ell_a(z_{1+}) = e^{-\dot{\omega}(\ell_a(z_{1+}) - z_{1+})} \, A_\omega(z+a)$$

Or $\dot{\omega} = -1$. Il vient donc, en considérant z comme fonction de z_{1+} :

(3.10.36) $$\Delta_\omega \left[\varphi(z+a) \, e^{-(z+a)\log(z+a) + z \log z} \right] = A(z+a)$$

Par suite, si l'on fixe un réel positif α assez grand et si l'on pose :

(*) bien distinguer z_1 et z_{1+} .

(3.10.37) $$S(z,\alpha) = \mathcal{S}(z_{1+},\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \Phi(z+a)\, e^{-(z+a)\log(z+a)+z\log z}\, da$$

on aura

(3.10.38) $$\Delta_\omega \; \mathcal{S}(z_{1+},\alpha) = A^{\circ}_\omega \qquad\qquad \text{si } \dot{\omega} = -1$$

(3.10.38bis) $$\Delta_\omega \; \mathcal{S}(z_{1+},\alpha) = 0 \qquad\qquad \text{si } \dot{\omega} \neq -1$$

Cela veut dire que, pour tout α fixé, la transformée de Borel $\mathbf{S}(\zeta_{1+},\alpha)$ de la fonction z_{1+}-résurgente $\mathcal{S}(z_{1+},\alpha)$ est une fonction de ζ_{1+} définie méromorphe sur $\mathbb{C}_\infty$ et que ses seules singularités, en dehors de l'origine $\mathcal{O}$, sont des pôles simples, tous situés au-dessus de -1. Plus précisément, en chaque point ω de $\mathbb{C}_\infty$ tel que $\dot{\omega} = -1$, $\mathbf{S}(\zeta_{1+},\alpha)$ présente un résidu égal à $2\pi i\, A^{\circ}_\omega$.

Reste à calculer $\mathbf{S}$. Soit Γ un chemin d'intégration dans le plan de z qui ait la forme indiquée ci-dessous :

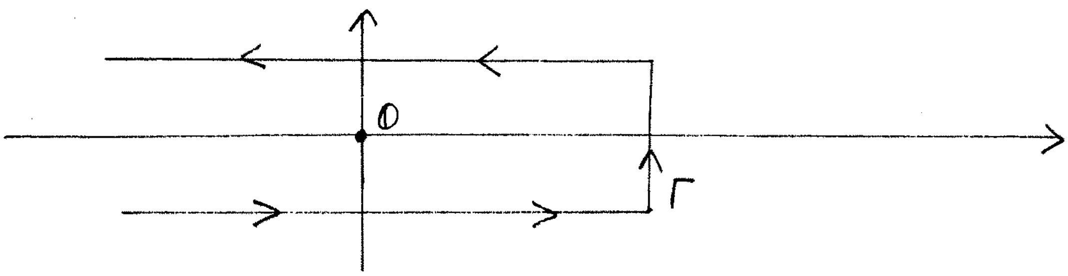


Figure 1 :

et soit $\mathit{\Gamma}$ le chemin correspondant sur la surface des z_{1+}. Pour $\mathrm{Re}\,\dot{\zeta}_{1+} \geqslant 0$ il vient successivement (*)

(3.10.39) $$\mathbf{S}(\zeta_{1+},\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathit{\Gamma}} \mathcal{S}(z_{1+},\alpha)\, dz_{1+} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} S(z,\alpha)\; d(z\log z)$$

(*) Dans toute la suite $\Phi_+(z)$ et $\Phi_+(z_{1+})$ désignent le modèle sectoriel (régulier à droite) des fonctions résurgentes introduites en (3.10.32). $\Phi_+(z)$ est régulière dans tout un domaine du type $\{\mathrm{Re}\,z > K_1\} \cup \{|\mathrm{Im}\,z| > K_2\}$

(3.10.39bis) $$\mathfrak{F}(\zeta_{1+},\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\int_\alpha^{\alpha+1} \phi_+(z+a)\, e^{-(z+a)\log(z+a)}\, da\right] e^{(1+\dot{\zeta}_{1+})z\log z}\, d(z\log z)$$

(3.10.40) $$\mathfrak{F}(\zeta_{1+},\alpha) = \frac{1}{2\pi i(1+\dot{\zeta}_{1+})}\int_\Gamma \left[\int_\alpha^{\alpha+1} \phi_+(z+a)\, e^{-(z+a)\log(z+a)}\, da\right] d\left[e^{(1+\dot{\zeta}_{1+})z\log z}\right]$$

Or le bloc $\phi_+(z+a)\, e^{-(z+a)\log(z+a)}$ ne dépend que de la somme $z+a$. L'intégration par partie fera donc intervenir le bloc :

(3.10.41) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+1} \phi(z+a)\; e^{-(z+a)\log(z+a)} = \\ \phi_+(z+\alpha+1)\, e^{-(z+\alpha+1)\log(z+\alpha+1)} - \phi_+(z+\alpha)\, e^{-(z+\alpha)\log(z+\alpha)} \end{array}\right.$$

et il vient finalement :

(3.10.42) $$\left\{\begin{array}{l} 2\pi i\;(1+\dot{\zeta}_{1+})\;\mathfrak{F}(\zeta_{1+},\alpha) = \\ \displaystyle\int_\Gamma e^{(1+\dot{\zeta}_{1+})z\log z}\left\{\phi_+(z+\alpha)e^{-(z+\alpha)\log(z+\alpha)} - \phi_+(z+\alpha+1)e^{-(z+\alpha+1)\log(z+\alpha+1)}\right\}dz \end{array}\right.$$

Ici, chaque membre est une fonction de ζ_{1+} <u>holomorphe</u> sur $\mathbb{C}_\infty$ et généralement <u>non nulle</u> pour $\dot{\zeta}_{1+} = -1$. Si donc on pose $\sigma = \log \zeta_{1+}$ et :

(3.10.43) $$\mathcal{A}(\sigma,\alpha) = 2\pi i\,(1+e^\sigma)\;\mathfrak{F}(e^\sigma,\alpha)$$

l'expression $\mathcal{A}(\sigma,\alpha)$ est, pour tout α fixé, une <u>fonction entière</u> de σ . Pour σ fixé, $\mathcal{A}(\sigma,\alpha)$ dépend effectivement de α , sauf lorsque

(3.10.44) $$\sigma = \log\dot{\omega} = \left(k+\tfrac{1}{2}\right)2\pi i \qquad\qquad (\dot{\omega}=-1,\ k\in\mathbb{Z})$$

Pour ces dernières valeurs de σ , $\mathcal{A}$ fournit précisément ce qu'on cherche, à savoir les invariants holomorphes de niveau 1^+ :

(3.10.45) $$A^\circ_\omega = \mathcal{A}(\log\omega,\alpha) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{\omega} = -1\ ,\ \forall\alpha\in\mathbb{C} \\ \log\omega = (k+\tfrac{1}{2})2\pi i \end{array}\right.$$

Remarque 1 : Quand on prend ζ_{1+} au-dessus du point -1 , on trouve pour second membre de (3.10.42) l'expression :

$$\int_\Gamma \varphi_+(z+a)\, e^{-(z+a)\log(z+a)}\,dz - \int_\Gamma \varphi_+(z+a+1)\, e^{-(z+a+1)\log(z+a+1)}\,dz$$

qui semble devoir être nulle. En fait, elle ne l'est pas, cas ces ζ_{1+} là sont en dehors du domaine $\operatorname{Re} \dot{\zeta}_{1+} > 0$ où converge l'intégrale du second membre de (3.10.42).

Remarque 2 : Calcul pratique de $\mathcal{A}(\sigma,\alpha)$ et de A_ω^n .

On fixera α réel positif assez grand et on partira de l'expression :

(3.10.46) $$\mathcal{A}(\sigma,\alpha) = \int_\Gamma e^{(1+e^\sigma)z\log z} \left\{ \varphi_+(z+\alpha)\, e^{-(z+\alpha)\log(z+\alpha)} - \varphi_+(z+\alpha+1)\, e^{-(z+\alpha+1)\log(z+\alpha+1)} \right\} dz$$

qui est une fonction entière de σ :

(3.10.47) $$\mathcal{A}(\sigma,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(\alpha)\, \sigma^n$$

dont les coefficients $\mathcal{A}_n(\alpha)$ peuvent se calculer numériquement à partir de (3.10.46) en y faisant :

(3.10.48) $$e^{(1+e^\sigma)z\log z} = e^{2z\log z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^\sigma-1)^n}{n!}\, z^n (\log z)^n$$

Quant à la fonction $\varphi_+(z)$ on la définit comme en (3.10.32) mais à partir des modèles sectoriels réguliers à droite. Autrement dit :

(3.10.49) $$\varphi_+(z) = e^{-\lambda z} z^{-\tau}\, \varphi_+^0(z) \,/\, \varphi_+^1(z)$$

avec

(3.10.50) $$\varphi_+^0(z) = a(z) + \sum_{n=1}^{\infty} b(z)\, b(z+1)\, b(z+2) \cdots b(z+n-1)\, a(z+n)$$

(3.10.51) $$\varphi^1_+(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \beta(z+n)$$

pour $\beta(z)$ ainsi défini :

(3.10.52) $$\beta(z) = b(z)\,(1+z^{-1})^{1+\tau} \exp(-1+z\log(1+z^{-1})) = 1+\mathcal{O}(z^{-2})$$

Remarque 3 : Sans doute vaudrait-il la peine, pour tester la conjecture (3.6.44), de calculer numériquement les invariants A°_{ω} par la méthode ci-dessus, par exemple pour :

(3.10.53) $$b(z) = z^{-1} \quad \text{et} \quad a(z) = z^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Le seul ingrédient irrationnel du calcul consisterait en les intégrales :

(3.10.54) $$I_{n,m} = \int_{\Gamma} e^{z\log z}\, z^{-n} \log^m z \qquad \begin{cases} \Gamma \text{ comme à la figure 1 ci-dessus} \\ m \in \mathbb{N}\ ,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

qui sont fonction de deux indices entiers mais qu'on peut facilement, par intégration par partie, ramener à une famille à un seul indice. L'invariance en α du second membre de (3.10.45) permettrait en outre de vérifier le résultat et dispenserait quasiment de toute évaluation d'erreur.

SECTION 3.11. RAPPORTS ENTRE EQUATIONS AUX DIFFERENCES, SYSTEMES AUX DIFFERENCES, DIFFEOS ET ENDIFFEOS.

Il n'y a pas lieu de revenir ici sur le parallélisme - imparfait - entre problèmes différentiels et problèmes aux différences (voir à ce sujet la section 3.1) non plus que sur la place très particulière qu'occupent les problèmes aux différences parmi les problèmes aux translations et les problèmes différentiels d'ordre infini (voir à ce sujet la section 3.9). Mais il reste à préciser très brièvement les rapports qui existent entre les quatre catégories suivantes :

(i) équations aux différences (analytiques locales) (*)

(ii) systèmes aux différences (analytiques locaux) (**)

(iii) difféos (analytiques locaux) (***)

(iii) endifféos (analytiques locaux) (***)

Ces rapports sont analogues, en un peu plus compliqué, à ceux que nous avons déjà observés à la section 2.13 entre les :

(i) équations différentielles (analytiques locales) (*)

(ii) systèmes différentiels (analytiques locaux) (**)

(iii) systèmes dynamiques et champs de vecteurs (analy. locaux)

Toute équation aux différences (d'ordre quelconque) équivaut à un système aux différences (d'ordre 1). Bien que l'inverse ne soit pas vrai, les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ attachés aux équations sont d'une forme aussi générale que ceux qui sont attachés aux systèmes. (On avait observé la même chose pour les problèmes différentiels; voir § 2.13).

A tout difféo ou tout endifféo f est associé un système aux différences (voir (1.5.2)) à coefficients constants. Les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ attachés aux systèmes aux différences ne comportent jamais de terme en $\partial/\partial z$ tandis que les $\mathbb{A}_\omega$ des difféos et endifféos en comportent en général.

Enfin, tout système aux différences à ν inconnues et à coefficients fonctions de z, peut être mis en correspondance avec un endifféo local (exceptionnellement un difféo) de $\mathbb{C}^{\nu+1}$. Ainsi l'équation (= système à une inconnue) qui suit :

(*) d'ordre quelconque

(**) d'ordre 1

(***) un difféo (resp. endifféo) local est une application de $\mathbb{C}^\nu_{,0}$ dans lui-même qui est (localement) inversible (resp. qui ne l'est pas forcément).

$$x(z+1) = z^{-1}\,x(z) + z^{-3} \tag{3.11.1}$$

peut-être mise en correspondance avec l'endifféo local (non inversible) de $\mathbb{C}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & \longmapsto & x_1\,x_2 + x_2^{3} \\ \\ x_2 & \longmapsto & x_2\,/\,1+x_2 \qquad\qquad (x_2 = z^{-1}) \end{array}\right. \tag{3.11.2}$$

CHAPITRE 4 : CLASSIFICATION DES CHAMPS DE VECTEURS SANS PARTIE LINEAIRE.

SECTION 4.1 : RAYONS PROPRES ET DIRECTEURS.

Soit X un champ de vecteurs analytique local, sans partie constante ni linéaire :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_j} X_i(0) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq \nu) \tag{4.1.1}$$

Soit p le niveau (principal) du champ, c'est-à-dire l'entier $\geqslant 1$ tel que l'on ait :

$$X_i(x) = Q_i(x) + \{\text{degré} \geqslant p+2\} \quad (\deg Q_i = p+1) \tag{4.1.1 bis}$$

pour des polynômes $Q_i(x)$ homogènes de degré $p+1$ et non tous nuls.

Définition 4.1.1 (application directrice, rayons propres, directeurs)

L'application rationnelle

$$\mathcal{L} : \quad (\gamma_1, \dots, \gamma_\nu) \longmapsto (Q_1(\gamma), \dots, Q_\nu(\gamma))$$

de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\nu-1}(\mathbb{C})$ dans lui-même est dite application directrice de X. Ses points fixes $\gamma = (\widetilde{\gamma_1, \dots, \gamma_\nu})$ sont dits rayons propres de X. Les $\gamma = (\widetilde{\gamma_1, \dots, \gamma_\nu})$ tels que :

$$Q_1(\gamma) = Q_2(\gamma) = \dots Q_\nu(\gamma) = 0$$

sont dits rayons dégénérés. Pour chaque point fixe γ de $\mathcal{L}$ on note :

$$1 - \lambda_1(\gamma) \quad , \quad 1 - \lambda_2(\gamma) \quad , \quad \dots \quad , 1 - \lambda_{\nu-1}(\gamma)$$

les $\nu-1$ valeurs propres de la jacobienne de $\mathcal{L}$ en γ. Les scalaires $\lambda_j = \lambda_j(\gamma)$ sont dits directeurs du rayon γ. On leur adjoint le directeur trivial $\lambda_0 = -1$.

Remarque : si on pose $Q_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} Q_i$, si on prend un représentant $(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)$ du rayon propre γ et si on note $Q(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)$ le rapport commun :

$$Q(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu) = \frac{Q_1(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)}{\gamma_1} = \dots = \frac{Q_\nu(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}$$

alors la matrice $[Q_{ij}(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu) / Q(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)]$ est homogène de degré 0 en les γ_i et elle admet pour valeurs propres, outre l'entier $p+1$, les complexes $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \dots, 1-\lambda_{\nu-1}$. Bien noter que la valeur propre initiale $p+1$, qui provient de l'homogénéité des Q_i , n'est pas de la forme $1-\lambda_0$ puisque $\lambda_0 = -1$ par définition.

Représentants privilégiés des rayons propres.

Dans toute la suite on notera les rayons propres sous la forme $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)$ où (γ_i) désigne le représentant privilégié tel que :

(4.1.2) $$Q_i(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu) = -\gamma_i / p$$

Le représentant privilégié est bien sûr défini modulo une rotation $\gamma_i \mapsto \varepsilon \gamma_i$ avec pour ε n'importe quelle racine p-ième de l'unité, mais c'est sans importance, car les γ_i sont destinés à servir de facteur à $z^{-1/p}$.

Proposition 4.1.1 (relation a priori entre les directeurs).

Si l'application directrice $\mathcal{L}$ a tous ses points fixes γ distincts et par suite en nombre fini, alors les directeurs correspondants satisfont à la relation

(4.1.3) $$\sum_\gamma \frac{1}{\lambda_1(\gamma)\lambda_2(\gamma)\dots\lambda_{\nu-1}(\gamma)} = 1 \qquad (\text{somme finie})$$

et c'est là la seule relation a priori qui les lie.

Preuve. Dans le cas $\nu=2$, on établit (4.1.3) par un calcul émémentaire de résidus de fonctions rationnelles. Dans le cas général $(\nu \geq 2)$ on utilise une "formule de Lefschetz holomorphe" due à M.F. Atiyah et R. Bott(*) qui affirme que :

$$L(f) = \sum_{\gamma} \nu(f;\gamma)$$

avec

$$\begin{cases} L(f) = \sum_{q=0}^{\nu} (-1)^q \ \mathrm{Trace}\ (f \mid H^q(\mathcal{S},0)) \\ \nu(f;\gamma) = \dfrac{1}{\det(1-(df)_\gamma)} = \left| \dfrac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)} \right|^{-1} \left(\text{pour } g_i(z) = z_i - f_i(z)\right) \end{cases}$$

où $\mathcal{S}$ est une variété analytique complexe compacte où f est une application holomorphe de $\mathcal{S}$ dans elle-même, et où γ parcourt l'ensemble des points fixes de f. Pour $\mathcal{S} = P_{\nu-1}(\mathbb{C})$ on a $H^q(\mathcal{S},0) = 0$ quand $q \geqslant 0$. Par suite $L(f) = 1$ et (4.1.3) en résulte.

On remarque que les directeurs λ_i sont des fonctions algébriques, mais généralement non rationnelles, des coefficients des formes homogènes Q_i, car leur calcul nécessite la résolution préalable du système algébrique (4.1.2). Il y a toutefois une exception très importante. C'est le cas où $p = 1$ et où les Q_i sont chacun divisible par x_i, autrement dit le cas où :

(4.1.4) $$Q_i(x) = x_i \ P_i(x) \quad \text{avec} \quad P_i(x) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, x_j$$

Faisons le calcul en dimension $\nu = 2$ et $\nu = 3$ (**) en supposant, ce qui est loisible(***), que $a_{ii} \equiv -1$.

(*) Voir par exemple : "A Lefschetz fixed point formula for holomorphic mappings", par M.F. Atiyah, Comptes Rendus du Congrès International de 1965 (Erevan) sur les fonctions analytiques, pp 28-32, Edit. Nauka, Moscou 1966).

(**) En dimension $\nu = 2$ on peut se ramener à la forme (4.1.4) par un changement de variables linéaire, mais en dimension supérieure c'est généralement impossible.

(***) Moyennant des dilatations $x_i \mapsto c_i x_i$.

Dimension $\nu = 2$:

On a trois rayons propres :

$$\gamma = (*,0) \quad ; \quad (0,*) \quad ; \quad (*,*)$$

auquels correspondent les directeurs suivants :

rayons propre	directeur
$\gamma = (1,0)$	$\lambda_1 = 1 + a_{21}$
$\gamma = (0,1)$	$\lambda_1 = 1 + a_{12}$
$\gamma = (1+a_{12}, 1+a_{21})$	$\lambda_1 = -\dfrac{(1+a_{12})(1+a_{21})}{(1 - a_{12}a_{21})}$

On vérifie que $\sum_{\gamma} 1/\lambda_1(\gamma) = 1$

Dimension $\nu = 3$:

On a sept rayons propres :

$$\gamma = (*,0,0) \,;\, (0,*,0) \,;\, (0,0,*) \,;\, (*,*,0) \,;\, (*,0,*) \,;\, (0,*,*) \,;\, (*,*,*)$$

auxquels correspondent les directeurs suivants :

rayon propre	directeur
$\gamma = (1,0,0)$	$\lambda_1 = 1 + a_{21}$, $\lambda_2 = 1 + a_{31}$
$\gamma = (0,1,0)$	$\lambda_1 = 1 + a_{12}$, $\lambda_2 = 1 + a_{32}$
$\gamma = (0,0,1)$	$\lambda_1 = 1 + a_{13}$, $\lambda_2 = 1 + a_{23}$
$\gamma = (1+a_{12}, 1+a_{21}, 0)$	$\lambda_1 = -\dfrac{(1+a_{12})(1+a_{21})}{1 - a_{12}a_{21}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\delta_3}{1 - a_{12}a_{21}}$
$\gamma = (0, 1+a_{23}, 1+a_{32})$	$\lambda_1 = -\dfrac{(1+a_{23})(1+a_{32})}{1 - a_{23}a_{32}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\delta_1}{1 - a_{23}a_{32}}$
$\gamma = (1+a_{13}, 0, 1+a_{31})$	$\lambda_1 = -\dfrac{(1+a_{31})(1+a_{13})}{1 - a_{31}a_{13}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\delta_2}{1 - a_{31}a_{13}}$
$\gamma = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$	$\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{\delta - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3}{\delta}$ et $\lambda_1 \lambda_2 = -\dfrac{\delta_1\delta_2\delta_3}{(\delta)^3} \det[a_{ij}]$

avec

$$\begin{cases} \delta = 1 - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21} \\ \delta_1 = 1 + a_{12} + a_{13} + a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23} - a_{23}a_{32} \\ \delta_2 = 1 + a_{23} + a_{21} + a_{21}a_{13} + a_{23}a_{31} - a_{31}a_{13} \\ \delta_3 = 1 + a_{31} + a_{32} + a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12} - a_{12}a_{21} \end{cases}$$

Ici encore en vérifie que

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{\lambda_1(\gamma)\, \lambda_2(\gamma)} = 1$$

(On peut commencer par le cas où $a_{ij} = \alpha \quad \forall i \neq j$)

L'importance du cas (4.1.4) tient non seulement à ce qu'il permet des calculs rationnels, mais surtout à ce qu'il se rencontre lors de la classification des champs résonnants (cf. sections 6.5 et 6.6.).

SECTION 4.2 : INVARIANTS FORMELS.

a) Cas de directeurs non résonnants

Soit X un champ local sans partie linéaire et de niveau p , donc du type (4.1.1) + (4.1.1 bis). Supposons que X possède au moins un rayon propre γ à directeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ non résonnants, c'est-à-dire rationnellement indépendants. Cela implique en particulier que les λ_i sont tous différents, non nuls et irrationnels (sauf $\lambda_0 = -1$). Par une substitution linéaire :

$$x_i = \sum_{j=0}^{\nu-1} c_{ij}\, y_j \qquad (1 \leq i \leq \nu) \tag{4.2.0}$$

éventuellement suivie d'une transvection :

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 \longmapsto y_0 \\ y_j \longmapsto y_j + d_j\, y_0^2 \end{array}\right. \qquad (1 \leq j \leq \nu-1 \ , \ d_j \in \mathbb{C}) \tag{4.2.0 bis}$$

on peut toujours mettre le champ X sous la forme :

$$Y = \frac{1}{p}(y_0)^p \left\{\lambda_0 y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \sum_{j=1}^{\nu-1} (\lambda_j - 1)\, y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right\} + \sum_{j=0}^{\nu-1} R_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \tag{4.2.1}$$

où les compléments $R_j(y)$ ne contiennent pas de terme en $(y_0)^{p+2}$ (si $j \neq 0$) et pas non plus de termes en $y_k\,(y_0)^p$ (pour tous k, j).

La forme (4.2.1) est dite adaptée au rayon propre γ . Elle n'est évidemment pas unique, mais conduit à une "forme élémentaire", qui l'est :

Proposition 4.2.1 (forme élémentaire et résidu itératif)

Moyennant un "éclatement":

$$(4.2.2)\quad \begin{cases} y_0 = z_0\,[1+h_0(z)] \\ y_1 = z_0\,[z_1+h_1(z)] \\ \cdots\cdots \\ y_{\nu-1} = z_0\,[z_{\nu-1}+h_{\nu-1}(z)] \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} h_0, h_1, \dots, h_{\nu-1} \in \mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}]] \\ \text{avec } h_0 \text{ (resp } h_1, h_2, \dots, h_{\nu-1}) \text{ ne contenant} \\ \text{que des termes de degré} \geq 1 \text{ (resp.} \geq 2) \end{cases}$$

on peut passer de la forme adaptée (4.2.1) à la forme dite élémentaire :

$$(4.2.3)\quad Z = \frac{1}{p}\,\frac{(z_0)^p}{1+\rho\,(z_0)^p}\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1} \lambda_j\, z_j\,\frac{\partial}{\partial z_j}\right\} \quad (\lambda_0 = -1)$$

qui, elle, est unique. Le scalaire $\rho = \rho(\gamma)$ est dit résiduit(*) de X relativement au rayon propre γ. Les résiduits ρ associés aux différents rayons propres sont des invariants formels de X, tout comme les directeurs λ_j (mais, contrairement aux directeurs, aucune relation a priori ne les lie).

Bien entendu, directeurs et résiduits n'épuisent pas les invariants formels de X, car l'éclatement (4.2.2) n'est pas un changement de variable licite (il n'est pas inversible).

Proposition 4.2.2 (forme normale et invariants formels).

Parmi les formes adaptées (4.2.1), il en existe une, unique modulo un changement de variables :

$$(4.2.4)\quad y_i \longmapsto c_i\, y_i \qquad (c_i \in \mathbb{C}\ ;\ (c_0)^p = 1)$$

et telle que l'éclatement (4.2.2) qui la transforme en le champ élémentaire soit défini par des h_i de la forme

$$(4.2.5)\quad h_i(z) = \sum h_i^{n_0, n_1, \dots, n_{\nu-1}}\; z_0^{n_0}\, z_1^{n_1} \cdots z_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

(*) Contraction de "résidu itératif". Les résiduits apparaissent dans l'étude de quasiment tous les objets locaux.

avec

(4.2.5 bis) $\quad 2 + n_0 \leqslant n_1 + n_2 + \dots n_{\nu-1}$

Cette forme adaptée particulière est dite normale. Elle s'écrit :

(4.2.6) $$p.(1+\rho y_0^{p}) . Y = \left[\lambda_0 y_0^{p+1} + R_0(y)\right] \frac{\partial}{\partial y_0} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \left[(\lambda_i - 1) y_0^{p} y_i + R_i(y)\right] \frac{\partial}{\partial y_i}$$

avec des séries complémentaires $R_0(y), R_1(y), \dots, R_{\nu-1}(y)$ ne comportant que des termes de degré total $\geqslant p+1$ en $y_0, y_1, \dots, y_{\nu-1}$ et de degré partiel $\leqslant p-1$ en y_0. Les coefficients(*) des $R_i(y)$ constituent(**) un système complet et libre d'invariants formels du champ X.

La vérification des deux propositions précédentes est élémentaire. On montre l'existence de changements de variables formels conduisant aux formes désirées en déterminant par récurrence les coefficients de Taylor de ces changements de variables. On doit à chaque étape diviser par l'expression :

$$\langle n, \lambda \rangle = n_0 \lambda_0 + n_1 \lambda_1 + \dots n_{\nu-1} \lambda_{\nu-1} \qquad (n_i \geqslant -1)$$

qui ne s'annule jamais pour des directeurs non résonnants.

b) Cas de directeurs en résonance virtuelle

Si le champ X possède ne serait-ce qu'un seul rayon isolé à directeurs sans résonance positive ($\not{\mu}^{+} = 0$) , autrement dit :

$$\left\{ \sum m_i \lambda_i = 0 \text{ et } m_i \geqslant 0 \right\} \Rightarrow \left\{ m_i = 0 \right\}$$

mais à résonance virtuelle $(\not{\mu}_{-} = 0)$, c'est-à-dire donnant lieu à des relations $\sum m_i \lambda_i = 0$ pour des m_i de signes mixtes, alors on peut encore calculer les invariants formels par la méthode ci-dessus, avec toutefois de très

(*) Il faut bien sûr considérer ces coefficients comme définis modula la transformation induite par (4.2.4).

(**) Conjointement à p, ρ et aux λ_i .

légères modifications lorsque $\not{\ell}_0 > 0$, c'est-à-dire lorsqu'il existe des relations $\sum_{i \neq j} m_i \lambda_i = \lambda_j$ avec $m_i \geqslant 0$.

c) Cas de directeurs en résonance positive $(\not{\ell}^+ > 0)$

Lorsque tous les rayons propres du champ X sont en résonance positive (et éventuellement en résonance virtuelle, mais cela importe peu), le calcul des invariants formels s'en trouve sensiblement compliqué. On trouvera quelques indications à la section 10.4- indications succintes il est vrai, car notre objet est le calcul des invariants analytiques et non le calcul, somme toute élémentaire, des invariants formels.

SECTION 4.3 : INVARIANTS HOLOMORPHES.

Nous supposons d'abord (dans les trois premiers cas) qu'il n'y a ni dégénerescence ni quasirésonance, ce qui écarte les invariants métaholomorphes.

a) Premier cas : le champ X n'a que des rayons isolés et à directeurs sans résonance positive $(\not{\ell}^+ = 0)$

Il n'y a alors pas d'invariants holomorphes : deux champs X et X' de ce type sont conjugués analytiquement dès lors qu'ils le sont formellement. Ainsi donc, dans le cas générique (pas de résonance positive) les champs à partie linéaire nulle n'ont pas d'invariants holomorphes.

La démonstration est analogue à celle du théorème de Siegel (voir §6.1 et §9.1) sur la linéarisation des champs de vecteurs avec partie linéaire non résonnante et non quasi-résonnante. Les directeurs λ_i jouent ici le même rôle que les multiplicateurs λ_i dans le théorème de Siegel.

b) Deuxième cas : le champ X n'a que des rayons isolés mais l'un d'eux (au moins) a ses directeurs en résonance positive $(\not{\ell}^+ > 0)$

A chaque rayon γ à directeurs en résonance positive correspond une famille $\mathcal{A}_\gamma$ d'invariants holomorphes. Pour les calculer, on commence par mettre le champ X sous une forme Y adaptée au rayon γ (voir (4.2.1)), puis on effectue un éclatement élémentaire :

(4.3.1) $$y_0 = c_0 z_0 \ ; \ y_j = z_0 z_j \qquad (c_0 \in \mathbb{C}^* ; \ 1 \leq j \leq \nu-1)$$

qui transforme Y en un champ analytique Z de la forme :

(4.3.2) $$(z_0)^{-p}\, Z = \sum_{j=0}^{\nu-1} \{\lambda_j z_j + (\text{degré} \geq 2)\} \frac{\partial}{\partial z_j} \qquad (\text{pas de } p \text{ ici!})$$

Partant d'une autre forme adaptée $\tilde{Y}$ relative à des variables $\tilde{y}_j$, puis effectuant un éclatement élémentaire :

(2.3.1 bis) $$\tilde{y}_0 = \tilde{c}_0 \tilde{z}_0 \ ; \ \tilde{y}_j = \tilde{z}_0 \tilde{z}_j \qquad (\tilde{c}_0 \in \mathbb{C}^* ; \ 1 \leq j \leq \nu-1)$$

on aboutirait de même à un champ $\tilde{Z}$ de la forme :

(4.3.2 bis) $$(\tilde{z}_0)^{-p}\, \tilde{Z} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \{\lambda_j z_j + (\text{degré} \geq 2)\} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

avec

(4.3.3) $$\tilde{z}_0 = z_0 \left[1 + k_0(z)\right] \ ; \ \tilde{z}_j = z_j + k_j(z) \qquad (1 \leq j \leq \nu-1)$$

où les k_j sont des séries convergentes en $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ (sans termes linéaires si $j \neq 0$).

On voit donc que les champs analytiques $(z_0)^{-p} Z$ et $(\tilde{z}_0)^{-p} \tilde{Z}$ sont à partie linéaire résonnante, c'est-à-dire exactement du type (6.5.1) étudié au chapitre 6 (mais avec les directeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ à la place des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$) et qu'ils se correspondent dans un changement de variables analytique inversible (4.3.3) suivi de la multiplication par un facteur analytique inversible $(\tilde{z}_0/z_0)^{-p} = (1 + k_0(z))^{-p}$

Au chapitre 6 nous construisons les invariants holomorphes des champs analytiques à partie linéaire résonnante. En calculant ici ces invariants pour le champ $(z_0)^{-k} Z$ puis en otant la petite famille des invariants dits précaires (c'est-à-dire des invariants qui ne sont pas conservés par la multiplication du champ par un facteur inversible) on obtient une famille d'invariants non seulement de $(z_0)^{-k} Z$ mais de X lui-même. On obtient en fait, de cette manière, tous les invariants holomorphes de X relatifs au rayon γ, moins la petite famille des invariants précaires, qui ne sont pas très importants et qu'on peut de toute façon, si on le désire, récupérer au moyen du procédé universel du chapitre 10 (méthode de l'arborescence). En répétant ces constructions pour chacun des rayons propres γ à directeurs en résonnance positive, on obtient un système complet d'invariants holomorphe du champ X.

c) Troisième cas : le champ X possède des rayons dégénérés ou non isolés.

Rappelons qu'un rayon $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)$ est dégénéré si l'on a :

$$Q_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \ldots = Q_\nu(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = 0 \qquad \text{(cf. (4.1.1 bis))}$$

Ce cas, évidemment exceptionnel, se subdivise lui-même en plusieurs sous-cas, qui peuvent conduire à des niveaux multiples (voir § 10.2) mais qui tombent tous sous le coup des méthodes universelles du chapitre 10.

d) Incidence de la nihilence et de la quasi-résonance.

Sur chacun des trois premiers cas peuvent venir se greffer de la nihilence (génératrice de petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) ou de la quasi-résonance (génératrice de tout-petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) mais en général sans détruire la résurgence et sans interférer avec le calcul des invariants holomorphes. Voi à ce sujet les sections 8-1 et 9.5.

CHAPITRE 5 : CLASSIFICATION DES DIFFEOS TANGENTS A L'IDENTITE.

SECTION 5.1 : LE CAS DE DIMENSION 1.

Soit à classer les difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}$ de la forme :

(5.1.1) $$f \;:\; x \longmapsto f(x) = x + a_p x^{p+1} + a_{p+1} x^{p+2} + \dots \qquad (p \geq 1 \,;\, a_p \neq 0)$$

relativement aux changements de variable analytiques. Ces difféos sont étudiés en long et en large au tome II. Nous nous contentons ici de rappeler quelques résultats-clef, en leur donnant la forme qui se prête le mieux à la généralisation en dimension quelconque.

f ne possède que deux invariants formels. Ce sont le niveau p (indice du premier coefficient non nul) et le résiduit ρ ("résidu itératif"), lequel est défini par :

(5.1.2) $$\rho = -\frac{1+p}{2p} - \frac{1}{p} R \qquad \text{avec } R = \text{résidu en } x=0 \text{ de } (f(x)-x)^{-1}$$

On vérifie en effet que tout f de niveau p et de résiduit ρ est formellement conjugable au difféo analytique g :

(5.1.3) $$y \longmapsto g(y) = (\exp Y).y \quad \text{avec } Y = -\frac{1}{p}.\frac{y^{p+1}}{1+\rho y^p}.\frac{\partial}{\partial y}$$

f n'a pas d'invariants métaholomorphes, mais il possède une infinité dénombrable d'invariants holomorphes que l'on obtient comme suit.

On commence par calculer l'"intégrale formelle" de f, c'est-à-dire par résoudre l'équation :

(5.1.4) $$x(z+1) \equiv f(x(z))$$

Si $\rho = 0$, cette équation admet une solution formelle du type :

(5.1.5) $$x(z) = \sum_{n \geq 1} b_n \, z^{-n/p}$$

Si $\rho \neq 0$, elle admet une solution formelle du type :

(5.1.6) $$x(z) = \sum_{\begin{cases} n \geq 1 \\ m \geq 0 \end{cases}} b_{n,m} \, z^{-n/p} \cdot (z^{-1} \log z)^m$$

Dans chaque cas, la solution est unique à une translation près sur z. A cet égard, il faut noter que la parenthèse au second membre de (5.1.6) est un élément de $\mathbb{C}[[z^{-1/p}, z^{-1} \log z]]$ et pas seulement de $\mathbb{C}[[z^{-1/p}, \log z]]$. Ce détail a son importance, car c'est seulement dans la première algèbre qu'on a expression unique. Dans la seconde, on a évidemment des relations du type :

$$z^{-1/p} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-p)^{-n} (\log z)^n$$

En réalité, les coefficients $b_{n,m}$ de (5.1.6) ne sont pas indépendants. Si en effet on désigne par

$$x \longmapsto \sum_{n \geq 1}^{\cdot} b_n \, y^n$$

le changement de variable formel qui conjugue le difféo $x \longmapsto f(x)$ au difféo $y \longmapsto g(y)$ de (5.1.3), on aura une formule

(5.1.7) $$x(z) = \sum_{n \geq 1} b_n \, \mathfrak{z}^{-n/p}$$

identique à la formule (5.1.5) au remplacement près de z par $\mathfrak{z}$. Ici, $\mathfrak{z}$ est une variable liée à z par :

(5.1.8) $$dz = (1 + \rho/\mathfrak{z}) \, d\mathfrak{z}$$

ou si l'on préfère :

(5.1.9) $$z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$$

Cette variable $\mathfrak{z}$ n'est en somme qu'un temps z légèrement perturbé. Nous la retrouverons dans presque tous les problèmes de classement d'objets locaux. D'ailleurs, (5.1.9) s'inverse d'une façon unique sous la forme :

(5.1.10) $$\mathfrak{z} = z \cdot \left[1 + \sum_{n,m \geq 0} c_{n,m}(\rho) \quad z^{-n} \left(z^{-1} \log z \right)^{m} \right]$$

avec $c_{1,0} = 0$ et $c_{0,1} = -\rho$. Toutefois, cette expression compliquée ne sert guère : les formules (5.1.8) et (5.1.9) suffisent à presque tous les besoins pratiques.

Définissons une série $\underset{\sim}{x}$ par :

(5.1.11) $$\underset{\sim}{x}(\mathfrak{z}) = x(z) = \sum_{n \geq 1} b_n \, \mathfrak{z}^{-n/p}$$

En général, le troisième membre de (5.1.11) diverge aussi grand que soit $\mathfrak{z}$. Toutefois, la transformation de Borel rétablit la convergence et fournit un germe prolongeable partout sans coupure, et aux singularités ω toutes situées au-dessus du réseau $\Omega = 2\pi i \, \mathbb{Z}$. Ainsi, $\underset{\sim}{x}$ est une <u>fonction résurgente</u> et, pour tout ω au-dessus de Ω , on montre qu'elle vérifie l'équation de résurgence :

(5.1.12) $$\underset{\sim}{\Delta}_{\omega} \; \underset{\sim}{x}(\mathfrak{z}) = A_{\omega} \cdot (1 + \rho/\mathfrak{z})^{-1} \frac{d}{d\mathfrak{z}} \underset{\sim}{x}(\mathfrak{z})$$

où les A_{ω} sont des scalaires bien déterminés et où $\underset{\sim}{\Delta}_{\omega}$ désigne la dérivation étrangère par rapport à $\mathfrak{z}$. Mais d'après (5.1.8) et (5.1.11) on a :

(5.1.13) $$(1 + \rho/\mathfrak{z})^{-1} \frac{d}{d\mathfrak{z}} \underset{\sim}{x}(\mathfrak{z}) = \frac{d}{dz} x(z)$$

Désignant maintenant par Δ_{ω} la dérivation étrangère par rapport à z , on peut calculer $\Delta_{\omega} \, x(z)$ à partir de (5.1.12) en appliquant la formule (1.3.61) de dérivation étrangère d'un produit de composition. On trouve :

(5.1.14) $$\Delta_{\omega} \, x(z) = A_{\omega} \frac{d}{dz} x(z)$$

Cette formule est plus simple que (5.1.12) et nettement plus maniable, surtout pour le calcul des dérivations étrangères itérées :

$$\Delta_{\omega_n} \cdots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} \quad x(z)$$

C'est donc elle que nous utiliserons. D'une façon générale, ici comme dans toute la suite, on fera les calculs pratiques par rapport à la variable $\mathring{z}$ (temps perturbé), qui permet de manier des séries entières d'une seule variable, mais on écrira systématiquement les résultats en fonction de la variable z (temps non perturbé), qui donne des équations de résurgence plus simples. Ce n'est d'ailleurs pas un simple artifice d'écriture : on pourrait très bien calculer la transformée de Borel $\mathbf{x}(\zeta)$ de $x(z)$ grâce à (5.1.6) et à la formule [E.1](1.c.6) et vérifier ainsi directement que $x(z)$ est résurgente en z et vérifie les équations (5.1.14).

En résumé, si on désigne par Δ_ω les dérivations étrangères par rapport à z et par $\dot{\Delta}_\omega$ les dérivations étrangères pointées :

$$\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega} z} \Delta_\omega \qquad (\dot{\omega} = \text{projection de } \omega \text{ sur } \mathbb{C})$$

on est conduit à l'énoncé :

Proposition 5.1.1 (résurgence de l'intégrale formelle)

Tout difféo analytique f de niveau p et de résiduit ρ possède une intégrale formelle $x(z)$:

$$x(z+1) \equiv f(x(z))$$

unique à une translation près sur z et s'exprimant comme série entière de $\mathring{z}^{-1/p}$, où $\mathring{z}$ est le temps perturbé :

$$z = \mathring{z} + \rho \log \mathring{z}.$$

De plus, cette intégrale formelle $x(z)$ est une fonction résurgente (en z comme en $\mathring{z}$) et admet pour réseau de résurgence l'ensemble Ω_p qui relève sur $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $\zeta^{1/p}$) l'ensemble :

$$\Omega = \lambda_0 \mathbb{Z} = 2\pi i \mathbb{Z} \qquad (*)$$

(*) λ_0 est le multiplicateur imaginaire. Il jouera un rôle essentiel au chapitre 7.

Enfin, il existe des scalaires complexes A_ω tels que

$$\Delta_\omega \quad x(z) = A_\omega \frac{\partial}{\partial z} \, x(z) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p) \tag{5.1.15}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\dot{\Delta}_\omega \quad x(z) = \mathbb{A}_\omega \quad x(z) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p) \tag{5.1.16}$$

où $\dot{\Delta}_\omega$ est la dérivation étrangère pointée et où $\mathbb{A}_\omega$ est un opérateur différentiel ordinaire :

$$\mathbb{A}_\omega = e^{-\dot{\omega} z} A_\omega \frac{d}{dz} \qquad (\Omega_p \to \Omega : \omega \mapsto \dot{\omega}) \tag{5.1.17}$$

Puisque les $\dot{\Delta}_\omega$, à la différence des Δ_ω , commutent avec $\frac{\partial}{\partial z}$, on obtient en itérant (5.1.16) :

$$\dot{\Delta}_{\omega_1} \dot{\Delta}_{\omega_2} \cdots \dot{\Delta}_{\omega_n} x(z) = \mathbb{A}_{\omega_n} \cdots \mathbb{A}_{\omega_2} \mathbb{A}_{\omega_1} x(z) \qquad \text{(noter l'inversion!)} \tag{5.1.18}$$

ce qui donne :

$$\Delta_{\omega_1} \Delta_{\omega_2} \cdots \Delta_{\omega_n} x(z) = (-1)^{n-1} \left(\frac{d}{dz} - \dot{\omega}_1\right)\left(\frac{d}{dz} - \dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dz} - \dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 - \cdots \dot{\omega}_{n-1}\right) x(z) \tag{5.1.19}$$

En particulier on a :

$$\left[\dot{\Delta}_{\omega_1} , \dot{\Delta}_{\omega_2}\right] x(z) = \left[\mathbb{A}_{\omega_2} , \mathbb{A}_{\omega_1}\right] x(z) \tag{5.1.20}$$

ce qui donne :

$$\left[\Delta_{\omega_1} , \Delta_{\omega_2}\right] x(z) = (\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1) A_{\omega_1} A_{\omega_2} \frac{d}{dz} x(z) \tag{5.1.21}$$

Les équations (5.1.19) décrivent complètement la résurgence de $x(z)$. De plus :

<u>Proposition 5.1.2</u> (<u>Invariants holomorphes de</u> f)

La famille des opérateurs $\{ \mathbb{A}_\omega \ ; \ \omega \in \Omega_p \}$, considérée comme définie à une translation $z \mapsto z + c$ près, constitue un système <u>complet</u>

et libre d'invariants holomorphes de f.

Cela revient à dire que des scalaires A_ω $(\omega \in \Omega)$, considérée comme définie à une transformation $A_\omega \mapsto A_\omega \exp(-\omega c)$ près, constitue un système complet et libre d'invariants holomorphes.

SECTION 5.2. LE CAS GENERAL - INVARIANTS FORMELS.

Plaçons-nous maintenant en dimension ν quelconque.

L'application $X \mapsto \exp X$ définit une correspondance biunivoque entre les champs locaux formels, de niveau $p \geq 1$, donc sans partie linéaire et de la forme :

(5.2.1) $$X = \sum_i \left[Q_i(x) + \ldots \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (Q_i \text{ homogène de degré } p+1)$$

et les difféomorphismes formels de niveau $p \geq 1$, donc tangents à l'identité et de la forme :

(5.2.2) $$f : x_i \mapsto f_i(x) = x_i + Q_i(x) + \ldots \qquad (Q_i \text{ homogène de degré } p+1)$$

Les polynômes homogènes Q_i sont d'ailleurs les mêmes dans (5.2.1) et (5.2.2) bien qu'évidemment les termes de degré supérieur diffèrent(*).

Ceci permet de transposer aux difféos toutes les notions introduites au chapitre précédent : application directrice $\mathcal{Q}$, rayons γ propres ou dégénérés, résiduit ρ, directeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$. Ceci permet aussi d'appliquer telle quelle la construction des invariants formels faite au chapitre précédent.

(*) à partir du degré $2p+1$.

SECTION 5.3. LE CAS GENERAL. INVARIANTS HOLOMORPHES.

Ici encore, on se laisse guider par l'analogie avec les champs de vecteurs. On a toujours les différents cas envisagés à la section 4.3, mais avec une différence essentielle : alors que dans le cas générique où $\mathcal{L}^+ = 0$ (directeurs sans résonance positive) les champs analytiques ne possèdent pas d'invariants holomorphes, les difféos analytiques, eux, en possède toujours une infinité dénombrable. Recherchons ces invariants en commençant, comme toujours, par le calcul de l'intégrale formelle.

Fixons donc un difféo local f de la forme (5.1.1) et notons F_* son générateur infinitésimal formel :

$$(5.3.1) \qquad F_* = \sum_{i=1}^{\nu} f_{*i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(f = \exp F_* \right)$$

Ce champ formel F_* est caractérisé par :

$$(5.3.2) \qquad f_{*i} \circ f = \sum_{j=1}^{\nu} f_{*j} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \quad \text{et} \quad f_i(x) = x_i + f_{*i}(x) + \sigma(x^{2p}) \ (\forall i)$$

Bien que les coefficients de Taylor des f_{*i} se déduisent facilement de ceux des f_i et que, par hypothèse, les composantes f_i de f soient analytiques en $x_1, \ldots, x_\nu$, ce n'est généralement plus vrai des composantes f_{*i} de F_*. Celles-ci divergent presque toujours. Plus précisément, elles "contiennent de la résurgence" et cette résurgence "manifeste" les invariants holomorphes de f. Toutefois, pour mettre en évidence résurgence et invariants, il faut passer des variables données x_i à de nouvelles variables. Ceci peut se faire de bien des manières, mais le choix le plus commode (celui qui simplifie au maximum les équations de résurgence) consiste à introduire le <u>temps complexe</u> z, relativement à qui le difféo revêt la forme $z \mapsto z+1$.

Proposition 5.3.1 (Existence et allure de l'intégrale formelle)

Soit f un difféo local de niveau p. À tout rayon propre $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)$ de résiduit ρ et de directeurs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}$ non résonnants, correspond une intégrale formelle $x(z\,;u)$ solution de

(5.3.3) $$x_i(z+1\,;u) = f_i(x(z\,;u)) \qquad (\forall i)$$

et vérifiant les conditions initiales(*) :

(5.3.4) $$x_i(z\,;0) = \gamma_i\, z^{-1/p} + (\dots) \qquad (\forall i)$$

Cette intégrale formelle est unique modulo un reparamétrage :

(5.3.5) $$z \mapsto z + c_0\ ;\ u_1 \mapsto c_1 u_1, \dots, u_{\nu-1} \mapsto c_{\nu-1} u_{\nu-1} \qquad (c_0 \in \mathbb{C}\,; c_i \in \mathbb{C}^*)$$

et elle est de la forme :

(5.3.6) $$x(z\,;u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u^n \cdot z^{[n]} \cdot \Phi^n(z)$$

soit plus explicitement :

(5.3.6 bis) $$x_i(z\,;u_1,\dots,u_{\nu-1}) = \sum_{(n_1,\dots,n_{\nu-1}) \in \mathbb{N}} u_1^{n_1} \dots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}\; z^{[n_1,\dots,n_{\nu-1}]}\; \Phi_i^{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(z)$$

où le multiindice n parcourt l'ensemble où les blocs $z^{[n]}$ sont définis par :

(5.3.7) $$z^{[n_1,\dots,n_{\nu-1}]} = \mathfrak{z}^{\frac{1}{p}(n_1\lambda_1 + \dots n_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})}$$

ou en abrégé $z^{[n]} = \mathfrak{z}^{\frac{1}{p}\langle n,\lambda\rangle}$ avec le temps perturbé $\mathfrak{z}$:

(5.3.8) $$z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$$

(*) Ici $(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)$ désigne le représentant privilégié de γ, c'est-à-dire celui qui vérifie (4.1.2).

où enfin les composantes ϕ_i^n sont des séries entières en $\mathfrak{z}^{-1/p}$:

(5.3.9) $$\phi_i^{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(\mathfrak{z}) \in \mathbb{C}[[\mathfrak{z}^{-1/p}]]$$

Preuve : Résoudre (5.3.3) revient à résoudre :

(5.3.10) $$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} x_i(\mathfrak{z};u) = f_{*i}(x(\mathfrak{z};u))$$

Or la solution de (5.3.10) associée au rayon γ s'obtient en composant :

(i) le changement de variable inversible $x_i \mapsto y_{i-1}$ donné en (4.2.0) et (4.2.0 bis) et qui met F_* sous la forme adaptée Y donnée en (4.2.1)

(ii) par l'éclatement $y_i \mapsto z_i$ qui met Y sous la forme élémentaire Z_1 :

(5.3.11) $$Z_1 = \frac{1}{p}\frac{(z_0)^p}{1+\rho(z_0)^p}\left\{\sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right\} \qquad (\lambda_0 = -1)$$

(iii) et par la substitution :

(5.3.12) $$z_0 = \mathfrak{z}^{\lambda_0/p} = \mathfrak{z}^{-1/p} \; ; \; z_1 = u_1 \mathfrak{z}^{\lambda_1/p} ; \dots ; z_{\nu-1} = u_{\nu-1}\mathfrak{z}^{\lambda_{\nu-1}/p}$$

Ecrivons maintenant, sous forme condensée, les équations de résurgence vérifiées par les ϕ_i^n. Comme toujours, Ω_p est le relevé sur $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $\zeta^{1/p}$) du réseau Ω et les Δ_ω (resp. les $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\Delta_\omega$) sont les dérivations étrangères par rapport au temps non perturbé $\mathfrak{z}$ (resp. les dérivations pointées correspondantes).

Proposition 5.3.2. (Résurgence de l'intégrale formelle)

L'intégrale formelle $x(\mathfrak{z};u)$ est une fonction résurgente (de z comme de $\mathfrak{z}$) et elle admet pour réseau de résurgence l'ensemble :

$$\Omega = \lambda_0 \mathbb{Z} = 2\pi i\, \mathbb{Z} \qquad (\lambda_0 = \text{multiplicateur imaginaire})$$

Plus précisément, chaque composante Φ_i^n admet une transformée de Borel (en z comme en $\mathfrak{z}$) qui converge à l'origine, se prolonge partout sans coupure et a toutes ses singularités en des points de la forme $2\pi i . m$ $(m \in \mathbb{Z})$

Ecrivons maintenant, sous forme condensée, les équations de résurgence vérifiées par les Φ_i^n. Comme toujours, Ω_p est le relevé sur $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $\zeta^{1/p}$) du réseau Ω et les Δ_ω (resp. les $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega}z}\Delta_\omega$) sont les dérivations étrangères par rapport au temps non perturbé z (resp. les dérivations pointées correspondantes).

Proposition 5.3.3 (Equations de résurgence)

Les $x_i(z;u)$ vérifient des équations de résurgence qui sont indépendante de i et qui s'écrivent (pour chaque $\omega \in \Omega_p$) :

(5.3.13) $$\Delta_\omega\ x_i(z;u) = \left\{ A_\omega^0(u)\frac{\partial}{\partial z} + A_\omega^1(u)\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots A_\omega^{\nu-1}(u)\frac{\partial}{\partial u_{\nu-1}} \right\} x_i(z;u)$$

Si on introduit les dérivations étrangères pointées et les opérateurs différentiels ordinaires :

(5.3.14) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\dot{\omega}z}\left\{ A_\omega^0(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} A_\omega^i(u)\frac{\partial}{\partial u_i} \right\} \quad (*)$$

les équations de résurgence s'écrivent :

(5.3.15) $$\dot{\Delta}_\omega\ x(z;u) = \mathbb{A}_\omega\ x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

Les $\dot{\Delta}_\omega$ ont l'avantage de commuter avec $\frac{\partial}{\partial z}$ et bien entendu avec les $\frac{\partial}{\partial u_i}$, puisque les u_i sont de simples paramètres. On peut donc itérer (5.3.15) et écrire, en prenant garde à l'inversion des facteurs :

(5.3.16) $$\dot{\Delta}_{\omega_1}\dot{\Delta}_{\omega_2}\dots\dot{\Delta}_{\omega_r}\ x(z;u) = \mathbb{A}_{\omega_r}\dots\mathbb{A}_{\omega_2}\mathbb{A}_{\omega_1}\ x(z;u) \qquad (\omega_j \in \Omega_p)$$

(*) $\omega \mapsto \dot{\omega}$ est la projection naturelle $\Omega_p \to \Omega$

Cette équation décrit complètement la résurgence de $x(z;u)$.

Interprétation des équations de résurgence.

(5.3.13) et plus encore (5.3.15) sont des équations condensées, qui doivent s'interpréter par rapport à chacune des composantes Φ_i^n de l'intégrale formelle. Si nous posons (pour des raisons d'homogénéité) :

(5.3.17)
$$\begin{aligned} A_\omega^0(u) &= \sum_{n_j} A^0_{\omega\|n_1,\ldots,n_{\nu-1}}\, u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} \qquad (n_j \geq 0) \\ A_\omega^i(u) &= u_i \sum_{n_j} A^0_{\omega\|n_1,\ldots,n_{\nu-1}}\, u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} \qquad (n_i \geq -1\,;\, n_j \geq 0 \text{ si } i\neq j) \end{aligned}$$

alors (5.3.13) fournira pour chaque composante :

(5.3.18)
$$\left\{\begin{aligned} \Delta_\omega \Phi^n(z) &= \sum_{n'+n''=n} \left[\langle n', A_{\omega\|n''}\rangle + A^0_{\omega\|n''}\left(\frac{\partial}{\partial z}\log z^{[n']} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \Phi_i^{n'}(z) \\ &= \sum_{n'+n''=n} \left[\langle n', A_{\omega\|n''}\rangle + \frac{A^0_{\omega\|n''}}{1+\rho/z}\left(\frac{\langle n',\lambda\rangle}{p\, z} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \Phi_i^{n'}(z) \end{aligned}\right.$$

avec

(5.3.18 bis) $$\langle n', \lambda\rangle = \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i' \lambda_i \quad \text{et} \quad \langle n', A_{\omega\|n''}\rangle = \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i' A^i_{\omega\|n''}$$

Les sigmas aux seconds membres de (5.3.18) sont finis puisqu'ils s'étendent à toutes les décompositions de $n = (n_i)$ en sommes $n'+n'' = (n_i'+n_i'')$

Schéma de la démonstration des propositions 5.3.2. et 5.3.3.

Pour montrer la résurgence de l'intégrale formelle $x(z;u)$, on se reporte à l'équation (5.3.3) et on en tire pour chaque composante Φ_i^n :

(5.3.19) $$\Phi_i^n(z+1) - \Phi_i^n(z) = R_i^n(z) \qquad (n \in \mathcal{N} = \mathbb{N}^{\nu-1}\,;\, i \leq \nu)$$

où le premier reste est de la forme :

(5.3.20) $$R_i^{0,\ldots,0}(z) = f_i\left(\Phi^{0,\ldots,0}(z)\right) - \Phi_i^{0,\ldots,0}(z)$$

et où les autres restes R_i^n s'expriment simplement à partir des Φ_j^m et de leurs dérivées, seuls intervenant les multiindices m <u>strictement</u> inférieurs à n (pour l'ordre naturel sur $\mathbb{N}^{\nu-1}$). Les équations aux différences (5.3.19) sont du type étudié au chapitre 3. On peut donc affirmer que les composantes Φ_i^n sont résurgentes en z avec pour réseau de résurgence $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$.

Pour déterminer la forme exacte des équations de résurgence, on se reporte de nouveau à l'équation (5.3.3) et on lui applique la dérivation étrangère ordinaire Δ_ω pour un indice donné $\omega \in \Omega$. La dérivation Δ_ω ne commute pas avec $\partial/\partial z$ mais elle commute avec la translation de pas 1. On obtient donc :

(5.3.21) $$y_i(z+1) = \sum_{j=1}^{\nu} f_{ij}(y(z))\, y_j(z)$$

avec

(5.3.22) $$y_i(z) = \Delta_\omega x_i(z;u) \quad \text{et} \quad f_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)$$

Or toute solution formelle de (5.3.21) peut s'écrire :

(5.3.23) $$y_i(z) = \left[A^0 \frac{\partial}{\partial z} + A^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots A^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial u_{\nu-1}}\right] . x_i(z;u)$$

pour des coefficients A^i appartenant à $\mathbb{C}[[u_1, \dots, u_{\nu-1}]]$ mais constants en z . On aboutit donc bien aux équations de résurgence (5.1.15).

<u>Proposition 5.3.4</u> (<u>Invariants holomorphes</u>)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$, considérés comme définis modulo un changement de variable élémentaire (le même pour tous les ω) de la forme :

(5.3.24) $$z \mapsto z + c_0 \; ; u_1 \mapsto c_1 u_1 , \dots , u_{\nu-1} \mapsto c_{\nu-1} u_{\nu-1} \qquad (c_0 \in \mathbb{C}; c_1,\dots,c_{\nu-1} \in \mathbb{C}^*)$$

sont des invariants holomorphes du difféomorphisme local f .

<u>Proposition 5.3.5</u> (<u>Système complet et libre d'invariants holomorphes</u>)

Si on est dans le cas générique, autrement dit si le difféo f n'a que des rayons propres isolés γ à directeurs non-résonnants, on obtient un système complet et libre d'invariants holomorphes en regroupant les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ $(\omega \in \Omega_p)$ relatifs à l'un quelconque des N rayons propres.

Schéma des démonstrations.

L'invariance des $\mathbb{A}_\omega$ est immédiate à vérifier. Soit en effet un changement de variables analytique $x_i \longmapsto \tilde{x}_i = h_i(x)$. Soient $x(z;u)$ et $\tilde{x}(z;u)$ les intégrales formelles associées à un même rayon propre et soient $\mathbb{A}_\omega$, $\tilde{\mathbb{A}}_\omega$ les opérateurs correspondants. Ces opérateurs sont caractérisés par :

(5.3.25) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z;u)$$

(5.3.26) $$\dot{\Delta}_\omega \; \tilde{x}(z;u) = \tilde{\mathbb{A}}_\omega \; \tilde{x}(z;u)$$

Mais par unicité de l'intégrale formelle on a :

(5.3.27) $$\tilde{x}_i(z;u) = h_i(x(z;u))$$

D'où en appliquant $\dot{\Delta}_\omega$ et compte tenu de (5.3.25) :

(5.3.28) $$\dot{\Delta}_\omega \tilde{x}_i(z;u) = \sum_{j=1}^{\nu} h_{ij}(x(z;u)) \, \dot{\Delta}_\omega x_j(z;u) = \sum_{j=1}^{\nu} h_{ij}(x(z;u)) \, \mathbb{A}_\omega x_j(z;u)$$

Soit finalement :

(5.3.29) $$\dot{\Delta}_\omega \; \tilde{x}(z;u) = \mathbb{A}_\omega \; \tilde{x}(z;u)$$

Comparant (5.3.29) et (5.3.26) on voit que $\mathbb{A}_\omega = \tilde{\mathbb{A}}_\omega$

Le fait que les invariants $\mathbb{A}_\omega$ constituent un système libre (pas de relation a priori entre les $\mathbb{A}_\omega$ associés à un même rayon propre (Voir toutefois la section 3.6) se voit par la méthode des perturbations infinitésimales. On calcule les invariants $\mathbb{A}_\omega + \delta\mathbb{A}_\omega$ associés à un difféo $f + \delta f$. Il est d'ailleurs

(*) "libre" ne signifie évidemment pas que les coefficients $A^{\cdot}_\omega(u)$ sont des séries formelles quelconques en u . Ils sont soumis aux "contraintes en u ". Voir §5.6.

commode de perturber un difféo f de la forme $\exp X$ (pour un champ de vecteurs analytique X) car cela assure $\mathbb{A}_\omega \equiv 0$. Les $\delta\mathbb{A}_\omega$ se calculent alors facilement en fonction de $(\delta f)\circ f^{-1}$ et du moule zêta (voir section 1.4) et l'impossibilité d'identités homogènes (de degré 1,2,3,...) entre les $\delta\mathbb{A}_\omega$ implique l'impossibilité de relations analytiques a priori entre les invariants(*).

Enfin, la complétude du système d'invariants holomorphes consitué par les $\mathbb{A}_\omega$ se montre en distinguant deux cas.

Dans le <u>cas générique</u> (λ_i non quasi-résonnants) on montre que les transformées de Borel $\hat{x}(\zeta\,;u)$ sont analytique en u, ce qui permet de resommer par Laplace dans les plans $\mathrm{Re}(\zeta)>0$ et $\mathrm{Re}(\zeta)<0$. On prend alors deux difféos f et g formellement conjugués $(f\circ h = h\circ g)$ et possédant mêmes invariants $\mathbb{A}_\omega$, puis on montre l'analyticité de h en raisonnant sur différentes cartes $z, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ qui décrivent des voisinages partiels des différents rayons propres γ et qu'on recolle ensuite.(**)

Dans le <u>cas exceptionnel</u> (λ_i quasirésonnants) on n'a plus analyticité en u, à cause des tout petits diviseurs $\langle n, \lambda\rangle$ mais on montre que ces tout petits diviseurs ne font qu'introduire des invariants métaholomorphes (non constructibles) qui viennent s'ajouter aux invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ (Voir section 10.4).

<u>Proposition 5.3.6.</u> (<u>Critères d'itérabilité fractionnaire</u>)

Supposons que le difféo f ait ses rayons propres isolés et ses directeurs λ_i sans résonance ni quasi-résonance. Alors f est l'exponentielle d'un champ de vecteurs analytique X si et seulement si tous les $\mathbb{A}_\omega$ sont

(*) Les $\mathbb{A}_\omega$ sont bien soumis à des contraintes a priori <u>de croissance</u> (voir §10.5) mais c'est autre chose. Il y a aussi les "<u>contraintes en u</u>" qui précisent la dépendance en u de chaque $\mathbb{A}_\omega$ et qui relient entre elles les familles de $\mathbb{A}_\omega$ attachées aux divers rayons propres. Voir §5.6. La démonstration détaillée de la <u>complétude</u> et de la <u>liberté</u> figurera dans [E.4], où nous en aurons besoin, mais on en donne le principe en §11.1. (**) On utilise crucialement les propriétés de prolongeabilité des fonctions analytiques de plusieurs variables nuls. De même, f possède une racine m-ième d'itération (c'est-à-dire un g analytique tel que $\overset{m}{g} = f$) si et seulement si les $\mathbb{A}_\omega$ sont nuls chaque fois que l'entier $\dot{\omega}/2\pi i$ est divisible par m .

La démonstration est en gros la même qu'en dimension 1 (Voir tome II).

SECTION 5.4 : INVARIANTS HOLOMORPHES ET TRAJECTOIRES ENTIERES.

De même que, sur l'infinité des invariants formels, il en existe un nombre fini (à savoir μ, ρ et les λ_i) qui sont cruciaux en ce sens qu'ils se répercutent directement sur la forme de $x(z;u)$ et notamment des blocs $z^{[n]}$, de même, sur l'infinité des invariants holomorphes, nous allons dégager une petite famille, qui mérite elle aussi l'épithète cruciale, car elle influence d'une façon décisive la nature de la résurgence. Commencons par une définition commode.

Définition 5.4.1 (Polynômes de résurgence et fonctions finiment résurgentes)

On appelle polynôme de résurgence toute fonction résurgente qui s'annule dès qu'on lui applique un nombre suffisant de dérivations étrangères(*). On appelle fonction finiment résurgente toute fonction résurgente φ telle que φ et toutes ses dérivées étrangères, premières et successives(***), s'expriment au moyen d'un nombre fini d'entre elles(***).

(*) Tout polynôme de résurgence peut s'écrire comme somme finie :

$$\sum_{\omega} c_\omega(z)\ \mathcal{U}^{\omega}(z) \qquad\qquad (\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n))$$

avec des $c_\omega(z)$ analytiques ("constantes de résurgence") et avec pour $\mathcal{U}^{\omega}(z)$ les monômes de résurgence introduits à la section 1.4.

(**) Autrement dit, toutes les $\Delta_{\omega_1}\varphi$, toutes les $\Delta_{\omega_2}\Delta_{\omega_1}\varphi$, toutes les $\Delta_{\omega_3}\Delta_{\omega_2}\Delta_{\omega_1}\varphi$, etc...

(***) et au besoin d'autant de germes analytiques ("constantes de résurgence") que l'on veut. Une définition plus précise consisterait à dire : φ est finiment résurgente si l'algèbre de résurgence qu'elle engendre à une dimension finie sur l'algèbre des germes analytiques (ou "constantes de résurgence").

Les polynômes de résurgence sont bien sûr finiment résurgents, mais l'inverse n'est pas vrai. De fait, les fonctions finiment résurgentes sont aux polynômes de résurgence à peu près ce que les fonctions algébriques sont aux polynômes.

Revenons à nos moutons. Soit f un difféo local tangent à l'identité et soit γ l'un de ses rayons propres, supposé à directeurs non résonnants (cela <u>implique</u> que γ est isolé). Relativement à ce rayon, f admet des invariants holomorphes de la forme :

(5.4.1) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z}\left[A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\right] \qquad (\omega\in\Omega_p)$$

et une intégrale formelle :

(5.4.2) $$x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n \cdot z^{[n]} \cdot \Phi^n(z) \qquad (\mathcal{N}=\mathbb{N}^{\nu-1})$$

aux composantes Φ^n ordonnées par l'ordre naturel de $\mathbb{N}^{\nu-1}$.

<u>Définition 5.4.2</u> (<u>Invariants holomorphes cruciaux</u>).

On qualifie de <u>cruciaux</u> les termes constants $A^1_\omega(0),\ldots,A^{\nu-1}_\omega(0)$ des séries $A^i_\omega(u)$ coefficients de l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$. Bien noter <u>l'exclusion du premier terme</u> $A^0_\omega(0)$.

<u>Proposition 5.4.2</u> (<u>Différents types de résurgence</u>)

α) lorsque les invariants cruciaux $A^1_\omega(0),\ldots,A^{\nu-1}_\omega(0)$ ne sont pas tous nuls (c'est le cas générique) les composantes Φ^n de l'intégrale formelle sont des fonctions <u>infiniment résurgentes</u>. Les dérivées étrangères d'ordre 1 de Φ^n s'expriment en fonction des Φ^m pour lesquelles $m\leq n$ (m antérieur à n) mais aussi des $\nu-1$ composantes Φ^m pour lesquelles m est <u>immédiatement postérieur</u> à n. Dans ce cas, chacune des Φ^n recèle à elle seule toute l'information invariante (attachée au rayon γ).

β) lorsque les invariants cruciaux sont nuls pour tout ω :

(5.4.3) $$A^{1}_{\omega}(0) = \dots A^{\nu-1}_{\omega}(0) = 0$$

alors les composantes Φ^{n} sont finiment résurgentes. Chacune d'elles a ses dérivées étrangères du premier ordre exprimables en fonction de la famille finie des Φ^{m} d'indice $m \leq n$. Il faut alors considérer l'infinité des Φ^{n} pour récupérer toute l'information invariante (attachée au rayon γ)

γ) Lorsque, outre (5.4.3), on a pour tout ω :

(5.4.4) $$A^{0}_{\omega}(0) = \frac{\partial}{\partial u_i} A^{1}_{\omega}(0) = \dots \frac{\partial}{\partial u_i} A^{\nu-1}_{\omega}(0) = 0 \qquad (i=1,2,\dots,\nu-1)$$

alors les composantes Φ^{n} sont des polynômes de résurgence. Chacune d'elles a ses dérivées étrangères (de tout ordre) exprimables en fonction de la famille finie des Φ^{m} avec $m < n$ (strictement). Ici encore, il faut envisager la totalité des Φ^{n} pour obtenir toute l'information invariante.

Preuve : Il suffit d'appliquer la formule (5.3.18) et d'observer qu'avec les notations homogènes (5.3.17) les invariants cruciaux (5.4.3) sont précisément les coéfficients $A^{1}_{\omega \| n_1,\dots,n_{\nu-1}}$ d'homogénéité $\sum n_j = -1$ (car tous les n_j sont nuls, sauf un qui vaut -1) et les invariants "semi-cruciaux" (5.4.4) sont précisément les coéfficients $A^{i}_{\omega \| n_1,\dots,n_{\nu-1}}$ d'homogénéité $\sum n_j = 0$

Les invariants cruciaux permettent aussi de discuter l'analycité des trajectoires entières. Définissons d'abord celles-ci.

Définition 5.4.3 (Trajectoires entières)

Supposons qu'existent $\nu+1$ séries formelles d'une seule variable :

$$w_1, w_2, \dots, w_\nu \ , \ f^{\#} \quad \in \mathbb{C}[[\xi]]$$

sans termes constants et telles que $f \circ w = w \circ f^{\#}$ ou plus explicitement :

(5.4.5) $$f_i\left(w_1(\xi),\ldots,w_\nu(\xi)\right) = w_i\left(f^{\#}(\xi)\right) \qquad (i=1,2,\ldots\nu)$$

On appelle alors trajectoire entière (formelle) de f la donnée de telles w_i et d'une telle $f^{\#}$, définies à un changement de paramétrage près :

(5.4.6) $$\xi \longmapsto \overset{-1}{k}(\xi) \;;\; w_i \longmapsto w_i\circ k \quad ;\; f^{\#} \longmapsto \overset{-1}{k}\circ f^{\#}\circ k$$

Une trajectoire entière est dite analytique si les $w_i(\xi)$ peuvent être choisis simultanément analytiques.

Proposition 5.4.3 (Critère d'existence et d'analycité des trajectoires entières)

Tout rayon propre $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu)$ à directeurs non résonnants possède une trajectoire entière Γ qui lui est tangente et l'analycité de Γ équivaut à la nullité des invariants cruciaux :

(5.4.7) $$\overset{1}{A}_\omega(0) = \overset{2}{A}_\omega(0) = \ldots \overset{\nu-1}{A}_\omega(0) = 0 \qquad (\forall\omega\in\Omega_p)$$

Remarque 1 : (Paramétrages canoniques de Γ)

L'application $z \longmapsto x(z;0)$ constitue un paramétrage canonique mais non entier de la trajectoire entière Γ . En revanche, l'application :

$$\mathbf{z} \longmapsto \underset{\sim}{x}(\mathbf{z};0) = x(z;0) \qquad (\text{pour } z = \mathbf{z} + p\log\mathbf{z})$$

conduit à un paramétrage canonique et entier de Γ . Il suffit pour cela de poser $\mathbf{z} = \xi^{-p}$. Toutefois, même lorsque Γ est analytique, ce paramétrage canonique entier de Γ n'est généralement pas analytique.

Remarque 2 : (Invariants du difféo induit $f^{\#}$)

Lorsque Γ est analytique, le difféo à une variable $\xi \longmapsto f^{\#}(\xi)$ est analytique (pour un bon choix de ξ) et à ce titre il possède, d'après la section 5.1, une infinité d'invariants holomorphes $\mathbb{A}^{\#}_\omega$ qui sont ipso facto des invariants holomorphes de f (cf. proposition 5.1.1). Ces scalaires invariants

$A^{\#}_{\omega}$ attachés à $f^{\#}$ ne sont d'ailleurs autres que les scalaires invariants $A^{0}_{\omega}(0)$ attachés à f . Ou si l'on préfère : les opérateurs invariants $\mathbb{A}^{\#}_{\omega}$ attachés à $f^{\#}$ s'obtiennent en "annulant u " dans les opérateurs invariants $\mathbb{A}_{\omega}$ attachés à f .

Remarque 3 : (Trajectoires entières non analytiques)

Lorsqu'au contraire Γ n'est pas analytique, tous les "bons" paramétrages ξ (notamment ceux pour qui $w_i(\xi) \equiv \xi$ pour l'un des i) rendent la fonction $f^{\#}(\xi)$ résurgente par rapport à $z = \xi^{-p}$. Si en outre les invariants semi-cruciaux (5.4.4) ne sont pas nuls, cette unique fonction résurgente recèle à elle seule toute l'information invariante (attachée au rayon γ).

Preuve de la proposition 5.4.3 :

Au prix d'un changement de variables linéaire on peut toujours faire en sorte que le rayon propre $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\nu)$ ait ses coordonnées toutes $\neq 0$. Désignons par $x(z;u) = \sum u^n . z^{[n]} . \Phi^n$ l'intégrale formelle relative à γ et pour toute paire i,j définissons une série formelle $h_{i,j}$ par :

$$(5.4.8) \qquad \Phi^{0}_{i} = (h_{ij}) \circ (\Phi^{0}_{j}) \qquad \text{avec} \quad h_{ij}(\xi) \in \mathbb{C}[[\xi]] \qquad (1 \le i,j \le \nu)$$

D'après les théorèmes sur la composition des fonctions résurgentes, $h_{ij}(\xi)$ est résurgente en $z = \xi^{-p}$. Si l'on désigne par $\dot{\Delta}_{\omega}$ la dérivation étrangère pointée par rapport à z , on aura en application de la règle (1.3.61)

$$(5.4.9) \qquad \dot{\Delta}_{\omega} \Phi^{0}_{i} = \left(\dot{\Delta}_{\omega} h_{ij}\right) \circ \left(\Phi^{0}_{j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} h_{ij}\right) \circ \left(\Phi^{0}_{j}\right) . \left(\dot{\Delta}_{\omega} \Phi^{0}_{j}\right)$$

Or des équations (5.3.15) on tire :

$$(5.4.10) \qquad \dot{\Delta}_{\omega} \Phi^{0}_{i} = e^{-\dot{\omega} z} \left[A^{0}_{\omega}(0) \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{0}_{i} + \sum_{k=1}^{\nu-1} A^{k}_{\omega}(0) \, \Phi^{n^k}_{i} \right]$$

où n^k désigne le multiindice $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ dont la k-ième composante vaut 1 et toutes les autres 0. Compte tenu de la relation (5.4.10) et de celle qu'on en déduit en remplaçant i par j, (5.4.9) s'écrit :

$$(5.4.11)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi_j^\circ\right)\cdot\left(\dot{\Delta}_\omega h_{ij}\right)\circ\left(\varphi_j^\circ\right) = e^{-\dot{\omega} z}\sum_{k=1}^{\nu-1} A_\omega^k(0)\ \text{dét}\begin{bmatrix}\Phi_i^{n^k} & \Phi_j^{n^k}\\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi_i^\circ & \frac{\partial}{\partial z}\Phi_j^\circ\end{bmatrix}$$

On remarque que le terme $A_\omega^\circ(0)$ ne figure pas dans (5.4.11). Puisque $h_{ii}(\xi)\equiv\xi$ l'analycité de la trajectoire entière Γ tangente à γ entraine l'analycité des h_{ij} donc la nullité des $A_\omega^k(0)$ au second membre de (5.4.11). Inversement, la nullité des $A_\omega^k(0)$ montre que les fonctions h_{ij}, qui sont a priori résurgentes en z, sont en fait analytiques en $\xi = z^{-1/p}$. D'où, pour tout i_0 fixé, l'existence pour la trajectoire Γ du paramétrage entier et analytique $x_i(\xi) = h_{ii_0}(\xi)\quad(1\leq i\leq \nu)$

SECTION 5.5 : CAS DE DIRECTEURS RESONNANTS. CONSIDERATIONS GEOMETRIQUES. DIFFEOS A PARTIE LINEAIRE NILPOTENTE.

Aux sections précédents nous avons réglé le cas générique, c'est-à-dire celui où f n'avait que des rayons propres isolés (donc en nombre fini N) et aux directeurs non résonnants $(p=0)$. Examinons maintenant les cas exceptionnels, dans le même ordre exactement qu'à la section 4.3 (consacré aux champs de vecteurs) pour bien faire ressortir les différences entre champs et difféos. Tout comme à la section 4.3 on commence par supposer (dans les trois premiers cas) qu'il n'a a ni quasi-résonance ni nihilence , ce qui écarte les invariants métaholomorphes.

a) Premier cas : le difféo f n'a que des rayons isolés et à directeurs sans résonance positive $(p^+=0)$

On admet ici de la résonance virtuelle entre directeurs $(p_-\geqslant 0)$ mais cela ne change rien : les propositions de la section 5.3 restent en vigueur et contiennent de livrer des systèmes complets et libres d'invariants holomorphes.

b) Deuxième cas : le difféo f n'a que des rayons isolés mais l'un d'eux (au moins) a ses directeurs en résonance positive $(\mu^+ > 0)$

On voit alors apparaître un phénomène nouveau : celui des générations multiples. Les composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle ne sont plus des séries entières de la seule variable $z^{-1/p}$ mais d'une variable additionnelle $z_1^{-1/p}$ (et exceptionnellement de $z_2^{-1/p}$, $z_3^{-1/p}$ etc...) où les z_i sont les temps parallèles introduits aux §§ 9.2 et 9.4. Le i-ème temps est grosso modo un logarithme itéré de z :

(5.5.1) $$z_i \sim \log \log \dots \log z \quad (i \text{ fois})$$

A chaque i correspondent de la résurgence en z et des invariants holomorphes "de i-ième génération" qui sont constructibles grâce au calcul étranger. Pour les énoncés précis, voir les §§10.3 et 10.4.

Notons qu'à la différence des champs de vecteurs, où l'introduction du temps parallèle z_1 était facultative (dans le cas de deux générations : voir § 4.3.b) celle-ci devient absolument indispensable dans le cas des difféos.

c) Troisième cas : le difféo f possède des rayons dégénérés ou non isolés.

Ce cas exceptionnel se subdivise en plusieurs sous-cas (niveaux multiples, générations multiples, ou les deux à la fois) qui tombent tous sous le coup des méthodes universelles du chapitre 9.

d) Incidence de la nihilence et de la quasi-résonance.

Sur chacun des trois premiers cas peuvent venir se greffer de la nihilence (génératrice de petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) ou de la quasi-résonance (génératrice de tout petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) mais en général sans détruire la résurgence et sans interférer avec le calcul des invariants holomorphes. Voir à ce sujet la section 10.4.

SECTION 5.6. CONTRAINTES A PRIORI ENTRE INVARIANTS HOLOMORPHES.

On a vu que les difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu$ tangents à l'identité avaient des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ dont les coefficients se présentaient comme séries formelles de $\nu-1$ paramètres u_i, dits "de seconde génération". Ces séries entières, bien que généralement divergentes, ne sont évidemment pas quelconques et il s'agit de décrire précisément leur forme. On a aussi noté que l'ensemble des $\mathbb{A}_\omega$ attachés à l'une quelconque des N intégrales formelles constituait un système complet d'invariants holomorphes de f. Les $\mathbb{A}_\omega$ relatifs aux autres intégrales formelles s'en déduisent donc et il s'agit de montrer comment.

La réponse aux deux problèmes est apportée par les "contraintes en u". Les $\mathbb{A}_\omega$ se trouvent en effet être résurgents en les u_i, ou plus exactement en des paramètres t_i élémentairement liés à ces u_i, et vérifier des équations de résurgence remarquables, de type rigide (cf. §11.10) qui les relient tantôt à eux-mêmes (c'est la réponse au premier problème) et tantôt entre eux (c'est la réponse au second problème).

La résurgence en question est très spécifique. On l'appelle résurgence collatérale (voir §11.9). Comme elle intéresse surtout la synthèse des objets locaux, c'est dans [E4] que nous l'étudierons en détail. Mais on peut aussi très facilement s'en faire une idée sur le cas des champs locaux à plusieurs degrés de résonance. Voir §6.9. Le lecteur qui veut s'initier au phénomène directement sur les difféo tangents à l'identité, peut raisonner sur des difféos f de la forme :

$$(5.6.1) \qquad f = {}^\circ f + \varepsilon\,\Psi \quad : \quad x_i \mapsto {}^\circ f_i(x) + \varepsilon\,\Psi_i(x) \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

où ${}^\circ f$ est l'exponentielle d'un champ de vecteurs élémentaire :

$$(5.6.2) \qquad {}^\circ X = \sum_{i=1}^{\nu} {}^\circ X_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (X_i \text{ homogène de degré } p+1)$$

avec des $\Psi_i(x)$ analytiques et commençant par des termes de degré $>2p$ et avec ε pris infinitésimal d'abord, fini ensuite.

Le cas $\nu = 1$ (Pas de paramètre u_i)

En l'absence de u_i , il n'y a évidemment rien à dire !

Le cas $\nu = 2$ (Un seul paramètre u_i)

Pour chaque rayon propre γ , de directeur $\lambda = \lambda(\gamma)$, on pose $u_i = t^{-\lambda}$ et on montre que les A_ω sont résurgents en t et vérifient des équations du type (6.9.37).

Le cas $\nu \geqslant 3$ (Plusieurs paramètres u_i)

Chaque u_i est accompagné d'un directeur $\lambda_i = \lambda_i(\gamma)$. On peut alors, au choix, faire $u_i \mapsto u_i t^{-\lambda_i}$ ou $u_i \mapsto t_i^{-\lambda_i}$ et on a résurgence en t ou t_i . Voir §6.9.

CHAPITRE 6 : CLASSIFICATION DES CHAMPS DE VECTEURS A PARTIE LINEAIRE RESONNANTE.

SECTION 6.1. LE CAS DE MULTIPLICATEURS NON RESONNANTS. THEOREME DE SIEGEL-BRJUNO.

Nous allons dans ce chapitre étudier les champs de vecteurs analytiques (locaux, singuliers) les plus généraux :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_i(0) = 0 \\ X_i(x) = \sum \alpha_{ij} x_j + (\ldots) \\ X_i(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\} \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Tout tourne autour des multiplicateurs de X, qui sont les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu$ de la matrice $[\alpha_{ij}]$ fabriquée avec la partie linéaire de X. Plus précisément, tout dépend despropriétés de résonance (*) ou de quasi-résonance (*) des λ_i. On sait en effet depuis longtemps que :

Proposition 6.1.1. (Linéarisation des champs de vecteurs; Siegel, 1941; Brjuno, 1971).

Tout champ analytique local aux multiplicateurs sans résonance positive ($\rho^+=0$) ni quasi-résonance positive ($\rho^+_{\text{quasi}} = 0$) est analytiquement linéarisable (**).

Cela veut dire qu'il existe un changement de variables analytique inversible $x_i \mapsto y_i$ qui met X sous la forme canonique de Jordan :

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1})\frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (\text{avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1) \tag{6.1.2}$$

Pour la démonstration, voir [Sg.2] et [Br.1]. Les champs de ce type ne possèdent donc que leurs multiplicateurs λ_i (plus les ε_i correctifs) pour invariants formels et ils ne possèdent aucun invariant analytique. Nous pouvons donc les oublier. Restent les champs dont les multiplicateurs présentent de la résonance positive $(\rho^+ > 0)$ ou de la quasi-résonance positive $(\rho^+_{\text{quasi}} > 0)$. Or, a elle seule, la quasi-

(*) Voir les définitions exactes en § 1.2.

(**) Pour les contributions respectives de Siegel et Brjuno, voir Chapitre 9.

résonance positive n'engendre que des invariants métaholomorphes, qui ne sont pas constructibles (voir § 9.5). Ceci ne nous laisse donc que la résonance positive. Nous commencerons (§ 6.2) par le cas d'un seul degré de résonance positive qui est le plus simple, puis nous verrons (§ 6.3) ce qui se passe en présence de résonance virtuelle $\left(\rho^+ = 1 , \rho_- > 0\right)$, et enfin nous traiterons (§§ 6.4,6.5,6.6) le cas général (ρ^+ , ρ_- quelconques). Nous examinerons aussi (§ 6.7) les divers cas exceptionnels, ceux notamment où de la quasi-résonance ou de la nihilence (*) vient s'ajouter à la résonance.

SECTION 6.2. LE CAS A UN DEGRE DE RESONANCE. INVARIANTS HOLOMORPHES.

Commençons donc par étudier le cas $\rho^+ = 1 , \rho_- = 0$, car c'est le plus simple des cas intéressants. Les multiplicateurs λ_i du champ analytique X vérifient alors une seule relation de résonance qui, pour une indexation convenable, peut s'écrire :

(6.2.1) $$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots m_K\lambda_K = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} 0 < K \leqslant \nu \text{ et des } m_i \text{ entiers} > 0 \\ \text{et premiers entre eux.} \end{cases}$$

Comme en outre $\rho_- = 0$, les multiplicateurs $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_K, \lambda_{K+1}, \dots, \lambda_\nu$ sont rationnellement indépendants et on suppose aussi qu'ils sont sans quasi-résonance positive $\left(\rho^+_{\text{quasi}} = 0\right)$.

<u>Proposition 6.2.1.</u> <u>(Forme prénormale; A.D. Brjuno)</u>.

Il existe des changements de variables formels $x_i \mapsto y_i$ (il en existe beaucoup, mais en général aucun n'est analytique) qui mettent le champ X sans forme dite <u>prénormale</u> :

(6.2.2) $$Y = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \sum_{q=1}^{\infty} b_{i,q}\, y^{qm} \right) y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

(*) Contrairement à la quasi-résonance, la nihilence <u>suppose</u> la résonance positive des multiplicateurs.

<u>avec bien sûr</u>

(6.2.3) $$y^{qm} = y_1^{qm_1} \cdots y_K^{qm_K}$$

<u>où les</u> m_i <u>sont les coefficients de résonance (6.2.1)</u>.

La démonstration est élémentaire : on identifie terme à terme des coefficients de séries formelles. Signalons que A.D. Brjuno qualifie la forme (6.2.2) de <u>normale</u> bien qu'elle ne soit pas unique. Ici, au contraire, nous réservons systématiquement ce qualificatif de normal aux formes (toujours en nombre fini) dont les coefficients sont des invariants formels. Heureusement, on passe facilement des formes prénormales aux formes normales :

<u>Proposition 6.2.2.</u> (<u>Forme normale</u>)

Parmi les formes prénormales (6.2.2) il est existe une et une seule qui s'écrive :

(6.2.4) $$Y = \frac{1}{1+\rho y^{pm}} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \sum_{q=1}^{p} \beta_{i,q}\, y^{qm}\right) y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (1 < p \leq \infty)$$

avec

(6.2.5) $$\sum_{i=1}^{K} m_i \beta_{i,p} = -\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{K} m_i \beta_{i,q} = 0 \quad \text{si } q \leq p$$

Cette forme est dite <u>normale</u> et ses coefficients (en nombre fini si $p < \infty$) sont les seuls invariants formels du champ. L'entier p est dit <u>niveau</u> du champ et le complexe ρ (défini si $p < \infty$) est dit <u>résiduit</u> du champ.

Là encore, la démonstration est élémentaire : on montre qu'il existe des coefficients $c_{i,q}$ tels que le changement de variables formel

(6.2.6) $$y_i \longmapsto y_i \sum_{q=0}^{\infty} c_{i,q}\, y^{qm} \qquad \left(y = \prod_i y_i^{m_i}\right)$$

fasse passer de la forme prénormale à la forme normale. Cette dernière va directement nous donner l'intégrale formelle. Mais auparavant, introduisons quelques notations commodes qui serviront dans toute la suite.

Définition 6.2.1. (Réseaux $\Omega^{int} \subset \Omega \subset \Omega^{ext}$)

Avec les multiplicateurs λ_i du champ X on fabrique trois "réseaux" :

$$\Omega = \left\{\omega\,;\ \omega = \sum_{j=1}^{\nu} n_j\lambda_j \text{ ou } -\lambda_i + \sum_{j\neq i} n_j\lambda_j \text{ avec } n_j \geq 0\right\} \qquad \text{("réseau")}$$
$$\Omega^{int} = \lambda_1\mathbb{Z} + \dots \lambda_K\mathbb{Z} \qquad \text{("réseau intérieur")}$$
$$\Omega^{ext} = \lambda_1\mathbb{Z} + \dots \lambda_K\mathbb{Z} + \dots \lambda_\nu\mathbb{Z} \qquad \text{("réseau extérieur")}$$

Bien qu'on parle abusivement de réseaux, Ω, Ω^{int} et Ω^{ext} peuvent très bien être denses dans $\mathbb{C}$. De plus (sauf si $K = \nu$) le réseau Ω n'est ni un groupe ni un semi-groupe. En fait Ω^{int} (resp. Ω^{ext}) est le plus grand sous-groupe de Ω (resp. son plus petit sur-groupe)

Fixons une base $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\nu-1}^*$ du réseau Ω, par exemple en posant :

$$(6.2.7) \qquad \begin{cases} \lambda_i^* = \lambda_i \dfrac{n_i}{n_1 n_2 \dots n_K} & \text{si } 1 \leq i < K \\ \lambda_i^* = \lambda_{i+1} & \text{si } K \leq i < \nu \end{cases}$$

les premiers λ_i^* peuvent ne pas appartenir à Ω mais tout élément de Ω s'écrit d'une manière unique :

$$(6.2.8) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i\lambda_i^* \quad \text{avec } n_i \in \mathbb{Z} \text{ et } n_K, n_{K+1}, \dots, n_{\nu-1} \geq -1$$

Appelons $\mathcal{N}$ la partie de $\mathbb{Z}^{\nu-1}$ que parcourt $n = (n_1, \dots, n_{\nu-1})$ lorsque ω parcourt Ω. On a donc une bijection de $\mathcal{N}$ sur Ω :

$$(6.2.9) \qquad n \longmapsto \omega(n)^{\bullet} = \langle n, \lambda^* \rangle$$

et une bijection inverse :

$$(6.2.10) \qquad \omega \longmapsto n(\omega) = (n_1(\omega), \dots, n_{\nu-1}(\omega))$$

Définition 6.2.2. (relation d'antécédence $\ll$ sur $\mathcal{N}$)

Pour $\omega, \omega' \in \Omega$ on écrit $\omega \ll \omega'$ (ω antécédent à ω') lorsque $\omega' - \omega \in \Omega$. Par bijection cette relation s'étend à $\mathcal{N}$:

(6.2.11) $$(n \ll n') \iff (n' - n \in \mathcal{N})$$

l'antécédence sur $\mathcal{N}$ n'est pas un ordre(*) et elle n'a rien à voir avec l'ordre naturel sur $\mathcal{N}$ induit par $\mathbb{Z}^{\nu-1}$.

Définition 6.2.3. (forme σ)

Reprenons les scalaires invariants $\beta_{i,p}$ des formules (6.2.4) + (6.2.5) et posons, pour tout élément $n = (n_1, \ldots, n_{\nu-1})$ de $\mathcal{N}$:

(6.2.12) $$\left\{ \sigma(n) = \underset{\substack{r_1\lambda_1 + \ldots r_\nu\lambda_\nu = n_1\lambda_1^* + \ldots n_{\nu-1}\lambda_{\nu-1}^* \\ r_i \text{ entiers tous} \geq 0 \text{ sauf au plus un qui peut valoir } -1}}{\text{"sup réel"}} \left(r_1\beta_{1,p} + \ldots + r_\nu\beta_{\nu,p}\right) \right.$$

Ici "sup réel" signifie "celui des nombres complexes $\sum_i r_i\,\beta_{i,p}$ qui a la plus grande partie réelle". A cause de (6.2.1) et (6.2.5) ce nombre existe et est fini.

Lemma 6.2.1. (Suradditivité de σ)

La forme σ est additive en n modulo $1/p$. Plus précisément, pour tous $n, n' \in \mathcal{N}$ on a :

(6.2.13) $$\sigma(n + n') = \sigma(n) + \sigma(n') + \frac{q(n,n')}{p} \quad \text{avec } q(n,n') \in \mathbb{N}$$

Cela résulte directement de (6.2.1) et (6.2.5).

Proposition 6.2.3. (Allure et unicité de l'intégrale formelle)

Soit X un champ analytique à un degré de résonnance $(\underline{\nu}^+ = 1, \underline{\nu}_- = 0)$. Soir p son niveau ($p < \infty$) et ρ sont résiduit. Définissons σ comme en (6.2.12) et introduisons le temps perturbé $\mathfrak{z}$:

(6.2.14) $$z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$$

(*) Car $\mathcal{N}$ n'est pas un semi-groupe.

Alors X possède une intégrale formelle du type :

(6.2.15) $$x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n . z^{[n]} . \Phi^n(z)$$

soit plus explicitement :

(6.2.15bis) $$x_i(z;u_1,\dots,u_{\nu-1}) = \sum_{(n_j)\in\mathcal{N}} u_1^{n_1}\dots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} . z^{[n_1,\dots,n_\nu]} \Phi_i^{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(z) \quad (1\leq i\leq \nu)$$

avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$ de la forme :

(6.2.16) $$z^{[n]} = z^{\sigma(n)} e^{\omega(n) z} \prod_{q=1}^{p-1} e^{\omega_{p/q}(n) z^{q/p}} \qquad (*)$$

et avec des composantes Φ^n qui sont des séries formelles en $z^{-1/p}$:

(6.2.17) $$\Phi_i^{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1/p}]]$$

Cette intégrale formelle est unique modulo un reparamétrage élémentaire :

(6.2.18) $$z \mapsto z + c_0 \quad ; \quad u_i \mapsto c_i u_i \qquad (c_0\in\mathbb{C},\ c_i\in\mathbb{C}^*)$$

<u>Preuve</u> : Par rapport aux coordonnées normales (6.2.4) le système dynamique s'écrit :

(6.2.18) $$\left(\frac{\partial}{\partial z} y_i\right)/y_i = (1+\rho\, y^{pm})^{-1} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \sum_{q=1}^{p} \beta_{i,q}\, y^{qm}\right)$$

Compte tenu de (6.2.5) cela donne :

(6.2.19) $$\left(\frac{\partial}{\partial z} y^m\right)/y^m = -\frac{1}{p} \cdot \frac{y^{pm}}{1+\rho\, y^{pm}}$$

D'où l'intégrale :

(6.2.20) $$y^m(z) = z^{-1/p} \qquad \text{avec } z \text{ comme en } (6.2.14)$$

Portant (6.2.20) dans (6.2.18) on obtient par simple quadrature :

(*) avec $\omega_{q/p}(n) = \frac{p}{p-q} \sum_{i=1}^{\nu-1} \beta_{i,q} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_i}$

(6.2.21) $$y_i(z;u) = u_i\,(z)^{\beta_{i,0}} \exp\Big(\sum_{q=1}^{p} \lambda_{i,q}\, z^{q/p}\Big) \qquad (u_i = \mathrm{Cste})$$

avec

(6.2.22) $$\lambda_{i,q} = \frac{p}{q}\, \beta_{i,p-q} \qquad \text{et en particulier} \qquad \lambda_{i,p} = \lambda_i$$

Si maintenant $x_i = h_i(y_1, \ldots, y_\nu)$ désigne le changement de variables formel qui fait passer des coordonnées initiales

(6.2.23) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}$$

aux coordonnées normales (6.2.4), l'intégrale formelle $x(z;u)$, solution de :

(6.2.24) $$\frac{\partial}{\partial z}\, x_i(z;u) = X_i\,(x(z;u))$$

s'écrit :

(6.2.25) $$x_i(z;u) = h_i\,(y_1(z;u), \ldots, y_\nu(z;u))$$

et elle est manifestement du type (6.2.13) + (6.2.16) + (6.2.17) avec des coefficients $\lambda^*_{i,q}$ facilement déduisibles des $\lambda_{i,q}$.

Abordons maintenant la construction des invariants holomorphes et commençons par le cas où le réseau intérieur Ω^{int} est discret. Notons que Ω^{int} est toujours discret lorsque $K=1$ (alors $\lambda_1 = 0$) ou $K=2$ et qu'il l'est généralement lorsque $K=3$. Notons aussi que la discrétude de Ω^{int} ne restreint aucunement la dimension ν du champ, dimension qui peut être aussi grande que l'on veut.

Proposition 6.2.4. (Le cas Ω^{int} discret. Résurgence de l'intégrale formelle)

Les composantes $\varphi^n(z)$ de l'intégrale formelle $x(z;u)$ sont résurgentes en z . Leur réseau de résurgence est Ω_p . Pour tout $\omega \in \Omega_p$ (relevé de Ω sur $\mathbb{C}_p$) elles vérifient les équations de résurgence :

(6.2.26) $$e^{-\dot\omega z}\, \Delta_\omega\, x_i(z;u) = u_1^{n_1(\dot\omega)} \cdots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}(\dot\omega)} \Big\{ A^0_\omega \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-1} A^j_\omega u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \Big\}\, x_i(z;u)$$
$$(A^j_\omega \in \mathbb{C})$$

soit sous forme condensée :

$$(6.2.27)\qquad \dot{\Delta}_{\omega}\ x(z;u) = \mathbb{A}_{\omega}\ x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

avec les dérivations étrangères pointées $\dot{\Delta}_{\omega}$ et les opérateurs différentiels ordinaires :

$$(6.2.28)\qquad \mathbb{A}_{\omega} = u_1^{n_1(\dot\omega)} \dots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}(\dot\omega)} \left\{ A^0_{\omega} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-1} A^j_{\omega} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

Pour la démonstration, voir après la proposition 6.2.5. Rappelons que les dérivations étrangères sont prises par rapport au temps ordinaire z bien que l'intégrale formelle s'exprime plus directement en fonction du temps perturbé $\mathfrak{z}$. Bien entendu, les équations de résurgence ci-dessus sont des écritures condensées qui doivent s'interprêter composante par composante. Voyons donc l'effet de Δ_{ω_0} sur la composante Φ^n . L'équation (6.2.26) fournit :

$$(6.2.29)\qquad \Delta_{\omega_0} \Phi^n = \mathfrak{z}^{\dot\omega_0 p + \sigma(n^*) - \sigma(n)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \log \mathfrak{z}^{[n^*]} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A^0_{\omega_0} + \sum_{i=1}^{\nu-1} n^*_i A^i_{\omega_0} \right] \Phi^{n^*}$$

avec $n, n^0, n^* \in \mathcal{N}$ (pour $n = n^0 + n^*$ et n^0 image de $\dot\omega_0$ dans $\mathcal{N}$) et avec :

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \mathfrak{z}^{[n^*]} = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \log \mathfrak{z}^{[n^*]} \right) = (1 + p/\mathfrak{z})^{-1} \left[\omega(n^*) + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{q}{p}\, \omega_{\frac{q}{p}}(n^*)\, \mathfrak{z}^{\frac{q}{p}-1} + \sigma(n^*)\, \mathfrak{z}^{-1} \right]$$

On ferait l'économie du facteur $\mathfrak{z}^{\dot\omega_0 p}$ en dérivant étrangement par rapport à $\mathfrak{z}$ au lieu de z . En effet d'après la formule (1.3.61) :

$${}^{\mathfrak{z}}\Delta_{\omega_0} = e^{-\dot\omega_0 (z - \mathfrak{z})}\, {}^{z}\Delta_{\omega_0} = (\mathfrak{z})^{-p\dot\omega_0}\, \Delta_{\omega_0} \qquad (*)$$

D'où :

$$(6.2.30)\qquad {}^{\mathfrak{z}}\Delta_{\omega_0} \Phi^n = \mathfrak{z}^{\sigma(n^*) - \sigma(n)} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \log \mathfrak{z}^{[n^*]} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A^0_{\omega_0} + \sum_{i=1}^{\nu-1} n^*_i A^i_{\omega_0} \right] \Phi^{n^*}$$

C'est dans le cas-type $(p, p) = (1, 0)$ que la formule se simplifie au maximum. Elle devient :

(*) ${}^{z}\Delta_{\omega_0}$ et ${}^{\mathfrak{z}}\Delta_{\omega_0}$ désignent bien sûr les dérivations étrangères par rapport aux variables z et $\mathfrak{z}$.

$$\Delta_{\omega_0} \Phi^n = z^{\sigma(n^*)-\sigma(n)} \left[\left(\omega(n^*) + \frac{\sigma(n^*)}{z} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A^0_{\omega_0} + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_{\omega_0} \right] \Phi^{n^*} \tag{6.2.31}$$

Remarque sur la disposition des singularités.

L'intégrale formelle $x(z;u)$ a une transformée de Borel $\hat{x}(\zeta;u)$ dont les singularités $(\text{en } \zeta)$ se projettent sur le réseau extérieur Ω^{ext} tout entier. On s'aperçoit en effet en itérant la formule (6.2.29) que les opérateurs étrangers susceptibles d'agir (avec un résultat non nul) sur la composante Φ^n sont de la forme :

$$\Delta = \Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} \qquad (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r \in \Omega_p)$$

avec des inégalités :

$$\dot{\omega}_1 , \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 , \ldots , \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \ldots \dot{\omega}_r \ll \omega(n) = \text{image de } n \text{ dans } \Omega$$

où $\ll$ désigne la relation d'antécédence dans Ω (voir définition 6.2.2). Il en résulte facilement que les singularités de la transformée de Borel $\boldsymbol{\Phi}^n(\zeta)$ se projettent sur un ensemble $\Omega(n)$ contenu dans Ω^{ext} et coincidant avec la totalité (resp. une partie) de l'ensemble $\omega(n) - \Omega$ si les invariants cruciaux (6.2.72) introduits ci-après sont tous non nuls (resp. si certains d'entre eux sont nuls). Mais dans tous les cas on a $\bigcup_{n \in N} \Omega(n) = \Omega^{ext}$. Ceci conduit à distinguer trois cas :

(i) Ω <u>est discret</u> (<u>mais pas forcément</u> Ω^{ext})

Alors chaque composante $\boldsymbol{\Phi}^n(\zeta)$ a des singularités qui se projettent sur une partie discrète de $\mathbb{C}$.

(ii) Ω <u>n'est pas discret, mais</u> Ω^{int} <u>l'est.</u>

Alors chaque composante $\boldsymbol{\Phi}^n(\zeta)$ a des singularités qui se projettent sur une partie non discrète de $\mathbb{C}$. Cette partie peut très bien être dense dans $\mathbb{C}$ tout entier, mais ceci ne contredit pas la propriété de "prolongeabilité sans coupure" des fonctions résurgentes : en effet, sur chaque feuillet de $\boldsymbol{\Phi}^n(\zeta)$, on a une répartition discrète des singularités. Ce n'est qu'en totalisant les feuillets et en projettant qu'on trouve une répartition dense.

(iii) Ω^{int} n'est pas discret.

C'est un cas que nous avons pour l'instant écarté et qui sera examiné un peu plus loin. On verra que les $\Phi^n(z)$ ont des singularités denses sur tous les feuillets. Ce ne sont plus des fonctions analytiques au sens ordinaire (Weierstrass) mais au sens "monogène" de Borel. On parle alors de résurgence généralisée. La forme des équations de résurgence reste inchangée (Voir ci-après).

Proposition 6.2.5. (Le cas Ω^{int} discret. Invariants holomorphes)

Les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ sont entièrement caractérisés par (6.2.27) et calculables à partir de (6.2.27). Ce sont des invariants holomorphes. Ensemble, ils constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes du champ X .

Schéma de démonstration des proposition 6.2.4 et 6.2.5.

Les composantes de l'intégrale formelle vérifient ici des équations de la forme :

$$\text{(6.2.32)} \quad \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\log z^{[n]}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\right] \Phi^n = \left\{ \Phi^{n^1}, \Phi^{n^2}, \dots \right\} \qquad (n^1, n^2 \dots \ll n)$$

avec $$\frac{\partial}{\partial z} \log z^{[n]} = (1 + \rho/z)^{-1} \left(\omega(n) + \sum_{q=1}^{p} \tfrac{q}{p}\,\omega_{q/p}(n)\, z^{q/p - 1} + \tau(n)\, z^{-1}\right)$$

et avec un second membre $\{\Phi^{n^1}, \dots\}$ qui est fonction des seules composantes d'indice antécédent à n . Malheureusement chaque $n \in \mathcal{N}$ a une infinité d'antécédents(*) et de toute façon l'antécédence $\ll$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathcal{N}$. Par suite, et bien que la résurgence du second membre de (6.2.32) entraîne celle de Φ^n , on ne peut pas tirer de (6.2.32) une démonstration par récurrence complètement analogue à celle des démonstrations 5.3.2 et 5.3.3. On tourne la difficulté en soumettant le champ X à un changement de variables analytique qui le rende

(*) sauf si $\kappa = 1$ car alors $\Omega^{int} = \{0\}$

"proche" de la forme normale (6.2.4), autrement dit qui lui donne la forme dite "préparée" :

$$(6.2.33)\quad \begin{cases} X = {}^{\circ}X + \mathbb{D} \quad \text{avec} \\ {}^{\circ}X = (1+\rho\, x^{p.m})^{-1} \sum_{i=1}^{\nu} \left[\lambda_i + \sum_{q=1}^{r} \beta_{i,q}\, x^{q.m}\right] x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \mathbb{D} = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{\|n\| > \|m\|} a_i^n\, x^n \right) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

avec des scalaires $\beta_{i,q}$ vérifiant (6.2.5). C'est possible. En effet, bien que X ne soit généralement pas analytiquement conjugable à sa forme normale ${}^{\circ}X$, un changement de variable analytique (et même polynomial si l'on veut) permet toujours de le mettre sous la forme ${}^{\circ}X + \mathbb{D}$, avec $\mathbb{D}$ nul jusqu'à un ordre donné mais arbitraire (il suffit pour nos besoins que $\mathbb{D}$ soit nul d'ordre $\|m\| = m_1 + \dots m_K$)

On plonge ensuite le champ X dans une famille de champ ${}^{\varepsilon}X$:

$$(6.2.34)\quad {}^{\varepsilon}X = {}^{\circ}X + \varepsilon\, \mathbb{D} \quad , \quad X = {}^{1}X$$

et on développe en puissance de ε l'intégrale formelle ${}^{\varepsilon}x$ du champ ${}^{\varepsilon}X$:

$$(6.2.35)\quad \begin{cases} {}^{\varepsilon}x(z;u) = \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r\, x(z;u\|r) \\ \Phi^n(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r\, \Phi^{n\|r}(z) \end{cases}$$

Portant ceci dans (6.2.32) on obtient une récurrence véritable sur les $\Phi^{n\|r}$ et on montre sans peine la résurgence en z de $x(z;u\|r)$. Plus précisément, on montre que :

$$\Delta_{\omega_q} \dots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1}\, x(z;u\|r) \equiv 0 \qquad \text{si } q > r$$

et qu'il existe des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_{\omega\|r}$ de la forme (6.2.28) et tels que l'on ait modulo ε^{q+1} :

$$(6.2.36)\quad \sum_{r \geq 0} \varepsilon^r\, \dot{\Delta}_\omega\, x(z;u\|r) = \left(\sum_{r \geq 1} \varepsilon^r\, \mathbb{A}_{\omega\|r}\right)\left(\sum_{r \geq 0} \varepsilon^r x(z;u\|r)\right)$$

et ceci pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $q \in \mathbb{N}$. Passant ensuite aux transformées de

Borel (en z) on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \, \Phi^{n\|n}(\zeta)$ converge uniformément en ζ sur tout compact d'une surface de Riemann fixe. On vérifie de même que pour toute paire (ω,ε) , la série d'opérateurs $\sum_{n\geq 1} \varepsilon^n \mathbb{A}_{\omega\|n}$ converge vers une limite ${}^{\varepsilon}\mathbb{A}_{\omega}$. On montre alors l'invariance de cette limite ${}^{\varepsilon}\mathbb{A}_{\omega}$ en employant l'argument standard. Voir par exemple la démonstration de la proposition 5.3.4. Enfin, pour prouver que les $\mathbb{A}_{\omega}$ constituent un système <u>complet</u> d'invariants holomorphes, on montre, à partir de la non quasi-résonance des λ_i , que l'intégrale formelle est <u>analytique</u> en u , puis on recourt à un autre argument standard, déjà rencontré lors de la démonstration de la proposition 5.3.5.

Le procédé de calcul des invariants holomorphes qu'on vient d'indiquer est <u>constructif</u>, puisque (6.2.27) détermine complètement l'opérateur $\mathbb{A}_{\omega}$ et même le surdétermine, comme on le voit en prenant différents Φ^n dans la formule (6.2.29). Mais on peut encore faire mieux : on peut donner <u>explicitement</u> les $\mathbb{A}_{\omega}$ en fonction des coefficients de Taylor du champ X . Ce calcul mérite d'être fait, parce qu'il est instructif en soi et aussi parce qu'il prépare à l'étude du cas Ω^{int} dense. Pour fixer les idées, raisonnons sur le cas-type, c'est-à-dire le cas $(\mu,p) = (1,0)$. La forme <u>préparée</u> (6.2.23) du champ X est alors particulièrement simple :

$$(6.2.37)\qquad \begin{cases} X = {}^{\circ}X + \mathbb{D} \\ {}^{\circ}X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \tau_i \, x^m \right) x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ \mathbb{D} = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{\|n\|>\|m\|} a_i^n \, x^n \right) x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

avec $\|m\| = m_1 + \dots m_K$, $\|n\| = n_1 + \dots n_\nu$ et avec des complexes λ_i, τ_i vérifiant :

$$(6.2.38)\qquad \langle m,\lambda \rangle = \sum_i m_i \lambda_i = 0$$

$$(6.2.39)\qquad \langle m,\tau \rangle = \sum_i m_i \tau_i = -1$$

L'intégrale formelle ${}^{\circ}x(z;u)$ du champ ${}^{\circ}X$ est immédiate à calculer :

(6.2.40) $$ {}^{\circ}x_i\,(z\,;u) = u^{n(\lambda_i)}\; e^{\lambda_i z}\; z^{\tau_i} $$

avec

(6.2.41) $$ u^{n(\lambda_i)} = \prod_{j=1}^{\nu-1} (u_j)^{m_{ij}} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{K} \left(x_i\,(z\,;u)\right)^{m_i} = z^{-1} $$

Si on effectue le changement de variables $(x_1,\dots,x_\nu) \longmapsto (z,u_1,\dots,u_{\nu-1})$ on aura bien sûr :

(6.2.42) $$ {}^{\circ}X = \frac{\partial}{\partial z} $$

mais aussi

(6.2.43) $$ \mathbb{D} = \sum_{\omega\in\Omega} e^{\omega z} \sum_{\sigma\in\sigma((\omega))-\mathbb{N}} z^{\sigma}\, \mathbb{D}_{\omega}^{\sigma} $$

avec

(6.2.43 bis) $$ \mathbb{D}_{\omega}^{\sigma} = u^{n(\omega)} \left\{ D_{\omega}^{\sigma;0} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} D_{\omega}^{\sigma;i}\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right\} $$

où les $D_{\omega}^{\sigma;i}$ sont des scalaires et où bien sûr $\sigma((\omega)) = \sigma(n(\omega))$: on profite de la bijection $\omega \mapsto n(\omega)$ entre Ω et $\mathcal{N}$ pour considérer la forme $\sigma(n)$ indiféremment comme fonction sur $\mathcal{N}$ ou sur Ω. On aura ainsi pour tout $\omega\in\Omega$:

(6.2.44) $$ \sigma((\omega)) = \underset{\langle n,\lambda\rangle=\omega}{\text{"sup réel"}} \langle n,\tau\rangle = \underset{n_1\lambda_1+\dots n_\nu\lambda_\nu=\omega}{\text{"sup réel"}} (n_1\tau_1+\dots n_\nu\tau_\nu) \qquad (*) $$

Passons maintenant du champ $\mathbb{D}$ à un champ $\mathbb{B}$ au moyen des formules involutives :

(6.2.45) $$ \mathbb{B} = -(1+\mathbb{D}.z)^{-1}.\,\mathbb{D} \quad ; \quad \mathbb{D} = -(1+\mathbb{B}.z)^{-1}.\,\mathbb{B} $$

Tout comme le champ $\mathbb{D}$, le champ $\mathbb{B}$ s'écrit :

(6.2.46) $$ \mathbb{B} = \sum_{\omega\in\Omega} e^{\omega z} \sum_{\sigma\in\sigma((\omega))-\mathbb{N}} z^{\sigma}\, \mathbb{B}_{\omega}^{\sigma} $$

avec

(*) pour des n_i tous entiers $\geqslant 0$ (sauf au plus un qui peut être $=-1$)

(6.2.46bis) $$\mathbb{B}_\omega^\sigma = u^{n(\omega)} \left\{ B_\omega^{\sigma;0} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} B_\omega^{\sigma;i} \, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

où les $B_\omega^{\sigma;i}$ sont des scalaires.

La suite des calculs utilise les monômes de résurgence $\mathcal{V}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{\omega_1,\dots,\omega_n}(z)$ et les scalaires $V_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{\omega_1,\dots,\omega_n}$ qui ont été définis et étudiés à la section 1.4.g. Avec les $\mathbb{B}_\omega^\sigma$ on fabrique l'opérateur formel :

(6.2.47) $$\Theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega_i,\sigma_i} (-1)^n e^{(\omega_1+\dots\omega_n)z} \mathcal{V}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{\omega_1,\dots,\omega_n}(z) \, \mathbb{B}_{\omega_n}^{\sigma_n} \dots \mathbb{B}_{\omega_2}^{\sigma_2} \mathbb{B}_{\omega_1}^{\sigma_1}$$

où ω_i parcourt Ω et σ_i parcourt $\sigma((\omega_i)) - \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{D}$ et par suite $\mathbb{B}$ ne contient que des termes de degré $> \|m\|$ en x, on vérifie que (6.2.47) ne fait intervenir que des multiindices $\binom{\omega}{\sigma} = \binom{\omega_1,\dots,\omega_n}{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$ licites(*). On vérifie aussi que, comme série formelle en z^{-1} et en les u_i , Θ ne présente aucune difficulté d'interprétation : pour tout entier q et tout ω dans Ω , seul un nombre fini de termes contribuent au monôme $u^{n(\omega)} e^{\omega z} z^{\sigma((\omega))-q}$. On vérifie enfin, à partir de la table de multiplication (1.4.2) des monômes de résurgence, que Θ est un automorphisme formel. Autrement dit, pour toute paire φ_1, φ_2 dans $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ ou dans $z^\sigma \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ on a :

(6.2.48) $$\Theta(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = (\Theta\varphi_1) \cdot (\Theta\varphi_2) \quad \text{et} \quad \Theta^{-1}(\varphi_1 \varphi_2) = (\Theta^{-1}\varphi_1) \cdot (\Theta^{-1}\varphi_2)$$

D'autre part, à l'aide des formules (1.4.86) on montre que :

(6.2.49) $$\frac{\partial}{\partial z} \Theta = \Theta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{B} \right)$$

(6.2.50) $$\frac{\partial}{\partial z} \Theta^{-1} = \Theta^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{D} \right)$$

De même, utilisant la règle (1.4.3) on montre que pour tout $\omega \in \Omega$:

(*) Cela veut dire que pour aucun $s \leq n$ on ne peut avoir simultanément $\omega_1 + \dots \omega_s = 0$ et $\sigma_1 + \dots \sigma_s + \theta(\omega_1,\dots,\omega_s) = 0$ où $\theta(\omega_1,\dots,\omega_s)$ est égal au nombre de zéros [illegible] $\omega_1, \omega_1+\omega_2, \dots, \omega_1+\dots\omega_s$. Le fait que les multiindices soient licites ôte toute ambiguité dans la définition par récurrence des $\mathcal{V}_\sigma^\omega$.

$$(6.2.51)\qquad \left[e^{-\omega z}\Delta_\omega\,,\,\Theta\right] = \left[\dot{\Delta}_\omega\,,\Theta\right] = -\,\Theta.\,\mathbb{A}_\omega$$

$$(6.2.52)\qquad \left[e^{-\omega z}\Delta_\omega\,,\,\Theta^{-1}\right] = \left[\Theta^{-1},\,\dot{\Delta}_\omega\right] = +\,\mathbb{A}_\omega\,.\,\Theta^{-1}$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme

$$(6.2.53)\qquad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)}\left\{A^0_\omega\frac{\partial}{\partial z} + A^1_\omega\,u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots A^{\nu-1}_\omega\,u_{\nu-1}\frac{\partial}{\partial u_{\nu-1}}\right\}$$

et définis par

$$(6.2.54)\qquad \mathbb{A}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega\\ \sigma_i\in\sigma((\omega_i))-\mathbb{N}}} V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\,\mathbb{B}^{\sigma_1}_{\omega_1}\dots\mathbb{B}^{\sigma_r}_{\omega_r}\qquad (*)$$

sous réserve de convergence du second membre. Notons que, du fait des relations d'alternalité (1.4.89), cette formule équivaut à la suivante :

$$(6.2.55)\qquad \mathbb{A}_\omega = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega\\ \sigma_i\in\sigma((\omega_i))-\mathbb{N}}} \frac{1}{r}\,V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\left[\left[\dots\left[\mathbb{B}^{\sigma_1}_{\omega_1},\mathbb{B}^{\sigma_2}_{\omega_2}\right]\dots\right]\mathbb{B}^{\sigma_r}_{\omega_r}\right]\qquad (*)$$

Reprenons maintenant l'intégrale ${}^\circ x(z;u)$ du champ ${}^\circ X$, donnée en (6.2.41), et posons pour $i=1,2,\dots,\nu$:

$$(6.2.56)\qquad x_i(z;u) = \Theta^{-1}.\,{}^\circ x_i(z;u) = \Theta^{-1}.\left[u^{n(\lambda_i)}.e^{\lambda_i z}.z^{\tau_i}\right]$$

Il vient alors:

$$(6.2.57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}x_i(z;u) = \dfrac{\partial}{\partial z}\,\Theta^{-1}.\,{}^\circ x_i(z;u) & \text{(d'après (6.2.56))}\\[2mm] \qquad\qquad = \Theta^{-1}.\left(\dfrac{\partial}{\partial z}+\mathbb{D}\right).{}^\circ x_i(z;u) & \text{(d'après (6.2.50))}\\[2mm] \qquad\qquad = \Theta^{-1}.\,X_i({}^\circ x(z;u)) & \text{(d'après (6.2.37 et 42))}\\[2mm] \qquad\qquad = X_i\,(x(z;u)) & \text{(d'après (6.2.48))}\end{cases}$$

(*) On observe que dans (6.2.54) et (6.2.55) l'ordre des facteurs $\mathbb{B}^{\sigma_i}_{\omega_i}$ est inverse de ce qu'il était dans (6.2.47).

Soit finalement :

(6.2.58) $$\frac{\partial}{\partial z}\, x(z;u) = X\,(x(z;u))$$

ce qui montre que le $x(z;u)$ défini par la formule (6.2.49) est bien égal, sous réserve de convergence, à l'intégrale formelle du champ X . Appliquons maintenant les dérivations étrangères pointées (en z). Il vient :

(6.2.59) $$\left\{\begin{aligned} \dot{\Delta}_\omega\, x_i(z;u) &= \dot{\Delta}_\omega \,.\, \Theta^{-1} .\, {}^\circ x_i(z;u) && \text{(d'après (6.2.56))} \\ &= \mathbb{A}_\omega \,.\, \Theta^{-1} .\, {}^\circ x_i(z;u) && \text{(d'après (6.2.52))} \\ &= \mathbb{A}_\omega \,.\, x_i(z;u) && \text{(d'après (6.2.56))} \end{aligned}\right.$$

Soit finalement :

(6.2.60) $$\dot{\Delta}_\omega\, x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \,.\, x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

Se reportant à la proposition 6.2.4, formule (6.2.27), on voit que les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ définis (sous réserve de convergence) par les formules (6.2.54) ou (6.2.55) sont bien les <u>invariants holomorphes</u> du champ X . Il ne reste plus qu'à établir la convergence des seconds membres dans les formules (6.2.47,54,55,56). Cela se fait sans peine grâce aux majorations (1.4.89'') des scalaires $V^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$ et aux majorations (1.4.89') des transformées de Borel des monômes de résurgence $\mathcal{V}^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$. Nous pouvons donc énoncer :

<u>Proposition 6.2.6</u> : (<u>Calcul explicite des invariants holomorphes</u>).

Pour tout champ X analytique à un degré de résonance $(p^+ = 1,\ p_- = 0)$ les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ sont explicitement donnés par les formules équivalentes (6.2.54) ou (6.2.55) en fonction des coordonnées de Taylor du champ et des coefficients universels $V^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$

<u>Remarque 1</u> : Nous avons omis la clause "lorsque Ω^{int} est discret" car nous verrons plus loin qu'elle n'est pas essentielle.

Remarque 2 : Nous avons également omis la clause $(p,\rho)=(1,0)$ car des formules presque identiques à (6.2.54,55) couvrent le cas où p,ρ sont quelconques.

Remarque 3 : Nous avons le droit de dire "en fonction des coefficients de Taylor du champ" car les opérateurs $\mathbb{D}_\omega^\sigma$ et, partant, les opérateurs $\mathbb{B}_\omega^\sigma$ des formules (6.2.54,55) s'expriment élémentairement en fonction de ces coefficients de Taylor qu'ils ne font, en somme, que regrouper sous une forme plus maniable.

Remarque 4 : La formule (6.2.55) présente sur la formule (6.2.54) un triple avantage : elle montrent d'abord que les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont bien différentiels d'ordre un, alors que dans (6.2.54) ils semblent différentiels d'ordre infini; elle montre ensuite que les $\mathbb{A}_\omega$ ne peuvent être différents de 0 que pour $\omega\in\Omega$ alors que dans (6.2.54) ils semblent pourvoir l'être pour tout $\omega\in\Omega^{ext}$; enfin elle comporte en son second membre moins de termes distincts, du fait des relations a priori entre multicrochets de Lie.

Abordons maintenant le cas où Ω^{int} n'est pas discret, ce qui arrive parfois pour $K=3$ et toujours pour $K\geqslant 4$.

Proposition 6.2.7. (Le cas Ω^{int} non discret. Résurgence généralisée de l'intégrale formelle).

Soit X un champ analytique a un degré de résonance $(\nu^+=1,\nu^-=0)$ et sans quasi-résonance $(\nu^+_{quasi}=0)$. Lorsque le réseau intérieur Ω^{int} n'est plus discret(*) l'intégrale formelle $x(z;u)$ est encore résurgente, mais au sens généralisé(**), et elle continue de vérifier des équations de résurgence

$$\dot{\Delta}_\omega\, x(z;u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z;u) \qquad (\forall\omega\in\Omega_p) \tag{6.2.61}$$

(*) L'adhérence de Ω^{int} est donc soit $\mathbb{C}$ tout entier soit un réseau de droites parallèles.

(**) Pour la définition des fonctions résurgentes généralisées ou "monogènes", voir la section 1.3.h.

avec des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme (6.2.28).

Proposition 6.2.8. (Le cas Ω^{int} non discret. Invariants holomorphes).

Les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ sont parfaitement déterminés par les équations (6.2.61). Ensemble, ils constituent un système complet et libre d'invariants holomorphes de X . Pour calculer ces $\mathbb{A}_\omega$, on a le choix entre trois procédés :

(i) appliquer la formule (6.2.55) dans le cas $(p, \rho) = (1, 0)$ ou la formule qui la remplace dans le cas p, ρ quelconques.

(ii) appliquer la méthode du "paramétrage désingularisant", qui est expliquée ci-après.

(iii) appliquer les règles de dérivation étrangère des fonctions résurgentes généralisées(*). ou "monogènes".

Schéma des démonstrations des propositions 6.2.7. et 6.2.8.

Comme dans le cas où Ω^{int} est discret, on commence par mettre le champ X sous forme préparée (6.2.33) et à le plonger dans la famille (6.2.34) de champs ${}^{\varepsilon}X$. La première partie de la démonstration reste inchangée. On a encore (6.2.35) avec des composantes $\Phi^{n\|r}(z)$ et $x(z; u\|r)$ qui sont résurgentes en z (au sens ordinaire) et qui vérifient (6.2.36) pour des opérateurs $\mathbb{A}_{\omega\|r}$ de la forme (6.2.28). La difficulté est de resommer en ε . Plaçons-nous pour fixer les idées dans le cas-type $(p, \rho) = (1, 0)$ et introduisons l'opérateur Θ comme en (6.2.47). On peut alors, à l'aide des majorations (1.4.89'') des scalaires V^ω_σ montrer la convergence de la série (6.2.54) qui donne explicitement $\mathbb{A}_\omega$. Cela tient à ce que, pour ω fixé dans Ω , on ne peut avoir une décomposition :

(6.2.62) $$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots \omega_r \qquad (\omega_i \in \Omega)$$

(*) Les méthodes (i) et (ii) sont beaucoup plus directes que (iii).

avec des sommes partielles $(\omega_1+\ldots+\omega_j)$ ou $(\omega_j+\ldots+\omega_r)$ très petites sans avoir en même temps une somme $\sigma((\omega_1))+\ldots+\sigma((\omega_r))$ de partie réelle négative et très grande. Se reportant à (6.2.54) et tenant compte du caractère diophantien de Ω^{int} (puisque les λ_i ne sont pas en quasi-résonance) on voit apparaître dans (1.4.89) des termes $|\Gamma(\ldots)|$ très grands en dénominateur qui compensent largement les grands $\gamma(\omega)+\gamma(\tilde{\omega})$ qui peuvent figurer en numérateur. A partir des majorations (1.4.89') des monômes de résurgence on montre de même la convergence des séries $\sum \Phi^{n\|r}(z)$ vers une limite $\Phi^n(z)$ qui est encore résurgente, mais au sens généralisé (ou "monogène") qui a été défini à la fin de la section 1.3. Quant à l'invariance des $\mathbb{A}_\omega$ et à la complétude du système qu'ils forment, on les établit en gros comme dans le cas où Ω^{int} est discret.

Remarque 1 : (la diophantianité de Ω^{int} suffit)

La démonstration utilise le caractère diophantien de Ω^{int} (non quasi-résonance de $\lambda_1,\ldots,\lambda_K$) mais pas celui de Ω^{ext} (non quasi-résonance de $\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu$).

Remarque 2 : (la méthode du paramétrage désingularisant)

La formule (6.2.54) a son équivalent dans le cas (p,p) quelconque et permet donc le calcul des invariants $\mathbb{A}_\omega$ (en fonction d'une généralisation adéquate des V_σ^ω). Mais il existe un autre procédé de calcul qui évite de recourir aux V_σ^ω ou à leur généralisation et qui est particulièrement avantageux quand on s'intéresse à un champ X fixé. C'est la méthode du paramétrage désingularisant(*) qui consiste à plonger le champ X dans la famille ${}^\varepsilon X$ construite en (6.2.34) ou dans une famille du même genre(**) puis à développer l'intégrale formelle en ε

(*) ainsi nommée parce qu'elle permet de se ramener à des fonctions résurgentes ordinaires et qu'elle dispense de manipuler des singularités partout denses.

(**) ${}^\varepsilon X$ n'a pas besoin d'être linéaire en ε . L'essentiel est que ${}^1X$ coincide avec X , que ${}^0X$ coincide avec la forme normale de X , et enfin que ${}^\varepsilon X-{}^0X$ ne contienne que des termes de degré assez élevé.

selon la formule (6.3.35) avec des $\Phi^{n\|r}(z)$ qui sont toujours de bonnes fonctions résurgentes (au sens ordinaire). On détermine alors sans peine, par récurrence sur r, les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_{\omega\|r}$ qui donnent lieu à l'identité (6.2.36) à tout ordre en ε. Quelque paramétrage en ε que l'on ait choisi, on est assuré que la série $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{A}_{\omega\|r}$ converge vers l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$.

<u>Proposition 6.2.9</u>. (<u>Invariants précaires</u>).

Les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont somme de deux blocs

(6.2.67) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\dot\omega)}\left[A_\omega^0 \frac{\partial}{\partial z}\right] + u^{n(\dot\omega)}\left[\sum_{i=1}^{\nu-1} A_\omega^i \, u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right]$$

Le second bloc $[\ldots]$ est invariant non seulement par rapport aux changements de variables analytiques mais encore par rapport à la multiplication à gauche du champ X :

(6.2.68) $$X \longmapsto \Psi . X$$

par un facteur analytique $\Psi(x) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_\nu\}$ avec terme constant $(\Psi(0) \neq 0)$. Au contraire, le bloc $[A_\omega^0 \, \partial/\partial z]$ n'est invariant que par rapport aux changements de variables analytiques. Pour cette raison, on le qualifie d'invariant <u>précaire</u>.

<u>Preuve</u> : Plaçons-nous d'abord dans le cas-type $(p, \rho) = (1, 0)$ et considérons la formule (6.2.55) qui exprime les invariants $\mathbb{A}_\omega$ en fonction des opérateurs $\mathbb{B}_\omega^\sigma$, eux-mêmes fonction des opérateurs $\mathbb{D}_\omega^\sigma$ qui regroupent les coefficients de Taylor du champ X. Tous ces opérateurs différentiels sont du type :

$$\mathbb{H} = \overline{\mathbb{H}} + \overline{\overline{\mathbb{H}}} \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbb{H}} = (\ldots)\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathbb{H}}} = \sum_{i=1}^{\nu-1} (\ldots)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Avec ces notations la première des formules (6.2.45) s'écrit :

(6.2.69) $$\overline{\mathbb{B}} = -(1 + \overline{\mathbb{D}}.z)^{-1}\, \overline{\mathbb{D}} \quad ; \quad \overline{\overline{\mathbb{B}}} = -(1 + \overline{\mathbb{D}}.z)^{-1}\, \overline{\overline{\mathbb{D}}}$$

Comme d'autre part les opérateurs $\mathbb{B}^{\sigma}_{\omega}$ commutent tous avec $\frac{\partial}{\partial z}$ on tire de (6.2.55):

$$(6.2.70)\qquad \overline{\overline{\mathbb{A}}}_{\omega} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega \\ \sigma_i\in\sigma((\omega_i))-\mathbb{N}}} V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\left[\left[\overline{\overline{\mathbb{B}}}^{\sigma_1}_{\omega_1},\overline{\overline{\mathbb{B}}}^{\sigma_2}_{\omega_2}\right]\dots\overline{\overline{\mathbb{B}}}^{\sigma_r}_{\omega_r}\right]$$

Comme enfin $\mathbb{X} = {}^{\circ}\mathbb{X} + \mathbb{D} = \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{D}$, la transformation (6.2.68) se répercute de la manière suivante sur les blocs $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\overline{\mathbb{D}}}$, $\overline{\mathbb{B}}$, $\overline{\overline{\mathbb{B}}}$:

$$(6.2.71)\qquad \begin{cases} 1+\overline{\mathbb{D}}.z \longmapsto (\Psi).(1+\overline{\mathbb{D}}.z) \\ \overline{\mathbb{D}} \longmapsto (\Psi-1)\frac{\partial}{\partial z} + \Psi\,\overline{\mathbb{D}} \\ \overline{\overline{\mathbb{D}}} \longmapsto \Psi\,\overline{\overline{\mathbb{D}}} \\ \overline{\mathbb{B}} \longmapsto \overline{\mathbb{B}} - (1-\Psi^{-1})(1+\overline{\mathbb{D}}.z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z} \\ \overline{\overline{\mathbb{B}}} \longmapsto \overline{\overline{\mathbb{B}}} \end{cases}$$

Ainsi les blocs $\overline{\overline{\mathbb{B}}}$ et par suite les blocs $\overline{\overline{\mathbb{B}}}^{\sigma}_{\omega}$ restent inchangés. Les blocs $\overline{\overline{\mathbb{A}}}_{\omega}$ qui d'après (6.2.70) dépendent des seuls $\overline{\overline{\mathbb{B}}}^{\sigma}_{\omega}$, sont donc invariants par rapport aux transformations (6.2.68). Ce sont des invariants <u>forts</u>, au contraire des blocs <u>précaires</u> $\overline{\mathbb{A}}_{\omega}$ qu'on peut toujours annuler au prix d'une transformation (6.2.68) bien choisie. La démonstration s'étend au cas (p,p) quelconque puisque les formules (6.2.55) et (6.2.70) elles-mêmes s'étendent à ce cas moyennant une redéfinition des scalaires V^{ω}_{σ}.

<u>Proposition 6.2.10.</u> <u>(Invariants cruciaux)</u>

Les $\nu-\kappa$ opérateurs invariants

$$(6.2.72)\qquad \mathbb{A}_{-\lambda_{\kappa+1}},\ \mathbb{A}_{-\lambda_{\kappa+2}},\ \dots,\ \mathbb{A}_{-\lambda_{\nu}} \qquad (*)$$

(*) Rappelons que les multiplicateurs λ_i $(\kappa<i\leq\nu)$ sont ceux qui ne sont pas impliqués dans la relation de résonance. Les $-\lambda_i$ correspondants sont les seuls éléments de Ω qui n'ont pas d'<u>antécédents</u>.

sont dits <u>cruciaux</u> car ils jouent un rôle très particulier. En effet, lorsqu'ils sont tous $\neq 0$, chacune des composantes Φ^n de l'intégrale formelle porte à elle seule toute l'information invariante. Au contraire, lorsqu'une partie (resp. la totalité) des invariants cruciaux sont nuls, il faut considérer une partie infinie (resp. la totalité) des Φ^n pour obtenir toute l'information invariante.

Preuve : Fixons $n = (n_1, \dots, n_{v-1})$ dans $\mathcal{N}$. A l'aide des équation de résurgence (6.2.29) on vérifie que, pour tout élément $\omega_0 = \sum q_i \lambda_i$ de Ω, l'application à la composante Φ^n de l'opérateur étranger :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_{\omega_0} \left(\Delta_{-\lambda_{K+1}}\right)^{r_{K+1}} \cdots \left(\Delta_{-\lambda_v}\right)^{r_v} & (r_i \in \mathbb{N}) \\ \text{avec } n_i + r_i > q_i \text{ pour } K < i \leq v & \end{cases}$$

donne a priori un résultat non nul, qui "manifeste" l'invariant A_{ω_0} et permet son calcul.

SECTION 6.3 : INFLUENCE DE LA RESONANCE VIRTUELLE.

A elle seule, la résonance virtuelle $(\nu_- > 0)$ n'engendre pas d'invariants holomorphes. Au contraire, en présence de résonance positive $(\nu^+ > 0)$, elle modifie sensiblement la forme des équations de résurgence et des opérateurs invariants. Le cas général $(\nu^+ \geq 1 \ ; \ \nu_- \geq 0)$ sera étudié aux sections 6.5,6.6,6.7. Le cas $(\nu^+ = 1 \ ; \ \nu_- = 0)$ vient d'être examiné. Occupons-nous ici du cas $(\nu^+ = 1 \ ; \ \nu_- \geq 1)$.

Dans ce cas, les multiplicateurs λ_i vérifient une seule relation de résonance positive

(6.3.1) $\quad m_1 \lambda_1 + \dots m_K \lambda_K = 0 \qquad (1 \leq K \leq v - \nu_- \ ; \ m_j \text{ entiers } \geq 0 \text{ et premiers entre eux})$

et ν_- relations indépendantes de résonance virtuelle :

(6.3.2) $\quad m_1^i \lambda_1 + \dots m_v^i \lambda_v = 0 \qquad (1 \leq i \leq \nu_- \ ; \ m_j^i \text{ entiers de signes mixtes})$

Notons que chacune des relations de résonance virtuelle implique au moins deux multiplicateurs λ_j d'indice $j > K$ car sinon on en déduirait, par combinaison linéaire avec (6.3.1), de nouvelles relations de résonance positive .

Comme à la section précédente, on introduit le réseau Ω qui regroupe tous les ω de la forme :

(6.3.3) $\omega = \langle n,\lambda\rangle$ ou $\omega = -\lambda_i + \langle n,\lambda\rangle$ avec $\langle n,\lambda\rangle = \sum n_j\lambda_j$ et $n_j \geq 0$

ainsi que le sous-groupe Ω^{int} et le sur-groupe Ω^{ext}. On a ici :

(6.3.4) $\dim \Omega^{int} = \kappa - 1$; $\dim \Omega = \dim \Omega^{ext} = \chi = \nu - \varrho^+ - \varrho_- = \nu - 1 - \varrho_-$

Comme d'habitude on fixe une base $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_\chi^*$ de Ω (les λ_i^* peuvent ne pas être dans Ω) et on met Ω en bijection avec une partie $\mathcal{N}_1$ de $\mathbb{N}^\chi$:

(6.3.5) $\Omega \longrightarrow \mathcal{N}_1$: $\omega \longmapsto (n_1,\ldots,n_\chi)$ avec $\omega = n_1\lambda_1^* + \ldots n_\chi\lambda_\chi^*$

<u>Proposition 6.3.1</u> : <u>(Allure et unicité de l'intégrale formelle. Paramètres de première et seconde génération</u>.

Tout champ analytique local X de niveau p fini(*) et présentant <u>un</u> degré de résonance positive $(\varrho^+ = 1)$ avec un ou plusieurs degrés de résonance virtuelle $(\varrho_- \geq 1)$ possède une intégrale formelle du type :

(6.3.6) $$x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n z^{[n]} \Phi^n$$

c'est-à-dire :

(6.3.6 bis) $$x(z;u_1,\ldots,u_{\nu-1}) = \sum_{(n_i)\in\mathcal{N}} u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} z^{[n_1,\ldots,n_{\nu-1}]} \Phi^{n_1,\ldots,n_{\nu-1}}$$

- où le multiindice n parcourt $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ avec

(6.3.7) $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^{\nu-1}$; $\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{Z}^\chi$; $\mathcal{N}_2 \subset \mathbb{N}^{\varrho_-}$ $(\nu = \chi + \varrho_- + \varrho^+)$

- où les composantes Φ^n sont des séries entières de $\overset{\bullet}{z}^{-1/p}$:

(6.3.8) $\Phi_i^{n_1,\ldots,n_{\nu-1}}(z) \in \mathbb{C}[[\overset{\bullet}{z}^{-1/p}]]$ $\qquad (z = \overset{\bullet}{z} + \rho \log \overset{\bullet}{z})$

(*) pour le cas $p = \infty$ (champs nihilents) voir la section 6.10 et le chapitre 8.

- où les blocs élémentaires $z^{[n]}$ sont de la forme :

(6.3.9) $$z^{[n_1,\dots,n_{\nu-1}]} = z^{\sigma(n_1,\dots,n_{\chi-1})} \prod_{q=1}^{p} e^{\omega_{p/q}(n_1,\dots,n_{\nu-1})\, z^{1/q}}$$

avec pour $\sigma(n)$ la forme sous-additive définie en (6.2.12) et avec :

(6.3.10) $$\omega_{p/q}(n) = \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i \lambda^*_{i,q}$$

(6.3.11) $$\lambda^*_{i,p} = \lambda^*_i \text{ (base de } \Omega) \text{ si } i \leq \chi \text{ et } \lambda^*_{i,p} = 0 \text{ si } i > \chi$$

Cette intégrale formelle $x(z;u)$ est unique à un reparamétrage élémentaire près :

(6.3.12) $$z \longmapsto z + c_0 \ ;\ u_i \longmapsto c_i u_i \qquad (c_0 \in \mathbb{C} \ ;\ u_i \in \mathbb{C}^*)$$

Les χ premiers paramètres u_i sont associés à la dimension du réseau Ω et ils sont dits paramètres de première génération.

Les $\underline{\nu}$ derniers paramètres u_i sont associés à la résonance virtuelle et ils sont dits paramètres de seconde génération.

Dans le cas $p = 1$ les blocs $z^{[n]}$ se simplifient :

(6.3.13) $$z^{[n]} = e^{\omega(n).z} \,.\, z^{\sigma(n)}$$

Mais même dans le cas $p > 1$, le facteur initial $e^{\omega(n).z}$ et le facteur final $z^{\sigma(n)}$ diffèrent des facteurs intermédiaires $e^{\omega_{q/p}(n).z^{q/p}}$. En effet :

(i) La forme $\sigma(n)$ est sous-additive en n, tandis que les formes $\omega(n)$ et $\omega_{q/p}(n)$ sont additives. Il en résulte que pour $n^1, n^2 \in \mathcal{N}$:

(6.3.14) $$z^{[n^1+n^2]} \Big/ z^{[n^1]} \cdot z^{[n^2]} = z^{-r/p} \quad \text{avec } r = r(n^1;n^2) \in \mathbb{N}$$

(ii) La forme $\omega(n)$ ne dépend effectivement que de $n_1,\dots,n_\chi$ alors que les formes $\omega_{q/p}(n)$ et $\sigma(n)$ dépendent en général de tous les n_i. Autrement dit, le facteur $\exp(\omega(n).z)$ n'accompagne que les paramètres u_i de première génération, tandis que les facteurs $z^{\sigma(n)}$ et $\exp(\omega_{q/p}(n).z^{q/p})$ accompagnent tous les paramètres u_i, de première comme de seconde génération. La différence est

est essentielle. Elle explique pourquoi ces deux générations de paramètres vont jouer un rôle si dissymétrique dans l'expression des opérateurs invariants :

Proposition 6.3.2. (Résurgence de l'intégrale formelle)

L'intégrale formelle est résurgente(*) en z et vérifie les équations de résurgence :

$$\dot{\Delta}_\omega \quad x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \quad x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p) \tag{6.3.15}$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

$$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\dot\omega)} \left[A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{1 \leq i \leq \chi} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\chi < i < \nu} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \tag{6.3.16}$$

avec

$$u^{n(\dot\omega)} = u_1^{n_1(\dot\omega)} \ldots u_\chi^{n_\chi(\dot\omega)} \qquad (\text{où } \dot\omega = n_1(\dot\omega)\lambda_1^* + \ldots n_\chi(\dot\omega)\lambda_\chi^*) \tag{6.3.17}$$

$$\mathbb{A}^i_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_{\chi+1}, u_{\chi+2}, \ldots, u_{\nu-1}]] \qquad (\text{pour } i = 0,1,2,\ldots \nu) \tag{6.3.18}$$

Ces formules font bien ressortir la dissymétrie entre les deux groupes de paramètres :

(i) les u_i de première génération figurent seuls dans le facteur $u^{n(\dot\omega)}$ et interviennent sous forme d'opérateurs différentiels $u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ qui sont homogènes de degré 0.

(ii) les u_i de deuxième génération figurent seuls dans les séries $A^i_\omega(u)$ et interviennent sous forme d'opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial u_i}$ qui sont homogènes de degré -1 .

Proposition 6.3.3. (Invariants holomorphes)

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont entièrement déterminés par les équations (6.3.15). Ce sont des invariants holomorphes. Tous ensemble, ils constituent un système

(*) au sens ordinaire si Ω^{int} est discret et au sens généralisé ("monogène") sinon.

complet et libre d'invariants holomorphes de X .

Démonstration des propositions 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 :

La seule différence avec le cas $\rho_- = 0$ tient à ce que les coefficients $A^0_\omega, \ldots, A^{\nu-1}_\omega$ des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ ne sont plus des scalaires, mais des séries entières en les paramètres u_i de seconde génération. Voici l'explication de cette différence. Se reportant à la forme des blocs $u^n . z^{[n]}$ on voit que (modulo un facteur $z^{-1/p}$) chaque u_i de première génération est accompagné par un facteur de la forme :

$$z^{\sigma_i} \exp\left(\lambda_i^* z + \sum_{q=1}^{p-1} \alpha_{i,q}\, z^{q/p}\right) = z^{\sigma_i} \exp(\Theta(z)) \tag{6.3.19}$$

tandis que chaque u_i de seconde génération est accompagné par un facteur de la forme :

$$z^{\sigma_i} \exp\left(\sum_{q=1}^{p-1} \alpha_{i,q}\, z^{q/p}\right) = z^{\sigma_i} \exp(\theta(z)) \tag{6.3.20}$$

Si maintenant on traduit composante par composante l'équation de résurgente (6.3.15) on obtient une équation analogue à (6.2.29) avec non plus une composante , mais plusieurs (en nombre finie), affectées chacune d'un produit de facteurs (6.3.20). L'équation ainsi obtenue a un sens et elle est juste. Elle a un sens, parce qu'une fonction résurgente multipliée par un facteur $\exp \theta(z)$ reste résurgente. Elle est juste, parce qu'on s'assure par le procédé standard (perturbation infinitésimale, etc) que tous les termes susceptibles d'intervenir dans l'expression de $\Delta_{\omega_0} \Phi^n$ y interviennent effectivement. En revanche une fonction résurgente multipliée par un facteur $\exp \Theta(z)$ n'est plus résurgente. Cela explique pourquoi les coefficients A^i_ω des $\mathbb{A}_\omega$ ne contiennent aucun paramètre u_i de première génération. Ceci explique aussi pourquoi ces mêmes A^i_ω sont automatiquement scalaires quand $\rho_- = 0$

A ce point près, les propositions 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 (cas $\rho_- \geq 0$) se démontrent exactement comme les propositions 6.2.3, 6.2.4, 6.2.5 (cas $\rho_- = 0$).

SECTION 6.4 : LE CAS DE DIMENSION 2. LIEN AVEC LES TRAVAUX DE MARTINET-RAMIS.

Dans [MR.1] et [MR.2] J. Martinent et J.-P. Ramis ont, par des méthodes géométriques, classé les formes analytiques du type

(6.4.1) $$x^{p+1}\, dy \; - y\, dx \; + (\dots)$$

ou du type

(6.4.2) $$m_1\, x\, dy \; + m_2\, y\, dx \; + (\dots) \qquad (m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*)$$

Plus précisément, ils ont mis les classes analytiques des formes (6.4.2) (resp. (6.4.1)) en correspondance biunivoque avec les classes analytiques de difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité :

(6.4.3) $$f \; : \; x \longmapsto x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

(resp. avec des classes analytiques particulières de tels difféos). Interprétons ces résultats du point de vue du calcul étranger. Classer les formes (6.4.1) ou (6.4.2) revient à classer les champs de vecteurs locaux de $\mathbb{C}^2$ qui ont pour multiplicateurs λ_i (et pour réseaux Ω) respectivement :

(6.4.4) $$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1) \qquad \text{et} \qquad \Omega = \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

(6.4.5) $$(\lambda_1, \lambda_2) = (m_2, -m_1) \qquad \text{et} \qquad \Omega = \mathbb{Z}$$

On n'a ici qu'un seul paramètre $u_1 = u$ et l'intégrale formelle du champ s'écrit :

(6.4.6) $$x\,(z\,;u) = \sum_{n \in N} u^n\, z^{[n]}\, \Phi^n(z) \qquad (\text{avec } N \text{ identifiable à } \Omega)$$

Si les champs sont de niveau $p < \infty$, leurs classes analytiques sont paramétrées par les familles d'opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ avec :

(6.4.7) $$\mathbb{A}_\omega = u^n \left(A^0_\omega \frac{\partial}{\partial z} + A^1_\omega\, u \frac{\partial}{\partial u} \right) \qquad (\omega \in \Omega_p, \dot{\omega} = n)$$

Le bloc $\left[A_\omega \frac{\partial}{\partial z} \right]$ est "précaire" mais le bloc $\left[A^1_\omega\, u \frac{\partial}{\partial u} \right]$ est fortement nvariant, c'est-à-dire invariant tant pour les changements de variables analytiques que pour la multiplication à gauche par un facteur analytique (avec terme constant). Relativement à cette notion d'invariance forte qu'adoptent Martinet-Ramis, on trouve donc des classes analytiques caractérisées chacune par une famille d'invariants :

$$\left\{ A^1_\omega \ u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \ ; \quad \omega \in \Omega_p \ ; \ \dot{\omega} = n \right\} \tag{6.4.8}$$

Or d'après la section 5.1, les classes de difféos (6.4.3) sont de leur côté caractérisées chacune par une famille d'invariants :

$$\left\{ A_\omega \ e^{2\pi i n z} \frac{\partial}{\partial z} \ ; \quad \omega \in (2\pi i \mathbb{Z})_p \ ; \ \dot{\omega} = 2\pi i n \right\} \tag{6.4.9}$$

avec exactement les mêmes conditions de croissance en (6.4.8) et en (6.4.9). Voir à ce sujet les critères universaux de la sections 10.5.

Si donc on fait le changement de variable $u = e^{2\pi i z}$ on obtient une correspondance bijective entre les classes analytiques (fortes) des champs (6.4.5) ou des formes (6.4.2) et les classes analytiques de difféos (6.4.3), avec pour règle de correspondance :

$$A^1_\omega = 2\pi i \ A_{2\pi i \omega} \qquad\qquad (\omega \in \Omega_p) \tag{6.4.10}$$

Quant aux classes analytiques (fortes) des champs (6.4.4) ou des formes (6.4.1), elles se trouvent en correspondance bijective non pas avec toutes les classes analytiques de difféos (6.4.3), mais avec des classes analytiques particulières, dites sesquilatérales, et qui sont caractérisées par

$$A_\omega = 0 \qquad \text{pour} \quad \dot{\omega}/2\pi i = -2, -3, -4, -5, \text{etc} \ldots \tag{6.4.11}$$

Autrement dit, d'un côté les A_ω sont quelconques et de l'autre côté ils sont tous nuls sauf le premier. D'où le vocable "sesquilatéral". Du point de vue de la géométrie, l'intervention des classes sesqui latérales dans le classement des champs (6.4.4) paraît assez mystérieuse. Du point de vue du calcul étranger, elle résulte simplement de la règle (6.3.3) de formation du réseau de résurgence. De toute façon, les classes sesquilatérales sont importantes en elles-mêmes. Elles se distinguent des classes générales à plusieurs égards et notamment en ceci qu'elles possèdent des représentants canoniques (non uniques) relativement simples.

<u>Remarque 1</u> : <u>Difféos de retour</u>.

On peut expliciter la correspondance qui aux équations différentielles (6.4.1) ou (6.4.2) associe un "difféo de retour" (6.4.3) possédant mêmes invariants analytiques. Voir à ce sujet (11.2.25) et (11.2.26).

<u>Remarque 2</u> : <u>Correspondances entre catégories</u>.

La correspondance, observée par MARTINET et RAMIS entre les classes analytiques d'équations différentielles (6.4.1-2) et les difféos (6.4.3) est un cas particulier d'un phénomène fort général et qui ne semble pas toujours susceptible de recevoir une interprétation géométrique simple. Disons en deux mots de quoi il s'agit. On peut mettre en correspondance les sous-classes analytiques de deux classes formelles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ d'objets locaux (pouvant être de nature très différente) si et seulement si les réseaux de résurgence Ω_1 et Ω_2 correspondants sont semblables :

(6.4.12) $$\Omega_1 = \alpha\, \Omega_2 \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}^*$$

et si les invariants $\mathbb{A}_\omega$ ont même forme dans les deux cas. Notons que la simple équidimensionalité des réseaux de résurgence :

(6.4.13) $$\dim \Omega_1 = \dim \Omega_2$$

ne suffirait pas, car les contraintes universelles de croissance auxquelles sont soumis les $\mathbb{A}_\omega$ font fortement intervenir la <u>métrique</u> de Ω (voir §10.5).

SECTION 6.5. LE CAS A PLUSIEURS DEGRES DE RESONANCE. GRADUATIONS ET RAYONS PROPRES. INVARIANTS FORMELS.

Dans toute la suite de ce chapitre nous allons envisager les champs résonnants généraux (ν^+, ν_- quelconques). Pour bien sérier les difficultés, nous supposerons d'abord qu'il n'y a pas de résonance virtuelle $(\nu_- = 0)$ et que la partie linéaire est diagonalisable. Nous verrons ensuite qu'il n'y a presque rien à changer lorsqu'il y a de la résonance virtuelle $(\nu_- > 0)$ ou une partie linéaire nilpotente.

Plaçons-nous donc pour l'instant dans le cas $\nu^+ \geqslant 1$ et $\nu_- = 0$. Les multiplicateurs λ_i vérifient alors ν^+ relations de résonance positive :

(6.5.1) $$\sum_{j=1}^{K} m_j^i \lambda_j = 0 \qquad \left(1 \leqslant K \leqslant \nu \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant \nu^+ \; ; \; m_j^i \in \mathbb{N}\right)$$

et toute autre relation de résonance, positive ou non, est engendrée par les (6.5.1). Bien noter que certains des λ_j peuvent être nuls. Ils peuvent même l'être tous, auquel cas on a $\nu^+ = \nu$.

Définition 6.5.1 (Les réseaux $\Omega^{int} \subset \Omega \subset \Omega^{ext}$)

$\Omega = \left\{\omega \,;\, \omega \text{ de la forme } \sum_j n_j \lambda_j \text{ ou } -\lambda_i + \sum_{j \neq i} n_j \lambda_j \text{ avec } n_j \geqslant 0\right\}$ ("réseau")

Ω^{int} = plus grand sous-groupe de Ω ("réseau intérieur")

Ω^{ext} = plus petit sur-groupe de Ω ("réseau extérieur")

On pose :

$$\chi = \nu - \nu^+ = \dim \Omega = \dim \Omega^{ext} \quad ; \quad K - \nu^+ = \dim \Omega^{int}$$

Bien entendu :

(6.5.2) $$\Omega^{ext} = \lambda_1 \mathbb{Z} + \ldots \lambda_\nu \mathbb{Z}$$

(6.5.3) $$\Omega^{int} = \lambda_1 \mathbb{Z} + \ldots \lambda_K \mathbb{Z}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ sont les multiplicateurs effectivement impliqués dans (au moins) une relation de résonance (6.5.1). Moyennant une réindexation, on peut toujours supposer que ce sont les K premiers.

Proposition 6.5.1 (Forme prénormale A.D. Brjuno)

Par un changement de variables formel $x_i \longmapsto y_i$ on peut donner au champ X la forme :

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \sum_{\langle n,\lambda\rangle=0} b_i^n\, y^n\right) y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (b_i^n \in \mathbb{C}) \tag{6.5.4}$$

Cette forme est dite prénormale(*) parce qu'elle ne contient que des monômes résonnants :

$$y^n = y_1^{n_1} \cdots y_\nu^{n_\nu} \qquad \left(\text{avec } \sum n_i \lambda_i = 0 \,;\ n_i \geqslant -1 \text{ et } n_j \geqslant 0 \text{ si } j \neq i\right) \tag{6.5.5}$$

La forme prénormale n'est pas unique et diverge en général.

Démonstration : par simple identification de coefficients.

Lemme 6.5.1 (Algèbre réduite et champ réduit)

L'algèbre formée par les séries formelles ne comportant que des monômes résonnants y^m ne dépend pas du choix des coordonnées y_i et elle est invariante pour l'action du champ. Elle est dite algèbre réduite. La restriction du champ à cette algèbre est dite champ réduit. L'action du champ réduit est donnée par

$$Y.\, y^m = y^m \sum_{\langle n,\lambda\rangle = 0} b^{[m;n]}\, y^n \qquad (\langle m,\lambda\rangle = 0) \tag{6.5.6}$$

avec

$$b^{[m;n]} = \sum m_i\, b_i^n \qquad (\langle m,\lambda\rangle = \langle n,\lambda\rangle = 0) \tag{6.5.7}$$

Les scalaires $b^{[m;n]}$ sont dits coordonnées du champ réduit.

(*) A.D. Brjuno qualifie cette forme de normale. Nous préférons réserver ce nom à la forme construite à la proposition 6.5.3 ci-après.

Relativement aux y_i le système dynamique du champ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial_z} y_i = y_i \cdot \left[\lambda_i + \sum_{\langle n,\lambda\rangle=0} b_i^n \, y^n \right] \qquad (1 \leq i \leq \nu) \tag{6.5.8}$$

Définition 6.5.2 (Système dynamique réduit)

On appelle ainsi l'ensemble des équations

$$\frac{\partial}{\partial_z} y^m = y^m \sum_{\langle n,\lambda\rangle=0} b^{[m,n]} \, y^n \qquad (\langle m,\lambda\rangle = 0) \tag{6.5.9}$$

que l'on déduit du système dynamique complet (6.5.8) pour chaque résonateur m.

Manifestement, si l'on connaît la solution générale $y^m(z;u)$ du système dynamique réduit, on obtiendra par simple quadrature la solution générale $y_i(z;u)$ du système dynamique complet. C'est donc par le système réduit qu'il faut commencer. Puisqu'il comporte ν^+ équations indépendantes (autant que de résonateurs m indépendants) on doit chercher sa solution générale

$$y^m(z;u) = y^m(z; u_1, \ldots, u_{\nu^+-1}) \qquad (\langle m,\lambda\rangle = 0) \tag{6.5.10}$$

comme fonction du temps z et de ν^+-1 paramètre u_i . De plus, l'analogie formelle entre le système dynamique réduit (6.5.9) et les systèmes dynamiques associés aux champs de vecteurs à partie linéaire nulle (voir chapitre 4 et 5) nous incite à chercher les solutions des (6.5.9) sous la forme :

$$y^m(z;u) \in \mathbb{C}[\![\dot{z}^{-1/p} ; u_i \, \dot{z}^{\bar{\lambda}_i/p} \ (1 \leq i < \nu^+)]\!] \tag{6.5.11}$$

avec

$$y^m(z;0) = \gamma^m \, \dot{z}^{-\frac{\mathcal{H}(m)}{p}} \cdot \left[1 + \mathcal{O}(\dot{z}^{-1/p}) \right] \qquad (\langle m,\lambda\rangle=0) \tag{6.5.12}$$

où p serait une espèce de niveau, $\dot{z}$ une espèce de temps perturbé, et les $\bar{\lambda}_i$ des espèces de directeur. Quant à l'application $m \mapsto \gamma^m$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, elle est nécessairement additive :

$$\gamma^{m^1+m^2} = \gamma^{m^1} \gamma^{m^2} \qquad (\forall\, m^1, m^2 \perp \lambda) \tag{6.5.13}$$

et elle rappelle les rayons propres du chapitre 4. La seule nouveauté par rapport aux champs de vecteurs à partie linéaire nulle, c'est l'application $m \mapsto \mathcal{H}(m)$, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui doit elle-aussi être additive

$$\mathcal{H}(m^1+m^2) = \mathcal{H}(m^1) + \mathcal{H}(m^2) \qquad (\forall\, m^1, m^2 \perp \lambda) \tag{6.5.14}$$

et qu'il est naturel d'appeler une graduation. On doit logiquement s'attendre à ce qu'une solution (formelle) unique du système dynamique restreint (6.5.8) corresponde à tout couple :

$$(\mathcal{H}\,;\gamma) = (\text{graduation}\ ;\ \text{rayon propre})$$

et c'est effectivement ce que nous allons vérifier.

Ces quelques remarques heuristiques nous ayant donné une idée du but à atteindre, nous pouvons procéder à une construction en règle.

Définition 6.5.3. (Graduation $\mathcal{H}$ et niveau μ)

Soit X un champ de résonance $\nu^+ \geq 1$ et $\nu_- = 0$. Notons $\mathcal{R}es^*$ l'ensemble de tous les résonateurs $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ semi-positifs(*) et désignons par $\mathcal{R}es^{**}$ le sous-ensemble formé par tous les résonateurs effectifs, c'est-à-dire par tous ceux qui figurent effectivement dans le champ réduit(**).

(*) Cela veut dire que $\sum n_i \lambda_i = 0$ et que tous les entiers n_i sont ≥ 0 sauf au plus un qui peut valoir -1.

(**) D'une façon précise n est dans $\mathcal{R}es^{**}$ si et seulement si on a $b^{[m;n]} \neq 0$ pour un certain m et relativement à une certaine forme résonannte Y. En fait, $\mathcal{R}es^{**}$ se construit facilement à partir de n'importe quelle forme résonnante et on a l'inclusion :

$$\mathcal{R}es^{**} \subset (\mathcal{R}es^+) + (\mathcal{R}es^{**}(Y))$$

où $\mathcal{R}es^+$ désigne l'ensemble de tous les résonateurs positifs $(n_i \geq 0)$ et $\mathcal{R}es^{**}(Y)$ l'ensemble de tous les résonnateurs effectifs relativement à Y. En fait, les deux membres de l'inclusion ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments.

On appelle graduation du champ X toute application additive $\mathfrak{H}$ de $\mathcal{R}es^{**}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui est indivisible(*) et qui atteint son minimum p pour au moins ν^+ résonateurs indépendants. Autrement dit :

(6.5.15) $$\mathfrak{H}(n^1) = \mathfrak{H}(n^2) \dots = \mathfrak{H}(n^r) = p \qquad (r \geqslant \nu^+)$$

avec

(6.5.16) $$n^i = (n^i_1, \dots, n^i_\nu) \in \mathcal{R}es^{**} \quad \text{et} \quad \text{rang}\{n^1, n^2, \dots, n^r\} = \nu^+$$

Ce minimum p est dit niveau de la graduation $\mathfrak{H}$. Pour tout résonateur n , l'entier $\mathfrak{H}(n)$ est dit grade de n .

Si par linéarité on prolonge $\mathfrak{H}$ à l'espace $\mathcal{R}es$ de tous les résonateurs (à composantes de signe quelconque) on voit que l'équation $\mathfrak{H}(n) = p$ définit une face de l'enveloppe convexe de $\mathcal{R}es^{**}$ dans $\mathcal{R}es$. Un champ résonnant X admet donc en général plusieurs graduations. Inversement, toute graduation $\mathfrak{H}$ atteint son minimum pour des résonateurs $n^1, n^2, \dots, n^r$ qui sont nécessairement des éléments minimaux(**) de $\mathcal{R}es^{**}$. Comme ces derniers sont en nombre fini, X n'admet qu'un nombre fini de graduations. Les résonateurs n^i qui rendent $\mathfrak{H}$ minimale sont dits résonateurs de base de $\mathfrak{H}$.

Nous allons maintenant définir rayons propres et directeurs et, pour ce faire, introduire deux espaces commodes.

Définition 6.5.4. (Espace $\mathbb{E}_{\mathfrak{H}}$)

Soit une graduation $\mathfrak{H}$ avec ses r résonateurs de base $n^1, n^2, \dots, n^r$. On note $\mathbb{E}_{\mathfrak{H}}$ la surface de $\mathbb{C}^r$ formée par les suites $(\gamma^{n^1}, \gamma^{n^2}, \dots, \gamma^{n^r})$ qui sont additives en n , c'est-à-dire qui vérifient :

(*) Autrement dit $\mathfrak{H}(\mathcal{R}es^{**}) \not\subset q.\mathbb{N}$ dès que $q \geqslant 2$

(**) pour l'ordre naturel $(n \leq n') \Leftrightarrow (n_i \leq n'_i, \forall i)$

(6.5.17) $$\prod_n (\gamma^n)^{q_n} = \prod_n (\gamma^n)^{q'_n}$$

pour toute relation entière

(6.5.18) $$\sum_n q_n . n = \sum_n q'_n . n \qquad (q_n, q'_n \in \mathbb{N} ; q_n . q'_n = 0)$$

entre les résonateurs de base(*).

<u>Définition 6.5.5</u>. <u>(Espace</u> $\mathbb{E}_{\mathcal{H},\gamma}$)

Pour toute graduation $\mathcal{H}$ et tout point $\gamma = (\gamma^{n^1}, \ldots, \gamma^{n^r})$ de $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}$, on note $\mathbb{E}_{\mathcal{H},\gamma}$ l'espace tangent à $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}$ en γ. Il s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^r$ formé de toutes les suites $\delta = (\delta^{n^1}, \ldots, \delta^{n^r})$ telles que δ^n/γ^n soit additif en n. Autrement dit, pour toute relation (6.5.18) qui n'implique pas de γ^n nuls, on doit avoir :

(6.5.19) $$\sum_n q_n \cdot \frac{\delta^n}{\gamma^n} = \sum_n q'_n \cdot \frac{\delta^n}{\gamma^n}$$

Comme on cherche la solution du système dynamique réduit (6.5.9) sous la forme :

(6.5.20) $$y^m(z;u) = z^{-\frac{\mathcal{H}(m)}{p}} \cdot \left[\gamma^m + \sum_{1 \leq i < p^+} u_i \, \delta_i^m \, z^{\lambda_i/p} + (\ldots)\right]$$

il est naturel de poser :

<u>Définition 6.5.6</u>. <u>(Rayons propres et rayons dégénérés)</u>

On appelle <u>rayon propre</u> de X relativement à $\mathcal{H}$ tout point $\gamma = (\gamma^n)$ de $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}$ de coordonnées non toutes nulles et vérifiant :

(6.5.21) $$-\gamma^m = \sum_{\mathcal{H}(n)=p} b^{[m,n]} \gamma^m \gamma^n \qquad (\forall m, \mathcal{H}(m) = p)$$

c'est-à-dire

(*) de telles relations n'existent évidemment que si $r > p^+$.

$$(6.5.22) \qquad \begin{cases} \text{soit } \gamma^m = 0 \\ \text{soit } -1 = \sum_{\mathfrak{H}(n)=p} b^{[m,n]} \gamma^n \end{cases}$$

Si $\gamma \neq 0$ et si

$$(6.5.23) \qquad 0 = \sum_{\mathfrak{H}(n)=p} b^{[m;n]} \gamma^m \gamma^n \qquad (\forall m ; \mathfrak{H}(m)=p)$$

γ est dit rayon dégénéré.

Définition 6.5.7. (Directeurs)

Soit une graduation $\mathfrak{H}$ de niveau p et un rayon propre γ relatif à $\mathfrak{H}$. Alors l'endomorphisme linéaire :

$$(6.5.24) \qquad \delta^m \longmapsto \sum_{\mathfrak{H}(n)=p} b^{[m,n]} (\gamma^m \delta^n + \gamma^n \delta^m) \qquad (\forall m ; \mathfrak{H}(m)=p)$$

de l'espace $\mathbb{E}_{\mathfrak{H},\gamma}$ admet ν^+ valeurs propres dont l'une est toujours égale à -2 et dont les autres sont notées :

$$(6.5.25) \qquad \frac{\lambda_1}{p} - 1 \;,\; \frac{\lambda_2}{p} - 1 \;,\; \ldots ,\; \frac{\lambda_{\nu^+-1}}{p} - 1$$

Les scalaires λ_i ainsi définis sont dits directeurs du rayon γ. On leur adjoint le directeur trivial $\lambda_0 = -1$.

Remarque 1 : On vérifie que (6.5.24) est bien un endomorphisme de $\mathbb{E}_{\mathfrak{H},\gamma}$, autrement dit qu'il préserve les relations (6.5.19). Cela tient à la linéarité en m des coefficients $b^{[m;n]}$. En fait, cet endomorphisme possède deux espaces propres très différents :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{\mathfrak{H},\gamma} = \mathbb{E}'_{\mathfrak{H},\gamma} \oplus \mathbb{E}''_{\mathfrak{H},\gamma} \\ \mathbb{E}'_{\mathfrak{H},\gamma} = \{\delta^m ; \text{pour } \gamma^m \neq 0\} \;;\; \mathbb{E}''_{\mathfrak{H},\gamma} = \{\delta^m ; \text{pour } \gamma^m = 0\} \end{cases}$$

avec pour endomorphismes induits :

$$(6.5.26) \qquad \delta^m \longmapsto -\delta^m + \sum_{\mathfrak{H}(n)=p} b^{[m;n]} \gamma^m \gamma^n \qquad \text{sur } \mathbb{E}'_{\mathfrak{H},\gamma}$$

$$(6.5.27) \qquad \delta^m \longmapsto \delta^m \Big(\sum_{\mathcal{H}(n)=p} b^{[m;n]} \gamma^n \Big) \qquad \text{sur } \mathbb{E}''_{\mathcal{H},\gamma}$$

Si $r' = \dim \mathbb{E}'_{\mathcal{H},\gamma}$ et $r'' = \dim \mathbb{E}''_{\mathcal{H},\gamma}$ on aura donc r' directeurs λ_i de la forme

$$(6.5.28) \qquad \left\{ \frac{\lambda_1}{p} - 1 \, ; \, \frac{\lambda_2}{p} - 1 \, ; \, \dots , \frac{\lambda_{r'}}{p} - 1 \right\} = \{ \text{spectre de } (6.5.26) \}$$

et r'' directeurs λ_i de la forme :

$$(6.5.29) \qquad \left\{ \frac{\lambda_{r'+1}}{p} - 1 \, ; \, \frac{\lambda_{r'+2}}{p} - 1 , \dots , \frac{\lambda_{p^*-1}}{p} - 1 \right\} = \bigcup_{\gamma^m = 0} \left\{ \alpha \, ; \, \alpha = \sum_{\mathcal{H}(n)=p} b^{[m;n]} \gamma^n \right\}$$

Remarque 2 : Dans le cas où tous les multiplicateurs sont nuls :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_\nu = 0$$

on retombe(*) sur les champs X à partie linéaire nulle, objets du chaptitre 4. Toute suite entière positive ou semi-positive $n = (n_1, \dots, n_\nu)$ est alors un résonateur et on vérifie que pour la graduation canonique :

$$n = (n_1, \dots, n_\nu) \longmapsto \mathcal{H}(n) = \|n\| = n_1 + \dots + n_\nu$$

les notions de rayons propre, de niveau et de directeur qu'on vient de définir pour les champs résonnants généraux redonnent bien celles qui furent introduites au chapitre 4.

Lemme 6.5.2. (Relations a priori entre directeurs)

Soit un champ résonnant X et $\mathcal{H}$ l'une de ses graduations. Alors, génériquement, $\mathcal{H}$ ne possède que des rayons propres isolés (nécessairement en nombre fini) et pas de rayon dégénéré. Dans ce cas générique on a toujours :

$$(6.5.30) \qquad \sum_\gamma \frac{1}{\lambda_1(\gamma) \dots \lambda_{p^*-1}(\gamma)} = 1$$

(*) puisqu'on a provisoirement supposé diagonalisable la partie linéaire du champ.

la somme étant étendue à tous les rayons propres γ relatifs à $\mathcal{H}$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.1.4. On note l'absence dans (6.5.30) du directeur trivial $\lambda_0 = -1$ et du niveau p . C'est précisément pour ne pas avoir p dans les relations a priori qu'on l'introduit dans la définition des directeurs. On note également l'absence de toute relation a priori entre directeurs relatifs à des graduations différentes.

Proposition 6.5.2. (Forme élémentaire)

Soit X un champ aux multiplicateurs λ_i présentant ν^+ degrés de résonance positive. Soit $\mathcal{H}$ une graduation de niveau p et soit $\gamma = (\gamma^m)$ un rayon propre relatif à cette graduation. Alors, si les directeurs λ_j ne sont pas en résonance $(\nu = 0)$ on peut dans l'algèbre réduite(*) effectuer un changement de variables(**) :

$$y^m \longmapsto h^m(z_0, z_1, \ldots, z_{\nu^+-1}) \in \mathbb{C}[[z_j]] \qquad (\forall m, \langle m, \lambda\rangle = 0) \tag{6.5.31}$$

tel que

$$h^{m^1}(z) . h^{m^2}(z) \equiv h^{m^1+m^2}(z) \qquad (\forall m^1, m^2 \perp \lambda) \tag{6.5.32}$$

$$h^m(z_0, 0, \ldots, 0) = \gamma^m . (z_0)^{\mathcal{H}(m)} + o\left((z_0)^{\mathcal{H}(m)}\right) \tag{6.5.33}$$

et tel que, relativement aux variables z_j ,le champ réduit revête la forme :

$$Z = \frac{1}{p} \; \frac{(z_0)^p}{1 + \rho(z_0)^p} \cdot \sum_{0 \leq j < \nu^+} \lambda_j \; z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \qquad (\lambda_0 = -1) \tag{6.5.34}$$

(*) Rappelons que c'est l'algèbre invariante engendrée par les monômes y^m résonnant (voir lemme 6.5.1)

(**) Ce changement de variables est du type "éclatement" en ce sens qu'il n'est généralement pas inversible. Dans le cas général, en effet, z_j n'appartient pas à l'algèbre réduite (engendrée par les monômes y^m semi-positifs) mais au corps des fractions de cette algèbre.

Le champ Z est dit <u>forme élémentaire</u> du champ réduit. Le scalaire ρ est dit <u>résiduit</u> (résidu itératif).

La vérification est élémentaire. Bien entendu, γ^{m} n'est au départ défini que pour les résonateurs de base $\left(\mathfrak{H}(m)=p\right)$ mais on l'étend par m-additivité à tous les résonateurs.

Relativement aux variables z_j les système dynamique <u>réduit</u> s'écrit :

$$(6.5.35) \qquad \frac{\partial}{\partial_z} z_j = \lambda_j\, z_j\, (z_0)^p \cdot \left[1+\rho\,(z_0)^p\right]^{-1} \qquad \left(0\leq j<\nu^+\right)$$

et le système dynamique <u>complet</u> s'écrit :

$$(6.5.36) \qquad \frac{\partial}{\partial_z} y_i = y_i \cdot \left[\lambda_i + \varphi_i(z)\right] \qquad \left(1\leq i\leq \nu\right)$$

où $\varphi_i(z)$ est la série entière des z_j obtenue en portant (6.1.31) dans (6.5.8). Nous allons voir qu'on peut en fait choisir les variables y_i de manière à n'avoir dans chaque série $\varphi_i(z)$ qu'un terme en $(z_0)^p$ et que des termes en $(z_0)^q \prod\limits_{j\geq 1}(z_j)$ avec $1\leq q<p$.

<u>Proposition 6.5.3</u>. (<u>Forme normale</u>)

Pour chaque graduation $\mathfrak{H}$ et chaque rayon propre γ à directeurs non résonnants il existe une forme prénormale (6.5.4) privilégiée pour laquelle les systèmes dynamiques <u>réduit</u> et <u>complet</u> s'écrivent respectivement :

$$(6.5.37) \qquad \frac{\partial}{\partial_z} z_j = \lambda_j\, z_j\, (z_0)^p \left[1+\rho\,(z_0)^p\right]^{-1} \qquad \left(0\leq j<\nu^+\right)$$

$$(6.5.38) \qquad \frac{\partial}{\partial_z} y_i = y_i \cdot \left[\lambda_i + \tau_i\,(z_0)^p + \sum_{q=1}^{p-1} \varphi_{i,q}(z)\,(z_0)^q\right] \cdot \left[1+\rho\,(z_0)^p\right]^{-1} \qquad \left(1\leq i\leq \nu\right)$$

avec

$$(6.5.39) \qquad \varphi_{i,q}(z) \in \mathbb{C}\,[\![z_1, z_2, \ldots, z_{\nu^+-1}]\!]$$

Cette forme (6.5.4) privilégiée est dite <u>normale</u>. Elle est unique modulo une dilatation élémentaire des variables.

En général, les formes normales Y associées aux divers couples $(\mathfrak{G};\gamma)$ diffèrent entre elles. Toutefois :

<u>Proposition 6.5.4.</u> (<u>Invariants formels</u>)

Pour tout couple $(\mathfrak{G};\gamma)$ les coefficients de la forme normale correspondante constituent un système complet et libre d'invariants formels du champ. On obtiendrait un système équivalent en prenant les coefficients des séries $\varphi_{i,q}(z)$ de (6.5.38), ces séries étant bien sûr considérées comme définies modulo une dilatation élémentaire des variables.

Ce procédé de calcul des invariants formels n'est en défaut que lorsque <u>chacun</u> des rayons γ relatifs à <u>chacune</u> des graduations $\mathfrak{G}$ a ses directeurs en résonance $(\mathcal{L}>0)$ ou plus exactement en résonance positive $(\mathcal{L}^+>0)$. On recourt dans ce cas à la <u>méthode de l'arborescence</u>, qui est expliquée aux sections 10.3 et 10.4.

Revenons au cas générique (directeurs non résonnants). Pour le calcul des invariants formels, nous venons de le voir, un <u>seul</u> couple $(\mathfrak{G};\gamma)$ suffit. Au contraire, pour obtenir l'ensemble des invariants holomorphes, il nous faudra envisager non pas un, mais <u>tous</u> les couples $(\mathfrak{G};\gamma)$. Cela dit, la proposition 6.5.3 conduit tout droit aux intégrales formelles $x(z;u)$ du champ X et par là-même prépare aux trois quarts le terrain pour la construction des invariants holomorphes. Mais avant d'aborder cette construction, il semble à propos de donner quelques précisions sur la notion de <u>graduation</u>, qui constitue la principale nouveauté par rapport aux champs à partie linéaire nulle, et de signaler le très curieux phénomène de la <u>résonance héréditaire</u>.

SECTION 6.6 : COMPLEMENTS SUR LES GRADUATIONS. LE PHENOMENE DE LA RESONANCE HEREDITAIRE.

La présente section éclaire et justifie certains développements ultérieurs, mais elle n'est pas indispensable à la compréhension logique de la suite de l'ouvrage. Le lecteur pressé peut donc la négliger.

Commençons par passer en revue plusieurs types de résonance, en privilégiant à chaque fois le cas <u>générique</u>, c'est-à-dire le cas où les formes (6.2.2) comportent effectivement tous les monômes résonnants y^m qu'elles sont susceptibles de comporter. Autrement dit :

$$\mathcal{R}es^{**} = \mathcal{R}es^{*}$$

Cas où tous les λ_i sont nuls.

Il revient au même de dire que $\rho^+ = \nu$ (degré de résonance = dimension). En l'absence de partie linéaire nilpotente, cela conduit à des champs X à partie linéaire nulle. D'où deux manières de définir les rayons propres et les directeurs : celle de la section 4.1 et celle de la section précédente. Comme nous l'avons signalé, elles coïncident pour la graduation canonique $\mathfrak{H}(m) = \|m\| = \sum m_i$

Cas où chaque λ_i n'est impliqué que dans une seule relation de résonance positive (au plus).

Cela veut dire que l'on a une partition $J_0 \cup J_1 \cup \ldots J_{\rho^+}$ de l'ensemble $\{1,2,\ldots,\nu\}$ et ρ^+ relations indivisibles de résonance positive :

$$\text{(6.6.1)} \qquad \sum_{j \in J_i} m^i_j \lambda_j = 0 \quad \text{avec } m^i_{j_1}, m^i_{j_2}, \ldots, m^i_{j_{n_i}} \text{ premiers entre eux} \qquad (1 \leq i \leq \rho^+)$$

Relativement aux coordonnées résonnantes y_i le champ réduit s'écrira :

$$\text{(6.6.2)} \qquad Y_{\text{réduit}} = \sum_{i=1}^{\rho^+} \left[\sum_{j=1}^{\rho^+} \beta^{[m^i, m^j]} u_j + (\text{degré} \geq 2 \text{ en } u) \right] u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

avec bien sûr

$$\text{(6.6.3)} \qquad u_i = y^{m^i} = \prod_{j \in J_i} (y_j)^{m^i_j}$$

On voit donc que, dans ce cas bien particulier, le champ réduit s'identifie à un champ à partie linéaire nulle et à hyperplans invariants. Ce cas a été édudié à la fin de la section 4.1 et nous avons vu qu'il conduisait à des calculs particulièrement simples (rationnels).

Quand ν est pair, quand $J_0 = \{\phi\}$, $J_i = \{i, i+\frac{\nu}{2}\}$ et quand les relations (6.6.1) revêtent la forme $\lambda_i + \lambda_{i+\frac{\nu}{2}} = 0$, on a une situation qui évoque les champs hamiltoniens. Toutefois, les champs hamiltoniens sans résonance extrinsèque(*) ont toujours un champ réduit qui est nul, ce qui rend vaine toute recherche de graduations ou de rayon propres (Voir chapitre 8).

<u>Cas où la résonance positive est maximale</u> $(\nu^+ = \nu - 1)$

Bien qu'on puisse avoir $\nu^+ = \nu$ $\left(\text{lorsque } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_\nu = 0\right)$, ce cas est si spécial qu'on réserve le nom de <u>résonance maximale</u> au cas $\nu^+ = \nu - 1$. La résonance maximale implique la commensurabilité de tous les λ_i . Donnons une idée de la diversité des graduations qu'on peut alors rencontrer, en nous limitant aux cas les plus simples, à savoir $(\nu^+, \nu) = (2,3)$ ou $(3,4)$ et sous l'hypothèse de généricité $\mathcal{R}es^* = \mathcal{R}es^{**}$, hypothèse qui semble bien impliquer que les graduations sont toutes de niveau $\mu = 1$ (**).

<u>Exemple 1</u>. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2 \times 7 \, , \, 3 \times 19 \, , \, -6 \times 13)$

Il existe dans le cas générique trois résonateurs minimaux(***) et tous positifs :

$$m^1 = (3 \times 13 \, , 0 \, , 7)$$
$$m^2 = (0 \, , 2 \times 13 \, , 19)$$
$$m^3 = (3 \, , 2 \, , 2) = \frac{1}{13}(m^1 + m^2)$$

(*) i.e. pour lesquels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{\nu}{2}}$ sont rationnellement indépendants.

(**) Ce fait, qui se vérifie sur tous nos exemples, est facile à prouver pour $\nu = 3$ mais il serait intéressant de l'établir en toute généralité.

(***) minimaux relativement à l'ordre naturel $(m \leq m') \Leftrightarrow (m_i \leq m'_i)$

et deux graduations $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ caractérisées par :

$$\mathcal{H}_1(m^1) = \mathcal{H}_1(m^3) = 1 \qquad \text{mais} \quad \mathcal{H}_1(m^2) = 12$$

$$\mathcal{H}_2(m^2) = \mathcal{H}_2(m^3) = 1 \qquad \text{mais} \quad \mathcal{H}_2(m^1) = 12$$

Exemple 2 : $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 4, -7)$

Ici encore il existe dans le cas générique trois résonateurs minimaux, mais deux d'entre eux sont semi-positifs :

$$m^1 = (-1, 13, 7)$$
$$m^2 = (13, -1, 5)$$
$$m^3 = (1, 1, 1) = \tfrac{1}{12}(m^1 + m^2)$$

et il existe deux graduations $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ caractérisées par

$$\mathcal{H}_1(m^1) = \mathcal{H}_1(m^3) = 1 \qquad \text{mais} \quad \mathcal{H}_1(m^2) = 11$$

$$\mathcal{H}_2(m^2) = \mathcal{H}_1(m^3) = 1 \qquad \text{mais} \quad \mathcal{H}_2(m^1) = 11$$

Exemple 3 : $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (8, 3, -2)$

Il existe ici dans le cas générique un résonateur minimal semi-positif et deux résonateurs minimaux positifs :

$$m^1 = (-1, 4, 2)$$
$$m^2 = (1, 0, 4)$$
$$m^3 = (0, 2, 3) = \tfrac{1}{2}(m^1 + m^2)$$

et une seule graduation $\mathcal{H}$ caractérisée par :

$$\mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = \mathcal{H}(m^3) = 1$$

Cet exemple montre qu'il peut très bien exister plus de ν^+ résonateurs donnant à $\mathcal{H}$ sont minimum .

Exemple 4 : $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 5, -1)$

Il existe ici dans le cas générique trois résonateurs minimaux, dont deux semi-positifs :

$$m^1 = (-1, 1, 2)$$
$$m^2 = (2, -1, 1)$$
$$m^3 = (1, 0, 3) = m^1 + m^2$$

et une seule graduation $\mathcal{H}$ caractérisée par :

$\mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = 1$ mais $\mathcal{H}(m^3) = 2$.

Exemple 5. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (3, 4, 5, -1)$

Ici encore il existe dans le cas générique une graduation unique $\mathcal{H}$ qui atteint son minimum pour les trois résonateurs semi-positifs suivants :

$$m^1 = (-1, 1, 0, 1)$$
$$m^2 = (0, -1, 1, 1)$$
$$m^3 = (2, 0, -1, 1)$$

Il existe bien ici des résonateurs minimaux positifs m, mais pour chacun d'eux $\mathcal{H}(m) > 1$.

Les exemples 4 et 5 montrent que, même dans le cas générique $Res^{*} = Res^{**}$ une graduation peut très bien n'atteindre son minimum que pour des générateurs semi-positifs. En fait cette conjoncture, lorsqu'elle se produit, présente des particularités si notables qu'il faut l'étudier à part.

Supposons donc qu'une graduation $\mathcal{H}$ ait une base (purement) semi-positive, c'est-à-dire qu'elle atteigne son minimum p pour exactement ν^+ résonateurs m^i semi-positifs. Quitte à changer l'indexation, on peut toujours supposer que le résonateur m^i ait précisément sa i-ème coordonnée égale à -1. La graduation $\mathcal{H}$ a donc pour base $m^1, m^2, \dots, m^{\nu^+}$ avec

(6.6.4) $$m^i = (m^i_1, \dots, m^i_\nu) \text{ et } m^i_i = -1 \; ; \; m^i_j \geqslant 0 \text{ si } i \neq j \qquad (i \leqslant \nu^+ ; j \leqslant \nu)$$

Soient $y_1, \dots, y_\nu$ les coordonnées résonnantes (6.2.2). Le système dynamique complet s'écrit :

(6.6.5) $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} y_i = y_i \cdot \left[\lambda_i + b_i^{m^i} y^{m^i} + (\text{termes de grade} > p)\right] & (1 \leqslant i \leqslant \nu^+) \\ \frac{\partial}{\partial z} y_i = y_i \cdot \left[\lambda_i + (\text{termes de grade} > p)\right] & (\nu^+ < i \leqslant \nu) \end{cases}$$

et le système dynamique réduit s'écrit :

(6.6.6) $$\frac{\partial}{\partial z}(y^{m^i}) = y^{m^i} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\nu} m^i_j \, b_j^{m^j} + (\text{grade} > p)\right] \qquad (1 \leqslant i \leqslant \nu^+)$$

avec bien sûr

(6.6.7) $$y^{m^i} = y_1^{m_1^i} \dots y_\nu^{m_\nu^i}$$

Pour mieux faire ressortir la particularité de ce cas, examinons le cas exactement opposé, celui où $\mathfrak{H}$ possède une base purement positive $m^1, m^2, \dots, m^{\nu^+}$:

(6.6.8) $$\mathfrak{H}(m^1) = \mathfrak{H}(m^2) = \dots \mathfrak{H}(m^{\nu^+}) = p \quad \text{avec } \mathrm{rang}\{m^i\} = \nu^+ \text{ et } m^i_j \geq 0$$

Les systèmes complet et réduit s'écrivent alors respectivement :

(6.6.9) $$\frac{\partial}{\partial z} y_i = y_i \left[\lambda_i + \sum_j b_i^{m^j} y^{m^j} + (\text{grade} > p) \right] \qquad (i \leq \nu)$$

(6.6.10) $$\frac{\partial}{\partial z}(y^{m^i}) = y^{m^i} \left[\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu^+} m_k^i \, b_k^{m^j} y^{m^j} + (\text{grade} > p) \right] \qquad (i \leq \nu^+)$$

Ainsi donc, pour une graduation à base (purement) positive, le système réduit fait intervenir (au grade p) les $\nu^+ \times \nu^+$ coordonnées

(6.6.11) $$b^{[m^i, m^j]} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k^i \, b_k^{m^j} \qquad (i, j \leq \nu^+)$$

du champ réduit et présente exactement $\nu^+(\nu^+ - 1)$ degrés de liberté effectifs(*). C'est suffisant pour permettre aux directeurs relatifs à de telles graduations de prendre des valeurs arbitraires. Au contraire, pour une graduation à base (purement) semi-positive, le système réduit (6.6.6) ne fait intervenir que les ν^+ paramètres $b_i^{m^i}$. En fait même ces ν^+ degrés de liberté s'avèrent illusoires car une dilation $y_i \mapsto c_i y_i$ peut rendre les $b_i^{m^i}$ égaux à 1, auquel cas le système réduit s'écrit :

(6.6.12) $$\frac{\partial}{\partial z}(y^{m^i}) = y^{m^i} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\nu^+} m_j^i \cdot y^{m^j} + (\text{grade} > p) \right] \qquad (i \leq \nu^+ ; m_i^i = -1)$$

On a donc une situation complètement rigide : au grade p , qui seul importe pour la recherche des rayons propres et des directeurs, seules interviennent les coordon-

(*) En effet, quitte à dilater les coordonnées $y_i \mapsto c_i y_i$, on peut toujours s'arranger pour que $b^{[m^i, m^i]} = 0$ ou -1 pour chaque i .

nées m^i_j des résonateurs de base, qui sont entières et complètement déterminées par les multiplicateurs du champ. Mais il y a plus : la rigidité de la situation force une partie des directeurs (la moitié environ) à être rationnels et, partant, en résonance mutuelle :

Proposition 6.6.1. (Graduations à base semi-positive et rationnalité des directeurs)

Soit un champ résonnant X et une graduation $\mathcal{H}$ à base semi-positive :

(6.6.13) $$\mathcal{H}(m^1) = \dots \mathcal{H}(m^{\ell^+}) = p$$

(6.6.14) $$m^i = (m^i_1, \dots, m^i_\nu)\ ;\ \text{rang}\{m^1, \dots, m^{\ell^+}\} = \ell^+\ ;\ m^i \text{ semi-positifs}$$

Alors les rayons propres $\gamma = (\gamma^{m^1}, \gamma^{m^2}, \dots, \gamma^{m^{\ell^+}})$ ne dépendent que des entiers m^i_j et ont leurs coordonnées γ^{m^i} soit nulles, soit rationnelles. Il existe en général $C^q_{\ell^+}$ rayons possédant q coordonnées nulles, soit en tout $2^{\ell^+}-1$ rayons propres(*). Quant aux directeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell^+-1}$ associés aux rayons propres, ils ne dépendent eux aussi que des entiers m^i_j. De plus, les rayons qui ont q coordonnées nulles possèdent au moins q directeurs rationnels.

Ajoutons que, pour tout rayon, la somme des directeurs non triviaux est toujours rationnelle et qu'on a donc toujours au moins un degré de résonance impliquant le directeur trivial :

$$m_0\, \lambda_0 + m\,(\lambda_1 + \dots \lambda_{\ell^+-1}) = 0 \qquad (m_0 \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^*)$$

Preuve : Les directeurs de (6.6.12) se calculent comme les directeurs de (4.1.4). Il suffit de poser $y^{m^i} = x_i$, $m^i_j = a_{ij}$ et d'appliquer la méthode indiquée à la fin de la section 4.1.

Cette tendance à la rationnalité que présentent les directeurs des champs résonnants est lourde de conséquences. En effet :

(*) car une coordonnée γ^{m^i} au moins doit être $\neq 0$.

Proposition 6.6.2. (Résonance héréditaire)

Il existe effectivement des champs à multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ en résonance positive $(\rho^+ > 0)$ qui, dans le cas générique $Res^* = Res^{**}$, possédent une graduation $\mathfrak{H}$ à base semi-positive et qui, de ce fait, induisent automatiquement de la résonance $(\rho\!\!\!/ > 0)$ chez les directeurs correspondants. Cette résonance des directeurs peut elle aussi être positive $(\rho\!\!\!/^+ > 0)$ et peut, dans certains cas, se transmettre automatiquement aux directeurs $\lambda\!\!\!/\!\!\!/_i$ de seconde génération, voire même aux directeurs $\lambda\!\!\!/\!\!\!/\!\!\!/_i$, $\lambda\!\!\!/\!\!\!/\!\!\!/\!\!\!/_i$ ... de troisième, quatrième... génération. On parle alors de résonance héritidaire sur deux, trois, quatre, cinq... générations.

Notons qu'on s'arrête forcément au bout de $(\nu-1)$ génération (ou avant) car le degré de résonance baisse d'au moins une unité à chaque génération :

$$\rho^+ > \rho\!\!\!/^+ > \rho\!\!\!/\!\!\!/^+ > \rho\!\!\!/\!\!\!/\!\!\!/^+ > \ldots \tag{6.6.14}$$

Démonstration : Les exemples 4 et 5 ci-dessus montrent l'existence de champs résonnants qui possèdent une graduation à base semi-positive. L'existence de résonance héréditaire sur n génération (n imposé) est plus difficile à établir. Contentons-nous ici de donner un exemple de résonance héréditaire sur trois générations. Reprenons pour cela l'exemple 5. On avait :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (3, 4, 5, -1)$$

et, dans le cas générique, il existait une graduation $\mathfrak{H}$ unique, de niveau $p = 1$ et de base semi-positive :

$$m^1 = (-1,1,0,1)\ ,\ m^2 = (0,-1,1,1)\ ,\ m^3 = (2,0,-1,1)\ ,\ \mathfrak{H}(m^1) = \mathfrak{H}(m^2) = \mathfrak{H}(m^3) = 1$$

A l'ordre p, le système dynamique réduit s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial z}(y^{m^1}) = y^{m^1}\cdot(-y^{m^1} + y^{m^2} + \ldots)\ ;\ \frac{\partial}{\partial z}(y^{m^2}) = y^{m^2}\cdot(-y^{m^2} + y^{m^3} + \ldots)\ ;\ \frac{\partial}{\partial z}(y^{m^3}) = y^{m^3}(2y^{m^1} - y^{m^3} + \ldots)$$

On applique alors les formules de la fin de la section 4.1 en faisant $m^i_j = a_{ij}$ et on trouve :

rayons propres	directeurs
$\gamma = (\gamma^{m^1}, \gamma^{m^2}, \gamma^{m^3}) = (1,0,0)$	$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (-1,1,3)$
$= (0,1,0)$	$= (-1,1,2)$
$= (0,0,1)$	$= (-1,1,2)$
$= (2,1,0)$	$= (-1,-2,5)$
$= (0,2,1)$	$= (-1,-2,3)$
$= (1,0,3)$	$= (-1,-3,4)$
$= (3,4,5)$	$\lambda_0 = -1,\ \lambda_1+\lambda_2 = 13,\ \lambda_1\lambda_2 = 60$

Regardons quels triplets $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ sont susceptibles d'induire de la résonance à la troisème génération(*)

Le dernier triplet, qui correspond à l'unique rayon propre à coordonnées toutes $\neq 0$, ne le peut pas, car les directeurs ne vérifient qu'une seule relation de résonance : $13\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

Le triplet $\lambda = (-1,1,3)$ ne le peut pas non plus, car son unique graduatio $\mathfrak{N}$ atteint son minimum pour deux résonateurs semi-positifs et un résonateur positif :

$$\begin{cases} \mathfrak{N}(m^1) = \mathfrak{N}(m^2) = \mathfrak{N}(m^3) = 1 \\ m^1 = (2,-1,1)\ ,\ m^2 = (0,3,-1)\ ,\ m^3 = (1,1,0) = \frac{1}{2}(m^1 + m^2) \end{cases}$$

Même chose pour le triplet $\lambda = (-1,-2,5)$. Son unique graduation atteint son minimum pour trois résonateurs dont le dernier est positif :

(*) c'est-à-dire de produire des λ_i (directeurs de seconde génération ou si l'on préfère multiplicateurs de troisième génération) qui soient en résonance.

$$\begin{cases} \mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = \mathcal{H}(m^3) \\ m^1 = (-1,3,1)\ ,\ m^2 = (7,-1,1)\ ,\ m^3 = (1,2,1) = \frac{3}{4}m^1 + \frac{1}{4}m^2 \end{cases}$$

Même chose pour le triplet $\lambda = (-1,-2,3)$, lui aussi à graduation unique :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = \mathcal{H}(m^3) \\ m^1 = (-1,2,-1)\ ,\ m^2 = (5,-1,-3)\ ,\ m^3 = (1,1,1) = \frac{2}{3}m^1 + \frac{1}{3}m^2 \end{cases}$$

Le triplet $\lambda = (-1,-3,4)$ non plus ne peut pas induire de résonance générique car il possède trois résonateurs minimaux :

$$m^1 = (-1,3,2)\ ,\ m^2 = (7,-1,1)\ ,\ m^3 = (1,1,1) = \frac{2}{5}m^1 + \frac{1}{5}m^2$$

S'il existait une graduation $\mathcal{H}$ à base semi-positive on aurait :

$$\mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = p = \text{minimum}\ ;\ \text{et}\ \mathcal{H}(m^3) = \frac{2}{5}\mathcal{H}(m^1) + \frac{1}{5}\mathcal{H}(m^2) = \frac{3}{5}p$$

Ce qui est impossible.

Il ne reste plus que le triplet $\lambda = (-1,1,2)$ relatif au rayon (0,1,0) et aussi au rayon (0,0,1) . Ce triplet λ admet, lui, une graduation unique $\mathcal{H}$ à base semi-positive :

$$\mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = 1 \quad \text{avec} \quad m^1 = (-1,1,1)\ \text{et}\ m^2 = (2,-1,0)$$

A cette graduation $\mathcal{H}$ de seconde génération correspondent trois rayons γ de seconde génération et à chacun de ces γ se trouve associé un couple $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ de directeurs de seconde génération. Le calcul donne :

rayons propres	directeurs
$\gamma = (\gamma^{m^1}, \gamma^{m^2}) = (1,0)$	$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) = (-1,3)$
$= (0,1)$	$= (-1,2)$
$= (2,3)$	$= (-1,6)$

Chacun des trois couples λ présente un degré de résonance positive $(\nu^+ = 1)$. On a donc là un exemple de champ de dimension 4 avec, <u>génériquement</u>, de la résonance positive étagée sur trois générations :

$$\nu^+ = 3 \quad , \quad \nu^+ = 2 \quad , \quad \nu^+ = 1$$

Nous retiendrons de tout ceci que les directeurs, même s'ils ne résonnent que rarement, résonnent tout de même plus souvent que presque jamais. Ce phénomène de la résonance héréditaire montre que la technique de l'arborescence et des temps parallèles qui est développée au chapitre 10, répond à un besoin très réel et que les étonnantes structures qui s'y rattachent possèdent un solide fondement dans la nature des choses.

SECTION 6.7. LE CAS A PLUSIEURS DEGRES DE RESONANCE (SUITE). INVARIANTS HOLOMORPHES.

Abordons maintenant les champs X à multiplicateurs en résonance multiple. Pour ne pas mélanger les difficultés, écartons provisoirement la résonance virtuelle $(\nu = 0)$ et supposons provisoirement que la partie linéaire du champ soit diagonalisable(*). Avec les multiplicateurs λ_i on construit les trois réseaux $\Omega^{int} \subset \Omega \subset \Omega^{ext}$ comme à la définition (6.5.1) puis on fixe une base $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_\chi^*$ de Ω, ce qui permet de mettre ce réseau en bijection avec une partie $\mathcal{N}_1$ de $\mathbb{Z}^\chi$.

(6.7.1) $\mathcal{N}_1 \longrightarrow \Omega \ : \ n = (n_i) \longmapsto \omega = n_1 \lambda_1^* + \dots n_\chi \lambda_\chi^*$

Proposition 6.7.1. (Le cas $\nu^+ \geqslant 1$, $\nu = 0$. Allure de l'intégrale formelle. Paramètres de première et seconde générations)

Soit X un champ à multiplicateurs λ_i présentant ν^+ degrés de résonance positive. Soit $\mathfrak{H}$ une graduation de X et soit un rayon propre γ de niveau p, de résiduit ρ et de directeurs λ_j non résonnants. Alors au couple $(\mathfrak{H}; \gamma)$ est associée une intégrale formelle $x(z; u)$ qui est fonction :

- du temps z

(*) Donc pas de termes de Jordan nilpotents dans la partie linéaire.

- de χ paramètres $u_1, u_2, \dots, u_\chi$ qui sont associés à la dimension $\chi = \nu - \rho^+$ du réseau Ω et qui sont dits paramètres de <u>première génération</u> (en abrégé $\mathrm{gen}(u_i) = 1$).
- $\rho^+ - 1$ paramètres $u_{\chi+1}, u_{\chi+2}, \dots, u_{\nu-1}$ qui sont associés à la résonance positive et qui sont dits paramètres de <u>seconde génaration</u> (en abrégé $\mathrm{gen}(u_i) = 2$).

L'intégrale formelle s'écrit :

$$x(z; u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} u^n . z^{[n]} . \Phi^n(z) \tag{6.7.2}$$

- avec un réservoir d'indices $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \quad (\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{Z}^\chi,\ \mathcal{N}_2 = \mathbb{N}^{\rho^+-1})$
- avec des composantes $\Phi^n_i(z) \in \mathbb{C}[[\mathfrak{z}^{-1/p}]]$ pour $z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$
- et avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$ de la forme :

$$z^{[n]} = \mathfrak{z}^{\sigma(n)} . e^{\omega(n) \mathfrak{z}} \prod_{q=1}^{p-1} e^{\omega_{q/p}(n) \mathfrak{z}^{q/p}} \tag{6.7.3}$$

- où $n \mapsto \omega(n)$ est l'isomorphisme de $\mathcal{N}_1$ sur Ω qui inverse (6.7.1)
- où $n \longmapsto \omega_{q/p}(n)$ est la forme additive définie en (6.7.11) ci-dessous
- où $n \longmapsto \sigma(n)$ est la forme suradditive définie en (6.7.12) ci-dessous

Cette intégrale formelle relative à $(\mathcal{H}, \gamma)$ est <u>unique</u> modulo une translation temporelle(*) et une dilatation élémentaire des paramètres(**).

<u>Preuve</u> : On prend les variables normales y_i de la proposition 6.5.3. puis on intègre le système dynamique réduit (6.5.37) et on trouve :

$$z_0 = \mathfrak{z}^{-1/p} \quad , \quad z_i = u_{i+\chi}\, \mathfrak{z}^{\lambda_i/p} \qquad (1 \leq i < \rho^+) \tag{6.7.4}$$

(*) une translation sur z et non sur $\mathfrak{z}$ (**) $u_i \mapsto c_i u_i$

On intégre ensuite le système dynamique complet (6.5.38) et on trouve :

(6.7.5) $$y_i = u^{n(\lambda_i)} \cdot z^{\tau_i} \exp(\lambda_i z) \exp(R_i(z)) \exp(S_i(z, u_i))$$

avec

(6.7.6) $$R_i(z) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{p}{q} \varphi_{i,p-q}(0) \cdot z^{q/p}$$

(6.7.7) $$S_i(z; 0, \ldots, 0) = 0$$

(6.7.8) $$\frac{\partial}{\partial z} S_i(z; u_{\chi+1}, u_{\chi+2}, \ldots, u_{\nu-1}) \in \mathbb{C}[[z^{-1/p}; u_{\chi+i} z^{\lambda_i/p} (1 \leq i < \rho^+)]]$$

De (6.7.7) et (6.7.8) on tire :

(6.7.9) $$\exp S_i(z; u_i) \in [[z^{-1/p}; u_{\chi+i} z^{\lambda_i/p+1} \quad (1 \leq i < \rho^+)]]$$

Portant (6.7.9) dans les relations (6.7.5) puis portant (6.7.5) dans les relations :

(6.7.10) $$x_i = h_i(y_1, \ldots, y_\nu) \qquad (h_i(y) \in \mathbb{C}[[y]])$$

qui font passer des variables normales y_i aux variables données x_i, on trouve bien une intégrale formelle du type (6.7.2) avec des formes additives $\omega_{q/n}(n)$ définies par :

(6.7.11) $$\omega_{q/p}(n) = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\nu} n_i \varphi_{i,p-q}(0)$$

et une forme suradditive $\sigma(n)$ définie par :

(6.7.12) $$\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sigma_2(n)$$

(6.7.13) $$\sigma_1(n) = \underset{\sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{\chi} n_i \lambda_i^*}{\text{"sup réel"}} \sum_{i=1}^{\nu} n_i \tau_i$$

(6.7.14) $$\sigma_2(n) = \sum_{1 \leq i < \rho^+} n_{\chi+i} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_i}{p}\right)$$

On note qu'en fait la forme $\sigma_1(n)$ ne dépend que de la projection de n sur $\mathcal{N}_1$ (indices de première génération) et qu'elle est additive, tandis que la forme $\sigma_2(n)$ ne dépend que de la projection de n sur $\mathcal{N}_2$ (indices de seconde génération) et qu'elle est suradditive :

(6.7.15) $$\sigma_2(n+n') = \sigma_2(n) + \sigma_2(n') + \frac{q(n,n')}{p} \quad \text{avec } q(n,n') \in \mathbb{N}$$

Ce dernier point découle de l'implication :

(6.7.16) $$\left(\langle m,\lambda\rangle = 0\right) \Rightarrow \left(\langle m,\tau\rangle = -\frac{\mathcal{H}(m)}{p}\right)$$

qui vérifient automatiquement les constantes τ_i de la forme normale (6.5.38).

<u>Proposition 6.7.2.</u> (<u>Le cas</u> $p^+ \geq 1$, $p_- = 0$. <u>Résurgence de l'intégrale formelle</u>)

L'intégrale formelle $x(z;u)$ est résurgente(*) en z . Elle a pour réseau de résurgence le relevé Ω_p de Ω sur $\mathbb{C}_p$ (**) et elle vérifie les équations de résurgence :

(6.7.17) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

pour des opérateurs différentiels de la forme :

(6.7.18) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\dot\omega)} \cdot \left\{ A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\text{gen}\, u_i = 1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\text{gen}\, u_i = 2} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec

(6.7.19) $$u^{n(\dot\omega)} = u_1^{n_1(\dot\omega)} \cdots u_\chi^{n_\chi(\dot\omega)} \qquad \left(\Omega_p \to \Omega \to \mathcal{N}_1 : \omega \mapsto \dot\omega \mapsto n(\dot\omega)\right)$$

et avec des coefficients $A^i_\omega(u)$ qui sont fonction des seuls paramètres u_i de <u>seconde génération</u> :

(*) Au sens ordinaire lorsque le réseau intérieur Ω^{int} est <u>discret</u>, et au sens "monogène" lorsqu'il ne l'est pas. Voir à ce sujet les sections 6.2 et 1.3.

(**) et même surdéterminés, ce qui permet des vérifications dans les calculs.

(6.7.20) $\quad \mathcal{A}^{0}_{\omega}(u), \mathcal{A}^{1}_{\omega}(u), \ldots, \mathcal{A}^{\nu-1}_{\omega}(u) \in \mathbb{C}[[u_i \,;\, \text{gen}\, u_i = 2]]$

Les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_{\omega}$ sont entièrement déterminés(*) par (6.7.17) et ce sont des invariants holomorphes du champ X .

Bien noter la juxtaposition dans (6.7.18) des opérateurs $u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ pour $\text{gen}\, u_i = 1$ et des opérateurs $\frac{\partial}{\partial u_i}$ pour $\text{gen}\, u_i = 2$.

Proposition 6.7.3 (Le cas $\mu^{+} \geq 1, \mu_{-} : 0$. Invariants holomorphes)

Soient $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$ les graduations du champ X . Elles sont en nombre fini et, dans le cas générique, elles possèdent respectivement $N_{\mathfrak{H}_1}, N_{\mathfrak{H}_2}, \ldots, N_{\mathfrak{H}_r}$ rayons propres et les directeurs de ces rayons sont non-résonnants. On obtient alors un système complet et libre(**) d'invariants holomorphes de X en rassemblant tous les opérateurs $\mathbb{A}_{\omega}$ relatifs à chacun des N couples $(\mathfrak{H}; \gamma)$:

$$N = N_{\mathfrak{H}_1} + N_{\mathfrak{H}_2} + \ldots \; N_{\mathfrak{H}_r}$$

Schéma des démonstrations des propositions 6.7.2 et 6.7.3.

On montre la résurgence de l'intégrale formelle en procédant comme à la section 6.2. On plonge le champ X dans une famille ${}^{\varepsilon}X$ du type (6.2.34), ce qui permet de calculer par récurrence les $\Phi^{n\|r}$ définis comme en (6.2.35) et d'établir leur résurgence.

Pour trouver la forme précise des équations de résurgence de la propositions 6.7.2, on montre par le raisonnement standard que l'application de l'opérateur $\dot{\Delta}_{\omega}$ à $x(z;u)$ doit équivaloir à l'application d'un opérateur différentiel ordinaire $\mathbb{A}_{\omega}$ et que les coefficients $\mathcal{A}^{i}_{\omega}$ de cet opérateur ne peuvent contenir que des paramètres de seconde génération (après factorisation du terme $u^{n(\dot{\omega})}$ qui

(*) et même surdéterminés, ce qui permet des vérifications dans les calculs.

(**) aux "contraintes en u " près. Voir §6.9.

regroupe les paramètres de première génération). Ceci tient, comme à la section 6.3, à ce que les u_i de seconde (resp. première) génération sont accompagnés d'un facteur $\exp \theta(z)$ du type (6.3.20) (resp. d'un facteur $\exp \theta(z)$ du type (6.3.19)) et qu'il est permis (resp. interdit) de multiplier une fonction résurgente par un tel facteur.

On montre la liberté du système des $\mathbb{A}_\omega$ (c'est-à-dire l'absence de relations analytiques a priori) en calculant les invariants $\mathbb{A}_\omega + \delta\mathbb{A}_\omega$ d'un champ $X+\delta X$ voisin d'un champ X dont tous les invariants sont connus, puis en montrant que les $\delta\mathbb{A}_\omega$ ne sont astreints à aucun contrainte analytique a priori. Il est commode de perturber un champ analytique X directement donné sous forme prénormale (6.5.1) car les invariants $\mathbb{A}_\omega$ d'un tel champ sont automatiquement nuls. Voir à ce sujet la proposition 6.7.6 ci-après. Bien entendu la perturbation δX ne doit pas être prise sous forme prénormale car alors les $\delta\mathbb{A}_\omega$ seraient nuls.

Pour montrer enfin la complétude du système des $\mathbb{A}_\omega$ on prend deux champs analytiques X et $\tilde{X}$ formellement conjugués par un changement de variable $\tilde{x}_i = h_i(x)$ et on montre l'analycité de h en raisonnant sur différentes cartes $(z; u_1, \ldots, u_{\nu-1})$ qui couvrent des voisinages partiels des différents rayons propres et qu'il s'agit ensuite de recoller.

Pour en finir avec le cas générique (directeurs non résonnants) il nous reste à nous affranchir des deux hypothèses restrictives que nous avons faites au début de cette section, à savoir :

(i) diagonalisabilité de la partie linéaire du champ (i.e. pas de partie linéaire nilpotente)

(ii) absence de résonance virtuelle entre multiplicateurs $(\underline{\mu} = 0)$

La présence d'une partie linéaire nilpotente :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} \left[\lambda_i x_i + \varepsilon_i x_{i-1} + (\text{degré} \geq 2) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{avec } \varepsilon_i = 1 \text{ ou } 0) \tag{6.7.26}$$

(*) Autres que celles qui découlent des "contraintes en $\mathbf{u}$". Voir §6.9.

ne change presque rien : il suffit de modifier légèrement la forme des blocs élémentaires $z^{[n]}$ en ajoutant un terme correctif aux formes additives $\omega_{q/p}(n)$ et à la forme suradditive $\sigma(n)$.

Au contraire, la présence de résonance virtuelle entre les multiplicateurs modifie sensiblement le paramétrage de l'intégrale formelle, en provoquant un clivage parmi les paramètres de deuxième génération : elle ajoute en effet aux $\rho^{+}-1$ paramètres u_i de seconde génération, qui s'introduisent lors de l'intégration du système dynamique réduit (6.5.37), un nouveau groupe de ρ_- paramètres u_i de seconde génération, qui s'introduisent (au côté des χ paramètres u_i de première génération) lors de l'intégration du système dynamique complet (6.5.38).

Proposition 6.7.4. (Le cas ρ^+ et ρ_- quelconques. Intégrale formelle et invariants holomorphes)

L'intégrale formelle associée à chaque couple $(\mathfrak{Z};\gamma)$ à directeurs non résonnants est du type :

(6.7.27) $$x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n . z^{[n]} . \Phi^n$$

avec un réservoir d'indices $\mathcal{N}$ de la forme :

(6.7.28) $$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2^+ \oplus \mathcal{N}_2^- \qquad \left(\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{Z}^\chi, \mathcal{N}_2^+ = \mathbb{N}^{\rho^+-1}, \mathcal{N}_2^- = \mathbb{N}^{\rho_-}\right)$$

Cette intégrale est fonction du temps z et de $\nu-1$ paramètres u_i qui rentrent dans trois classes bien distinctes :

(i) les χ paramètres u_i de première génération, qui sont liés à la dimension χ du réseau (en abrégé $\text{gen}\, u_i = 1$)

(ii) les ρ^+-1 paramètres de deuxième génération qui sont liés à la résonance positive (en abrégé $\text{gen}\, u_i = 2^+$)

(iii) les ρ_- paramètres de deuxième génération qui sont liés à la résonance virtuelle (en abrégé $\text{gen}\, u_i = 2^-$)

Cette intégrale formelle est résurgente(*), de réseau Ω_p, et elle vérifie les équations de résurgence :

(6.7.29) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ du type :

(6.7.30) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\dot\omega)} \left\{ A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\mathrm{gen}\, u_i=1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\mathrm{gen}\, u_i=2} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

(6.7.31) $$u^{n(\dot\omega)} = u_1^{n_1(\dot\omega)} \dots u_\chi^{n_\chi(\dot\omega)} \qquad \left(\Omega_p \to \Omega \to \mathbb{N}_1 : \omega \mapsto \dot\omega \mapsto n(\dot\omega)\right)$$

(6.7.32) $$A^0_\omega(u), A^1_\omega(u), \dots A^{\nu-1}_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_i\,;\, \mathrm{gen}\, u_i = 2]] \qquad (**)$$

Les opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ sont déterminés par (7.2.29) et ce sont des invariants holomorphes. Dans le cas générique, où chacun des N couples $(\mathfrak{H};\gamma)$ est à directeurs non résonnants $(\underline{\nu}=0)$ on obtient un système complet d'invariants holomorphes du champ X en rassemblant tous les $\mathbb{A}_\omega$ relatifs à chacun de ces couples $(\mathfrak{H};\gamma)$.

La démonstration s'articule exactement comme celle des propositions 6.7.2. et 6.7.3.

Apparemment, les deux sortes de paramètres u_i de seconde génération jouent un rôle assez semblable, puisque

(i) ils interviennent par leur puissances entières positives (contrairement aux u_i de première génération qui interviennent par leurs puissances entières quelconques).

(ii) ils figurent dans des opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial u_i}$ (au lieu de $u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ pour les paramètres de première génération)

(*) au sens ordinaire lorsque le réseau intérieur Ω^{int} est discret et au sens généralisé lorsqu'il ne l'est pas. Voir à ce sujet les sections 6.2 et 1.3.

(**) bien entendu $\mathrm{gen}\, u_i = 2$ signifie soit $\mathrm{gen}\, u_i = 2^+$ soit $\mathrm{gen}\, u_i = 2^-$

(iii) ils figurent seuls dans les séries $A^0_\omega(u), A^1_\omega(u), \ldots, A^{\nu-1}_\omega(u)$ qui servent de coefficients à l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$.

(iiii) ils ne figurent ni les uns ni les autres dans le facteur $u^{n(\dot\omega)}$.

Mais ces analogies ne doivent pas masquer l'origine très différente des deux sortes de paramètres de seconde génération. En effet :

(i) les p^+-1 paramètres u_i liés à la résonance positive surgissent lors de l'intégration du système réduit (6.5.37) tandis que les p_- paramètres u_i liés à la résonance virtuelle surgissent lors de l'intégration du système complet (6.5.38), ce qui les rapprocherait plutôt des paramètres de première génération, qui s'introduisent eux aussi lors de l'intégration du système complet.

(ii) aux deux sortes de paramètres de seconde génération correspondent, dans les blocs $z^{[n]}$, des facteurs $z^{\lambda_i/p+1}$ et $z^{\delta_i/p+1}$ qui sont d'une nature foncièrement différente. En effet :

(6.7.33) $$z^{[n]} = z^{\sigma(n)} \quad e^{\omega(n)z} \prod_{q=1}^{p-1} e^{\omega_{q/p}(n)\, z^{q/p}}$$

avec une forme sous-additive $\sigma(n)$ qui se décompose selon :

(6.7.34) $$\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sigma_2(n) = \sigma_1(n) + \sigma_2^+(n) + \sigma_2^-(n)$$

avec $\sigma_1(n)$ défini comme en (6.7.13) et avec :

(6.7.35) $$\sigma_2^+(n) = \sum n_{\chi+i} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_i}{p}\right) \qquad (1 \leq i < p^+)$$

(6.7.36) $$\sigma_2^-(n) = \sum n_{\chi+p^+-1+i} \cdot \left(1 + \frac{\delta_i}{p}\right) \qquad (1 \leq i \leq p_-)$$

Les "directeurs virtuels" δ_i qui figurent dans l'expression de $\sigma_2^-(n)$ diffèrent complètement des vrais directeurs λ_i qui figurent dans l'expression de $\sigma_2^+(n)$, puisqu'ils n'en possèdent ni les propriétés (relation a priori $\sum_\gamma (\lambda_i(\gamma))^{-1} = 1$) ni l'importance (lorsque les directeurs λ_i résonnent ou quasi-résonnent, cela change tout, tandis que lorsque les directeurs virtuels δ_i résonnent ou quasi-résonnent - entre eux ou avec les λ_i - cela ne change rien).

Retournons aux opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$. Au facteur $u^{n(\dot\omega)}$ près, ces opérateurs sont manifestement somme de trois blocs bien distincts :

(i) le bloc <u>précaire</u> $\left[A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z}\right]$ dont le nom va bientôt être justifié

(ii) le bloc de <u>première génération</u> $\left[\sum_{\mathrm{gen}\, u_i=1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right]$

(iii) le bloc de <u>seconde génération</u> $\left[\sum_{\mathrm{gen}\, u_i=2} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\right]$ qui lui-même se scinde en deux blocs :

$$\left[\sum_{\mathrm{gen}\, u_i=2^+} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\right] \quad \text{et} \quad \left[\sum_{\mathrm{gen}\, u_i=2^-} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\right]$$

Les propositions qui suivent éclairent la nature de ces différents blocs et la signification qui s'attache à leur éventuelle nullité.

<u>Proposition 6.7.5</u>. (<u>Invariants précaires</u>)

Les blocs de <u>première</u> et de <u>seconde génération</u> sont invariants tant pour les changements de variables analytiques que pour la multiplication du champ X par un facteur Ψ analytique inversible :

$$X \longmapsto \Psi . X \quad \text{avec} \quad \Psi(0) \neq 0 \text{ et } \Psi(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_\nu\} \tag{6.7.37}$$

Au contraire le <u>bloc précaire</u> $\left[A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z}\right]$ n'est invariant que pour les changements de variables analytiques.

<u>Démonstration</u> : analogue à celle de la proposition 6.2.9.

<u>Proposition 6.7.6.</u> (<u>Critère d'analycité des formes résonnantes</u>)

Pour qu'existe un changement de variable analytique $x_i \mapsto y_i$ qui mette le champ X sous forme prénormale (6.5.4) il faut et il suffit que tous les invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont nuls.

Schéma de la démonstration :

La nécessité du critère est à peu près immédiate, puisque l'existence d'un changement de variables analytique mettant X sous forme prénormale entraîne l'analyticité de cette dernière, puis la convergence des composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle du système dynamique réduit (6.5.9) d'abord et du système dynamique complet (6.5.8) ensuite.

La suffisance du critère se voit comme suit. Quand les $\mathbb{A}_\omega$ sont tous nuls, les composantes Φ^n convergent toutes. En reprenant la démonstration des propositions 6.7.2 et 6.7.3 ("complétude") on voit alors tout de suite qu'on peut, par changements de variables analytiques, conjuguer X non seulement à des formes prénormales analytiques (6.5.4) mais même, plus précisément, à chacune des N formes normales caractérisées à la proposition 6.5.3 et associées à chacun des N couples $(\mathcal{H},\gamma)$.

Rappelons que, comme tous les résultats de cette section, la proposition 6.7.6 suppose l'absence de nihilence et de quasirésonance, tant pour les directeurs que pour les multiplicateurs.

Définition 6.7.1 (Analycité du champ réduit)

Le champ réduit(*) associé à X est dit analytique si ses coordonnées $b^{[m,n]}$, relativement à un bon choix de variables résonnantes y_i, satisfont à la condition de croissance :

$$\limsup_n \left| b^{[m,n]} \right|^{1/\mathcal{H}(n)} < \infty \qquad (\forall m \perp \lambda) \tag{6.7.38}$$

Lemme 6.7.1. (Analycité de l'algèbre réduite)

L'analycité du champ réduit équivaut à l'analycité de l'algèbre réduite(**) invariante par le champ X, c'est-à-dire à l'existence de séries analytiques :

(*) Voir (6.5.6).

(**) Voir lemme 6.5.1.

$$y^{m^1}(x)\,,\ y^{m^2}(x)\,,\ \dots,\ y^{m^k}(x) \quad \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_\nu\} \qquad (k \geqslant \rho^+)$$

engendrant cette algèbre.

D'après la proposition 6.7.6, le changement de variables $x_i \longmapsto y_i(x)$ ne saurait être analytique, sauf si tous les $\mathbb{A}_\omega$ sont nuls. Toutefois les conditions d'analycité du "changement de variables réduit" $x \longmapsto y^{m^i}(x)$ sont beaucoup moins draconiennes. En effet :

Proposition 6.7.7. (Critère d'analycité du champ réduit)

Le champ réduit associé à X est analytique si et seulement si tous les blocs précaires et tous les blocs de seconde génération positive sont nuls :

(6.7.39) $$\left[A^{\circ}_{\omega}(u)\,\frac{\partial}{\partial z}\right] = \left[\sum_{\text{gen } u_i = 2^+} A^{\circ}_{\omega}(u)\,\frac{\partial}{\partial u_i}\right] = 0 \qquad (\forall \omega \in \Omega_\rho)$$

SECTION 6.8. CALCUL EXPLICITE DES INVARIANTS HOLOMORPHES. L'INVOLUTION PERTURBATION COPERTURBATION.

L'équation du pont permet le calcul direct des invariants holomorphes mais elle conduit aussi à des formules explicites pour les $\mathbb{A}_\omega$. Nous avons déjà établi ces formules pour les champs à un degré de résonance (§6.2). Donnons-les maintenant pour les champs généraux $(\rho^+, \rho_-$ quelconques$)$. La méthode consiste encore à décomposer le champ X selon :

(6.8.1) $$X = {}^{\circ}X + \mathbb{D}$$

(i) où ${}^{\circ}X$ est une partie principale élémentaire (on peut la choisir polynomiale) dont les invariants formels discrets et algébriques primaires (cf. §1.1) coïncident avec ceux de X , mais dont les invariants holomorphes sont tous nuls.

(ii) où la <u>partie secondaire</u> $\mathbb{D}$ fait figure de perturbation "finie" (c'est-à-dire non infinitésimale).

On calcule ensuite l'intégrale formelle ${}^{o}x(z,u)$ relative à ${}^{o}X$. D'après (i) on a :

(6.8.2) $$\Delta_\omega \ {}^{o}x(z,u) = 0 \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

Par suite, ${}^{o}x(z,u)$ ne contient que des développement convergents en z . On effectue alors dans (6.8.1) le changement de variable :

(6.8.3) $$x_i = {}^{o}x_i(z, u_1, \ldots, u_{\nu-1}) \qquad ({}^{o}X \mapsto \partial/\partial_z)$$

puis on associe à la <u>perturbation</u> $\mathbb{D}$ une <u>coperturbation</u> $\mathbb{B}$ par la correspondance suivante, dite <u>involution vectorielle</u> :

(6.8.4) $$\mathbb{B} = -(1+\mathbb{D}.z)^{-1}.\mathbb{D} \quad ; \quad \mathbb{D} = -(1+\mathbb{B}.z)^{-1}.\mathbb{B}$$

On sépare ensuite les variables z et u_i dans $\mathbb{B}$ en posant :

(6.8.5) $$\mathbb{B} = \sum_{i\in S} b_i \mathbb{B}_i \qquad \left(b_i = b_i(z) \ ; \ \left[\frac{\partial}{\partial z}, \mathbb{B}_i\right] = 0\right)$$

avec une somme étendue à un réservoir d'indices S approprié; avec des opérateurs différentiels $\mathbb{B}_i$ à coefficients constants en z ; et avec des facteurs scalaires b_i fonctions de z seul et comportant une partie exponentielle de fréquence $\omega(i)$. Autrement dit :

(6.8.6) $$b_i(z) = e^{\omega(i) z} \ \beta_i(z)$$

avec $\omega(i) \in \mathbb{C}$ et $\beta_i(z)$ défini pour z grand (sur $\mathbb{C}_\infty$) et de croissance subexponentielle à l'infini. Les formules cherchées s'écrivent alors, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$(6.8.7)\quad \mathbb{A}_\omega = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \overrightarrow{\sum_{\omega(i_1)+\dots\omega(i_r)=\dot\omega}} \langle b_{i_r},\dots,b_{i_2},b_{i_1}\rangle [[\mathbb{B}_{i_r}\dots[\mathbb{B}_{i_2},\mathbb{B}_{i_1}]]$$

avec les scalaires alternaux $\langle\cdot\rangle_\omega$ définis en §1.4.g et élémentairement calculables à partir des b_i .

SECTION 6.9. CONTRAINTES A PRIORI ENTRE INVARIANTS HOLOMORPHES.

§6.9a. Le problème des contraintes en u .

On a vu que les champs locaux à plus d'un degré de résonance positive $(\nu^+\geqslant 2)$ possédaient non pas une, mais N intégrales formelles $(N\geqslant 2)$, fonctions chacune du temps complexe z , de $\nu-\nu^+$ paramètres u_i de première génération et de ν^+-1 paramètres u_i de seconde génération. On a vu aussi que, pour ces champs, les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ avaient pour coefficients des séries formelles en les ν^+-1 paramètres de seconde génération(*). Bien que généralement divergents ces séries formelles, on s'en doute, ne sauraient être complètement quelconques. Il s'agit donc de décrire leur forme. D'autre part, on se souvient que l'ensemble des $\mathbb{A}_\omega$ attachés à l'une quelconque des N intégrales formelles constitue un système complet d'invariants holomorphes. On doit donc pouvoir en déduire les $\mathbb{A}_\omega$ attachés aux autres intégrales formelles et il s'agit de montrer comment.

La réponse à ces deux problèmes est fournie par les "contraintes en u" (sous-entendu : de seconde génération). On va voir en effet que les $\mathbb{A}_\omega$ sont des fonctions résurgentes des u_i de seconde génération, ou plus exactement de variables t ou t_i simplement liées à ces u_i , et qu'elles vérifient des équations de résurgence remarquables, de type rigide (cf. §11.10) qui les relient les unes aux autres. C'est la "résurgence collatérale" (**).

(*) Les $\mathbb{A}_\omega$ dépendent aussi des u_i de première génération, mais trivialement, par le biais d'un facteur monomial $u^{n(\omega)}$ entièrement déterminé par ω .

(**) Voir en §11.9 la classification provisoire des principaux types de résurgence actuellement connus.

Comme le sujet est vaste et qu'il intéresse plus spécialement la synthèse des objets locaux (tome 4), nous nous contenterons ici d'esquisser les résultats, en commençant par un cas élémentaire mais typique, puis en nous élévant, par extensions successives, jusqu'au cas général.

§6.9b. Cas élémentaire mais typique.

Supposons $\nu^+ = 2$ et $\nu_- = 0$ (deux degré de résonance positive et pas de résonance virtuelle) si bien qu'il n'y a qu'un seul paramètre de seconde génération, que l'on note $u_{\nu-1}$. Supposons les relations de résonance de la forme :

(6.9.1) $$\lambda_{\nu-1} = \lambda_\nu = 0$$

et envisageons les champs $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ de système dynamique :

(6.9.2) $$\frac{\partial}{\partial z} x_i = \lambda_i \; x_i + Q_i(x_{\nu-1}, x_\nu) \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-2}$ rationnellement indépendants et avec :

(6.9.2bis) $$Q_1, \dots, Q_\nu \in \mathbb{C}\{x_{\nu-1}, x_\nu\}$$

pour des Q_i sans termes constants ni linéaires. On suppose en outre que les deux derniers, à savoir $Q_{\nu-1}$ et Q_ν , ne comportent que des termes quadratiques en $x_{\nu-1}$ et x_ν .

Le champ X ne possède (génériquement) qu'une seule graduation $(\mathcal{H}(x_{\nu-1}) = \mathcal{H}(x_\nu) = 1)$ et son système dynamique réduit s'écrit :

(6.9.3) $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} x_{\nu-1} = Q_{\nu-1}(x_{\nu-1}, x_\nu) \\ \frac{\partial}{\partial z} x_\nu = Q_\nu(x_{\nu-1}, x_\nu) \end{cases} \qquad \Big\| \left(\begin{array}{l} Q_{\nu-1}(x) \text{ et } Q_\nu(x) \\ \text{quadratiques} \end{array} \right)$$

Supposons distincts (c'est encore générique) les trois rayons propres $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de (6.9.3). Les directeurs correspondants $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3$ sont alors $\neq 0$ et vérifient la relation a priori :

(6.9.4) $$1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + 1/\lambda_3 = 1 \qquad (\text{cf } \S 6.5)$$

Supposons dans un premier temps les λ_r tous irrationnels et de partie réelle positive :

(6.9.4bis) $$\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0 \quad , \quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0 \quad , \quad \mathrm{Re}\,\lambda_3 > 0$$

A chaque rayon propre γ_r correspond une intégrale formelle $x(z,u)$ du système (6.9.2), qui s'écrit :

(6.9.5) $$\begin{cases} x_i(z,u) = \varphi_i(z, u_{\nu-1}) + u_i\, e^{\lambda_i z} & (i = 1,\dots,\nu-2) \\ x_i(z,u) = \varphi_i(z, u_{\nu-1}) & (i = \nu-1, \nu) \end{cases}$$

avec

(6.9.6) $$\varphi_1, \dots, \varphi_{\nu-2} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \otimes \mathbb{C}\{u_{\nu-1} z^{\lambda_r}\}$$

(6.9.6bis) $$\varphi_{\nu-1} , \varphi_\nu \in z^{-1}\, \mathbb{C}\{u_{\nu-1} z^{\lambda_r}\}$$

Pour chaque rayon propre γ_r , on prend la <u>détermination standard</u> du paramètre $u_{\nu-1}$. Cette détermination présuppose le choix d'un ordre circulaire sur les trois rayons propres $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (il y a deux choix possibles) et elle est fixée par la condition :

(6.9.7) $$y_{12}^{1/\lambda_3} \cdot y_{23}^{1/\lambda_1} \cdot y_{12}^{1/\lambda_2} = u_{\nu-1}^{1/\lambda_r} = t^{-1} \quad (*)$$

où les $y_{ij} = y_{ij}(z, u_{\nu-1})$ d'indice $i \neq j \in \{1,2,3\}$ sont les six fonctions liées par :

(6.9.8) $$y_{ij} + y_{ji} = 0 \qquad \text{et} \qquad y_{12} + y_{23} + y_{31} = 0$$

(*) Ici $u_{\nu-1}$ désigne le paramètre figurant dans l'intégrale formelle relative au rayon γ_r . Quant au paramètre t, il est dit <u>paramètre commun</u>, vu son rôle symétrique.

et solutions du système dynamique "symétrique" :

(6.9.9) $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} y_{23} / y_{23} = \frac{\partial}{\partial z} y_{32} / y_{32} = y_{21} / \lambda_2 + y_{31} / \lambda_3 \\ + \text{ les équations permutées circulaires.} \end{cases}$$

lequel est, d'une manière unique, linéairement équivalent au système (6.9.3) :

(6.9.10) $$y_{ij} = \ell_{ij}^{\nu-1} \, x_{\nu-1} + \ell_{ij}^{\nu} \, x_\nu \qquad (\ell_{ij}^k \in \mathbb{C} \; ; \; 1 \leq i \neq j \leq 3)$$

Compte tenu de la forme très spéciale du champ X étudié, les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles d'agir sur l'intégrale formelle $x(z,u)$ du système (6.9.2) ont pour indices :

(6.9.11) $$\omega = -\lambda_1 , -\lambda_2 , \ldots , -\lambda_{\nu-2}$$

et il leur correspond des invariants holomorphes de la forme :

(6.9.12) $$\mathbb{A}_{-\lambda_j} = A^j_{-\lambda_j} (u_{\nu-1}) \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad \left(A^j_{-\lambda_j} \in \mathbb{C}[[u_{\nu-1}]] \right)$$

qui, dans ce cas très élémentaire, sont directement données par :

(6.9.13) $$A^j_{-\lambda_j} (u_{\nu-1}) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\text{résidu de } \boldsymbol{\Phi}_j (\zeta, u_{\nu-1}) \text{ en } \zeta = -\lambda_j \right)$$

où $\boldsymbol{\Phi}_j$ désigne le mineur de la transformée de Borel (en z) de φ_j .

Travaillant toujours sur l'intégrale formelle $x(z,u)$ relative au rayon propre γ_r , introduisant le <u>paramètre commun</u> t défini en (6.9.7) et posant pour $j = 1, 2, \ldots, \nu-2$:

(6.9.14) $$\psi_j (z,t) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \lambda_j \right) \varphi_j (z, u_{\nu-1}) \qquad \left(u_{\nu-1} = t^{-\lambda_r} \right)$$

on trouve

(6.9.15) $$\Psi_j(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{j,m}(z,t)$$

avec

(6.9.15bis) $$\Psi_{j,m}(z,t) = Q_{j,m}(x_{\nu-1}, x_\nu) \in z^{-m-1}\, \mathbb{C}\{(z/t)^{\lambda_r}\}$$

où $Q_{j,m}$ désigne le polynôme regroupant les termes homogènes de degré $m+1$ de Q_j . Soumettons maintenant les Ψ_j et $\Psi_{j,m}$ à une double transformation de Borel, en z et en t . Plus précisément, notons $\hat{\hat{\Psi}}$ les fonctions obtenues en prenant le mineur de la transformée de Borel en z et en t :

(6.9.16) $$\begin{cases} \Psi(z,t) \longmapsto \hat{\hat{\Psi}}(\zeta,\theta) \\ z \longmapsto \dfrac{\zeta^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad ; \quad t \longmapsto \dfrac{\theta^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \qquad (\alpha \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

et notons $\hat{\hat{\hat{\Psi}}}$ les fonctions obtenues en prenant le mineur de la transformée de Borel en z et le majeur canonique de la transformation de Borel en t :

(6.9.17) $$\begin{cases} \Psi(z,t) \longmapsto \hat{\hat{\hat{\Psi}}}(\zeta,\theta) \\ z \longmapsto \dfrac{\zeta^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad ; \quad t \longmapsto \dfrac{e^{-\pi i\alpha}}{2\pi i}\, \Gamma(1+\alpha)\, \theta^{-\alpha-1} \quad (\alpha \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

On a évidemment :

(6.9.18) $$\hat{\hat{\Psi}}(\zeta,\theta) = \hat{\hat{\hat{\Psi}}}(\zeta,\theta) - \hat{\hat{\hat{\Psi}}}(\zeta, e^{-2\pi i}\theta)$$

où $e^{-2\pi i}$ désigne l'élément du groupe multiplicatif $\mathbb{C}_\infty$ dont le logarithme vaut $-2\pi i$. De plus, à partir de (6.9.15bis) et (6.9.17) on vérifie facilement que :

(6.9.19) $$\hat{\hat{\hat{\Psi}}}_{j,m}(\zeta,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\, (e^{-i\pi}\cdot\zeta)^m \cdot I_\theta^m \cdot \Psi_{j,m}(\theta, e^{-i\pi}\zeta)$$

où $\Psi_{j,m}$ désigne la fonction initiale (antérieurement au double Borel) et où I_θ^m désigne l'opérateur de convolution par $\theta^{-m}/m!$ (m intégrations successives en θ , sans termes constants). On voit ainsi que, les variables z et t figurant dans $\Psi_{j,m}$ avec des puissances opposées, la double transformation de

Borel a pour effet, grosso modo, d'échanger les deux variables.

Introduisons maintenant quelques notations commodes. Posons :

(6.9.20) $$\eta_* = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(2\pi i/\lambda_1)\ \Gamma(2\pi i/\lambda_2)\ \Gamma(2\pi i/\lambda_3)$$

(6.9.21) $$\eta_{12} = -\eta_{21} = (1 - e^{2\pi i/\lambda_3})\ \eta_*$$

(6.9.22) $$\eta_{23} = -\eta_{32} = (1 - e^{2\pi i/\lambda_1})\ \eta_*$$

(6.9.23) $$\eta_{31} = -\eta_{13} = (1 - e^{2\pi i/\lambda_2})\ \eta_*$$

et notons $\mathcal{A}$ l'idéal de l'anneau :

(6.9.24) $$\mathbb{Z}\ [e^{2\pi i/\lambda_1}, e^{2\pi i/\lambda_2}, e^{2\pi i/\lambda_3}]$$

qui est engendré par les 9 nombres :

(6.9.25) $$(1 - e^{2\pi i/\lambda_r})(1 - e^{2\pi i/\lambda_s}) \qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

Posons enfin :

(6.9.26) $$\mathcal{U} = \mathcal{A}\,.\,\eta_* \subset \mathbb{C}$$

(6.9.27) $$\mathcal{U}_{rs} = \eta_{rs} + \mathcal{U} \qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

On vérifie que $\eta_{12} + \eta_{23} + \eta_{31} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{U})$

Reprenons maintenant les trois intégrales formelles $x\|^{\gamma_1}, x\|^{\gamma_2}, x\|^{\gamma_3}$ du système <u>réduit</u> (6.9.3), relatives aux trois rayons propres $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et regardons-les comme fonctions du <u>temps complexe z et du paramètre commun t</u> défini en (6.9.27).

Lemme 6.9.1. (Prolongeabilité en $\mathfrak{z}$ de $x_{\nu-1}$ et x_ν)

Pour t fixé, chacune des trois intégrales $x\|^{\gamma_r}$ est indéfiniment prolongeables en $\mathfrak{z}$ (elle n'a que des singularités isolées) et l'on passe de $x\|^{\gamma_r}$ à $x\|^{\gamma_s}$ par des "translations" en $\mathfrak{z}$ de pas $\eta.t$ avec :

$$(6.9.28) \qquad \eta \in \mathbb{N}_{rs} \qquad\qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

Bien entendu, $\mathbb{N}_{rs}$ est dans $\mathbb{C}$ mais, pour un point $\eta.t$ fixé, seuls quelques uns des nombreux chemins (de la surface de Riemann en $\mathfrak{z}$) partant de 0 et aboutissant au-dessus de $\eta.t$, conduisent effectivement à des singularités de $x\|^{\gamma_s}$.

A partir du lemme ci-dessus, de la décomposition (6.9.15) et surtout de la relation (6.9.19), on vérifie sans peine que si on prend le mineur $\hat{\Psi}_j(\zeta,t)$ de la transformée de Borel en $\mathfrak{z}$ de $\Psi_j(\mathfrak{z},t)$, on obtient une fonction résurgente de t et que celle-ci vérifie des équations de résurgence :

$$(6.9.29) \qquad \overset{t}{\Delta}_{\varpi}\ \hat{\Psi}_j(\zeta,t)\,\|^{\gamma_r} = \hat{\Psi}_j(\zeta,t)\,\|^{\gamma_s} \qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

pour certains indices $\varpi \in \mathbb{C}_\infty$ de projection :

$$(6.9.30) \qquad \dot{\varpi} \in -\zeta\,.\,\mathbb{N}_{rs} \qquad\qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

Ici, $\overset{t}{\Delta}_{\varpi}$ désigne bien sûr la dérivation étrangère en t et les $\hat{\Psi}_j$ des premier et second membres de (6.9.29) sont respectivement relatifs aux rayons propres γ_r et γ_s . Rapprochant (6.9.29) de (6.9.13), on voit que les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_{-\lambda_j}$ relatifs aux différents rayons propres γ_r sont eux-mêmes des fonctions résurgentes du paramètre commun t et qu'ils vérifient des équations de résurgence :

$$(6.9.31) \qquad \overset{t}{\Delta}_{\varpi}\ \mathbb{A}_\omega\,\|^{\gamma_r} = \mathbb{A}_\omega\,\|^{\gamma_s} \qquad (1 \leq r, s \leq 3)$$

pour $\omega = -\lambda_j$ et pour certains indices $\varpi \in \mathbb{C}_\infty$ de projection :

(6.9.32) $$\dot{\varpi} \in -\omega \, \mathcal{U}_{rs}$$

Pour $r \neq s$, l'équation (6.9.29) échange les invariants holomorphes attachés aux différents rayons propres. Pour $r = s$, elle fournit les contraintes, dites <u>contraintes en u</u> , auxquelles est soumis, séparément, chaque $\mathbb{A}_\omega$. On vérifie d'ailleurs que, jointes à la croissance exponentielle en θ des transformées de Borel en t , ces contraintes sont les seules à peser sur $\mathbb{A}_\omega$.

Il nous reste à examiner très brièvement ce que deviennent les "contraintes en u " pour les champs X multirésonnants généraux.

§6.9.c. Première extension.

Gardons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-2}$ rationnellement indépendants et $\lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu$ nuls, mais remplaçons le système (6.9.2) par le système analytique local

(6.9.33) $$\frac{\partial}{\partial z} x_i = X_i(x) \qquad (i=1,\ldots,\nu)$$

le plus général qui soit formellement conjugué à :

(6.9.34) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} x_i = \lambda_i x_i & (i=1,\ldots,\nu-2) \\ \dfrac{\partial}{\partial z} x_i = Q_i(x_{\nu-1}, x_\nu) & (i=\nu-1,\nu\,;\ Q_{\nu-1}, Q_\nu \text{ quadratiques}) \end{cases}$$

Ce système possède encore trois intégrales formelles, mais ses invariants holomorphes sont maintenant de la forme générale :

(6.9.35) $$\mathbb{A}_\omega = u_1^{n_1} \ldots u_{\nu-2}^{n_{\nu-2}} \left\{ A^0_\omega(u_{\nu-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-2} A^i_\omega(u_{\nu-1})\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + A^{\nu-1}_\omega(u_{\nu-1}) \frac{\partial}{\partial u_{\nu-1}} \right\}$$

avec des indices ω eux-aussi généraux :

(6.9.36) $$\omega = n_1\lambda_1 + \ldots n_{\nu-2}\lambda_{\nu-2} \qquad \left(n_i \geq -1\,;\ \#\{n_i=-1\} = 0 \text{ ou } 1\right)$$

Les invariants $\mathbb{A}_\omega \|^{\gamma_r}$ relatifs aux rayons γ_r sont encore résurgents en le <u>paramètre commun</u> $t = u_{\nu-1}^{-1/\lambda_r}$ et ils vérifient des équations de résurgence

(6.9.37) $$\Delta_{\varpi}\ \mathbb{A}_{\omega}\|^{\gamma_r} = \{\mathbb{A}_{\omega_1}\|^{\gamma_s}, \mathbb{A}_{\omega_2}\|^{\gamma_s}, \dots\}$$

qui continuent d'<u>échanger</u> les $\mathbb{A}_{\omega}$ attachés aux différents rayons. Il y a toutefois deux différences : on peut d'une part avoir (6.9.37) pour certains ϖ de projection

(6.9.38) $$\dot{\varpi} = -\omega'\ \mathbb{U}_{rs} \in -\Omega . \mathbb{U}_{rs}$$

mais sans avoir nécessairement $\omega' = \omega$, et d'autre part (même lorsque $\omega'=\omega$) le second membre $\{\dots\}$ de (6.9.37) ne se réduit plus, en général, au seul terme linéaire $\mathbb{A}_{\omega}\|^{\gamma_s}$ mais peut aussi comporter des crochets de Lie des différents $\mathbb{A}_{\omega_i}\|^{\gamma_r}$ pour $\sum \omega_i = \omega$. Voir [E4].

§6.9.d. Deuxième extension.

La relation a priori (6.9.4) fait qu'au moins un des trois directeurs λ_r a sa partie réelle positive. Mais l'un des autres λ_s, ou même les deux, peuvent être de partie réelle négative. Lorsque c'est le cas, les invariants $\mathbb{A}_{\omega}\|^{\gamma_s}$ correspondants se présentent comme des séries de puissances "positives" de t et leurs transformées de Borel se présentent comme séries de puissances "négatives" de θ, qu'il faut alors sommer au voisinage de $\theta = \infty$, puis prolonger en prenant certaines précautions. Et quand $Re\ \lambda_s = 0$, il faut redoubler de précautions !

§6.9.e. Troisième extension.

Si maintenant les séries $Q_{\nu-1}$ et Q_{ν} de (6.9.34) comportent, outre leurs premiers termes quadratiques, des termes de degré supérieur :

(6.9.39) $$Q_j\ (x_{\nu-1}, x_{\nu}) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{j,m}\,(x_{\nu-1}, x_{\nu}) \text{ avec } \deg Q_{j,m} = m+1\ (j = \nu-1, \nu)$$

alors on n'aura plus (6.9.6bis) mais :

(6.9.40) $$\Psi_j(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{j,m}(z,t) \quad \text{avec } \Psi_{j,m} \in z^{-m-1}\,\mathbb{C}\{(z/t)^{\lambda_r}\}$$

et ceci pour tous les $j \in \{1,\dots,\nu\}$. Cependant, fait crucial, les $\Psi_{j,m}(z,t)\|^{\gamma_r}$

relatives à un même rayon propre γ_r , ont toutes mêmes singularités en z et les "translatées" en z de $\Psi_{j,m}(z,t)\|^{\gamma_r}$ ont des singularités qui redonnent $\Psi_{j,m}(z,t)\|^{\gamma_s}$ pour la même paire j,m . Ceci permet d'étendre le raisonnement du §6.9.b et d'aboutir aux mêmes résultats.

§6.9.f. Quatrième extension.

Si $Q_{\nu-1}(x)$ et $Q_\nu(x)$ commencent non pas par du degré 2, mais $p+1$, on a génériquement $p+2$ rayons propres γ_r et autant d'intégrales formelles. Il faut donc introduire des ensembles $\mathcal{N}_{rs}$ à la fois plus nombreux et plus riches, mais c'est la seule différence.

§6.9.g. Cinquième extension.

Si maintenant on considère encore deux degrés de résonance positive $(\varrho^+=2)$, mais du type général :

(6.9.41) $$\langle m,\lambda\rangle = \sum m_i\lambda_i = 0 \quad ; \quad \langle m',\lambda\rangle = \sum m'_i\lambda_i = 0$$

et non plus du type $\lambda_{\nu-1}=\lambda_\nu=0$, on peut, pour certains résonnateurs m et m' , avoir génériquement plusieurs graduations $\mathfrak{H}$ (voir §6.5) et, pour chacune d'elles, plusieurs rayons propres (voir §.5). Mais, à même graduation, on aura toujours les équations de résurgence (6.9.37) qui lient les invariants $\mathbb{A}_\omega\|^{\gamma}$ attachés aux différents rayons.

§6.9.h. Sixième et dernière extension.

Si maintenant on considère un degré de résonance positive $\varrho^+\geqslant 3$ et un degré de résonance virtuelle ϱ_- quelconque, on aura, pour toute paire $(\mathfrak{H},\gamma)$, des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ dont les coefficients se présenteront comme des séries formelles de ϱ^+-1 paramètres u_i de seconde génération et à chacun de ces paramètres u_i sera attaché un directeur $\mathfrak{f}_i=\mathfrak{f}_i(\gamma)$. On aura alors le choix entre :

(i) faire $u_i \mapsto u_i\, t^{-\lambda_i}$ puis effectuer la transformation de Borel en t

(ii) faire $u_i = t_i^{-\lambda_i}$ puis effectuer la transformation de Borel séparément en chacun des t_i .

La première méthode se recommande dans le cas où tous les $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ sont >0 ; la seconde est préférable dans le cas contraire. Mais dans tous les cas, on a des équations de résurgence (en t ou t_i) analogues à (6.9.37) et qui permettent :

(i) de décrire les "contraintes en u " auxquelles sont soumis les invariants A_ω

(ii) de déduire les unes des autres les familles d'invariants A_ω attachées aux N intégrales formelles.

SECTION 6.10: DIRECTEURS RESONNANTS ET AUTRES CAS EXCEPTIONNELS.

Aux sections précédentes nous avons réglé le cas générique, c'est-à-dire celui où le champ X ne possède, relativement à chaque graduation $\mathcal{H}$, que des rayons propres γ isolés (donc en nombre fini) et à directeurs non résonnants $(\underline{k}=0)$. Passons en revue les cas exceptionnels.

a) Premier cas : pour chaque graduation, le champ X ne possède que des rayons isolés et à directeurs sans résonance positive $(\underline{k}^+ = 0)$.

On accepte ici de la résonance virtuelle entre directeurs $(\underline{k}_- \geqslant 0)$ mais cela ne change rien : la proposition 6.7.4 reste en vigueur et continue de livrer un système complet et libre d'invariants holomorphes.

b) Deuxième cas : pour chaque graduation, le champ X a ses rayons isolés, mais il existe (au moins) un couple $(\mathcal{H};\gamma)$ dont les directeurs sont en résonance positive $(\nu^+ = 0)$.

Apparaît alors le phénomène des générations multiples. Les composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle ne sont plus des séries entières de la seule variable $z^{-1/p}$ mais d'une ou de plusieurs variables supplémentaires $\underset{1}{z}^{-1/p}$, $\underset{2}{z}^{-1/p}$ etc..., où les $\underset{i}{z}$ sont les temps (perturbés) de i-ème génération. Le i-ème temps est grosso modo un logarithme itéré de z :

$$\underset{i}{z} \sim \log\log \ldots \log z \qquad (i \text{ fois})$$

A chaque i correspondent de la résurgence en $\underset{i}{z}$ et des invariants holomorphes "de i-ème génération" qui sont constructibles grâce au calcul étranger. Pour les énoncés précis, voir les sections

c) Troisième cas : le champ X possède des rayons dégénérés ou non isolés.

Ce cas exceptionnel se scinde en plusieurs sous-cas (niveaux multiples, générations multiples, ou les deux à la fois) qui tombent tous sous le coup des méthodes universelles du chapitre 10.

d) Incidence de la nihilence et de la quasi-résonance.

Sur chacun des trois premiers cas peuvent venir se greffer de la (génératrice de petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) ou de la quasi-résonance(*) (génératrice de tout petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) mais en général sans détruire la résurgence et sans interférer avec le calcul des invariants holomorphes. Voir à ce sujet la section 9.5.

(*) La quasi-résonance peut affecter les multiplicateurs λ_i ou les directeurs $\bar{\lambda}_i$ ou même, dans le deuxième cas ci-dessus, les directeurs $\bar{\bar{\lambda}}_i$, $\bar{\bar{\bar{\lambda}}}_i$, ... , de deuxième, troisème... génération.

Remarque : caractère optimal des formules explicites livrant les $\mathcal{A}_\omega$.

Puisque les aléas de la pagination nous laissent une page blanche à remplir, profitons-en pour insérer une remarque sur la nature des formules qui expriment les $\mathcal{A}_\omega$(*). Ces formules donnent les invariants holomorphes en fonction :

(i) des coefficients de Taylor $\{a_n^i = a^i_{n_1,\ldots,n_\nu}\}$ de l'objet, regroupés dans des opérateurs élémentaires

(ii) de constantes universelles, issues de moules alternaux, élémentaires à calculer, et régies par une combinatoire très riche .

Dans les séries convergentes (1.1.2) ainsi obtenues, les coefficients $I^{\cdots}_{\cdots}$ sont des données brutes, irréductibles. Chacun d'eux se présente comme un polynome, à coefficients rationnels, en un nombre fini de constantes universelles, issues de moules. A condition de travailler avec des moules particuliers, dits moules scalaires, qui sont attachés aux algèbres de résurgence solaires (c'est-à-dire dont l'algèbre agissante étrangère est à la Cartan : voir §11.10.b) on obtient même chaque $I^{\cdots}_{\cdots}$ directement, i.e. en fonction d'une seule constante universelle (pour un exemple, voir [E.2], chapitre 10). De telles formules sont évidemment optimales et les améliorations ne peuvent plus porter que sur les procédés numériques (ils sont nombreux) de calcul des moules (**).

(*) Pour les champs à un degré de résonance, voir (6.2.55). Pour les champs à plusieurs degrés de résonance, voir (6.8.7). Pour les champs hamiltoniens à résonance extrinsèque, voir (8.4.54) et (8.4.55). Pour les difféos locaux à une dimension, voir [E.2] §12.e. Pour les difféos locaux à plusieurs dimensions, voir [E.4]. Pour les systèmes différentiels, voir (2.12.22). Pour les systèmes aux différences, voir (3.10.18) et (3.10.19). Pour les objets à plusieurs niveaux ou à plusieurs générations, voir Appendices 1 et 2 annexés à ce livre.

(**) Répétons que lorsqu'on veut calculer les invariants d'un objet local donné, le plus simple est de passer par l'équation du pont. Le recours aux formules (1.1.2) ne se justifie que si on veut couvrir toute une classe discrète (voir §1.1) d'objets locaux.

CHAPITRE 7 : CLASSIFICATION DES DIFFEOS A PARTIE LINEAIRE RESONNANTE.

SECTION 7.1. DIFFEOS NON RESONNANTS. THEOREME DE SIEGEL -RÜSSMANN.

Nous allons dans ce chapitre classer les difféos analytiques locaux les plus généraux :

(7.1.1) $$f \ : \quad x_i \longmapsto f_i(x) \quad ; \ 0 \longmapsto 0 \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

avec

(7.1.1 bis) $$f_i(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_\nu\} \ ; \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, x_j + (\dots) \ ; \ \det[a_{ij}] \neq 0$$

Notons $\ell_1,\dots,\ell_\nu$ les valeurs propres (toutes $\neq 0$) de la matrice $[a_{ij}]$ fabriquée avec la partie linéaire de f. Tout tourne autour de leurs propriétés de résonance multiplicative. Plus précisément, tout dépend de l'existence de multiindices entiers m tels que les monômes :

(7.1.2) $$\ell^{m} = \ell_1^{m_1} \dots \ell_\nu^{m_\nu} \qquad (m_i \in \mathbb{N})$$

valent 1 (auquel cas on parle de <u>résonance positive</u>) on approchent 1 anormalement(*) vite (auquel cas on parle de <u>quasi-résonance positive</u>).

<u>Proposition 7.1.1</u> : (<u>Linéarisation des difféos non résonnants; Siegel, 1942;</u> Rüssmann, 1977).

Tout difféo analytique local à partie linéaire sans résonance ni quasi-résonance positives est <u>analytiquement linéarisable</u>.(**)

Cela veut dire qu'il existe un changement de variables $x_i \mapsto y_i$ analytique inversible qui met f sous la forme canonique de Jordan :

(7.1.3) $$f \ : \quad y_i \longmapsto \ell_i\, y_i + \varepsilon_i\, y_{i-1} \qquad (\ell_i \neq 0 \ , \ \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1)$$

(*) Pour les critères précis, voir la section 1.2

(**) Pour les contributions respectives de Siegel et Rüssmann, voir Chapitre 9.

Pour la démonstration, voir [S2.1] et [Rü.1,2]. Les difféos de ce type ne possèdent donc que les ℓ_i (avec les ε_i correctifs) pour invariants formels et ils ne possèdent aucun invariant analytique (en dehors des invariants formels).

Restent les champs dont les multiplicateurs présentent de la résonance positive $(\nu^+ > 0)$ ou de la quasi-résonance positive $(\nu^+_{\text{quasi}} > 0)$. Il se trouve qu'à elle seule, la quasi-résonance positive n'engendre que des invariants métaholomorphes, lesquels ne sont pas constructibles (voir §9.5). Ceci ne nous donne, comme cas intéressant, que la résonance positive $(\nu^+ > 0)$, éventuellement compliquée de résonance virtuelle $(\nu_- > 0)$, de torsion $(\tau > 1)$ ou de nihilence $(\delta > 0)$. Ces trois "complications" apparaissent bel et bien comme des phénomènes secondaires puisque la nihilence suppose la résonance positive et que la résonance virtuelle ainsi que la torsion ne deviennent opératives (i.e. n'influent sur la classification analytique) qu'en présence de résonance positive. Le plan de ce chapitre est donc tout tracé. Il nous faut d'abord (§7.2) introduire la notion de torsion, qui constitue la principale nouveauté par rapport aux champs de vecteurs. Puis il nous faut étudier les difféos sans torsion : d'abord (§7.3) les difféos à un degré de résonance positive $(\nu^+ = 1, \nu_- = 0)$, qui sont les plus simples de tous, puis (§7.4) les difféos à résonance quelconque $(\nu^+ \geq 1, \nu_- \geq 0)$. Il nous faut ensuite (§7.5) examiner les modifications qu'apporte la torsion et terminer (§7.6) par les divers cas exceptionnels, ceux notamment où de la quasi-résonance ou de la nihilence viennent se greffer sur la résonance positive.

SECTION 7.2. RAPPORTS ET DIFFERENCES ENTRE CHAMPS ET DIFFEOS RESONNANTS. TORSION ET MULTIPLICATEUR IMAGINAIRE.

Tout difféo formel f, qu'il soit résonnant ou non, peut s'écrire comme exponentielle d'un champ formel X $(f = \exp X)$. Mais ce générateur infinitésimal formel X n'est pas unique et ce n'est qu'exceptionnellement qu'il existe un choix privilégié(*). En outre f peut très bien être analytique sans qu'aucun de ses générateurs formels ne le soit. On ne doit donc pas s'attendre à une analogie complète avec les champs de vecteurs. De fait, nous allons voir que, du point de vue de la classification analytique, les difféos résonnants diffèrent des champs résonnants à six égards :

((1)) par le multiplicateur imaginaire, qui enrichit le réseau de résurgence,

((2)) par la torsion, qui complique la notion de résonance,

((3)) par les intégrales formelles, qui se trouvent définies modulo des transforformations élémentaires plus nombreuses,

((4)) par la présence, dans les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$, d'un facteur fonction du temps,

((5)) par la plus grande abondance des invariants holomorphes,

((6)) par l'expression analytique des invariants holomorphes, laquelle repose non plus sur les moules de type hyperlogarithmique pur, mais sur des moules de type mixte hyperlogarithmique-zêtaïque.

Expliquons-nous plus en détail sur ces différences. Fixons donc un difféo analytique f

(7.2.1) $$f \ : \ x_i \longmapsto f_i(x) = \ell_i\, x_i + \varepsilon_i\, x_{i-1} + (\ldots)$$

dont la partie linéaire (mise sous forme de Jordan) présente $\nu = \nu^+ + \nu_-$ relations indépendantes de résonance multiplicative :

(7.2.2) $$\ell^{m} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \prod_{i=1}^{\nu} (\ell_i)^{m_i} = 1 \qquad (\ell_i \neq 0,\, m_i \in \mathbb{Z})$$

(*) Essentiellement, un choix privilégié n'est possible que pour les f tangents à l'identité. On se souvient (§5.2) que ces f possèdent un unique générateur formel X sans partie linéaire.

Première différence : Le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$.

On verra que les intégrales formelles du difféo f admettent pour réseau de résurgence l'ensemble Ω constitué par tous les complexes ω de la forme :

(7.2.3) $$\omega = n_0 \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i \qquad (n_0 \in \mathbb{Z} ; n_1, \ldots, n_\nu \in \mathbb{N})$$

ou de la forme

(7.2.4) $$\omega = n_0 \lambda_0 - \lambda_j + \sum_{i \neq j} n_i \lambda_i \qquad (n_0 \in \mathbb{Z} ; n_1, \ldots, n_\nu \in \mathbb{N})$$

avec

(7.2.5) $$\lambda_0 = 2\pi i \quad \text{et} \quad \lambda_j = \log \ell_j$$ (peu importe la détermination)

Le réseau de résurgence est donc plus riche que celui des champs, puisqu'il contient d'office le générateur $\lambda_0 = 2\pi i$, dit multiplicateur imaginaire (à bien distinguer du directeur trivial $\overset{\leftarrow}{\lambda}_0 = -1$, qui lui n'est pas propre aux difféos).

A ceci près, on définit les réseaux intérieurs et extérieurs comme pour les champs :

(7.2.6) $$\Omega^{\text{int}} = \text{plus grand sous-groupe de } \Omega$$

(7.2.7) $$\Omega^{\text{ext}} = \text{plus petit sur-groupe de } \Omega \;\; (= \lambda_0 \mathbb{Z} + \lambda_1 \mathbb{Z} + \ldots \lambda_\nu \mathbb{Z})$$

et on note :

(7.2.8) $$\dim(\Omega^{\text{int}}) = 1 + \kappa - \rho^+ \; ; \; \dim(\Omega) = \dim(\Omega^{\text{ext}}) = 1 + \chi \quad (0 \leq \kappa \leq \chi \, ; \, \chi = \nu - \rho)$$

Deuxième différence : la torsion τ.

On a manifestement :

(7.2.9) $\left(\Omega^{ext}\right) \cap \left(2\pi i \mathbb{Q}\right) = \frac{1}{\tau}\ 2\pi i \mathbb{Z}$ $\left(\mathbb{Q} = \text{corps des rationnels}\right)$

pour un certain entier positif $\tau = \tau(f)$ qui est dit torsion de f . Lorsque $\tau \geqslant 2$ on dit que f est un difféo à torsion. Lorsque $\tau = 1$, on dit (un peu improprement) que f est un difféo sans torsion.

On vérifie facilement les équivalences suivantes (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) .

(i) f est sans torsion

(ii) f possède un générateur formel X .

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i x_i + \dots\right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

présentant exactement le même(*) degré de résonance que lui : $\rho(X) = \rho(f)$

(iii) on peut choisir des déterminations $\lambda_i = \log \ell_i$ cohérentes, c'est-à-dire telles que toute relation de résonance multiplicative se traduise en une relation de résonance additive :

(7.2.10) $\left((\ell)^{m_1} \dots (\ell_\nu)^{m_\nu} = 1\right) \Longrightarrow \left(m_1 \lambda_1 + \dots m_\nu \lambda_\nu = 0\right)$

A chaque détermination cohérente des $\lambda_i = \log \ell_i$ on associe une décomposition des réseaux

(7.2.11) $$\begin{cases} \Omega = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega \\ \Omega^{int} = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega^{int} \\ \Omega^{ext} = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega^{ext} \end{cases}$$

en somme directe d'une composante fixe ${}^{\circ}\Omega = \lambda_0 \mathbb{Z} = 2\pi i \mathbb{Z}$ et de composantes qui dépendent de la détermination cohérente :

(*) Pour un difféo f à torsion on a toujours $\rho(X) = \rho(f) - 1$

$$(7.2.12)\quad \begin{cases} {}^{*}\Omega = \left\{ \omega \;;\; \omega = \sum_{i=1}^{n} n_i \lambda_i \text{ ou } -\lambda_j + \sum_{i \neq j} n_i \lambda_i \;;\; n_i \in \mathbb{N} \right\} \\ {}^{*}\Omega^{int} = \lambda_1 \mathbb{Z} + \dots \lambda_K \mathbb{Z} \quad (\text{pour une bonne indexation}) \\ {}^{*}\Omega^{ext} = \lambda_1 \mathbb{Z} + \dots \lambda_\nu \mathbb{Z} \end{cases}$$

On peut toujours se ramener à l'étude d'un difféo sans torsion car :

- d'une part, si g est de torsion τ, son itéré τ-ième $f = \overset{\tau}{g}$ est <u>sans torsion</u>.

- d'autre part, on a ce principe général qui dit qu'on obtient tous les invariants (formels, holomorphes, métaholomorphes) d'un difféo à torsion en prenant les invariants (formels, holomorphes, métaholomorphes) de $f = \overset{\tau}{g}$ et en leur adjoignant les valeurs propres $(\ell_1, \dots, \ell_\nu)$ de la partie linéaire de g (avec les ε_i correctifs de Jordan).

<u>Troisième différence</u> : <u>allure de l'intégrale formelle.</u>

Si f est <u>sans torsion</u>, il possède, ainsi qu'il a été dit, un générateur infinitésimal X de même degré de résonance que lui, mais il y a quand-même une infinité dénombrable de choix possibles pour X : autant exactement qu'il y a de déterminations cohérentes (voir ci-dessus) des $\lambda_j = \log \ell_j$. Or on passe d'une détermination cohérente à une autre par :

$$(7.2.13)\quad \lambda_j \longmapsto \tilde{\lambda}_j = \lambda_j + 2\pi i\, k_j \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu \;;\; k_j \in \mathbb{Z})$$

où $k = (k_1, \dots, k_\nu)$ est n'importe quel multiindice orthogonal à tous les résonateurs :

$$(7.2.14)\quad \left(\forall m,\ \langle m, \lambda \rangle = 0 \right) \implies \left(\langle m, k \rangle = 0 \right)$$

Il en résulte que chacune des N intégrales formelles $x = x(z; u)$ d'un difféo sans torsion présente le même aspect que celle d'un champ, mais qu'elle se trouve définie non pas modulo une translation-dilation élémentaire :

(7.2.15) $\quad z \longmapsto z + c_0 \quad , \quad u_j \longmapsto c_j\, u_j \qquad (\mathrm{gen}\, u_j = 1 \text{ ou } 2)$

mais modulo des transformations élémentaires plus nombreuses :

$$(7.2.16) \quad \begin{cases} z \longmapsto z + c_0 & (c_0 \in \mathbb{C},\ c_j \in \mathbb{C}^*,\ k_j \in \mathbb{Q}) \\ u_j \longmapsto c_j . \exp(2\pi i . k_j^* z) . u_j & \text{si gen } u_j = 1 \\ u_j \longmapsto c_j . u_j & \text{si gen } u_j = 2 \end{cases}$$

où les rationnels k_j^* sont déterminés par la transformation

$$(7.2.17) \quad \lambda_j^* \longmapsto \tilde{\lambda}_j^* = \lambda_j + 2\pi i\, k_j^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, \chi)$$

induite par (7.2.13) sur les bases λ_j^* et $\tilde{\lambda}_j^*$.

Si au contraire g est un difféo à torsion $(\tilde{\tau} > 1)$, on construit les N intégrales formelles de $f = g^{\tau}$ et on s'aperçoit (§7.5) que, d'une façon générale, g permute ces N intégrales selon une loi précise, d'où s'ensuivent des contraintes bien déterminées pour les invariants.

Quatrième différence : présence dans les opérateurs invariants d'un facteur fonction du temps.

Nous verrons que les opérateurs invariants des difféos s'écrivent :

$$(7.2.17) \quad \mathbb{A}_\omega = e^{-\overset{\circ}{\omega}.z}\, u^{n(^*\omega)} \left\{ A^{\circ}_{\omega}(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\mathrm{gen}\, u_i = 1} A_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\mathrm{gen}\, u_i = 2} A_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

où ω parcourt Ω_p (relevé de Ω sur $\mathbb{C}_p$) et où $\dot{\omega}$ désigne la projection canonique de Ω_p sur Ω , de composantes $\overset{\circ}{\omega}$ et $^*\omega$ selon $\overset{\circ}{\Omega}$ et $^*\Omega$.

$$(7.2.18) \quad \Omega_p \to \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \oplus {}^*\Omega \quad : \quad \omega \longmapsto \dot{\omega} = \overset{\circ}{\omega} + {}^*\omega$$

A ce facteur temporel $e^{-\overset{\circ}{\omega} z}$ près, les opérateurs invariants ont la même forme pour les difféos et pour les champs.

Cinquième différence : plus grande abondance des invariants holomorphes.

Puisque les difféos donnent lieu à des réseaux de résurgence enrichis d'un générateur supplémentaire (le multiplicateur imaginaire λ_0), il est clair que leurs invariants, qui sont indexés sur ces réseaux enrichis et ne sont astreints à aucune contrainte a priori (tout au moins en l'absence de torsion), seront "plus nombreux" que ceux des champs. C'était d'ailleurs prévisible, puisque tout champ analytique X a pour exponentielle un difféo analytique f , mais que l'inverse n'est pas vrai.

Sixième différence : expression analytique des invariants.

Les invariants holomorphes d'un champ X sont exprimables en fonction des coefficients de Taylor de X et de coefficients universels qui sont des moules hyperlogarithmiques (voir sections 1.4 et 6.2). Au contraire, les invariants holomorphes d'un difféo f sont exprimables en fonction des coefficients de Taylor de f et de coefficients qui sont :

- des moules zêtaîques purs (voir § 1.4.g) dans le cas de difféos tangents à l'identité (ou à partie linéaire unipotente).
- des moules de type mixte (hyperlogarithmique-zêtaîque, voir § 1.4.g) dans le cas de difféos résonnants.

En bref, les champs font intervenir le moule   et les difféos le moule

SECTION 7.3 : DIFFEOS SANS TORSION. CAS A UN DEGRE DE RESONANCE. INVARIANTS HOLOMORPHES.

Fixons un difféo analytique f sans torsion $(\tau = 1)$ ni nihilence $(\delta = 0)$, avec un seul degré de résonance positive $(\rho^+ = 1)$ et pas de résonance virtuelle $(\rho_- = 0)$. Soit :

$$(\ell_1)^{m_1} \dots (\ell_\nu)^{m_\nu} = 1 \qquad (m_i \in \mathbb{N}\,;\ m_1, \dots, m_\nu \text{ premiers entre eux}) \tag{7.3.1}$$

l'unique relation de résonance vérifiée par les valeurs propres ℓ_i de la partie linéaire de f . Soit $\lambda_j = \log \ell_j$ une détermination cohérente des multiplicateurs et soit :

$$(7.3.2)\qquad \Omega = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega \qquad\qquad \left({}^{\circ}\Omega = \lambda_0\,\mathbb{Z} = 2\pi i\,\mathbb{Z}\right)$$

la décomposition correspondante du réseau attaché à f . On vérifie aisément que f possède un unique générateur formel X de multiplicateurs λ_i . D'après la section 6.2, ce champ formel X possède une intégrale formelle $x(z;u)$ qui est ipso facto intégrale formelle de f :

$$(7.3.3)\quad \left[\frac{\partial}{\partial z}\, x_i(z;u) = X_i(x(z;u))\right] \Rightarrow \left[x_i(z+1;u) = f_i(x(z;u))\right]$$

On dit que $x(z;u)$ est l'<u>intégrale formelle de</u> f <u>relativement à la détermination cohérente</u> (λ_i) . Elle a exactement la même forme (6.2.15) que celle d'un champ analytique (pour un <u>niveau</u> p et un <u>résiduit</u> ρ d'ailleurs indépendants du choix de la détermination cohérente) mais avec des propriétés de résurgence sensiblement différentes :

<u>Proposition 7.3.1</u> (<u>Le cas</u> $\nu^+ = 1,\ \nu^- = 0$. <u>Invariants holomorphes</u>)

Relativement à toute détermination cohérente des multiplicateurs λ_i , le difféo analytique f possède une intégrale formelle du type :

$$(7.3.4)\qquad x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n .\, z^{[n]} .\, \Phi^n(z) \qquad\qquad \left(\mathcal{N}\subset\mathbb{Z}^{\nu-1}\right)$$

avec un réservoir d'indices $\mathcal{N}$ isomorphe à ${}^{*}\Omega$, avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$ définis comme en (6.2.16) et avec des composantes Φ^n qui sont des séries formelles du <u>temps perturbé</u> :

$$(7.3.5)\qquad \Phi_i^n(z) \in \mathbb{C}[[\overset{\bullet}{z}{}^{-1/p}]] \qquad ; \qquad z = \overset{\bullet}{z} + \rho\log\overset{\bullet}{z}$$

Cette intégrale formelle est résurgente(*) en z , avec pour réseau de résurgence l'ensemble Ω_p relevant Ω sur $\mathbb{C}_p$, et elle vérifie les équations de résurgence :

$$(7.3.6)\qquad \dot{\Delta}_\omega\, x(z;u) = \mathbb{A}_\omega . x(z;u) \qquad\qquad (\forall\omega\in\Omega_p)$$

pour des opérateurs différentiels de la forme :

(*) au sens ordinaire si Ω^{int} est discret et au sens généralisé ("monogène") sinon.

(7.3.7) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\overset{\circ}{\omega} z} \cdot u^{n^*(\omega)} \left\{ A^\circ_\omega \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-1} A^j_\omega \, u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

avec

(7.3.8) $$\Omega_p \longrightarrow \Omega = {}^\circ\Omega \oplus {}^*\Omega : \omega \longmapsto \dot{\omega} = {}^\circ\omega + {}^*\omega$$

(7.3.9) $$A^\circ_\omega, A^1_\omega, \ldots, A^{\nu-1}_\omega \in \mathbb{C}$$

(7.3.10) $$u^{n(^*\omega)} = u_1^{n_1} \ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} \quad \text{pour } (n_1, \ldots, n_{\nu-1}) \text{ image de } {}^*\omega \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont des <u>invariants holomorphes</u> de f et, tous ensemble, ils constituent un système <u>complet et libre</u>(*) d'invariants holomorphes.

<u>Remarque 1</u> : C'est bien le temps z et non le temps perturbé $\dot{z}$ qui figure dans le facteur temporel $\exp(-{}^\circ\omega\, z)$ des opérateurs invariants.

<u>Remarque 2</u> : Bien prendre garde à la disparité des facteurs temporels aux deux membres de l'équation de résurgence (7.3.6). Au premier membre, la dérivation étrangère pointée comporte un facteur $\exp(-\dot{\omega} z)$ puisqu'elle vaut par définition :

(7.3.11) $$\dot{\Delta}_\omega = e^{-\dot{\omega} z} \Delta_\omega$$

tandis qu'au second membre l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ comporte un facteur $\exp(-{}^\circ\omega\, z)$ qui diffère en général du premier puisque :

(7.3.12) $$\dot{\omega} = {}^\circ\omega + {}^*\omega \qquad ({}^\circ\omega \in {}^\circ\Omega, \ {}^*\omega \in {}^*\Omega)$$

Ceci ne doit pas surprendre. Si en effet on traduit l'équation de résurgence (7.3.6) composante par composante, on trouve, compte tenu des termes exponentiels que comportent les blocs élémentaires $z^{[n]}$:

(7.3.13) $$\Delta_\omega \varphi^n = \dot{z}^{\dot{\omega} p + \sigma(n') - \sigma(n)} \left[A^\circ_\omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \log \dot{z}^{[n']} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \sum_{i=1}^{\nu-1} n'_i A^i_\omega \right] \varphi^{n'} \quad (**)$$

avec pour Δ_ω la dérivation étrangère ordinaire en z. C'est précisément la

(*) Aux "contraintes en u" près. Voir §6.9.

(**) avec $\dot{\omega} = {}^\circ\omega + {}^*\omega$ et $n, n^*, n' \in \mathbb{N}$ pour $n = n^* + n'$ et n^* image de ${}^*\omega$ dans $\mathbb{N}$.

disparité des facteurs temporels aux deux membres de (7.3.6) qui assure l'élimination (indispensable) de ces mêmes facteurs aux deux membres de (7.3.13).

Remarque 3 : Si $x(z;u)$ et $\tilde{x}(z;u)$ sont deux intégrales formelles, d'opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ et $\tilde{\mathbb{A}}_\omega$ respectivement, et relatives à deux déterminations cohérentes (λ_i) et $(\tilde{\lambda}_i)$ des multiplicateurs de f, il est clair que la même formule (7.2.16) régit le passage de $x(z;u)$ à $\tilde{x}(z;u)$ et celui des $\mathbb{A}_\omega$ aux $\tilde{\mathbb{A}}_\omega$. Il suffit donc de calculer les $\mathbb{A}_\omega$ relativement à une détermination cohérente. D'autre part, les k_i^* qui figurent dans la formule de passage (7.2.16) ne sont pas toujours entiers, mais ils sont rationnels et les produits scalaires :

(7.3.14) $$\langle n, k^* \rangle = \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i \, k_i^* \qquad (\text{pour } n \in \mathcal{N})$$

sont toujours entiers. Le changement (7.2.16) préserve donc la propriété essentielle du facteur temporel $\exp(-{}^\circ\omega z)$ qui est d'être périodique en z de période 1 :

Schéma de la démonstration :

La démarche est rigoureusement parallèle à celle qu'on a utilisée pour les champs résonnants (§6.2, pp 331-337). On commence par mettre le difféo f sous une forme préparée et épsilonnisée :

(7.3.15) $$f = {}^1f \quad \text{et} \quad {}^\varepsilon f = {}^\circ f + \varepsilon\, \Psi \qquad \left(x_i \mapsto {}^\circ f_i(x) + \varepsilon\, \Psi_i(x) \right)$$

définie comme en (6.2.33), avec une partie principale ${}^\circ f$ qui est l'exponentielle d'un champ élémentaire ${}^\circ X$ de la forme (6.2.33) et une partie secondaire Ψ qui fait figure de perturbation finie et dont chaque composante commence par des termes de degré global supérieur à $\|m\|$. On développe ensuite en puissances de ε l'intégrale formelle ${}^\varepsilon x(z, u)$ du difféo ${}^\varepsilon f$ ainsi que ses invariants $\mathbb{A}_\omega$. A l'enrichissement près du réseau de résurgence, les formules (6.2.35) et (6.2.36) restent valables et la resommation en $\varepsilon = 1$ ne pose, ici encore, aucun problème, même quand Ω^{int} est dense (et diophantien).

Calcul explicite des invariants holomorphes.

La proposition (7.3.1) donne un procédé effectif de calcul des invariants holomorphes, puisque l'équation (7.3.6) détermine entièrement l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$. Mais on peut aussi, comme dans le cas des champs, écrire une formule qui donne explicitement les $\mathbb{A}_\omega$ en fonction des coefficients de Taylor de f. Cette formule ressemble fort à la formule (6.2.54) valable pour les champs, mais les opérateurs différentiels $\mathbb{B}_\omega^\sigma$ et $\mathbb{D}_\omega^\sigma$ doivent y être remplacés par des opérateurs plus généraux, tandis que les coefficients V_σ^ω (de type hyperlogarithmique) doivent être remplacés par des coefficients de type mixte (hyperlogarithmique-zêtaïque). Cette formule figurera au tome 4, consacré à la synthèse des objets locaux, car c'est là surtout qu'elle se revêle indispensable. Contentons-nous ici de calculer ses premiers termes, en nous plaçant, pour fixer les idées, dans le cas-type $p=1$ et $\rho=0$.

Il s'agit donc de calculer à l'ordre ε les invariants holomorphes du difféo ${}^\varepsilon f$ de la formule (7.3.15). L'intégrale formelle ${}^\varepsilon x(z;u)$ de ${}^\varepsilon f$ est du type (6.2.25) et ses termes en ε vérifient les équations fonctionnelles (exactes) :

(7.3.25) $$K_j(z+1) - K_j(z) = \frac{\tau_j}{1+z} \langle m, K(z)\rangle + D_i({}^\circ x)$$

avec ${}^\circ x$ comme en (6.2.40) et avec $\langle m, K(z)\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} m_i K_i(z)$.

Puisque $\langle m, \tau\rangle = -1$ on tire de là :

(7.3.26) $$(z+1)\langle m, K(z+1)\rangle - z\langle m, K(z)\rangle = (z+1)\langle m, D({}^\circ x)\rangle$$

Puis par soustraction de (7.3.25) :

(7.3.27) $$\left[K_j(z+1) + \tau_j\langle m, K(z+1)\rangle\right] - \left[K_j(z) + \tau_j\langle m, K(z)\rangle\right] = \left[D_j({}^\circ x) + \tau_j\langle m, D({}^\circ x)\rangle\right]$$

Par linéarité, on peut se limiter à des perturbations D_i monomiales :

(7.3.28) $$D_j(x) = \alpha_j\, x^{n} = \alpha_j\, x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu} \qquad (\alpha_j \in \mathbb{C};\ n \text{ indépendant de } j)$$

Substituant ${}^{\circ}x$ à x dans $D_j(x)$ on trouve :

(7.3.29) $$D_j({}^{\circ}x) = \alpha_i \; u^n \; . \; e^{{}^*\omega(n)\, z} . \; z^{\sigma(n)}$$

avec $n, {}^*\omega,$ déterminés par :

(7.3.30) $$u^n = u_1^{n_1} \dots u_{v-1}^{n_{v-1}}$$

(7.3.31) $${}^*\omega(n) = n_1\lambda_1 + \dots n_v\lambda_v = n_1\lambda_1^* + \dots n_{v-1}\lambda_{v-1}^*$$

(7.3.32) $$\sigma(n) = \tau_1\lambda_1 + \dots \tau_v\lambda_v$$

Le système (7.3.25) admet alors pour solution :

(7.3.33) $$K_j(z) = u^n \; e^{{}^*\omega\, z} \; z^{\sigma} \; H_j(z) \qquad \left(n = n({}^*\omega)\,,\ \sigma = \sigma(n)\right)$$

avec $H_j(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ et les équations (7.3.26) - (7.3.27) deviennent :

(7.3.34) $$e^{{}^*\omega}(z+1) < m, H(z+1) > - z < m, H(z) > = < m, \alpha > (z^{\sigma+1} + z^{\sigma})$$

(7.3.35) $$e^{{}^*\omega}\left[H_j(z+1) + \tau_j < m, H(z+1) >\right] - \left[H_j(z) + \tau_j < m, H(z) >\right] = \left[\alpha_i + \tau_i < m, \alpha >\right] z^{\sigma}$$

Après transformation de Borel $H_j(z) \longrightarrow \hat{H}_j(\zeta)$ cela donne :

(7.3.36) $$\left(e^{{}^*\omega - \zeta} - 1\right)\left(\frac{d}{d\zeta}\right) < m, \hat{H}(\zeta) > = < m, \alpha > \left[\frac{\zeta^{-\sigma-2}}{\Gamma(-\sigma-1)} + \frac{\zeta^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)}\right]$$

(7.3.37) $$\left(e^{{}^*\omega - \zeta} - 1\right)\left[\hat{H}_j(\zeta) + \tau_j < m, \hat{H}(\zeta) >\right] = \left[\alpha_j + \tau_j < m, \alpha >\right] . \left[\frac{\zeta^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)}\right]$$

Les seules singularités des $\hat{H}_j(\zeta)$ sont donc aux points ω de la forme :

(7.3.38) $$\omega = {}^{\circ}\omega + {}^*\omega \qquad \text{avec} \qquad {}^{\circ}\omega = \lambda_0 k = 2\pi i k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

et on a les équations de résurgence :

(7.3.39) $$\Delta_\omega < m, H(z) > = C(\omega) < m, \alpha > \left(1 - \frac{\sigma+1}{\omega}\right) . z^{-1}$$

(7.3.40) $$\Delta_\omega\left(H_j(z)+\tau_j\langle m,H(z)\rangle\right) = C(\omega)\cdot\left(\alpha_j+\tau_j\langle m,\alpha\rangle\right)$$

avec

(7.3.41) $$C(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{(\omega)^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)}$$

A partir de là on constate facilement qu'on a bien l'équation de résurgence :

(7.3.42) $$\dot{\Delta}_\omega\ {}^{\varepsilon}x(z;u) = {}^{\varepsilon}\mathbb{A}_\omega\ {}^{\varepsilon}x(z;u)$$

avec un opérateur différentiel :

(7.3.43) $${}^{\varepsilon}\mathbb{A}_\omega = e^{-\overset{\circ}{\omega} z}.\varepsilon.\left\{A^{\circ}_\omega\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=1}^{\nu}A^{j}_\omega\, u_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right\} + o(\varepsilon)$$

aux coefficients parfaitement déterminés par :

(7.3.44) $$A^{\circ}_\omega = -\,C(\omega)\ \langle m,\alpha\rangle\left(1-\frac{\sigma+1}{\omega}\right)$$

et par le système (pour $j=1,2,\ldots,\nu$) :

(7.3.45) $$\sum_{k=1}^{\nu-1} n_{jk}\,A^{k}_\omega = C(\omega)\cdot\left[\alpha_j+\langle m,\alpha\rangle\tau_j+\langle m,\alpha\rangle\lambda_j\left(1-\frac{\sigma+1}{\omega}\right)\right]$$

où les n_{jk} sont les composantes de λ_j selon la base λ^*_k :

(7.3.46) $$\lambda_j = \sum_{k=1}^{\nu-1} n_{jk}\,\lambda^*_k \qquad \left(\text{d'où } u^{n(\lambda_i)} = \prod_{k=1}^{\nu-1}(u_k)^{n_{jk}}\right)$$

Bien que (7.3.45) soit un système de ν équations à $(\nu-1)$ inconnues, il possède toujours une solution (unique) du fait des relations :

$$\langle m,\lambda\rangle = 0 \quad , \quad \langle m,\tau\rangle = -1$$

Ces calculs s'étendent par linéarité à des perturbations $D_j(x)$ quelconques. Le lecteur est d'ailleurs invité à calculer ${}^{\varepsilon}\mathbb{A}_\omega$ à l'ordre $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$ puis à établir la formule générale pour le terme en ε^n .

SECTION 7.4 : DIFFEOS SANS TORSION. CAS A PLUSIEURS DEGRES DE RESONANCE. INVARIANTS HOLOMORPHES.

Considérons maintenant un difféo analytique f toujours sans torsion $(\tau=1)$ ni nihilence $(\delta=0)$ mais de résonance arbitraire ($\underline{\nu}^+, \underline{\nu}_-$ quelconques). Soit $\lambda_j = \log \ell_j$ une détermination cohérente des multiplicateurs et soit comme d'habitude :

$$\Omega = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega \quad \text{avec } {}^{\circ}\Omega = \lambda_0 \mathbb{Z} \text{ et } {}^{*}\Omega \subset \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} (\lambda_i \mathbb{Z}) \tag{7.4.1}$$

la décomposition correspondante du réseau attaché à f . On vérifie sans peine que f possède un unique générateur formel X de multiplicateurs λ_i . Tout comme les champs analytiques étudiés au chapitre 6, ce champ formel possède des graduations $\mathfrak{H}$, des rayons propres γ et des directeurs $\check{\lambda}_j$. Il y a toutefois deux points à bien noter :

(i) Graduations, rayons et directeurs ne dépendent pas du choix de la détermination cohérente : ils sont attachés en propre au difféo f . Ces trois notions, en effet, se définissent à partir de l'algèbre réduite, qui ne dépend pas de la détermination. Pour un champ X , l'algèbre réduite a été introduite au lemme 6.5.1. Ici, pour un difféo f , on peut la définir à partir des générateurs X de f , ou directement à partir de f , comme plus grande sous-algèbre (stricte) de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_\nu]]$ invariante par f , ce qui montre bien qu'elle ne dépend pas de la détermination cohérente des λ_i .

(ii) Comme pour les champs, il faut ici adjoindre aux directeurs $\check{\lambda}_j$ le directeur trivial $\check{\lambda}_0 = -1$. La dichotomie entre chanmps et difféos, qui se manifeste de façon si frappante au niveau des multiplicateurs par la présence du multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$, disparaît donc au niveau des directeurs.

Proposition 7.4.1 (Le cas $\underline{\nu}^+, \underline{\nu}_-$ quelconques. Invariants holomorphes)

Relativement à toute détermination cohérente des multiplicateurs λ_i , le difféo analytique f possède une intégrale formelle :

(7.4.2) $$x(z;u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^{n} \cdot z^{[n]} \cdot \Phi^{n}(z) \qquad (\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^{\nu-1})$$

qui est exactement du même type que pour les champs, avec un réservoir d'indices

(7.4.3) $$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2^{+} \oplus \mathcal{N}_2^{-} \subset \mathbb{Z}^{\chi} \oplus \mathbb{N}^{\ell^{+}-1} \oplus \mathbb{N}^{\ell^{-}}$$

avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$ définis comme en (6.7.3) et avec des composantes Φ^{n} qui sont des séries formelles du <u>temps perturbé</u> :

(7.4.4) $$\Phi_i^{n}(z) \in \mathbb{C}[[\dot{z}^{-1/p}]] \quad ; \quad z = \dot{z} + \rho \log \dot{z}$$

Cette intégrale formelle est résurgente(*) en z , avec pour réseau de résurgence l'ensemble Ω_p relevant Ω sur $\mathbb{C}_p$, et elle vérifie les équations de résurgence :

(7.4.5) $$\dot{\Delta}_{\omega}\, x(z;u) = \mathbb{A}_{\omega}\, x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

pour des opérateurs différentiels de la forme :

(7.4.6) $$\mathbb{A}_{\omega} = e^{-\overset{\circ}{\omega} z} \cdot e^{n(^{*}\omega)} \left\{ A_{\omega}^{0}(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\text{gen}\, u_i = 1} A_{\omega}^{i}(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\text{gen}\, u_i = 2} A_{\omega}^{i}(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec

(7.4.7) $$\Omega_p \longrightarrow \Omega = {}^{\circ}\Omega \oplus {}^{*}\Omega \;:\; \omega \longmapsto \dot{\omega} = {}^{\circ}\omega + {}^{*}\omega$$

(7.4.8) $$\mathbb{A}_{\omega}^{0}(u),\ \mathbb{A}_{\omega}^{1}(u), \ldots, \mathbb{A}_{\omega}^{2}(u) \in \mathbb{C}[[u_i \,;\, \text{gen}\, u_i = 2]]$$

(7.4.9) $$u^{n(^{*}\omega)} = u_1^{n_1} \ldots u_{\chi}^{n_{\chi}} \text{ pour } (n_1, \ldots, n_{\chi}) \text{ image de } {}^{*}\omega \text{ dans } \mathcal{N}_1$$

Les opérateurs $\mathbb{A}_{\omega}$ sont des <u>invariants holomorphes</u> de f , et, tous ensemble, ils constituent un système <u>complet et libre</u>(**) d'invariants holomorphes.

(*) au sens ordinaire si Ω^{int} est discret et au sens généralisé ("monogène") sinon.

(**) Modulo les "contraintes en u ". Voir §6.9.

SECTION 7.5. DIFFEOS A TORSION.ECHANGE, DENIVELLATION, HOMOGENISATION.

En un sens, le problème des difféos à torsion est déjà réglé, puisque si g a pour torsion τ , son itérée $f = \overset{\tau}{g}$ est sans torsion et livre tous les invariants de g (*). Mais il se trouve que les f de la forme $\overset{\tau}{g}$, avec $\tau(g)=\tau$, ont leurs invariants asujettis à certaines contraintes a priori, contraintes qu'il faut décrire si l'on veut présenter des résultats vraiment complets :

Définition 7.5.1 (Difféos à torsion. Intégrale formelle)

Pour un difféo g de torsion τ :

(7.5.1) $$x_i \longmapsto g_i(x) \qquad (i = 1,\dots,\nu)$$

on appelle intégrale formelle de g toute solution $x(z;u)$ du système :

(7.5.2) $$x_i(z+\tau;u) = \overset{\tau}{g}(x(z;u)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant \nu\,;\, u=(u_1,\dots,u_\nu))$$

Le difféo g possède donc N intégrales formelles $\overset{(1)}{x},\dots,\overset{(N)}{x}$, autant que de couples :

$$(\mathcal{H};\gamma) = \text{(graduation; rayon propre)}$$

relatifs à $f = \overset{\tau}{g}$.

Proposition 7.5.1 (Difféos à torsion. Echange des intégrales formelles)

Le difféo g échange ses N intégrales formelles $\overset{(1)}{x},\dots,\overset{(N)}{x}$

(7.5.3) $$g(x(z;u)) = \ast\, x(z+1;u)$$

selon une loi :

(*) avec la petite réserve qu'on a dite : il faut ajouter aux invariants de f les valeurs propres de la partie linéaire de g , autrement dit fixer des racines τ-ièmes des valeurs propres de la partie linéaire de f .

(7.5.4) $$\star \overset{(s)}{x}(z;u) = \overset{(\star s)}{x}(\star z ; \star u)$$

ainsi définie :

(7.5.5) $$s \mapsto \star s \quad : \{1,2,\ldots,N\} \to \{1,2,\ldots,N\}$$

(7.5.6) $$u = (u_1,\ldots,u_{\nu-1}) \mapsto \star u = (\alpha_1 u_1,\ldots,\alpha_{\nu-1} u_{\nu-1}) \quad (\text{avec } \alpha_i \in \mathbb{C}^*)$$

(7.5.7) $$z \longmapsto \star z = 2\pi i p q(s) + R^{q(s)}.z \qquad (\text{avec } q(s) \in \mathbb{Z})$$

où R désigne la rotation d'un tour dans le sens positif. Cette dernière relation équivaut d'ailleurs à une rotation simple du temps perturbé $\mathfrak{z}$:

(7.5.7bis) $$\mathfrak{z} \longmapsto R^{q(s)} \mathfrak{z}$$

<u>Explications</u> :

L'application $s \longmapsto \star s$ est une permutation, a priori quelconque, mais parfaitement déterminée par la donnée de g, de l'ensemble $\{1,2,\ldots,N\}$. L'étoile $\star$ transforme donc l'intégrale formelle

$$\overset{(s)}{x}(z;u) = \sum_n u^n z^{[n]} \overset{(s)}{\Phi}{}^n(z)$$

en l'intégrale formelle :

$$\overset{(\star s)}{x}(\star z;\star u) = \sum (\star u)^n (\star z)^{[n]} \overset{(\star s)}{\Phi}{}^n(\star z)$$

Les blocs $(\star u)^n (\star z)^{[n]}$ ne diffèrent des blocs $u^n z^{[n]}$ que par des facteurs scalaires et les composantes sont transformées selon la loi :

$$\left(\overset{(\star s)}{\Phi}{}^n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n \mathfrak{z}^{-m/p(s)}\right) \Rightarrow \left(\overset{(\star s)}{\Phi}{}^n(\star z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^{-m/p(s)} \varepsilon^{-n}\right)$$

avec $\varepsilon = \exp\left(2\pi i\, q(s)/p(s)\right)$. Le niveau $p(s)$ et le nombre de rotations $q(s)$ restent bien entendu constants sur chaque orbite de s :

(7.5.8) $$p(\star s) = p(s) \quad , \quad q(\star s) = q(s)$$

Notons que la dilatation (7.5.6) sur les paramètres n'a pas grande importance, puisque chaque intégrale formelle est précisément définie modulo une telle dilatation. La dilatation (7.5.6) est toutefois nécessaire pour assurer l'égalité dans (7.5.3) lorsque l'orbite de δ , c'est-à-dire l'ensemble $\{\delta, \ast\delta, \ast^2\delta, \ldots\}$ comprend moins de τ éléments (τ = torsion de g). Lorsqu'au contraire elle contient τ éléments, on peut toujours choisir, dans chacune des intégrales formelles :

$$\overset{(\delta)}{x}(z;u)\ ,\ \overset{(\delta_1)}{x}(z;u)\ ,\ \overset{(\delta_2)}{x}(z;u)\ ,\ldots \qquad (\delta_n = \ast^n\delta)$$

un paramétrage en u pour lequel la dilatation (7.5.6) se réduise à l'identité.

Preuve de la proposition 7.5.1.

Soit $x(z;u)$ une intégrale formelle de g . Par définition, elle vérifie :

$$\overset{\tau}{g}(x(z;u)) = x(z+\tau;u) \tag{7.5.9}$$

Posons $g(x(z;u)) = \tilde{x}(z+1,u)$. Comme g et $\overset{\tau}{g}$ commutent, on a :

$$\overset{\tau}{g}(\tilde{x}(z;u)) = g\circ\overset{\tau}{g}(x(z-1;u)) = g(x(z-1+\tau;u)) = \tilde{x}(z+\tau;u) \tag{7.5.10}$$

Comparant les termes extrêmes de (7.5.10) et se reportant à la définition 1, on voit que $\tilde{x}(z;u)$ est aussi une intégrale formelle de g . Le difféo g échange donc ses intégrales formelles (au sens large, évidemment, car il peut très bien se faire que $x = \tilde{x}$). Le reste de la proposition 7.5.1 en découle moyennant la proposition 7.4.1 qui précise l'allure des intégrales formelles des difféos f sans torsion (faire $f = \overset{\tau}{g}$).

Proposition 7.5.2 (Difféo à torsion. Résurgence de l'intégrale formelle)

Chaque intégrale formelle $x(z;u)$ du difféo à torsion g est résurgente en z , de réseau Ω_p, et vérifie les équations de résurgence :

(7.5.11) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z;u) = \mathbb{A}_\omega \, x(z;u) \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

pour des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega$ de la forme (7.4.6). Ces opérateurs constituent un système complet (mais non libre) d'invariants holomorphes de g .

Bien entendu, Ω_p est le relevé sur $\mathbb{C}_p$ du réseau $\Omega = \Omega(g)$ associé à g et ce réseau est fabriqué avec les logarithmes λ_i des valeurs propres ℓ_i de la partie linéaire de g , exactement comme pour les difféos sans torsion :

(7.5.12) $$\Omega(g) = \{\omega ;\ \text{avec } \omega \text{ comme en } (7.2.3) \text{ ou } (7.2.4)\}$$

Le seul point à établir touche précisément à la forme de ce réseau. D'après la définition 7.5.1, chaque intégrale formelle $x(z;u)$ de g se déduit d'une intégrale formelle $\bar{x}(z;u)$ de $f = \overset{\tau}{g}$ selon la formule :

(7.5.13) $$x(z;u) = \bar{x}(z/\tau ; u)$$

Puisque la partie linéaire de f admet pour valeurs propres les $(\ell_j)^\tau$, d'après la proposition 7.4.1 l'intégrale formelle $\bar{x}(z;u)$ admet un réseau de résurgence $\Omega(f)$ de la forme :

(7.5.14) $$\Omega(f) = \{\omega ;\ \omega = n_0\lambda_0 + \tau\sum_{i=1}^{\nu} n_i\lambda_i \text{ ou } n_0\lambda_0 + \tau\lambda_j - \tau\sum n_i\lambda_i \,;\ n_0 \in \mathbb{Z}, n_1, \dots, n_\nu \in \mathbb{N}\}$$

D'après (7.5.13) l'intégrale $x(z;u)$ a pour réseau de résurgence $\tau^{-1}\Omega(f)$ et l'on vérifie bien que $\tau^{-1}\Omega(f) = \Omega(g)$ à partir de la définition (7.2.9) de la torsion τ .

Voyons maintenant à quelles "contraintes d'échange" sont assujettis les invariants $\overset{(1)}{\mathbb{A}}_\omega, \overset{(2)}{\mathbb{A}}_\omega, \dots, \overset{(N)}{\mathbb{A}}_\omega$ attachés aux intégrales formelles $\overset{(1)}{x}, \overset{(2)}{x}, \dots, \overset{(N)}{x}$.

<u>Proposition 7.5.3</u> <u>(Difféos à torsion. Contraintes sur les invariants holomorphes)</u>

Si on définit une action de l'étoile $\star$ sur les opérateurs invariants au moyen de la formule :

(7.5.15) $$\star \ : \ \overset{(\delta)}{\mathbb{A}}_{\omega}(z;u) \longmapsto \overset{(\star\delta)}{\mathbb{A}}_{\star\omega}(\star z; \star u)$$

avec $\star\delta$, $\star\delta$, $\star u$ définis comme à la proposition 7.5.1 et avec :

(7.5.16) $$\star\omega = R^{-q(\delta)} . \omega \qquad (\text{rotation de } -q \text{ tours dans } \Omega_p)$$

alors les opérateurs invariants vérifient

(7.5.17) $$\star \mathbb{A}_{\omega} = \mathbb{A}_{\omega}$$

et ce sont là les seules contraintes a priori(*) auxquels ils soient soumis.

<u>Remarque</u> : On rapprochera les contraintes (7.5.17) des contraintes (2.10.29) (resp. (3.4.17)) qui pèsent sur les équations différentielles (resp. aux différences) à <u>niveaux fractionnaires</u>. Voir les propositions 2.10.6 et 3.4.3. Toutes ces contraintes "induites" sont conceptuellement très voisines; d'où l'emploi uniforme d'une étoile $\star$ pour les dénoter.

<u>Preuve</u> : Fixons ω dans Ω_p et appliquons $\dot{\Delta}_{\omega}$ au premier membre de (7.5.3). Il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_{\omega}\, g_i(x(z;u)) &= \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x(z;u))\right) \dot{\Delta}_{\omega}\, x_j(z;u) && (\text{car } \dot{\Delta}_{\omega} \text{ est une dérivation}) \\
&= \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x(z;u))\right) \mathbb{A}_{\omega}\, x_j(z;u) && (\text{d'après } (7.5.11)) \\
&= \mathbb{A}_{\omega}\; g_i(x(z;u)) && (\text{car } \mathbb{A}_{\omega} \text{ est une dérivation}) \\
&= \mathbb{A}_{\omega}(\star x_i(z+1;u)) && (\text{d'après } (7.5.3))
\end{aligned}$$

Ceci peut s'écrire sous forme compacte :

(7.5.18) $$\dot{\Delta}_{\omega}\, g(x(z;u)) = \mathbb{A}_{\omega}(\star x(z+1;u))$$

Appliquons maintenant $\dot{\Delta}_{\omega}$ au second membre de (7.5.3). On trouve :

(*) en dehors évidemment des contraintes universelles de croissance et des contraintes en u (Voir §10.5).

(7.5.19) $$\dot{\Delta}_\omega\left(\star x(z+1;u)\right) = \left(\star \mathbb{A}_\omega\right).\left(\star x(z+1;u)\right)$$

Cela tient essentiellement à la commutation de la translation $z \longmapsto z+1$ avec l'étoile $z \longmapsto \star z$ et à la règle :

(7.5.20) $$\Delta_\omega\left(\varphi(\alpha z)\right) = \left(\Delta_{\omega\alpha^{-1}}\varphi\right)(\alpha z)$$

qui indique comment dériver étrangèrement une fonction "dilatée", la "dilatation" en question pouvant revêtir la forme d'une rotation de plusieurs tours (ici $z \mapsto R^{q(s)}.z$)

Si maintenant on égale les seconds membres de (7.5.18) et (7.5.19) on obtient identiquement en z et u :

(7.5.21) $$\left(\star \mathbb{A}_\omega\right)\left(\star x(z+1;u)\right) \equiv \left(\mathbb{A}_\omega\right).\left(\star x(z+1;u)\right)$$

et cela n'est possible que si $\star \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega$.

Illustrons les résultats ci-dessus à l'aide de plusieurs exemples.

<u>Exemple 1 :</u>

Plaçons-nous en dimension $\nu = 1$ et considérons le difféo :

(7.5.22) $$g : x \longmapsto \varepsilon x + \sum_{n=p'}^{\infty} a_n x^{n+1} \qquad (\text{avec } a_{p'} \neq 0)$$

avec

(7.5.23) $$\varepsilon = \exp\left(-2\pi i\, \tau'/\tau\right) \quad , \quad \tau'/\tau \text{ irréductible}$$

Le difféo g est de torsion τ et son itérée $f = g^{\tau}$ s'écrit :

(7.5.24) $$f : x \longmapsto x + \sum_{n=p}^{\infty} b_n x^{n+1} \qquad (\text{avec } b_p \neq 0)$$

Le difféo f a un niveau p qui est nécessairement un multiple de τ (d'où une dénivellation $p \geq p'$ si p' n'est pas multiple de τ) mais son résiduit ρ est libre de toute contrainte. Le difféo g admet une intégrale formelle du type :

(7.5.25) $$x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \mathfrak{z}^{-n/p} \qquad (\alpha_1 \neq 0 \, ; \, z = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z})$$

et l'on a :

(7.5.26) $$g(x(z)) = {}^*x(z+1)$$

avec

(7.5.27) $${}^*x(z) = x({}^*z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \varepsilon^n \, \mathfrak{z}^{-n/p}$$

Ce qui correspond pour z et $\mathfrak{z}$ à une rotation positive de q tours :

(7.5.28) $${}^* : \; z \longmapsto 2\pi i \rho q + R^q . z \quad ; \quad \mathfrak{z} \longmapsto R^q . \mathfrak{z}$$

avec $q = p \, \tau'/\tau$ (q est bien entier puisque τ divise toujours p)
L'intégrale formelle $x(z)$ est résurgente, de réseau Ω_p (relevé sur $\mathbb{C}_p$ de $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$) et vérifie les équations de résurgence :

(7.5.29) $$\dot{\Delta}_\omega \, x(z) = \mathbb{A}_\omega \, x(z) = e^{-\omega z} A_\omega \frac{\partial}{\partial z} \qquad (\forall \omega \in \Omega_p)$$

avec comme seule contrainte :

(7.5.30) $$\mathbb{A}_\omega = {}^*\mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_{{}^*\omega}$$

où * se déduit de ω par une rotation négative de q tours :

(7.3.31) $${}^* \; : \; \omega \longmapsto R^{-q} . \omega \qquad \text{avec } q = p \, \tau'/\tau$$

Des contraintes (7.5.30) découle un résultat intéressant, dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur :

Lemme 7.5.1 (homogénisation des difféos à torsion)

Tout difféo du type :

(7.5.32) $$g : \; x \longmapsto \varepsilon x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x^{n+1} \qquad \text{avec } \varepsilon^\tau = 1$$

est analytiquement conjugué à un difféo du type :

(7.5.33) $$\overset{-1}{h} \circ g \circ h \ : \quad x \longmapsto \varepsilon x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, x^{n\tau+1}$$

Exemple 2 :

Plaçons-nous en dimension ν quelconque et considérons un difféo g de torsion $\tau \geqslant 2$ et à un seul degré de résonance $(\rho^+ = 1 \ ; \rho_- = 0)$. Au prix d'un changement de variable linéaire on peut donner à g la forme :

(7.5.34) $$g \ : \ x_i \longmapsto \ell_i \, x_i + (\dots)$$

avec des valeurs propres ℓ_i qui peuvent s'écrire :

(7.5.35) $$\ell_i = \varepsilon_i \, e^{\lambda_i}$$

pour des ε_i racines τ-ièmes de l'unité et des multiplicateurs λ_i vérifiant une unique relation de résonance :

(7.5.36) $$m_1 \lambda_1 + \dots \ m_\nu \lambda_\nu = 0 \qquad (m_1, \dots, m_\nu \text{ premiers entre eux et } \geqslant 0)$$

On a nécessairement

(7.5.37) $$\varepsilon^{m} = \varepsilon_1^{m_1} \dots \varepsilon_\nu^{m_\nu} = \exp(-2\pi i \, \tau'/\tau) \qquad \text{avec } \tau'/\tau \text{ irréductible}$$

Relativement à des variables normales y_i on a des difféomorphismes réduits :

(7.5.38) $$g \ : \ y^{m} \longmapsto \varepsilon^{m} y^{m} + \sum_{n=p'}^{\infty} a_n \, (y^{m})^{n+1} \qquad (a_{p'} \neq 0)$$

(7.5.39) $$f = \overset{\tau}{g} \ : \ y^{m} \longmapsto y^{m} + \sum_{n=p}^{\infty} b_n \, (y^{m})^{n+1} \qquad (b_p \neq 0)$$

f a un difféo réduit de niveau p toujours multiple de τ (d'où une dénivellation $p \geqslant p'$ si p' n'est pas multiple de τ) mais son résiduit ρ est libre de toute contrainte. Quant au difféo g , il admet une intégrale formelle du type :

(7.5.40) $$x(z\,;u) = \sum_{n \in N} u^{n} \, z^{[n]} \, \Phi^{n}(z) \quad \text{avec } N \subset \mathbb{Z}^{\nu-1} \text{ et } \Phi^{n}_{j}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1/p}]]$$

qui vérifie : $g(x(z\,;u)) = {*}\,x(z+1\,;u) = x({*}\,z+1\,;\,{*}\,u)$

avec ${}^{*}\!z$ comme en (7.5.28) et ${}^{*}\!u$ comme en (7.5.6) pour des scalaires α_i parfaitement déterminables à partir de τ'/τ et des constantes qui entrent dans la définition des blocs $z^{[n]}$. (Voir définition 6.2.3). L'intégrale formelle vérifie les équations de résurgence :

(7.5.41) $$\dot{\Delta}_\omega\, x(z\,;u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z\,;u)$$

avec des opérateurs invariants de la forme (7.3.7) et assujettis aux contraintes :

(7.5.42) $$\mathbb{A}_\omega = {}^{*}\mathbb{A}_\omega$$

lesquelles contraintes permettent d'établir le résultat suivant :

Lemme 7.5.2 (homogénisation des difféos à torsion)

Tout difféo du type (7.5.34) est analytiquement conjugué à un difféo du type :

(7.5.43) $$h^{-1} \circ g \circ h \;:\quad x_i \longmapsto \varepsilon_i\, l_i\, x_i + \sum_{\varepsilon^n = \varepsilon^i} c_n^i\, x^n$$

où ne figurent que des monômes "torsion-homogènes".

Exemple 3 :

Examinons maintenant divers exemples où la résonance positive est totale $(\nu^+ = \nu)$. Pour simplifier plaçons-nous en dimension $\nu = 2$ et supposons les parties linéaires diagonalisables. Cela revient à étudier des difféos g de la forme :

(7.5.44) $$g \;:\quad x_i \longmapsto \varepsilon_i\, x_i + Q_i(x_1, x_2) + \dots \qquad (i = 1,2)$$

et leurs itérées

(7.5.45) $$f = g^{\tau} \;:\quad x_i \longmapsto x_i + R_i(x_1, x_2) + \dots \qquad (i = 1,2)$$

avec $(\varepsilon)^{\tau} = (\varepsilon_2)^{\tau} = 1$ et avec pour Q_1, Q_2 (resp. R_1, R_2) des polynômes homogènes de degré $\mu'+1$ (resp. $\mu+1$) et non tous deux nuls. Notons que les R_i sont nécessairement assujettis aux contraintes :

(7.5.46) $$R_i\,(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2) = \varepsilon_i\ R_i\,(x_1, x_2) \qquad (i=1,2)$$

qui viennent de ce que g commute avec f . De plus, lorsque $\mu' = \mu$, on a obligatoirement :

(7.5.47) $$R_i\,(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\tau} (\varepsilon_i)^{\tau-n}\, Q_i\left((\varepsilon_1)^{n-1} x_1\, , (\varepsilon_2)^{n-1} x_2\right) \quad (i=1,2)$$

<u>Exemple 3a</u> : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)$

La torsion vaut $\tau = 2$. On a génériquement $\mu = \mu'$ et les polynômes R_i peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} R_1(x_1,x_2) = \alpha_1\, x_1\, x_2^{\mu} + \alpha_3\, x_1^3\, x_2^{\mu-2} + \alpha_5\, x_1^5\, x_2^{\mu-4} + \dots \\ R_2(x_1,x_2) = \beta_1\, x_2^{\mu+1} + \beta_3\, x_1^2\, x_2^{\mu-1} + \beta_5\, x_1^4 x_2^{\mu-3} + \dots \end{cases}$$

Lorsque μ est impair on a un rayon propre trivial $\gamma = (1,0)$ et $(\mu+1)/2$ paires de rayons propres de la forme $\gamma = (\pm\xi\, , 1)$ avec ξ solution non triviale de

(7.5.48) $$\sum \alpha_q\, \xi^q = \sum \beta_q\, \xi^q$$

Lorsque μ est pair, on a deux rayons propres triviaux $(1,0)$ et $(0,1)$ et $\mu/2$ paires de rayons propres de la forme $\gamma = (\pm\xi, 1)$ avec ξ solution non triviale de (7.5.48). Dans un cas comme dans l'autre, le difféo g laisse invariant chaque rayon propre trivial mais il <u>échange</u> les rayons de chaque paire non triviale. A chaque rayon propre est attachée une intégrale formelle $x(z;u)$ du type (5.3.6) et des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ du type (5.3.14). Les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ attachés aux rayons propres triviaux ne sont assujettis à aucune contrainte a priori. Les autres sont assujettis à une condition d'échange (7.5.17) pour une étoile $\star$ involutive.

Exemple 3b : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1,-1)$

La torsion vaut $\tau=2$ comme à l'exemple précédent mais cette fois-ci on observe un phénomène de dénivellation. On a effet génériquement :

(7.5.49) $p = p'+1$ si p' est impair ; $p=p'$ si p' est pair

En tout état de cause, le niveau p est ici multiple de la torsion τ et les polynômes R_1, R_2 ne sont astreints à aucune contrainte a priori (sinon d'être de degré impair $\geqslant 3$). Les rayons propres sont eux-aussi a priori quelconques et le difféo g laisse chacun d'eux invariants. Les contraintes sur les invariants sont comme toujours de la forme (7.5.17). Elles ne sont pas triviales, mais elles s'exercent à l'intérieur de chaque famille d'invariants (associée à un rayon propre donné) puisqu'ici l'application (7.5.5) est l'identité.

Exemple 3c. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(j,1)$ avec $j = \exp(2\pi i/3)$

La torsion vaut ici $\tau=3$. On a ici en général $p=p'$ (pas de dénivellation générique). En revanche, pour certaines valeurs de p , on voit génériquement apparaître des rayons dégénérés(*). En effet :

(i) lorsque $p=1$ (mod 3) les contraintes (7.5.46) entrainent l'existence de deux rayons triviaux :

- le rayon trivial $(0,1)$ qui est a priori normal (c'est-à-dire à directeurs λ_0, λ_1 non nécessairement résonnants)
- le rayon trivial $(1,0)$ qui est dégénéré et double, si bien que les invariants holomorphes relatifs à ce rayon ne peuvent se calculer qu'en appliquant les méthodes universelles du chapitre 10 .En plus de ces rayons triviaux, il existe $(p-1)/3$ triplets de rayons non triviaux qui sont du type $(\xi,1),(j\xi,1),(j^2\xi,1)$ et que le difféo g permute circulairement. D'où, sur les invariants A_ω attachés à

(*) Voir définition 4.1.1.

ces rayons, des contraintes (7.5.17) avec une étoile $\ast$ qui permute circulairement les éléments des triplets.

(ii) lorsque $\mu = 2$ (mod 3) les contraintes (7.5.46) entrainent l'existence d'un rayon trivial $(1,0)$ qui est a priori normal (c'est-à-dire à directeurs non nécessairement résonnants) et de $(\mu+1)/3$ triplets de rayons propres du type $(\xi,1),(j\xi,1),(j^2\xi,1)$ qui sont permutés par le difféo g . D'où des contraintes d'échange (5.7.17).

(iii) lorsque $\mu = 3$ (mod 3) les contraintes (7.5.46) entrainent l'existence de deux rayons triviaux $(1,0)$ et $(0,1)$ qui sont a priori normaux, ainsi que de triplets de rayons propres du type $(\xi,1),(j\xi,1),(j^2\xi,1)$ qui sont permutés par le difféo g . D'où des contraintes d'échange (5.7.17).

Exemple 3d : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (j, j^2)$

Comme précédemment on a $\tau = 3$ et $\mu = \mu'$ (pas de dénivellation générique) mais cette fois-ci c'est pour $\mu = 2$ (mod 3) qu'on a un rayon trivial double et dégénéré. Lorsque $\mu = 0$ ou 1 (mod 3) on n'a que des rayons a priori normaux. Ceux d'entre eux qui sont triviaux, c'est-à-dire de la forme $(1,0)$ ou $(0,1)$, sont invariants par g . Les autres vont par triplets et son permutés par g .

Exemple 3e: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (j, j)$

La torsion vaut $\tau = 3$ mais on a dénivellation générique comme à l'exemple 3b. Le niveau μ est génériquement donné par :

(7.5.50) $\mu = \mu'$ si $\mu = 0 \pmod 3$; $\mu = \mu' + 2$ si $\mu = 1 \pmod 3$; $\mu = \mu' + 1$ si $\mu = 2 \pmod 3$

Les polynômes R_1, R_2 ne sont astreints à aucune contrainte (sinon d'être de degré $1+3n$). Les rayons sont a priori quelconques et normaux et le difféo laisse invariant chacun d'entre eux. Les contraintes (7.5.17) sur les invariants ne sont pas triviales (elles divisent par 3 la quantité d'information invariante) mais elles s'exercent à l'intérieur de chaque famille d'invariants (associée à un rayon propre donné) puisqu'ici l'application (7.5.5) est l'identité.

Pour tous ces exemples, les lemmes 7.5.1 et 7.5.2 ont leur équivalent, mais pour éviter les redites nous renvoyons à la proposition 7.5.4. ci-dessous.

Exemple 4 : (ρ^+, ρ_- quelconques)

Examinons pour terminer le cas d'un difféo à torsion $\tau \geqslant 2$ et à plusieurs degrés de résonance positive $(\rho^+ \geqslant 2, \rho_- \geqslant 0)$. Les valeurs propres ℓ_i (de la partie linéaire de g peuvent alors s'écrire :

(7.5.51) $\quad \ell_i = \varepsilon_i\, e^{\lambda_i} \quad , \quad (\varepsilon_i)^\tau = 1$

avec les multiplicateurs λ_i vérifiant ρ^+ relations indépendantes de résonance positive :

(7.5.52) $\quad m_1\lambda_1 + \ldots\ m_\nu\lambda_\nu = 0 \qquad\qquad (m_i \in \mathbb{N})$

La décomposition (7.5.51) n'est pas unique, mais supposons-la fixée. Cherchons les intégrales formelles de g . A la dilatation $z \longmapsto z/\tau$ près, ce sont les intégrales formelles de $f = \overset{\tau}{g}$. Il faut donc commencer par construire les graduations de f . Or le fait pour f d'être de la forme $\overset{\tau}{g}$ avec $\tau(g) = \tau$ restreint en général le nombre des graduations. Il peut aussi faire monter leur niveau p . Pour de tels f en effet toute graduation doit atteindre son niveau p sur au moins ρ^+ résonateurs m^i indépendants :

(7.5.53) $\quad \mathcal{H}(m^1) = \mathcal{H}(m^2) = \ldots\ \mathcal{H}(m^{\rho^+}) = p$

et tels que :

(7.5.54) $\quad \varepsilon^{m^1} = \varepsilon^{m^2} = \ldots\ \varepsilon^{m^{\rho^+}} = 1$

avec bien sûr $\varepsilon^{m^i} = (\varepsilon_1)^{m_1^i} \ldots (\varepsilon_\nu)^{m_\nu^i} \quad si \quad m^i = (m_1^i, \ldots, m_\nu^i)$

Pour certains choix des ℓ_i cela peut provoquer une dénivellation : le niveau p des graduations peut être génériquement $\geqslant 1$ tandis que pour les difféos sans torsions il est génériquement $= 1$.

Le phénomène de la dénivellation et ses conséquences.

Le phénomène de la dénivellation, lié à la torsion et en évidence dans chacun des exemples précédents, à deux aspects :

(i) La torsion peut, comme dans les exemples 1,2,3b,3e, impliquer un niveau génériquement supérieur à 1 (et souvent multiple de la torsion τ) mais sans impliquer l'existence de rayons dégénérés. Dans ce cas on a simplement des réseaux de résurgence Ω_τ plus "ramifiés" que d'habitude. Cela n'entraine d'ailleurs pas une plus grande abondance d'invariants holomorphes car, si les $\mathbb{A}_\omega$ sont ici indexés par des ω plus "nombreux", ils sont également soumis aux contraintes (7.5.17) et, l'un dans l'autre, la "quantité" d'information invariante est à peu près la même que pour les difféos sans torsion.

(ii) La torsion peut aussi (comme dans l'exemple 3c pour $p = 1$ mod 3 ou dans l'exemple 3d pour $p = 2$ mod 3) impliquer l'existence d'un ou plusieurs rayons dégénérés, ce qui engendre une multiplicité des niveaux et rend indispensable(*) le recours aux techniques universelles du chapitre 9.

Homogénisation des difféos à torsion.

Les lemmes d'"homogénisation" énoncés à propos des exemples 1 et 2 s'étendent en fait au cas le plus général.

Proposition 7.5.4 (Homogénisation des difféos à torsion)

Soit g un difféo de torsion τ :

(7.5.55) $$g \;:\; x_i \longmapsto \ell_i\, x_i + \sum_n a_n^i\, x^n \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

Soit $\{\tau\lambda_i\}$ un détermination cohérente des $\{\log\left((\ell_i)^\tau\right)\}$ et soit :

(7.5.56) $$\ell_i = \varepsilon_i\, e^{\lambda_i} \;;\; (\varepsilon_i)^\tau = 1$$

(*) Tout au moins pour les rayons dégénérés. Pour les autres il suffit d'appliquer les techniques standard.

la factorisation correspondante des ℓ_i . Alors g est analytiquement conjugable à un difféo :

$$(7.5.57) \quad \overset{-1}{k} \circ g \circ k \ : \quad x_i \longmapsto \ell_i x_i + \sum_{\varepsilon^n = \varepsilon_i} c_n^i x^n$$

ne comportant que des monômes "torsion-homogènes".

Schéma de la démonstration :

On commence par montrer la conjugabilité formelle de (7.5.55) et (7.5.57). On montre ensuite que les difféos sans torsion du type :

$$(7.5.58) \quad h : \ x_i \longmapsto (\ell_i)^\tau x_i + \sum_{\varepsilon^n = \varepsilon_i} d_n^i x^n$$

ont des invariants A_ω qui vérifient automatiquement des contraintes de la forme (7.5.17) et elles seules - en dehors évidemment des contraintes universelles de croissance (cf. section 10.5).La conjugabilité analytique de g avec un difféo de la forme (7.5.57) en résulte.

Notons que la forme "homogénisée" (7.5.57) des difféos à torsion est particulièrement maniable. Elle est stable notamment pour les opérations d'inversion, d'itération et de réduction(*).

SECTION 7.6. DIRECTEURS RESONNANTS ET AUTRES CAS EXCEPTIONNELS.

Aux sections précédentes nous avons réglé le cas générique, c'est-à-dire celui où le difféo f ne possède, relativement à chaque graduation $\mathcal{H}$, que des rayons propres γ isolés et à directeurs non résonnants $(\mathcal{V} = 0)$. Passons en revue les cas exceptionnels. La discussion s'articule exactement comme pour les champs (voir section 6.8) avec cette seule différence que le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$ peut entrer dans les relations de résonance ou de quasi-résonance.

(*) C'est-à-dire pour le passage au difféo réduit, qui est la restriction de g à l'algèbre réduite engendrée par les monômes résonnants y^m (pour de bonnes variables y_i).

a) Premier cas : pour chaque graduation, le difféo f ne possède que des rayons isolés et à directeurs sans résonance positive $(\mathfrak{k}^+ = 0)$.

On accepte ici de la résonance virtuelle entre directeurs $(\mathfrak{k}_- \geq 0)$ mais cela ne change rien : la proposition 7.4.1 reste en vigueur et continue de livrer un système complet et libre d'invariants holomorphes.

b) Deuxième cas : pour chaque graduation, le difféo f a ses rayons isolés, mais il existe (au moins) un couple $(\mathfrak{H}, \gamma)$ dont les directeurs sont en résonance positive $(\mathfrak{k}^+ > 0)$.

On est alors dans le cas des générations multiples et des temps $\mathfrak{z}_{(1)}, \mathfrak{z}_{(2)}, \mathfrak{z}_{(3)}, \dots$. Chaque génération possède sa résurgence et ses invariants holomorphes, lesquels sont calculables grâce au calcul étranger. Pour les énoncés précis, voir les sections 10.3 et 10.4.

c) Troisième cas : le difféo f possède des rayons dégénérés ou non isolés.

Ce cas exceptionnel se scinde en plusieurs sous-cas (niveaux multiples, générations multiples, ou les deux à la fois) qui tombent tous sous le coup des méthodes universelles du chapitre 10.

d) Incidence de la nihilence et de la quasi-résonance.

Sur chacun des trois premiers cas peuvent venir se greffet de la nihilence (génératrice de petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) ou de la quasi-résonance (génératrice de tout petits diviseurs et d'invariants métaholomorphes) mais en général sans détruire la résurgence et sans interférer avec le calcul des invariants holomorphes. Voir à ce sujet la section

CHAPITRE 8 : LA NIHILENCE ET LES PETITS DIVISEURS. LES CAS HAMILTONIEN ET ISOCHORE.

SECTION 8.1 : NIHILENCE, PETITS DIVISEURS, INVARIANTS METAHOLOMORPHES.

8.1.a : Nihilence de première génération. Degré de nihilence.

Un champ local X est dit nihilent (de première génération) s'il possède au moins une intégrale première qui soit une série entière, autrement dit s'il existe $\varphi \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_\nu]]$ tel que $X.\varphi = 0$

Un difféo local f est dit nihilent (de première génération) s'il laisse invariant au moins une série $\varphi \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_\nu]]$, autrement dit si $\varphi \circ f = \varphi$.

La nihilence suppose la résonance. Soit en effet n la valuation de φ (i.e. le degré de ses termes de plus bas degré) et soit $x^n = x_1^{n_1} \ldots x_\nu^{n_\nu}$ le monôme (ou l'un des monômes) de degré n figurant dans φ. Alors :

$$X.x^n = \langle \lambda, n \rangle x^n + (\text{degré} > n) \qquad (**)$$

Donc $\langle \lambda, n \rangle = 0$. D'où au moins une relation de résonance.

On appelle degré de nihilence (de première génération) le nombre maximum nil d'intégrales premières φ_i indépendantes comme éléments de l'algèbre $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_\nu]]$. Ou si l'on préfère, nil est la dimension (comme algèbre) de l'algèbre $\mathcal{A}_{nil}$ annulée par X ou par $F-\mathrm{Id}$ (*). Cette algèbre $\mathcal{A}_{nil}$ est nécessairement incluse dans l'algèbre réduite $\mathcal{A}_{red}$. C'est d'ailleurs pourquoi la nihilence suppose la résonance, pourquoi aussi le degré de nihilence (de première génération) est au plus égal au degré de résonance.

8.1.b : Nihilence de k-ème génération. Niveau μ infini.

On a vu en § 6.5 et on reverra en §10.4 qu'à tout couple $(\mathcal{H}, \gamma)$ formé d'une graduation et d'un rayon propre se trouvait associée une algèbre éclatée :

(*) F désigne l'opérateur de substitution : $F.\varphi = \varphi \circ f$

(**) Toujours vrai en cas de diagonalisabilité. Sinon, bien choisir n.

(8.1.1) $$\mathcal{A}^{[\gamma]} = \mathbb{C}[[z_0, z_1, \ldots, z_{\rho^+-1}]]$$

avec des z_i définis comme en (6.5.31) à partir de y_i eux-mêmes définis comme en (6.5.4).

Dans le cas par exemple d'un champ X sans partie linéaire, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_\nu = 0$ et $\rho^+ = \nu$. Il n'existe alors en général qu'une seule graduation, la graduation triviale, pour laquelle $\mathcal{H}(x_i) = 1 \quad (\forall i)$ et, pour chaque rayon propre γ, on peut choisir des variables $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$ telles que le rayon propre γ ait pour équation

(8.1.2) $$y_1 = y_2 = \ldots y_{\nu-1} = 0$$

Alors les z_i sont définis par l'éclatement :

(8.1.3) $$y_0 = z_0 \quad , \quad y_i = z_0 z_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho^+-1)$$

Les variables y_i ne sont pas uniquement définies, mais si on passe à un autre système y_i' pour lequel le rayon propre γ conserve sa forme :

(8.1.4) $$y_1' = y_2' = \ldots y_{\nu-1}' = 0$$

ces nouvelles variables y_i' se déduisent des anciennes par un changement :

(8.1.5) $$\begin{cases} y_0' = y_0 + \sum\limits_{i \neq 0} \gamma_{0i}\, y_i + (\text{degré} \geq 2) \\ y_i' = \sum\limits_{j \neq 0} \gamma_{ij}\, x_j + (\text{degré} \geq 2) \qquad (i \neq 0) \end{cases}$$

Les z_i' tirées par éclatement des nouvelles y_i' :

(8.1.6) $$y_0' = z_0' \quad , \quad y_i' = z_0' z_i' \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho^+-1)$$

sont donc liées aux anciennes z_i par :

(8.1.7) $$\begin{cases} z_0' = z_0 \{1 + (\text{degré} \geq 1)\} \\ z_i' = \sum\limits_{\gamma} \gamma_{ij}\, z_j + (\text{degré} \geq 2) \end{cases}$$

avec une matrice γ'_{ij} $(i,j \neq 0)$ qui est inversible. Par suite :

$$\mathbb{C}[[z_0, z_1, \ldots, z_{\nu^+-1}]] = \mathbb{C}[[z'_0, z'_1, \ldots, z'_{\nu^+-1}]] \tag{8.1.8}$$

ce qui montre la cohérence (ou si l'on préfère, le caractère intrinsèque) de la définition de l'algèbre éclatée $\mathcal{A}^{[\gamma]}$ associée au couple $(\mathcal{H}, \gamma)$. Pour simplifier, on affixe à $\mathcal{A}$ uniquement le rayon propre γ et on omet la graduation $\mathcal{H}$, car le rayon propre γ présuppose de toute façon une graduation.

L'algèbre éclatée $\mathcal{A}^{[\gamma]}$ a même dimension ν^+ que l'algèbre réduite $\mathcal{A}_{red}$. L'éclatement (8.1.3) définit un homomorphisme de $\mathcal{A}_{red}$ dans $\mathcal{A}^{[\gamma]}$. Or on a une action réduite, notée X_{red} , de X sur $\mathcal{A}_{red}$. Faisant dans X_{red} le changement de variable correspondant à l'éclatement (8.1.3), on obtient une action éclatée, notée $X^{[\gamma]}$, de X sur $\mathcal{A}^{[\gamma]}$. Si p désigne le niveau associé au rayon γ (ou plus proprement : au couple $\mathcal{H}, \gamma$) il est clair que le champ éclaté est divisible à gauche par $(z_0)^p$ et que le quotient $(z_0)^{-p} X^{[\gamma]}$ a une partie linéaire non nulle. Après division par une constante convenable, on obtient pour la partie linéaire de $(z_0)^{-p} X^{[\gamma]}$ des valeurs propres $\lambda_0 = -1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu^+-1}$ qui ne sont autres que les directeurs de X (ou multiplicateurs de seconde génération).

On dit que X présente de la nihilence de seconde génération (relativement au rayon γ) si la sous-algèbre $\mathcal{A}^{[\gamma]}_{nil}$ de $\mathcal{A}^{[\gamma]}$ annulée par $X^{[\gamma]}$ est strictement plus grande que l'image de $\mathcal{A}_{nil}$ dans $\mathcal{A}^{[\gamma]}$ pour le plongement naturel (8.1.3). L'entier :

$$nil^{[\gamma]} = dim \left(\mathcal{A}^{[\gamma]}_{nil} - \mathcal{A}_{nil} \right) \tag{8.1.9}$$

(où "dim" désigne le nombre "essentiel" de générateurs de l'algèbre) est dit degré de nihilence de deuxième génération (relatif à γ).

De même que la nihilence de première génération supposait la résonance de première génération (résonance positive des multiplicateurs λ_i), de même la nihilence de deuxième génération suppose la résonance de deuxième génération (résonance positive des directeurs λ_i). Et bien entendu, la résonance de deuxième génération suppose la résonance de première génération. Toutefois, la nihilence de deuxième génération <u>ne suppose pas</u> la nihilence de première génération : il peut très bien se faire que X n'annulle aucun élément de $\mathcal{A} = \mathbb{C}[[x]]$ mais que le champ éclaté $X^{[\gamma]}$ annulle certains éléments de l'algèbre éclatée $\mathcal{A}^{[\gamma]}$.

Le même procédé, continué, permet de définir la nihilence de k-ème génération pour tout entier k , la construction s'arrêtant évidemment au plus tard pour $k = \nu - 1$. On obtient le diagramme suivant :

(8.1.10) première génération / deuxième génération / troisième génération / ....

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}_{red} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}_{nil} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{A}^{[\gamma]} \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}^{[\gamma]}_{red} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}^{[\gamma]}_{nil} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{A}^{[\gamma,\gamma']} \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}^{[\gamma,\gamma']}_{red} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathcal{A}^{[\gamma,\gamma']}_{nil} \arrow[d, Rightarrow] \\
\; & \; & \;
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flêches descendantes (verticales ou obliques) figurent des inclusions naturelles. Quant à $\gamma, \gamma' \dots$ ce sont des rayons propres de générations successives, relatifs à des graduations $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \dots$

On a bien sûr les mêmes notions et les mêmes définitions pour les difféos f à condition de remplacer X par $F - Id$, où F désigne l'opérateur de substitution $(F.\varphi = \varphi \circ f)$.

Il va sans dire que si la résonance sur plusieurs générations est déjà un phénomène très exceptionnel (voir toutefois le §6.6 sur la résonance héréditaire), la nihilence sur plusieurs générations est encore <u>infiniment</u> plus exceptionnelle (voir les remarques de § 1.2 sur la <u>force</u> des contraintes impliquées).

<u>8.1.c</u> : <u>La nihilence active et les petit diviseurs</u>.

La nihilence tire son importance de ce qu'elle peut engendrer des <u>petits</u>

diviseurs et donner lieu à des invariants métaholomorphes. Pour mieux cerner le phénomène, nous allons d'abord raisonner sur le cas d'un champ nihilent X . Supposons même pour simplifier que la nihilence soit de première génération et qu'elle soit maximale. Cela veut dire que $\mathcal{A}_{red} = \mathcal{A}_{nil}$, où si l'on préfère $X_{red} = 0$ ou encore $nil = \rho^+$ (degré de nihilence = degré de résonance positive) ou encore que X peut se mettre sous forme prénormale :

$$(8.1.11) \qquad X = \sum \Lambda_i(y)\; y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

avec

$$(8.1.12) \qquad \Lambda_i(y) = \lambda_i + \sum_{\langle m,\lambda\rangle = 0} b^i_m\, y^m$$

et qu'on a l'implication :

$$(8.1.13) \qquad \left(\sum m_i \lambda_i = 0\right) \Longrightarrow \left(\sum m_i \Lambda_i(y) = 0\right)$$

si bien que Y annule identiquement tout élément de l'algèbre $\mathbb{C}_\lambda[[y]]$ engendrée par les monômes résonnants :

$$(8.1.14) \qquad y^m = \prod_i y_i^{m_i} \qquad \text{avec } \langle m,\lambda\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \lambda_i$$

Introduisons parallèlement l'algèbre $\mathbb{C}_\lambda\{y\} = \mathbb{C}\{y\} \cap \mathbb{C}_\lambda[[y]]$ formée des germes analytiques en 0 engendrés par ces mêmes monômes résonnants.

Le champ nihilent X possède manifestement plusieurs formes prénormales (8.1.11). On passe des unes aux autres par substitutions de la forme :

$$(8.1.15) \qquad y_i \longmapsto y_i\,\{c_i + h_i(y)\} \qquad \text{avec } h_i(y) \in \mathbb{C}_\lambda[[y]]$$

Parmi les diverses formes prénormales (8.1.14) d'un champ analytique nihilent X, en existe-t-il toujours une qui soit analytique ? Ou encore — exigence apparemment plus forte — le champ X est-il toujours analytiquement conjugable à une forme prénormale analytique ?

La réponse aux deux questions est <u>non</u>. En effet, si c'était oui, on en déduirait sans peine que pour tout champ analytique X totalement nihilent :

$$ {}^{\varepsilon}X = A + \varepsilon B \tag{8.1.16} $$

de partie principale A <u>prénormale</u> mais de perturbation εB <u>non</u> prénormale :

$$ A = \sum_i A_i(x)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(A_i(0)=\lambda_i\ ,\ A_i(x)\in\mathbb{C}_\lambda\{x\},\ \sum \lambda_i A_i = 0\right) \tag{8.1.17} $$

$$ B = \sum_i B_i(x)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(B_i(0)=0\ ,\ B_i(x)\in\mathbb{C}\{x\}\right) \tag{8.1.18} $$

il doit exister une substitution analytique $x \mapsto {}^{\varepsilon}h_i(x)$ de la forme :

$$ x_i \longmapsto x_i + \varepsilon H_i(x)\, x_i + o(\varepsilon) \qquad \left(H_i(x)\in\mathbb{C}\{x\}\right) \tag{8.1.19} $$

qui mette ${}^{\varepsilon}X$ sous forme prénormale ${}^{\varepsilon}\widetilde{X}$:

$$ {}^{\varepsilon}\widetilde{X} = A + \varepsilon C + o(\varepsilon) \tag{8.1.20} $$

avec

$$ C = \sum_{i=1}^{\nu} C_i(x)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(C_i(0)=0,\ C_i(x)\in\mathbb{C}_\lambda\{x\},\ \sum\lambda_i C_i = 0\right) \tag{8.1.21} $$

Ceci impliquerait :

$$ [A, H] = B - C \qquad \left(\text{pour } H = \sum H_i\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \tag{8.1.22} $$

Or on peut choisir dans $\mathbb{Z}^{\nu}$ un sous-espace $\mathbb{T}$ de dimension $\nu^{+}-\nu$ tel que tout élément $\varphi(x)$ de $\mathbb{C}\{x\}$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$ \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{T}} x^{n}\, \varphi^{n}(x) \qquad \text{avec } \varphi^{n}(x)\in\mathbb{C}_\lambda\{x\} \tag{8.1.23} $$

Fixant un tel sous-espace $\mathbb{T}$, on pourrait décomposer le champ B selon :

$$ B = \sum_{n\in\mathbb{T}} x^{n}\, B^{n} \tag{8.1.24} $$

avec

(8.1.25) $$B^n = \sum B_i^n(x)\ x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(B_i^n(x) \in \mathbb{C}_\lambda\{x\}\right)$$

On pourrait de même décomposer le champ

(8.1.26) $$H = \sum_{i=1}^{\nu} H_i(x)\ x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

selon

(8.1.27) $$H = \sum x^n\ H^n$$

avec

(8.1.28) $$H^n = \sum H_i^n(x)\ x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(H_i^n(x) \in \mathbb{C}_\lambda\{x\}\right)$$

Portant tout ceci dans (8.1.22) on en déduirait $C = B^0$ et, pour tout n non nul dans $\mathbb{T}$:

(8.1.29) $$(A.x^n)\ H^n + x^n.\ AH^n - x^n.H^nA = x^n.B^n$$

Appliquant le tout à un monôme résonnant x^m on trouverait :

(8.1.30) $$(A.x^m)\,(H^n.x^m) + x^n\,(A\,H^n.x^m) - x^n(H^n.A\,x^m) = x^n(B^n x^m)$$

Or $A.\,\mathbb{C}_\lambda\{x\} = 0$ et $H^n.\,\mathbb{C}_\lambda\{x\} \subset \mathbb{C}_\lambda\{x\}$. Par suite :

(2.1.31) $$A\ H^n\ x^m = H^n\ A\ x^m = 0$$

et (2.1.30) donnerait :

(2.1.32) $$\left(\frac{A.x^n}{x^n}\right) \cdot \left(\frac{H^n.x^m}{x^m}\right) = \left(\frac{B^n.x^m}{x^m}\right)$$

C'est-à-dire :

(2.1.33) $$\left(\sum_i n_i\ A_i(x)\right)\left(\sum_i m_i\ H_i^n(x)\right) = \sum_i m_i\ B_i^n(x)$$

ou en abrégé :

(8.1.34) $$< n , A(x) > \cdot < m, H^n(x) > \; = \; < m, B^n(x) >$$

On voit que, sauf pour la composante H^0 qu'on peut choisir arbitrairement, (8.1.34) donne H en fonction de B. Par définition de $\mathbb{T}'$, on a en effet $<n, A(0)> \neq 0$ quand $n \in \mathbb{T}'$. La série $<n, A(x)>$ est donc inversible dans $\mathbb{C}_\lambda\{x\}$. Pour que la correspondance $B \mapsto H$ préserve l'analycité, il est manifestement nécessaire et suffisant que les séries $<n, A(x)>^{-1}$ convergent toutes sur un voisinage fixe de l'origine quand n parcourt $\mathbb{T}'$. Or ceci, comme on le voit tout de suite, suppose soit que :

(8.1.35) $$\liminf_{<n,\lambda> \neq 0} \; | <n, \lambda> | \; > 0$$

soit qu'on ait l'implication

(2.1.36) $$\left(<n,\lambda> \text{ petit nonnul} \right) \Rightarrow \left(<n, A(x)> \text{petit} \right)$$

Condition de compensation.

Dans le cas général, c'est-à-dire quand :

(i) $\begin{cases} \text{il existe des multiplicateurs } \lambda_i \text{ de part et d'autre de toute droite du} \\ \text{plan complexe passant par l'origine} \end{cases}$

l'implication (8.1.36) équivaut (c'est presque immédiat) à l'existence de deux séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sans termes constants et telles que :

(8.1.37) $$A_i(x) = \lambda_i + \lambda_i \varphi(x) + \bar{\lambda}_i \psi(x) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

Dans le cas exceptionnel, c'est-à-dire quand :

(ii) $\begin{cases} \text{il existe une droite passant par l'origine et divisant le plan complexe en} \\ \text{un demi-plan ouvert qui ne contient aucun multiplicateur } \lambda_i \text{ et un demi-plan} \\ \text{fermé qui les contient tous,} \end{cases}$

il convient de remplacer la condition (8.1.37) par une condition (8.1.37bis) du même genre mais un peu plus technique qu'on trouvera énoncée pp 174-175 dans l'article [**Br.1**] de A.D. BRJUNO.

Proposition 8.1.1. (A.D. BRJUNO; champs totalement nihilents)

Soit X un champ analytique totalement nihilent. Si X vérifie la condition de COMPENSATION (c'est-à-dire si une et donc toute forme prénormale vérifie (8.1.37) dans le cas général (i) et (8.1.37 bis) dans le cas exceptionnel (ii)), alors X est analytiquement conjugable à un champ prénormal. Lorsqu'au contraire la condition de COMPENSATION n'est pas réalisée, le champ X n'est presque jamais analytiquement conjugable à un champ prénormal.

Par un raisonnement en tout point analogue on montre :

Proposition 8.1.2. (Conjugaison des champs totalement nihilents).

Si deux champs totalement nihilents X et X' vérifient la condition de COMPENSATION (8.1.37) ou (8.1.37bis), ils sont analytiquement conjugables.(*) S'ils ne la vérifient pas, ils ne sont presque jamais analytiquement conjugables.

Lorsque la condition de COMPENSATION n'est pas remplie (et plus la différence $\nu - \rho^+$ est grande, moins elle a de chances de l'être) on dit que la nihilence est active : elle engendre en effet des PETITS DIVISEURS $\langle n, \lambda \rangle$ qui interviennent dans le développement des quotients :

$$\frac{1}{\langle n, X(x) \rangle} = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\langle n, X(x) - \lambda \rangle \right)^q \left(\langle n, \lambda \rangle \right)^{-q-1} \tag{8.1.39}$$

et qui font en général obstacle à la conjugabilité analytique.

On obtient des énoncés analogues aux propositions 8.1.1 et 8.1.2, pour les champs ou difféos qui présentent de la nihilence partielle de première génération $\left(0 < \nu l < \rho^+ \right)$ et plus généralement pour les champs et difféos nihilents de deuxième, troisième... génération.

(*) dès lors qu'ils le sont formellement.

8.1.d. La nihilence n'engendre pas d'invariants holomorphes.

La proposition 8.1.2 indique que la nihilence active, autrement dit la nihilence non compensée par (8.1.37) ou (8.1.37 bis), fait en général obstacle à la conjugaison analytique. Elle crée donc des classes analytiques non triviales et, partant, des invariants analytiques.

Proposition 8.1.3. (Nihilence et invariants métaholomorphes)

A elle seule, la nihilence n'engendre que des invariants métaholomorphes.

Cela signifie en particulier qu'un champ X ou un difféo f dont la nihilence est totale (i.e. dont le degré de nihilence égale le degré de résonance positive) ne possède pas un seul invariant scalaire (non formel) qui soit holomorphe par rapport à l'objet.

Dans (*) J.-P. FRANCOISE a exposé une version affaiblie de la proposition 8.1.3, à savoir qu'il n'existe pas assez d'invariants holomorphes pour caractériser les classes analytiques. En fait il n'existe pas un seul invariant holomorphe $I(X)$ ou $I(f)$, en dehors évidemment des invariants formels. L'idée de la démonstration est la suivante.

On écrit l'objet nihilent (champ X ou difféo f) sous la forme :

$$X = A + \varepsilon B \tag{8.1.40}$$

avec une partie principale A bien choisie et une perturbation finie B . S'il existait ne fût-ce qu'un invariant holomorphe $I(X)$ non formel, celui-ci serait nécessairement de la forme :

$$I(A + \varepsilon B) = \varepsilon^n I_n(A ; B) + o(\varepsilon^n) \tag{8.1.41}$$

pour un certain entier $n \geqslant 1$ et pour une forme $I_n(A ; B)$ fonction entière

(*) Voir [Fr.2].

de B , homogène de degré n en B . De plus, un changement de variables ${}^{\varepsilon}h$ proche de l'identité, transformerait le champ $A+\varepsilon B$ en un champ $A+\varepsilon\widetilde{B}+o(\varepsilon)$ et l'on devrait avoir :

(8.1.42) $$I_n(A;B) \equiv I_n(A;\widetilde{B})$$

C'est précisément cette identité qui est impossible, comme on s'en aperçoit en essayant de la traduire coefficient par coefficient : la raison dernière est qu'il est impossible d'exploiter la condition $\liminf\limits_{\langle n,\lambda\rangle\neq 0} |\langle n,\lambda\rangle| = 0$ (impossibilité qui intuitivement est presque évidente).

Un raisonnement complet (dans le problème analogue des tout petits diviseurs) figure au §9.1. Le lecteur qui souhaiterait s'assurer par lui-même de la validité du raisonnement dans le cas des <u>petits diviseurs</u> (proposition 8.1.3) est invité à commencer par le cas le plus simple, à savoir :

(8.1.43) $$\begin{cases} X = A+\varepsilon B \\ A = \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad B = \sum_{i=1}^{3} B_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

avec

(8.1.44) $$\begin{cases} A_1(x) = 0 \;;\; A_2(x) = \lambda_2 x_2 \;,\; A_3(x) = \lambda_3 x_3 \\ \lambda_2/\lambda_3 \text{ irrationnel négatif} \\ B_1(x_1,0,0) = 0 \;,\; B_i(x) \text{ sans termes linéaires } (i=1,2,3) \end{cases}$$

et à envisager des changements de variables ${}^{\varepsilon}h$ élémentaires mais bien choisis.

<u>8.1.e. Coexistence de la nihilence et de la résurgence. Paramètres de nihilence.</u>

On vient de voir que la nihilence totale $(nil = \nu^+)$ empêchait la résonance de produire son effet habituel —— la résurgence —— et qu'elle détruisait par là-même les invariants holomorphes. Mais lorsque la nihilence est partielle $(nil < \nu^+)$ la résurgence subsiste et les deux phénomènes se superposent sans interférer : on a d'un côté la nihilence, qui (si du moins elle est active : voir ci-avant) engendre des invariants métaholomorphes et de l'autre la résurgence, qui engendre toujours des invariants holomorphes, lesquels se lisent sur l'équation du pont.

Nous rencontrerons dans la suite de nombreux cas de coexistence nihilence-résurgence à propos des objets isochores ou hamiltoniens qui présentent de la résonance extrinsèque (voir § 8.3 et § 8.4). Mais nous pouvons sans attendre donner un exemple élémentaire. Soit un champ

(8.1.50) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(X_i(x) = \lambda_i x_i + \dots\right)$$

présentant deux degrés de résonance positive, par exemple :

(8.1.51) $$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = m_3 \lambda_3 + m_4 \lambda_4 = 0 \qquad (m_1, m_2, m_3, m_4 > 0)$$

mais un seul degré de nihilence :

(8.1.52) $$m_1 Y_1(y) + m_2 Y_2(y) = 0 \qquad \left(m_3 Y_3(y) + m_4 Y_4(y) \neq 0\right)$$

où les $Y_j(y)$ désignent les coefficientsd'une forme prénormale du champ X :

(8.1.53) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i(y)\, y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad \left(Y_i(y) = \lambda_i + \dots\right)$$

Alors, à toute graduation $\mathcal{H}$ et à tout rayon propre γ correspond une intégrale formelle :

(8.1.54) $$x(z, u) = \sum_{n_1, \dots, n_{\nu-2}} u_1^{n_1} \dots u_{\nu-2}^{n_{\nu-2}}\, z^{[n_1, \dots, n_{\nu-2}]}\, \phi^{[n_1, \dots, n_{\nu-2}]}(z)$$

d'un type un peu inhabituel : la $\sum$ du second membre est en effet étendu à une partie de $\mathbb{Z}^{\nu-2}$ et non de $\mathbb{Z}^{\nu-1}$ et le paramètre $u_{\nu-1}$, dit paramètre de nihilence et lié à l'intégrale première de $y_1^{m_1} y_2^{m_2}$, figure tant dans les blocs $z^{[n]}$ que dans les composantes ϕ^{n} :

(8.1.55) $$z^{[n_1,\ldots,n_{\nu-2}]} = z^{\omega_0(n;u_{\nu-1})} \exp\Big(\sum_{1\le q\le p} \omega_q(n;u_{\nu-2})\, z^{q/p}\Big)$$

(8.1.56) $$\varphi^{n_1,\ldots,n_{\nu-2}}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1/p}, u_{\nu-1}]]$$

Ici les $\omega_i(n;u_{\nu-1}) = \omega_i(n_1,\ldots,n_{\nu-2};u_{\nu-1})$ sont comme d'habitude linéaires en n (ou sous-linéaires pour $i=0$) mais ce sont des séries entières en $u_{\nu-1}$ et non plus de simples scalaires (*).

Les composantes $\varphi^n(z)$ sont résurgentes en z et on a l'équation du pont :

(8.1.57) $$\dot{\Delta}_\omega\ x(z,u) = \mathbb{A}_\omega\ x(z,u)$$

avec des opérateurs différentiels invariants :

(8.1.58) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)}\Big\{A^0_\omega(u_{\nu-1})\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-2} A^i_\omega(u_{\nu-1})\, u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + A^{\nu-1}_\omega(u_{\nu-1})\frac{\partial}{\partial u_{\nu-1}}\Big\}$$

et bien entendu

(8.1.59) $$\Big(u^{n(\omega)} = u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-2}^{n_{\nu-2}}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\omega = n_1\lambda^*_1 + \ldots n_{\nu-2}\lambda^*_{\nu-2}$$

pour une base $\{\lambda^*_i\}$ de Ω bien choisie.

Si, plus généralement, X présentait ρ^+ degrés de résonance positive, ρ_- degrés de résonance virtuelle, et de la nihilence partielle de degré $\sigma<\rho^+$, on verrait apparaître σ paramètres de nihilence, notés $u_{\nu-\sigma},\ldots,u_{\nu-1}$, qui s'introduiraient dans les $z^{[n]}$ et les φ^n , et les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ auraient la forme :

(8.1.60) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)}\Big\{A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-\rho} A^i_\omega(u)\, u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\nu-\rho<i<\nu} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\Big\}$$

(*) On peut aussi présenter l'intégrale formelle d'une manière légèrement différente. Il faut d'ailleurs distinguer plusieurs sous-cas.

avec pour coefficients $A^{i}_{\omega}(u)$ des séries formelles en les $\nu-1$ derniers paramètres u_i (sur lesquels ν_- seraient associés à la résonance virtuelle et ν^+-1 se partageraient entre la résonance positive et la nihilence).

Les opérateurs $\mathbb{A}_{\omega}$ constituent, comme d'habitude, des systèmes complets d'invariants holomorphes, à quoi s'ajoutent ici, quand la nihilence est active (i.e. quand la condition de compensation (8.1.37) - (8.1.37bis) n'est pas remplie), des invariants métaholomorphes.

Paramètres de nihilence :

En résumé, on voit que la nihilence :

(i) introduit un nombre τ (égal au degré de nihilence) de paramètres de nihilence $u_{\nu-\tau}, \ldots, u_{\nu-2}, u_{\nu-1}$, qui correspondent aux intégrales premières de l'objet (champ ou difféo).

(ii) modifie quelque peu la forme des blocs élémentaires $\mathfrak{z}^{[n]}$ et des composantes φ^n puisqu'elle y fait entrer les τ paramètres de nihilence.

(iii) n'abolit (quand elle est partielle, i.e. quand $\tau<\nu^+$) ni la résurgence ni l'équation du pont et ne change pas la forme des invariants holomorphes $\mathbb{A}_{\omega}$.

Remarque terminologique : pourquoi la "nihilence" ?

Nous avions songé au début à qualifier de "dégénérescence" ce que nous nommons ici "nihilence", mais nous avons dû y renoncer, car le terme de dégénérescence est par trop ambigu. Dire par exemple qu'un champ singulier X est dégénéré signifie simplement que sa partie linéaire a un déterminant nul et par suite que l'un au moins de ses multiplicateurs λ_i est nul. Mais c'est là un cas particulier, très banal, de résonance, sans aucun rapport avec la véritable nihilence, qui est une condition infiniment plus forte, portant sur les jets de tous ordres : la nihilence implique en effet la nullité totale ou partielle du champ réduit (de première génération ou d'une génération ultérieure). En langage imagé, on peut dire que les objets dégénérés (champs ou difféos), ont quelques termes, parmi les tout premiers, qui leur manquent, tandis que les objets nihilents recèlent des trous béants et sont comme tissés de néant. Ce que le terme de nihilence rend à merveille. Comme enfin la nihilence se trouve associée à un phénomène très spécifique (petits diviseurs) et que c'est l'une des deux grandes sources d'invariants métaholomorphes, elle mérite bien de porter un nom spécial.

SECTION 8.2 : NIHILENCE INDUITE PAR DES FORMES DIFFERENTIELLES. RESONANCE INTRINSEQUE ET RESONANCE EXTRINSEQUE. SUPERPOSABILITE DE LA RESURGENCE ET DE LA NIHILENCE.

La nihilence, comme on vient de le voir, est une condition extraordinairement forte - si forte que les champs et difféos rencontrés en pratique n'ont aucune raison de la satisfaire, à moins que ces objets ne laissent invariants des formes différentielles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$

Pour un champ X , cela veut dire que la dérivée de Lie associée annulle les formes :

$$(8.2.1) \qquad L_X \cdot \theta_1 = L_X \cdot \theta_2 = \dots L_X \cdot \theta_r = 0$$

et pour un difféo f cela veut dire que chaque forme est stable pour F (substitution de $f_i(x)$ à x_i) :

$$(8.2.2.) \qquad F \cdot \theta_1 - \theta_1 = F \cdot \theta_2 - \theta_2 = \dots \quad F \cdot \theta_r - \theta_r = 0$$

Dans la suite nous raisonnerons sur des champs et nous supposerons unique la forme invariante θ , mais il va de soi que tout s'étend aux difféos et aux systèmes de plusieurs formes invariantes.

Soit ν la dimension du champ. Pour toute partie $P = \{i_1 < i_2 < \dots i_r\}$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, \nu\}$ posons :

(8.2.3) $$\theta^P = \frac{dx_{i_1}}{x_{i_1}} \wedge \frac{dx_{i_2}}{x_{i_2}} \wedge \dots \frac{dx_{i_r}}{x_{i_r}}$$

θ^P est une r-forme homogène de degré 0. Par définition, une r-forme homogène positive est une forme du type :

(8.2.4) $$\theta = \sum_{\substack{\mathrm{card}\, P = r \\ \|m\| = k}} \alpha_{m;P}\, x^m\, \theta^P \qquad (\alpha_{m,P} \in \mathbb{C})$$

la somme étant étendue à des multiindices $m = \{m_1, m_2, \dots, m_\nu\}$ de coordonnées entières positives $(m_i \geqslant 0)$ et de même somme $(\|m\| = \sum m_i = k)$. Une telle forme différentielle θ a ses coefficients dans $(x_1 \dots x_\nu)^{-1}\, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_\nu]$. Lorsque les m_i sont tous > 0, alors les coefficients de θ sont dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_\nu]$ et on dit que θ est fortement positive. En pratique, on a aussi besoin des formes θ qui ne sont que (simplement) positives.

Comme le montre J.-P. FRANCOISE dans [Fr.1], l'avantage de se restreindre aux formes différentielles θ homogènes, c'est qu'on peut prénormaliser les objets θ-invariants par des changements de variables eux aussi θ-invariants.

Proposition 8.2.1. (J.-P. FRANCOISE; prénormalisation θ-invariante)

Tout champ X qui laisse invariant une forme différentielle θ homogène positive :

(8.2.5) $$L_X \,.\, \theta = 0$$

peut être mis sous forme prénormale (6.5.4) par un changement de variable formel h qui est lui-même θ-invariant :

(8.2.6) $$H.\theta = \theta$$

Démonstration succinte :

On commence par montrer l'existence d'un changement de variable h linéaire, θ-invariant, et qui mette la partie linéaire de X sous forme de Jordan :

(8.2.7) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ \lambda_i x_i + \varepsilon_i x_{i+1} + o(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1)$$

On montre ensuite que si la décomposition (8.2.4) de θ est <u>irréductible</u> (autrement dit si aucun changement de variable ne peut réduire le nombre de θ^P qu'elle comporte) alors à chaque multiindice m figurant dans (8.2.4) avec un coefficient $\alpha_{m;P}$ non nul correspond une relation de résonance des multiplicateurs λ_i :

(8.2.8) $$\langle m, \lambda \rangle = \sum m_i \lambda_i = 0 \qquad (\text{si } \alpha_{m,P} \neq 0)$$

Supposons pour simplifier que la forme de Jordan (8.2.7) soit diagonale $(\varepsilon_i = 0)$ et désignons par Ω l'ensemble des combinaisons entières des multiplicateurs λ_i. Le champ X s'écrit alors sous la forme :

(8.2.9) $$X = {}^{\circ}X + \varepsilon \sum_{\omega \in \Omega} X^{\omega}$$

avec $\varepsilon = 1$ (ce ε n'est là que pour suggérer une récurrence) et avec :

(8.2.10) $${}^{\circ}X = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \text{partie linéaire de } X.$$

et enfin

(8.2.11) $$X^{\omega} = \sum_{\langle n, \lambda \rangle = \omega} x^n \sum_{i=1}^{\nu} a_n^i x^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

X^{ω} est dit partie ω-homogène de X. (Pour $\omega = 0$, on doit calculer X° en excluant de la somme (8.2.11) les multiindices n nuls, car ceux-ci correspondent à la partie <u>linéaire</u> de X, qui n'est autre que ${}^{\circ}X$ et qu'on a déjà comptée à part).

Cherchons le changement de variable formel h sous forme exponentielle :

(8.2.12) $$h = \exp H = \exp\left(\sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q H_q \right)$$

pour des champs de vecteurs formels H_q supposés sans partie 0-homogène :

(8.2.13) $$H_q = \sum_{\omega \neq 0} H_q^{\omega}$$

Supposons que h mette X sous forme prénormale :

(8.2.14) $$Y = {}^{o}X + Y^{o} \quad , \quad Y^{o} = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^{q} \, Y_{q}^{o}$$

avec ${}^{o}X$ comme en (8.2.10) et avec un champ Y^{o} 0-homogène mais ne coïncidant pas forcément avec la partie 0-homogène X^{o} de X . On aura alors :

(8.2.15) $$X + [X, H] + \frac{1}{2!} [[X, H] H] + \frac{1}{3!} [[[X, H] H] H] + \ldots = Y$$

Tenant compte de (8.2.9), (8.2.12), (8.2.13) et (8.2.14) on trouve en identifiant dans (8.2.15) les termes en ε et ε^{2} :

(8.2.16) $$[{}^{o}X \, , H_{1}^{\omega}] = - X^{\omega}$$

(8.2.17) $$[{}^{o}X \, , H_{2}^{\omega}] = - \sum_{\omega_0 + \omega_1 = \omega} [X^{\omega_0}, H_{1}^{\omega_1}]$$

et en identifiant les termes en ε^{q} :

(8.2.18) $$[{}^{o}X, H_{q}^{\omega}] = - \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{\omega_0 + \omega_1 + \ldots \omega_r = \omega \\ 1 + q_1 + \ldots q_r = q}} [[X^{\omega_0}, H_{q_1}^{\omega_1}] H_{q_2}^{\omega_2}] \ldots H_{q_r}^{\omega_r}]$$

Or il est immédiate que tout champ ω-homogène R^{ω} vérifie :

(8.2.19) $$[{}^{o}X, R^{\omega}] = \omega \, R^{\omega}$$

Par suite l'identité (8.2.18) fournit une récurrence qui permet de calculer H_{q}^{ω} pour tout q et tout $\omega \neq 0$: il suffit de diviser par ω le second membre de (8.2.18). Si d'autre part on choisit, comme nous l'avons fait, de prendre $H_{q}^{o} = 0$, les champs Y_{q}^{o} entrant dans la forme normale se trouveront automatiquement déterminés. Reste à montrer que le champ H et par suite le changement de variable h sont θ-invariants. On observe d'abord, à partir des relations de résonance (8.2.20), qu'un champ θ-invariant a automatiquement des parties ω-homogènes qui sont elles-mêmes θ-invariantes (*) :

(*) c'est là qu'intervient l'homogénéité de θ .

(8.2.20) $$\left(L_R \cdot \theta = 0\right) \Longrightarrow \left(L_{R^\omega} \cdot \theta = 0 \ , \ \forall \omega \in \Omega\right)$$

Il en résulte que les X^ω sont θ-invariants, donc aussi les H_1^ω d'après (8.2.16), donc aussi les H_2^ω d'après (8.2.17) et plus généralement les H_q^ω d'après (8.2.19).

Proposition 8.2.2. (Résonance et nihilence induite)

Tout champ X qui laisse invariant une forme différentielle homogène positive θ présente automatiquement de la résonance (positive, de première génération) et de la nihilence (de première génération). Cette résonance et cette nihilence sont dites induites par θ. Le degré ρ_θ^+ de résonance induite est égal au nombre de relations (8.2.8) indépendantes (*). Le degré σ_θ de nihilence induite peut, selon les formes θ être égal ou inférieur à ρ_θ^+. Autrement dit, la nihilence induite peut être totale ou partielle.

Le calcul exact de ρ_θ^+ et σ_θ repose sur les décompositions irréductibles de θ et sur la (ou les) forme(s) θ_{red} qui se déduisent de θ et que le champ réduit X_{red} laisse invariant :

(8.2.21) $$\left(L_X \cdot \theta = 0\right) \Longrightarrow \left(L_{X_{red}} \cdot \theta_{red} = 0\right)$$

Plutôt que d'entrer dans les détails, mieux vaut passer en revue une série d'exemples illustrant les cas les plus typiques. Commençons par les 0-formes, c'est-à-dire par des θ qui sont des polynômes homogènes en x.

Exemple 1 :

(8.2.22) $$\theta = x^m = x_1^{m_1} \dots x_\nu^{m_\nu}$$

On a manifestement $\rho_\theta^+ = \sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est donc totale.

(*) relativement à une écriture irréductible de θ.

Exemple 2 :

(8.2.23) $$\theta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, x^{m^i} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, x_1^{m^i_1} \dots x_\nu^{m^i_\nu}$$

avec $\| m^1 \| = \| m^2 \| = \dots \| m^r \|$ et $r < \nu$. Si les multiindices m^i sont indépendants, on a en général $\rho_\theta^+ = r$ (*). En revanche on a toujours $\sigma_\theta = 1$. Ici la nihilence induite n'est que partielle.

Passons maintenant aux 1-formes.

Exemple 3 :

(8.2.24) $$\theta = x^m \frac{dx_1}{x_1}$$

On a $\rho_\theta = \sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est totale.

Exemple 4 :

(8.2.25) $$\theta = \left(\alpha_1 x^{m^1} + \alpha_2 x^{m^2}\right) \frac{dx_1}{x_1} \qquad \left(\| m^1 \| = \| m^2 \| , \; m^1 \neq m^2 \right)$$

On a $\rho_\theta = 2$ mais $\sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est partielle.

Exemple 5 :

(8.2.26) $$\theta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, x^{m^i} \frac{dx_i}{x_i} \qquad \left(\| m^1 \| = \| m^2 \| = \dots \| m^r \| \; ; \; r < 0 \right)$$

On a en général $\rho_\theta = \sigma_\theta$. La nihilence induite est à nouveau totale.

Exemple 6 :

(8.2.27) $$\theta = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \, x^{m^{i,j}} \frac{dx_j}{x_i}$$

(*) Mais on peut avoir $\rho_\theta < r$ si θ n'est pas irréductible. C'est le cas par exemple pour $\theta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ou $\theta = \alpha_1^2 x_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_2^2 x_2^2$

En général ρ_θ est égal au nombre de $\alpha_{i,j}$ non nuls tandis que σ_θ est égal au nombre de j auxquels correspondent des $\alpha_{i,j}$ non nuls. La nihilence induite est donc le plus souvent partielle.

Examinons maintenant quelques 2-formes :

Exemple 7 :

(8.2.28) $$\theta = x^m \frac{dx_1}{x_1} \wedge \frac{dx_2}{x_2}$$

On a toujours $\rho_\theta = \sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est totale.

Exemple 8 :

(8.2.29) $$\theta = \left(\alpha_1 x^{m^1} + \alpha_2 x^{m^2}\right) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \frac{dx_2}{x_2}$$

On a $\rho_\theta = 2$ mais $\sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est partielle.

Exemple 9 :

(8.2.30) $$\theta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^{m^i} \frac{dx_i}{x_i} \wedge \frac{dx_{i+r}}{x_{i+r}} \qquad (r \leq \nu/2)$$

Ici $\rho_\theta = \sigma_\theta = r$. La nihilence induite est totale. Pour ν pair, $r = \nu/2$, $\alpha_i = 1$ et $x^{m^i} = x_i x_{i+r}$, cela couvre le cas de la forme symplectique :

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} dx_i \wedge dx_{i+r}$$

Pour terminer, examinons les formes de degré maximal, c'est-à-dire les ν-formes :

Exemple 10 :

(8.2.31) $$\theta = x^m \frac{dx_1}{x_1} \wedge \frac{dx_2}{x_2} \wedge \dots \frac{dx_\nu}{x_\nu}$$

On a ici un degré de résonance induite, correspondant à la relation $\langle m,\lambda\rangle = 0$ et un degré de nihilence induite. Soit $\rho_\theta = \sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est totale.

Exemple 11 :

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^{m^i}\right) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \frac{dx_2}{x_2} \wedge \dots \frac{dx_\nu}{x_\nu} \qquad \left(\|m^1\| = \|m^2\| = \dots ;\ \alpha_i \neq 0\right) \tag{8.2.32}$$

Si les multiindices m^i sont linéairement indépendants, on a $\rho_\theta = r$ mais $\sigma_\theta = 1$. La nihilence induite est donc partielle.

Remarque 1. (Résonance et nihilence extrinsèques)

Il est bien clair qu'un champ X laissant stable une forme différentielle θ peut présenter un degré de résonance ρ supérieur à ρ_θ . On dit alors que X possède $\rho_{ext} = \rho - \rho_\theta$ degrés de résonance extrinsèque. De même, le degré de nihilence σ peut excéder le degré σ_θ de nihilence induite. On parle alors de nihilence extrinsèque.

Remarque 2. (Résonance et nihilence induites de deuxième génération)

Soit par exemple un champ X laissant invariant la ν-forme homogène positive

$$\theta = \left(\alpha_1 x^{m^1} + \alpha_2 x^{m^2} + \alpha_3 x^{m^3}\right) \frac{dx_1}{x_1} \wedge \frac{dx_2}{x_2} \wedge \frac{dx_3}{x_3} \wedge \dots \frac{dx_\nu}{x_\nu} \tag{8.2.33}$$

avec $\alpha_i \neq 0$ et

$$\left\{\begin{aligned} m^1 &= (1, 0, 0, m_4^1, \dots, m_\nu^1) \\ m^2 &= (0, 1, 0, m_4^2, \dots, m^2) \\ m^3 &= (0, 0, 1, m_4^3, \dots, m_\nu^3) \end{aligned}\right. \qquad \left\| \qquad \begin{aligned} & m_j^i \geq 0 \\ & \|m^1\| = \|m^2\| = \|m^3\| \end{aligned}\right. \tag{8.2.34}$$

La forme θ induit trois degrés de résonance positive :

(8.2.35) $$\langle m^1, \lambda \rangle = \langle m^2, \lambda \rangle = \langle m^3, \lambda \rangle = 0$$

En l'absence de résonance extrinsèque, l'algèbre réduite $\mathcal{A}_{red}$ s'identifie à $\mathbb{C}[[w_1, w_2, w_3]]$ avec $w_i = x^{m^i}$. Quant au champ réduit, il s'écrit :

(8.2.36) $$X_{red} = \sum_{i=1}^{3} B_i(w)\, w_i \frac{\partial}{\partial w_i}$$

avec $B_1(w), B_2(w), B_3(w) \in \mathbb{C}[[w_1, w_2, w_3]]$ et $B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = 0$

On s'assure que le champ réduit laisse invariante la forme θ_{red} :

(8.2.37) $$\theta_{red} = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3) \left(\frac{dw_1}{w_1} \wedge \frac{dw_2}{w_2} \wedge \frac{dw_3}{w_3} \right)$$

Autrement dit :

(8.2.38) $$L_{X_{red}} \cdot \theta_{red} = 0$$

Posons $$B_i(w) = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} w_j + o(w)$$

Les relations (8.2.38) impliquent alors :

(8.2.39) $$b_{ii} = 0 \quad (\forall i) \quad \text{et} \quad \alpha_i b_{ij} + \alpha_j b_{ji} = 0 \quad (\forall i, j)$$

Le lecteur vérifiera que cela induit, pour tout rayon propre γ, de la résonance sur les directeurs, dite <u>résonance de seconde génération</u>, et aussi de la <u>nihilence de seconde génération</u>, autrement dit l'existence dans l'algèbre éclatée $\mathcal{A}_{red}^{[\gamma]}$ d'éléments annulés par X_{red}.

Ici, du fait de la forme très particulière des m^i, il n'existe génériquement qu'une seule graduation $\mathfrak{H}$, mais la résonance-nihilence induite de seconde génération persiste pour tous les $(\mathfrak{H}, \gamma)$ même lorsqu'il y a plusieurs $\mathfrak{H}$. Et ceci vaut également pour les générations d'ordre supérieur.

Notons, pour clore cette remarque, qu'il faut soigneusement distinguer ces phénomènes de la <u>résonance héréditaire</u>, avec laquelle ils n'ont rien à voir. La résonance héréditaire, que nous avons rencontrée au §6.6, ne supposait nullement la nihilence.

<u>Proposition 8.2.3.</u> <u>(θ-invariance des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$)</u>

Soit θ une forme différentielle homogène et soit X un champ θ-invariant dont la nihilence n'est pas totale (*). Soit

(8.2.40) $$x(z,u) = (x_1(z,u), \ldots, x_\nu(z,u))$$

une intégrale formelle du champ X et soit $\mathbb{A}_\omega$ les opérateurs différentiels invariants qui interviennent dans l'équation du pont :

(8.2.41) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z,u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z,u)$$

Le changement de variable $x_i = x_i(z,u)$ permet de considérer θ comme une forme différentielle en z et les u_i et donc de lui appliquer les dérivées de Lie $L_{\mathbb{A}_\omega}$. Faisant cela, on constate la θ-<u>invariance des</u> $\mathbb{A}_\omega$:

(8.2.42) $$L_{\mathbb{A}_\omega} \cdot \theta = 0$$

<u>Preuve</u> :

Soit χ une forme différentielle en $x_1, \ldots, x_\nu$ et à coefficients analytiques, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_\nu\}$. Le changement de variable $x_i = x_i(z,u)$ fait de χ une forme différentielle en $z, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$. Or x_i est résurgent en z. Etant <u>analytique</u> en $x_1, \ldots, x_\nu$, la forme χ est donc <u>résurgente</u> en z et il est permis de la dériver étrangèrement (en z). Le calcul donne :

(8.2.43) $$\dot{\Delta}_\omega \; \chi = L_{\mathbb{A}_\omega} \cdot \chi$$

(*) Rappelons que ceci peut se produire dans deux cas : quand il y a <u>nihilence</u> <u>extrinsèque</u> ou quand la <u>nihilence induite</u> n'est pas totale.

La formule (8.2.43) généralise l'équation du pont. Il suffit de l'établir pour $\chi = dx_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ce qui est facile. En effet :

$$\dot{\Delta}_\omega \, dx_i = d \, \dot{\Delta}_\omega \, x_i \tag{8.2.44}$$

car $\dot{\Delta}_\omega$ commute avec les $\frac{\partial}{\partial u_j}$ (évidemment !) mais aussi avec les $\frac{\partial}{\partial z}$ (puisque c'est une dérivation étrangère pointée). Portant (8.2.41) dans le second membre de (8.2.44), on trouve :

$$\dot{\Delta}_\omega \, dx_i = d \, \mathbb{A}_\omega \, x_i \tag{8.2.45}$$

Ce qui s'écrit :

$$\dot{\Delta}_\omega \, dx_i = L_{\mathbb{A}_\omega} \, dx_i \tag{8.2.46}$$

D'où la relation générale (8.2.43), que nous allons maintenant appliquer à $\chi = \theta$.

$$\dot{\Delta}_\omega \, . \, \theta = L_{\mathbb{A}_\omega} . \, \theta \tag{8.2.47}$$

Mais, par hypothèse :

$$L_X \, . \, \theta = 0 \tag{8.2.48}$$

Or, par rapport aux variables $z, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ le champ X s'écrit tout simplement $\frac{\partial}{\partial z}$. L'identité (8.2.47) exprime donc la constance en z de la forme ou, si l'on préfère, la constance en z des coefficients de θ (*). Cette constance entraîne la nullité du premier membre de (8.2.47). D'où l'identité (8.2.42).

Bien qu'au fond la θ-invariance des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ soit presque évidente, elle n'en revêt pas moins une extrême importance, comme nous le verrons aux sections suivantes à propos des objets isochores et surtout hamiltoniens.

(*) Car θ comporte en général des termes en $dz \wedge du_1 \wedge \ldots du_r$.

SECTION 8.3 : CHAMPS ET DIFFEOS ISOCHORES. ISOCHORIE DE LA RESURGENCE.

8.3.a. Résonance intrinsèque et résonance extrinsèque.

Un champ X ou un difféo f est dit isochore s'il conserve la forme de volume :

(8.3.1) $$\theta^{\nu} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \; dx_\nu$$

Pour un champ $X = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ cela se traduit par :

(8.3.2) $$L_X . \theta^{\nu} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(x) = 0$$

et pour un difféo $x_i \longmapsto f_i(x)$ cela donne :

(8.3.3) $$F . \theta^{\nu} = \theta^{\nu} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \det\left[\partial f_i(x) / \partial x_j\right] = 1$$

Raisonnons pour fixer les idées sur un champ X. La relation (8.3.2) n'implique, pour la partie linéaire de X, que la nullité de la trace et rien d'autre. L'isochorie induit donc un seul degré de résonance :

(8.3.4) $$< m^{\nu}, \lambda > = \lambda_1 + \dots \lambda_\nu = 0 \qquad \left(m^{\nu} = (1,1,\dots,1)\right)$$

Cette relation implique tous les multiplicateurs et s'oppose à l'existence de résonance virtuelle $(\underline{\nu} = 0)$. En effet, tout résonnateur m :

(8.3.5) $$< m, \lambda > = m_1\lambda_1 + \dots \; m_\nu \lambda_\nu = 0 \qquad (m_i \in \mathbb{Z})$$

même si ses coordonnées m_i sont de signes mixtes, peut s'écrire sous la forme :

(8.3.6) $$m = m' - m'' \quad \text{avec } m' = m + k m^{\nu}, m'' = k m^{\nu}, \; k \in \mathbb{N}$$

Le résonnateur m'' a ses coordonnées toutes positives et le résonnateur m aussi, du moins si k est assez grand. Donc m', m'' et leur différence m appartiennent tous trois à l'espace $\mathcal{R}es^{+}$ engendré par les résonnateurs à coordonnées positives.

Par suite :

(8.3.7) $\quad \mathcal{R}es = \mathcal{R}es^{+} \quad$ et $\quad \rho_{-} = \dim\left(\mathcal{R}es/\mathcal{R}es^{+}\right) = 0$

Pour les objets icochores, la décomposition habituelle :

(8.3.8) $\quad \rho = \rho^{+} + \rho_{-} \qquad$ (résonance virtuelle + résonance positive)

devient donc caduque et c'est la décomposition :

(8.3.9) $\quad \rho = \rho^{+} = \rho_{int} + \rho_{ext} \qquad$ (résonance intrinsèque + résonance extrinsèque)

qui est pertinente. Ici ρ_{int} vaut toujours 1 et désigne l'unique degré de <u>résonance induite</u>, ou <u>intrinsèque</u>, correspondant à la relation (8.3.4). Quant à ρ_{ext}, ou degré de <u>résonance extrinsèque</u>, il est égal au nombre de relations (8.3.5) indépendantes de (8.3.4).

<u>8.3.b.</u> <u>Objets icochores sans résonance extrinsèque. Invariants métaholomorphes.</u>

Soit X un champ icochore sans résonance extrinsèque. Donc $\rho_{ext} = 0$. D'après la proposition 8.2.1 il existe un changement de variable h formel et <u>isochore</u>, qui met X sous forme prénormale :

(8.3.10) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i(w)\, y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

avec $w = y^{m^{\nu}} = y_1 \cdots y_\nu \qquad$ et $\quad \Lambda(w) \in \mathbb{C}[[w]]$

D'où un champ réduit :

(8.3.11) $$X_{red} = \Lambda(w)\, w \frac{\partial}{\partial w} \qquad \text{avec} \quad \Lambda(w) = \sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i(w)$$

Mais puisque h est isochore, la forme de volume θ^{ν} s'écrit encore $dy_1 \wedge \ldots dy_\nu$ dans les coordonnées $\quad y_i = h_i(x) \quad$ et la relation (8.3.2) implique :

(8.3.12) $$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\Lambda_i(w)\, y_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i(w) + \sum_{i=1}^{\nu} w \frac{\partial}{\partial w} \Lambda_i(w)$$
$$= \Lambda(w) + w \frac{\partial}{\partial w} \Lambda(w) = 0$$

D'où $\Lambda(w) \equiv 0$. Le champ réduit X_{red} est donc nul. Ainsi la nihilence induite par la forme de volume θ^{ν} est-elle totale, comme on l'avait déjà signalé à propos de l'exemple 10 du §8.2. Le champ X ne possède donc pas d'invariants holomorphes (autres que les invariants formels). Tout au plus possède-t-il des <u>invariants métaholomorphes</u>, si la nihilence est <u>active</u>, c'est-à-dire si la <u>condition de compensation</u> (8.1.37) + (8.1.37bis) n'est pas vérifiée.

Ici, la nihilence n'est jamais active pour $\nu \leq 2$. Pour $\nu = 3$, elle ne peut l'être que lorsque $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont alignés. Pour $\nu \geq 4$ elle l'est presque toujours.

8.3.c. Objets isochores avec résonance extrinsèque. Coexistence des invariants holomorphes et métaholomorphes.

Pour montrer comment la résurgence et les invariants holomorphes surgissent dans le sillage de la résonance extrinsèque, nous allons traiter un exemple à la fois simple et typique.

Supposons tout d'abord qu'il n'y ait qu'un <u>seul degré</u> de résonance extrinsèque $\ell_{ext} = 1$ et que l'unique relation de résonance extrinsèque revête la forme :

(8.3.14) $$\lambda_\nu = 0$$

Le champ isochore X possède alors une forme prénormale isochore du type :

(8.3.15) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(w)\, y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

et il lui correspond un champ réduit de la forme :

(8.3.16) $$X_{red} = \Lambda_1(w)\, w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \Lambda_2(w)\, w_2 \frac{\partial}{\partial w_2}$$

avec

$$(8.3.17)\quad \begin{cases} X_1, \dots, X_v, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{C}[[w_1, w_2]] \\ \Lambda_1(w) = X_1(w) + X_2(w) + \dots X_{v-1}(w) \\ \Lambda_2(w) = X_v(w) \end{cases}$$

$\Lambda_1(w)$ et $\Lambda_2(w)$ ne comportent jamais de termes constants mais, dans le cas générique, ils comportent une partie linéaire :

$$(8.3.18)\quad \begin{cases} \Lambda_1(w) = a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + o(w) \\ \Lambda_2(w) = a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + o(w) \end{cases}$$

De la relation :

$$(8.3.19)\quad L_X \cdot \theta^V = 0 \quad \text{avec} \quad \theta^V = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots dy_v$$

on tire

$$(8.3.20)\quad L_{X_{red}} \cdot \theta^V_{red} = 0 \quad \text{avec} \quad \theta^V_{red} = dw_1 \wedge dw_2$$

De (8.3.20) on tire :

$$(8.3.21)\quad \Lambda_1 + w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} \Lambda_1 + \Lambda_2 + w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} \Lambda_2 = 0$$

ce qui entraîne :

$$(8.3.22)\quad a_{21} + 2a_{11} = 0 \quad \text{et} \quad a_{12} + 2a_{22} = 0$$

D'où essentiellement quatre cas :

<u>Premier cas</u>. $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$

Moyennant une dilation sur les w_i (pouvant elle-même être induite par une dilation sur les y_i) on peut supposer que $a_{11} = a_{22} = -1$. On a alors :

$$(8.3.23)\quad X_{red} = [-w_1 + 2w_2 + o(w)]\, w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + [-w_2 + 2w_1 + o(w)]\, w_2 \frac{\partial}{\partial w_2}$$

Le champ réduit X_{red} possède trois rayons propres :

(8.3.24) $\quad \gamma = (1,0) \; , \; \gamma' = (0,1) \; , \; \gamma'' = (-1,-1)$

et il se trouve que chacun d'eux possède pour directeurs $\lambda_0 = -1 \; , \; \lambda_1 = 3$

Deuxième cas. $\quad a_{11} = 0 \; , \; a_{22} \neq 0$

Moyennant une dilatation sur w_2 (obtensible à partir d'une dilatation sur y_ν) on peut supposer $a_{22} = -1$. On a alors :

(8.3.25) $$X_{red} = \left[2\,w_2 + o(w) \right] w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \left[-w_2 + o(w) \right] w_2 \frac{\partial}{\partial w_2}$$

Le champ réduit X_{red} possède un unique rayon propre non dégénéré, à savoir $\gamma = (0,1)$, de directeurs $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_1 = 3$ et un rayon propre dégénéré, à savoir $\gamma' = (1,0)$, de directeurs indéterminés.

Troisième cas : $\quad a_{11} \neq 0 \; , \; a_{22} = 0.$

Ce cas est exactement symétrique du précédent.

Quatrième cas : $\quad a_{11} = a_{22} = 0.$

Le champ réduit X_{red} est alors de niveau $p \geq 2$. Ce cas se subdivise en plusieurs sous-cas, selon les valeurs de p .

Les cas 2 et 3 sont les plus simples, car le champ réduit ne possède qu'un seul rayon propre non dégénéré. Par suite X_{red} et donc X lui-même ne possèdent qu'une seule intégrale formelle. Raisonnons par exemple sur le deuxième cas et considérons un champ isochore :

(8.3.26) $$X = {}^{\circ}X + \varepsilon\, \mathbb{D}$$

somme d'une partie élémentaire (mais non linéaire) :

(8.3.27) $$ {}^{\circ}X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\lambda_i + \tau_i x_\nu \right) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(\lambda_\nu = 0 \; , \; \tau_\nu = -1 \right)$$

et d'une perturbation homogène $\mathbb{D}$:

$$(8.3.28) \qquad \mathbb{D} = x^n \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_n^i \, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(x^n = x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}\right)$$

L'isochorie de $\mathcal{X}$ entraîne celle de ${}^\circ\mathcal{X}$ et $\mathbb{D}$ et elle impose :

$$(8.3.29) \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_{\nu-1} = 0 & (\lambda_\nu = 0) \\ \tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_{\nu-1} = 0 & (\tau_\nu = -1) \end{cases}$$

Le champ élémentaire ${}^\circ\mathcal{X}$ possède une intégrale formelle ${}^\circ x(z;u)$ du type :

$$(8.3.30) \qquad \begin{cases} {}^\circ x_i(z,u) = u_i \, e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} & (i<\nu) \\ {}^\circ x_\nu(z,u) = z^{-1} \end{cases}$$

et le champ complet $\mathcal{X}$ possède une intégrale formelle $x(z,u)$ du type :

$$(8.3.31) \qquad x_i(z,u) = {}^\circ x_i(z,u) \left\{1 + \varepsilon\, u^n e^{\omega z} z^\tau \Psi_i(z) + o(\varepsilon)\right\}$$

avec :

$$(8.3.32) \qquad \begin{cases} u^n = u_1^{n_1} \dots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} \quad ; \quad \Psi_i(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \\ \omega = \langle n, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i \\ \tau = \langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \tau_i \end{cases}$$

et avec des séries formelles $\Psi_i(z)$ solutions du système :

$$(8.3.33) \qquad \left(\omega + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(z^\tau . \Psi_i(z)\right) = z^\tau . \left(\tau_i \, z^{-1} \Psi_\nu(z) + \alpha_\nu^i\right)$$

qui, compte tenu de $\tau_\nu = -1$ et de $\tau_1 + \dots \tau_{\nu-1} = 2$, équivaut à :

$$(8.3.34) \qquad \begin{cases} \left(\omega + \frac{\tau}{z} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\, \Psi_\nu(z)\right) = z\, \alpha_n^\nu \\ \left(\omega + \frac{\tau}{z} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\Psi_i(z) + \tau_i \Psi_\nu(z)\right) = \tau_i \, \alpha_n^\nu + \alpha_n^i \end{cases}$$

Les $\Psi_i(z)$ sont résurgentes en z et la seule dérivation étrangère susceptible d'agir sur elles est Δ_ω avec ω comme en (8.3.32). Appliquant la transformation de Borel aux séries $z^\tau \Psi_i(z)$ et prenant leur résidu au point $\zeta = \omega$, on calcule aisément, au premier ordre en ε , l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$. Plus précisément, on a comme d'habitude l'équation du pont :

(8.3.35) $$\dot{\Delta}_\omega \quad x(z,u) \quad = \quad \mathbb{A}_\omega \quad x(z,u)$$

avec un opérateur invariant de la forme :

(8.3.36) $$\mathbb{A}_\omega = u^n \left\{ A^0_\omega \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-1} A^j_\omega \; u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

dont les coefficients valent, au premier ordre en ε :

(8.3.37) $$\begin{cases} A^0_\omega = \varepsilon . 2\pi i \, . (1+\tau) \, . \, \alpha^\nu_n \, . \, \dfrac{\omega^{-\tau-2}}{\Gamma(-\tau)} + o(\varepsilon) \\ A^j_\omega = \varepsilon . 2\pi i \left[(\alpha^j_n + \tau_j \alpha^\nu_n) . \omega - (1+\tau) \lambda_j \, \alpha^j_n \right] . \dfrac{\omega^{-\tau-2}}{\Gamma(-\tau)} + o(\varepsilon) \quad (0<j<\nu) \end{cases}$$

Si maintenant, au lieu d'ajouter à ${}^0X$ une seule perturbation homogène $\mathbb{D}$, on ajoutait une série de telles perturbations, on obtiendrait des opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

(8.3.38) $$\mathbb{A}_\omega = \sum_{\langle n,\lambda\rangle = \omega} u^n \left\{ A^0_{\omega;n} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-1} A^j_{\omega;n} \, u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

avec des coefficients $A^j_{\omega;n}$ scalaires. Après le changement de paramétrage :

(8.3.39) $$\begin{cases} \tilde{u}_i = u_i & (\text{pour } i = 1,2,\ldots,\nu-2) \\ \tilde{u}_{\nu-1} = u_1 \, u_2 \ldots u_{\nu-1} \end{cases}$$

l'opérateur (8.3.38) s'écrit :

(8.3.40) $$\mathbb{A}_\omega = \tilde{u}^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(\tilde{u}_{\nu-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\nu-2} A^j_\omega(\tilde{u}_{\nu-1}) \, \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_j} + A^{\nu-1}_\omega(\tilde{u}_{\nu-1}) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{\nu-1}} \right\}$$

avec des coefficients $A^j_\omega(\tilde{u}_{\nu-1})$ qui cette fois appartiennent à $\mathbb{C}[[\tilde{u}_{\nu-1}]]$ et avec un facteur monomial :

(8.3.41) $$\tilde{u}^{n(\omega)} = (\tilde{u}_1)^{n_1} \ldots (\tilde{u}_{\nu-2})^{n_{\nu-2}}$$

sans terme en $\tilde{u}_{\nu-1}$ et parfaitement déterminé par ω puisque

(8.3.42) $$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots n_{\nu-2}\lambda_{\nu-2} = \omega$$

On retrouve bien pour A_ω l'expression générale (8.1.58). On relève en particulier que les coefficients de A_ω se présentent comme des séries formelles en $u_{\nu-1}$ (paramètre de nihilence).

On peut évidemment pousser les calculs jusqu'à n'importe quel ordre en Σ, puis faire $\Sigma = 1$ et sommer, car on a convergence. Ceci revient d'ailleurs à appliquer les formules générales de 8.4.e. On obtient ainsi la valeur exacte des invariants holomorphes A_ω grâce à la formule (8.4.54) et (8.4.55).

Le <u>troisième cas</u> $(a_{11} \neq 0, a_{22} = 0)$ est symétrique du deuxième et se traiterait exactement de même.

Le <u>premier cas</u> $(a_{11} \neq 0, a_{11} \neq 0)$ se traiterait aussi d'une manière analogue, mais avec cette différence qu'il faudrait considérer séparément les trois rayons formels $\gamma, \gamma', \gamma''$ signalés plus haut et attacher à chacun une intégrale formelle différente. On commencerait comme d'habitude par résoudre le système dynamique associé au champ réduit ${}^oX_{red}$ de la partie principale ${}^oX$ du champ X. Ce système s'écrit :

(8.3.43) $$\begin{cases} \dot{w}_1 / w_1 = -w_1 + 2w_2 \\ \dot{w}_2 / w_2 = 2w_1 - w_2 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \left(\cdot = \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

et il implique :

(8.3.44) $$w_1 \, w_2 \, (w_1 - w_2) = \text{cste}$$

On peut prendre la constante ci-dessus comme <u>paramètre de nihilence</u> et la noter $u_{\nu-1}$. On tire alors de (8.3.43) et (8.3.44) les équations différentielles :

(8.3.45) $$\begin{cases} (\dot{w}_1)^2 = (w_1)^4 - 4\,u_{\nu-1}\,w_1 \\ (\dot{w}_2)^2 = (w_2)^4 + 4\,u_{\nu-1}\,w_2 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad u_{\nu-1} \text{ est un paramètre de nihilence}$$

Pour chacun des trois rayons propres $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, ces équations admettent une solution unique qui soit de la forme :

(8.3.46) $$w_i = w_i(z, u_{\nu-1}) = \sum_{n\geq 0} \gamma_{i,n}(u_{\nu-1})^n z^{3n-1} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} i=1,2 \\ \gamma_{i,0}=\gamma_i \end{array}$$

Connaissant l'intégrale du système dynamique réduit, on résout (par simple quadrature et en introduisant $\nu-2$ nouveaux paramètres notés $u_1, \ldots, u_{\nu-2}$) le système dynamique complet associé à ${}^{o}X$. A partir de quoi on peut raisonner exactement comme nous avons fait dans le deuxième cas (pour $a_{11}=0,\ a_{22}\neq 0$).

Reste le quatrième cas $(a_{11}=a_{22}=0)$. Il faut ici dinstinguer plusieurs sous-cas selon la valeur du niveau p du champ réduit, mais la démarche reste la même.

La démarche resterait encore la même si on prenait, en guise de relation de résonance extrinsèque, non plus $\lambda_\nu = 0$ mais :

(8.3.47) $$\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_\nu = 0 \qquad (r \text{ fixé} > 1 \text{ et } < \nu)$$

Cette fois-ci, il faudrait prendre comme variables réduites :

(8.3.48) $$w_1 = y_1 y_2 \cdots y_{r-1} \qquad \text{et} \quad w_2 = y_r y_{r+1} \cdots y_\nu$$

A ceci près, rien ne changerait.

Si enfin on considérait une relation de résonance extrinsèque de type général :

(8.3.49) $$m_1 \lambda_1 + \ldots m_\nu \lambda_\nu = 0$$

où même plusieurs relations de ce type, le champ réduit posséderait en général plusieurs graduations $\mathfrak{H}$, qui chacune posséderait un ou plusieurs rayons propres γ , qui chacun déterminerait une intégrale formelle avec tout son cortège d'invariants holomorphes. A ceci près, les résultats resteraient les mêmes.

Bien entendu, quand on a nihilence active (voir §8.1) des invariants méta-holomorphes apparaissent et viennent se superposer aux invariants holomorphes. Cela ne se produit jamais quand $\nu - \rho_{ext} = 1$, mais cela arrive parfois quand $\nu - \rho_{ext} = 2$ et presque toujours quand $\nu - \rho_{ext} > 2$.

8.3.d. Isochorie de la résurgence

Dans tous les cas, les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ des champs isochores X sont eux-mêmes isochores. Autrement dit, ils vérifient :

$$L_{\mathbb{A}_\omega} \cdot \theta^\nu = 0 \tag{8.3.50}$$

où θ^ν désigne la forme de volume (8.3.1) exprimée en fonction de z et des u_i. L'isochorie des invariants $\mathbb{A}_\omega$ résulte de la proposition 8.2.3. Le lecteur pourra vérifier cette isochorie dans l'exemple traité ci-dessus, à partir des formules (8.3.30) et (8.3.37).

Remarque : Nous n'avons guère parlé que des champs dans cette section, mais il est clair que tout (y compris l'isochorie des invariants $\mathbb{A}_\omega$) s'étend aux difféos.

SECTION 8.4. CHAMPS ET DIFFEOS HAMILTONIENS. CALCUL DES POTENTIELS DE RESURGENCE. LA MYSTERIEUSE INVOLUTION HAMILTONIENNE.

La classification analytique des objets hamiltoniens est au début tout analogue à celle des objets isochores. Aussi passerons-nous très vite sur les préliminaires, quitte à nous étendre sur la grande nouveauté du cas hamiltonien, à savoir l'existence de potentiels de résurgence, explicitement calculables à partir des potentiels (au sens ordinaire) dont dérivent les objets étudiés. Le lecteur pressé est invité à aller droit à l'alinéa 8.4.e, qui contient l'essentiel (propositions 8.4.1 et 8.4.2).

8.4.a. Résonance intrinsèque et résonance extrinsèque.

Un champ X ou un difféo f est dit hamiltonien s'il est de dimension paire $\nu = 2\nu'$ et s'il conserve la forme symplectique :

$$\theta^H = \sum_{i=1}^{\nu/2} dx_i \wedge dx_{i+\nu/2} \tag{8.4.1}$$

Autrement dit :

(8.4.2) $\quad L_X \cdot \theta^H = 0 \qquad$ ou $\qquad F \cdot \theta^H = \theta^H$

Pour un champ $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ cela entraîne l'existence d'un potentiel $\mathcal{H} \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$

(8.4.3) $$X_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x_{i+\nu/2}} \mathcal{H}(x) \quad ; \quad X_{i+\nu/2}(x) = +\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}(x) \quad (1 \leq i \leq \nu/2)$$

et pour un difféo f $\left(x_i \longmapsto x_i' = f_i(x)\right)$ cela entraîne l'existence d'une "fonction génératrice" :

(8.4.4) $$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_{\nu/2} ; x'_{1+\nu/2}, \dots, x'_\nu)$$

telle que

(8.4.5) $$x_{i+\nu/2} = \partial \mathcal{F} / \partial x_i \quad ; \quad x_i' = \partial \mathcal{F} / \partial x'_{i+\nu/2}$$

Raisonnons, pour fixer les idées, sur un champ hamiltonien X. D'après la proposition 8.2.1, on peut trouver un changement de variables hamiltonien qui mette la partie linéaire de X sous forme de Jordan. Appliquant (8.4.2) on voit tout de suite que l'hamiltonicité induit $\nu/2$ degrés de résonance, dite <u>intrinsèque</u> :

(8.4.6) $$\lambda_i + \lambda_{i+\nu/2} = 0 \qquad (1 \leq i \leq \nu/2)$$

Ces relations impliquent <u>tous</u> les multiplicateurs λ_i. Par suite, tout comme pour les champs isochores, il ne peut pas y avoir de résonance virtuelle $(\underline{\rho} = 0)$ mais seulement de la résonance <u>intrinsèque</u> ou <u>extrinsèque</u> :

(8.4.7) $$\rho = \rho^+ = \rho_{int} + \rho_{ext} \qquad (\rho_{int} = \nu/2 \, , \; 0 \leq \rho_{ext} \leq \nu/2)$$

<u>8.4.b. : Objets hamiltoniens sans résonance extrinsèque. Invariants métaholomorphes.</u>

Soit X un champ analytique hamiltonien sans résonance extrinsèque $(\rho_{ext} = 0)$. D'après la proposition 8.2.1 on peut trouver un changement de variables $x_i \longmapsto y_i = h_i(x)$ formel et hamiltonien (*) qui mette X sous forme

(*) ou, comme on dit parfois, canonique.

prénormale ou, ce qui revient au même, qui donne au potentiel $\mathcal{H}$ la forme suivante :

(8.4.8) $$\mathcal{H} = \mathcal{H}(w_1, \ldots, w_{\nu/2}) \qquad \text{avec} \quad w_i = y_i \, y_{i+\nu/2} \qquad (1 \leq i \leq \nu/2)$$

Rapprochant (8.4.8) de (8.4.3) on voit tout de suite que $X . w_i = 0$ pour tout i et donc que le champ réduit X_{red} est nul. L'hamiltonicité induit donc de la nihilence totale, comme on l'avait déjà observé à propos de l'exemple 9 au §.8.2. Le champ X ne possède donc aucun invariant holomorphe (en dehors des invariants formels). Tout au plus possède-t-il des invariants métaholomorphes si la nihilence est active, c'est-à-dire si la condition de compensation (8.1.37) - (8.1.37bis) n'est pas réalisée. La nihilence n'est jamais active pour $\nu = 2$; elle peut l'être pour $\nu = 4$ si les λ_i sont tous alignés (par exemple pour les champs hamiltoniens réels de la physique) et elle l'est presque toujours pour $\nu \geq 6$).

8.4.c. Objets hamiltoniens avec résonance extrinsèque. Coexistence des invariants holomorphes et métaholomorphes.

Pour montrer comment la résurgence et les invariants holomorphes surgissent dans le sillage de la résonance extrinsèque, nous allons commencer par traiter deux exemples à la fois simples et typiques.

Prenons donc un champ hamiltonien X n'ayant qu'un seul degré de résonance extrinsèque $(\rho_{ext} = 1)$ et dont l'unique relation de résonance extrinsèque revête la forme :

(8.4.9) $$\lambda_\nu = 0$$

Compte tenu des relations de résonance intrinsèque (8.4.6) cela entraîne

(8.4.9bis) $$\lambda_{\nu/2} = 0$$

Le champ hamiltonien X étant singulier, le potentiel $\mathcal{H}$ dont il dérive commence par des termes quadratiques et peut s'écrire sous la forme :

$$(8.4.10) \qquad \mathcal{H}(x) = {}^{\circ}\mathcal{H}(x) + \mathcal{D}(x)$$

avec une partie principale ${}^{\circ}\mathcal{H}(x)$ qui regroupe les termes quadratiques et cubiques et avec une perturbation $\mathcal{D}(x)$ ne comportant que des termes de degré ≥ 4. Quitte à effectuer un changement de variables linéaire et symplectique, on peut faire en sorte que la partie principale s'écrive :

$$(8.4.11) \qquad {}^{\circ}\mathcal{H}(x) = -\sum_{i=1}^{i=\nu/2} x_i\, x_{i+\nu/2} \left(\lambda_i + \sigma_i\, x_{\nu/2} + \tau_i\, x_\nu\right)$$

avec $\lambda_i, \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{C}$. D'après notre hypothèse $\rho_{ext} = 1$, les multiplicateurs λ_i $(1 \leq i < \nu/2)$ sont rationnellement indépendants. Pour $i < \nu/2$, les σ_i et τ_i sont des invariants formels. Pour $i = \nu/2$, seul le produit $x_{\nu/2}\, x_\nu$ est invariant. Nous supposerons ce produit nul et nous étudierons le cas (parfaitement typique) où $\sigma_{\nu/2} = 0$ et $\tau_{\nu/2} = 1$. Dans un premier exemple nous supposerons tous les autres σ_i nuls; dans un second exemple nous les prendrons quelconques. Quant à la perturbation $\mathcal{D}(x)$ nous la choisirons d'abord monomiale, puis quelconque.

Premier exemple :

Soit un champ hamiltonien $X = {}^{\circ}X + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^{\circ}\mathcal{H} + \mathcal{D}$ avec :

$$(8.4.12) \qquad {}^{\circ}\mathcal{H}(x) = -\sum_{i<\nu/2} x_i\, x_{i+\nu/2} \left(\lambda_i + \tau_i\, x_\nu\right) - x_{\nu/2}\, x_\nu^2$$

$$(8.4.13) \qquad \mathcal{D}(x) = -\varepsilon\, x^m = -\varepsilon\, x_1^{m_1} \cdots x_\nu^{m_\nu}$$

Le système dynamique associé à la partie principale ${}^{\circ}X$ possède une intégrale formelle ${}^{\circ}x(z,u)$ qu'il est commode de paramétrer de la manière suivante :

$$(8.4.14) \qquad \left\{ \begin{aligned} {}^{\circ}x_i(z,u) &= u_i\, e^{\lambda_i z}\, z^{\tau_i} \\ {}^{\circ}x_{i+\nu/2}(z,u) &= \left(u_{i+\nu/2}\, u_i^{-1}\right) e^{-\lambda_i z}\, z^{-\tau_i} \end{aligned} \right. \qquad \Bigg\| \quad \text{pour } i < \nu/2$$

$$(8.4.14\text{bis})\quad \begin{cases} x_{v/2}(z,u) = -u_\tau z - (u_\lambda + u_{v/2})\, z^2 \\ {}^\circ x_v\ (z,u) = z^{-1} \end{cases}$$

avec

$$(8.4.14\text{ter})\quad \begin{cases} u_\lambda = \sum\limits_{i<v/2} \lambda_i\ u_{i+v/2} \\ u_\tau = \sum\limits_{i<v/2} \tau_i\ u_{i+v/2} \end{cases}$$

Quant au champ complet X , il possède une intégrale formelle $x(z,u)$ du type :

$$(8.4.15)\quad x_i(z,u) = {}^\circ x_i(z,u)\ \left\{1 + \varepsilon\, e^{z\omega}\, \Psi_i(z,u) + o(\varepsilon)\right\} \quad (1 \le i \le v)$$

avec

$$(8.4.16)\quad \omega = \langle n, \lambda \rangle = \sum_{i<v/2} \lambda_i\ (n_i - n_{i+v/2})$$

et avec des Ψ_i solutions du système :

$$(8.4.17)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega\right) \Psi_i = \tau_i\, \Psi_v\, {}^\circ x + n_{i+v/2}\ K(z,u)\, u_{i+v/2}^{-1}\ ({}^\circ x_v)^{-1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega\right) \Psi_{i+v/2} = -\tau_i\, \Psi_v\, {}^\circ x - n_i\ K(z,u)\ u_{i+v/2}^{-1}\ ({}^\circ x_v)^{-1} \end{cases}$$

$$(8.4.17\text{bis})\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega\right) \left({}^\circ x_{v/2}\, \Psi_{v/2}\right) = 2\, {}^\circ x_{v/2}\, {}^\circ x\, \Psi_v + 2\, {}^\circ x_{v/2}\, {}^\circ x_v\, \Psi_{v/2} + u_\tau\, \frac{n_v\, K(z,u)}{{}^\circ x_v} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega\right) \left({}^\circ x_v\ \Psi_v\right) = -2\, ({}^\circ x_v)^2\, \Psi_v - n_{2v}\, K(z,u)\ ({}^\circ x_{v/2})^{-1} \end{cases}$$

avec

$$(8.4.18)\quad K(z,u) = e^{-\omega z} \prod_{i=1}^{v} \left({}^\circ x_i\,(z,u)\right)^{n_i}$$

c'est-à-dire :

$$(8.4.19)\quad K(z,u) = \left(\prod_{i<v/2}^{v} u_i^{\,n_i - n_{i+v/2}}\right) \left(\prod_{i<v/2}^{v} u_{i+v/2}^{\,n_{i+v/2}}\right) \left(z^{\tau}\right) \left(-u_\tau - (u_\lambda + u_{v/2})\, z\right)^{n_{v/2}}$$

avec

(8.4.19bis) $$\tau = n_{\nu/2} - n_\nu + \sum_{i<\nu/2} \tau_i \,(n_i - n_{i+\nu/2})$$

Désignons maintenant par $\mathbf{K}(\zeta, u)$ la transformée de Borel (en z) de $K(z,u)$ et posons :

(8.4.20) $$\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathbf{K}(\omega, u)$$ avec ω comme en (8.4.16).

$\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u)$ est manifestement de la forme :

(8.4.. 0bis) $$\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u) = u^{n} u^{n'} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega\,(u_\tau, u_\lambda + u_{\nu/2})$$

avec des facteurs monomiaux :

(8.4.20ter) $$u^{n} = u^{n(\omega)} = \prod_{i<\nu/2} u_i^{\,n_i - n_{i+\nu/2}} \quad , \quad u^{n'} = \prod_{i<\nu/2} u_i^{\,n_{i+\nu/2}}$$

Cela étant, il est manifeste, au vu des équations (8.4.17) et (8.4.17bis), que les solutions Ψ_i sont résurgentes en z et que les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir sur elles sont les Δ_ω d'indice ω comme en (8.4.16). Des calculs que nous passons donnent pour $i < \nu/2$:

(8.4.21) $$\begin{cases} \Delta_\omega \Psi_i = \varepsilon\, u^{n} u^{n'} \begin{cases} -\dfrac{n_{i+\nu/2}}{u_{i+\nu/2}}\, \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega - \tau_i \dfrac{\partial}{\partial u_\tau} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega - \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \\ + (\lambda_i + \tau_i z^{-1})\, \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda}\, \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \end{cases} \\ \Delta_\omega(\Psi_i + \Psi_{i+\nu/2}) = \varepsilon\, u^{n} u^{n'} \left(\dfrac{n_i - n_{i+\nu/2}}{u_{i+\nu/2}}\right) \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \end{cases}$$

et pour $i = \nu/2$:

$$(8.4.22)\quad \begin{cases} \Delta_\omega \Psi_\nu = -\varepsilon\, u^n u^{n'} z^{-1} \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \\ \Delta_\omega \Psi_{\nu/2} = -\dfrac{\varepsilon u^n u^{n'}}{{}^o\chi(z,u)} \left\{ \begin{array}{l} (u_\tau + 2(u_\lambda + u_{\nu/2})z) \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \\ + (z\tau' + z^2\omega)\ \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \end{array} \right. \end{cases}$$

avec ω comme en (8.4.16) et $\tau' = \sum_{i<\nu/2} \tau_i\,(n_i - n_{i+\nu/2})$. Ceci détermine, au premier ordre en ε, l'opérateur invariants $\mathbb{A}_\omega$ intervenant dans l'équation du pont. Le calcul donne :

$$(8.4.23)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu/2-1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=\nu/2}^{\nu-1} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec le même facteur $u^{n(\omega)}$ qu'en (8.4.20ter) et avec :

$$(8.4.24)\quad \left\{ \begin{array}{l} A^0_\omega = \varepsilon\ u^{n'} \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \\ A^{\nu/2}_\omega = 0 \end{array} \right. \quad \Bigg\|\ \mathrm{mod}\ \varepsilon^2$$

et pour $i = 1, 2, \ldots, \nu/2 - 1$:

$$(8.4.24\text{bis})\quad \left\{ \begin{array}{l} A^i_\omega = -\varepsilon\, u^{n'} \left\{ \dfrac{n_{i+\nu/2}}{u_{i+\nu/2}} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega + \tau_i \dfrac{\partial}{\partial u_\tau} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega + \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \right\} \\ A^{i+\nu/2}_\omega = +\varepsilon\, u^{n'} (n_i - n_{i+\nu/2})\ \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_\omega \end{array} \right. \Bigg\|\ \mathrm{mod}\ \varepsilon^2$$

Compte tenu de la factorisation (8.4.20 bis) de $\mathcal{A}_\omega$ ces relations peuvent s'écrire : (mod ε^2)

$$(8.4.24\text{ter})\quad \left\{ \begin{array}{ll} u^{n(\omega)} A^0_\omega = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_{\nu/2}} \widetilde{\mathcal{A}}_\omega & ;\ u^{n(\omega)} A^{\nu/2}_\omega = 0 \\ u^{n(\omega)} A^i_\omega = -\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_{i+\nu/2}} \widetilde{\mathcal{A}}_\omega & ;\ u^{n(\omega)} A^{i+\nu/2}_\omega = +\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_i} \widetilde{\mathcal{A}}_\omega \end{array} \right.$$

Notons que le facteur monomial $u^{n(\omega)}$ ne dépend que des <u>paramètres de première génération</u> $u_1, \ldots, u_{\nu/2-1}$, tandis que les coefficients $A^i_\omega(u)$ ne dépendent que des paramètres de <u>seconde génération</u> $u_{\nu/2}, \ldots, u_{\nu-1}$. Bien entendu, de (8.4.24) et (8.4.24 ter), on tirerait par linéarité, la valeur modulo ε^2 des invariants $\mathbb{A}_\omega$ pour une perturbation $\mathcal{D}$ quelconque et non plus monomiale.

Quant à la valeur exacte des $\mathcal{A}_\omega$, on verra en fin de section comment la calculer.

Deuxième exemple :

Considérons maintenant un champ hamiltonien $\mathbb{X} = {}^\circ\mathbb{X} + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$ avec :

(8.4.25) $$ {}^\circ\mathcal{H}(x) = -\sum_{i<\nu/2} x_i \, x_{i+\nu/2} \left(\lambda_i + \sigma_i x_{\nu/2} + \tau_i x_\nu\right) - x_{\nu/2} x_\nu^2 $$

(8.4.26) $$ \mathcal{D}(x) = -\Sigma\, x^n = -\Sigma\, x_1^{n_1} \ldots x_\nu^{n_\nu} $$

Comme à l'exemple précédent, on commence par résoudre le système dynamique associé à la partie principale ${}^\circ\mathbb{X}$. On remarque que :

(8.4.27) $$ \frac{\partial}{\partial z}\left({}^\circ x_i \; {}^\circ x_{i+\nu/2}\right) = 0 \qquad (i < \nu/2) $$

ce qui incite à introduire les paramètres de nihilence :

(8.4.28) $$ u_{i+\nu/2} = {}^\circ x_i \; {}^\circ x_{i+\nu/2} \qquad (i < \nu/2) $$

et à les regrouper dans les blocs :

(8.4.29) $$ u_\lambda = \sum_{i<\nu/2} \lambda_i \, u_{i+\nu/2} $$

(8.4.30) $$ u_\sigma = \sum_{i<\nu/2} \sigma_i \, u_{i+\nu/2} $$

(8.4.30bis) $$ u_\tau = \sum_{i<\nu/2} \tau_i \, u_{i+\nu/2} $$

On peut alors calculer ${}^\circ x_{\nu/2}$ et ${}^\circ x_\nu$ en fonction des blocs u_σ et u_τ et d'un paramètre de nihilence supplémentaire, noté $u_{\nu/2}$. On trouve :

(8.4.31) $$ \begin{cases} {}^\circ x_{\nu/2}(z,u) = -u_\tau u_\sigma^{-1/2} \sin(u_\sigma^{1/2} z)\cos(u_\sigma^{1/2} z) - (u_\lambda + u_{\nu/2})\, u_\sigma^{-1} \sin^2(u_\sigma^{1/2} z) \\ {}^\circ x_\nu(z,u) = u_\sigma^{1/2} \;\mathrm{cotg}(u_\sigma^{1/2} z) \end{cases} $$

Ces deux expressions étant chacune paire en $u_\sigma^{1/2}$, il n'y a aucune ambiguité du fait de la racine carrée. A partir de là on calcule les autres ${}^\circ x_i$ par simple quadrature. Il vient pour tout $i < v/2$:

$$(8.4.31\text{bis})\quad \begin{cases} {}^\circ x_i(z,u) = u_i \exp\left(\lambda_i z + \int [\ \ {}^\circ x_{v/2} + \tau_i\, {}^\circ x_v]\, dz\right) \\ {}^\circ x_{i+v/2}(z,u) = u_{i+v/2}\, u_i^{-1} \exp\left(-\lambda_i z - \int [\sigma_i\, {}^\circ x_{v/2} + \tau_i\, {}^\circ x_v]\, dz\right) \end{cases}$$

On résout ensuite le système dynamique associé à X. On trouve sa solution $x(z,u)$ sous la forme (8.4.15) avec des fonctions résurgentes Ψ_i qui vérifient des équations différentielles analogues à (8.4.17-17bis) et des équations de résurgence analogues à (8.4.21-21bis). Passons sur les calculs (qui sont assez longs et que les théorèmes de la fin de section redonneront beaucoup plus rapidement) et indiquons tout de suite la valeur, modulo ε^2, de l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ intervenant dans l'équation du pont. Celui-ci s'écrit comme en (8.4.23) avec un facteur $u^{n(\omega)}$ défini comme en (8.4.23bis) mais avec cette fois-ci des composantes qui valent :

$$(8.4.32)\quad \left\{ \begin{aligned} A_\omega^0 &= \varepsilon\, u^{n'} \frac{\partial}{\partial u_{v/2}} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \\ A_\omega^{v/2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Bigg\| \ \text{mod } \varepsilon^2$$

et pour $i = 1, 2, \ldots, v/2 - 1$:

$$(8.4.32\text{ bis})\quad \begin{cases} A_\omega^i = -\varepsilon\, u^{n'} \left\{ \dfrac{n_{i+v/2}}{u_{i+v/2}} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega + \sigma_i \dfrac{\partial}{\partial u_\sigma} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega + {}_i \dfrac{\partial}{\partial u_\tau} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega + \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial u_\lambda} \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \right\} \\ A_\omega^{i+v/2} = +\varepsilon\, u^{n'} (n_i - n_{i+v/2})\, \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega \qquad (\text{mod } \varepsilon^2) \end{cases}$$

avec une fonction $\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u)$ de la forme :

$$(8.4.33)\quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_\omega(u) = u^n u^{n'}\, \tilde{\tilde{\mathcal{A}}}_\omega (u_\sigma, u_\tau, u_\lambda + u_{v/2}) \\ u^n = u^{n(\omega)} = \prod\limits_{i<v/2} u_i^{n_i - n_{i+v/2}}, \quad u^{n'} = \prod\limits_{i<v/2} u_{+v/2}^{n_{i+v/2}} \end{cases}$$

et définie par :

$$(8.4.34)\quad K(z,u) = \prod_{i=1}^{v} \left({}^\circ x_i(z,u)\right)^{n_i}$$

(8.4.35) $$\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u) = \frac{1}{2\pi i}\ \mathbf{K}(\omega, u)$$

avec ω comme en (8.4.16). Compte tenu de la factorisation (8.4.33) de $\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u)$ les identités (8.4.32) et (8.4.32bis) s'écrivent :

(8.4.32 ter) $$\begin{cases} u^{n(\omega)} A^0_\omega = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_{\nu/2}} \tilde{\mathcal{A}}_\omega \ , & u^{n(\omega)} A^{\nu/2}_\omega = 0 \\ u^{n(\omega)} A^i_\omega = -\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_{i+\nu/2}} \tilde{\mathcal{A}}_\omega \ , & u^{n(\omega)} A^{i+\nu/2}_\omega = +\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial u_i} \tilde{\mathcal{A}}_\omega \end{cases}$$

exactement comme à l'exemple précédent . On passe de là, par linéarité, à des perturbations $\mathcal{D}$ non plus monomiales mais quelconques.

8.4.d. Hamiltonien étranger ou potentiel de résurgence.

D'après la proposition (8.2.3) les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ associés à un champ hamiltonien sont hamiltoniens. Autrement dit on doit avoir :

(8.4.36) $$L_{\mathbb{A}_\omega} \cdot \theta^H = 0$$

Pour le vérifier sur nos deux exemples il suffit de faire dans la forme symplectique (8.4.1) le changement de variables :

(8.4.37) $$x_i = x_i(z, u)$$

ou, ce qui revient au même modulo ε , le changement de variable :

(8.4.38) $$x_i = {}^0x_i(z, u)$$

Pour le premier comme pour le second exemple on trouve (modulo ε) :

(8.4.39) $$\theta^H = du_{\nu/2} \wedge dz + \sum_{i<\nu/2} u_i^{-1} du_i \wedge du_{i+\nu/2} \quad (\mathrm{mod}\ \varepsilon)$$

Portant cette expression ainsi que les formules (8.4.24-24ter) ou (8.4.32-32ter) dans le premier membre de (8.4.36), on vérifie bien (modulo ε^2) l'hamiltonicité de $\mathbb{A}_\omega$.

Cherchons maintenant le potentiel $\mathcal{A}_\omega$ dont dérive l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$.

On commence par constater que si on exprime les variables $(z, u_1, \dots, u_{\nu-1})$ à partir des variables $(x_1, \dots, x_\nu)$ en inversant les relations :

(8.4.40) $$x_i = {}^\circ x_i\,(z, u_1, \dots, u_{\nu-1}) \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

et si on calcule les crochets de Poisson :

(8.4.41) $$\{\varphi, \psi\}_P = \sum_{i=1}^{\nu/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_{i+\nu/2}} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i+\nu/2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)$$

successivement pour $\varphi = z, u_1, \dots, u_{\nu-1}$ et $\psi = z, u_1, \dots, u_{\nu-1}$, on trouve que les seuls crochets non nuls sont les suivants :

(8.4.42) $$\begin{cases} \{u_i\,,\,u_{i+\nu/2}\} = u_i & (\text{pour } i < \nu/2) \\ \{u_{\nu/2}\,,\,z\} = 1 \end{cases}$$

et ceci dans chacun des deux exemples traités. A partir de là et des équations (8.4.24-24ter) et (8.4.32-32ter) il est immédiat de vérifier que l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ dérive d'un potentiel $\mathcal{A}_\omega$ avec :

(8.4.43) $$\mathcal{A}_\omega(u) = \varepsilon\,\tilde{\mathcal{A}}_\omega(u) + o(\varepsilon)$$

avec $\tilde{\mathcal{A}}_\omega$ comme en (8.4.20) ou (8.4.35).

Ce potentiel $\mathcal{A}_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1, \dots, u_{\nu-1}]]$ est dit <u>POTENTIEL DE RESURGENCE</u> ou <u>HAMILTONIEN ETRANGER</u>.

La question est maintenant de trouver des formules <u>explicites</u> donnant la valeur <u>exacte</u> (et non plus modulo ε^2) des potentiels de résurgence. C'est ce que nous allons faire, non seulement pour les deux exemples envisagés ci-dessus, mais pour <u>tous</u> les champs hamiltoniens à résonance extrinsèque.

8.4.e. Calcul explicite des potentiels de résurgence. Le cotemps et l'involution hamiltonienne.

Rappelons (*) qu'on appelle partie principale d'un champ X tout champ

(i) qui possède les mêmes invariants formels cruciaux que X (**)

(ii) qui ait tous ses invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ nuls (***) .

Rappelons également que tout champ X possède une partie principale $^\circ X$ et qu'on peut même s'arranger pour prendre celle-ci polynomiale. Cela vaut en particulier pour les champs hamiltoniens X et leurs potentiels $\mathcal{H}$.

Proposition 8.4.1. (Calcul explicite des potentiels de résurgence $\mathcal{A}_\omega$. L'involution hamiltonienne)

Soit X un champ hamiltonien dérivant d'un potentiel $\mathcal{H}$ et présentant un ou plusieurs degrés de résonance extrinsèque $(\ell_{ext} > 0)$. Si X ne présente pas de nihilence extrinqèque (****), il possède des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ qui dérivent de potentiels $\mathcal{A}_\omega$ lesquels peuvent se calculer directement à partir de $\mathcal{H}$ par le procédé suivant :

a) On écrit X et son potentiel $\mathcal{H}$ comme sommes d'une partie principale et d'une perturbation finie (*****) :

(*) Voir §§6.2 et 6.5.

(**) C'est-à-dire mêmes degrés de résonance ℓ , mêmes niveaux p , mêmes graduations $\mathfrak{H}$, mêmes rayons propres γ , mêmes multiplicateurs λ_i , mêmes directeurs τ_i, ...

(***) Cela signifie que l'intégrale formelle $^\circ x(z,u)$ de $^\circ X$ a toutes ses composantes $^\circ\varphi(z)$ convergentes à l'infini et que par suite $\Delta_\omega \, {}^\circ\varphi(z) \equiv 0 \;\; (\forall \omega)$

(****) Autrement dit, si X ne possède que les $\nu/2$ degrés de nihilence induits par la forme symplectique θ^H . Sauf hasard extraordinaire, c'est toujours le cas.

(*****) "finie" signifie ici "non infinitésimale". Il est clair que les perturbations peuvent être et sont en général des séries infinies.

(8.4.44) $\mathbb{X} = {}^\circ\mathbb{X} + \mathbb{D}$ (8.4.44bis) $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$

b) Pour chaque graduation $\mathfrak{Z}$ et chaque rayon propre γ on calcule l'intégrale formelle ${}^\circ x(z, u)$ de ${}^\circ\mathbb{X}$ en résolvant le système dynamique :

$$(8.4.45)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\, {}^\circ x_i &= X_i({}^\circ x) = -\frac{\partial}{\partial x_{i+\nu/2}} \mathcal{H}({}^\circ x) \\ \frac{\partial}{\partial z}\, {}^\circ x_{i+\nu/2} &= X_{i+\nu/2}({}^\circ x) = +\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}({}^\circ x) \end{aligned} \right\| \quad (1 \leq i \leq \nu/2)$$

c) On soumet la perturbation $\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_\nu)$ au changement de variable :

$$(8.4.46)\quad x_i = {}^\circ x_i(z, u_1, \ldots, u_{\nu-1}) \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

On obtient ainsi une perturbation $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z, u)$ qui est une série entière en $u_1, \ldots, u_{\nu-1}$

d) On inverse le changement de variable (8.4.46) et on calcule les crochets de Poisson :

$$(8.4.47)\quad \{u_i, u_j\}_P = \sum_{q=1}^{\nu/2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_q} \frac{\partial u_j}{\partial x_{q+\nu/2}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_{q+\nu/2}} \frac{\partial u_j}{\partial x_q} \right)$$

en fonction des variables $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}, u_\nu = z$. Ces crochets de Poisson sont <u>tous</u> indépendants de z (*).

e) A la <u>perturbation</u> $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z, u)$ on fait correspondre la <u>coperturbation</u> $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z, u)$ par <u>l'involution</u> suivante, dite <u>involution hamiltonienne</u> :

$$(8.4.48)\quad \mathcal{B} = -\mathcal{D} - \frac{1}{2!}\{z, \mathcal{D}\}_P - \frac{1}{3!}\{z\{z, \mathcal{D}\}_P\}_P - \frac{1}{4!}\{z\{z\{z, \mathcal{D}\}_P\}_P\}_P \cdots$$

$$(8.4.49)\quad \mathcal{D} = -\mathcal{B} - \frac{1}{2!}\{z, \mathcal{D}\}_P - \frac{1}{3!}\{z\{z, \mathcal{B}\}_P\}_P - \frac{1}{4}\{z\{z\{z, \mathcal{D}\}_P\}_P\}_P \cdots$$

Ici, les crochets de Poisson $\{\ ,\ \}_P$ portent sur des fonctions des variables u_i et $z = u_\nu$ et ils sont calculables par la formule :

$$(8.4.50)\quad \{\varphi, \psi\}_P = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\varphi\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\psi\right) \quad \{u_i, u_j\}_P$$

(*) Même les $\{z, u_i\}_P$ le sont.

Quand φ et ψ sont indépendants de z, $\{\varphi,\psi\}_P$ l'est aussi.

f) On sépare dans la coperturbation $\mathcal{B}$ la variable z des variables $u_1,\dots,u_{\nu-1}$ en écrivant :

(8.4.51) $$\mathcal{B}(z,u) = \sum_{i\in S} b_i(z)\, \mathcal{B}_i(u)$$

Ici l'indice i parcourt un ensemble dénombrable S, les facteurs $\mathcal{B}_i(u)$ sont des séries formelles en $u_1,\dots,u_{\nu-1}$ et les facteurs $b_i(z)$ sont de la forme :

(8.4.52) $$b_i(z) = e^{\omega(i)z}\, \beta_i(z) \qquad (\omega(i)\in \Omega)$$

avec une fréquence $\omega(i)$ appartenant au réseau de résurgence Ω de X et avec des facteurs $\beta_i(z)$ qui sont subexponentiels en z à l'infini (*).

g) A partir des fonctions $b_i(z)$ on construit les nombres :

(8.4.53) $$\langle b_{i_r}, b_{i_{r-1}},\dots, b_{i_2}, b_{i_1}\rangle_\omega$$

définis comme en (1.4.78)

h) Pour chaque $\omega\in\Omega$ on forme la série :

(8.4.54) $$\mathcal{A}_\omega = -\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{\omega(i_1)+\dots\omega(i_r)=0}\langle b_{i_r},\dots,b_{i_2},b_{i_1}\rangle_\omega \{\mathcal{B}_{i_r}\dots\{\mathcal{B}_{i_2},\mathcal{B}_{i_1}\}_P\}_P$$

Celle-ci est convergente et admet une somme $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega(u_1,\dots,u_\nu)$ indépendante de z.

(*) D'une façon précise, les facteurs $\beta_i(z)$ sont résurgents en z et ont toutes leurs dérivées étrangères nulles. En fait, on peut toujours s'arranger pour avoir des $\beta_i(z)$ "monomiaux". Par exemple, dans les problèmes de niveau p on peut toujours s'arranger pour avoir :

$$\beta_i(z) = z^{\tau_i}\ \exp\left(\sum_{q=1}^{p-1}\omega_q(i)\, z^{q/p}\right)$$

i) Les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ du champ hamiltonien X dérivent des potentiels $\mathcal{A}_\omega$. Autrement dit, pour toute fonction d'épreuve $\varphi = \varphi(z, u_1, \ldots, u_{\nu-1})$ on a :

(8.4.55) $$\mathbb{A}_\omega \cdot \varphi = \{\mathcal{A}_\omega , \varphi\}_P$$

en en particulier l'équation du pont peut s'écrire :

(8.4.56) $$\dot{\Delta}_\omega\, x_i(z,u) = \mathbb{A}_\omega\, x_i(z,u) = \{\mathcal{A}_\omega(u), x_i(z,u)\}_P \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

où $x(z,u) = (x_1(z,u), \ldots, x_\nu(z,u))$ désigne comme d'habitude une intégrale formelle du champ X.

j) Les séries $\mathcal{A}_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1, \ldots, u_{\nu-1}]]$ sont dites potentiels de résurgence ou hamiltoniens étrangers. La réunion des N familles $\{\mathcal{A}_\omega ; \omega \in \Omega\}$ relatives aux N intégrales formelles de X constitue un système complet d'invariants holomorphes du champ hamiltonien X.

Avant de démontrer la proposition ci-dessus, énonçons-en trois autres, qui en préciseront le sens et la portée :

Proposition 8.4.2. (Le cotemps et l'interprétation de l'involution hamiltonienne)

Soit un champ hamiltonien $X = {}^\circ X + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$. On peut toujours choisir un paramétrage $(z, u_1, \ldots, u_{\nu-1})$ de l'intégrale formelle ${}^\circ x(z,u)$ de ${}^\circ X$ tel que l'on ait pour toute fonction d'épreuve $\varphi = \varphi(z,u)$:

(8.4.57) $$\{z, \varphi\}_P = -\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}} \quad , \quad \{u_{\nu/2}, \varphi\}_P = +\frac{\partial}{\partial z}\varphi$$

Un tel paramétrage est dit précanonique. On appelle cotemps le paramètre $u_{\nu/2}$. Il est conjugué au temps z et on a évidemment :

(8.4.58) $$\{u_{\nu/2}, z\}_P \equiv 1 \quad ; \quad {}^\circ\mathcal{H} \equiv u_{\nu/2}$$

Quant à l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{B}$ elle s'écrit :

(8.4.59) $$\mathcal{B} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}}\right)^{n-1} \mathcal{D}^n$$ (*)

(8.4.60) $$\mathcal{D} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}}\right)^{n-1} \mathcal{B}^n$$ (*)

et les applications formelles :

(8.4.61) $$u_{\nu/2} \longmapsto u_{\nu/2} + \mathcal{D}(z, u)$$

(8.4.62) $$u_{\nu/2} \longmapsto u_{\nu/2} + \mathcal{B}(z, u)$$

sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, si l'on pose :

(8.4.63) $$\mathcal{H}(z, u) = u_{\nu/2} + \mathcal{D}(z, u)$$ (**)

(8.4.64) $$\tilde{\mathcal{H}}(z, u) = u_{\nu/2} + \mathcal{B}(z, u)$$

et si l'on fixe z et tous les u_i (pour $i \neq \nu/2$) de manière à considérer $\mathcal{H}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ comme fonctions du seul cotemps $u_{\nu/2}$:

(8.4.65) $$\mathcal{H} = \mathcal{H}(u_{\nu/2}) \quad , \quad \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(u_{\nu/2})$$

on a identiquement :

(8.4.66) $$\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(u_{\nu/2})) \equiv \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{H}}(u_{\nu/2})) \equiv u_{\nu/2}$$

Ainsi, chose étonnante, l'involution hamiltonienne s'interprête comme une inversion par rapport au cotemps. Mais attention : nous verrons en fin de section que l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{B}$ ne dérive pas de l'involution vectorielle $\mathbb{D} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ qui intervient dans la classification analytique des champs X ordinaires.

(*) $\mathcal{D}^n$ et $\mathcal{B}^n$ désignent les puissances (au sens ordinaire) des fonctions scalaires $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z, u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z, u)$.

(**) On peut écrire ceci car $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$ et ${}^\circ\mathcal{H} = u_{\nu/2}$.

Proposition 8.4.3. (Paramétrage canonique et calcul des invariants $\mathbb{A}_\omega$)

Soit un champ hamiltonien $X = {}^\circ X + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$ et présentant ν_{ext} degrés de résonance extrinsèque. Posons :

(8.4.67) $$K = \nu/2 - \nu_{ext} \qquad (1 \leq K < \nu/2)$$

On peut toujours trouver pour l'intégrale formelle ${}^\circ x(z,u)$ de ${}^\circ X$ un paramétrage $(z, u_1, \ldots, u_{\nu-1})$ qui soit entier en $u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ et tel que les seuls crochets de Poisson non nuls soient les suivants :

(8.4.68) $$\begin{cases} \{u_i, u_{i+\nu/2}\}_P = u_i & \text{pour } 1 \leq i \leq K \\ \{u_i, u_{i+\nu/2}\}_P = 1 & \text{pour } K < i < \nu/2 \\ \{u_{\nu/2}, z\}_P = 1 & \end{cases}$$

Un tel paramétrage (*) est dit canonique (**). Relativement à un paramétrage canonique, les potentiels de résurgence $\mathcal{A}_\omega$ s'écrivent :

(8.4.69) $$\mathcal{A}_\omega(u) = u^{n(\omega)} \, \mathcal{a}_\omega(u)$$

avec un facteur monomial $u^{n(\omega)}$ qui ne contient que les paramètres de première génération :

(8.4.70) $$u^{n(\omega)} = u_1^{n_1(\omega)} \ldots u_K^{n_K(\omega)} \text{ avec } \omega = \sum_{i=1}^{K} n_i(\omega)\, \lambda_i^* \qquad (***)$$

et avec une série entière $\mathcal{a}_\omega(u)$ qui ne contient que des paramètres de seconde génération :

(*) Lorsque $\nu_{ext} = 1$, il est essentiellement unique. Les paramétrages choisis aux exemples 1 et 2 de §8.4.b étaient canoniques.

(**) Il est évidemement aussi précanonique au sens de la proposition précédente, si bien qu'ici encore $u_{\nu/2}$ est le cotemps.

(***) Ici $\{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_K^*\}$ désigne une base bien choisie de Ω.

(8.4.71) $\qquad a_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_{K+1}, u_{K+2}, \ldots, u_{\nu-2}, u_{\nu-1}]]$

Quant à l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ il s'écrit comme d'habitude :

(8.4.72) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{K} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=K+1}^{\nu-1} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec le même monôme $u^{n(\omega)}$ qu'en (8.4.70) et avec des composantes $A^i_\omega(u)$ qui valent :

(8.4.73) $$A^i_\omega = -\frac{\partial}{\partial u_{i+\nu/2}} a_\omega \quad ; \quad A^{i+\nu/2}_\omega = n_i(\omega)\, a_\omega \qquad (\text{si } 1 \leq i \leq K)$$

(8.4.73bis) $$A^i_\omega = -\frac{\partial}{\partial u_{i+\nu/2}} a_\omega \quad ; \quad A^{i+\nu/2}_\omega = \frac{\partial}{\partial u_i} a_\omega \qquad (\text{si } K < i < \nu/2)$$

(8.4.73ter) $$A^{\nu/2}_\omega = 0 \quad ; \quad A^0_\omega = \frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}} a_\omega$$

Proposition 8.4.4 (Les potentiels de résurgence en fonction des moules V^ω_σ)

Lorsque, comme c'est souvent le cas (*), les fonctions auxiliaires $b_i(z)$ sont de la forme $e^{\omega(i) z}\, z^{\sigma(i)}$, autrement dit lorsque :

(8.4.74) $$\mathcal{B}(z,u) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \sigma \in \mathbb{C}}} e^{\omega z} z^\sigma\, \mathcal{B}^\sigma_\omega(u) \qquad (**)$$

les scalaires $\langle b_{i_r}, \ldots, b_{i_1} \rangle_\omega$ de (8.4.54) s'expriment à partir du moule V^ω_σ introduit en (1.4.87) et l'identité (8.4.54) s'écrit :

(8.4.75) $$\mathcal{A}_\omega = + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{\omega_1 + \ldots \omega_r = \omega \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{C}}} V^{\omega_1, \ldots, \omega_r}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} \left\{ \mathcal{B}^{\sigma_1}_{\omega_1} \cdots \left\{ \mathcal{B}^{\sigma_{r-1}}_{\omega_{r-1}}, \mathcal{B}^{\sigma_r}_{\omega_r} \right\}_P \right\}_P \quad (***)$$

(*) C'était le cas pour les exemples 1 et 2 traités au § 8.4.c. C'est plus généralement le cas pour tous les champs hamiltoniens de niveau $p = 1$ et de resiter $\rho = 0$.

(**) Lorsque la coperturbation $\mathcal{B}$ est de cette forme, la perturbation $\mathcal{D}$ peut elle aussi s'écrire : $$\mathcal{D}(z,u) = \sum e^{\omega z} z^\sigma \mathcal{D}^\sigma_\omega(u)$$

(***) Bien noter que l'ordre des indices est différent dans (8.4.54) et (8.4.75).

Démonstration succinte des propositions 9.4.1, 9.4.2, 9.4.3, et 9.4.4.

Pour tout potentiel $\varphi = \varphi(z,u)$ notons $\overrightarrow{\varphi}$ le vecteur dérivé. Ainsi, on aura identiquement:

(8.4.76) $$\overrightarrow{\varphi}\,.\,\psi \;=\; \{\varphi,\psi\}_p \qquad\qquad (\forall \varphi,\psi)$$

Séparons ensuite les variables z et u dans la perturbation $\mathcal{D}$ en écrivant :

(8.4.77) $$\mathcal{D}(z,u) = \sum_{i\in\mathbb{I}} d_i(z)\;\mathcal{D}_i(u) \qquad \left(\mathcal{D}_i(u) \in \mathbb{C}[[u_1,\ldots,u_{\nu-1}]]\right)$$

pour un réservoir d'indices $\mathbb{I}$ dénombrable.

En passant aux champs dérivés, cela donne :

(8.4.78) $$\mathbb{D} = \overrightarrow{\mathcal{D}} = \sum_i \overrightarrow{d_i\,\mathcal{D}_i} = \sum_i \left(d_i\,\overrightarrow{\mathcal{D}_i} + \mathcal{D}_i\,\overrightarrow{d_i}\right)$$

Mais comme les d_i ne dépendent que de z , on a :

(8.4.79) $$\overrightarrow{d_i} = d_i'\,\overrightarrow{z} \qquad \text{avec} \qquad d_i'(z) = \frac{d}{dz}\,d_i(z)$$

Par suite :

(8.4.80) $$\mathbb{D} = \sum_i \left(d_i\,\overrightarrow{\mathcal{D}_i} + d_i'\,\mathcal{D}_i\,\overrightarrow{z}\right)$$

Mais on a vu au § 6.8 comment, pour un champ résonnant général $X = {}^{\circ}X + \mathbb{D}$ les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ se calculaient à partir de la perturbation finie $\mathbb{D}$. On commençait par associer à la perturbation $\mathbb{D}$ une <u>coperturbation</u> $\mathbb{B}$ au moyen de la correspondance suivante, dite <u>involution vectorielle</u> :

(8.4.81) $$\mathbb{B} = -(1+\mathbb{D}.z)^{-1}\,\mathbb{D} \quad ; \quad \mathbb{D} = -(1+\mathbb{B}.z)^{-1}\,\mathbb{B}$$

puis on séparait les variables en posant :

(8.4.82) $$\mathbb{B} = \sum_i b_i\,\mathbb{B}_i \qquad\qquad \left(b_i = b_i(z)\,,\ \left[\frac{\partial}{\partial z}, \mathbb{B}_i\right] = 0\right)$$

avec des vecteurs $\mathbb{B}_i$ à coefficients constants en z et avec des facteurs scalaires b_i fonctions de z seul et de fréquence $\omega(i)$(*). Enfin on posait :

$$(8.4.83)\qquad \mathbb{A}_\omega = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\omega(i_1)+\dots\omega(i_r)=\omega} \langle b_{i_r},\dots,b_{i_2},b_{i_1}\rangle_\omega \,[\mathbb{B}_{i_r}\dots[\mathbb{B}_{i_2},\mathbb{B}_{i_1}]]$$

Tout ceci vaut en particulier pour les champs hamiltoniens X à résonance extrinsèque. Calculons donc la coperturbation $\mathbb{B}$ en portant dans (8.4.81) la perturbation $\mathbb{D}$ donnée en (8.4.80). Si on pose

$$(8.4.84)\qquad \mathbb{B} = {}^1\mathbb{B} + {}^2\mathbb{B} + {}^3\mathbb{B} + \dots$$

où ${}^r\mathbb{B}$ désigne la partie de $\mathbb{B}$ qui est homogène de degré r en $\mathbb{D}$, il vient :

$$(8.4.85_1)\qquad -{}^1\mathbb{B} = d_1 \overline{\mathcal{D}}_1 + d_1' \mathcal{D}_1 \overline{z}$$

$$(8.4.85_2)\qquad +{}^2\mathbb{B} = d_2 d_1 (\overline{\mathcal{D}}_2 z)\, \overline{\mathcal{D}}_1 + d_2 d_1' (\overline{\mathcal{D}}_2 z)\, \mathcal{D}_1 \overline{z}$$

$$(8.4.85_3)\qquad -{}^3\mathbb{B} = d_3 d_2 d_1 (\overline{\mathcal{D}}_3 z)(\overline{\mathcal{D}}_2 z)\, \overline{\mathcal{D}}_1 + d_3 d_2 d_1' (\overline{\mathcal{D}}_3 z)(\overline{\mathcal{D}}_2 z)\, \mathcal{D}_1 \overline{z}$$

etc...

Si on décompose de même l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ selon

$$(8.4.86)\qquad \mathbb{A}_\omega = {}^1\mathbb{A}_\omega + {}^2\mathbb{A}_\omega + {}^3\mathbb{A}_\omega + \dots$$

avec ${}^r\mathbb{A}_\omega$ homogène de degré r en $\mathbb{D}$, il vient en appliquant (8.4.83) et (8.4.85) :

$$(8.4.87_1)\qquad +{}^1\mathbb{A}_\omega = \sum \langle d_i \rangle_\omega \overline{\mathcal{D}}_i + \sum \langle d_i' \rangle_\omega \mathcal{D}_i \overline{z}$$

avec des $\sum$ étendus à tous les i tels que $\omega(i) = \omega$

(*) Autrement dit, $b_i(z) = e^{\omega(i) z} \beta_i(z)$ avec $\omega(i) \in \mathbb{C}$ et $\beta_i(z)$ subexponentiel en z.

$$(8.4.87_2)\quad \begin{cases} -{}^2\!\mathbb{A}_\omega = \sum \langle d_j, d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal{D}}_j\overline{\mathcal{D}}_i + \sum \langle d'_j, d_i\rangle_\omega \mathcal{D}_j \overline{z}\,\overline{\mathcal{D}}_i \\ \qquad + \sum\langle d_j\; d_i\rangle_\omega \mathcal{D}_j\overline{z}\,\mathcal{D}_i\overline{z} + \sum \langle d_j\; d'_i\rangle_\omega (\overline{\mathcal{D}}_j z)\,\mathcal{D}_i\overline{z} \\ \qquad + \sum\langle d_j\; d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal{D}}_j\,\mathcal{D}_i\overline{z} + \sum\langle d_j\; d_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal{D}}_j z)\,\overline{\mathcal{D}}_i \end{cases}$$

avec des $\sum$ étendus à tous les i, j tels que $\omega(i)+\omega(j)=\omega$:

$$(8.4.87_3)\quad \begin{aligned} +{}^3\!\mathbb{A}_\omega = & \sum\langle d_k,d_j,d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k\overline{\mathcal D}_j\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d_k,d_j,d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k\overline{\mathcal D}_j\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d_k,d'_j,d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k\,\mathcal D_j\overline z\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d'_k,d_j,d_i\rangle_\omega \mathcal D_k\overline z\,\overline{\mathcal D}_j\overline{\mathcal D}_i \\ & + \sum\langle d_k,d'_j,d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k\,\mathcal D_j\overline z\,\mathcal D_i\overline z + \sum\langle d'_k,d_j,d'_i\rangle_\omega \mathcal D_k\overline z\,\overline{\mathcal D}_j\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d'_k,d'_j,d_i\rangle_\omega \mathcal D_k\overline z\,\mathcal D_j\overline z\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d'_k,d'_j,d'_i\rangle_\omega \mathcal D_k\overline z\,\mathcal D_j\overline z\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d_k\; d_j, d_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)\,\overline{\mathcal D}_j\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d_k\; d_j,d'_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)\,\overline{\mathcal D}_j\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d_k\; d'_j,d_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)\,\mathcal D_j\overline z\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d_k\; d'_j,d'_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)\,\mathcal D_j\overline z\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d_k,d_j\; d_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k(\overline{\mathcal D}_j z)\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d_k,d_j\; d'_i\rangle_\omega \overline{\mathcal D}_k(\overline{\mathcal D}_j z)\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d'_k,d_j\; d_i\rangle_\omega \mathcal D_k\overline z\,(\overline{\mathcal D}_j z)\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d'_k,d_j\; d'_i\rangle_\omega\mathcal D_k\overline z\,(\overline{\mathcal D}_j z)\,\mathcal D_i\overline z \\ & + \sum\langle d_k\; d_j\; d_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)(\overline{\mathcal D}_j z)\,\overline{\mathcal D}_i + \sum\langle d_k\; d_j\; d'_i\rangle_\omega(\overline{\mathcal D}_k z)(\overline{\mathcal D}_j z)\,\mathcal D_i\overline z \end{aligned}$$

avec des $\sum$ étendus à tous les i, j, k tels que $\omega(i)+\omega(j)+\omega(k)=\omega$

Et ainsi de suite...

Bien qu'on sache par la théorie que $\mathbb{A}_\omega$ et donc ${}^1\mathbb{A}_\omega$, ${}^2\mathbb{A}_\omega$, ${}^3\mathbb{A}_\omega$ etc... dérivent de potentiels, ce n'est aucunement apparent sur les formules ci-dessus. Toutefois, en appliquant :

(i) l'identité (1.4.81) d'alternalité des scalaires $\langle d_n, \dots, d_1\rangle_\omega$

(ii) l'identité :

(8.4.88) $\langle \ldots, d_{i+1}, d_i, d_{i-1}, \ldots \rangle_\omega = \langle \ldots, d_{i+1} d_i, d_{i-1}, \ldots \rangle_\omega \; \langle \ldots, d_{i+1}, d_i d_{i-1}, \ldots \rangle_\omega$ (*)

qu'on déduit très facilement des définitions (1.4.63) et (1.4.78).

(iii) l'identité de Jacobi

(8.4.89) $[\overset{\frown}{a}[\overset{\frown}{b},\overset{\frown}{c}]] + [\overset{\frown}{b}[\overset{\frown}{c},\overset{\frown}{a}]] + [\overset{\frown}{c}[\overset{\frown}{a},\overset{\frown}{b}]] = 0$

ainsi que les identités de Jacobi d'ordre supérieur ;

(iiii) les identités impliquant les expressions mixtes en a et $\overset{\frown}{b}$ comme :

(8.4.90) $a\overset{\frown}{b} + b\overset{\frown}{a} = \overset{\frown}{a}b + \overset{\frown}{b}a = \overset{\frown}{ab}$

(8.4.91) $\overset{\frown}{a}bc + cb\overset{\frown}{a} = b\overset{\frown}{a}c + c\overset{\frown}{a}b$

en utilisant, disons-nous, toutes ces identités, on vérifie que les relations (8.4.87$_j$) se simplifient et qu'on peut exprimer ${}^1\mathbb{A}_\omega$, ${}^2\mathbb{A}_\omega$, ${}^3\mathbb{A}_\omega \ldots$ au moyen des seuls scalaires :

(8.4.92$_1$) $\langle d_i \rangle_\omega$

(8.4.92$_2$) $\langle d_j, d_i \rangle_\omega$ et $\langle d_j d_i \rangle_\omega$

(8.4.92$_3$) $\langle d_k, d_j, d_i \rangle_\omega$ et $\langle d_k d_j, d_i \rangle_\omega$ et $\langle d_k, d_j d_i \rangle_\omega$ et $\langle d_k d_j d_i \rangle_\omega$

à l'exclusion de tout crochet $\langle \ldots, d_i^{(n_i)}, \ldots \rangle_\omega$ comportant des <u>dérivées</u> des d_i. On trouve explicitement :

(8.4.93$_1$) $+{}^1\mathbb{A}_\omega = \sum \langle d_i \rangle_\omega \overset{\frown}{\mathscr{D}}_i$

(8.4.93$_2$) $-{}^2\mathbb{A}_\omega = \frac{1}{2} \sum \langle d_j, d_i \rangle_\omega [\overset{\frown}{\mathscr{D}}_j, \overset{\frown}{\mathscr{D}}_i] + \frac{1}{2} \sum \langle d_j d_i \rangle_\omega [\overset{\frown}{z}, \overset{\frown}{\mathscr{D}_j \mathscr{D}_i}]$

(*) En particulier $\langle d_1' \rangle_\omega = 0$, $\langle d_2, d_1' \rangle_\omega = \langle d_2 d_1 \rangle_\omega$, $\langle d_2', d_1 \rangle_\omega = -\langle d_2 d_1 \rangle_\omega$

$$(8.4.93_3)\quad \left\{ \begin{aligned} {}^3\mathcal{A}_\omega &= \frac{1}{3} \sum \langle d_k, d_j, d_i \rangle_\omega \left[\overline{\mathcal{D}}_k \left[\overline{\mathcal{D}}_j, \overline{\mathcal{D}}_i\right]\right] + \frac{1}{6} \sum \langle d_k d_j d_i \rangle_\omega \left[\overline{\zeta}\left[\overline{\zeta}, \overline{\mathcal{D}_k \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i}\right]\right] \\ &+ \frac{1}{4} \sum \langle d_k, d_j d_i \rangle_\omega \left[\overline{\mathcal{D}}_k \left[\overline{\zeta}, \overline{\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i}\right]\right] + \frac{1}{4} \sum \langle d_k d_j, d_i \rangle_\omega \left[\left[\overline{\zeta}, \overline{\mathcal{D}_k \mathcal{D}_j}\right] \overline{\mathcal{D}}_i\right] \end{aligned} \right.$$

avec les mêmes conventions de sommation que dans les relations $(8.4.87_j)$.

Cette fois-ci, il est manifeste que ${}^1\mathcal{A}_\omega$, ${}^2\mathcal{A}_\omega$, ${}^3\mathcal{A}_\omega$ .... dérivent de potentiels ${}^1\mathcal{A}_\omega$, ${}^2\mathcal{A}_\omega$, ${}^3\mathcal{A}_\omega$ ...... avec :

$$(8.4.94_1)\quad +{}^1\mathcal{A}_\omega = \sum \langle d_i \rangle \, \mathcal{D}_i$$

$$(8.4.94_2)\quad -{}^2\mathcal{A}_\omega = \frac{1}{2} \sum \langle d_j, d_i \rangle_\omega \left\{\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_i\right\}_P + \frac{1}{2} \sum \langle d_j d_i \rangle_\omega \left\{\zeta, \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i\right\}_P$$

$$(8.4.94_3)\quad \begin{aligned} +{}^3\mathcal{A}_\omega &= \frac{1}{3} \sum \langle d_k, d_j, d_i \rangle_\omega \left\{\mathcal{D}_k \left\{\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_i\right\}_P\right\}_P \\ &+ \frac{1}{4} \sum \langle d_k, d_j d_i \rangle_\omega \left\{\mathcal{D}_k \left\{\zeta, \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i\right\}_P\right\}_P \\ &+ \frac{1}{4} \sum \langle d_k d_j, d_i \rangle_\omega \left\{\left\{\zeta, \mathcal{D}_k \mathcal{D}_j\right\}_P \mathcal{D}_i\right\}_P \\ &+ \frac{1}{6} \sum \langle d_k d_j d_i \rangle_\omega \left\{\zeta \left\{\zeta, \mathcal{D}_k \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i\right\}_P\right\}_P \end{aligned}$$

On peut continuer et obtenir, par récurrence sur n , une formule fermée pour ${}^n\mathcal{A}_\omega$ en utilisant les identités (i) - (iiii) ci-dessus ainsi que :

(iiiii) l'identité de Dynkin-Jacobson

$$(8.4.95)\quad P = \sum \gamma_{1,2,\ldots,n}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_n = \frac{1}{n} \sum \gamma_{1,2,\ldots,n} \left[\overline{a}_1 \ldots \left[\overline{a}_{n-1}, \overline{a}_n\right]\right]$$

valable pour tout polynôme P homogène de degré n en $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots \overline{a}_n$ et dont on sait a priori qu'il est un élément de Lie.

(iiiiii) une identité analogue portant sur les P mixtes en les a_i et $\overline{a}_j$.

On constate alors que le potentiel de résurgence :

$$(8.4.96)\quad \mathcal{A}_\omega = {}^1\mathcal{A}_\omega + {}^2\mathcal{A}_\omega + {}^3\mathcal{A}_\omega + \ldots$$

est exactement de la forme (8.4.54) pour une coperturbation $\mathcal{B}$ qui se déduit de la perturbation $\mathcal{L}$ par l'<u>involution hamiltonienne</u> (8.4.48).

Sans doute est-il possible de donner de la proposition 8.4.1 une démonstration meilleure et plus directe que celle que nous venons d'esquisser. Quant aux trois propositions suivantes, elles ne présentent pas de diffultés.

La proposition 9.4.2 repose essentiellement sur la formule d'inversion de Lagrange, dont la formulation classique est la suivante (*) :

Si $f(w)$ est holomorphe en $w=0$ et $f(0) \neq 0$, alors la relation

(8.4.97) $$w\, z = f(w)$$

s'inverse selon

(8.4.98) $$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\, z^n \quad \text{avec} \quad g_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} f^n(w) \right|_{w=0}$$

De là on tire facilement la relation d'inversion "symétrique" dont nous avons besoin et qui stipule que si deux séries formelles $\mathcal{D}(u_{v/2})$ et $\mathcal{B}(u_{v/2})$ sont des $\mathcal{O}(u_{v/2})$ et vérifient (8.4.59), alors elles vérifient automatiquement (8.4.60) et les applications formelles :

(8.4.99) $$u_{v/2} \longmapsto u_{v/2} + \mathcal{D}(u_{v/2})$$

(8.4.100) $$u_{v/2} \longmapsto u_{v/2} + \mathcal{B}(u_{v/2})$$

sont réciproques l'une de l'autre.

Quant aux formules qui à la proposition 8.4.3 permettent de dériver $\mathbb{A}_\omega$ à partir des potentiels $\mathcal{A}_\omega$, elles tiennent simplement à ce que le changement de variable :

(*) Voir par exemple: L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, Tome 1, pp.196-197.

$$(8.4.101)\qquad x_i \longmapsto w_i \qquad \begin{cases} w_i = e^{u_i} & \text{si } 1 \leq i \leq K \\ w_i = u_i & \text{si } K < i < \nu \\ w_\nu = u_\nu = z \end{cases}$$

sont canoniques, c'est-à-dire préservent la forme hamiltonienne θ^H .

Enfin, la proposition 8.4.3 découle de la proposition 8.4.1 moyennant l'identité (8.4.55).

Remarque : (Involution vectorielle et involution hamiltonienne)

On prendra bien garde que dans le cas d'un champ hamiltonien $\mathbb{X} = {}^\circ\mathbb{X} + \mathbb{D}$ de potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$, l'involution vectorielle

$$(8.4.102)\qquad \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B} = -\left(\mathbb{D}\, z\right)^{-1}\, \mathbb{D}$$

ne dérive pas directement de l'involution hamiltonienne :

$$(8.4.103)\qquad \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B} = -\mathcal{D} - \frac{1}{2!}\{z, \mathcal{D}^2\}_P - \frac{1}{3!}\{z\{z, \mathcal{D}^3\}_P\}_P \cdots$$

En effet, bien que $\mathbb{D}$ par définition dérive de $\mathcal{D}$, $\mathbb{B}$ ne dérive pas de $\mathcal{B}$ ni d'ailleurs d'aucun potentiel, car en général $\mathbb{B}$ n'annule pas la forme hamiltonienne θ^H.

Quant à l'interprétation (8.4.66) de l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ en termes d'inversion (au sens de la substitution) relativement au cotemps $u_{\nu/2}$ (voir proposition 8.4.2), elle ne laisse de surprendre. D'ordinaire, en effet, on additionne les hamiltoniens, on prend leurs crochets de Poisson, etc..., mais on n'a jamais à les composer (au sens de la substitution) ni à les inverser par rapport à aucune de leurs variables ou paramètres. Ici, toutefois, cela devient nécessaire. C'est étrange mais c'est ainsi.

CHAPITRE 9 : LA QUASIRESONANCE ET LES TOUT PETITS DIVISEURS

SECTION 9.1. INTRODUCTION A LA QUASIRESONANCE

Introduisons la notion de quasirésonance sur l'exemple le plus simple qui soit. Considérons à cet effet les difféos locaux de $\mathbb{C}$:

$$(9.1.1.) \qquad f : x \mapsto f(x) = \ell x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad \left(\ell \neq 0,\ \overline{\lim} |a_n|^{1/n} < \infty\right)$$

Si ℓ est racine de l'unité, le difféo f est résonnant (*) et tombe sous le coup du chapitre 7. Il possède une infinité d'invariants holomorphes, calculés à la section §7.5.

Lorsque $|\ell| \neq 1$, f est linéairement linéarisable (E. SCHRÖDER, 1871) par un changement de variable $x \mapsto h(x)$ avec :

$$(9.1.2) \qquad h(x) = \lim_{n \to \infty} \ell^{-n} \overset{n}{f}(x) \qquad \left(\text{resp} \lim_{n\to\infty} \ell^{n} \overset{-n}{f}(x)\right)$$

si $|\ell| < 1$ (resp $|\ell| > 1$).

Reste le cas où $|\ell| = 1$ et $\ell^n \neq 1$.

Proposition 9.1.1 (C.L. SIEGEL, H. RÜSSMANN. Linéarisabilité des difféos locaux non résonnants de $\mathbb{C}$).

Fixons un ℓ non racine de l'unité et posons

$$(9.1.3) \qquad \varpi(k) = \inf_{1 < n \leq k} |\ell^n - \ell|$$

Alors si

$$(9.1.4) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \log \frac{1}{\varpi(k)} < \infty$$

(*) en effet le multiplicateur $\lambda_1 = \log \ell$ résonne avec le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$

tout difféo analytique $f : x \longmapsto \ell x + \ldots$ est analytiquement linéarisable.

Inversement si

(9.1.5) $$\limsup_k \frac{1}{k} \log \frac{1}{\varpi(k)} = \infty \qquad \left(\frac{1}{k} \text{ et non } \frac{1}{k^2} \;!\right)$$

il existe des difféos $f : x \mapsto \ell x + \ldots$ qui ne sont pas analytiquement linéarisables. Il existe même, parmi ces difféos, une infinité non dénombrable de classes analytiques distinctes.

L'énoncé qui précède couvre évidemment le cas de SCHRÖDER $(|\ell| \neq 1)$ puisque alors $\varpi(k)$ ne tend pas vers 0 .

Le premier à traiter le cas $|\ell| = 1$, $\ell^n \neq 1$ fut C.L. SIEGEL qui en 1942 établit dans [Si.1] la linéarisabilité analytique sous une condition diophantienne

(9.1.6) $$|\ell^k - \ell| \geqslant 1/c\,k^\tau \qquad (\text{avec certaines constantes } c, \tau > 1)$$

En 1967 H. RÜSSMANN établit dans [Rü.2] la linéarisabilité analytique sous la condition :

(9.1.7) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} \log q_{k+1} < \infty$$

où $q_0 = 1 < q_1 < q_2 < \ldots$ sont les dénominateurs de la fraction continue de :

(9.1.8) $$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\log \ell}{2\pi i}$$

Compte tenu des propriétés des fractions continues, (9.1.7) équivaut à (9.1.6). Notons que ces conditions sont presque toujours vérifiées. Elles le sont en particulier quand ℓ est algébrique.

Enfin, l'existence, sous la condition (9.1.5), de difféos f non analytiquement linéarisables est presque évidente, et cela au niveau même des perturbations. Soit par exemple la famille :

(*) pour la détermination de $\log \ell$ comprise entre 0 et $2\pi i$.

$$(9.1.9) \qquad f(x) = \ell x + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \qquad (\varepsilon \text{ petit} ; |a_n|^{1/n} < \text{cste})$$

Le changement de variable formel (unique à une dilatation près) qui linéarise f est de la forme :

$$(9.1.10) \qquad x \mapsto h(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varepsilon)\, x^{n+1}$$

avec $b_n(\varepsilon)$ polynomial de degré n en ε et de la forme :

$$(9.1.11) \qquad b_n = \varepsilon \frac{a_n}{\ell^{n+1}-\ell} + o(\varepsilon) \qquad ; \qquad \liminf |\ell^{n+1}-\ell|^{1/n} = 0$$

Utilisant alors un lemme dû à E. CARTAN et E. JABOTINSKI (*) on montre très facilement que $h(x)$ ne saurait être analytique, uniformément en ε , pour tout choix des a_n.

Cela dit, il demeure entre les conditions exclusives (9.1.4) et (9.1.5) un petit intervalle à combler. En attendant qu'il le soit, convenons de dire qu'un difféo f de $\mathbb{C}$ est quasirésonnant s'il vérifie (9.1.5) et non quasirésonnant s'il vérifie (9.1.4). La proposition 9.1.1 dit alors que pour les f non quasirésonnants et non résonnants, la conjugaison formelle entraîne la conjugaison analytique, mais qu'au contraire, pour les f quasirésonants, chaque classe formelle se scinde en sous-classes analytiques non triviales. Il est même facile de voir, en raisonnant ici encore au niveau des perturbations, qu'il existe une infinité de telles sous-classes analytiques. D'où l'existence d'invariants analytiques non triviaux et la question : sont-ils holomorphes ou métaholomorphes ?

Proposition 9.1.2. (Quasirésonance et invariants métaholomorphes)

Les difféos locaux de $\mathbb{C}$ qui sont quasirésonnants ne possèdent aucun invariant holomorphe (autre que formel) mais uniquement des invariants métaholomorphes.

(*) Voir par exemple [E.O.1], p.216, lemmes 1 et 2.

Preuve : Fixons une classe formelle de difféos locaux quasirésonnants. Cette classe $\mathcal{C}_\ell$ est caractérisée par un complexe ℓ vérifiant (9.1.5) et donc nécessairement de module 1. D'après nos définitions générales (cf. §1.1), s'il existe un invariant holomorphe $A = A(f)$, il doit être défini sur toute la classe formelle $\mathcal{C}_\ell$ et être une fonction entière de l'objet f, c'est-à-dire de ses coefficients de Taylor $a_1, a_2, \ldots$ (à l'exclusion du premier coefficient, ℓ, qui est fixe). Si $A(f)$ n'est pas constant en f, il existe nécessairement un entier $r \geqslant 1$ tel que $A(f)$ commence par une forme homogène de degré r en les a_i :

(9.1.12) $$A(f) = \mathrm{Cste} + \sum_{n_1,\ldots,n_r \geqslant 1} A_{n_1,\ldots,n_r}\, a_{n_1} \ldots a_{n_r} + (\text{degré} > r)$$

Posons $g(x) = \ell x$ et

(9.1.13) $$h_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\, k(x) \quad \text{avec} \quad k(x) = \sum_{n \geqslant 1} b_n x^{n+1} \in x^2\mathbb{C}\{x\}$$

Désignons par $x \mapsto \overset{-1}{h}_\varepsilon(x) = x - \varepsilon k(x) + o(\varepsilon)$ le réciproque du difféo $x \mapsto h_\varepsilon(x)$ et posons :

(9.1.14) $$f_\varepsilon(x) = \overset{-1}{h}_\varepsilon \circ g \circ h_\varepsilon(x) = x + \sum_{n \geqslant 1} a_n(\varepsilon)\, x^{n+1}$$

Comme f_ε est analytiquement conjugué à g, on doit avoir pour tout ε :

(9.1.15) $$A(g) = A(f_\varepsilon)$$

Mais par construction $f_\varepsilon = x + \varepsilon\,(\ell\, k(x) - k(\ell x)) + o(\varepsilon)$ et par suite

(9.1.16) $$a_n(\varepsilon) = \varepsilon\,(\ell - \ell^{n+1})\, b_n + o(\varepsilon)$$

Portant cela dans (0.1.12) et compte tenu de (9.1.15) on aboutit à l'identité :

(9.1.17) $$\sum_{n_1,\ldots,n_r \geqslant 1} A_{n_1,\ldots,n_r}\, \ell^r (1-\ell^{n_1}) \ldots (1-\ell^{n_r})\, b_{n_1} \ldots b_{n_r} \equiv 0$$

valable pour $k(x)$ parcourant $x^2\mathbb{C}\{x\}$. Une telle identité n'est possible que si $A_{n_1,\ldots,n_r} \equiv 0$. Il n'existe donc sur la classe formelle $\mathcal{C}_\ell$ aucun invariant holomorphe non constant, c'est-à-dire non trivial.

Comme toutefois il existe dans $\mathcal{C}_\ell$ une infinité de sous-classes analytiques, les éléments de $\mathcal{C}_\ell$ possèdant des invariants analytiques, mais ceux-ci sont méta-holomorphes, c'est-à-dire essentiellement non constructibles et en tout cas non holomorphes.

SECTION 9.2. QUASIRESONANCE. TOUT PETITS DIVISEURS ET INVARIANTS METAHOLOMORPHES.

Après cette entrée en matière, nous pouvons introduire la notion générale de quasirésonance. Il est commode de choisir une définition de la quasirésonance qui exclue la résonance, car les deux phénomènes ont des effets très différents et peuvent au demeurant se superposer.

Définition 9.2.1 (Indicatrice de quasirésonance)

a) Pour un champ X de multiplicateurs $\lambda_1,\dots,\lambda_\nu$ l'indicatrice de quasi-résonance (de première génération) est la suite décroissante $\varpi(k)$ définie par :

$$\varpi(k) = \inf_{\substack{\|n\| \le k \\ \langle n,\lambda\rangle \neq \lambda_i}} |\langle n,\lambda\rangle - \lambda_i| \qquad (k=1,2,\dots) \tag{9.2.1}$$

la borne inférieure étant prise pour $i = 1,2,\dots,\nu$ et par rapport à tous les multientiers positifs $n = (n_1,\dots,n_\nu)$. Bien sûr $\langle n,\lambda\rangle = \sum n_i\lambda_i$ et $\|n\| = n_1 + \dots n_\nu$

b) Pour un difféo f de multiplicateurs $\lambda_0 = 2\pi i$, $\lambda_1 = \log \ell_1,\dots,\lambda_\nu = \log \ell_\nu$ l'indicatrice de quasirésonance (de première génération) est la suite décroissante $\varpi(k)$ définie par :

$$\varpi(k) = \inf_{\substack{\|n\| \le k \\ \ell^n \neq \ell_i}} |\ell^n - \ell_i| \qquad (k=1,2,\dots) \tag{9.2.2}$$

la borne inférieure étant encore prise par rapport aux i et aux multientiers positifs n . Bien sûr $\ell^n = \ell_1^{n_1}\dots\ell_\nu^{n_\nu}$

c) Pour un champ X ou un difféo f présentant ν^+ degrés de résonance positive et ayant pour directeurs (ou multiplicateurs de seconde génération) les scalaires :

$$\lambda_0 = -1 \ , \ \lambda_1 \ , \ \ldots \ , \ \lambda_{\nu^+-1}$$

on définit une indicatrice de quasirésonance de deuxième génération :

$$\varpi'(k) = \sum_{\substack{\|n\| \leq k \\ \langle n,\lambda\rangle \neq \lambda_i}} |\langle n,\lambda\rangle - \lambda_i| \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{9.2.3}$$

En cas de résonance en cascade, on définit de même des indicatrice ϖ'', ϖ'''... de troisième, quatrième... générations à partir des multiplicateurs correspondants.

Notons qu'avec ces définitions, si un difféo f est l'exponentielle d'un champ X , les indicatrices de quasirésonance de f et X ne coïncident pas exactement à la première génération, mais qu'elles sont <u>équivalentes</u> (*) si bien qu'on peut indifféremment user de l'une ou de l'autre dans les critères QR^* et QR_* ci-dessous. Aux générations suivantes, il n'y a aucune différence entre champs et difféos.

<u>Définition 9.2.2</u> (<u>Notion de quasirésonance</u>)

Pour tout objet local (champ ou difféo) on a deux notions de quasirésonance : une notion de <u>quasirésonance faible</u> qui s'énonce :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \log \frac{1}{\varpi(k)} = +\infty \tag{QR_*}$$

et une notion de <u>quasirésonance forte</u>, qui implique la première et qui s'énonce :

$$\limsup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \log \frac{1}{\varpi(k)} = +\infty \qquad (**) \tag{QR^*}$$

(*) leur rapport reste compris entre deux bornes indépendant de k.

(**) Bien remarquer les facteur $1/k^2$ et $1/k$ dans (QR_*) et (QR^*).

Remarque 1 : H. RÜSSMANN a utilisé en 1977 dans [Rü.2] la condition (QR_*) à propos des difféos. Auparavant, en 1969, A.D. BRJUNO avait introduit dans [Br.1] à propos des champs de vecteurs des conditions $(\widetilde{QR}_*)$ et $(\widetilde{QR}^*)$ équivalentes à (QR_*) et (QR^*) et qui avec nos notations s'énoncent :

$$(\widetilde{QR}_*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{1}{\varpi(2^n)} = +\infty$$

$$(\widetilde{QR}^*) \qquad \limsup_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \log \frac{1}{\varpi(2^n)} = +\infty$$

Remarque 2. Avec son facteur $1/k^2$ la condition (QR_*) semble plus forte que la condition (QR^*) avec son facteur $1/k$. En fait, c'est l'inverse: (QR^*) implique (QR_*). On le montre facilement en utilisant la non-décroissance de la suite $\log(1/\varpi(k))$ et en vérifiant successivement les relations logiques :

$$(QR^*) \Leftrightarrow (\widetilde{QR}^*) \Rightarrow (\widetilde{QR}_*) \Leftrightarrow (QR_*)$$

Remarque 3 : (quasirésonance virtuelle)

On se souvient (*) qu'on a été amené à distinguer deux sortes de résonance, positive et vituelle. A elle seule, la seconde n'avait aucun effet mais, en conjonction avec la première, elle influait sur la forme des invariants holomorphes $\mathcal{A}_\omega$. Par analogie, la quasirésonance que nous venons de définir pourrait être qualifiée de positive, car elle est définie à partir des multientiers positifs n. On pourrait aussi introduire une notion de quasirésonance virtuelle à partir des multientiers de signes mixtes. Il se trouve toutefois que la quasirésonance virtuelle n'a jamais aucun effet, même en conjonction avec la quasirésonance positive. C'est donc cette dernière qui seule importe. Aussi l'appelle-t-on simplement quasirésonance.

(*) Voir le chapitre 6.

Remarque 4. (Degré de quasirésonance)

On peut aussi, par analogie avec la résonance, introduire un degré de quasi-résonance. Par exemple, on peut dire qu'un point γ de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\nu-1}(\mathbb{C})$ est une direction de quasirésonance (forte) si γ est limite d'une suite n^k de multientiers tels que

$$\frac{1}{\|n^k\|} \log \frac{1}{\langle n^k, \lambda \rangle} \to \infty \qquad \left(\|n^k\| = \sum n_i^k \; ; \; \langle n^k, \lambda \rangle = \sum n_i^k \lambda_i \right)$$

et on peut définir le degré de quasirésonance (forte) comme égal à la dimension du plus petit sous-espace $\mathcal{P}$ de $\mathbb{P}_{\nu-1}(\mathbb{C})$ qui contienne toutes les directions de quasirésonance γ. Ces γ peuvent d'ailleurs ne pas décrire tout $\mathcal{P}$. Il y a justement lieu de se demander si la condition critique (QR) intermédiaire entre (QR^*) et (QR_*) (voir ci-après) n'est pas la première pour laquelle les γ décrivent tout $\mathcal{P}$.

Proposition 9.2.1. (BRJUNO, RÜSSMANN. Quasirésonance et linéarisation analytique)

Si un champ X ou un difféo f est formellement linéarisable et ne vérifie pas la condition de quasirésonance faible (QR_*), il est analytiquement linéarisable.

En revanche, les champs et les difféos formellement linéarisables mais vérifiant la condition de quasirésonance forte (QR^*) ne sont presque jamais linéarisables. Plus généralement, deux champs (ou deux difféos) formellement conjugués mais vérifiant la condition de quasirésonance forte (QR^*) ne sont presque jamais analytiquement conjugués.

Pour les champs X dont les multiplicateurs λ_i sont situés d'un même côté d'une droite passant par l'origine, ou pour les difféos f contractants, c'est-à-dire dont la partie linéaire a des valeurs propres $\ell_i = e^{\lambda_i}$ strictement inférieurs à 1 en module, la linéarisabilité analytique est presque évidente et connue depuis longtemps.

Pour les champs (resp. difféos) formellement linéarisables et véfifiant des condition diophantiennes plus fortes que la condition (non-QR_*), la linéarisabilité analytique a été établie en 1952 par C.L. SIEGEL dans [Sg.2] (resp. par S. STERNBERG dans (**) et E. ZEHNDER dans (***).

Pour les champs (resp. difféos) formellement linéarisables et vérifiant la condition (non-QR_*), la linéarisabilité analytique a été établie en 1969 par A.D. BRJUNO dans [Br.1] (resp. en 1977 par H. RÜSSMANN dans [Rü.2]).

Réciproquement, il est presque évident, et connu depuis longtemps, que la quasirésonance forte (QR^*) fait "presque toujours" (*) obstacle à la linéarisabilité des objets formellement linéarisables et, plus généralement, à la conjugabilité analytique des paires d'objets formellement conjugués. La raison en est simple : lors du calcul des transformations formelles linéarisantes (ou conjugantes) on est amené à diviser les coefficients de Taylor par les scalaires $\langle n,\lambda\rangle - \lambda_i$. Mais la quasirésonance forte (QR^*) fait que ces scalaires peuvent être si petits que même leur racines $\|n\|$-èmes, c'est-à-dire les $|\langle n,\lambda\rangle - \lambda_i|^{1/\|n\|}$ ont 0 pour point d'adhérence. D'où la conclusion, par l'argument signalé sous la proposition 9.1.1.

Ces scalaires très petits qu'engendre la quasirésonance sont dits <u>TOUT PETITS DIVISEURS</u>. Il faut soigneusement les distinguer des <u>petits diviseurs</u> (voir §8.1) qu'engendre la nihilence et avec qui ils n'ont <u>rigoureusement rien à voir</u>. Il suffit d'ailleurs de comparer les définitions de la quasirésonance et de la nihilence pour comprendre que ce sont là deux phénomènes totalement distincts, portant l'un sur les germes d'ordre fini, l'autre sur la totalité du développement de Taylor.

Revenant à la proposition 9.2.1, il est clair qu'il subsiste un intervalle d'ombre entre la condition faible (QR_*) et la condition forte (QR^*). Il semble toutefois que la <u>condition critique</u>, que nous nommerons (QR) et à partir de laquelle les

---

(*) au sens de la mesure de Lebesgue sur des sous-ensembles analytiques, ou en tout autre sens raisonnable. (**) S. STERNBERG, Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems, J. of Math. and Mech. 10, 451-474 (1961). (***) E. ZEHNDER, a simple proof of generalization of a theorem of C.L. SIEGEL (IMPA, 1979).

tout petits diviseurs deviennent opérants, soit beaucoup plus proche de (QR_*) que de (QR^*). En ce qui nous concerne et pour faire bref, nous dirons qu'un objet local est quasirésonnant s'il vérifie cette condition critique (QR) encore inconnue. En attendant que cette condition ne soit fixée exactement, il convient de remplacer mentalement (QR) par (QR^*) et (non-QR) par (non-QR_*) dans tous les énoncés.

Puisque, à l'intérieure d'une classe formelle d'objets locaux, la quasirésonance fait obstacle à la conjugabilité analytique, elle engendre nécessairement des sous-classes analytiques et donc des invariants analytiques non triviaux. Toutefois :

Proposition 9.2.2 (Quasirésonance et invariants métaholomorphes)

A elle seule (*) la quasirésonance n'engendre aucun invariant holomorphe, mais uniquement des invariants métaholomorphes (au sens strict).

La démonstration, dans son principe, est exactement la même que pour la proposition 9.1.2. Tout invariant holomorphe $A(\mathcal{O}\!\mathcal{b})$ devrait commencer par un terme ${}^{n}A(\mathcal{O}\!\mathcal{b})$ homogène de degré n en les coefficients de Taylor de l'objet $\mathcal{O}\!\mathcal{b}$ et ce terme ${}^{n}A$ devrait lui même vérifier la relation d'invariance modulo le degré $n+1$ ce qui conduit à une contradiction. Tout repose en fin de compte sur l'impossibilité, intuitivement presque évidente, d'exploiter l'hypothèse de quasirésonance pour la construction d'invariants holomorphes (au sens strict, c'est-à-dire non formels).

SECTION 9.3. SUPERPOSABILITE DE LA RESURGENCE AVEC LA QUASIRESONANCE ET LA NIHILENCE.

9.3.a. Résonance + quasirésonance.

Les multiplicateurs λ_i d'un champ ou d'un difféo peuvent très bien présenter

(*) C'est-à-dire en l'absence des deux autres causes d'invariance, qui sont la résonance et la nihilence. Pour le cas où plusieurs de ces causes opèrent ensemble, voir la section suivante.

simultanément de la résonance et de la quasirésonance. Pareillement, si le degré de résonance positive ρ^+ est $\geqslant 2$, les directeurs λ_j peuvent eux-mêmes présenter de la résonance ou de la quasirésonance (dites de seconde génération), voire les deux à la fois (si $\rho^+ \geqslant 3$). Et ainsi de suite.

Commençons par le cas où l'on a résonance et quasirésonance à la première génération, mais rien à la seconde. On a alors (voir chapitres 6 et 7) un "réseau de résurgence" Ω construit avec les combinaisons entières positives (ou "semi-positives") des multiplicateurs, et un ensemble Ω^{int} qui est le plus grand sous-groupe de Ω . Ce sous-groupe Ω^{int} est engendré par ceux des multiplicateurs λ_i qui sont effectivement impliqués dans au moins une relation de résonance. Deux cas se présentent alors :

(i) La résonance et la quasirésonance sont disjointes.

Cela veut dire que Ω^{int} est diophantien. Ou, plus explicitement, que les multiplicateurs λ_i qui résonnent ne vérifient pas la condition de quasirésonance. Alors, comme on l'a vu aux chapitres 6 et 7 (*), la résurgence subsiste, l'équation du pont subsiste, et les invariants holomorphes A_ω subsistent. Simplement, viennent s'ajouter à ces dernier des invariants métaholomorphes, engendrés par la quasirésonance.

(ii) La résonance et la quasirésonance se chevauchent.

Cela veut dire que Ω^{int} est liouvillien. Ou, plus explicitement, que les multiplicateurs λ_i qui résonnent sont aussi en quasirésonance. Dans ce cas, les tout petits diviseurs font exploser la résurgence et détruisent les invariants holomorphes qu'elle porte. Subsiste une masse indifférenciée d'invariants métaholomorphes.

En cas de résonance + quasirésonance en cascade, la discussion est la même à chaque génération : si le groupe Ω^{int} formé avec les multiplicateurs de k-ème génération est diophantien, les invariants holomorphes de k-ème génération (voir

(*) Voir notamment proposition 6.2.7.

chapitre 10) coexistent avec les invariants métaholomorphes. Sinon, seuls ces derniers subsistent.

9.3.b. Résonance + quasirésonance + nihilence.

Bien entendu, et quoique ce soit rarissime, de la nihilence peut, à chaque génération, venir se greffer sur la résonance (qu'elle présuppose) voire sur la quasirésonance (qu'elle n'exclue pas). Lorsqu'elle est totale, et dans ce cas seulement, la nihilence détruit la résurgence.

9.3.C. Existe-t-il des dérivations superétrangères ?

Peut-être est-il possible, au moyen d'ultrafiltres $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{N}^{\vee}$ ou de choses du même goût, de définir (pas de construire !) des dérivations $\Delta_{\mathfrak{F}}$ qui, en cas de quasirésonance ou de nihilence, donnent lieu à une "équation du pont" :

$$\Delta_{\mathfrak{F}} \quad x(z,u) = \mathbb{A}_{\mathfrak{F}} \quad x(z,u) \tag{9.3.1}$$

avec au second membre des opérateurs différentiels ordinaires $\mathbb{A}_{\mathfrak{F}}$ dont les coefficients seraient des invariants métaholomorphes de l'objet envisagé.

La question est moins oiseuse qu'il n'y paraît, car de telles dérivations "superétrangères" permettraient sans doute d'étendre aux cas nihilents et quasirésonnants les théorèmes de transcendance que nous établirons dans les cas résonnants grâce aux dérivations étrangères (Voir § 10.7).

CHAPITRE 10 : LE CAS PLURITEMPOREL. RESULTATS UNIVERSELS.

SECTION 10.1 : INTRODUCTION AU CAS PLURITEMPOREL. TEMPS PRIMORDIAL ET TEMPS PARALLELES. TEMPS ELEMENTAIRES ET TEMPS PERTURBES.

Les chapitres 4 à 7 traitaient tous du cas unitemporel : la résurgence provenait toujours de la résonance des multiplicateurs de première génération et elle était toujours relative au temps primordial, c'est-à-dire à la variable z par rapport à qui tout champ X s'écrit $\frac{\partial}{\partial z}$ et tout difféo f s'écrit $z \mapsto z+1$

Nous n'avons jusqu'à présent traité le cas pluritemporel qu'aux chapitres 2 et 3 qui couvraient les équations et systèmes différentiels ou aux différences. Nous avons alors obtenu de la résurgence par rapport à des temps parallèles z_p diversement reliés au temps primordial z :

(i) Pour les équations différentielles ou aux différences qui atteignaient plusieurs niveaux p entiers ou rationnels >0 , nous avions résurgence par rapport aux temps parallèles :

$$z_p = z^p \tag{10.1.1}$$

(ii) Pour les équations différentielles qui atteignaient le niveau 0 et dont les multiplicateurs de niveau 0 résonnaient (*), nous avions résurgence par rapport au temps parallèle :

$$z_{0,1} = \log z \tag{10.1.2}$$

(iii) Pour les équations aux différences qui atteignaient le niveau 1^+ , nous avions résurgence par rapport au temps parallèle :

$$z_{1,1} = z_{1^+} = z \log z \tag{10.1.3}$$

La pluritemporalité se présente aussi, bien qu'exceptionnellement, pour

(*) Voir § 2.10.

les objets locaux généraux (champs et difféos) et c'est dans ce cadre qu'il nous reste à l'étudier. Le plan à suivre est tout tracé :

(i) d'abord les objets à plusieurs niveaux, auxquels correspondent des temps parallèles :

(10.1.4) $$z_p = z^p$$

(ii) ensuite les objets à plusieurs générations, auxquels correspondent des temps parallèles

(10.1.5) $$z_{0,0,\ldots,1} = \log\log\ldots\log z$$

(iii) et enfin les objets à plusieurs générations et à plusieurs niveaux (chaque génération ayant un ou plusieurs niveaux), auxquels correspondent des temps parallèles :

(10.1.6) $$z_{0,p} = (\log z)^p \;,\; z_{0,0,p} = (\log\log z)^p,\ \text{etc}\ldots$$

ou même parfois :

(10.1.6bis) $$z_{p_1,p_2,\ldots,p_n} = z^{p_1}(\log z)^{p_2}\ldots(\log\ldots\log z)^{p_n}$$

Cela suppose bien sûr de la résonance étalée sur plusieurs générations successives, i.e. affectant les multiplicateurs de première, seconde... génération. A chaque génération, la résonance peut d'ailleurs être compliquée de nihilence et de quasirésonance. Cette étude va donc nous conduire aux champs et aux difféos locaux les plus généraux qui se puissent concevoir et aux énoncés les plus généraux qu'on puisse espérer.

Temps élémentaires et temps perturbés.

Un mot sur les temps perturbés, avant d'en finir avec les généralités. Tous les temps parallèles $z_p = z_{p_1,p_2\ldots}$ énumérés aux formules (10.1.4), (10.1.5), (10.16, 6bis) peuvent être dits <u>élémentaires</u> car ils s'expriment élémentairement (par des formules simples, ne faisant intervenir qu'un nombre fini de paramètres discrets, à savoir les niveaux p de l'objet) en fonction du temps primordial $\mathfrak{z}$. Toutefois, l'intégrale formelle résurgente en $\mathfrak{z}_p$:

(10.1.7) $$x(\mathfrak{z}_p, u) = \sum u^n . \mathfrak{z}_p^{[n]} . \phi^n(\mathfrak{z}_p)$$

comporte des composantes $\phi^n(\mathfrak{z}_p)$ qui en général ne sont pas des séries formelles (progrades ou bigrades) <u>en $\mathfrak{z}_p$ lui-même, mais en un temps perturbé</u> (ou <u>adapté</u>) $\mathring{\mathfrak{z}}_p$ équivalent à $\mathfrak{z}_p$:

(10.1.8) $$\mathring{\mathfrak{z}}_p \sim \mathfrak{z}_p \quad \text{quand } \mathfrak{z}_p \to \infty \qquad (\text{i.e. quand } \mathfrak{z} \to \infty)$$

mais d'expression moins simple. Nous avons déjà rencontré un temps perturbé $\mathring{\mathfrak{z}}$ dans les problèmes unitemporels. Il se reliait au temps primordial $\mathfrak{z}$ par la formule :

(10.1.9) $$\mathring{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z} \qquad (\rho \in \mathbb{C})$$

qui fait intervenir le résiduit ρ ("résidu itératif"). Nous allons voir (§§ 10.3 et 10.4) que le phénomène est général : à tout temps parallèle $\mathfrak{z}_p$ correspond un temps perturbé équivalent $\mathring{\mathfrak{z}}_p$ dont la définition n'est pas élémentaire (elle fait intervenir des paramètres $\rho_{i,j,k\ldots}$ qui généralisent le résiduit et qui peuvent être en nombre infini) mais dont l'introduction simplifie au maximum l'écriture des composantes $\phi^n(\mathring{\mathfrak{z}}_p)$.

Comme $\mathring{\mathfrak{z}}_p$ est équivalent à $\mathfrak{z}_p$, l'intégrale formelle résurgente en $\mathfrak{z}_p$ est aussi résurgente en $\mathring{\mathfrak{z}}_p$ et on passe facilement des dérivées étrangères en $\mathfrak{z}_p$ aux dérivées étrangères en $\mathring{\mathfrak{z}}_p$ grâce à la formule :

(10.1.10) $$^{\mathring{\mathfrak{z}}_p}\Delta_\omega \phi = e^{\omega(\mathring{\mathfrak{z}}_p - \mathfrak{z}_p)} \left(^{\mathfrak{z}_p}\Delta_\omega \phi \right)$$

Soit, en utilisant les dérivées étrangères pointées :

(10.1.11) $$^{\mathring{\mathfrak{z}}_p}\dot{\Delta}_\omega \phi = {}^{\mathfrak{z}_p}\dot{\Delta}_\omega \phi$$

Remarquons toutefois que, quelque soit le temps parallèle envisagé, l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ figurant au second membre de l'équation du pont doit commuter avec les dérivations (s'il s'agit d'un champ) ou les translations (s'il s'agit d'un difféo) par rapport au temps primordial. Autrement dit :

(10.1.12) $$\left[\frac{\partial}{\partial z}, \mathbb{A}_\omega\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \left[L, \mathbb{A}_\omega\right] = 0 \quad \text{avec } L : z \mapsto z+1$$

Le terme "précaire" de $\mathbb{A}_\omega$ est donc toujours de la forme :

(10.1.13) $$u^{n(\omega)} A^{\circ}_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{ou} \qquad u^{n(\omega)} e^{n_0(\omega)\lambda_0 z} A^{\circ}_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} \qquad (\lambda_0 = 2\pi i)$$

SECTION 10.2. OBJETS A PLUSIEURS NIVEAUX.

On trouvera à la section 10.4 une étude à peu près systématique des objets à plusieurs niveaux et (ou) à plusieurs générations. Nous allons ici simplement nous familiariser par des exemples avec les principaux types de champs et de difféos à plusieurs niveaux.

Exemple 1

Soit un champ local $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ analytique et formellement conjugué au champ

(10.2.1) $$^{\circ}X = -\frac{1}{\delta_1}\,(x_1)^{\delta_1}\, x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{\nu}\lambda_i\,\frac{\delta_i}{\delta_1}\, x_1^{\delta_1-\delta_i}\, x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

pour des entiers $\delta_1 > \delta_2 \geq \delta_3 \geq \ldots\ \delta_\nu > 0$ et des complexes λ_i non nuls. Appliquant les définitions de la section 4.1 on trouve pour $^{\circ}X$ une application directrice

(10.2.2) $$\mathcal{L} : \quad (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu) \longmapsto \left(-\frac{1}{\delta_1}\gamma_1^{\delta_1}, 0, \ldots, 0\right)$$

Il n'existe donc qu'un seul rayon propre γ. Il a pour coordonnées $(1, 0, \ldots, 0)$ et pour directeurs :

$$(10.2.3)\qquad \lambda_0 = -1\ ,\ \lambda \quad \dots\dots = \lambda_{\nu-1} = -1$$

C'est peut-être le cas le plus simple et le plus typique de champ à plusieurs niveaux. Il est évidemment en rapport étroit avec les systèmes différentiels à plusieurs niveaux étudiés aux sections 2.5 à 2.8. En effet, tout système différentiel local du type

$$(10.2.4)\qquad \frac{1}{s_1}\, t^{1+s_1} \frac{d}{dt}\, x_i = \lambda_i\, x_i \qquad\qquad (2 \leq i < \nu)$$

équivaut à un système dynamique local :

$$(10.2.5)\qquad \frac{d}{dt}\, x_1 = 1\ ,\ \frac{1}{s_i}\, x_1^{1+s_i} \frac{d}{dt}\, x_i = \lambda_i\, x_i \qquad\qquad (i \geq 2)$$

auquel on peut faire correspondre, après multiplication des seconds membres par $-\frac{1}{s_1}\, x_1^{1+s_1}$, le système dynamique local :

$$(10.2.6)\qquad \frac{d}{dz}\, x_1 = -\frac{1}{s_1}\, x_1^{1+s_1}\ ,\ \frac{d}{dz}\, x_i = -\frac{s_i}{s_1}\, \lambda_i\, x_1^{s_1 - s_i}\, x_i$$

qui est précisément celui du champ ${}^{\circ}X$ et qui admet pour intégrale formelle :

$$(10.2.7)\qquad x_1(z,u) = z^{-1/s_1}\ ,\ x_i = u_{i-1}\, e^{\lambda_i z^{p_i}} \qquad (2 \leq i \leq \nu\,;\, p_i = s_i/s_1)$$

Les rationnels p_i sont les <u>niveaux</u> des champs ${}^{\circ}X$ et X. Quant aux λ_i d'indice i tel que $p_i = p$, il est naturel de les appeler multiplicateurs de niveau p. Supposons les non résonnants (faute de quoi on serait en présence d'un problème à plusieurs générations). Le champ X possède alors, pour chacun des niveaux p atteints, une intégrale formelle $x(z_p, u)$ de niveau p, que l'on construit par un bon dosage de présolutions et de rétrosolutions (voir §§ 2.5, 2.6 et 10.4) en fonction du temps parallèle $z_p = z^p$. Cette intégrale est prograde en z_p . p est le plus bas des niveaux, et bigrade sinon. Elle est toujours résurgente en z_p, avec des transformées de Borel présentant éventuellement des coupures stellaires si la condition :

(10.2.8) $$X\ (x_1, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu)$$

qui est l'analogue de la condition (2.5.28), n'est pas remplie. Bien entendu, le réseau de résurgence de niveau p se forme comme en § 2.7 et, pour tout ω dans ce réseau, on a l'équation du pont, mais avec au second membre un opérateur $\mathbb{A}_\omega$ qui comprend maintenant un terme "précaire" en $A^0_\omega(u)\,\frac{\partial}{\partial z}$.

Exemple 2 :

Un champ local X sans partie linéaire et à plusieurs niveaux peut n'être pas conjugable à un champ de la forme (10.2.1), mais à un champ ${}^\circ X$ un peu moins élémentaire, d'intégrale formelle :

(10.2.9) $$x_1(\mathfrak{z}, u) = \mathfrak{z}^{-1/s} \quad , \quad x_i(\mathfrak{z}, u) = u_{i-1}\, e^{\lambda_i \mathfrak{z}^{p_i} + \sum_{q=1}^{p-1} \lambda_{i,q} \mathfrak{z}^q}\, \mathfrak{z}^{\tau_i}$$

avec un temps perturbé $\mathfrak{z}$ lié à z par $= \mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z}$. Cela modifie quelque peu l'allure de l'intégrale formelle du champ X mais ne change rien à la forme de ses invariants holomorphes.

Exemple 3 :

Soit un champ X analytique et formellement conjugué à un champ

(10.2.10) $${}^\circ X = \sum_{i=1}^{\sigma} Q_i(x_1, \ldots, x_\sigma) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=\sigma+1}^{\nu} Q_i(x_1, \ldots, x_\sigma)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les Q_i sont des polynômes homogènes en $x_1, \ldots, x_\sigma$ avec :

(10.2.11) $$\deg Q_1 = \deg Q_2 = \ldots \deg Q_{\sigma} = s_1 \geq 2 \quad \text{et} \quad \deg Q_i = s_i < s_1 \ \text{si}\ i > \sigma$$

Les niveaux atteints par X sont les $p_i = s_i / s_1$ comme à l'exemple 1. A chaque rayon propre γ du champ partiel $\sum_{i=1}^{\sigma} Q_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et à chaque niveau p effectivement atteint, correspond une intégrale formelle $x(\mathfrak{z}_p, u)$ du champ X , résurgente en $\mathfrak{z}_p$ et vérifiant l'équation du pont. Les invariants holomorphes de niveau p sont ici de la forme :

(10.2.12) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{p_i \geq p} A^i_\omega(u) u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{p_i < p} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{\sigma-1} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec

(10.2.13) $$A^0_\omega(u), A^1_\omega(u), \ldots A^{\nu-1}_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1,\ldots,u_{\sigma-1}]] \otimes \mathbb{C}[[u_i\ ;\ p_i < p]]$$

Exemple 4 :

Soit un champ X analytique et formellement conjugué à un champ

(10.214) $${}^\circ X = \sum_{i=1}^{\nu} \{ \lambda_i + P_i(x) \} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec des multiplicateurs λ_i présentant $\wp$ degrés de résonance positive et "disjointe", c'est-à-dire de la forme :

(10.2.15) $$\sum_{i \in I_j} m_i \lambda_i = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,\wp)$$

avec une partition $\bigcup I_j = \{1,\ldots,\nu\}$ $(I_j \cap I_k = 0 \text{ si } j \neq k)$ et avec des polynômes $P_i(x) \in \mathbb{C}[y_1,\ldots,y_m]$ tels que :

(10.2.16) $$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in I_1} m_i P_i(x) = y_1^{1+s_1} \\ \sum_{i \in I_j} m_i P_i(x) = -\frac{s_j}{s_1} y_1^{s_1 - s_j} y_j \end{array} \right. \qquad \left| \qquad \begin{array}{c} y_j = \prod_{i \in I_j} x_i^{m_i} \\ 2 \leq j \leq \wp \end{array} \right.$$

pour des entiers

(10.2.17) $$s_1 > s_2 > s_3 \ldots > s_\wp$$

Cela conduit, pour le champ ${}^\circ X$, à un système dynamique réduit :

(10.2.18) $$\frac{d}{dz} y_1 = -\frac{1}{s_1} y_1^{1+s_1}, \frac{d}{dz} y_j = -\frac{s_j}{s_1} y_1^{s_1 - s_j} y_j \qquad (j \geq 2)$$

et pour le champ X à des intégrales formelles de niveau :

(10.2.19) $$p_1 = 1 \ , p_2 = s_2/s_1 \ , \ldots , p_\wp = s_\wp / s_1$$

et de la forme

(10.2.20) $$x(z_p, u) = \sum u^{n(\omega)} \, z_p^{[n]} \, \phi^n(z_p)$$

avec des blocs élémentaires

(10.2.21) $$z_p^{[n]} = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\nu} \omega_j(n)\, z^{p_j}\Big) \quad (\omega_j \text{ linéaire en } n)$$

Pour un bon paramétrage en u , les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ peuvent encore se mettre sous la forme (10.2.12).

Cas des difféos :

Si maintenant on envisage des difféos analytiques et formellement conjugués à l'exponentielle $^o f$ de l'un ou l'autre des divers champs ^oX énumérés ci-dessus les intégrales formelles gardent évidemment la même forme mais il apparaît au niveau 1 (et seulement au niveau 1) un multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$. Ainsi :

Exemple 1bis :

Soit un difféo f analytique et formellement conjugué au difféo

(10.2.22) $$^o f : x_1 \longmapsto x_1 (1 + x_1^{\delta_1})^{-1/\delta_1} ; \; x_i \longmapsto x_i \exp\Big(-\lambda_i \frac{\delta_i}{\delta_1} x_0^{\delta_1 - \delta_i}\Big)$$

Aux niveaux $p < 1$ le difféo f possède des invariants $\mathbb{A}_\omega$ de la même forme que ceux du champ X de l'exemple 1 mais, contrairement au champ X , il possède aussi des invariants holomorphes de niveau 1 :

(12.2.23) $$\mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z} \Big\{ A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big\}$$

avec $\omega \in \Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ et $A^i_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1, \dots, u_{\nu-1}]]$.

Exemples 3bis et 4bis.

Soit un difféo f analytique et formellement conjugué au difféo $^o f = \exp {^oX}$ avec ^oX comme à l'exemple 3 ou 4. Ici encore, aux niveaux $p < 1$, f et X ont des invariants de même forme, mais au niveau 1, f a des invariants $\mathbb{A}_\omega$ plus riches que ceux de X , car indexés sur un réseau de résurgence Ω augmenté du multiplicateur imaginaire.

SECTION 10.3 : OBJETS A PLUSIEURS GENERATIONS.

Nous allons dans cette section examiner divers exemples illustrant les principaux types d'objets à plusieurs générations. Chaque génération n'aura qu'un seul niveau (en général égal à 1). Les cas où les diverses générations peuvent posséder plusieurs niveaux chacune seront examinés à la section suivante .

Les quatre premiers exemples servent surtout à préciser les notions de temps parallèles <u>élémentaire</u> et <u>perturbé</u>. Ceux qui suivent montrent comment se calculent et à quoi ressemblent les intégrales formelles de k-ème génération. Ils précisent aussi la forme des invariants holomorphes correspondants.

Nous considérons surtout des champs de vecteurs locaux $X = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ou, ce qui revient au même, des systèmes dynamiques $\frac{\partial}{\partial z} x_i = X_i(x)$. Nous dirons en fin de section un mot des difféos locaux.

Exemple 1 :

Soit le système dynamique :

$$(10.3.1)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} x_1 = -x_1^2 \\ \frac{\partial}{\partial z} x_2 = -x_2^2\, x_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} x_3 = -x_3^2\, x_2\, x_1 \\ \text{-------------------} \\ \frac{\partial}{\partial z} x_\nu = -x_\nu^2\, x_{\nu-1} \ldots x_2\, x_1 \end{cases}$$

Il admet pour solution particulière

$$(10.3.2)\quad x_1(z) = z^{-1}\,,\ x_2(z) = (\log z)^{-1}\,,\ x_3(z) = (\log\log z)^{-1} \ldots$$

et pour solution générale :

$$(10.3.3)\quad x_i(z, u) = (z_{i-1})^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

avec

$$(10.3.4)\qquad z_0 = u_0 + z \;,\; z_1 = u_1 + \log z_0 \;,\; z_2 = u_2 + \log z_1 \;, \ldots ,\; z_\nu = u_\nu + \log z_{\nu-1}$$

Comme d'habitude, nous considérons l'intégrale formelle comme définie modulo une translation sur z , ce qui permet de faire l'économie du paramètre u_0 . Les $x_i(z, u)$ se développent d'une façon unique en puissances entières négatives de $z, \underset{1}{z}, \underset{2}{z}, \ldots, \underset{\nu-1}{z}$ avec

$$(10.3.5)\qquad \underset{s}{z} = \log \ldots \log z \qquad (s-1 \text{ fois})$$

Les systèmes dynamiques analytiques formellement conjugués à (10.1.1) ont donc une seule intégrale <u>totalement prograde</u>, c'est-à-dire développable en puissances négatives des $\underset{i}{z}$. Nous verrons qu'il faut lui adjoindre $\nu-1$ intégrales formelles bigrades.

<u>Exemple 2</u> :

Soit $p_1, \ldots, p_\nu$ des entiers $\geqslant 1$ et soit le système dynamique :

$$(10.3.6)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dz} x_1 = -\dfrac{1}{p_1}\, x_1^{1+p_1} \\ \dfrac{d}{dz} x_2 = -\dfrac{1}{p_2}\, x_2^{1+p_2}\, x_1^{p_1} \\ \dfrac{d}{dz} x_3 = -\dfrac{1}{p_3}\, x_3^{1+p_3}\, x_2^{p_2}\, x_1^{p_1} \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \dfrac{d}{dz} x_\nu = -\dfrac{1}{p_\nu}\, x_\nu^{1+p_\nu}\, x_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} \ldots x_2^{p_2}\, x_1^{p_1} \end{array} \right.$$

Il admet pour solution particulière :

$$(10.3.7)\qquad x_i(z) = \Big(\underset{i-1}{z}\Big)^{-1/p_i} \qquad\qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

et pour solution générale :

$$(10.3.8)\qquad x_i(z, u) = \left(z_{i-1}\right)^{-1/p_i} \qquad\qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

avec z et z_i comme ci-avant. Ici encore, les systèmes dynamiques analytiques formellement conjugués à (10.1.6) ont une seule intégrale totalement prograde, mais elle fait intervenir des puissances fractionnaires des $\mathfrak{z}_{i-1}$.

Exemple 3 :

Les systèmes dynamiques du type :

$$(10.3.9)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\, x_1 = -\dfrac{x_1^2}{1+\rho_1(x_2,\dots,x_\nu)\,x_1} \\ - - - - - - - \\ \dfrac{d}{dz}\, x_i = -\dfrac{x_i^2}{1+\rho_i(x_{i+1},\dots,x_\nu)\,x_i} \displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} \dfrac{x_j}{1+\rho_j(x_{j+1},\dots,x_\nu)\,x_j} \\ - - - - - - - - \\ \dfrac{d}{dz}\, x_\nu = -\dfrac{x_\nu^2}{1+\rho_\nu\ \ x_\nu} \displaystyle\prod_{j=1}^{\nu-1} \dfrac{x_j}{1+\rho_j(x_{j+1},\dots,x_\nu)\,x_j} \end{cases}$$

avec $\rho_j(x_{j+1},\dots,x_\nu) \in \mathbb{C}\{x_{j+1},\dots,x_\nu\}$, ne sont pas équivalents, même formellement, au système (10.1.1), à moins évidemment que $\rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_\nu = 0$ et ils sont aussi irréductibles les uns aux autres (*). Les séries $\rho_i(x_{i+1},\dots,x_\nu)$ généralisent les résiduits ("résidus itératifs") scalaires des problèmes à une génération.

Le système (10.1.10) admet une solution particulière :

$$(10.3.10)\qquad x_i(z) = \dot{\mathfrak{z}}_{i-1}^{-1} \qquad\qquad (1 \leq 1 \leq \nu)$$

avec des temps parallèles perturbés $\dot{\mathfrak{z}}$ qui sont équivalent (pour $z \to \infty$) aux temps parallèles élémentaires $\mathfrak{z}_i$ de (10.1.5) et qui sont solutions "sans termes constants" du système :

(*) Chacun d'eux est formellement conjugable à un système apparemment plus simple, mais en réalité moins maniable, et qu'on obtient en supprimant les produits $\prod_{j=1}^{i-1}(\dots)$ aux seconds membres de (10.1.9).

$$(10.3.11)\quad \left\{\begin{array}{l} d\underset{0}{z} + \rho_1(\underset{1}{z}^{-1}, \underset{2}{z}^{-1}, \dots, \underset{v}{z}^{-1}) \dfrac{d\underset{0}{z}}{\underset{0}{z}} = dz \\ ------ \\ d\underset{i-1}{z} + \rho_i(\underset{i}{z}^{-1}, \underset{i+1}{z}^{-1}, \dots, \underset{v}{z}^{-1}) \dfrac{d\underset{i}{z}}{\underset{i}{z}} = \dfrac{d\underset{i+1}{z}}{\underset{i+1}{z}} \\ --------- \\ d\underset{v-1}{z} + \rho_v \dfrac{d\underset{v-1}{z}}{\underset{v-1}{z}} = \dfrac{d\underset{v}{z}}{\underset{v}{z}} \end{array}\right.$$

Quant à la solution générale du système dynamique (10.1.9), elle s'écrit

$$(10.3.12)\qquad x_i(z, u) = (z_{i-1})^{-1} \qquad (1 \leq i \leq v)$$

pour des z_i vérifiant le même système (10.1.11) que les $\underset{i}{z}$, mais comportant des termes constants $u_0, u_1, \dots, u_v$. Ainsi :

$$\log z_{v-2} = u_{v-1} + z_{v-1} + \rho_v \log z_{v-1} \qquad (\rho_v \in \mathbb{C})$$

$$\log z_{v-3} = u_{v-2} + z_{v-2} + \rho_{v-1;0}\, z_{v-2} + (\rho_{v-1,1} + \rho_v \rho_{v-1;0}) \log z_{v-2}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{v-1,n+1} + \rho_v \rho_{v-1,n}) \frac{z_{v-2}^{-n}}{n} \qquad \left(\rho_{v-1}(x_v) = \sum \rho_{v-1,n} x_v^n\right)$$

et plus généralement :

$$\log z_{v-i-1} = u_{v-i} + z_{v-i} + \dots$$

Tout système dynamique formellement conjugué à (10.1.9) admet une seule intégrale formelle totalement prograde. Celle-ci est développable en puissances négatives des $\underset{\hat{}}{z}$ (temps perturbés) ou, ce qui revient au même, en puissances négatives des $\underset{\hat{}}{z}$ et des $\underset{\lambda}{z}/\underset{\lambda+1}{z}$ (temps élémentaires). Bien entendu, il faut aussi envisager des intégrales bigrades (Voir ci-après).

Exemple 4 :

Le système dynamique :

$$(10.3.13)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz} x_1 = - \dfrac{x_1^{1+p_1}}{1 + \rho_1 (x_2, \dots, x_\nu)\, x_1^{p_1}} \\ - - - - - - \\ \dfrac{d}{dz} x_i = - \dfrac{x_i^{1+p_i}}{1 + \rho_i (x_{i+1}, \dots, x_\nu)} \displaystyle\prod_{j=1}^{i-1} \dfrac{x_j^{p_j}}{1 + \rho_j (x_{j+1}, \dots, x_\nu)\, x_j^{p_j}} \\ - - - - - \\ \dfrac{d}{dz} x_\nu = - \dfrac{x_\nu^{1+p_\nu}}{1 + \rho_\nu\, x_\nu^{p_\nu}} \displaystyle\prod_{j=1}^{\nu-1} \dfrac{x_j^{p_j}}{1 + \rho_j (x_{j+1}, \dots, x_\nu)\, x_j^{p_j}} \end{cases}$$

est au système (10.1.9) ce que le système (10.1.6) est au système (10.1.1). Il conduit à introduire des temps perturbés $\hat{z}$ qui vérifient encore le système (10.1.11), mais avec $\rho_i \left(z_j^{-1/p_j}\right)$ à la place de $\rho_i \left(z_j^{-1}\right)$. On montre qu'il n'y a jamais lieu d'introduire des temps perturbés plus complexes : ceux-ci suffisent à toutes les applications.

Pour ne pas nous embarasser de la complication, à la vérité bien mineure, que représente l'introduction des temps perturbés, nous allons supposer les ρ_i tous nuls dans les exemples qui suivent. Nous n'aurons ainsi affaire qu'aux seuls temps élémentaires.

<u>Exemple 5</u> :

Soit une partition $J_1 \cup J_2$ de l'ensemble $\{3, \dots, \nu\}$ et soit le système dynamique :

$$(10.3.14)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz} x_1 = -x_1^2 + \varepsilon\, \alpha_n^1\, x_1\, x^n \\ \dfrac{d}{dz} x_2 = -x_2^2 x_1 + \varepsilon\, \alpha_n^2\, x_2\, x^n \\ \dfrac{d}{dz} x_i = \lambda_i x_i + \varepsilon\, \alpha_n^i\, x_i\, x^n & \text{si } i \in J_1 \\ \dfrac{d}{dz} x_i = \lambda_i x_i x_1 + \varepsilon\, \alpha_n^i\, x_i\, x^n & \text{si } i \in J_2 \end{cases} \qquad \Bigg\| \; x^n = x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_\nu}$$

Au premier ordre en ε sa solution générale vaut :

$$(10.3.15)\qquad x_i(z, u) = {}^\circ x_i (z, u) \left(1 + \varepsilon\, u^n\, \alpha_n^i\, \Psi(z, u_1) + o(\varepsilon)\right)$$

avec $u^{n} = \prod_{i\in J_1} u_i^{n_i} \prod_{i \in J_2} u_i^{n_i}$ (pas de u_1) et avec :

(10.3.16)
$$\begin{cases} {}^{\circ}x_1(z,u) = z^{-1} \\ {}^{\circ}x_2(z,u) = (u_1 + \log z)^{-1} \\ {}^{\circ}x_i(z,u) = u_i\, e^{\lambda_i z} \\ {}^{\circ}x_i(z,u) = u_i\, z^{\lambda_i} \end{cases}$$

Quant à $\Psi(z,u_1)$ elle doit vérifier :

(10.3.17)
$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(z,u_1) = ({}^{\circ}x(z,u))^{n}/u^{n} = e^{\omega z} z^{\omega'-1}(u_1+\log z)^{-n_1}$$

avec $\omega = \omega(n) = \sum_{i\in J_1} n_i\lambda_i$ et $\omega' = \omega'(n) = 1 + \sum_{i\in J_2} n_i\lambda_i$. Parallèlement au temps primordial z, introduisons le temps de seconde génération $z_1 = \log z$. L'intégrale formelle $x(z,u)$ du système dynamique (13.1.14) qui est <u>résurgente en</u> z s'obtient en <u>prorésolvant</u> (13.1.17) si $\omega(n) \neq 0$ et en <u>rétrorésolvant</u> si $\omega(n) = 0$. Ainsi :

(10.3.18)
$$\begin{cases} \underline{\text{si } \omega(n)\neq 0} : \Psi(z,u_1) = e^{\omega z}\varphi(z,u_1) \text{ avec} \\ \varphi(z,u_1) = (\omega+\partial)^{-1} z^{\omega'-1}(u_1+\log z)^{-u_2} \text{ et} \\ \partial = \partial/\partial z \ ,\ (\omega+\partial)^{-1} = \omega^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-\partial/\omega)^{n} \end{cases}$$

(10.3.19)
$$\underline{\text{si } \omega(n) = 0} : \Psi(z,u_1) = \int e^{\omega' z_1}(u_1+z_1)^{-n_1}\, dz_1$$

Plus précisément, on doit dans (13.1.19) développer $e^{\omega' z_1}$ (resp. $(u_1+z_1)^{-n_1}$) en puissances croissantes (resp. décroissantes) de z_1, puis intégrer en z_1 et faire $z_1 = \log z$.

Pour obtenir l'intégrale formelle $x(z,u)$ qui est <u>résurgente en</u> il faut au contraire <u>prorésoudre</u> dans tous les cas. Si $\omega(n) \neq 0$, on doit donc prendre $\Psi(z,u_1)$, comme en (13.1.18) et si $\omega(n) = 0$ on doit prendre :

$$(10.3.20)\quad \begin{cases} \Psi(z, u_1) = z^{\omega'}\,\varphi(z, u_1) \quad \text{avec} \\ \varphi(z, u_1) = (\omega' + \partial_1)^{-1}\,(u_1 + z)^{-n_2} \\ \partial_1 = \partial/\partial z \ ; \ (\omega' + \partial_1)^{-1} = (\omega')^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial_1/\omega')^n \end{cases}$$

L'intégrale formelle résurgente en z vérifie l'équation du pont avec des $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

$$(10.3.21)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i \in J_1} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i \in J_2} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

pour $u^{n(\omega)} = \prod_i u_i^{n_i} \quad (i \in J_1)$, pour un indice ω parcourant le réseau $^0\Omega$ engendré par les λ_i tels que $i \in J_1$ et pour des coefficients

$$A^j_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1 \, ; u_i \, , i \in J_2]]$$

L'intégrale formelle résurgente en z_1 vérifie l'équation du pont avec des $\mathbb{A}_\omega$ de la forme :

$$(10.3.22)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n'(\omega)} \left\{ A^0_\omega \frac{\partial}{\partial z} + A'_\omega \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i \in J_1 \cup J_2} A^i_\omega\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

avec $u^{n'(\omega)} = \prod u_i^{n_i} \quad (i \in J_2)$, avec un indice $\omega = \omega'$ parcourant le réseau $^1\Omega$ engendré par les λ_i tels que $i \in J_2$ et avec des coefficients A^i_ω scalaires.

Dans un cas comme dans l'autre, la forme des $\mathbb{A}_\omega$ ne change pas quand on remplace $\Sigma\, \alpha^i_n x^n$ par une somme $\sum_n \alpha^i_n x^n$ (sans Σ) et qu'on résout exactement le système dynamique (13.1.14).

Exemple 6 :

Soit un entier $s \leq \nu/2$ et soit $I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_s$ une partition de l'ensemble $\{s+1, s+2, \ldots, \nu\}$. Soit le système dynamique :

$$(10.3.23)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\, x_1 = -x_1^2 & \\ \dfrac{d}{dz}\, x_i = -x_i^2 \prod_{j=1}^{i-1} x_j & (2 \le i \le s) \\ \dfrac{d}{dz}\, x_i = \lambda_i\, x_i & (si\ i \in I_1) \\ \dfrac{d}{dz}\, x_i = \lambda_i\, x_i \prod_{j=1}^{s-1} x_j & (si\ i \in I_k\ ,\ k>1) \end{cases}$$

Supposons pour simplifier que, pour tout k, les multiplicateurs λ_i d'indice $i \in I_k$ soient indépendants sur $\mathbb{Z}$. Tout système dynamique analytique et formellement conjugué à (13.1.23) possède, pour tout $k \in \{1,\dots,s\}$ une intégrale formelle de k-ème génération, résurgente en $\underset{k-1}{z}$ et dépendant de $\nu-1$ paramètres u_i qui se répartissent sur les s générations. On pose $\operatorname{gen} u_i = k$ si $i \in J_k$ ou si u_i est la constante d'intégration s'introduisant lors de la quadrature de l'équation :

$$\frac{d}{dz}\, x_k = -x_k^2 \prod_{j=1}^{k-1} x_j$$

Seule la dernière intégrale formelle (celle qui est résurgente en $\underset{s-1}{z}$) est totalement prograde. Les autres se calculent comme à l'exemple 5,en mêlant judicieusement développements progrades et développements rétrogrades. Pour chacune d'elles on a l'équation du pont :

$$(10.3.24)\qquad \dot{\Delta}_\omega\; x(\underset{k-1}{z}, u) = \mathbb{A}_\omega\; x(\underset{k-1}{z}, u) \qquad \left(\dot{\Delta}_\omega = {}^{\underset{k-1}{z}}\dot{\Delta}_\omega\right)$$

Ici $\dot{\Delta}_\omega$ désigne la dérivation étrangère pointée par rapport à $\underset{k-1}{z}$. L'indice ω parcourt le réseau ${}^{k}\Omega$ engendré par les multiplicateurs λ_i de k-ème génération $(i \in J_k)$ et aussi (si $k \geq 2$) par l'entier 1. Quant à l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$, il dépend évidemment de k et s'écrit :

$$(10.3.24)\qquad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u)\,\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\operatorname{gen} u_i \le k} A^0_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\operatorname{gen} u_i > k} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

Le facteur $u^{n(\omega)} = u^{n(\omega;k)}$ ne fait intervenir que les paramètres de k-ème génération. Les coefficients $A^{j}_{\omega}(u)$ se présentent comme séries entières en les paramètres u_i de génération $>k$. (Pour la dernière génération, $k=s$, ce sont des constantes). Enfin l'invariant précaire est toujours de la forme $A^{0}_{\omega}(u)\frac{\partial}{\partial z}$ et jamais $A^{0}_{\omega}(u)\frac{\partial}{\partial z_{k-1}}$.

Exemple 7 :

Soit une partition $I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_s$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ et soit le système dynamique

(10.3.24) $$\frac{d}{dz} x_i = P_i(x)$$

avec pour tout $i \in I_k$

(10.3.24bis) $$\begin{cases} P_i(x) \text{ quadratique homogène en les } x_j & (j \in I_k) \\ P_i(x) \text{ linéaire homogène en les } x_j & (j \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_{k-1}) \\ P_i(x) \text{ constant en les } x_j & (j \in I_{k+1} \cup I_{k+2} \cup \ldots I_s) \end{cases}$$

Si chaque I_j est réduit à un seul élément, on retombe sur l'exemple 1. Sinon, les systèmes dynamiques analytiques formellement conjugués à (13.3.24) possèdent N intégrales formelles progrades, autant exactement qu'il existe de systèmes arborescents de rayons propres (*) :

(10.3.25) $$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$$

A chacun de ces systèmes arborescents (**) et à chaque $k \leq s$ correspond une intégrale formelle $x(z_{k-1}, u)$ résurgente en z_{k-1} possédant un réseau de résurgence

(*) par exemple si ν est pair et si chaque I_j a deux éléments, on a en général $N = 3^{\nu/2}$

(**) Le rayon propre de k-ème génération, noté γ_k, est évidemment subordonné à un choix de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}$ si bien qu'on a effectivement une arborescence de rayons propres.

engendré par les multiplicateurs λ_i de k-ème génération et vérifiant l'équation du pont avec des opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ de la même forme qu'en (13.3.24).

Exemple 8 :

Si on fixe des entiers $r_1, \ldots, r_s \geq 1$ et si on remplace la condition (13.3.24bis) par la condition :

$$(10.3.26) \quad \begin{cases} \text{pour tout } i \in I_k \text{ le polynome } P_i(x) \text{ est :} \\ * \text{ homogène de degré } 1+r_k \text{ en les } x_j \quad (j \in I_k) \\ * \text{ homogène de degré } r_q \text{ en les } x_j \quad (j \in \bigcup_{q<k} I_q) \\ * \text{ constant en les } x_j \quad (j \in \bigcup_{q>k} I_q) \end{cases}$$

alors rien ne change par rapport à l'exemple précédent si ce n'est que le nombre N des intégrales formelles progrades augmente. Notons en particulier que les intégrales formelles $x(\underset{k-1}{z}, u)$ de k-ème génération sont, ici encore, résurgente en $\underset{k-1}{z}$ bien que leurs composantes $\phi^n(\underset{k-1}{z})$ fassent intervenir les puissances entières de $(\underset{k-1}{z})^{-1/r_k}$ et non de $(\underset{k-1}{z})^{-1}$.

Exemple 9 :

Les exemples 7 et 8 correspondent à un mode assez particulier d'emboîtement des résonances des générations successives : à chaque génération k, en effet, les seuls relations de résonance étaient des relations de nullité ($\lambda_i = 0$, λ_i : multiplicateur de k-ème génération), tandis que les autres multiplicateurs étaient supposés rationnellement indépendants. Supposons maintenant que le champ X présente à la première génération $\underset{1}{\nu}$ degrés de résonance (du type général $\sum m_i \lambda_i = 0$ et non plus nécessairement du type nul $\lambda_i = 0$), puis $\underset{2}{\nu}$ degrés de résonance (toujours de type général) à la deuxième génération, puis $\underset{3}{\nu}$ degrés de résonance à la troisième génération, et ainsi de suite jusqu'à la s-ème génération $(s < \nu)$. Les résultats restent alors les mêmes qu'aux exemples précédents, avec cette seule différence que le nombre N des intégrales formelles progrades est maintenant égal au nombre des systèmes arborescents de couples "graduation $\times$ rayon-propre" :

$$\{ \mathcal{H}_1, \gamma_1 \ ; \ \mathcal{H}_2, \gamma_2 \ ; \ \mathcal{H}_3, \gamma_3 \ ; \ \dots \ ; \ \mathcal{H}_s, \gamma_s \}$$

où γ_k désigne un rayon propre de la k-ème génération, relatif à une graduation $\mathcal{H}_k$ de la k-ème génération, elle-même relative à un choix de couples $\mathcal{H}_q, \gamma_q$ pour tout $q < k$.

Note sur les difféos à plusieurs générations.

Leurs intégrales formelles ont la même forme que pour les champs de vecteurs (systèmes dynamiques) à plusieurs générations. La seule différence concerne le réseau de résurgence Ω de première génération, qui comporte un générateur supplémentaire (le multiplicateur imaginaire $\lambda_0 = 2\pi i$) et les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ de première génération, qui comportent un facteur $e^{-n(\omega)\lambda_0 z}$ ($n(\omega) \in \mathbb{Z}$) périodique en z.

SECTION 10.4 : LE CAS QUI COIFFE TOUS LES CAS. LA GRANDE ARBORESCENCE ET LA RESURGENCE UNIVERSELLE.

Il est très rare en pratique, surtout en dimension ν faible, qu'un objet présente à la fois plusieurs niveaux et plusieurs générations, mais enfin cela peut arriver. Donnons-en quelques exemples, de généralité croissante, avant de passer à l'énoncé couvrant tous les cas.

Exemple 1 :

Soit $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ une partition de $\{4, 5, \dots, \nu\}$. Le système dynamique

$$(10.41) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{d}{dz} x_1 = -\frac{1}{s_1} x_1^{1+s_1} & \Big\| & \\ \frac{d}{dz} x_2 = -\frac{1}{s_2} x_2^{1+s_2} x_1^{s_1} & \Big\| & (s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{N}) \\ \frac{d}{dz} x_3 = -\frac{1}{s_3} x_3^{1+s_3} x_2^{s_2} x_1^{s_1} & \Big\| & \\ \frac{d}{dz} x_i = \frac{s_i}{s_1} \lambda_i x_i x_1^{s_1 - s_i} & \Big\| \ si\ i \in I_1 & (0 < s_i < s_1) \\ \frac{d}{dz} x_i = \frac{s_i}{s_2} \lambda_i x_i x_1^{s_1} x_2^{s_2 - s_i} & \Big\| \ si\ i \in I_2 & (0 < s_i < s_2) \\ \frac{d}{dz} x_i = \frac{s_i}{s_3} \lambda_i x_i x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3 - s_i} & \Big\| \ si\ i \in I_3 & (0 < s_i < s_3) \end{array} \right.$$

admet pour solution particulière

$$(10.4.2)\quad \begin{cases} x_1 = z^{-1/s_1} \;;\; x_2 = (\log z)^{-1/s_2} \;,\; x_3 = (\log\log z)^{-1/s_3} \\ x_i = \exp(\lambda_i\, z^{s_i/s_1}) \text{ si } i\in I_1 \;;\; x_i = \exp(\lambda_i (\log z)^{s_i/s_2}) \text{ si } i \in I_2 \\ x_i = \exp(\lambda_i (\log\log z)^{s_i/s_3}) \quad \text{si } i \in I_3 \end{cases}$$

Il faut donc, pour les systèmes dynamiques formellement conjugués à (10.4.1), considérer des intégrales résurgentes en $\underset{1}{z} = \log z$ en $\underset{2}{z} = \log\log z$ mais aussi en z^{s_i/s_1}, en $\underset{1}{z}^{s_i/s_2}$ et en $\underset{2}{z}^{s_i/s_3}$.

Exemple 2 :

Si on maintient les équations (10.4.1) pour $i \in \{1,2,3\} \cup I_1 \cup I_3$ mais si, pour $i \in I_2$, on les remplace par :

$$(10.4.3)\qquad \frac{d}{dz} x_i = \frac{s_i}{s_1} \lambda_i\, x_i\, x_1^{s_1 - s_i}\, x_2^{s'_i} \qquad (i \in I_2)$$

la solution particulière correspondante devient :

$$(10.4.4)\qquad x_i = \exp \lambda_i\, z^{s_i/s_1} (\log z)^{-s'_i/s_2}$$

Il faudra donc ici envisager aussi de la résurgence en

$$(10.4.5)\qquad z_{\rho_1,\rho_2} = z^{\rho_1}\, \underset{1}{z}^{\rho_2} = z^{\rho_1} (\log z)^{\rho_2} \qquad \left(\rho_1 = \frac{s_i}{s_1},\ \rho_2 = -\frac{s'_i}{s_2}\right)$$

Exemple 3 :

Soit $\bigcup\limits_q I_q \bigcup\limits_{(q,r)} I_{q,r}$ une partition de $\{1,\dots,\nu\}$ et soit le système dynamique

$$(10.4.6) \qquad \frac{d}{dz} x_i = Q_i(x) \qquad (Q_i(x) \text{ polynomial})$$

avec, si $i \in I_q$

$$(10.4.7) \quad \begin{cases} Q_i(x) \text{ homogène de degré } 1+s_q \text{ en } x_j \text{ pour } j \in I_q \\ Q_i(x) \text{ homogène de degré } s_k \text{ en } x_j \text{ pour } j \in I_k \ (k<q) \\ Q_i(x) \text{ constant en } x_j \text{ pour } j \notin I_1 \cup \dots I_q \end{cases}$$

et avec, si $i \in I_{q,r}$:

$$(10.4.8) \quad \begin{cases} Q_i(x) \text{ linéaire en } x_j \text{ si } j \in I_{q,r} \\ Q_i(x) \text{ homogène de degré } s_q - s_{q,r} \text{ si } j \in I_q \quad (s_{q,r} < s_q) \\ Q_i(x) \text{ homogène de degré } s_k \text{ en } x_j \text{ si } j \in I_k \quad (k<q) \\ Q_i(x) \text{ constant en } x_j \text{ si } j \notin I_1 \cup I_2 \dots I_q \cup I_{q,r} \end{cases}$$

Tout système dynamique formellement conjugué à (10.4.6) présente une arborescence (finie) de rayons propres $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ et, pour chaque suite $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$, il possède $(\forall k)$ une intégrale formelle résurgente en z et aussi $(\forall k, i)$ une intégrale formelle résurgente en $z_{k-1}^{s_k/s_{k,i}}$ $^{k-1}$.

Exemple 4 :

On peut bien sûr fabriquer un exemple qui soit à l'exemple 3 ce que l'exemple 2 est à l'exemple 1 et avoir ainsi, pour chaque suite $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ de rayons propres, des intégrales formelles résurgentes en

$$z_p = z_{p_0, p_1, p_2, \dots} = z^{p_0} \, z_1^{p_1} \, z_2^{p_2} \dots$$

Exemple 5 :

On peut avoir la même chose qu'à l'exemple 4, mais avec à chaque génération des relations de résonance de type général $\sum m_i \lambda_i = 0$ et non plus seulement de type nul $\lambda_i = 0$. Cela conduit à une double arborescence

$$\{ \mathcal{H}_1, \gamma_1 \; ; \; \mathcal{H}_2, \gamma_2 \; ; \; \mathcal{H}_3, \gamma_3 \; ; \; \dots \}$$

impliquant à la fois des graduations et des rayons propres. Là-dessus peut venir se greffer de la nihilence (niveaux infinis de première ou deuxième ou troisième... génération) et on est alors dans la situation la plus générale qui puisse se présenter.

Le moment est venu de donner l'énoncé qui couvre tout.

Proposition 10.4.1 (La grande arborescence et la résurgence universelle)

Considérons un objet analytique local $\mathcal{O}b$, c'est-à-dire soit un champ singulier $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $X_i(0)=0$, soit un difféo $f : x_i \mapsto f_i(x)$ qui laisse fixe l'origine. Notons comme toujours ν la dimension de l'objet.

1) Si l'objet présente de la résonance étalée sur r générations $(r<\nu)$, il possède un nombre fini N de branches $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire de suite :

(10.4.9) $$\{ \mathcal{H}_1^{\mathfrak{b}}, \gamma_1^{\mathfrak{b}} \; ; \; \mathcal{H}_2^{\mathfrak{b}}, \gamma_2^{\mathfrak{b}} \; ; \; \dots \; ; \; \mathcal{H}_s^{\mathfrak{b}}, \gamma_s^{\mathfrak{b}} \}$$

faites de graduations $\mathcal{H}_q^{\mathfrak{b}}$ et de rayons propres $\gamma_q^{\mathfrak{b}}$ de q-ème génération avec $1 \leq q \leq s = s(\mathfrak{b}) \leq r$. Chaque graduation $\mathcal{H}_q$ porte en général plusieurs rayons propres γ_q de différents niveaux, et à chaque rayon propre γ_q est associée une algèbre éclatée $\mathcal{A}^{[\gamma_q]}$ laquelle possède en général plusieurs graduations $\mathcal{H}_{q+1}$. Les N branches $\mathfrak{b}$ s'articulent donc comme les branches d'un arbre. Le tout constitue ce qu'on appelle la grande arborescence.

2) A chacune des N branches correspond une intégrale formelle totalement prograde de l'objet :

(10.4.10) $$x^{\mathfrak{b}}(z, u_1, \dots, u_{\nu-1}) = \left(x_1^{\mathfrak{b}}(z, u_1, \dots, u_{\nu-1}), \dots, x_\nu^{\mathfrak{b}}(z; u_1, \dots, u_{\nu-1}) \right)$$

Si l'objet est un champ X, $x^{\mathfrak{b}}(z, u)$ est solution du système différentiel :

(10.4.11) $$\frac{d}{dz} x_i(z, u) = X_i(x(z, u)) \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

et si l'objet est un difféo f , $x^{\mathfrak{b}}(z,u)$ est solution du système aux différences

(10.4.12) $$x_i(z+1,u) = f_i(x(z,u)) \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

Pour une branche $\mathfrak{b}$ donnée, l'intégrale formelle prograde $x_i^{\mathfrak{b}}(z,u)$ est essentiellement unique (*) et elle s'écrit :

(10.4.13) $$x^{\mathfrak{b}}(z,u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n \; z^{[n]} \; \varphi^n(z)$$

avec un multiindice n parcourant une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{Z}^{\nu-1}$ ayant la propriété de décomposition finie (**) et des monômes $u^n = u_1^{n_1}\dots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$.

3) Les $z^{[n]} = z^{[n_1,\dots,n_{\nu-1}]}$ sont des blocs élémentaires, c'est-à-dire des expressions du type :

(10.4.14) $$z^{[n]} = \exp\Big(\sum_p \omega_p(n)\, z_p\Big)$$

avec des temps parallèles élémentaires

(10.4.15) $$z_p = z_{p_0,p_1,\dots,p_r} = z^{p_0}\cdot(\log z)^{p_1}\cdot(\log\log z)^{p_2}\dots = z^{p_0} z_1^{p_1} z_2^{p_2}\dots$$

et avec des fréquences $\omega_p(n)$ qui sont linéaires en n (strictement ou modulo $q^{-1}\mathbb{Z}$).

4) Les coefficients qui entrent dans la définition des blocs élémentaires $z^{[n]}$ consituent un système complet d'invariants formels (***) primaires de l'objet.

(*) modulo une translation sur le temps z et des dilations sur les paramètres u_i .

(**) Cela veut dire que, pour tout multientier $n\in\mathcal{N}$, il n'existe qu'un nombre fini de $r\in\mathbb{N}$ et de multientiers $n^i\in\mathcal{N}$ et $\neq 0$ tels que $n=n^1+n^2+\dots n^r$.

(***) Ces invariants sont algébriques en l'objet mais on peut, par symétrisation sur l'ensemble des N branches $\mathfrak{b}$, en tirer un système complet d'invariants primaires rationnels en l'objet.

5) Pour tout multientier $n \in \mathcal{N}$ on peut, en retranchant de la composante $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle une série $\varphi(x^{\mathfrak{b}}(z,u))$ bien choisie (avec $\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x_1,\dots,x_\nu]]$), supprimer certains des termes de $\Phi^n(z)$, dits termes suppressibles. Il existe un choix (essentiellement unique) de variables $y_i = h_i(x)$ qui fait effectivement disparaître tous les termes suppressibles de toutes les composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale formelle. Les coefficients des termes qui restent (*) constituent un système complet d'invariants formels (**) secondaires de l'objet (***).

6) Pour chaque branche $\mathfrak{b}$, il existe des rationnels $r_0, r_1, \dots, r_s$ tels que les composantes $\Phi^n(z)$ de l'intégrale prograde $x^{\mathfrak{b}}(z,u)$ soient des séries entières en les expressions :

(10.4.16) $$z^{-1/r_0}, \; z_1^{-1/r_1}, \; \dots, z_s^{-1/r_s} \qquad (z_s = \log\dots\log z \;(s \text{ fois}))$$

ainsi qu'en les expressions correctrices :

(10.4.17) $$z_1/z, \; z_2/z_1, \; z_3/z_2, \dots, z_s/z_{s-1}$$

7) Si on recourt aux temps ad hoc que sont les temps perturbés :

(10.4.18) $$\mathfrak{z}_s \approx z_s$$

construits à partir des résiduits (résidus itératifs) généralisés (****) on peut se débarasser des expressions correctrices (10.4.17).

(*) pour chaque composante Φ^n , ils sont essentiellement en nombre fini.

(**) eux aussi sont algébriques et eux-aussi livrent, par symétrisation sur les branches $\mathfrak{b}$, des invariants rationnels.

(***) pour des exemples concrets (objets à 1 ou 2 générations) voir §6.5

(****) On les note $\rho(x)$. Ce sont des séries formelles en les x_i (voir §10.3, exemples 3 et 4) et leurs coefficients sont des invariants formels secondaires de l'objet.

8) Pour chacune des $\mathcal{N}$ branches $\mathfrak{b}$ il existe un nombre fini de temps parallèles critiques, c'est-à-dire de temps élémentaires z_P de la forme (10.4.16) et pour lesquels il existe au moins un $n \in \mathcal{N}$ tel que :

(10.4.19) $$z_P \sim \log z^{[n]} \qquad \text{quand } z \mapsto \infty$$

9) On classe les temps parallèles critiques z_P par vitesse de croissance à l'infini, ce qui revient à classer les indices $P = (p_0, p_1, \dots, p_s)$ par ordre lexicographique. D'où un ordre total $P < P'$. A chaque temps parallèle critique z_P sont associés ceux des paramètres u_i qui accompagnent les blocs $z^{[n]}$ vérifiant (10.4.19). On dit que P est l'ordre du temps z_P et de ses paramètres satellites u_i. En abrégé :

(10.4.20) $$P = \operatorname{ord} z_P = \operatorname{ord} u_i$$

10) A chacune des $\mathcal{N}$ branches $\mathfrak{b}$ et à chacun des temps parallèles critiques z_P correspond une intégrale formelle

(10.4.21) $$x(z_P, u) = x^{\mathfrak{b},P}(z_P, u)$$

résurgente en z_P ou, plus exactement, de composantes $\varphi^n(z_P)$ résurgentes en z_P. Cette intégrale est essentiellement unique et parfaitement constructible. Elle est prograde si z_P est le dernier des temps parllèles critiques. Sinon, elle est bigrade (*) .

11) Son "réseau" de résurgence Ω^P (c'est-à-dire l'ensemble des indices ω tels que les dérivations étrangères Δ_ω en z_P soient susceptibles d'agir sans les annuler sur les composantes φ^n) est engendré par les multiplicateurs λ_i d'ordre P.

(*) Lorsque le "réseau" Ω^P, ou plus exactement sa projection sur $\mathbb{C}$, contient un sous-groupe dense dans $\mathbb{C}$, la résurgence est de type monogène (voir §1.3.f). Lorsqu'il existe des termes croisés cruciaux, la résurgence est de type stellaire (voir §1.3.g). Ces deux complications peuvent se combiner.

Pour qu'un nombre complexe soit la projection $\dot{\omega}$ d'un élément ω de Ω^P, il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathcal{N}$ tel que :

(10.4.22) $$\lim_{z \to \infty} \frac{\log z_P}{\log z^{[n]}} = \dot{\omega}$$

12) L'intégrale formelle d'ordre P vérifie l'équation du pont :

(10.4.23) $$\dot{\Delta}_\omega \; x(z_P, u) = \mathbb{A}_\omega \; x(z_P, u) \qquad (\forall \omega \in \Omega^P)$$

où $\dot{\Delta}_\omega$ désigne la dérivation étrangère (pointée) en z_P et d'indice ω, et où $\mathbb{A}_\omega$ désigne un opérateur différentiel ordinaire de la forme :

(10.4.24) $$\mathbb{A}_\omega = u^{n^P(\omega)} \left\{ A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\operatorname{ord} u_i \geq P} A^i_\omega(u) u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\operatorname{ord} u_i < P} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

Le facteur (*)

(10.4.25) $$u^{n^P(\omega)} = \prod_{\operatorname{ord} u_i = P} u_i^{n_i^P(\omega)} \qquad \left(\dot{\omega} = \sum \lambda_i^* n_i^P(\omega)\right)$$

ne fait intervenir que les paramètres u_i d'ordre P. Les composantes $A^i_\omega(u)$ sont des séries formelles en les u_j pour $\operatorname{ord} u_j < P$. Le facteur précaire $A^0_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z}$ fait toujours intervenir le temps primordial z et non z_P.

13) Les $\mathbb{A}_\omega$ sont des invariants holomorphes de l'objet considéré. La réunion finie des NN' familles $\{\mathbb{A}_\omega ; \omega \in \Omega^P\}$ relatives à chacune des N branches $\mathfrak{b}$ et chacun des N' temps parallèles critiques z_P, constitue un système dénombrable d'invariants holomorphes de l'objet.

(*) Si z_P est le temps primordial et si l'objet est un difféo, il faut ajouter à $\mathbb{A}_\omega$ un facteur $e^{2\pi i n_0 z}$ périodique en z

14) Lorsqu'en outre l'objet présente, à tel ou tel de ses ordres P , de la quasirésonance ou de la nihilence active, il possède, en sus des invariants formels et holomorphes que nous venons de construire, une masse indifférenciée d'invariants métaholomorphes, essentiellement non constructibles.

SECTION 10.5. CRITERES UNIVERSELS DE CROISSANCE ET CONTRAINTES A PRIORI.

Les contraintes a priori auxquelles sont soumis les invariants holomorphes $\mathcal{A}_\omega$ d'un objet local $\mathcal{O}b$ sont dites exactes lorsqu'elles peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathcal{C}\left(I_1(\mathcal{O}b), I_2(\mathcal{O}b), \ldots\right) = 0 \tag{10.5.1}$$

pour des invariants scalaires $I_1(\mathcal{O}b), I_2(\mathcal{O}b)\ldots.$ (*) et une fonction $\mathcal{C}$ qui est analytique en chacun de ses arguments. Les contraintes qui ne sont pas de ce type sont dites contraintes de croissance. En fait, il est commode de distinguer trois types de contraintes : (i) exactes finies (ii) exactes infinies (iii) de croissance.

10.5.a. Contraintes exactes finies.

Elles sont du type (10.5.1) et n'impliquent qu'un nombre fini d'invariants scalaires. Ces contraintes sont fort simples et ont toutes été décritescas par cas, pour chaque classe discrète d'objet local. Elles se ramènent la plupart du temps à la nullité de certains coefficients des invariants "cruciaux" $\mathcal{A}_\omega$ qui correspondent à des ω extrémaux du réseau Ω . Voir par exemple la proposition 2.3.3. Pour les objets $\mathcal{O}b$ (champs ou difféos) laissant invariant une n-forme différentielle θ elles s'écrivent

(*) par exemple, les coefficients scalaires des opérateurs $\mathcal{A}_\omega$.

(10.5.2) $L_{\mathcal{A}} \cdot \theta = 0$ (voir §8.2)

Pour les difféos à torsion, elles se traduisent par l'invariance relativement à l'action de l'"étoile" :

(10.5.3) $\star \mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega$ (voir §7.5)

Enfin, pour les problèmes aux différences atteignant le niveau t^+, elles revêtent la forme un peu particulière qui a été signalée aux §§ 3.6 et 3.7.

10.5.b. Contraintes exactes infinies ou "contraintes en u"

Elles sont encore du type (10.5.1) mais impliquent une infinité d'invariants scalaires $I_i(\mathcal{O}\ell)$. En fait, elles ne concernent que les objets qui admettent plusieurs intégrales formelles (*) et elles relient les opérateurs $\mathcal{A}_\omega$ qui ont même indice ω mais qui sont relatifs à des intégrales formelles différentes (**). Ces contraintes sortent un peu du cadre de cet ouvrage (elles relèvent plutôt de la synthèse des objets locaux, c'est-à-dire du volume 4) mais nous devons quand même en dire un mot. Comme nous avons déjà rencontré, aux §§5.6 et 6.9, des exemples concrets de "contraintes en u ", nous nous contenterons ici de replacer la question dans la perspective "universelle" qui est celle de ce chapitre.

Problèmes unitemporels.

Cela veut dire qu'il n'y a résurgence que par rapport à un seul temps (en général z lui-même) mais n'empêche pas (quand $\rho^+ \geqslant 2$) l'existence de paramètres u_i de seconde génération, chacun d'eux étant accompagné d'un directeur

---

(*) donc le degré de résonance positive ρ^+ est $\geqslant 2$.

(**) ces intégrales formelles sont évidemment en nombre fini mais, puisque $\rho^+ \geqslant 0$, les $\mathcal{A}_\omega$ sont des séries en u et comportent donc chacun une infinité de coefficients scalaires.

λ_i . On fait alors $u_i \mapsto u_i t^{-\lambda_i}$ ou $u_i \mapsto t_i^{-\lambda_i}$ et on a, pour chaque $\mathbb{A}_\omega$, résurgence en t ou t_i , avec des équations de résurgence de la forme (6.9.37), qui épuisent les contraintes en u .

Problèmes multitemporels.

Cela veut dire qu'il y a résurgence par rapport à plusieurs temps parallèles $\mathfrak{z}_P$ (soit qu'il y ait plusieurs niveaux, ou plusieurs générations, ou les deux). Les résultats sont bien sûr plus compliqués, mais restent les mêmes dans leur principe. On se souvient (Voir proposition 10.4.1) qu'on a un ordre total sur les temps parallèles critiques $\mathfrak{z}_P = \mathfrak{z}_{p_0,p_1,\ldots,p_s}$ et chaque $\mathfrak{z}_P$ possède son cortège (fini, bien sûr) de paramètres u_i , qui sont dits paramètres d'ordre P ($\operatorname{ord} u_i = P$) et qui possèdent chacun des directeurs. On se souvient aussi que les $\mathbb{A}_\omega$ d'ordre P sont des séries entières en tous les u_i d'ordre $< P$ (strictement). Le résultat est qu'on a résurgence en les t_i associés à ces u_i (avec certaines complications lorsqu'il existe plusieurs temps parallèles $\mathfrak{z}_P$ strictement inférieurs à $\mathfrak{z}_P$).

Remarque sur les contraintes de croissance dans les problèmes multitemporels.

Soit un objet multitemporel et $\mathfrak{z}_P$ l'un de ses temps parallèles critiques. On a vu que l'intégrale formelle d'ordre P possédait des composantes $\phi^n(\mathfrak{z}_P)$ dont les transformées de Borel $\phi^n(\zeta_P)$ étaient en général(*) de croissance surexponentielle à l'infini. Or les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ d'ordre P ont pour coefficients, schématiquement, les "résidus" ou "termes singuliers dominants" de ϕ^n en des points ζ_P au dessus de ω . On serait donc tenté d'en inférer que les $\mathbb{A}_\omega$ croissent surexponentiellement en ω . Il n'en est rien : les $\mathbb{A}_\omega$ de niveau P , ou plus exactement les $\mathbb{A}_\omega^{\theta_2,\theta_1}$ qu'on leur adjoint grâce aux moules $E^\bullet_{\theta_2,\theta_1}$, sont de croissance exponentielle en ω et vérifient les mêmes contraintes de croissance (10.5.8) que dans les problèmes unitemporels. Pour plus de détails, voir les Appendices 1 et 2 (pp 586 et sq).

(*) sauf bien sûr si $\mathfrak{z}_P$ est le premier (i.e. le plus croissant) des temps parallèles critiques.

10.5.c. Contraintes de croissance ou "contraintes en ω "

Elles s'appliquent à des $\mathbb{A}_\omega$ relatifs à une même intégrale formelle mais d'indices ω différents. Elles ne sont pas du type exact (10.5.1) mais disent simplement que $\mathbb{A}_\omega$ ne croît pas trop vite quand ω croît. Bornons-nous à les donner dans le cas des objets unitemporels (*).

Munissant les invariants $\mathbb{A}_\omega$ d'une bonne norme $\|\cdot\|$ (**) on s'aperçoit d'abord que les $\mathbb{A}_\omega$ vérifient nécessairement une condition de croissance :

$$\|\mathbb{A}_\omega\| < c_1\, e^{c_2 |\omega| |\log \omega|} \qquad (c_1, c_2 \text{ constantes}) \tag{10.5.4}$$

mais qu'inversement (10.5.4) ne suffit pas à assurer l'existence d'un objet $\mathcal{O}b$ ayant les $\mathbb{A}_\omega$ pour invariants. Pour obtenir des contraintes de croissance qui soient nécessaires et suffisantes, il ne faut pas raisonner directement sur les $\mathbb{A}_\omega$, mais leur associer des opérateurs différentiels $\mathbb{A}_\omega^{\theta_2,\theta_1}$ d'ordre $\geqslant 1$.

Pour tous θ_1, θ_2 réels et tels que $0 \leq \theta_2 - \theta_1 < \pi$, posons :

$$(10.5.5)\quad \begin{cases} E_{\theta_2,\theta_1}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0 \text{ si l'on n'a pas } \theta_1 \leq \arg\omega_1 \leq \arg\omega_2 \leq \dots \arg\omega_r \leq \theta_2 \\ E_{\theta_2,\theta_1}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \dfrac{1}{r_1!\dots r_s!} \text{ si } \theta_1 \leq \arg\omega_1 \leq \arg\omega_2 \leq \dots \arg\omega_r \leq \theta_2 \\ \text{et si la suite } \arg\omega_i \text{ prend } r_1 \text{ fois sa plus petite valeur, } r_2 \text{ fois} \\ \text{la valeur suivante} \dots \text{ et } r_s \text{ fois sa plus grande valeur.} \end{cases}$$

(*) i.e. dont toutes les intégrales formelles sont résurgentes par rapport à un même temps z_p , qui est en général le temps primordial z .

(**) pour des opérateurs $\mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)}\left\{A_\omega^0 \frac{\partial}{\partial z} + \sum A_\omega^i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right\}$ à coefficients scalaires, on peut prendre $\|\mathbb{A}_\omega\| = |u^{n(\omega)}| \sum_i |A_\omega^i|$

Le moule $\dot{\mathbf{E}}_{\theta_2,\theta_1}$ est une variante symétrale du moule rotationnel $R^{\bullet}$, lequel est alternal. Voir (1.4.34).

Proposition 10.5.1 (Contraintes universelles de croissance)

Une famille $\{\mathbb{A}_\omega \,,\, \omega \in \Omega\}$ d'opérateurs différentiels (*) est la famille d'invariants holomorphes d'un objet unitemporel $\mathcal{O}b$ si et seulement si, pour toutes directions θ_1, θ_2 d'angle $\theta_2 - \theta_1 \geqslant 0$ et $< \pi$, l'opérateur suivant (**) :

$$(10.5.6)\quad \mathbb{A}^{\theta_2,\theta_1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in \Omega} \mathbf{E}_{\theta_2,\theta_1}^{\omega_1,\dots,\omega_r} e^{-(\dot{\omega}_1 + \dots \dot{\omega}_r)t} \mathbb{A}_{\omega_r} \dots \mathbb{A}_{\omega_2} \mathbb{A}_{\omega_1}$$

converge pour $\operatorname{Arg} t = -\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ et t assez grand.

Cela revient à dire que, munis d'une bonne norme $\|\cdot\|$, les opérateurs :

$$(10.5.7)\quad \mathbb{A}_{\dot{\omega}}^{\theta_2,\theta_1} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\dot{\omega}_1 + \dots \dot{\omega}_r = \dot{\omega}} \mathbf{E}_{\theta_2,\theta_1}^{\omega_1,\dots,\omega_r} \mathbb{A}_{\omega_r} \dots \mathbb{A}_{\omega_2} \mathbb{A}_{\omega_1}$$

sont soumis à des restrictions de croissance :

$$(10.5.8)\quad \| \mathbb{A}_\omega^{\theta_2,\theta_1} \| < c_1 \, e^{c_2 |\omega|}$$

beaucoup plus sévères que les restrictions (10.5.4) imposées aux $\mathbb{A}_\omega$.

L'interprétation des contraintes de croissance est particulièrement simple lorsque le réseau Ω est porté par une seule droite. Voir à ce sujet § 6.4 et § 11.2.

(*) évidemment supposés satisfaire aux contraintes exactes propres à une classe discrète d'objets locaux.

(**) qui n'est pas une dérivation mais un automorphisme formel (puisque le moule $\dot{\mathbf{E}}_{\theta_2,\theta_1}$ est symétral).

SECTION 10.6. NOTE SUR LA CLASSIFICATION GEVREY DES OBJETS GEVREY

Nous avons dans ce livre classé les objets locaux analytiques, c'est-à-dire définis par des séries de Taylor de classe de Gevrey 1. On peut aussi se proposer de classer les objets K-croissants (c'est-à-dire aux coefficients de Taylor soumis à des contraintes de croissance moins sévères: par exemple la croissance de classe Gevrey $1+\theta$ avec $\theta > 0$) par rapport aux changement de variables eux-mêmes K-croissants (*). Cela a un sens pourvu que la K-croissance en question soit stable par addition (des séries de Taylor), multiplication, composition (substitution) et prise de l'inverse de composition. (Les deux dernières conditions sont les plus restrictives et aussi les plus importantes : elles nous assurent que les changements de variables K-croissants forment un groupe). En ce qui concerne les classes de Gevrey $1+\theta$, ces quatre conditions de stabilité sont satisfaites si et seulement si $\theta \geqslant 0$. La classe analytique est donc la plus petite classe Gevrey (et aussi la plus petite classe de K-croissance) pour laquelle se pose un problème de classification.

La classification formelle est évidemment identique pour toutes les K-croissances, mais la K-classification, tout comme la classification analytique, fait aussi intervenir des K-invariants qui peuvent être de deux types : holomorphes ou métaholomorphes.

10.6.a. K-invariants holomorphes.

Ceux-ci n'existent que si la condition de croissance K n'est pas trop lâche (le critère est le suivant : pour chaque classe discrète $\mathcal{C}$ d'objets locaux, la K-croissance doit être plus stricte qu'une certaine croissance Gevrey d'ordre $1+\theta(\mathcal{C})$ avec $\theta(\mathcal{C})$ fonction du ou des niveaux κ des objets de $\mathcal{C}$) mais, lorsqu'ils existent, les K-invariants holomorphes fondamentaux ont la même expression que les invariants holomorphes analytiques. Plus précisément, ce sont

(*) Pour la notion de K-croissance, voir [E2], chapitre 8.

toujours les mêmes opérateurs $\mathcal{A}_\omega$, mais "prolongés analytiquement" des domaines $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}na$ aux domaines $\mathcal{C} \cap K$ (*).

Ces $\mathcal{A}_\omega$ sont toujours calculables à partir de l'équation du pont, mais les composantes $\varphi^n(z)$ des intégrales formelles ont maintenant des transformées de Borel $\phi^n(\zeta)$ qui n'ont plus la croissance exponentielle, mais sont $\mathbf{K}$-croissantes, pour une condition $\mathbf{K}$ facilement déduisible de la condition K (voir [E2], § 12.e). Il en résulte que les critères universels de croissance (10.5.4) et (10.5.8) n'ont plus cours et qu'ils doivent être remplacés par des conditions plus lâches, facilement exprimables en fonction de $\mathbf{K}$ (voir [E2], § 12.e).

Bien entendu, ces contraintes de croissance sur les invariants $\mathcal{A}_\omega$ seront d'autant plus lâches que K sera plus lâche. Par suite, si K_1 est plus forte que K_2 , certaines séries :

(10.6.1) $$I(\mathcal{O}b) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \mathcal{A}_\omega(\mathcal{O}b) \qquad (c_\omega \in \mathbb{C})$$

peuvent très bien converger pour tout $\mathcal{O}b \in \mathcal{C} \cap K_1$ et diverger pour certains $\mathcal{O}b \in \mathcal{C} \cap K_2$. En ce sens très superficiel on peut dire que la quantité des invariants holomorphes diminue quand K s'affaiblit. <u>Il n'empêche que le fait remarquable est la permanence, pour tous les K , d'une même famille d'invariants holomorphes fondamentaux, à savoir les $\mathcal{A}_\omega$, dont tous les autres se déduisent</u>.

10.6.b. K-invariants métaholomorphes.

Comme pour les objets analytiques, ils sont exceptionnels et ne peuvent provenir que de deux sources : nihilence (petits diviseurs) et quasirésonance (tout petits diviseurs). Une remarque cependant. Tout comme les K-invariants holomorphes,

(*) Ici $\mathcal{C}$ désigne évidemment une classe discrète d'objets locaux et $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}na$ (resp. $\mathcal{C} \cap K$) représente la partie de $\mathcal{C}$ formée des objets analytiques (resp. K--croissants).

les K-invariants métaholomorphes issus de la nihilence disparaissent lorsque la K-croissance passe un certain seuil de faiblesse. Au contraire, les invariants métaholomorphes issus de la quasirésonance se maintiennent toujours, pourvu que la quasirésonance s'accentue à proportion que K se relâche. Autrement dit, plus K est faible, plus les multiplicateurs λ_i de l'objet doivent être liouvilliens.

Remarque : Même pour les objets les plus simples, la géométrie ne permettrait pas le calcul des K-invariants holomorphes. C'est normal en un sens puisque les objets K-croissants sont eux-mêmes non géométriques. Mais cela montre que, dans ces questions d'invariance, la géométricité des objets analytiques est accessoire.

SECTION 10.7. THEOREMES DE TRANSCENDANCE.

On peut, au choix, considérer que les fonctions résurgentes attachées aux objets locaux sont aux fonctions analytiques ce que les nombres (ou fonctions) algébriques sont aux nombres (ou fonctions) rationnels, ou encore ce que les nombres (ou fonctions) transcendants sont aux nombres (ou fonctions) algébriques.

La première analogie s'accorde bien avec le phénomène de l'enrichissement algébrique : de même que toute extension algébrique des corps $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ fait naître de nouveaux automorphismes, toute extension de l'algèbre des fonctions analytiques locales par une ou plusieurs fonctions résurgentes provoque l'apparition de nouvelles dérivations (les dérivations étrangères) et parfois (*) aussi de nouveaux automorphismes (déduits des dérivations étrangères par exponentiation).

Pourtant, c'est la seconde analogie qui va nous guider ici. Il se trouve en effet que les fonctions résurgentes naturelles (disons : issues d'objets locaux) ne sont soumises à aucunes autres relations (**) que celles auxquelles on s'attend, à savoir les équations qu' les définissent ainsi que celles qu'on peut en déduire

(*) voir § 11.11

(**) faisant intervenir les trois lois $+$, $\times$, $\circ$ et ayant pour coefficients des fonctions analytiques.

élémentairement.

En soi, ces résultats n'ont rien de surprenant. Ce qui est remarquable, c'est l'aisance avec laquelle on peut les établir — aisance qui tranche avec l'extrême difficulté propre à tous les problèmes de nombres transcendants. Ainsi, bien qu'il y ait tout lieu de parier que $\pi^e + e^\pi$ ainsi que $e^{(\log\log p)(\log\log q)}$ sont transcendants $(p, q \in \mathbb{N})$ et que ces nombres sont algébriquement indépendants les uns des autres, on ne dispose d'aucune méthode générale pour aborder ces questions. Même les rares résultats qu'on connaisse, comme le théorème de A. BAKER qui affirme la transcendance de :

(10.7.1) $$e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\ldots\alpha_n^{\beta_n} \qquad (\alpha_i \text{ et } \beta_i \text{ algébriques non nuls})$$

n'admettent que des démonstrations d'une extrême technicité (*).

Il en va tout autrement pour les fonctions résurgentes qui sont solutions d'équations ou de systèmes à coefficients analytiques. Les théorèmes de transcendance relatives à ces fonctions s'établissent par deux méthodes très générales et très simples dans leur principe.

La première méthode vaut pour un nombre fini de fonctions résurgentes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Elle utilise l'automorphisme dpl, dit "forme déployée" (**), qui permet, à partir de toute relation (***) présumée

(10.7.2) $$R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

de tirer une relation :

(10.7.3) $$R(\mathrm{dpl}\,\varphi_1, \mathrm{dpl}\,\varphi_2, \ldots, \mathrm{dpl}\,\varphi_n) = 0$$

(*) D'après J. DIEUDONNE ("Panorama des Math. Pures") dont nous tirons cet énoncé.

(**) Voir Proposition 1.3.12.

(***) à coéfficients analytiques et faisant intervenir les trois lois $+, \times, \circ$.

qui fait intervenir la "vraie" variable z et l'infinité des pseudovariables

(10.7.4) $$Z^{\omega_1,\ldots,\omega_r} = \underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\ldots,\omega_r} \; e^{-(\dot\omega_1+\ldots\dot\omega_r)z}$$

et qui se traduit, en prenant les coefficients de chaque $\underset{\bullet}{Z}^{\omega_1,\ldots,\omega_r}$, par des relations :

(10.7.5) $$R_{\omega_1,\ldots,\omega_r}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r) = 0$$

lesquelles sont "si nombreuses" qu'on conçoit intuitivement qu'elles ne peuvent être simultanément vérifiées. Cela peut se démontrer rigoureusement dans chaque cas donné, en utilisant le lemme de non-miscibilité des exponentielles et des séries de puissances (pour l'énoncé du lemme, voir [E2] lemme 11b1, et pour des exemples d'applications, voir [E2] § 11b).

La <u>deuxième méthode</u> s'applique aux théorèmes de transcendance qui portent sur une <u>infinité</u> de fonctions résurgentes φ_i. On montre l'impossibilité de relations non triviales du type :

(10.7.6) $$R(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots) = 0 \qquad (*)$$

en utilisant l'automorphisme rst, dit "forme déployée" (**), qui permet, à partir de (10.7.6), de déduire :

(10.7.7) $$R(\mathrm{rst}\,\varphi_1,\mathrm{rst}\,\varphi_2,\mathrm{rst}\,\varphi_3,\ldots) = 0$$

et d'aboutir, ici encore, à une contradiction.

Enonçons une application frappante de ces théorèmes de transcendance.

(*) le passage à la limite s'effectuant pour une topologie naturelle, qui est fonction de Ω. Voir [E2], chapitre 11.

(**) Voir Proposition 1.3.13.

Proposition 10.7.1 ($\mathbb{G}^\nu$ non de Lie).

Le groupe $\mathbb{G}^\nu$ de tous les difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu_{,0}$ qui sont tangents à l'identité (*) est le contraire exact d'un groupe de Lie en ce sens précis que si ${}^1g, {}^2g, \dots {}^rg$ sont des éléments de $\mathbb{G}^\nu$ et ${}^1X, {}^2X, \dots {}^rX$ leurs générateurs infinitésimaux formels, aucune somme $\sum \lambda_{i_j}\, {}^jX$ ni aucun crochet de Lie $[{}^iX, {}^jX]$ ni aucune combinaison finie de sommes et de crochets, aussi complexe soit-elle, ne peut jamais (hors cas triviaux) livrer un résultat de la forme ${}^0X$ avec ${}^0X$ générateur d'un ${}^0g \in \mathbb{G}^\nu$.

Principe de la démonstration :

Il est la même que pour la proposition 11b3 de [E2] et son corollaire (relatifs au cas $\nu = 1$) mais avec cette différence qu'il faut maintenant distinguer le cas où les différents ${}^ig$ ont des raysons propres tous distincts ou partiellement coïncidant.

(*) ils sont étudiés au chapitre 5.

CHAPITRE 11 : CONCLUSION ET COMPLEMENTS

SECTION 11.1 : APERCU SUR LA SYNTHESE CONSTRUCTIVE. COMPLETUDE ET LIBERTE DES SYSTEMES D'INVARIANTS.

Deux problèmes fondamentaux se posent à propos des objets locaux : l'analyse, c'est-à-dire le calcul de leurs invariants, et la synthèse, ou reconstitution des objets à partir de leurs invariants. Ce tome 3 était consacré à l'analyse. La synthèse sera traitée au tome 4, mais il est permis d'en dire un mot dans ce chapitre final, d'autant plus que certaines questions, telles la complétude et surtout la liberté des systèmes d'invariants, sont à cheval sur les deux sujets.

La méthode générale pour établir la COMPLETUDE des systèmes d'invariants consiste :

(i) à partir d'une paire d'objets $\mathcal{O}b_1$ et $\mathcal{O}b_2$ ayant mêmes invariants formels et holomorphes (*)

(ii) à construire un changement de variable $h : x_i \longmapsto h_i(x)$ conjuguant $\mathcal{O}b_1$ à $\mathcal{O}b_2$.

(iii) à montrer qu'il est soit analytique soit résurgent en certaines variables z liées aux x_i .

(iiii) à vérifier, à partir de l'équation du pont et au moyen de manipulations formelles très simples, que toutes les dérivées étrangères (en ces variables z) sont nulles, ce qui implique (compte tenu de la croissance exponentielle dans le modèle convolutif) l'analycité de h (**).

Discuter la LIBERTE des invariants A_ω revient à décrire toutes les contraintes a priori auxquelles ils sont soumis. Cela a été fait à la section 10.6, où nous avons vu qu'il était commode de distinguer les contraintes de croissance, dont

(*) travaillons pour simplifier sur une classe discrète où n'existent pas d'invariants métaholomorphes.

(**) Pour un exemple, voir [E2]. Pour les objets à plusieurs niveaux, ce sont les intégrales formelles de plus haut niveau qui croissent exponentiellement.

le nom tient presque lieu de définition, et les contraintes exactes, qui s'expriment par des relations analytiques entre invariants scalaires (contraintes finies et contraintes infinies ou "contraintes en u ").

Il est facile de montrer qu'il n'y a pas d'autres contraintes exactes que celles qu'on a énumérées cas par cas, dans les différents chapitres de ce livre. Pour toute classe discrète $\mathcal{C}$ d'objets locaux, on prend n'importe quel $\mathcal{O}b$ dans $\mathcal{C}$, on calcule ses invariants $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b)$, puis on leur imprime des variations infinitésimales $\delta\mathbb{A}_\omega$ telles que les $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b)+\delta\mathbb{A}_\omega$ vérifient toutes les contraintes (exactes et de croissance) et enfin on construit un objet $\mathcal{O}b+\delta\mathcal{O}b$ qui admette les $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b)+\delta\mathbb{A}_\omega$ pour invariants. Soit :

$$\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b+\delta\mathcal{O}b) = \mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b)+\delta\mathbb{A}_\omega \tag{11.1.1}$$

$$\delta\mathcal{O}b = L(\mathcal{O}b, T, \delta\mathbb{A}_\omega) \tag{11.1.2}$$

Dans la seconde formule, $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ désigne une fonction linéaire explicitable des $\delta\mathbb{A}_\omega$, qui dépend évidemment aussi de $\mathcal{O}b$ et d'une infinité de paramètres arbitraires, symbolisés ici par T.

La construction est explicitée en [E2] pour les difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité. Voir les intégrales (13c8), (13c9), (13c16) qui définissent $\delta\mathcal{O}b$ (ici δf) géométriquement, c'est-à-dire dans les modèles sectoriels. Le procédé s'adapte aux autres objets locaux, facilement lorsque l'intégrale formelle est unique (par exemple pour les champs de vecteurs à un degré de résonance) et moins facilement lorsqu'il y en a plusieurs (par exemple pour les difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu$ qui sont tangents à l'identité : quand $\nu \geq 2$ les "contraintes en u " introduisent des complications techniques). Pour les détails, voir [E4].

Ce raisonnement montre qu'on n'a oublié aucune contrainte exacte; mais on pourrait avoir oublié des contraintes de croissance (ou d'un autre type, auquel on n'aurait pas songé!). Pour montrer qu'il n'en est rien, il faut achever la synthèse, c'est-à-dire, partant de n'importe quelle famille de $\mathbb{A}_\omega$ satisfaisant à toutes les contraintes (exactes et de croissance) que l'on connaît, montrer l'existence, dans la classe discrète envisagée, d'un objet analytique $\mathcal{O}b$ tel que $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b) = \mathbb{A}_\omega$. Ceci peut se faire de plusieurs manières :

(i) Méthodes géométriques non constructives.

Une telle méthode a été trouvée par B. MALGRANGE [Mal] pour les difféos de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité et une méthode apparentée à été exposée par MARTINET-RAMIS [M-R 1,2] pour les champs résonnants de dimension 2. Elles reposent l'une et l'autre sur le théorème de Nirenberg. Il ne semble pas qu'elles puissent s'étendre à tous les objets locaux.

(ii) Méthode géométrique constructive.

On fixe un objet $\mathcal{O}b^\circ$ formellement conjugué à $\mathcal{O}b$ et aussi simple que possible; on calcule ses invariants $\mathbb{A}^\circ_\omega = \mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b^\circ)$ et on choisit une famille d'invariants $\mathbb{A}^t_\omega$ dépendant d'un paramètre $t \in [0\,1]$, vérifiant :

$$\mathbb{A}^\circ_\omega = \mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b^\circ) \quad , \quad \mathbb{A}^1_\omega = \mathbb{A}_\omega \qquad (\forall \omega) \tag{11.1.3}$$

et satisfaisant, pour tout t , à l'ensemble des contraintes connues (exactes et de croissance). On cherche ensuite des objets $\mathcal{O}b^t$ tels que $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b^t) = \mathbb{A}^t_\omega$. Pour cela on reprend les notations de (11.1.2) et on résout le système :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \mathcal{O}b^t = L\left(\mathcal{O}b^t, T^t, \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}^t_\omega\right) \tag{11.1.4}$$

en réglant (sur la base d'estimations a priori) les paramètres T^t de manière à pouvoir résoudre (1.1.4) sur tout le segment $[0\,1]$. En pratique, on raisonne plutôt sur des systèmes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\; x^t(z,u) = L^*\left(x^t(z,u) , T^t , \frac{\partial}{\partial t}\, x^t(z,u)\right) \tag{11.1.5}$$

où $x^t(z,u)$ représente la (ou les) intégrale(s) formelle(s) de $\mathcal{O}b^t$, envisagée(s) dans les modèles sectoriels. Cela conduit en pratique à des équations aux dérivées partielles. Pour un exemple concret, relatif aux difféos de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité, voir [E2] p.455.

(iii) Méthode non géométrique mais toujours constructive.

Contrairement à la méthode (i), la méthode (ii) est constructive mais, comme elle, elle ne s'applique ni aux objets analytiques d'une certaine complexité ni à aucun des objets Gevrey ou K-croissants (voir §10.6). On peut toutefois l'étendre à ces deux cas (et donc à tous les cas) au prix d'une modification minime qui consiste à résoudre (11.1.5) non dans les modèles sectoriels, mais dans le modèle convolutif.

SECTION 11.2. APERCU SUR LA SYNTHESE CANONIQUE. LES CAS BILATERAL, SESQUILATERAL, UNILATERAL.

On peut faire mieux que montrer l'existence d'objets répondant à une famille donnée d'invariants $\mathbb{A}_\omega$: on peut chercher, dans la classe analytique définie par les $\mathbb{A}_\omega$, des représentants "remarquables". De fait, dans beaucoup de classes analytiques d'objets locaux, on a une notion naturelle de représentants canoniques. Bien que rarement uniques, ceux-ci présentent tout de même un grand intérêt, car ils sont en un sens les représentants les plus réguliers de leur classe , ceux qu'on peut prolonger analytiquement le "plus loin" et en rencontrant le "moins de singularités".

Illustrons cette notion de canonicité sur les deux cas les plus simples qui soient : celui des équations analytiques formellement conjuguées à l'équation d'Euler :

$$(11.2.1) \qquad t^2 \frac{d}{dt} y + y = 0 \qquad\qquad (y = y(t))$$

et celui des difféos de $\mathbb{C}$ formellement conjugués à l'homographie :

$$(11.2.2) \qquad t \longmapsto t/1 + 2\pi i t$$

Si on fait le changement de variable $t = z^{-1}$ pour se transporter au voisinage de l'infini, cette équation et ce difféo se simplifient encore. Ils deviennent :

$$(11.2.3)\qquad \frac{d}{dz} Y = Y \qquad\qquad (Y = Y(z))$$

$$(11.2.4)\qquad z \longmapsto z + 2\pi i \qquad (*)$$

Les équations analytiques formellement conjuguées à (11.2.3) sont de la forme

$$(11.2.5)\qquad \frac{d}{dz} y = y + \sum b_{m,n} z^{-m} y^{n} \qquad \begin{cases} \sum b_{m,n} z^{-m} y^{n} \in \mathbb{C}\{z^{-1}, y\} \\ b_{0,0} = b_{0,1} = 0 \ ; \ b_{1,1} = 2 b_{1,0} b_{0,2} \end{cases}$$

et les difféos formellement conjugués à (11.2.4) sont de la forme

$$(11.2.6)\qquad f : \quad z \longmapsto z + 2\pi i + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad \left(f(z) - z \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}\right)$$

On se souvient (voir §2.2 et §5.4) que les intégrales formelles de (11.2.5) et (11.2.6) vérifient respectivement des équations de résurgence de la forme

$$(11.2.7)\qquad \dot{\Delta}_n \ x(z,u) = A_n \ u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} x(z,u) \qquad (A_n \in \mathbb{C} ; n = -1, 1, 2, \ldots)$$

$$(11.2.8)\qquad \dot{\Delta}_{2\pi i n} \ x(z,u) = e^{-2\pi i n z} A_n \frac{\partial}{\partial z} x(z) \qquad (A_n \in \mathbb{C} ; n \in \mathbb{Z}^*) \ (*)$$

Les objets (11.2.5) et (11.2.6) admettent donc respectivement les familles d'invariants :

(*) le choix de $2\pi i$ comme pasde translation n'a rien d'essentiel, mais permet de mettre les difféos (11.2.4) et leurs conjugués plus commodément en rapport avec les équations (11.2.3) et leurs conjuguées.

(**) nos conventions conduiraient plutôt à noter $A_{2\pi i n}$ les scalaires de (11.2.8), mais pour le rapprochement avec (11.2.7) il est commode d'omettre le $2\pi i$.

(11.2.9) $$\{A_{-1}, \bullet, A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

(11.2.10) $$\{\dots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, \bullet, A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

En fait, et pour des raisons qui n'apparaîtront clairement qu'au §11.10 grâce à la notion d'idéal étranger, on est conduit à distinguer, parmi les objets (11.2.5) et (11.2.6), cinq types de classes analytiques caractérisés chacun par le support S des invariants :

(11.2.11) $$S = \{n \; ; \; A_n \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^*$$

Ce sont

(i) les classes unitaires, de support S réduit à un point $\{n_0\}$

(ii) les classes binaires de support S réduit à deux points symétriques $\{-n_0, n_0\}$

(iii) les classes unilatérales, de support S contenu dans un ensemble $\{n_0, 2n_0, 3n_0, \dots\}$

(iiii) les classes sesquilatérales, de support S contenu dans un ensemble $\{-n_0, n_0, 2n_0, 3n_0, \dots\}$

(iiiii) les classes bilatérales, de support S quelconque.

Selon les besoins, on entend ces définitions au sens strict ou large, de manière que chaque type exclue ou inclue les précédents.

Notons qu'il n'existe pas, pour les équations (11.2.5), de classes bilatérales (strictes). Seuls subsistent les quatre premiers types.

Comme les objets (11.2.5) et (11.2.6) ne possèdent chacun qu'une intégrale formelle, leurs invariants ne sont soumis qu'à des contraintes de croissance (voir §10.5) qui sont ici très simples, puisque les réseaux de résurgence Ω sont portés par un seul axe et qu'on peut donc prendre $\theta_1 = \theta_2$ dans la proposition

10.5.1. Si aux familles $\{A_n\}$ des lignes (11.2.9) et (11.2.10) on associe les familles $\{A_n^+\}$ ainsi construites (*) :

$$(11.2.12)\quad \begin{cases} u + \sum_{n\geq 1} A_n^+ \, u^{n+1} = u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{n\geq 1} A_n \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \right\}^m . u \\ u + \sum_{n\geq 1} A_{-n}^+ \, u^{n+1} = u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{n\geq 1} A_{-n} \, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \right\}^n . u \end{cases}$$

les contraintes de croissance s'écrivent :

$$(11.2.13)\quad \limsup_n |A_n^+|^{1/|n|} < \infty \qquad \text{pour } n \longrightarrow \pm\infty$$

Il y a donc bijection entre les classes analytiques d'équation (11.2.5) et les classes analytiques sesquilatérales de difféos (11.2.6). Cette bijection est d'ailleurs explicitable (voir les indications in fin de section) mais ce qui nous intéresse ici, c'est de rechercher, dans chaque classe analytique d'équations (11.2.5), puis de difféos (11.2.6), des représentants qui soient d'une forme aussi élémentaire que possible.

Pour les classes d'équations, il est naturel de chercher des représentants ne dépendant que d'une famille $\{B_n\}$ à un seul indice. Les équations de la forme :

$$(11.2.14)\quad \frac{d}{dz} y = y + \sum_{n\geq -1} B_n \, y^{n+1} \qquad \left(B_0 = 0 \, , \, \limsup |B_n|^{1/n} < \infty\right)$$

ne conviennent évidemement pas, car elles sont toutes analytiquement conjuguées entre elles et à (11.2.3). La forme la plus élémentaire qui convienne est celle-ci :

$$(11.2.15)\quad \frac{d}{dz} y = y - \frac{1}{2\pi i z} \left\{ B_{-1} + B_1 y^2 + B_2 y^3 + B_3 y^4 + \dots \right\}$$

avec bien sûr :

(*) Notons que $A_n^+ = A_n + \text{polynôme en } A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ et que

$$A_{-n}^+ = A_{-n} + \text{polynôme en } A_{-1}, A_{-2}, \dots A_{-n+1} .$$

(11.2.16) $$\limsup |B_n|^{1/n} < \infty$$

Elle est dite <u>forme canonique</u>. Les coefficients B_n qu'elle comporte jouent un rôle parfaitement symétrique des A_n. De fait, les invariants A_n d'une équation canonique (11.2.15) s'expriment facilement en fonction des B_n et du moule hyperlogarithmique $V^\bullet$ introduit en §1.4. Plus précisément, si on introduit les opérateurs différentiels :

(11.2.17) $$\mathbb{A}_n = A_n u^{n+1}\frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad \mathbb{B}_n = B_n u^{n+1}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (n=-1,1,2,3\ldots)$$

on a, en particularisant la formule (2.12.22) :

(11.2.18) $$\mathbb{A}_n = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{n_1+\ldots n_r=n} V^{n_1,n_2,\ldots,n_r}[\ldots[\mathbb{B}_{n_1},\mathbb{B}_{n_2}]\ldots\mathbb{B}_{n_r}]$$

avec convergence assurée au second membre (*)

On vérifie que le passage des B_n aux A_n conserve la "latéralité", entendue au sens large. Par exemple, à une famille $\{B_n\}$ binaire ou unilatérale, les formules (11.2.18) associent une famille $\{A_n\}$ binaire ou unilatérale.

Formellement, les formules (11.2.18) s'inversent selon des formules tout analogues :

(11.2.19) $$\mathbb{B}_n = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{n_1+\ldots n_r=n} U^{n_1,n_2,\ldots,n_r}[\ldots[\mathbb{A}_{n_1},\mathbb{A}_{n_2}]\ldots\mathbb{A}_{n_r}]$$

où $U^\bullet$ désigne le moule hyperlogarithmique inverse du moule $V^\bullet$:

(11.2.20) $$U^\bullet \circ V^\bullet = I^\bullet$$ (Voir §1.4)

Toutefois, à la différence du second membre de (11.2.18), celui de (11.2.19) ne converge pas toujours, même lorsque les A_n satisfont aux contraintes de

---

(*) sous réserve de (11.2.16) bien sûr.

croissance. Et lorsqu'il converge, on n'est pas pour autant assuré que les B_n ainsi définis satisfassent à (11.2.16). La <u>synthèse</u> (passage des A_n aux B_n) est donc une opération plus compliquée que l'<u>analyse</u> (passage des B_n aux A_n). En fait, comme on pouvait s'y attendre, la discussion s'articule autour de la latéralité :

(i) Toute classe <u>unitaire</u>, caractérisée par un unique A_{n_0} non nul, possède un représentant canonique unitaire avec $B_{n_0} = A_{n_0}$.

(ii) Toute classe <u>binaire</u>, caractérisée par deux invariants $\{A_{-n_0}, A_{n_0}\}$ non nuls, possède une infinité dénombrable de représentants canoniques <u>binaires</u>, avec $\{B_{-n_0}, B_{n_0}\}$ vérifiant :

(11.2.21) $$\frac{1}{2}\sqrt{A_{-n_0}A_{n_0}} = \sin \frac{1}{2}\sqrt{B_{-n_0}B_{n_0}}$$

(11.2.22) $$A_{n_0}/A_{-n_0} = B_{n_0}/B_{-n_0}$$

(iii) A toute classe <u>unilatérale</u> $\{A_1, A_2, \dots\}$ la correspondance formelle (11.2.19) associe une suite <u>unilatérale</u> $\{B_1, B_2, \dots\}$ <u>unique</u> puisque $A_{-1} = 0$ et que, de ce fait, le second membre de (11.2.19) ne comporte, pour tout n donné, qu'un nombre fini de termes. Toutefois, la suite $\{B_n\}$ ainsi construite ne vérifie qu'exceptionnelelement la condition de croissance (11.2.16). Elle ne définit donc qu'exceptionnelelemnt un représentant canonique (11.2.15) analytique en y .

(iiii) Enfin, les classes <u>sesquilatérales</u> $\{A_{-1}, A_1, A_2, \dots\}$ possèdent en général une infinité dénombrable de représentants canoniques $\{B_{-1}, B_1, B_2, \dots\}$. Pour toute famille $\{A_n\}$ suffisamment "petite", les formules (11.2.19) fournissant un représentant canonique $\{B_n\}$ privilégié. Pour les autres $\{A_n\}$ il est possible de "prolonger analytiquement" la correspondance $A_n \longmapsto B_n$ donnée en (11.2.19) mais cette prolongation est multiforme et conduit à une infinité dénombrable de représentants canoniques dont aucun n'est vraiment privilégié.

Quant aux difféos f que les formules (11.2.25) et (11.2.26) ci-dessous associent aux équations canoniques (12.2.15), ils sont eux-mêmes dits <u>canoniques</u>. Extérieurement, ils ne se distinguent pas des difféos (11.2.6) généraux (comment le pourraient-ils, alors qu'ils doivent comme eux dépendre d'une infinité de a_n ?) mais leur canonicité perce tout de même dans leurs remarquables propriétés, notamment de prolongement analytique. Voir à ce sujet [E2] chap. 13. On a aussi une notion de représentant canonique pour certaines classes bilatérales (strictes) de difféos (11.2.6). Voir encore [E2], §13.h.

<u>Difféos de retour</u> :

Explicitons, pour la suite, l'application qui à toute équation différentielle (11.2.5) associe un difféo (11.2.6) de même classe analytique $\{\mathbb{A}_n\}$. Introduisons pour cela le changement d'inconnue formel :

(11.2.23) $$y \longmapsto Y = k(z,y) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]] \otimes \mathbb{C}\{y\}$$

qui conjugue (11.2.4) à (11.2.3). Il vérifie les équations de résurgence en z :

(11.2.24) $$\Delta_n \; k(z,Y) = -A_n \left(k(z,y)\right)^{n+1} \quad (n=-1,1,2,3\ldots)$$

Posons ensuite :

(11.2.25) $$\left\{\begin{aligned} f^*(z) = f^*_y(z) &= \log\left(e^z / k(z,y)\right) \\ &= z - \log y + \sum_{m,n} \gamma_{m,n}\, z^{-m} y^n \end{aligned}\right.$$

et notons $f(z) = f_y(z)$ l'unique série entière en z^{-1} et y telle que :

(11.2.26) $$f^*(f(z)) = 2\pi i + f^*(z) \qquad \text{avec } f(z) = z + 2\pi i + \ldots$$

Tout comme k, f est analytique en y, résurgente en z et de transformée de Borel à croissance exponentielle en ζ. A partir de (11.2.24), (11.2.25) et (11.2.26) on trouve les équations de résurgence en z :

(11.2.27) $$\Delta_n f^* = A_n \, e^{-n f^*} \qquad (n = -1, 1, 2, 3 \ldots)$$

(11.2.28) $$\Delta_\omega f = 0 \qquad (\forall \omega \in \mathbb{C}^*)$$

Pour chaque y fixé et assez petit, la série $f(z) = f_y(z)$ définit donc un germe d'application (11.26) holomorphe à l'infini et ce germe à les mêmes invariants holomorphes A_n que l'équation (11.2.5) dont on est parti.

SECTION 11.3. LE CAS UNILATERAL ET LA RESURGENCE DE SYNTHESE.

§11.3.a. Aperçu sur la résurgence de synthèse.

On vient de voir qu'il existait une nette dichotomie entre les classes sesquilatérales, qui possèdent en général une infinitéde représentants canoniques, et les classes unilatérales, qui en général n'en possèdent aucun. Il faut donc se pencher sur les classes unilatérales et examiner à quelles conditions elles possèdent un représentant canonique analytique. Soit $\{A_n\}$ une telle classe et soit p son niveau, c'est-à-dire l'indice du premier A_n non nul :

(11.3.1) $$A_1 = A_2 = \ldots A_{p-1} = 0 \;;\; A_p \neq 0 \qquad (p \geqslant 1)$$

Soit $\{B_n\}$ l'unique famille canonique que (11.2.19) associe à $\{A_n\}$. On vérifie immédiatement que :

(11.3.2) $$B_n = A_n \qquad \text{pour } n < 2p$$

Si donc on pose :

(11.3.3) $$A(y) = \sum_{n \geqslant 1} A_n \, y^{n+1} \;;\; B(y) = \sum_{n \geqslant 1} B_n \, y^{n+1}$$

les équations différentielles :

(11.3.4) $$A(y) \frac{\partial}{\partial y} A^*(y) = 2\pi i \;;\; B(y) \frac{\partial}{\partial y} B^*(y) = 2\pi i$$

auront pour solutions "sans terme constant" des séries formelles bien déterminées :

(11.3.5) $$A^*(y) = \rho \log y + \sum_{n=-p}^{\infty} A_n^* y^n \; ; \; B^*(y) = \rho \log y + \sum_{n=-p}^{\infty} B_n^* y^n$$

avecde chaque côté un même scalaire ρ et avec :

(11.3.6) $$A_0^* = B_0^* = 0 \; ; \; A_{-p}^* = B_{-p}^* = -\frac{2\pi i}{p.A_p} = -\frac{2\pi i}{p.B_p}$$

Par suite $A^*(y)$ et $B^*(y)$ sont toutes deux équivalentes à δ avec :

(11.3.7) $$\delta = -\frac{2\pi i}{p.A_p}\, y^{-p} = c_0\, y^{-p}$$

Les séries $A(y)$ et $B(y)$ et par suite les séries $A^*(y)$ et $B^*(y)$ sont généralement divergentes, mais nous allons voir qu'elles sont toujours résurgentes en la variable δ.

Pour $A(y)$ et $A^*(y)$ c'est évident, puisque d'après (11.2.12) et (11.2.13) l'opérateur $A(y)\, \partial/\partial y$ est le générateur infinitésimal formel d'un difféo local de $\mathbb{C}$:

(11.3.8) $$y \longmapsto A^+(y) = y + \sum A_n^+ y^{n+1} \qquad (A_n^+ \text{ comme en (11.2.12)})$$

et que $A^*(y)$ est l'itérateur de ce même difféo :

(11.3.9) $$A^* \circ A(y) = 2\pi i + A^*(y)$$

D'après la théorie générale de ces difféos (*) $A(y)$ et $A^*(y)$ sont des fonctions résurgentes en δ, qui se présentent (à quelques termes irréguliers près) sous forme de séries entières en $\delta^{-1/p}$ et qui admettent pour réseau de résurgence l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ formé de tous les points de $\mathbb{C}_p$ (surface de Riemann de $\delta^{1/p}$) situés au-dessus de $\mathbb{Z}^*$. Notant n le point courant de $\mathbb{Z}_p$ et $\dot{n}$ sa projection

(*) Voir [E2] chap.9 ou [E3] §5.1. On prendra garde toutefois aux différences de normalisation dans la définition des itérateurs.

naturelle sur $\mathbb{Z}^*$, on touve pour l'itérateur $A^*(y)$ les équations de résurgence suivantes :

(11.3.10) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_n \; A^* = C_n \; e^{-\dot{n} A^*} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}_p)$$

avec les dérivations étrangères pointées en s :

(11.3.11) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_n = e^{-\dot{n} s} \; {}^{s}\Delta_n $$

et avec une suite de scalaires C_n bien déterminés. On en déduit pour $A(y)$ les équations derésurgence :

(11.3.12) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_n A = \dot{n} \; C_n \; A \; e^{-\dot{n} A^*} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}_p)$$

Notons le statut remarquable des C_n. Ce sont des "invariants d'invariants" puisqu'on les obtient comme invariants d'un difféo $y \longmapsto A^+(y)$ lui-même fabriqué à partir des invariants A_n des équations (11.2.5). Les C_n vont nous permettre de discuter l'existence du représentant canonique.

Proposition 11.3.1 (Critère d'analycité du représentant canonique unilatéral)

Une classe unilatérale $\{A_n\}$ d'équations (11.2.5) possède un représentant canonique unilatéral (11.2.15) + (11.2.16) si et seulement si :

(11.3.13) $$ C_n = 0 \quad \text{pour} \quad \dot{n} = 1, 2, 3 \ldots $$

On a donc ce résultat surprenant : une classe unilatérale d'invariants $\{A_n\}$ possède un représentant canonique (unilatéral et analytique) si et seulement si les "invariants d'invariants" C_n forment eux-mêmes une famille unilatérale, seuls les C_n d'indice négatif (*) pouvant différer de zéro.

Mais il y a plus. Même lorsque la condition (11.3.13) n'est pas remplie,

(*) $\dot{n} = -1, -2, -3, \ldots$

la correspondance (11.2.19) continue d'associer à la classe $\{A_n\}$ un représentant canonique "formel" ou "externe" :

$$\frac{d}{dz}\, y = y - \frac{1}{2\pi i z}\, B(y) \qquad \left(B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, y^{n+1}\right) \tag{11.3.14}$$

avec une série $B(y)$ qui n'est plus analytique en y mais, ô surprise, résurgente en $\mathfrak{z}$. C'est la "résurgence de synthèse".

Proposition 11.3.2 (Résurgence de $B(y)$)

La série $B(y)$ associée à une classe unilatérale $\{A_n\}$ est toujours résurgente en $\mathfrak{z}$. Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir (*) sur $B(y)$ sont les ${}^{\mathfrak{z}}\Delta_n$ avec n dans $\mathbb{Z}_p$ et $\dot{n}$ dans $\mathbb{N}^*$. Plus généralement, les seuls produits

$$\Delta_{n_r} \cdots \Delta_{n_2}\, \Delta_{n_1}$$

susceptible d'agir sur $B(y)$ correspondent à des indices :

$$\begin{cases} n_1, n_2, \dots n_r \in \mathbb{Z}_p \\ \dot{n}_1, \dot{n}_1 + \dot{n}_2, \dots, \dot{n}_1 + \dots \dot{n}_r \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{11.3.15}$$

Pour décrire complètement la résurgence de $B(y)$ ou, ce qui revient au même, celle de $B^*(y)$, il faut introduire deux nouvelles séries, $K(z,y)$ et $Q(z,y)$. La première n'est autre, à un facteur élémentaire près, que la série (11.2.23) qui conjugue l'équation canonique (11.2.14) à l'équation d'Euler (11.2.3) :

$$K(z,y) = e^{-z}\, k(z,y) = e^{-z}\left(y + \sum_{n=1} k_n(z)\, y^{n+1}\right) \qquad (**) \tag{11.3.16}$$

K vérifie l'équation aux dérivées partielles :

(*) sous-entendu : "sans annuler".

(**) Ici, contrairement à (11.2.23) et à cause de l'unilatéralité, le $\sum$ est étendu aux seuls $n \geqslant 1$.

(11.3.17) $$D.\ K(z,y) = 0 .$$

avec

(11.3.18) $$D = \frac{\partial}{\partial z} + \left(y - \frac{1}{2\pi i z} B(y)\right) \frac{\partial}{\partial y}$$

Au facteur e^{-z} près, K est une série entière en z^{-1}. La série Q, au contraire, s'obtient en résolvant l'équation :

(11.3.19) $$D.\ Q(z,y) = 0$$

en puissances positives de z. Plus précisément, Q est l'unique solution de (11.3.19) qui soit de la forme :

(11.3.20) $$Q(z,y) = \log z + B^*(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(y)\, z^n$$

Ses coefficients $Q_n(y)$ appartiennent à $y^{-h}\,\mathbb{C}[[y]]$ et se calculent par la récurrence :

(11.3.21) $$\left[n+1 - \frac{1}{2\pi i} B(y) \frac{\partial}{\partial y}\right] Q_{n+1}(y) = -y \frac{\partial}{\partial y} Q_n(y)$$

avec $n \geqslant 0$ et $Q_0(y) = B^*(y)$.

On a également besoin des projecteurs P°, P^{+}, P^{-} qui à toute série :

(11.3.22) $$\varphi(z,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(y)\, z^n$$

associent les séries :

(11.3.23) $$P^{\circ}\, \varphi(z,y) = \varphi_0(y)$$

(11.3.24) $$P^{+}\, \varphi(z,y) = \sum_{n\geq 1} \varphi_n(y)\, z^n$$

(11.3.25) $$P^{-}\, \varphi(z,y) = \sum_{n\geq 1} \varphi_{-n}(y)\, z^{-n}$$

Proposition 11.3.3. (Résurgence de synthèse)

Les séries $A^*(y)$, $B^*(y)$, $K(z,y)$, $Q(z,y)$ associées à une classe unilatérale $\{A_n\}$ d'équations (11.2.5) sont généralement divergentes en y, mais toujours résurgentes en $s = c_0 y^{-p}$ (avec $c_0 = -2\pi i / p A_p$) et elles vérifient les équations de résurgence ci-dessous, valables pour tout $n \in \mathbb{Z}_p$:

(11.3.26) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_n A^* = C_n \, e^{-\dot{n} A^*} $$

(11.3.27) $$ ({}^{s}\dot{\Delta}_n B^*)/(\tfrac{\partial}{\partial s} B^*) = C_n \, P^{\circ}\{e^{-\dot{n} Q} / \tfrac{\partial}{\partial s} Q\} $$

(11.3.28) $$ ({}^{s}\dot{\Delta}_n K)/(\tfrac{\partial}{\partial s} K) = -C_n \, P^{-}\{e^{-\dot{n} Q} / \tfrac{\partial}{\partial s} Q\} $$

(11.3.29) $$ ({}^{s}\dot{\Delta}_n Q)/(\tfrac{\partial}{\partial s} Q) = C_n (P^{\circ}+P^{+})\{e^{-\dot{n} Q} / \tfrac{\partial}{\partial s} Q\} $$

Pour les démonstrations voir [E4].

Remarque 1 : (Nature de la résurgence)

Même quand $p = 1$, la résurgence en s n'est pas du type "à singularité logarithmique". Supposons pour fixer les idées $p = 1$ et ρ irrationnel. Alors A^* et B^* s'écrivent en fonction de s :

(11.3.30) $$ A^* = s - \rho \log s + \sum_{m \geq 1} \alpha_m s^{-m} $$

(11.3.31) $$ B^* = s - \rho \log s + \sum_{m \geq 1} \beta_m s^{-m} $$

et ont pour transformées de Borel en s :

(11.3.32) $$ \hat{A}^* = \delta'(\sigma) - \rho \, \widehat{\log} \, \sigma + \sum_{m \geq 1} \alpha_m \sigma^{m-1}/(m-1)! \qquad (*) $$

(11.3.33) $$ \hat{B}^* = \delta'(\sigma) - \rho \, \widehat{\log} \, \sigma + \sum_{m \geq 1} \beta_m \sigma^{m-1}/(m-1)! \qquad (*) $$

(*) Ici δ' désigne la dérivée du dirac δ et σ la variable conjuguée de s.

Interprêtant les équations de résurgence (11.3.26) et (11.3.27) dans le modèle convolutif (plan des σ) on trouve que $\hat{A}^*(\sigma)$ et $\hat{B}^*(\sigma)$ ont au-dessus des points entiers $\sigma = n$ les comportements suivants :

$$\hat{A}^*(\sigma) = \mathrm{reg}(\sigma - n) + (\sigma - n)^{-n\rho-1}\,\mathrm{reg}(\sigma - n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^*) \tag{11.3.34}$$

$$\hat{B}^*(\sigma) = \mathrm{reg}(\sigma - n) + (\sigma - n)^{-n\rho-n-1}\,\mathrm{reg}(\sigma - n) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{11.3.35}$$

où les symboles $\mathrm{reg}(\sigma - n)$ désignent des fonctions régulières en $\sigma - n$. Même quand $\rho = 0$, $\hat{B}^*$ peut, à la différence de $\hat{A}^*$, comporter des pôles de tous ordres.

Remarque 2 : (Interprêtation de la proposition 11.3.3)

D'après (11.3.20) le rapport $e^{-\dot{n}Q} / \frac{\partial}{\partial s} Q$ se présente sous la forme d'une série :

$$\sum \varphi_m(y)\, z^m \qquad \text{avec} \quad m \geqslant -\dot{n} \qquad (m, \dot{n} \in \mathbb{Z}) \tag{11.3.36}$$

Le projecteur P^+ peut tout au plus tronquer cette série (si $\dot{n} > 0$) mais jamais l'annuler. Au contraire, les projecteurs P° et P^- la tronquent toujours et l'annulent chaque fois que $\dot{n} < 0$. Pour de tels n , les seconds membres de (11.3.27) et (11.3.28) valent 0 . On voit par là que l'équation (11.3.27) contient la proposition 11.3.2.

D'autre part, si on se reporte à l'équation (11.3.19) qui détermine Q , on voit que l'application aux séries B^*, K, Q d'une dérivation étrangère ${}^s\Delta_n$ équivaut grosso modo à une "intégro-différentiation" d'ordre $\dot{n}$ en y (*). Or y est directement lié par (11.3.7) à la variable s par rapport à laquelle il y a résurgence. On est donc en présence d'un type de résurgence ("résurgence de synthèse") fort différent de la résurgence équationnelle.

(*) elle équivaut à $\dot{n}$ "intégrations" successives si $\dot{n} > 0$ et à $|\dot{n}|$ "différentiations successives si $\dot{n} < 0$.

Remarque 3 : (Résurgence de $B(y)$)

Partant de (11.3.4) et (11.3.27) on trouve :

(11.3.37) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_{n} B = \dot{n}\, C_{n}\, B\, P^{\circ}\left(e^{-\dot{n}Q}\, \widetilde{Q}_{n}\right) $$

avec $\widetilde{Q}_{n} = 1 + Q''/\dot{n}Q'Q' - 2\pi i/\dot{n}BQ'$ (*). On comparera (et opposera) l'équation (11.3.37) à l'équation (11.3.12).

Remarque 4 : (Fermeture du système (11.3.26-29))

Puisque $\Delta_{n} k/\frac{\partial}{\partial s} k = \Delta_{n} K/\frac{\partial}{\partial s} K$, l'équation (11.3.28) fournit les dérivées étrangères en s de la série k qui conjugue (11.2.3) à (11.2.15) dans le cas unilatéral. On en déduirait facilement les dérivées étrangères en s de la série k qui conjugue (11.2.15) à (11.2.3). On note aussi que les quatre équations de la proposition 11.3.3 forment un système fermé en ce sens qu'elles permettent de calculer toutes les dérivées étrangères successives (en s), d'ordre aussi élevé que l'on veut. Elles décrivent donc complètement la résurgence en s . A elles seules, les équations (11.3.26) et (11.3.27) n'y suffiraient pas.

Remarque 5 (Lien caché entre K, Q et A^*).

Pour $\dot{n} < 0$, l'équation (11.3.29) se simplifie :

(11.3.38) $$ {}^{s}\dot{\Delta}_{n} Q = C_{n}\, e^{-\dot{n}Q} $$

C'est exactement la même forme que celle de l'équation (11.3.26) vérifiée (mais pour tout n) par A^* . Ceci incite à chercher une "factorisation" de Q sous forme d'un produit de composition dont A^* serait le premier facteur et dont le second facteur serait annulé par les ${}^{s}\Delta_{n}$ pour $\dot{n} < 0$. De fait, on s'aperçoit que si on postule la factorisation formelle :

(11.3.39) $$ Q(z,y) = A^*(K(z,y)) $$

(*) $Q' = \frac{\partial}{\partial y} Q$; $Q'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} Q$.

et si on lui applique les dérivations étrangères ${}^{\wedge}\dot{\Delta}_n$ en tenant compte de la règle (1.3.64), on trouve un résultat compatible avec les équations (11.3.26), (11.3.28), (11.3.29). Malheureusement, la factorisation (11.3.39) n'a a priori aucun sens, puisque K est une série entière divergente en z^{-1} tandis que $Q(z,y)$ est une série entière convergente en z. Une étape essentielle de la démonstration consiste, justement, à donner un sens à la factorisation (11.3.39), par prolongation analytique en z de 0 à ∞ le long de chemins convenables. On montre ensuite que les quatre équations de la proposition 11.3.3 sont les seules quisoient compatibles:

(i) entre elles

(ii) avec la factorisation (11.3.39)

(iii) avec les équations $\mathcal{D}\,Q = \mathcal{D}\,K = 0$ (où l'opérateur $\mathcal{D}$ contient la fonction B, elle-même résurgente en δ !). Ceci fait, il ne reste plus, pour prouver la proposition 11.3.3, qu'à établir par un argument direct la prolongeabilité sans coupure des transformées de Borel en δ. Il existe d'autres démonstrations plus élémentaires, mais nécessitant de longs calculs. Voir [E4].

Remarque 6 (Interprêtation de la synthèse unilatérale pour les équations différentielles)

Lorsqu'à une classe unilatérale $\{A_n\}$ correspond une famille $\{C_n\}$ qui n'est pas unilatérale, i.e. lorsque la condition (11.3.13) n'est pas remplie, les formules (11.2.19) ne fournissent plus qu'un représentant canonique "formel" ou "externe", puisque la série $B(y)$ fabriquée avec les B_n n'est plus convergente en y, mais seulement résurgente en δ. Ce représentant "externe" est défini sans ambiguité par les formules (11.2.19) qui donnent les B_n en fonction des A_n, mais il est aussi susceptible d'une interprêtation directe. Il se trouve en effet que pour toute équation analytique :

(11.3.40) $$\frac{d}{dz} y_0 = y_0 + \sum b_{m,n}\, z^{-m} y_0^{\,n} \qquad \begin{cases} b_{0,0} = b_{0,1} = 0 \;;\; b_{1,1} = 2b_{1,0}\, b_{0,2} \\ \sum b_{m,n}\, z^{-m} y_0^{\,n} \in \mathbb{C}\{z^{-1}, y_0\} \end{cases}$$

de classe unilatérale $\{A_n\}$, les B_n fournis par les formules (11.2.19) sont les seuls pour lesquels la transformation formelle $y = \ell(z, y_0)$ qui conjugue

(11.3.28) au représentant canonique "externe" (11.2.15) soit analytique en z (à l'infini). Cette transformation n'est évidemment pas analytique en y, mais seulement résurgente en s.

Remarque 7. (Interprêtation de la synthèse unilatérale pour les difféos)

Bien que les classes unilatérales d'équations (11.2.5) ne possèdent en général que des représentants canoniques "externes", les classes unilatérales $\{A_n\}$ de difféos (11.2.6) possèdent, elles, de véritables représentants canoniques "internes", i.e. analytiques. Partant des A_n on peut en effet :

(i) calculer les B_n par (11.2.19)

(ii) fabriquer avec eux la série $Y = k(z,y)$ qui conjugue (11.2.3) à (11.3.14)

(iii) introduire $K(z,y)$ comme en (11.3.16)

(iiii) et enfin définir la série $f(z) = f_y(z)$ comme en (11.2.24) et (11.2.25).

Cette dernière série est analytique en z^{-1} et résurgente en $s = c_0 y^{-p}$. Posons :

$$f(z) = z + \sum f_n(s)\, z^{-n} \quad \text{avec } f_n(s) \in \mathbb{C}[[s^{-1/p}]] \tag{11..3.41}$$

$$\hat{f}(z) = z + \sum \hat{f}_n(\sigma)\, z^{-n} \quad \text{avec } \hat{f}_n(\sigma) \in \mathbb{C}\{\sigma^{1/p}\} \tag{11.3.42}$$

Les $\hat{f}_n(\sigma)$, transformées de Borel des $f_n(s)$, sont (uniformément en n) de croissance exponentielle en σ. De plus, à cause de (11.3.28), les $\hat{f}_n(\sigma)$ ont toutes leurs singularités au-dessus de $\mathbb{N}$. Il y a donc exactement p manières différentes de resommer par Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\sigma s}\, \hat{f}(z)\, d\sigma \qquad \left(f = f_y = f_{(s)},\ \hat{f} = \hat{f}_{(\sigma)}\right) \tag{11.3.43}$$

et chacune de ces manières livre, pour y fixé et assez petit, un difféo $z \mapsto f(z)$ de la forme (11.2.6) qui est bien un représentant canonique "interne" (i.e. analytique en z^{-1}) de la classe unilatérale $\{A_n\}$. On voit par là que la synthèse unilatérale est plus simple (elle peut être poussée plus loin) pour les difféos que pour les équations différentielles. La synthèse sesquilatérale, en revanche, présente exactement le même ordre de difficulté. La synthèse bilatérale, enfin, ne se pose pas pour les équations différentielles (11.2.5) mais uniquement pour les difféos (11.2.6) ou pour les équations différentielles résonnantes du type :

$$\lambda_1 y\, dx + \lambda_2 x\, dy + \cdots = 0 \qquad (\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+) \tag{11.3.44}$$

Voir à ce sujet [E.4] et [e.1].

<u>Remarque 8</u> : <u>(Coinvariants)</u>

Les représentants canoniques n'étant pas uniques (sauf dans les classes unilatérales), les coefficients B_n <u>ne sont pas invariants</u> : ils ne sauraient en aucun cas remplacer les A_n pour le paramétrage des classes analytiques. Toutefois les B_n sont "localement invariants", c'est-à-dire invariants relativement aux changements de variables suffisamment proches de l'identité. Cela tient à ce que la famille des représentants canoniques d'une classe analytique donnée est non seulement dénombrable (au plus) mais aussi discrète (i.e. sans points d'accumulation). Voir [E4]. En raison de leur invariance "locale" et des relations duales (11.2.18) - (11.2.19) qui les rattachent aux invariants A_n , les B_n ont été nommés <u>coinvariants</u>. Voir [E2], chap. 13.

<u>§11.3.b. Extension à des objets locaux plus généraux.</u>

Dans beaucoup de classes analytiques d'objets locaux on a une notion naturelle de représentants canoniques. Bien que rarement uniques, ceux-ci présentent tout de même un grand intérêt, car ils sont eu un sens les plus réguliers de leur classe. Donnons-en un exemple qui généralise directement celui de l'alinéa 11.3.a.

Fixons des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ rationnellement indépendants (donc non nuls). Considérons le système normal :

$$(11.3.45) \qquad \frac{d}{dz} Y_i = \lambda_i Y_i \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

et les systèmes analytiques :

$$(11.3.46) \qquad \frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i + \varphi_i(z, y) \qquad (\varphi_i \in \mathbb{C}\{z^{-1}, y\}, 1 \leq i \leq \nu)$$

qui sont formellement conjugués à (11.3.45). Considérons enfin les systèmes canoniques :

$$(11.3.47) \qquad \frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i - \frac{1}{2\pi i z} \cdot y_i \sum B^i_{n_1,\dots,n_\nu} y_1^{n_1} \cdots y_\nu^{n_\nu} \qquad \begin{cases} n_i \geq -1 \\ n_j \geq 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

et associons-leur les opérateurs $\mathbb{B}_\omega = \mathbb{B}_n$ ainsi définis :

$$(11.3.48) \begin{cases} \mathbb{B}_\omega = \mathbb{B}_n = \mathbb{B}_{n_1,\dots,n_\nu} = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} B^i_{n_1,\dots,n_\nu} \ u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \\ \text{avec } \omega \in \Omega \ ; n \in \mathbb{Z}^\nu \ ; \ \omega = \sum n_i \lambda_i \end{cases}$$

Comme on a vu en §2.12, les classes analytiques d'équations (11.3.47) sont caractérisées chacune par une famille dénombrable d'invariants $\mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_n$, de la forme (2.12.16) que nous rappelons ici :

$$(11.3.49) \begin{cases} \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_n = \mathbb{A}_{n_1,\dots,n_\nu} = u_1^{n_1} \dots u_\nu^{n_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} A^i_{n_1,\dots,n_\nu} \ u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \\ \text{avec } \omega \in \Omega \ ; \ n \in \mathbb{Z}^\nu \ ; \ \omega = \sum n_i \lambda_i \end{cases}$$

Les doubles notations $\mathbb{B}_\omega$, $\mathbb{B}_n$ et $\mathbb{A}_\omega$, $\mathbb{A}_n$ ne risquent pas de prêter à confusion, puisque $\omega \in \Omega$ tandis que $n \in \mathbb{Z}^\nu$. Nous les adoptons ici pour mieux faire ressortir le parallélisme entre les <u>invariants</u> $\mathbb{A}_\omega$ (naturellement indexés sur Ω) et les <u>coinvariants</u> $\mathbb{B}_n$ (naturellement indexés sur $\mathbb{Z}^\nu$).

La recherche, dans une classe analytique $\{\mathbb{A}_n\}$ donnée, de représentants canoniques (11.3.47) conduit à étudier l'application $\mathbb{B}_n \mapsto \mathbb{A}_n$ ("analyse") et surtout l'application inverse $\mathbb{A}_n \mapsto \mathbb{B}_n$ ("synthèse"). Ces applications sont données par les formules (2.12.17) et (2.12.23) qui généralisent (11.2.18) et (11.2.19) et que nous transcrivons ici avec la nouvelle indexation en n .

(11.3.50) $$\mathbb{A}_{n^0} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n^1+\ldots n^r = n^0} V^{\omega_1,\ldots,\omega_r} [\ldots[\mathbb{B}_{n^1}, \mathbb{B}_{n^2}] \ldots \mathbb{B}_{n^r}] \qquad (*)$$

(11.3.51) $$\mathbb{B}_{n^0} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n^1+\ldots n^r = n^0} U^{\omega_1,\ldots,\omega_r} [\ldots[\mathbb{A}_{n^1}, \mathbb{A}_{n^2}] \ldots \mathbb{A}_{n^r}] \qquad (**)$$

Bien entendu, les $n^i = (n^i_j)$ désignent des multiindices entiers $(n^i \in \mathbb{Z}^\nu)$ et les ω_i désignent leur contraction avec λ :

(11.3.52) $$\omega_i = \langle n^i, \lambda \rangle = n^i_1 \lambda_1 + n^i_2 \lambda_2 + \ldots n^i_\nu \lambda_\nu$$

Les classes $\{\mathbb{A}_n\}$ qui généralisent les classes unilatérales de l'alinea précédent sont celles dont les invariants cruciaux ne sont pas tous $\neq 0$. Par définition, les invariants cruciaux sont les $\mathbb{A}_n$ dont les indices $n = \langle i \rangle$ ont toutes leurs coordonnées nulles, sauf la i-ème qui vaut -1 . Ils sont toujours de la forme :

(11.3.53) $$\mathbb{A}_{\langle i \rangle} = A_{0,\ldots,-1,\ldots,0} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \leq i \leq \nu)$$

Quand les ν invariants cruciaux sont $\neq 0$, il existe en général une infinité dénombrable de représentants canoniques (analytiques). Quand au contraire un ou plusieurs de ces invariants cruciaux sont nuls, il n'existe plus en général que des représentants canoniques "externes", mais qui sont résurgents par rapport à une ou plusieurs variables $s_1, s_2, \ldots, s_r$ liées aux $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. C'est la résurgence de synthèse. Elle est régie par des équations analogues à (11.3.27), (11.3.28), (11.3.29) mais en plus compliqué.

On peut donc dire grosso modo que partout où l'application "synthèse"

(*) second membre toujours convergent.

(**) second membre pas toujours convergent.

$\mathbb{A}_n \longmapsto \mathbb{B}_n$ est irrégulière, elle est résurgente (résurgence de synthèse).

§11.3.c. Synthèse r-canonique.

Au lieu de chercher les représentants canoniques sous la forme (11.3.47), on peut les chercher sous la forme

$$\frac{d}{dz} y_i = \lambda_i y_i - \frac{1}{2\pi i z^{r+1}} y_i \sum B^i_{n_1,\ldots,n_\nu} y_1^{n_1} \cdots y_\nu^{n_\nu} \tag{11.3.54}$$

pour un entier positif r fixé. Bien que sensiblement moins réguliers, les représentants r-canoniques jouissent de propriétés qui rappellent celles des représentants canoniques. Voir [E4].

SECTION 11.4. LA QUESTION DES MODULES ANALYTIQUES.

Les représentants canoniques tirent leur intérêt de leur simplicité, qui compense leur habituelle multiplicité (*) et leur occasionnelle inexistence (**). Mais on peut inverser les priorités et chercher, pour toute classe formelle $\mathfrak{F}$ d'objets analytiques locaux, un module analytique, c'est-à-dire une famille $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ d'objets locaux qui soit une variété analytique et qui intersecte toute classe analytique de $\mathfrak{F}$ en un "point" exactement.

On peut aussi être plus ambitieux et chercher des modules $\mathfrak{F}_0$ non pas sur les classes formelles $\mathfrak{F}$ (domaines de constance de tous les invariants formels) mais directement sur les classes discrètes $\mathcal{C}$ (domaines de constance des seuls invariants formels discrets. Voir §1.1).

MARTINET et RAMIS abordent la question dans [MR1] à propos notamment des équations conjuguées à l'équation d'Euler. Ils prouvent l'existence de modules analytiques $\mathfrak{F}_0$ dans les classes unitaires et binaires (selon notre terminologie),

(*) dans les cas sesquilatéral et bilatéral.

(**) dans le cas unilatéral.

c'est-à-dire dans les cas à un nombre fini de paramètres. La construction effective des modules est une autre affaire. Elémentaire pour les classes unitaires, elle paraît très ardue pour les classes binaires. Voir [MR1]. En tout état de cause, suivant une remarque de BRJUNO et de MALGRANGE, les représentants (i.e. les objets du module $\mathcal{F}_0$) ne sauraient être tous algébriques dans le cas binaire.

Les difficultés s'aggravent encore pour les classes unilatérales et sesquilatérales strictes (cas à une infinité de paramètres). Dans [Br2] BRJUNO tente la construction de modules pour ces classes, mais ses énoncés nous paraissent incorrects. En tout cas, ils contredisent formellement les nôtres, tant dans le cas sesquilatéral que dans le cas unilatéral (voir §11.2 et §11.3). BRJUNO nous annonce une version anglaise corrigée de [Br2] où il retire ses énoncés relatifs au cas sesquilatéral, mais notre désaccord persiste quant au cas unilatéral.

SECTION 11.5. NOTE SUR LES DEFORMATIONS ISORESURGENTES.

Expliquons de quoi il s'agit sur un exemple concret. Reprenons pour cela les systèmes différentiels canoniques (11.3.47). Notons $\mathbb{B}_n$, comme en (11.3.48), les opérateurs coinvariants fabriqués avec les coefficients du système (11.3.47) et notons $\mathbb{A}_n$, comme (11.3.49), les opérateurs invariants associés à ce même système.

Etudier les déformations isorésurgentes du système canonique (11.3.47) c'est, en gros, faire varier les générateurs λ_i du réseau de résurgence Ω et regarder comment les coinvariants $\mathbb{B}_n$ doivent changer pour que les invariants $\mathbb{A}_n$ ne changent pas. En fait, cette définition n'est pas complètement satisfaisante, car la formule (11.3.51) qui donne (formellement et parfois effectivement) les $\mathbb{B}_n$ en fonction des $\mathbb{A}_n$, comporte en son second membre les hyperlogarithmes $U^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ qui sont définis pour tous $\omega_i \neq 0$ mais qui ne sont pas partout analytiques et présentent même des discontinuités sur certaines variétés de $\mathbb{C}^r$. (Voir à ce sujet [E1], proposition 7b2 et corollaire). Or les ω_i de la formule (11.3.51) sont fonction des λ_i par (11.3.52). Si donc on fait varier les λ_i en fixant les $\mathbb{A}_n$ dans la formule (11.3.51), on obtiendra (en cas de convergence) une somme $\mathbb{B}_{n^0}$ qui risque d'être non continue en $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ et qui le sera effectivement pour peu que $\nu \geqslant 2$. Ceci conduit à modifier légèrement la notion d'isorésurgence.

Définition 11.5.1 (Déformations isorésurgentes)

On dit qu'un objet local canonique $\mathcal{O}b$ (*) subit une déformation isorésurgente s'il varie analytiquement en fonction des générateurs λ_i du réseau de résurgence Ω tandis que ses invariants $\mathbb{A}_\omega(\mathcal{O}b) = \mathbb{A}_n(\mathcal{O}b)$ restent constants par paliers (**)

Ces trois conditions - canonicité de $\mathcal{O}b$, analycité de $\mathcal{O}b$ en les λ_i et constance par palier des invariants - déterminent complètement l'évolution de $\mathcal{O}b$.

Reprenons l'exemple des systèmes canoniques (11.3.47) et étudions les déformations isorésurgentes de ces objets. Regroupons tous les coinvariants $\mathbb{B}_\omega = \mathbb{B}_n$ dans une même fonction génératrice à valeur opératorielle :

$$\mathbb{B} = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{\omega}\, \mathbb{B}_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\nu} \frac{1}{\langle n, \lambda \rangle}\, \mathbb{B}_n \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu \text{ non résonnants}) \tag{11.5.1}$$

Portant (11.3.51) dans (11.5.1) et utilisant les propriétés différentielles (1.4.30) du moule $U^\bullet$, on obtient l'équation fondamentale suivante, dite équation d'isorésurgence.

Proposition 11.5.1. (Equation d'isorésurgence)

Sous l'effet d'une transformation isorésurgente, l'opérateur $\mathbb{B}$ défini en (11.5.1) et dont la donnée équivaut à celle du système (11.3.47) (***)

(*) Par exemple le système différentiel (11.3.47).

(**) Pour n fixe évidemment (ω varie avec λ).

(***) puisqu'il en regroupe tous les coefficients.

vérifie (*) les ν équations aux dérivées partielles :

$$(11.5.2) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, [\nabla, \mathbb{B}]\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[\left[u_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \mathbb{B}\right], [\nabla, \mathbb{B}]\right] \qquad (**)$$

avec $j = 1, 2, \ldots, \nu$ et avec

$$(11.5.3) \qquad \nabla = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \, u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$$

et par suite :

$$(11.5.4) \qquad [\nabla, \mathbb{B}] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{B}_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{B}_n$$

Bien que (11.3.51), à la différence de (11.3.50), ne converge que pour les "petites" familles $\{\mathbb{A}_n\}$, l'équation (11.5.2) qu'on en tire vaut, par prolongement analytique, sur tout le domaine $\{|u_i| < c_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)\}$ où converge la série (11.5.1) qui définit $\mathbb{B}$.

Remarque 1 : Homogénéité de $\mathbb{B}$ en $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$.

On note que si on multiplie à gauche par λ_j les deux membres de (11.5.2) et si on somme pour $j = 1, 2, \ldots, \nu$, on trouve :

$$(11.5.5) \qquad \left[\sum \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j}, [\nabla, \mathbb{B}]\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[[\nabla, \mathbb{B}], [\nabla, \mathbb{B}]\right] = 0$$

ce qui est normal puisque les $U^{\omega_1, \ldots, \omega_r}$ sont homogènes de degré 0 en les ω_j . Par suite $\mathbb{B}$ et $[\nabla, \mathbb{B}]$ sont homogènes en les λ_j , de degré -1 et 0 respectivement.

Remarque 2. Isomonodromie et isorésurgence.

Dans le cas très particulier où le système (11.3.47) est linéaire (et ne

(*) comme fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ et de $u_1, \ldots, u_\nu$.

(**) les $[\ldots]$ désignent partout le crochet de Lie.

comporte donc qu'un nombre fini de coefficients non nuls), les paramètres μ_i s'éliminent dans l'équation d'isorésurgence et (11.5.2) redonne (*) les équations aux dérivées partielles qui, classiquement, régissent les déformations isomonodromiques (**). L'isomonodromie apparaît donc comme un cas (très) particulier d'isorésurgence. C'est d'ailleurs pour évoquer l'isomonodromie qu'on parle d'isorésurgence au lieu d'équirésurgence, terme qui en soi serait plus satisfaisant (plus homogène), le mot latin "résurgence" appelant un préfixe latin plutôt que grec.

Remarque 3 : Constance par paliers et collisions de rotateurs.

Le défaut de continuité des hyperlogarithmes $U^{\omega_1,\dots,\omega_\nu}$, qui nous force à postuler la constance par paliers (et non la constance tout court) des invariants $\mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_n$, ne vient pas du tout de ce que nous aurions "mal défini" les moules $U^\bullet$ et $V^\bullet$. Il découle au contraire de la discontinuité en ω des dérivations étrangères Δ_ω, discontinuité qui est elle-même inscrite dans la nature des choses.

Une variation isorésurgente $D\lambda_1,\dots,D\lambda_\nu$, finie mais petite, laisse constants (exactement) les invariants $\mathbb{A}_n$ d'indice $n=(n_1,\dots,n_\nu)$ petit. Les autres peuvent subir des variations discrètes.

Ces questions sont intimement liées à l'analyticité des rotateurs $\mathbb{A}^{\theta_2,\theta_1}$ introduits en (10.5.6), ainsi qu'aux "collisions de rotateurs", qui jouent un rôle de premier plan en résurgence quantique (Voir [E5]).

SECTION 11.6. AUTRES PROBLEMES DE CLASSIFICATION ANALYTIQUE.

Nous avons dans ce livre calculé les invariants holomorphes de quatre catégories fondamentales d'objets locaux, qui sont :

(*) le lecteur est vivement convié à s'en assurer.

(**) Sur ces dernières, voir par exemple B. MALGRANGE "Sur les déformations isomonodromiques", Publ. de l'Université de Grenoble, Mai 1982.

(C1) les équations ou systèmes différentiels (locaux)

(C2) les équations ou systèmes aux différences (locaux)

(C3) les champs de vecteurs locaux de $\mathbb{C}^\nu$

(C4) les difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^\nu$

Il existe bien sûr d'autres objets locaux qu'on peut se proposer d'étudier et de classer. Par exemple :

(C5) les n-formes différentielles locales sur $\mathbb{C}^\nu$ $(n \leq \nu)$

(C6) les diagrammes d'applications analytiques locales de divers espaces pointés $\mathbb{C}^{\nu_i}_{,0}$ les uns dans les autres

(C7) les paires ou n-plets d'objets locaux des six catégories énumérées ci-dessus.

Dans la plupart des cas pratiques, on se ramène facilement à des problèmes concernant les quatre catégories fondamentales (C1-4). Mais même là où cette réduction n'est pas pratiquable, le <u>calcul étranger</u> paraît toujours devoir permettre le calcul de <u>tous</u> les invariants holomorphes des objets envisagés. C'est là une affirmation qu'on ne saurait certes prouver (car on peut toujours produire de nouvelles catégories plus ou moins artificielles d'objets locaux) mais qui paraît néanmoins très plausible et qui n'a en tout cas jamais été prise en défaut jusqu'à présent. Deux mots à ce sujet, pour écarter deux objections :

(i) Le fait que la <u>classification formelle</u> des objets des catégories (C5), (C7), (C8) etc... (tout comme celle des catégories fondamentales (C1), (C2), (C3), (C4)) soit souvent difficile (*), ou plus exactement fastidieuse, ne préjuge en rien du calcul des invariants holomorphes qui, rappelons-le, a pour seul préalable la classification <u>discrète</u> (voir §1.1).

(ii) Le fait que la notion d'<u>intégrale formelle</u>, définie pour les quatre catégories fondamentales (C1), (C2), (C3), (C4), ne s'étende pas aux autres catégories, est lui aussi sans gravité. Souvenons-nous en effet que les intégrales formelles ne sont pas <u>indispensables</u>, mais simplement commodes : de toutes les fonctions résur-

---

(*) Pour la catégorie (C5) des n-formes différentielles locales, voir [Mr 7] gentes fabriquables à partir des objets (des quatre catégories fondamentales (C1-4)), ce sont elles qui vérifient les équations de résurgence les plus simples ("équation du pont"). Mais il n'empêche que pratiquement toutes les fonctions résurgentes fabriquées intrinsèquement (*) à partir d'un objet local - que celui-ci appartienne ou non à l'une des quatre catégories fondamentales - vérifient des équations de résurgence qui, proprement analysées, livrent <u>tous</u> les invariants holomorphes de l'objet (**). On n'est d'ailleurs pas tenu de se limiter aux fonctions résurgentes fabriquées intrinsèquement à partir de l'objet local $\mathcal{O}b$: on peut aussi envisager les changements de variables formels h qui conjuguent l'objet $\mathcal{O}b$ à un objet $\mathcal{O}b'$ arbitrairement choisi dans la classe formelle de $\mathcal{O}b'$ (et pouvant lui être infiniment voisin : $\mathcal{O}b' = \mathcal{O}b + \delta\mathcal{O}b$). Le changement de variable $h : x_i \longmapsto h_i(x)$ est résurgent par rapport à certaines variables z liées aux x_i et cette résurgence livre, mêlé ,les invariants holomorphes de $\mathcal{O}b$ et ceux de $\mathcal{O}b'$. Il ne reste plus qu'à les <u>séparer</u>, ce qui est toujours possible, et même facile, du fait de la forme très particulière des équations de résurgence vérifiées par h . Le lecteur est invité à se faire la main en appliquant cette méthode à différents objets des catégories fondamentales (C1), (C2), (C3), (C4), puis à passer aux autres catégories.

Donnons pour terminer trois exemples de problèmes de classification (ou apparentés) qui nous ont été proposés par des collègues et qui portent sur des objets locaux tirés de catégories "accessoires" C_i ($i \geqslant 5$). Tous ont une origine naturelle, que nous indiquons.

(*) C'est-à-dire sans adjonction de données parasites.

(**) Si par exemple l'objet est un difféo local f de $\mathbb{C}$ tangent à l'identité on peut prendre comme fonction resurgente ${}^*f$ ou f^* ou f_* (voir [E2]). Si c'est un difféo de $\mathbb{C}^\nu$ tangent à l'identité, on peut prendre les composantes X_i de son générateur infinitésimal X , puis les rapporter à des variables z_i bien choisies. Etc...

Premier exemple : Classification et stabilité des diagrammes.

Dans sa thèse d'Etat [Du] J.-P. DUFOUR étudie divers problèmes touchant soit à la classification des diagrammes d'applications locales (c'est la catégorie C6 ci-dessus) soit à leur stabilité (un diagramme est dit stable s'il est conjugable à tous les diagrammes infiniment voisins). J.-P. DUFOUR s'intéresse surtout aux diagrammes réels d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais il signale aussi les difficultés (négligées par V.I. ARNOL'D) qui surgissent lors du passage à l'analytique, surtout si les diagrammes envisagés contiennent des sous-diagrammes du type :

(11.6.1) $$\mathbb{R}^r_{,0} \xleftarrow{f_1} \mathbb{R}^s_{,0} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^t_{,0}$$

Même lorsque $r = s = t = 1$, la classification analytique des diagrammes de type (11.6.1) n'est pas triviale, en particulier pour ceux qui sont formellement équivalents à

(11.6.2) $$x^2 \longleftarrow x \longrightarrow x^2 + x^3$$

J.P. DUFOUR ramène la classification analytique de ces derniers diagrammes au problème suivant. Etant donné deux involutions locales g_1 et g_2 de la forme :

(11.6.3) $$g_i(x) = -x - x^2 - x^3 + o(x^3) \qquad (i = 1, 2)$$

à quelles conditions les difféos locaux h_1 et h_2 :

(11.6.4) $$h_i = g_i \circ \tau \qquad \text{avec } \tau(x) \equiv -x \qquad (i = 1, 2)$$

sont-ils analytiquement conjugués ? La théorie des difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité (cf. §5.1) fournit des conditions nécessaires et suffisantes en termes d'invariants A_ω et une étude facile livre les contraintes supplémentaires auxquelles sont soumis ces A_ω du fait de la réalité des h_i et de leur factorisation (11.6.4) en produits d'involutions.

Plus généralement, posant le problème de la classification et de la stabilité des diagrammes analytiques du type :

$$
(11.6.5) \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^{n_1}_{,0} \\
\mathbb{R}^{n_0}_{,0} \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "g_2"] \arrow[dr, "g_r"'] & \mathbb{R}^{n_2}_{,0} \\
 & \mathbb{R}^{n_r}_{,0}
\end{tikzcd}
$$

J.-P. DUFOUR est conduit à des systèmes d'équations :

$$
(11.6.6) \qquad g_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}(x)\, \varphi_j(g_j(x)) \qquad (i=1,\dots,r)
$$

d'inconnues $\varphi_1, \dots, \varphi_r$. Or de tels systèmes ont des solutions résurgentes et exceptionnellement analytiques, les cas d'analyticité correspondant justement à l'annullation de certains invariants holomorphes associés au système et obtensibles par le calcul étranger.

Deuxième exemple : produits nilpotents de difféomorphismes nilpotents.

Au terme de son étude [Mou](*) sur les équations différentielles analytiques degénérées transverses :

$$
(11.6.7) \qquad y\,dy + (\text{degré} \geqslant 3) = 0
$$

et de leur holonomie évanescente, R. MOUSSU est conduit à considérer les systèmes :

$$
(11.6.8) \qquad \overset{2}{f} = \overset{3}{g} = \overset{6}{(f\circ g)} = \text{identité} \qquad (f, g : \mathbb{C}_{,0} \to \mathbb{C}_{,0})
$$

et plus généralement :

$$
(11.6.9) \qquad \overset{m}{f} = \overset{n}{g} = \overset{r}{(f\circ g)} = \text{identité} \qquad (r = \text{p.p.c.m. de } m \text{ et } n)
$$

et à se demander si de tels systèmes admettent des solutions non-triviales (c'est-à-dire des difféos locaux analytiques non simultanément homographiques). La réponse est oui, avec cette précision qu'en sus de leurs solutions analytiques non triviales

(*) En rapport avec une conjecture de R. Thom.

les systèmes (11.6.8) et (11.6.9) admettent aussi des solutions résurgentes remarquables. Voir [E].

Troisième exemple : classification des hypersurfaces réelles de .

Dans leur article [M W] J. MOSER et S. WEBSTER montrent qu'au voisinage des points génériques la classification des surfaces de $\mathbb{C}^2$ de dim. réelle 2 est aisée et qu'ailleurs elle se ramène à la classification analytique des difféos locaux f de $\mathbb{C}^2$ qui sont tangents à l'identité et produits de deux involutions :

(11.6.10) $$f = g_1 \circ g_2 \quad \text{avec} \quad g_1^2 = g_2^2 = \text{identité}$$

La classification analytique de tels f se fait avec les méthodes du §5.3.

SECTION 11.7 : OBJETS LOCAUX p-ADIQUES

Les objets locaux à coefficients p-adiques ont les mêmes invariants formels que les objets locaux à coefficients complexes, mais ils ne possèdent pas d'invariants holomorphes (*). Ceci tient essentiellement à ce que $n!$ (comme nombre p-adique) décroit lorsque n croit (comme entier ordinaire). Plus précisément, si on définit la norme p-adique w par :

(11.7.1) $$w(n) = \exp(-r) \quad \text{si} \quad n = p^r n'/n'' \quad \text{avec} \quad (n',p) = (n'',p) = 1$$

on aura pour la norme de $n!$ l'encadrement :

(11.7.2) $$\exp\left(-\frac{p^{s+1}-1}{p-1}\right) \leq w(n!) \leq \exp\left(-\frac{p^{s}-1}{p-1}\right)$$

avec

(11.7.2bis) $$s = \text{partie entière de } \frac{\log n}{\log p} \qquad (n \in \mathbb{N}\,;\ p \text{ premier})$$

Par suite :

(*) au sens strict, comme toujours.

(11.7.3) $$0 < c_1 \leq \liminf_n |w(n!)|^{1/n} \leq \limsup_n |w(n!)|^{1/n} \leq c_2 < \infty \quad (c_1, c_2 \text{ ctes})$$

Il en résulte que la transformation de Borel

(11.7.4) $$z^{-n} \longmapsto \zeta^{-(n-1)} / (n-1)!$$

ne peut ni rétablir ni détruire la convergence : elle peut seulement multiplier les rayons de convergence par un facteur fini.

Le lecteur vérifiera par exemple que les difféos locaux à coefficients p-adiques qui sont formellement conjugués à l'homographie :

(11.7.5) $$t \longmapsto t / 1 - t$$

lui sont aussi analytiquement conjugués (contrairement à ce qui se passait sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$). De même, les équations p-adiques analytiques et formellement conjuguées à l'équation d'Euler :

(11.7.6) $$t^2 \frac{d}{dt} x(t) = \omega \, x(t) \qquad (\omega \text{ } p\text{-adique})$$

lui sont analytiquement conjuguées. Ainsi, même en cas de convergence de la série :

(11.7.7) $$\sum a_n \, \omega^{n-1} / (n-1)! \qquad (\omega \text{ et } a_n \text{ } p\text{-adiques})$$

sa somme <u>n'est pas</u> un invariant holomorphe de l'équation affine :

(11.7.8) $$t^2 \frac{d}{dt} x(t) = \omega \, x(t) + \sum a_n t^n$$

laquelle n'en possède d'ailleurs <u>aucun</u> (contrairement aux équations correspondantes sur les corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

SECTION 11.8 : LA NOTION GENERALE DE RESURGENCE EQUATIONNELLE.

Lorsqu'une équation (différentielle, fonctionnelle, etc...) à coefficients analytiques :

(11.8.1) $$E(f) = 0 \qquad (f = f(t))$$

ou un système de telles équations possèdent une ou plusieurs solutions formelles $f(t)$ et que celles-ci sont résurgentes en t ou en une variable $z = h(t)$ élémentairement liée à t, par exemple :

(11.8.2) $$z = t^{-p} \quad \text{ou} \quad z = t^{-p} \log^q t \qquad (p, q \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Q})$$

on dit qu'on a affaire à de la <u>résurgence équationnelle</u>. Ce type de résurgence est particulièrement facile à étudier, car il existe des règles simples permettant de calculer le réseau de résurgence Ω de f et d'autres règles (*) permettant, pour chaque $\omega \in \Omega$, de former à partir de l'équation (11.8.1) une nouvelle équation :

(11.8.3) $$E_\omega (f, \Delta_\omega f) = 0$$

vérifiée par la dérivée étrangère $\Delta_\omega f$ et <u>linéaire homogène</u> en celle-ci. Qui plus est, toutes les dérivées étrangères :

(11.8.4) $$[\ldots[\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}] \ldots \Delta_{\omega_n}] \cdot f \quad \text{avec} \quad \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \ldots \dot{\omega}_n = \dot{\omega}$$

vérifient aussi l'équation (11.8.3), ce qui impose aux <u>idéaux annulateurs étrangers</u> une forme bien particulière (voir §11.10).

Voici un exemple frappant de résurgence équationnelle. Fixons ν difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité :

(11.8.5) $$f_i : t \longmapsto f_i(t) \quad \text{avec} \quad f_i(0) = 0, \; f_i'(0) = 1, \; f_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$$

et considérons l'équation :

(11.8.6) $$E(f) = 0 \iff \overset{n_1}{f} \circ f_1 \circ \overset{n_2}{f} \circ f_2 \cdots \overset{n_\nu}{f} \circ f_\nu (t) \equiv t$$

(*) du type (1.3.60) et (1.3.61).

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et avec $\overset{n}{f}$ désignant l'itérée n-ème de f . C'est, dans le groupe des difféos locaux, l'équation la plus générale qu'on puisse envisager. On montre que sa solution formelle, quand elle existe (*) :

(i) est toujours résurgente en une variable $z = t^{-p}$ pour un entier positif p bien déterminé.

(ii) possède un réseau de résurgence Ω engendré par les racines λ_i d'un certain polynôme exponentiel :

$$P(\lambda) = \sum \alpha_j \, e^{\beta_j \lambda} \tag{11.8.7}$$

fabriqué avec les premiers coefficients de Taylor des f_j .

(iii) possède des dérivées étrangères $\Delta_\omega f$ dont chacune vérifie une équation linéaire homogène (11.8.3) que l'on forme facilement à partir de (11.8.6) en appliquant la règle (1.3.61) ou, mieux, sa variante (1.3.64).

La résurgence équationnelle couvre un champ immense, attendu que "neuf fois sur dix" les <u>équations analytiques singulières</u> $E(f(t)) = 0$ (c'est-à-dire les équations locales - ou systèmes locaux - à coefficients analytiques mais à solutions formelles divergentes) ont leurs solutions $f(t)$ <u>résurgentes</u> en une variable z déduite de t .

La principale application de la <u>résurgence équationnelle</u> est sans doute la <u>classification analytique des objets locaux</u> (**), à laquelle ce livre est consacré, mais c'est loin d'être la seule.

SECTION 11.9. AUTRES SOURCES DE RESURGENCE

Enumérons les six principales sources de résurgence qui se sont dégagées à l'heure actuelle. L'énumération et la nomenclature que nous proposons ont évidemment

(*) Quand $n_1 + \dots n_\nu \neq 0$ la solution formelle existe toujours et est unique.

(**) car celle ci conduit à des systèmes $E(f) = 0$ du type (1.5.1) ou (1.5.2).

un caractère provisoire : les développements futurs de la théorie conduiront sans doute à les retoucher quelque peu.

§11.9.a. Résurgence équationnelle

C'est la résurgence qui est utilisée tout au long de cet ouvrage (Tome 3). Elle déborde toutefois le cadre de l'analyse des objets locaux, comme nous venons de voir àla section précédente (§11.8). La résurgence équationnelle est, proprement, celle que présentent les solutions d'équations ou de systèmes analytiques singuliers $E(\mathfrak{f}) = 0$ par rapport à la variable même (où aux variables) de ces équations ou systèmes - qu'ils soient différentiels, aux différences, ou fonctionnels les plus généraux. La résurgence équationnnelle est peut-être la plus importante de toutes et en tout cas la plus aisée à étudier, du fait surtout de la simplicité des équations de résurgence auxquelles elle donne lieu. Voir formule (11.8.3).

§11.9.b. Résurgence de synthèse.

Cette résurgence très remarquable se rencontre dans la synthèse canonique des objets locaux, plus précisément des objets unilatéraux. Nous l'étudierons en détail dans [E4] mais nous en avons déjà rencontré un exemple au §11.3. La résurgence de synthèse donne lieu à des équations de résurgence fort complexe (*) mais n'en possède pas moins des idéaux étrangers très simples (**).

§11.9.c. Résurgence quantique (ou planckienne)

Cette résurgence tire son nom de la mécanique quantique, mais se rencontre aussi dans de nombreuses autres questions. Nous l'étudierons en détail dans [E5] mais nous allons tâcher d'en donner ici une première idée (***).

(*) voir par exemple (11.3.27), (11.3.28), (11.3.29).

(**) voir §11.10 et aussi [E5] et [e1]

(***) voir aussi [E1]

Pour la plupart des équations ou systèmes $E(f)=0$ à solutions $f=f(z)$ résurgentes en z et de réseau $\mathcal{R}\Omega$ (résurgence équationnelle) on a une notion naturelle de paramètre planckien. Il s'agit d'un paramètre x :

(i) qui se prête à des développements formels en x^{-1}

(ii) qui intervient comme facteur d'homothétie dans le réseau de résurgence $\mathcal{R}\Omega$

(iii) qui vérifie quelques conditions supplémentaires (Voir [E5]).

Plutôt que d'entrer dans les détails, il sera plus parlant de donner deux exemples de paramètre planckien sans rapport avec la mécanique quantique, puis d'aborder l'équation de Schrödinger.

Le premier exemple est celui des systèmes différentiels, analytiques à l'infini, formellement conjugués à :

(11.9.1) $$\frac{d}{dz} Y_i(z) = x\,\lambda_i\, Y_i(z) \qquad (1\le i\le \nu\,;\ \lambda_i \text{ non résonnants})$$

et du type :

(11.9.2) $$\frac{d}{dz} y_i(z) = x\,\lambda_i\, y_i(z) + \varphi_i(z, y(z)) \qquad (1\le i\le \nu\,;\ \varphi_i(z,y)\in\mathbb{C}\{z^{-1},y\})$$

Le second exemple est celui des systèmes aux différences, analytiques à l'infini, formellement conjugués à :

(11.9.3) $$Y_i(z+x^{-1}) = e^{\lambda_i}\, Y_i(z) \qquad (1\le i\le \nu\,;\ \lambda_i \text{ non résonnants})$$

et du type :

(11.9.4) $$y_i(z+x^{-1}) = e^{\lambda_i}\, y_i(z) + x^{-1}\varphi_i(z, y(z)) \qquad (1\le i\le \nu\,;\ \varphi_i(z,y)\in\mathbb{C}\{z^{-1},y\})$$

Les solutions formelles des systèmes (11;9.2) et (11.9.4) ainsi que les séries formelles qui les conjuguent respectivement à (11.9.1) et (11;9.3), sont développables en puissances négatives de x . Elles sont également résurgentes en z , avec un réseau de résurgence Ω engendré dans le premier cas par les scalaires

(11.9.5) $\quad x\,\lambda_1 , x\,\lambda_2 , \ldots , x\,\lambda_\nu$

et dans le second cas par les scalaires :

(11.9.6) $\quad x\,\lambda_0 , x\,\lambda_1 , x\,\lambda_2 , \ldots , x\,\lambda_\nu \qquad (\lambda_0 = 2\pi i)$

Le paramètre x est donc bien un facteur d'homothétie pour Ω. Ainsi les conditions (i) et (ii) sont-elles satisfaites. Les conditions subsidiaires (iii) l'étant aussi (voir [E5]) il apparaît que x est pour les systèmes (11.9.2) et (11.9.4) un paramètre planckien.

Revenons maintenant à l'équation générale $E(f) = 0$ et supposons que tous ses coefficients soient holomorphes en z à l'infini et prolongeables analytiquement "partout sans coupure", c'est-à-dire sans autres singularités qu'isolées. Soit S l'ensemble de ces singularités. Le fait remarquable est que la (ou les) solution f de $E(f) = 0$ est résurgente non seulement en la variable z (résurgence équationnelle) mais aussi en le paramètre planckien x (résurgence quantique) et que ces deux résurgences sont en dualité, au sens que voici.

D'abord, les seules dérivations étrangères en z susceptibles d'agir sur f sont de la forme ${}^{z}\Delta_{x\omega}$ avec ω parcourant un ensemble fixe $\boxed{\square}$, tandis que les seules dérivations étrangères en x susceptibles d'agir sur f sont de la forme ${}^{x}\Delta_{z\omega+\alpha\omega}$ avec ω dans $\boxed{\square}$ et α dans S . On a donc un réseau de résurgence en z

(11.9.7) $\quad {}^{z}\Omega = x\,\boxed{\square}$

"dual" du réseau de résurgence en x :

(11.9.8) $\quad {}^{x}\Omega = \bigcup_{\alpha\in S} (z+\alpha)\,\boxed{\square}$

Ensuite et surtout, les dérivées étrangères en z et en x qui se correspondent vérifient les mêmes équations linéaires homogènes. Autrement dit :

$$(11.9.9)\quad \left\{\begin{array}{l} E_{x\omega}\left(f, {}^{z}\Delta_{x\omega} f\right) = 0 \\ E_{z\omega+\alpha\omega}\left(f, {}^{x}\Delta_{z\omega+\alpha\omega} f\right) = 0 \\ \text{avec } E_{x\omega} = E_{z\omega+\alpha\omega} = E \end{array}\right. \quad \left\Vert \begin{array}{l} \omega \in \mathbb{O} \\ \\ \alpha \in S \end{array}\right.$$

On montre à partir de là que les équations de résurgence en x (résurgence quantique) ont la même forme que les équations de résurgence en z (résurgence équationnelle) (*).. La seule différence est que dans les équations de résurgence en z interviennent des coefficients $A_{\omega}(x)$ qui sont des <u>fonctions entières</u> de x tandis que dans les équations de résurgence en z interviennent des coefficients $A_{\omega\|\alpha}(x)$ qui sont des <u>fonctions résurgentes</u> de x (ici $\omega \in \mathcal{O}$ et $\alpha \in S$) et qu'à ce titre ils vérifient des équations de résurgence (en x) avec un réseau fixe engendré par les différences $\alpha-\beta$ $(\alpha, \beta \in S)$.

Comme enfin des liens cachés rattachent les coefficients $A_{\omega}(x)$ aux coefficients $A_{\omega\|\alpha}(x)$ ou plutôt à leurs "modèles sectoriels", on aboutit à des fonctions de x qui possèdent une double nature (fonctions entières et fonctions résurgentes), d'où s'ensuivent de très riches conséquences (**).

Lorsque les coefficients de l'équation ou du système $E(f) = 0$, comme fonctions de z , possèdent des singularités essentielles à l'infini, la résurgence en z disparaît évidemment. Mais la résurgence en x peut se maintenir et se maintient en général, pourvu que les coefficients en question, comme fonctions de z , vérifient des conditions (pas très sévères) de croissance uniforme à l'infini. La résurgence quantique est donc largement indépendante de la résurgence

(*) On trouvera trois exemples concrets dans [E] où les équations (5.12), (5.13) et (5.31) font pendant respectivement aux équations (5.6), (5.7) et (5.30).

(**) Voir [E5] et aussi les formules (5.6), (5.7), (5.17), (5.18) de [E1].

équationnelle : elle peut survivre à sa disparition. Cependant - chose remarquable - les équations de résurgence en x conservent leur forme, duale des équations de résurgence en z, même lorsque ces dernières disparaissent !

L'équation de Schrödinger unidimensionnelle et indépendante du temps :

$$\frac{d^2}{dq^2}\,\psi = \frac{x^2}{4}\,W(q)\,\psi \qquad \left(x = 2/\hbar,\ W(q) = V(q) - E\right) \tag{11.9.10}$$

fournit peut-être le plus bel exemple de "paramètre planckien" et de "résurgence quantique" en même temps que la justification de cette terminologie.

Lorsque $W(q)$ est polynomial de degré ν ou plus généralement méromorphe à l'infini avec pôle d'ordre ν, on a résurgence équationnelle en $z = q^{\nu+2/2}$.

Lorsqu'en outre la fonction $H(z)$ construite à partir de $W(q)$ selon :

$$z = z(q) = \int_0^q \sqrt{W(q')}\, dq' \tag{11.9.11}$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\,\frac{q''}{q'} = -\frac{1}{2}\,\frac{\nu}{\nu+2}\,z^{-1} + \ldots \qquad \left(q' = \frac{d}{dz}q\ ;\ q'' = \frac{d^2}{dz^2}q\right) \tag{11.9.12}$$

on a <u>résurgence équationnelle</u> en $z = q^{\nu+2/2}$.

Lorsqu'enfin $H(z)$ reste prolongeable partout sans coupure mais que $W(q)$ perd sa méromorphie à l'infini, seule subsiste la <u>résurgence quantique</u> en x (*)

§11.9.c. Résurgence paramétrique.

Elle apparaît surtout à propos des équations analytiques singulières $E(f) = 0$ et elle généralise la résurgence quantique. Alors que la résurgence quantique est relative au <u>paramètre planckien</u> x, qui est un facteur d'homothétie pour le réseau $\partial\Omega$ de résurgence en z (résurgence équationnelle), la résurgence

(*) Pour toutes ces questions voir [E5]

paramétrique est relative à tout paramètre entrant dans la définition de ce même réseau $\mathfrak{z}\Omega$ et, en particulier, aux générateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ de $\mathfrak{z}\Omega$. Ainsi l'équation de Schrödinger à une dimension (11.9.10) est-elle une importante source de résurgence paramétrique (*). Tout comme la résurgence quantique, la résurgence paramétrique est relativement indépendante de la résurgence équationnelle : elle peut subsister lorsque cette dernière disparaît.

§11.9.e. Résurgence collatérale (ou "résurgence en $\mathcal{u}$ ")

Nous l'avons entrevue au §10.5 à propos des contraintes a priori (**) que vérifient les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ des objets locaux (***). Nous l'étudierons plus en détail dans [E4].

§11.9.f. Résurgence synthétique (ou artificielle)

On se gardera de la confondre avec la résurgence de synthèse (voir §11.9.b). La résurgence synthétique ou artificielle intervient dans le problème dit de la représentation étrangère des algèbres de Lie et qui consiste en ceci : étant donné une algèbre de Lie $\mathbb{L}$ de dimension finie, une base $\partial_1, \ldots, \partial_\nu$ de cette algèbre et des points distincts $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ de $\mathbb{C}^*$, construire une algèbre $\mathcal{R}$ de fonctions résurgentes dont l'idéal annulateur étranger (****) $\mathfrak{I}(\mathcal{R})$ soit exactement le noyau de l'homomorphisme

$$\Delta_{\omega_i} \longmapsto \partial_i \qquad (i=1,\ldots,\nu) \tag{11.9.13}$$

(*) On a par exemple résurgence par rapport aux intégrales d'action $\omega_{ij} = \oint_{\gamma_{ij}} \sqrt{W(q)}\, dq$ et à diverses puissances des coefficients du polynôme $W(q)$. Cette circonstance est cruciale pour le calcul du spectre en énergie. Voir [E5].

(**) il s'agissait des contraintes exactes infinies ou "contraintes en $\mathcal{u}$ ".

(***) à résonance multiple $(\rho^+ \geqslant 2)$.

(****) Voir §11.10.

Il s'agit, si l'on préfère, de construire une algèbre de résurgence dont l'algèbre agissante (*) $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ soit isomorphe à une algèbre de Lie $\mathbb{L}$ donnée. La construction est possible de multiples manières mais livre les résultats les plus intéressants quand on impose à $\mathcal{A}$ d'être canonique (**) et stable pour la dérivation naturelle. Pour assurer cette dernière propriété, il est souvent commode de remplacer l'homomorphisme (11.9.13) par l'homomorphisme :

$$[\Delta_{\omega_i}, \Delta_{-\omega_i}] \longmapsto \partial_i \qquad (i = 1,\dots,\nu) \tag{11.9.14}$$

car les $[\Delta_{\omega_i}, \Delta_{-\omega_i}]$, au contraire des Δ_{ω_i}, commutent avec la dérivation naturelle $\partial/\partial z$.

SECTION 11.10. IDEAL ANNULATEUR ET ALGEBRE AGISSANTE. PONT ET EQUATION DU PONT. RESURGENCE RIGIDE.

§11.10.a. Idéal annulateur et algèbre agissante.

A toute fonction résurgente φ (resp. à toute algèbre $\mathcal{A}$ de telles fonctions) on associe son idéal annulateur étranger $\mathfrak{I}$. C'est par définition le plus grand idéal de dérivations étrangères qui annulle φ (resp. $\mathcal{A}$) :

$$\mathfrak{I}.\varphi = 0 \qquad (\text{resp. } \mathfrak{I}.\mathcal{A} = 0) \tag{11.10.1}$$

Quant au quotient $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ de $\mathbb{A}$ (algèbre de Lie libre engendrée par toutes les dérivations étrangères) par l'idéal $\mathfrak{I}$, il est dit algèbre étrangère agissante. Plus encore que les équations de résurgence ou les constantes qu'elles comportent, l'idéal $\mathfrak{I}$ et l'algèbre $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ sont les objets les plus "intrinsèques", les plus "invariants" qu'on puisse attacher à φ ou $\mathcal{A}$. Les connaître, c'est connaître l'essentiel.

(*) Voir §11.10

(**) C'est-à-dire engendrable par les monômes canoniques $\mathcal{U}^{\omega_1,\dots,\omega_r}$ de §1.4.d.

Dans les calculs pratiques on se limite évidemment aux seules dérivations étrangères Δ_ω à indice ω pris dans le réseau de résurgence Ω de φ ou $\mathcal{A}$, puisque ce sont les seules dérivations susceptibles d'agir sur φ ou $\mathcal{A}$ sans les annuler. On utilise alors les identités :

$$(11.10.2) \qquad \mathbb{\Delta} / \mathfrak{I} = \mathbb{\Delta}(\Omega) / \mathfrak{I}(\Omega) \quad ; \quad \mathfrak{I}(\Omega) = \mathfrak{I} \cap \mathbb{\Delta}(\Omega)$$

où $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ désigne l'algèbre de Lie libre engendrée par les Δ_ω $(\omega \in \Omega)$ et où $\mathfrak{I}(\Omega)$ désigne le plus grand idéal de $\mathbb{\Delta}(\Omega)$ qui annulle φ ou $\mathcal{A}$.

§11.10.b. Algèbres de Cartan et algèbre à la Cartan.

On constate dans la plupart des applications importantes que l'idéal annulateur $\mathfrak{I}(\Omega)$ est le noyau d'un homomorphisme d'algèbres de Lie :

$$(11.10.3) \qquad \Delta_\omega \longmapsto \partial_\omega \qquad \text{(à prolonger par linéarité)}$$

associant à chaque dérivation étrangère Δ_ω une dérivation ∂_ω qui est un opérateur ordinaire en un nombre fini de variables $u_1, \ldots, u_\nu$.

L'algèbre étrangère agissante $\mathbb{\Delta}(\Omega) / \mathfrak{I}(\Omega)$ se trouve alors être isomorphe à une algèbre d'opérateurs différentiels ordinaires. Lorsque celle-ci est engendrée par des opérateurs différentiels du type :

$$(11.10.4) \qquad u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \leq i \leq \nu \;;\; n_j \in \mathbb{N})$$

on dit que c'est une algèbre de Cartan. Lorsqu'elle est engendrée par des opérateurs différentiels du type :

$$(11.10.5) \qquad u_1^{n_1} \ldots u_\nu^{n_\nu} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (1 \leq i \leq \nu \;;\; n_j \in \mathbb{Z})$$

on dit que c'est une algèbre à la Cartan.

Ainsi donc, bien que les algèbres agissantes puissent a priori être "n'importe quoi" (*), celles auxquelles on a affaire en pratique sont "quelque chose de très particulier". Ainsi la résurgence équationnelle donne-t-elle généralement lieu à des algèbres agissantes de Cartan, tandis que les résurgences quantique ou de synthèse donnent lieu à des algèbres agissantes à la Cartan. Pour la résurgence équationnelle générale, cela s'explique par la forme particulière des équations de résurgence (11.8.3) et (11.8.4). Pour la résurgence équationnelle issue d'objets locaux, cela s'explique encore plus simplement par l'équation du pont. Pour la résurgence quantique, c'est un peu moins transparent (**) mais cela s'explique quand même à partir du principe général de dualité signalé en (11.9.9). Pour la résurgence de synthèse, c'est très mystérieux, mais encore vrai. Vérifions-le sur l'exemple de l'équation (11.3.29). Tout repose sur l'identité :

(11.10.6) $$C_{m+n}\left[\overset{\bullet}{\Delta}_m , \overset{\bullet}{\Delta}_n\right] Q = (m-n)\, C_m C_n \overset{\bullet}{\Delta}_{m+n} Q \qquad (***)$$

qui fait que l'idéal annulateur étranger (****) de Q (*****) coïncide avec le noyau de l'homomorphisme :

(11.10.7) $$\overset{\bullet}{\Delta}_n \longmapsto - C_n\, u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \qquad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

D'où une algèbre agissante à la Cartan et à une seule variable u . L'identité cruciale (11.10.6) découle des relations :

(*) et qu'on puisse effectivement construire des $\mathcal{A}$ d'algèbre agissante arbitraire.

(**) en particulier pour ce qui est des algèbres agissantes symplectiques qui apparaissent très inopinément dans l'équation de Schrödinger à potentiel polynomial. Voir [E5] et [e1] formules (6.13) et (6.15).

(***) pour alléger les notations, on suppose que le niveau p (voir (11.3.1)) est égal à 1 si bien que m, n parcourent $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}^*$.

(****) relativement à la variable Δ.

(*****) et donc aussi de K et A .

$$(11.10.8)\quad \begin{cases} (1/C_m C_n)\ \overset{s}{\dot{\Delta}}_m \overset{s}{\dot{\Delta}}_n Q = \\ Q''\ (P^+ (e^{-mQ}/Q'))\ (P^+(e^{-nQ}/Q')) \\ + Q'\ P^+((e^{-mQ}Q''/Q'Q')\ P^-(e^{-nQ}/Q')) \\ - Q'\ P^+((e^{-nQ}Q''/Q'Q')\ P^+(e^{-mQ}/Q')) \\ + m\ Q'\ P^+(e^{-mQ}\ P^-(e^{-nQ}/Q')) \\ - n\ Q'\ P^+(e^{-nQ}\ P^+(e^{-mQ}/Q')) \end{cases}$$

obtenues en itérant (11.3.29). Les simplifications qui s'opèrent lors du calcul de

$$\dot{\Delta}_m \overset{s}{\dot{\Delta}}_n Q - \overset{s}{\dot{\Delta}}_n \overset{s}{\dot{\Delta}}_m Q$$

et qui assurent (11.10.6), tiennent du miracle. Elles ne se produiraient pas si la résurgence de Q était régie par des équations tant soit peu différentes — si par exemple Q vérifiait non pas (11.3.29) mais les équations de résurgence plus simples en apparence :

$$\overset{s}{\dot{\Delta}}_n Q = C_n\ (P^0 + P^+)\ (e^{-nQ})$$

§11.10.c. Le pont et l'équation du pont.

Nous venons de constater que dans la plupart des cas importants, les algèbres agissantes étrangères étaient isomorphes à des algèbres de dérivations ordinaires. Cet isomorphisme, partout où il vaut, jette comme un pont entre les deux grands calculs différentiels - l'étranger et l'ordinaire. Toutefois, bien que la réalité du "pont" soit indubitable, les "vraies" raisons qui le font exister sont souvent difficile à cerner. A cet égard, l'analyse des objets locaux fait heureusement exception, puisque les intégrales formelles $x(z,u)$ associées à ces objets vérifient l'équation du pont, qui exprime que l'application à $x(z,u)$ d'un opérateur étranger $\dot{\Delta}_\omega$ équivaut carrément à celle d'un opérateur différentiel ordinaire $\mathbb{A}_\omega$.

§11.10.d. Résurgence souple et résurgence rigide.

Les résurgences équationnelle et de synthèse sont des cas particuliers de résurgence souple : elles donnent lieu à des équations de résurgence dont les coefficients peuvent varier continument, comme on le voit sur l'équation du pont ou les équations (11.3.29).

Au contraire, les résurgences quantique, parémétrique et collatérale sont de type rigide : les équations (5.18) et (5.33) de [e.1] par exemple comportent toujours des coefficients entiers ou rationnels invariables.

SECTION 11.11. DERNIERES REMARQUES. RESURGENCE ET REALITE.

Nous avons jusqu'ici étudié la résurgence pour elle-même, lui subordonnant tous les sujets abordés. Et ceci par méthode : le moyen de faire rendre le maximum à une idée nouvelle n'est-il pas de lui accorder, pour un temps, une position centrale ? (Après quoi les choses se décantent et chaque idée se retrouve à la place qui de droit lui revient). L'utilisateur a évidemment la tentation contraire : inféoder la théorie nouvelle aux théories déjà constituées auxquelles elle s'applique, et la confiner dans un rôle d'outil. Attitude naturelle de sa part, mais qui comporte un risque : celui de fausser les perspectives et de tarir à sa source la puissance inspiratrice et ordonnatrice de l'idée nouvelle-née. Pour nous, la résurgence est une théorie autonome, au sens plein, et dans ses rapports avec les théories contiguës, elle est maîtresse et non servante.

Nous croyons, pour tout dire, que le calcul étranger débouchera un jour sur un monde mathématique aussi riche que le calcul différentiel-et-intégral classique. Cette conviction semble exorbitante et elle a la vertu d'exaspérer les esprits habitués à jauger les idées mathématiques d'après le prestige de ceux qui les propagent ou l'ancienneté de la tradition dans laquelle elles s'inscrivent. Mais elle se fonde sur un fait massif, incontournable : à savoir que les algèbres de dérivations étrangères sont la seule incarnation naturelle des algèbres de Lie libres (de dimension finie ou infinie). Et elle s'appuie sur les succès déjà remportés par la théorie.

Les premières applications mathématiques du calcul étranger semblent en effet répondre au "rang nobiliaire" de l'idée centrale qui l'anime. Le présent ouvrage, très condensé et capable de développement en plusieurs directions, ne concerne qu'une seule application. Il aboutit, au fond, à classer tout ce qui est classable en fait d'objets analytiques locaux. Il s'inscrit d'ailleurs dans un cadre plus général, celui de la résurgence équationnelle. De cette dernière, il n'est peut-être pas exagéré de dire qu'elle parachève l'analyse complexe locale (à une variable). Elle montre en effet que les solutions locales d'une équation ou système (de quelque type que ce soit, mais à coefficients analytiques) sont soit analytiques, soit résurgentes en une variable idoine ou en plusieurs "variables parallèles", soit totalement erratiques. Enfin, à la résurgence équationnelle s'ajoutent déjà six sources autonomes de résurgence (voir §11.9), plus sans doute de nombreuses autres qui restent à découvrir et à explorer.

Qu'en est-il des applications physiques ? Les applications indirectes sont légion, puisque les équations de la physique (quantique surtout) conduisent très souvent à des solutions formelles qui se présentent sous forme de séries divergentes (de la variable ou de tel ou tel paramètre) mais qui, à l'examen, se révèlent Borel-sommables, avec des singularités précisément localisables et des comportements singuliers de type résurgent. Mais cette résurgence n'est somme toute qu'indirecte ou accidentelle, puisqu'induite par les équations différentielles ou aux dérivées partielles (à coefficients analytiques) dont regorge la physique. Or l'ubiquité de ces dernières tient en définitive à ce que la physique travaille sur un espace-temps envisagé comme variété analytique réelle. Pour parler d'une pertinence physique directe de la résurgence, il faudrait que celle-ci fût inscrite dans la nature même de l'espace-temps, ou d'un modèle cohérent de celui-ci, valable à une approximation donnée. Y-a-t'il des raisons de penser qu'un tel modèle existe ? Pas vraiment, semble-t-il, en dehors peut-être du rôle que joue la résurgence dans les problèmes de renormalisation. D'ailleurs, les recherches actuelles (1985), axées sur un espace-temps à dix dimensions, font naître l'espoir d'une solution naturelle et univoque aux problèmes de renormalisation. Il reste que ces constructions sont loin d'être achevées et que des difficultés subsisteront sans doute, dont la principale serait le paradoxe d'un substrat spatio-temporel ne contenant pas de points matériels, mais lui-même non quantifié ! (Au dire des physiciens, la quantification du substrat se heurte à des problèmes quasiment insurmontables). Ces difficultés paraissent justifier l'étude systématique de tous les modèles possibles d'espace, y compris les "variétés étrangères", qui ne sont réductibles à rien d'autre et possèdent des espaces tangents d'une extrême richesse.

PETITE BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE

§0. REFERENCES PAR ORDRE ALPHABETIQUE.

[Be.1][Be.2]	§7	[Ju]	§7	[Ok]	§2
[Bo]	§7	[Ki]	§4	[Ph]	§6
[Br.1]	§5	[Ko.1][Ko.2]	§2	[Praa]	§3
[Br.2]	§4	[Ml.1][Ml.2]	§1	[Ra.1]	§2
[Bra]	§3	[Ml.3]	§2	[Ra.2]	§3
[Din]	§6	[Mon]	§7	[Rü.1][Rü.2]	§5
[Du]	§7	[Mr.1]	§5	[Si.1][Si.2]	§2
[E...][e...]	§1	[Mr.2]	§7	[Sg.1][Sg.2]	§5
[Fr.1][Fr.2]	§5	[Mr.1][Mr.2]	§8	[Ta]	§4
[Il]	§4	[MW]	§7	[Vo.1][Vo.2]	§6
[Im.1][Im.2]	§3	[Nö]	§3	[Vor]	§4

§1. TRAVAUX SUR LA RESURGENCE.

Ce livre reposant à 98% sur le calcul étranger, nous commençons par citer nos propres livres [E.] et articles [e.] .

Etudes géométriques.

[E.0] J. ECALLE, Théorie des invariants holomophes. Thèse d'Etat, Orsay, Mars 1974.

On y classe, en autres, les difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité, mais géométriquement, sans résurgence.

[E.0.1] J.E., Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes. Journal de Math. P. et Appl., Tome 54, 1975.

Reprend la première partie de [E.0]. La seconde partie n'a pas été publiée en revue.

Série sur les fonctions résurgentes (3 volumes parus, 3 autres en préparation).

[E.1] J.E., Les algèbres de fonctions résurgentes (247p), Publ. Math. d'Orsay 1981.05

[E.2] J.E., Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération (284p), Publ. Math. d'Orsay 1981.06.

[E.3] J.E, L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux (600 p), Publ. Math. d'Orsay, 1985.

[E.4] J.E., La synthèse des objets locaux (En préparation. A paraître aux Publ. Math. d'Orsay).

[E.5] J.E., Introduction à la résurgence quantique (En préparation. A paraître aux Publ. Math. d'Orsay).

[E.6] J.E., Représentations étrangères des algèbres et groupes de Lie (En préparation. A paraître aux Publ. Math. d'Orsay).

Pour une brève analyse de [E.4], [E.5] et [E.6], voir ci-avant, foreword, p.17.

Résumés et mandalas.

[E.+] J.E., Cinq applications des fonctions résurgentes (110 p). Prépubl. Math. d'Orsay, 1984, T62.

Cette brochure regroupe cinq articles [e.1]-[e.5] énumérés ci-dessous.

[E.:] J.E., Précis de calcul étranger. La résurgence, son essence, ses principales applications (En préparation. Environ 250p).

[E.*] J.E., Mandala général sur la résurgence (2m × 3m)

Publication privée, disponible chez l'auteur à partir d'octobre 1986. Il s'agit d'un mandala (voir pp 19-23) résumant le calcul étranger, la théorie des moules et leurs principales applicaitons.

Articles.

[e.1] J.E., Singularités irrégulières et résurgence multiple. Actes du Coll. sur les équations différentielles dans le champ complexe, Luminy, Avril 1983.

[e.2] J.E., Classification analytique des systèmes et équations différentiels à plusieurs niveaux. Actes du Coll. sur les éq. diff. dans le champ complexe, Luminy, Avril 1983 (remis en juin 1983).

[e.3] J.E., Difféomorphismes nilpotents et de produit nilpotent. Actes du Coll. sur les éq. diff. dans le champ complexe, Luminy, Avril 1983.

[e.4] J.E., Itération et classification analytique des difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^\nu$. Actes du Coll. sur l'itération, Lochau, Septembre 1984.

[e.5] J.E., Classification analytique des champs de vecteurs locaux résonnants de $\mathbb{C}^\nu$. Actes de la 37ème rencontre entre physiciens et mathématiciens, Strasbourg, Octobre 1983.

[e.6] J.E., Sept problèmes de classification analytique (120p). Diffusion restreinte.1983.

[e.7] J.E., Classification analytique des champs hamiltoniens. Potentiels de résurgence et hamiltoniens étrangers. Actes du Coll. sur les éq. différentielles dans le champ complexes, Dijon, Mai 1985.

Divers.

Plusieurs autres articles et notes aux C.R. ont paru, qu'il ne vaut pas la peine de mentionner, sauf six, qui peuvent servir de jalons.

[e.8] J.E., Solution de deux problèmes liés à la théorie de l'itération (En russe). Vestnik Leningr. Gos. Univ., n°13, 1973, pp 166-167 (Remis en Septembre 1971).

On y construit tous les invariants holomorphes des difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité, mais géométriquement (sans résurgence). Cette note marque, si l'on veut, la naissance des invariants holomorphes (pour les objets locaux non linéaires, à une infinité d'invariants).

[e.9] J.E., C.R. Acad. des Sciences, Notes du 26 janvier 76 et du 26 avril 1976.

On y montre la résurgence des générateurs infinitésimaux f_* des difféos locaux f de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité. On donne les équations de résurgence vérifiées par les f_* et on fait le lien avec les invariants holomorphes. C'est en quelque sorte la date de naissance du calcul étranger.

[e.10] J.E., Un analogue des fonctions automorphes : les fonctions résurgentes 9p; Séminaire Choquet, 1977-78).

[e.11] J.E., Les fonctions résurgentes et leurs applications à l'analyse harmonique sur certains groupes (21p; Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay, 1977).

Ce sont les deux premiers exposés un peu systématiques publiés sur la résurgence.

[Ml.1] B. MALGRANGE. Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques. Sém. Bourbaki, n°582, nov. 1981. Astérisque 92-93, Soc. Math. France, Paris, 1982.

Ne parle pas de résurgence, mais contribua à populariser la problématique de la classification analytique des objets locaux non linéaires. Contient une démonstration originale de la liberté des invariants holomorphes.

[Ml.2] B. MALGRANGE. Introduction aux travaux de J. Ecalle. Prépubl. de l'Institut Fourier, n°24, Année 1984.

Bien que se restreignant à une seule application de la résurgence (aux difféos locaux de $\mathbb{C}$) ce texte et les exposés antérieurs qu'il résume firent beaucoup pour populariser les fonctions résurgentes, alors que nos propres efforts en ce sens étaient restés à peu près sans écho.

Aujoutons qu'en 1981 et toujours grâce à Malgrange nous sommes entré en contact avec A. Voros, qui nous a signalé, dans les méthodes semi-classiques de la mécanique quantique, une source intéressante et quasiment inépuisable de résurgence (Voir §6 ci-après).

La plupart des livres et articles qui suivent ont très peu de rapports avec le présent ouvrage (nous avouons d'ailleurs n'avoir, en dix ans de travail sur la résurgence, presque rien lu en mathématiques, sinon pour nous assurer que le sujet était nouveau) mais ils aident à comprendre ce qu'on peut et ce qu'on ne peut pas faire, en matière de classement d'objets locaux, sans l'aide de la résurgence. Ce qu'on peut, c'est essentiellement classer certains objets linéaires (équations différentielles ou aux différences) à un seul niveau (voir §§2 et 3 ci-après). Dans ce livre, nous avons volontairement relégué ces objets-là au second plan, car ils sont relativement élémentaires (les équations ou systèmes différentiels linéaires n'ont qu'un nombre fini d'invariants holomorphes) et, bien qu'ils relèvent comme les autres de l'équation du pont, leur linéarité empêche le calcul étranger de manifester à plein sa souplesse. D'ailleurs, dans l'analyse des objets linéaires, il n'existe pas de raisons contraignantes de préférer les dérivations étrangères Δ_ω aux opérateurs $\overset{+}{\Delta}_\omega$, de définition plus simple en apparence (*).

(*) Rappelons que $\overset{+}{\Delta}_\omega = 1+\Sigma \frac{1}{r!} \Delta_{\omega_1} \ldots \Delta_{\omega_r} \begin{pmatrix} \omega_1 + \ldots \omega_r = 0 \\ \omega_i/\omega \in \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$

§2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES.

[Ok] K.OKUBO. A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations. J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), pp 268-288.

[Ko.1] M. KOHNO. A two point connection problem for general linear ordinary differential equations. Hiroshima Math. J., 4 (1974), pp 293-338.

[Ko.2] M. KOHNO. A two point connection problem. Hiroshima Math. J., 9 (1979), pp 61-135.

[Si.1] Y. SIBUYA. Two point connection problems and the method of K. Okubo. Actes du Coll. sur les eq. diff. dans le champ complexe, Luminy, Avril 1983.

[Si.2] Y. SIBUYA. Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient (livre; 300p). North-Holland, 1975.

[Ju] W.B. JURKAT. Meromorphe Differentialgleichungen. Springer Lecture Notes in Math., n°637, Berlin (1978).

[Ra.1] J.-P. RAMIS. Devissage Gevrey. SMF, Astérisque 59-60 (1978) pp.173-204.

[Ml.3] B. MALGRANGE. La classification des connexions irrégulières à une variable. Publ. de l'Institut Fourier de St.-Martin-d'Hères, Mai 1982.

> En fait, ces questions semblent avoir fait l'objet de publications sans nombre. Pour plus d'indications bibliographiques, voir par exemple [Si.1], [Si.2], [Ra.1], [Ml.3].

§3. EQUATIONS AUX DIFFERENCES LINEAIRES.

[Nö] N.E. Nörlund. Vorlesungen über Differenzenrechnung. Chelsea, New York (1954).

> Ouvrage classique. Publié pour la première fois en 1923.

[Im.1] G.K. IMMINK. Asymptotics of analytic difference equations. Thèse d'Etat, Groningen, 1983. Lecture Notes in Math., 1085, Springer Verlag.

[Im.2] G.K. IMMINK. Resurgent functions and connection matrices for a linear homogeneous system of difference equations. Utrecht Univ., Preprint 347, September 1984. A paraître aux Actes du Coll. sur les Eq. Diff. dans $\mathbb{C}$, Luminy, Avril 1983.

[Praa] C. PRAAGMAN. Meromorphic linear difference equations. Thèse d'Etat, Groningen, Avril 1985.

[Bra] B.L.J. BRAAKSMA. Laplace integrals in singular differential and difference equations. Lecture Notes in Math., 827, pp 25-53, Springer Verlag.

[Ra.2] J.-P. RAMIS. Etude des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires algébriques. Présenté au Coll. d'analyse microlocale, Luminy, 1982 (A paraître).

On trouvera des indications bibliographiques très complètes dans [Im.1] et surtout [Praa]. A ce propos, C. Praagman nous communique, comme addition à sa bibliographie, les noms suivants : R.D. CARMICHAEL, M. GHERMANESCO, W.T. MARTIN, A.C. BURDETTE, M.G. MOORE, W. STRODL, A.F. LEONTEV, M.A. SOLDATOV, A.G. NAFTALEVITCH, A.A. MIROLYUBOV, B. EPSTEIN, T. FORL, M.A. KRAPLIN.

§4. CLASSIFICATION D'OBJETS LOCAUX NON LINEAIRES.

Les premiers objets non linéaires à être classés furent, en 1971, les difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité. Voir [e.8], [E.0], [E.2], [Ml.1]. Cette classification fut retrouvée indépendamment par :

[Vor] S.M. VORONIN. Classification des germes d'applications conformes $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ tangents à l'identité. (En russe). Funkt. Analyz. 15-1 (1981) pp 1.17

qui donna de la liberté des invariants holomorphes une démonstration nouvelle, différente de la nôtre (cf. [E.2] pp 451-456) mais proche de celle de Malgrange (cf [Ml.1]).

Antérieurement ou parallèlement à ces travaux, l'itération, surtout formelle, des difféos locaux de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}^{\nu}$ fit l'objet de nombreuses publications, de la part de E. JABOTINSKY, I.N. BAKER, G. SZEKERES, L. REICH, J. SCHWAIGER, E. PESCHL, A.R. KRÄUTER, O. SCHWEIGERT, I. KIMURA, etc... Pour une bibliographie récente, voir :

[Ta] G. TARGONSKI. Topics in iteration theory. Skripta Math., Skript 6, Göttingen et Zürich.

[Ki] T. KIMURA. On the iteration of analytic functions. Funk. Eqvacioj 14-3 (1971) pp 197-238.

Parmi ces auteurs, I.N. BAKER et T. KIMURA trouvèrent indépendamment les "éléments sectoriels" qui permettent de construire géométriquement les invariants holomorphes, mais n'en profitèrent pas pour introduire ces derniers. Quant à L. REICH et à ses élèves, ce qu'ils étudient sous le nom un peu déroutant d'applications "biholomorphes", ce sont en fait des applications formelles et formellement inversibles de $(\mathbb{C}^{\nu},0)$ dans lui-même.

[MR.1] J. MARTINET et J.P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. Preprint. IRMA juin 1981. Publié ensuite aux Publ. de l'IHES.

[MR.2] J. MARTINET et J.P. RAMIS. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., Série 4, t.16, p.571-621; preprint 1983.

Par des méthodes géométriques et cohomologiques, mais semble-t-il non constructives, ces deux articles classent analytiquement les germes de formes différentielles locales à deux variables, dans les deux cas critiques — dégénerescence et résonance (*) — et les mettent en rapport avec les classes analytiques de difféos de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité. Pour notre part, comprenant que la résurgence redonnait directement ces résultats, plus cent autres problablement inaccessibles à la géométrie, et réalisant, à la lecture de [MR1], l'intérêt que les gens semblaient maintenant porter aux problèmes de classification analytique, nous avons décidé de consacrer à ces problèmes l'intégralité du volume [E.3] et non le simple chapitre que nous annonçions dans [E.1] p2 et p14.

[Il] Y.S. IL'YASHENKO. Classification analytique des équations différentielles résonnantes du premier ordre. (A paraître. Signalé en 1983. Titre non garanti).

Cet article s'inspire de [MR1] pour anticiper les résultats de [MR2], d'ailleurs clairement annoncés dans [MR1].

[Br.2] A.D. BRJUNO. Forme analytique d'une équation différentielle. (En russe). Uspeh. Mat. Nauk, t.38, n°5, 1983.

Il s'agit d'une tentative pour associer à une équation différentielle analytique locale E une "forme analytique", c'est-à-dire une équation E_o analytiquement conjuguée à E et uniquement déterminée. Si la chose était possible, les coefficients de E_o fourniraient effectivement une famille libre et complète d'invariants analytiques. Toutefois, les énoncés de [Br.2] sont erronés (voir §§ 11.2,3,4), même dans la version anglaise corrigée qu'en a donnée Brjuno, et il y a de fortes raisons de penser que la construction de "formes analytiques" E_o simples est impossible, sauf dans quelques cas élémentaires (objets à un nombre fini d'invariants holomorphes).

§5. QUESTIONS DE PETITS ET DE TOUT-PETITS DIVISEURS

Les grands contributeurs sont ici SIEGEL, BRJUNO, MOSER et RÜSSMANN, qui établissent la linéarisabilité analytique des champs et difféos non résonnants sous des hypothèses diophantiennes assez fortes (Siegel)

(*) Voir la section §6.4 de ce livre. Pour nous, la dégénerescence est un cas particulier de résonance.

puis beaucoup plus faibles (Brjuno pour les champs; Moser et Rüssmann pour les difféos). Brjuno montre aussi que les champs résonnants ne sont analytiquement normalisables que très exceptionnellement. La distinction, essentielle à nos yeux, entre petits et tout-petits diviseurs est rarement (jamais ?) explicite.

[Sg.1] C.L. SIEGEL. Iteration of analytic functions. Ann. Math. 43, pp 607-612 (1942).

[Sg.2] C.L. SIEGEL. Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl, Math. Phys. Chem. Abt. 1952, pp 21-30.

[Br.1] A.D. BRJUNO. Analytic form of differential equations. Trans. Moscow. Math. Soc., Vol.25 (1971).

Pour un résumé très clair de cet article, on pourra consulter :

[Mr.1] J. MARTINET. Normalisation des champs de vecteurs holomorphes, d'après A.D. Brjuno. Séminaire Bourbaki, 1980-81, n°564-01.

[Rü.1] H. RÜSSMANN. Über die Iteration analytischer Funktionen. J. Math. Mech. 17, 523-532.

[Rü.2] H. RÜSSMANN. On the convergence of power series transformations of analytic mappings near a fixed point into a normal form. Preprint IHES, Paris, 1977.

[Fr.1] J.P. FRANCOISE. Thèse d'Etat. 1980. Parue au Bollettino della Unione Mat. Ital., 1981.

[Fr.2] J.P. FRANCOISE. Invariants analytiques des champs de vecteurs de $\mathbb{C}^n,0$. A paraître dans Ann. de l'Inst. Fourier.

Pour plus d'informations bibliographiques voir [Br.1] qui renvoie à E. SCHRÖDER, K.J. MOSER, A.N. KOLMOGOROV, A.M. LYAPUNOV, T.M. CHERRY, H. CREMER, S. STERNBERG, E. ZEHNDER et à beaucoup d'autres.

§6. PHENOMENES DE STOKES ET BOOTSTRAP ANALYTIQUE EN PHYSIQUE.

Ces questions relevant de [E.5], nous nous bornons ici à quelques noms. Les précurseurs sont BLOCH et BALIAN et la percée décisive est due à VOROS, qui a entrepris de rendre exacte la méthode dite semi-classique en mécanique quantique, en s'attaquant provisoirement à l'oscillateur quantique. Voir notamment :

[Vo.1] A. VOROS. The return of the quartic oscillator. The complex WKB method. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.29, n°3, 1983, pp 211-338.

Pour un exposé plus concis et d'esprit plus mathématique, voir :

[Vo.2] A. VOROS. Problème spectral de Sturm-Liouville. Le cas de l'oscillateur quartique. Exposé Bourbaki n° 602, 1982-83, publié par Astérisque, Soc. Math. de France, 1983.

Pour une approche complémentaire, non semi-classique, consulter Y. SIBUYA, surtout [Si.1] ci-avant. Pour la problématique semi-classique "exacte" à plusieurs dimensions, voir par exemple :

[Ph] F. PHAM. Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique. Exposé à la 36° rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, RCP n° 25, IRMA, Strasbourg, 1983.

Mentionnons enfin la grande "somme" sur les développements asymptotiques, due à un physicien-théoricien :

[Din] R.B. DINGLE. Asymptotic expansions. Their derivation and interpolation. 1973. Academic Press, Londres et New York.

Cet ouvrage riche et touffu semble axé sur (1) les équations linéaires (2) surtout provenant de la physique (3) les fonctions dites spéciales (4) le point de vue numérique. Ces quatre choix, et surtout le premier, expliquent sans doute que le livre ne débouche pas sur le calcul étranger. C'est manifestement une mine d'informations historiques et bibliographiques mais, à parcourir l'introduction et les têtes de chapitres, on se demande si l'immense érudition de l'auteur ne l'a pas finalement desservi : en mathématiques (et ailleurs) il faut parfois savoir faire table rase de tout ce qui précède.

§7. DIVERS.

[Be.1] G.R. BELICKII. Formes normales relativement à l'action filtrante d'un groupe. Trudy Mosk. Mat. Obsc., 1979, tome 40, pp 3-46.

[Be.2] G.R. BELICKII. Formes normales, invariants et applications locales. Kiev, Naukova Dumka, 1979 (En russe). Trad. anglaise

Donne la classification formelle des champs et des difféos, mais relativement aux changements de variables (formels) tangents à l'identité.

[Mr.2] J. MARTINET. Singularités des fonctions et applications différentiables. Lecture Notes P.U.C., Rio.

[Bo] E. BOREL. Leçon sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Paris. Gauthier-Villars. 1917

Conteste le point de vue de Weierstrass selon lequel les classiques "coupures analytiques" seraient toujours des obstacles infranchissables. Introduit des fonctions monogènes uniformes, qui sont définies p.p. sur un ouvert de $\mathbb{C}$, possèdent p.p. et pour presque toute direction des dérivées radiales se raccordant, et vérifient une extension du principe de prolongement analytique unique. Il se trouve que des fonctions analogues, monogènes mais multiformes (et résurgentes de surcroit) interviennent dans l'analyse des objets résonnants dont le "réseau intérieur" Ω^{int} est dense. Voir §1.3.f et §6.2. C'est même là, semble-t-il, la principale (la seule ?) application concrète des fonctions monogènes.

[Du] J.P. DUFOUR. Diagrammes d'applications différentiables. Thèse d'Etat, Janvier 1979, Montpellier.

[Mou] R. MOUSSU. Holonomie évanescente des équations différentielles dégénérées tranverses. Preprint de la Fac. des Sciences de Dijon, 1984.

[MW] J.K. MOSER et S.M. WEBSTER. Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations. Acta Math., 1983, t.150, pp 255-296.

(N.B. Des compléments à cette bibliographie figurent après les Appendices)

LES APPENDICES I ET II (COMPLEMENTS SUR LES PROBLEMES A PLUSIEURS NIVEAUX OU A PLUSIEURS GENERATIONS) FIGURENT DANS UNE BROCHURE D'UNE QUARANTAINE DE PAGES ANNEXEE A CE LIVRE (pp 586-630).