

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 168 - 75 . 48

SOUS - ESPACES DE L^1

(2^{ème} version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE

Publication Mathématique d'Orsay.

n° 168 - 75 . 48

SOUS - ESPACES DE L^1

(2^{ème} version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE

Publication Mathématique d'Orsay

Orsay, le 15 Décembre 1975

SOUS - ESPACES DE L^1

(2^{ème} version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE.

0. INTRODUCTION ET RESULTATS.

Un résultat typique de ce travail est le suivant :

Théorème 0.1. Soit E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ((Ω, \mathcal{A}, P) étant un espace de probabilité). Si E contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p , alors, pour chaque $\epsilon > 0$, E contient un sous-espace $(1 + \epsilon)$ - isomorphe à ℓ^p .

En fait, la motivation de ce travail est l'étude de la conjecture (C) : tout sous-espace de dimension infinie de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p pour un $p \in [1, 2]$. Seul le cas d'un sous-espace réflexif est à considérer, d'après [6]. L'étude de cette conjecture (*) nous a amené à un résultat plus fort que le théorème 0.1. Avant de l'énoncer, donnons la

Définition : Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires intégrables sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) , et \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . On dira que

(*) Dans [7], il est annoncé, de façon incorrecte, la démonstration de (C) ; en fait il est seulement démontré que (C) \Leftrightarrow (C') (voir plus loin l'énoncé de la conjecture (C')).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est finale-ment \mathcal{B} -mesurable s'il existe une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la σ -algèbre de queue soit contenue dans \mathcal{B} et telle que $\|X_n - Y_n\|_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Rappelons que, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, et \mathcal{B}_n la σ -algèbre engendrée par les Y_k ($k \geq n$), alors, par définition, la σ -algèbre de queue de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$.

Le résultat essentiel de ce travail s'énonce ainsi :

Théorème 0.2. (théorème principal). Soient E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} , et p un réel ($1 < p \leq 2$). Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) pour chaque $\epsilon > 0$, E contient un sous-espace $(1 + \epsilon)$ -isomorphe à ℓ^p dont la base est finale-ment \mathcal{B} -mesurable.
- 2) il existe une ultrapuissance de E qui contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p dont la base est finale-ment \mathcal{B} -mesurable.
- 3) il existe une ultrapuissance de E qui contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p dont la base est une suite de variables aléatoires échangeables et symétriques, dont la σ -algèbre de queue est contenue dans \mathcal{B} .
- 4) il existe une ultrapuissance de E qui contient une variable aléatoire $Z \neq 0$ avec $Z = UV$, U étant \mathcal{B} -mesurable, V indépendante de \mathcal{A} et p -stable.

On voit que le théorème 0.1. se déduit du théorème principal en faisant $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ et en ne considérant que l'équivalence 1 \Leftrightarrow 2 .

De plus, si on ne précise pas la valeur de p , on peut, dans la condition 4 supprimer l'hypothèse que V est p -stable. Autrement dit, on a le

Théorème 0.3. Soient E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) il existe p , $1 < p \leq 2$ tel que E contienne un espace isomorphe à ℓ^p dont la base est finalement \mathcal{B} -mesurable.
- b) il existe une ultrapuissance de E qui contient une variable aléatoire $UV \neq 0$, U étant \mathcal{B} -mesurable, V symétrique et indépendante de \mathcal{A}

Nous montrons également que la conjecture (C') suivante, apparemment plus faible que (C), équivaut en fait à (C) :

(C') : Tout sous-espace de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par une suite de variables aléatoires non nulle, échangeable et symétrique contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p pour un $p \in [1, 2]$.

(Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires est dite échangeable et symétrique, si, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la loi du n -uplet (X_0, X_1, \dots, X_n) est invariante par une permutation quelconque des variables, et aussi par le changement de l'un des X_i en $-X_i$).

Dans la partie I, on définit les ultrapuissances d'espaces de probabilités, et on étudie leurs propriétés.

La partie II établit un critère permettant de "redescendre" un espace ℓ^p convenable d'une ultrapuissance à l'espace initial. On montre ainsi, dans cette partie, l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème principal. Ce critère est légèrement amélioré dans la partie V.

Dans la partie III on donne une technique qui, à partir d'un sous-espace de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ isomorphe à ℓ^p , permet de construire des variables p -stables

dans une ultrapuissance convenable (voir aussi [3]). La partie IV permet ensuite de retrouver l'hypothèse du critère établi en II, c'est-à-dire de prouver l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème principal.

Enfin la partie V est essentiellement la récapitulation des différents résultats afin d'établir le théorème principal, le théorème 0.3. et le fait que $(C) \Leftrightarrow (C')$.

I. PRELIMINAIRES : ULTRAPRODUITS D'ESPACES DE PROBABILITE.

Pour les définitions et notations sur les ultraproducts d'espaces de Banach, on se réfère à [2].

Soient $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de probabilité, \mathcal{D} un ultrafiltre sur I , Λ l'ultraproduit $\prod_{i \in I} L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ qui est un espace L^1 . L'ensemble \mathcal{B} des éléments de Λ de la forme $(1_{A_i})_{i \in I}$ avec $A_i \in \mathcal{B}_i$ est une σ -algèbre munie d'une probabilité P (on pose

$P[(1_{A_i})_{i \in I}] = \lim_{\mathcal{D}} P_i(A_i) = \|(1_{A_i})_{i \in I}\|$). Le sous espace fermé de Λ engendré par \mathcal{B} est de la forme $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. L'espace de probabilité

(Ω, \mathcal{B}, P) est appelé ultraproduct de la famille $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ suivant l'ultraproduit \mathcal{D} ; on notera $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i / \mathcal{D}$ ou $(\mathcal{B}, P) = \prod_{i \in I} (\mathcal{B}_i, P_i) / \mathcal{D}$.

$(\mathcal{B}_1, P_1), (\mathcal{B}_2, P_2)$ étant deux σ -algèbres d'espaces de probabilité, on notera $(\mathcal{B}_1, P_1) \subset (\mathcal{B}_2, P_2)$ pour indiquer que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ et que P_2 est un prolongement de P_1 .

Dans [2] on a vu que l'on a $\Lambda = L^1(\Omega, \mathcal{B}, P) \oplus \Lambda'$ où Λ' est l'ensemble des éléments de Λ étrangers à $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, c'est-à-dire étrangers à $1_\Omega (1_\Omega = (1_{\Omega_i})_{i \in I})$.

Toute famille $(f_i)_{i \in I}$ où $f_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ telle que $|f_i| \leq M$ pour tout $i \in I$ définit un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$: en effet, si $f = (f_i)_{i \in I}$ on a $|f| \leq M \cdot 1_\Omega$, et, en fait, $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Inversement pour tout $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$, il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$, $f_i \in L^\infty(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$, $\|f_i\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, telle que $f = (f_i)_{i \in I}$ (car si $f = (g_i)_{i \in I}$, comme $f = (-\|f\|_\infty) \cup (f \cap \|f\|_\infty)$ on a $f = (f_i)_{i \in I}$, avec $f_i = -\|f\|_\infty \cup (g_i \cap \|f\|_\infty)$).

Proposition I.1. Soient $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $f = (f_i)_{i \in I}$, $g = (g_i)_{i \in I}$, avec $|g_i| \leq M$. Alors $fg = (f_i g_i)_{i \in I}$.

Notons que $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}_i, P)$, $\|g\|_\infty \leq M$. On peut supposer $g \geq 0$.

Supposons d'abord $f = 1_A = (1_{A_i})_{i \in I}$, ($A \in \mathcal{B}$). On a alors $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} \leq g$ et $\leq M \cdot 1_A$, donc $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} \leq g \cdot 1_A$; de même $(g_i \cdot 1_{A_i^c})_{i \in I} \leq g \cdot 1_{A^c}$. Or $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} + (g_i \cdot 1_{A_i^c})_{i \in I} = (g_i)_{i \in I} = g$.
Donc $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} = g \cdot 1_A$.

Le résultat est ainsi obtenu lorsque f est une fonction étagée. Dans le cas général, soit $f_n = (f_n^i)_{i \in I}$ une suite de fonctions \mathcal{B} -étagées qui tend vers f dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors $f_n \cdot g = (f_n^i \cdot g_i)_{i \in I}$. Or, pour n assez grand on a $\|f_n - f\|_1 \leq \epsilon$ donc, d'une part $\|f_n \cdot g - fg\|_1 \leq M\epsilon$, d'autre part $\{i \in I; \|f_n^i - f_i\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D}$; comme $|g_i| \leq M$, $\{i \in I; \|f_n^i g_i - f_i g_i\|_1 \leq 2M\epsilon\} \in \mathcal{D}$. Il en résulte que $\|(f_i g_i)_{i \in I} - (f_n^i g_i)_{i \in I}\|_1 \leq 2M\epsilon$, et donc $\|(f_i \cdot g_i)_{i \in I} - f_n g\|_1 \leq 2M\epsilon$. Donc $\|(f_i g_i)_{i \in I} - fg\|_1 \leq 3M\epsilon$. d'où le résultat puisque ϵ est un nombre > 0 arbitraire. C.Q.F.D.

Proposition I.2. Soient $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ avec $fg \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille représentant f . Il existe une famille $(g_i)_{i \in I}$ ($g_i \in L^1(\Omega, \mathcal{B}_i, P_i)$) représentant g , telle que $f_i g_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ pour tout $i \in I$ et $fg = (f_i g_i)_{i \in I}$.

On a $fg = (\varphi_i)_{i \in I}$, $g = (h_i)_{i \in I}$ avec $\varphi_i, h_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$. En écrivant $g = g^+ - g^-$, on voit qu'on peut supposer $g, h_i \geq 0$. On pose alors $g_i = h_i \cdot 1_{\{|f_i| \leq 1\}} + \frac{\varphi_i}{f_i} \cdot 1_{\{|f_i| > 1\}}$. Evidemment $g_i \leq h_i + \varphi_i$.

donc $g_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$. D'après la proposition précédente, on a, pour $n > 0$:
 $f \cdot (g \cap n) = (f_i \cdot (h_i \cap n))_{i \in I}$. D'autre part, pour n assez grand on a
 $\|f \cdot g - f \cdot (g \cap n)\|_1 \leq \epsilon$ et $\|g - g \cap n\|_1 \leq \epsilon$ et par suite :

$$\{i \in I; \|\varphi_i - f_i \cdot (h_i \cap n)\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{A} \quad \text{et}$$

$$\{i \in I; \|h_i - h_i \cap n\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{A}.$$

$$\text{On a } \|g_i - h_i\|_1 = \int_{\{|f_i| > 1\}} \left| \frac{\varphi_i}{f_i} - h_i \right| dP_i$$

Mais, pour un ensemble de $i \in I$ qui est dans \mathcal{A} , on a

$$\int_{\Omega_i} |\varphi_i - f_i \cdot (h_i \cap n)| dP_i \leq 2\epsilon \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_i} |h_i - h_i \cap n| dP_i \leq 2\epsilon$$

$$\text{donc } \int_{\{|f_i| > 1\}} |\varphi_i - f_i \cdot (h_i \cap n)| dP_i \leq 2\epsilon \quad \text{d'où} \quad \int_{\{|f_i| > 1\}} \left| \frac{\varphi_i}{f_i} - h_i \cap n \right| dP_i \leq 2\epsilon$$

$$\text{et donc } \int_{\{|f_i| > 1\}} \left| \frac{\varphi_i}{f_i} - h_i \right| dP_i \leq 4\epsilon.$$

Donc $\{i \in I; \|g_i - h_i\|_1 \leq 4\epsilon\} \in \mathcal{A}$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on voit que $(g_i)_{i \in I} = (h_i)_{i \in I} = g$.

Soient $A_i = \{|f_i| \leq 1\} \in \mathcal{B}_i$ et $A = (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}$. On a

$$f_i g_i = f_i h_i \cdot 1_{A_i} + \varphi_i 1_{A_i^c}.$$

Comme $|f_i 1_{A_i}| \leq 1$ et que $(f_i 1_{A_i})_{i \in I} = f \cdot 1_A$, on a $(f_i h_i 1_{A_i})_{i \in I} = f g 1_A$
 (proposition précédente); de plus $(\varphi_i 1_{A_i^c})_{i \in I} = f g 1_{A^c}$. D'où

$$(f_i g_i)_{i \in I} = f g \cdot 1_A + f g \cdot 1_{A^c} = f g.$$

C.Q.F.D.

Proposition I.3. Soient $f_1 = (f_1^i)_{i \in I}, \dots, f_k = (f_k^i)_{i \in I}$ des éléments de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, avec $(\mathcal{B}, P) = \prod_{i \in I} (\mathcal{B}_i, P_i) / \mathcal{F}$. Soient π, π_i les distributions (probabilités sur \mathbb{R}^k) respectives des k-uplets de variables aléatoires $(f_1, \dots, f_k), (f_1^i, \dots, f_k^i)$. Alors $\pi = \lim_{\mathcal{F}} \pi_i$ (convergence étroite des probabilités sur \mathbb{R}^k).

Soit \mathcal{F} le \mathbb{R} -espace vectoriel réticulé de fonctions réelles sur \mathbb{R}^k engendré par les fonctions $1, x_1, \dots, x_k$; si $\tau(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}$, on a $\tau(f_1, \dots, f_k) = (\tau(f_1^i, \dots, f_k^i))_{i \in I}$ puisque l'ultraproduit est compatible avec les opérations de treillis et d'espace vectoriel, et que $1_\Omega = (1_{\Omega_i})_{i \in I}$.

Il en résulte que

$$\int_{\Omega} \tau(f_1, \dots, f_k) dP = \lim_{\mathcal{F}} \int_{\Omega_i} \tau(f_1^i, \dots, f_k^i) dP_i \quad (1)$$

Or le sous-espace \mathcal{F}_b de \mathcal{F} constitué des fonctions de \mathcal{F} bornées sur \mathbb{R}^k est un sous-espace dense de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}) / (\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ étant le compactifié d'Alexandroff de \mathbb{R}^k ; en effet c'est un sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ qui sépare les points : l'égalité (1) montre donc alors que $\pi = \lim_{\mathcal{F}} \pi_i$. C.Q.F.D.

Lorsque la famille $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ est constituée d'un seul espace de probabilité $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$, l'ultraproduit de cette famille suivant l'ultrafiltre \mathcal{F} sur I est appelé ultrapuissance de l'espace de probabilité $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$ suivant l'ultrafiltre I . On note $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_0, P_0)^I / \mathcal{F}$. Notons qu'on a un plongement canonique de la σ -algèbre (\mathcal{B}_0, P_0) dans (\mathcal{B}, P) : si $A \in \mathcal{B}_0$ on lui fait correspondre la famille $(A_i)_{i \in I}$ avec $A_i = A_0$ pour tout $i \in I$. On considèrera donc dans la suite que \mathcal{B}_0 est une sous- σ -algèbre de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0^I / \mathcal{F}$.

Proposition I.4. : Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille équi-intégrable de $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$. Alors l'élément f de $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)^I / \mathcal{F}$ représenté par cette famille est dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ où $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_0, P_0)^I / \mathcal{F}$.

La famille $(f_i)_{i \in I}$ étant équi-intégrable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\int_{\{|f_i| > N\}} |f_i| dP_0 \leq \epsilon$, autrement dit $\|f_i - f_i^N\|_1 \leq \epsilon$, où $f_i^N = f_i \cdot 1_{\{|f_i| \leq N\}}$. Soit $f^N = (f_i^N)_{i \in I}$. Comme $|f_i^N| \leq N$ pour tout $i \in I$, $f^N \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Comme $\|f_i - f_i^N\|_1 \leq \epsilon$, on a $\|f - f^N\| \leq \epsilon$. Donc $f^N \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)^{I/\mathcal{D}}$, et par suite $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Proposition I.5. Si F est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$ alors $F^{I/\mathcal{D}} \subset L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, où $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_0, P_0)^{I/\mathcal{D}}$. De plus $F^{I/\mathcal{D}}$ est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Rappelons qu'un sous-espace fermé d'un espace L^1 est réflexif si et seulement si sa boule unité est équi-intégrable. Le fait que $F^{I/\mathcal{D}} \subset L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ résulte donc immédiatement de la proposition I.4.

Il reste à montrer que la boule unité de $F^{I/\mathcal{D}}$ est équi-intégrable. Celle de F l'étant, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\int_A |\varphi| dP_0 \leq \epsilon$ pour tout $A \in \mathcal{B}_0$; $P_0(A) \leq \eta$ et toute $\varphi \in F$, $\|\varphi\| \leq 1$.

Soient alors $f = (\varphi_i)_{i \in I} \in F^{I/\mathcal{D}}$, $\|f\| \leq 1$ (donc $\|\varphi_i\| \leq 1$ (donc $\|\varphi_i\| \leq 1$ pour tout $i \in I$) et $A = (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}$, $P(A) \leq \eta$ (donc $P_0(A_i) \leq \eta$ pour tout $i \in I$ pour un choix convenable de la famille $(A_i)_{i \in I}$ représentant A). On a

$$\int_A |f| dP = \|f \cdot 1_A\| = \lim_{\mathcal{D}} \|\varphi_i \cdot 1_{A_i}\| = \lim_{\mathcal{D}} \int_{A_i} |\varphi_i| dP_0 \leq \eta$$

C.Q.F.D.

Proposition I.5.1. Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille indépendante équi-intégrable de variables aléatoires de $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$ et \mathcal{D} un ultrafiltre non trivial sur I . Dans $L^1[(\mathcal{B}_0, P_0)^{I/\mathcal{D}}]$ on définit $f = (f_i)_{i \in I}$. Alors f est indépendante de \mathcal{B}_0 .

Supposons d'abord les f_i uniformément bornés, $\|f_i\|_\infty \leq K$, et soit $g \in L^\infty(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$. Posons $h = E^{\mathcal{A}} g$, \mathcal{A} étant la σ -algèbre engendrée par les $(f_i)_{i \in I}$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe h' intégrable, \mathcal{A} -mesurable et ne dépendant que d'un nombre fini des f_i , telle que $\|h - h'\|_1 \leq \epsilon$. Donc, sauf pour un nombre fini de i , h' est indépendante de f_i , d'où, pour ces i : $E(f_i h') = E(f_i) E(h')$. Or $|E(f_i h) - E(f_i h')| \leq \|f_i\|_\infty \|h - h'\|_1 \leq K \epsilon$:
 $|E(f_i) E(h') - E(f_i) E(h)| \leq |E(f_i)| \|h - h'\|_1 \leq K \epsilon$. Par suite, sauf pour un nombre fini de i , on a $|E(f_i h) - E(f_i) E(h)| \leq 2 K \epsilon$, donc
 $|E(f_i g) - E(f_i) E(g)| \leq 2 K \epsilon$ (par définition de h , $E(f_i h) = E(f_i g)$, et $E(h) = E(g)$).

Comme $E(fg) = \lim_{\mathcal{F}} E(f_i g)$, on a donc $|E(fg) - E(f) E(g)| \leq 2 K \epsilon$, donc $E(fg) = E(f) E(g)$ puisque ϵ est arbitraire.

Dans le cas général, on pose $f_i^N = f_i \cdot 1_{\{|f_i| \leq N\}}$ (N réel ≥ 0) et $f^N = (f_i^N)_{i \in I}$; d'après ce qu'on vient de voir, f^N est indépendante de \mathcal{B}_0 . Or, pour N assez grand, $\|f_i^N - f_i\|_1 \leq \epsilon$ (uniformément en i , par équi-intégrabilité), d'où $\|f^N - f\|_1 \leq \epsilon$ et $f^N \rightarrow f$ dans L^1 . Cela montre que f aussi est indépendante de \mathcal{B}_0 : car, si $g \in L^\infty(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$, $E(f^N g) \rightarrow E(fg)$ et $E(f^N) E(g) \rightarrow E(f) \cdot E(g)$. C.Q.F.D.

Ultrapuissances itérées.

Proposition I.6. Soient \mathcal{D}, \mathcal{E} des ultrafiltres respectifs sur $I, J, \mathcal{D} \times \mathcal{E}$
 l'ultrafiltre sur $I \times J$ défini par $X \in \mathcal{D} \times \mathcal{E} \Leftrightarrow \{j \in J; \{i \in I; (i, j) \in X\} \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{E}$.
 Si F est un espace de Banach, $(F^I/\mathcal{D})^J/\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à
 $F^{I \times J}/\mathcal{D} \times \mathcal{E}$. De même, si $(\mathcal{B}_0, \mathcal{P}_0)$ est la σ -algèbre d'un espace de probabi-
 lité, $((\mathcal{B}_0, \mathcal{P}_0)^I/\mathcal{D})^J/\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{B}_0, \mathcal{P}_0)^{I \times J}/\mathcal{D} \times \mathcal{E}$.

Si $f \in (F^I/\mathcal{D})^J/\mathcal{E}$ on a $f = (f_j)_{j \in J}$ avec $f_j \in F^I/\mathcal{D}$, donc
 $f_j = (f_j^i)_{i \in I}$. On définit l'isomorphisme de $(F^I/\mathcal{D})^J/\mathcal{E}$ sur $F^{I \times J}/\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ en
 associant à f l'élément φ de $F^{I \times J}/\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ défini par la famille $(f_j^i)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.
 Cette application étant linéaire, il suffit de voir qu'elle conserve la norme.
 Or $\|f\| = \lim_{\mathcal{E}} \|f_j\|$. Donc, pour $\epsilon > 0$ donné, $Y = \{j \in J; |\|f_j\| - \|f\|| \leq \epsilon\} \in \mathcal{E}$.
 Mais $\|f_j\| = \lim_{\mathcal{D}} \|f_j^i\|$, donc $X_j = \{i \in I; |\|f_j^i\| - \|f_j\|| \leq \epsilon\} \in \mathcal{D}$.
 Si $Z = \bigcup_{j \in Y} X_j \times \{j\}$ alors $Z \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$ et $\{(i, j) \in I \times J; |\|f_j^i\| - \|f\|| \leq 2\epsilon\} \supset Z$;
 donc $\{(i, j) \in I \times J; |\|f_j^i\| - \|f\|| \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$ ce qui montre que
 $\|f\| = \lim_{\mathcal{D} \times \mathcal{E}} \|f_j^i\| = \|\varphi\|$. C.Q.F.D.

Proposition I.7. Soient $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles, \mathcal{D}_n un ultrafiltre
 sur I_n , \mathcal{D} un ultrafiltre sur \mathbb{N} , F un espace de Banach; on pose $F_n = F^{I_n}/\mathcal{D}_n$.
 Alors $\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n/\mathcal{D}$ est isomorphe à une ultrapuissance de F . Plus précisément,
 en supposant les I_n deux à deux disjoints, $\prod_{n \in \mathbb{N}} F_n/\mathcal{D}$ est isomorphe à F^J/\mathcal{E}
 où $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et où $X \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N}; X \cap I_n \in \mathcal{D}_n\} \in \mathcal{D}$.

Démonstration analogue à la précédente.

Variables aléatoires échangeables.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) ; la σ -algèbre de queue de cette suite est, par définition, $\mathcal{B}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$ étant la σ -algèbre engendrée par les X_k ($k \geq n$).

Soit \mathcal{B}_0 une sous- σ -algèbre de \mathcal{B} . On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite échangeable sur \mathcal{B}_0 si, pour chaque entier $k > 0$ et chaque variable Y \mathcal{B}_0 -mesurable, les distributions (probabilités sur \mathbb{R}^{k+1}) de $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, Y)$ (i_1, \dots, i_k entiers ≥ 0 distincts quelconques) sont les mêmes. Lorsque $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ la suite sera dite échangeable (tout court). On sait (voir [5]) que dans ce cas les variables X_n sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur \mathcal{B}^∞ , autrement dit, si f_1, \dots, f_k sont des fonctions réelles continues bornées sur \mathbb{R} on a :

$$E^{\mathcal{B}^\infty} (f_1(X_1) \dots f_k(X_k)) = \prod_{i=1}^k E^{\mathcal{B}^\infty} (f_i(X_0)) .$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera dite symétrique sur \mathcal{B}_0 si, quel que soit $k > 0$, $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_k = \pm 1$, et Y \mathcal{B}_0 -mesurable, les distributions de $(\epsilon_0 X_0, \epsilon_1 X_1, \dots, \epsilon_k X_k, Y)$ sont les mêmes. Lorsque $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ on dira suite symétrique (tout court).

Théorème I.1. Soient F un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0), (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de la boule unité de F , et \mathcal{B} un ultrafiltre sur \mathbb{N} . Il existe un ultrafiltre \mathcal{B}' sur \mathbb{N} et une suite Y_1, \dots, Y_k, \dots d'éléments de $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}'$ (sous-espace réflexif de $L^1[(\mathcal{B}_0, P_0)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}']$) ayant les propriétés suivantes :

- 1) Y_1, \dots, Y_k, \dots est une suite échangeable sur \mathcal{B}_0 , conditionnellement indépendante et équidistribuée sur \mathcal{B}_0 et la σ -algèbre de queue de cette suite est contenue dans celle de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$2) \frac{\|X + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{k-1} Y_{k-1} + \lambda_k Y_k\|_1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{k-1} Y_{k-1} + \lambda_k X_n\|_1}{\mathcal{D}}}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ et $X \in L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$.

3) La distribution (probabilité sur \mathbb{R}^{k+1}) du $k+1$ -uplet $(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_k)$ est la limite quand $n \rightarrow \infty$ suivant l'ultrafiltre \mathcal{D} de celle de $(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}, X_n)$ (où $X \in L^1(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$).

On définit une suite croissante (\mathcal{B}_k, P_k) de σ -algèbres ($\mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_{k+1}$ et P_{k+1} est un prolongement de P_k) en posant $(\mathcal{B}_{k+1}, P_{k+1}) = (\mathcal{B}_k, P_k)^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$. On a évidemment $(\mathcal{B}_0, P_0) \subset (\mathcal{B}_k, P_k)$ et donc $X_n \in L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$. On désigne alors par Y_{k+1} l'élément de $L^1(\mathcal{B}_{k+1}, P_{k+1}) = L^1[(\mathcal{B}_k, P_k)^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}]$ représenté par la suite équi-intégrable $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il en résulte que $Y_1, \dots, Y_k \in L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$ et on en déduit immédiatement les propriétés 2, 3 de l'énoncé du théorème (d'après la proposition I.3).

Soient m un entier > 0 , $\mathcal{B}^{(m)}$ la sous- σ -algèbre de \mathcal{B}_0 engendrée par les X_n ($n \geq m$), $\mathcal{B}^\infty = \bigcap_{m \geq 0} \mathcal{B}^{(m)}$ la σ -algèbre de queue de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme I.8. Si $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et tendent vers 0 à l'infini

$$\text{on a } E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_1(Y_1) \dots f_k(Y_k)) = \prod_{i=1}^k E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_i(Y_1)) \text{ pour tout } m \geq 0.$$

On fait la démonstration par récurrence sur k , soit X une variable aléatoire $\mathcal{B}^{(m)}$ -mesurable bornée. On a à montrer que

$$E(f_1(Y_1) \dots f_k(Y_k) \cdot X) = E(X \cdot \prod_{i=1}^k E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_i(Y_1)))$$

D'après la propriété 3) de l'énoncé du théorème, on a

$$\begin{aligned} E (f_1 (Y_1) \dots f_k (Y_k) \cdot X) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E (f_1 (Y_1) \dots f_{k-1} (Y_{k-1}) f_k (X_n) \cdot X) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E (E^{\mathcal{B}^{(m)}} [f_1 (Y_1) \dots f_{k-1} (Y_{k-1})] f_k (X_n) \cdot X) \end{aligned}$$

(puisque, pour n assez grand, $f_k (X_n)$ est $\mathcal{B}^{(m)}$ -mesurable).

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\prod_{i=1}^{k-1} E^{\mathcal{B}^{(m)}} f_i (Y_i) \cdot f_k (X_n) \cdot X \right)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence).

Or, si $Z = X \cdot \prod_{i=1}^{k-1} E^{\mathcal{B}^{(m)}} (f_i (Y_i))$, Z est une variable aléatoire bornée qui est $\mathcal{B}^{(m)}$ -mesurable, donc \mathcal{B}_0 -mesurable. D'après la propriété 3) de l'énoncé du théorème, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (Z \cdot f_k (X_n)) = E (Z \cdot f_k (Y_1)) = E (Z \cdot E^{\mathcal{B}^{(m)}} f_k (Y_1))$$

et on trouve donc exactement l'égalité à démontrer.

C.Q.F.D.

D'après le lemme I.8, les variables Y_1, \dots, Y_k, \dots sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur la σ -algèbre $\mathcal{B}^{(m)}$. Il en résulte qu'elles sont échangeables et que leur σ -algèbre de queue est contenue dans $\mathcal{B}^{(m)}$; donc dans \mathcal{B}^∞ puisque m est un entier ≥ 0 arbitraire.

En remplaçant $\mathcal{B}^{(m)}$ par \mathcal{B}_0 dans la démonstration du lemme I.8, on trouve

$$E^{\mathcal{B}_0} (f_1 (Y_1) \dots f_k (Y_k)) = \prod_{i=1}^k E^{\mathcal{B}_0} (f_i (Y_1))$$

Cela montre que les variables Y_1, \dots, Y_k, \dots sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur la σ -algèbre \mathcal{B}_0 , et donc échangeables au-dessus de \mathcal{B}_0 .

Il reste à trouver sur N , ou, ce qui revient au même, sur un ensemble I dénombrable, un ultrafiltre \mathcal{B}' tel que $Y_1, \dots, Y_k, \dots \in F^I/\mathcal{B}'$. On définit l'espace de Banach F_k par récurrence en posant $F_0 = F$, $F_{k+1} = F_k^N/\mathcal{B}$. On a donc $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k \subset \dots$ et $F_k \subset L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$. De plus $Y_1, \dots, Y_k \in F_k$.

D'après la proposition I.6 on a $F_k = F^{N^k}/\mathcal{B}_k$ où \mathcal{B}_k est un ultrafiltre sur N^k . Donc si on pose $G = \prod_{k \in N} F_k/\mathcal{B}$, on a $G = F^I/\mathcal{B}'$ où $I = \bigcup_{k \geq 1} N^k$ est dénombrable (proposition I.7). On a évidemment $F_m \subset G$ pour tout $m \geq 0$, puisque $F_m \subset F_k$ pour $k \geq m$. Il en résulte que $Y_1, \dots, Y_k, \dots \in G$. C.Q.F.D.

II. UN CRITERE POUR QU'UN SOUS-ESPACE DE L^1 CONTIENNE ℓ^p ($1 < p \leq 2$)

Soit p un réel, $1 < p \leq 2$. Une variable aléatoire Y sera dite p -stable si on a $E(e^{itY}) = e^{-|t|^p}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On pose $\gamma_p = E(|Y|)$. Si Y_0, \dots, Y_n sont indépendantes et p -stables, on a

$$\|\lambda_0 Y_0 + \dots + \lambda_n Y_n\|_1 = \gamma_p (|\lambda_0|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

La partie II est consacrée à la démonstration du

Théorème II.1. Soient (Ω_0, β_0, P_0) un espace de probabilité, P_0 étant une mesure diffuse, F un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_0, \beta_0, P_0)$ et \mathcal{B} un ultrafiltre sur \mathbb{N} ; on a donc $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B} \subset L^1(\beta, P)$, avec $(\beta, P) = (\beta_0, P_0)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$. On suppose qu'il existe une variable $Z \in F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$ telle que $Z = UV$, $U \in L^1(\beta_0, P_0)$, $U \neq 0$, et $V \in L^1(\beta, P)$, V étant une variable p -stable indépendante de β_0 . Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace F' de F qui est $(1 + \epsilon)$ -isomorphe à ℓ^p (c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective $T : \ell^p \rightarrow F'$ avec $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$).

On pose $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $Z_n \in F$; $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $V_n \in L^1(\beta_0, P_0)$. D'après la proposition I.2 on peut choisir la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon que $UV_n \in L^1(\beta_0, P_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $Z = UV = (UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit, on a $\lim_{\mathcal{B}} \|Z_n - UV_n\|_1 = 0$.

Lemme II.1. Soient $A \in \beta_0$, $C_0, C_1, \dots, C_r \in \beta$, contenus dans A et deux à deux disjoints. Alors pour chaque i , $0 \leq i \leq r$, il existe une famille $(C_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant C_i , $C_i^n \in \beta_0$, $P_0(C_i^n) = P(C_i)$, C_0^n, \dots, C_r^n étant deux à deux disjoints et inclus dans A .

Démonstration par récurrence sur r . Pour $0 \leq i \leq r-1$ on a donc une famille $(C_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant C_i , $P_0(C_i^n) = P(C_i)$, C_0^n, \dots, C_{r-1}^n étant deux à deux disjoints et contenus dans A . On a d'autre part $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et comme C_r est contenu dans A et disjoint de C_0, \dots, C_{r-1} , on peut supposer $B_r^n \subset A$ et disjoint de C_0^n, \dots, C_{r-1}^n . Soient $\Gamma = A - (C_0 \cup \dots \cup C_{r-1})$ et $\Gamma_n = A - (C_0^n \cup \dots \cup C_{r-1}^n)$. On a donc $P(\Gamma) = P_0(\Gamma_n)$ et $C_r \subset \Gamma, B_r^n \subset \Gamma_n$. On définit C_r^n de la façon suivante : si $P(C_r) \geq P_0(B_r^n)$ on choisit $C_r^n \in \mathcal{B}_0$ tel que $B_r^n \subset C_r^n \subset \Gamma_n$ et $P_0(C_r^n) = P(C_r)$ (c'est possible car P_0 est une mesure diffuse) ; si $P(C_r) \leq P_0(B_r^n)$, on choisit $C_r^n \in \mathcal{B}_0$ tel que $C_r^n \subset B_r^n$ et $P_0(C_r^n) = P(C_r)$.

Dans les deux cas on a $P_0(|B_r^n - C_r^n|) = |P_0(B_r^n) - P(C_r)|$ ($|B_r^n - C_r^n|$ désigne la différence symétrique). Comme $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $|P_0(B_r^n) - P(C_r)| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, donc $P_0(|B_r^n - C_r^n|) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ ce qui montre que $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}} = (C_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C.Q.F.D.

Lemme II.2. Soient Φ une variable aléatoire \mathcal{B}_0 -étagée, indépendante de \mathcal{B}_0 , telle que $\|U\Phi - UV\|_1 \leq \epsilon$ (ϵ réel > 0), \mathcal{A} une sous- σ -algèbre finie de \mathcal{B}_0 et $D \in \mathcal{B}$. Il existe alors $n \in D$ et une variable aléatoire Ψ , \mathcal{B}_0 -étagée, de même loi que Φ et indépendante de \mathcal{A} telle que $\|U\Psi - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon$.

On a $\Phi = \lambda_0 1_{B_0} + \dots + \lambda_k 1_{B_k}$ avec $B_0, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Soient $A_0, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}_0$ les atomes de \mathcal{A} (A_0, \dots, A_ℓ sont deux à deux disjoints, $\bigcup_{j=0}^{\ell} A_j = \Omega_0$, et ils engendrent \mathcal{A}). On pose $C_{ij} = B_i \cap A_j$ ($0 \leq i \leq k$; $0 \leq j \leq \ell$). Donc $P(C_{ij}) = P(B_i) P_0(A_j)$ (puisque Φ est indépendante de \mathcal{B}_0). Les C_{ij} sont deux à deux disjoints et $C_{ij} \subset A_j$. D'après le lemme II.1 on peut donc écrire $C_{ij} = (C_{ij}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $C_{ij}^n \in \mathcal{B}_0$, $P_0(C_{ij}^n) = P(C_{ij})$, $C_{ij}^n \subset A_j$, les C_{ij}^n étant deux à deux disjoints pour n fixé.

On pose $B_i^n = \bigcup_{j=0}^{\ell} C_{ij}^n$: donc

$$P_0(B_i^n) = \sum_{j=0}^{\ell} P_0(C_{ij}^n) = \sum_{j=0}^{\ell} P(C_{ij}) = P(B_i)$$

De plus $B_i^n \cap A_j = C_{ij}^n$ donc

$$P_0(B_i^n \cap A_j) = P_0(C_{ij}^n) = P(B_i) P_0(A_j) = P_0(B_i^n) P_0(A_j)$$

Cela montre que la variable $\Phi_n = \lambda_0 1_{B_0^n} + \dots + \lambda_k 1_{B_k^n}$ a même loi que Φ et est indépendante de \mathcal{A} .

D'autre part on a $B_i = (B_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (puisque $(B_i^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\bigcup_{j=0}^{\ell} C_{ij}^n)_{n \in \mathbb{N}} = \bigcup_{j=0}^{\ell} C_{ij} = B_i$) ce qui montre que $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'après la proposition I.1, on a $U\Phi = (U\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a vu d'autre part que $UV = (UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\|U\Phi - UV\|_1 \leq \epsilon$ par hypothèse, il en résulte que $\{n \in \mathbb{N}; \|U\Phi_n - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{B}$. Il existe donc $n \in D$ tel que $\|U\Phi_n - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon$, d'où le résultat cherché avec $\Psi = \Phi_n$. C.Q.F.D.

Démonstration du théorème II.1. : puisque $U \neq 0$ et intégrable, on peut évidemment supposer $\|U\|_1 = 1$.

Soit Φ_k une suite de fonctions étagées, V -mesurables, telles que $\|\Phi_k - V\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

Nous allons définir par récurrence sur k un entier $n_k > 0$ et une variable Ψ_k , \mathcal{B}_0 -étagée de même loi que Φ_k , telle que $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots$ soient indépendantes et $\|Z_{n_k} - U\Psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

Supposons donc définis $n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, \Psi_0, \dots, \Psi_{k-1}$ avec ces propriétés. Comme U est \mathcal{B}_0 -mesurable et que V (donc aussi Φ_k qui est V -mesurable) est indépendante de \mathcal{B}_0 , on a $\|U\Phi_k - UV\| = \|U\| \|\Phi_k - V\| = \|\Phi_k - V\|$

et donc $\|U \Phi_k - UV\| \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

On applique le lemme II.2 en prenant $\Phi = \Phi_k$, \mathcal{A} est la σ -algèbre engendrée par $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}$, $D = \{n \in \mathbb{N}; \|Z_n - UV_n\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}\}$ ($D \in \mathcal{B}$ puisque $\|Z_n - UV_n\|_1 \rightarrow 0$) . Il existe donc un entier $n_k \in D$ et une variable Ψ_0 β_0 -étagée de même loi que Φ_k , indépendante de \mathcal{A} telle que $\|U \Psi_k - UV_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$; comme $n_k \in D$, on a $\|Z_{n_k} - UV_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ et donc $\|Z_{n_k} - U \Psi_k\| \leq \frac{1}{2^k}$; cela donne exactement le résultat cherché.

On pose $Y_k = Z_{n_k}$. Donc $Y_k \in F$ et $\|Y_k - U \Psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

Lemme II.3 .

$$\left(\gamma_p - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i \right\|_1 \leq \left(\gamma_p + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots$ sont des variables étagées, indépendantes, Ψ_k a la même loi que Φ_k , $\|\Phi_k - V\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$, V étant une variable p -stable et Φ_k étant V -mesurable. Par suite il existe une suite $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ de variables p -stables indépendantes telle que Ψ_k soit S_k -mesurable et $\|\Psi_k - S_k\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

On a alors

$$\left| \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i \right\|_1 - \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i S_i \right\|_1 \right| \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \|\Psi_i - S_i\|_1 \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| 2^{-i-2}$$

$$\leq 2^{-k-1} \sup_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \leq 2^{-k-1} \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Cela donne immédiatement le résultat cherché puisque

$$\left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i S_i \right\|_1 = \gamma_p \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \quad \underline{\text{C.Q.F.D.}}$$

Lemme II.4. Soit $u \in L^1(\mathcal{B}_0, P_0)$, $\|u\|_1 = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\|uX\|_1 \geq (1 - \epsilon) \|X\|_1$ pour toute variable X de la forme $\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$. Si de plus u est bornée, il existe un entier k tel que $(1 - \epsilon) \|X\|_1 \leq \|uX\|_1 \leq (1 + \epsilon) \|X\|_1$ pour toute variable X de la forme indiquée.

Soient \mathcal{C}_0 la σ -algèbre engendrée par les variables indépendantes $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots$ et \mathcal{E}_k l'espace vectoriel engendré par $\Psi_k, \Psi_{k+1}, \dots$. Pour tout $X \in \mathcal{E}_0$, on a $\|uX\|_1 = \|(E^{\mathcal{C}_0} u)X\|_1$; comme $\|u\|_1 = \|E^{\mathcal{C}_0} u\|_1 = 1$ et que $\|E^{\mathcal{C}_0} u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, on voit qu'en remplaçant u par $E^{\mathcal{C}_0} u$, on peut supposer que u est \mathcal{C}_0 -mesurable.

D'après le lemme II.3, l'espace \mathcal{E}_0 (muni de la norme de $L^1(\mathcal{B}_0, P_0)$) est isomorphe à ℓ^p donc est réflexif ($p > 1$). Sa boule unité est donc équi-intégrable; il existe donc $N \geq 1$, tel que, pour tout $X \in \mathcal{E}_0$, $\|X\| = 1$, on ait $\|X - X_N\| \leq \frac{\epsilon}{3}$, avec $X_N = X \cdot 1_{\{|X| \leq N\}}$.

Par ailleurs, u étant \mathcal{C}_0 -mesurable, il existe un entier k , et $u' \in L^1(\mathcal{C}_0, P_0)$, u' ne dépendant que de $\Psi_0, \dots, \Psi_{k-1}$ tels que $\|u - u'\|_1 \leq \epsilon/3N$.

On a alors $|\int |uX_N| dP_0 - \int |u'X_N| dP_0| \leq \int |X_N| |u - u'| dP_0 \leq \frac{\epsilon}{3}$ puisque $|X_N| \leq N$.

Or, si $X \in \mathcal{E}_k$, X est indépendant de u' , donc X_N aussi. Il en résulte que $\int |u'X_N| dP = \|u'\|_1 \|X_N\|_1$ et on a donc $|\|uX_N\|_1 - \|u'\|_1 \|X_N\|_1| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Comme $|\|u\|_1 - \|u'\|_1| \leq \|u - u'\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3}$ et que $|\|X_N\| - \|X\|_1| \leq \frac{\epsilon}{3}$, on a $(1 - \frac{\epsilon}{3})^2 \leq \|u'\|_1 \|X_N\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2$. Donc $(1 - \frac{\epsilon}{3})^2 - \frac{\epsilon}{3} \leq \|uX_N\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2 + \frac{\epsilon}{3}$ quel que soit $X \in \mathcal{E}_k$, $\|X\| = 1$.

On a $\|u X\|_1 = \int |u| |X| dP \geq \int |u| |X_N| dP$ puisque $|X| \geq |X_N|$.

On en déduit $\|u X\|_1 \geq (1 - \frac{\epsilon}{3})^2 - \frac{\epsilon}{3} \geq 1 - \epsilon$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$, $\|X\| = 1$ ce qui est le premier résultat cherché.

Si u est bornée on a $|\|u X\|_1 - \|u X_N\|_1| \leq \|u (X - X_N)\|_1 \leq \|u\|_\infty \|X - X_N\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3} \|u\|_\infty$. Il en résulte que $\|u X\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2 + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \|u\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$ tel que $\|X\| = 1$. Autrement dit, si $\delta = \epsilon (1 + \frac{\|u\|_\infty}{3}) + \frac{\epsilon^2}{9}$, on a $\|u X\|_1 \leq (1 + \delta) \|X\|_1$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$. C'est bien le second résultat annoncé puisque δ peut-être rendu arbitrairement petit en choisissant ϵ convenablement

C.Q.F.D.

Lemme II.5. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k tel les sous-espaces de $L^1(\beta_0, P_0)$ respectivement engendrés par les Y_i ($i \geq k$) et les $U \Psi_i$ ($i \geq k$) soient $(1 + \epsilon)$ -isomorphes.

Soit δ un réel > 0 ; on choisit k de façon que $2^{-k} \leq \delta$, et que $\|UX\|_1 \geq (1 - \delta) \|X\|_1$ pour tout X de la forme $\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$ (lemme II.4). On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i Y_i - \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \right\|_1 &\leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \|Y_i - U \Psi_i\|_1 \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| 2^{-i} \\ &\leq 2^{-k+1} \sup_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \leq 2 \delta \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{2 \delta}{\gamma_p - 2^{-k-1}} \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i \right\|_1 \quad (\text{lemme II.3}) \\ &\leq \frac{2 \delta}{(1-\delta)(\gamma_p - 2^{-k-1})} \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \right\|_1 \end{aligned}$$

(Cette dernière inégalité résultant du choix de l'entier k d'après le lemme II.4).

Comme $2^{-k-1} \leq \delta/2$ on a donc

$$\left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i Y_i - \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \right\|_1 \leq \frac{4\delta}{(1-\delta)(2\gamma_p - \delta)} \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \right\|_1 .$$

Il ne reste plus qu'à choisir δ assez petit pour que $\frac{4\delta}{(1-\delta)(2\gamma_p - \delta)} \leq \epsilon$ pour obtenir le résultat cherché. C.Q.F.D.

Lemme II.6. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k tel que le sous-espace de $L^1(\beta_0, P_0)$ engendré par les $U \Psi_i$ ($i \geq k$) soit $(1 + \epsilon)$ -isomorphe à ℓ^P .

Les Y_i ($i \geq k_0$) engendrent un sous-espace réflexif de $L^1(\beta_0, P_0)$ c'est un sous-espace de F qui est réflexif). Il en est donc de même des $U \Psi_i$ ($i \geq k_0$) d'après le lemme II.5, donc aussi des $U \Psi_i$ ($i \geq 0$) puisque l'espace \mathfrak{F} qu'ils engendrent ne diffère du précédent que par un espace de dimension finie. Il en résulte que la boule unité de \mathfrak{F} est équi-intégrable.

Comme $\|U\|_1 = 1$ on a $P_0 \{ |U| > N \} \leq \frac{1}{N}$. Pour N assez grand et pour tout $X \in \mathcal{E}_0$ (espace engendré par $\Psi_0, \dots, \Psi_k, \dots$) tel que $\|UX\|_1 = 1$ on a donc $\int_{\{|U| > N\}} |UX| dP_0 \leq \delta$ (δ réel > 0 fixé) ; on peut aussi prendre N assez grand pour que $\int_{\{|U| > N\}} |U| dP_0 \leq \delta$. Si on pose $U_N = U \cdot 1_{\{|U| \leq N\}}$ on a donc $\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta$ si $\|UX\|_1 = 1$. Autrement dit $\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta \|UX\|_1$ pour tout $X \in \mathcal{E}_0$. De plus $1 - \delta \leq \|U_N\|_1 \leq 1 = \|U\|_1$.

En appliquant le lemme II.4 avec $u = \frac{U_N}{\|U_N\|_1}$ qui est une fonction bornée, on voit qu'il existe un entier k tel que, pour tout $X \in \mathcal{E}_k$ on ait :

$$(1 - \delta) \|X\|_1 \|U_N\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1 + \delta) \|X\|_1 \|U_N\|_1 .$$

$$\text{D'où } (1 - \delta)^2 \|X\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1 + \delta) \|X\|_1 .$$

Comme $\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta \|UX\|_1$, d'où

$(1 - \delta) \|UX\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1 + \delta) \|UX\|_1$, on a donc

$\frac{(1 - \delta)^2}{1 + \delta} \|X\|_1 \leq \|UX\|_1 \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \|X\|_1$, pour tout $X \in \mathcal{E}_k$. En prenant

$X = \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$ et en appliquant le lemme II.3 on trouve

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \delta)^2}{1 + \delta} (\gamma_p - 2^{-k-1}) \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \right\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta} (\gamma_p + 2^{-k-1}) \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à choisir δ assez petit et k assez grand pour que

$$\frac{(1 - \delta)^2}{1 + \delta} (\gamma_p - 2^{-k-1}) \geq \gamma_p (1 - \epsilon) \text{ et } \frac{1 + \delta}{1 - \delta} (\gamma_p + 2^{-k-1}) \leq \gamma_p (1 + \epsilon)$$

pour obtenir le résultat cherché.

C.Q.F.D.

D'après les lemmes II.5 et II.6, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier k tel que le sous-espace de $L^1(\beta_0, P_0)$ engendré par les Y_i ($i \geq k$) soit $(1 + \epsilon)$ -isomorphe à ℓ^p . Comme c'est un sous-espace de F , la démonstration du théorème II.1 est achevée.

D'autre part, comme $\|Y_k - U \psi_k\|_1 \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, et que les variables Ψ_k sont indépendantes, la suite Y_k est finalement β'_0 -mesurable, β'_0 étant la sous- σ -algèbre de β_0 engendrée par U . On en déduit immédiatement l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème principal.

III. CONSTRUCTION DE VARIABLES ALEATOIRES p-STABLES A PARTIR
d'UN ESPACE ISOMORPHE A ℓ^p ENGENDRE PAR DES VARIABLES
ECHANGEABLES ET SYMETRIQUES.

Théorème III. 1. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite échangeable symétrique dans $L^1(\beta_1, P_1)$ engendrant un sous-espace fermé Γ isomorphe à ℓ^p ($1 < p \leq 2$).

On suppose que

$$\underline{M^{-1} (|\lambda_0|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_n X_n\|_1 \leq M (|\lambda_0|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}, M \geq 1 .}$$

Alors il existe un ultrafiltre \mathcal{D}_2 sur \mathbb{N} , et, dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$ (sous-espace de $L^1(\beta_2, P_2)$ avec $(\beta_2, P_2) = (\beta_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$) une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ symétrique échangeable, $\|Z_k\|_1 = 1$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $Z_k = UV_k$, $U, V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ étant des variables indépendantes dans $L^1(\beta_2, P_2)$, $V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ étant p-stables, et $U \geq 0$.

2) $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $z_k^n \in \Gamma$, $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets disjoints formés avec les X_i (pour n, k variant dans \mathbb{N}).

Rappelons qu'un "paquet formé avec les X_i " est simplement une combinaison linéaire finie à coefficients réels des X_i .

Nous montrerons d'abord le

Théorème III.2. Sous les hypothèses de l'énoncé du théorème III.1. il existe un ultrafiltre \mathcal{D}_2 sur \mathbb{N} et, dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$ une suite symétrique échangeable $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\|Z_k\|_1 = 1$ telle que

1) quels que soient les réels $a, b > 0$ et $c = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$, les trois couples de variables aléatoires (cZ_0, cZ_1) , $(aZ_0 + bZ_1, cZ_2)$, $(aZ_0 + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ ont la même distribution.

2) $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $z_k^n \in \Gamma$, $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets formés avec les X_i , deux à deux disjoints pour n fixé (c'est-à-dire que $z_0^n, z_1^n, \dots, z_k^n, \dots$ sont des paquets disjoints).

Soit \mathcal{D} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} . On définit une application linéaire $\varphi \rightarrow X_\varphi$ de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans $\Gamma_1 = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ telle que $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\|_1 \leq M \|\varphi\|_p$.

Pour cela, appelons pour abrégé "intervalle de \mathbb{R}_+ " un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ avec $0 \leq a < b$.

Lorsque $I = [a, b[$, a, b étant des rationnels dyadiques, on définit $X_I \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ en posant $X_I = (\xi_I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\xi_I^n = 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=a \cdot 2^n}^{b \cdot 2^n - 1} X_k \quad \text{si } n \text{ est assez grand pour que } a \cdot 2^n, b \cdot 2^n \in \mathbb{N},$$

$$\xi_I^n = 0 \quad \text{sinon.}$$

Soient I_1, \dots, I_k des intervalles disjoints de \mathbb{R}_+ , $I_j = [a_j, b_j[$, à extrémités dyadiques. Pour n assez grand, on a

$$\lambda_1 \xi_{I_1}^n + \dots + \lambda_k \xi_{I_k}^n = 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{j=0}^k \lambda_j \sum_{i=a_j \cdot 2^n}^{b_j \cdot 2^n - 1} X_i$$

D'après l'hypothèse faite sur les X_i , on a alors :

$$\begin{aligned} M^{-1} 2^{-\frac{n}{p}} \left[\sum_{j=0}^k |\lambda_j|^p \cdot 2^n (b_j - a_j) \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \|\lambda_1 \xi_{I_1}^n + \dots + \lambda_k \xi_{I_k}^n\|_1 \\ &\leq M 2^{-\frac{n}{p}} \left[\sum_{j=0}^k |\lambda_j|^p 2^n (b_j - a_j) \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Il en résulte, en passant à la limite suivant \mathcal{D} que l'on a

$$\begin{aligned} (1) \quad M^{-1} \left(|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \dots + |\lambda_k|^p \mu(I_k) \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|\lambda_1 X_{I_1} + \dots + \lambda_k X_{I_k}\|_1 \\ &\leq M \left(|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \dots + |\lambda_k|^p \mu(I_k) \right)^{\frac{1}{p}} ; \end{aligned}$$

μ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Pour chaque fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur des intervalles à extrémités dyadiques, $\varphi = \lambda_1 1_{I_1} + \dots + \lambda_k 1_{I_k}$, on pose $X_\varphi = \lambda_1 X_{I_1} + \dots + \lambda_k X_{I_k}$ (cette définition ne dépend pas de la représentation que l'on choisit pour φ ; cela résulte aisément du fait que si I, J sont deux intervalles consécutifs, $X_{I \cup J} = X_I + X_J$). L'application $\varphi \rightarrow X_\varphi$ est donc linéaire, et d'après (1), on a $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\|_1 \leq M \|\varphi\|_p$. Elle se prolonge donc en une application linéaire de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$, notée aussi $\varphi \rightarrow X_\varphi$, satisfaisant la même inégalité.

Lemme III.1. Si I_1, \dots, I_k sont des intervalles disjoints de \mathbb{R}_+ , la distribution de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \dots, \mu(I_k))$.

(Autrement dit : si J_1, \dots, J_k sont des intervalles disjoints de \mathbb{R}_+ , $\mu(J_1) = \mu(I_1)$, $\mu(J_2) = \mu(I_2), \dots, \mu(J_k) = \mu(I_k)$, alors $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$ a même distribution que $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ étant ± 1).

Supposons d'abord $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$ à extrémités dyadiques. Il est alors clair que, pour n assez grand, $(\xi_{I_1}^n, \dots, \xi_{I_k}^n)$ et $(\epsilon_1 \xi_{J_1}^n, \dots, \epsilon_k \xi_{J_k}^n)$ ont même distribution (car les X_i forment une suite échangeable symétrique).

Or la distribution de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$) est la limite suivant \mathcal{D} de celle de $(\xi_{I_1}^n, \dots, \xi_{I_k}^n)$ (resp. $(\epsilon_1 \xi_{J_1}^n, \dots, \epsilon_k \xi_{J_k}^n)$) d'après la proposition I.3. D'où le résultat.

Dans le cas général, on choisit des intervalles à extrémités dyadiques $I_1^n, \dots, I_k^n, J_1^n, \dots, J_k^n$ respectivement inclus dans $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$, tels que $\mu(I_i - I_i^n), \mu(J_i - J_i^n) \leq \frac{1}{n}$ et $\mu(I_i^n) = \mu(J_i^n)$ ($1 \leq i \leq k$). D'après l'inégalité (1) on a $\|X_{I_i} - X_{I_i^n}\|_1 \leq M n^{-\frac{1}{p}}, \|X_{J_i} - X_{J_i^n}\|_1 \leq M n^{-\frac{1}{p}}$

Il en résulte que $X_{I_i^n} \rightarrow X_{I_i}, X_{J_i^n} \rightarrow X_{J_i}$ au sens de L^1 . Par suite la distribution de $(X_{I_1^n}, \dots, X_{I_k^n})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1^n}, \dots, \epsilon_k X_{J_k^n})$) tend vers celle de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$). D'où le résultat puisque, comme on vient de le voir, $(X_{I_1^n}, \dots, X_{I_k^n})$ et $(\epsilon_1 Y_{J_1^n}, \dots, \epsilon_k Y_{J_k^n})$ ont même distribution. C.Q.F.D.

Lemme III.2. Soit J un intervalle de \mathbb{R}_+ , $J_n \subset J$ une suite croissante d'intervalle, $\cup_n J_n = J$, les extrémités de J_n étant des rationnels de dénominateur 2^n . Alors $X_J = (\xi_{J_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$1_{J_k} \rightarrow 1_J$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ et donc $X_{J_k} \rightarrow X_J$ dans L^1 (inégalité (1)).
 Posons $Y = (\xi_{J_n}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ (sous-espace de $L^1[(\beta_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}]$).
 Comme $X_{J_k} = (\xi_{J_k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\|Y - X_{J_k}\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_{J_n}^n - \xi_{J_k}^n\|_1$. Or, pour
 $n \geq k$, les extrémités de J_n, J_k sont des rationnels de dénominateur 2^n . Par
 définition de $\xi_{J_n}^n, \xi_{J_k}^n$, et en utilisant l'hypothèse faite sur les X_i , on
 trouve aisément $\|\xi_{J_n}^n - \xi_{J_k}^n\| \leq M \mu(J_n - J_k)^{\frac{1}{p}}$. En passant à la limite
 suivant \mathcal{D} , on a $\|Y - X_{J_k}\|_1 \leq M \mu(J - J_k)^{\frac{1}{p}}$. Comme $\mu(J - J_k) \rightarrow 0$ quand
 $k \rightarrow \infty$, on voit que $X_{J_k} \rightarrow Y$ dans L^1 et donc $Y = X_J$. C.Q.F.D.

Lemme III.3. Soient $I_0, I_1, \dots, I_k, \dots$ une suite d'intervalles de \mathbb{R}_+ disjoints
 deux à deux. On a alors $X_{I_k} = (\eta_{I_k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\eta_0^n, \eta_1^n, \dots, \eta_k^n, \dots$
 sont des paquets disjoints formés avec les X_i .

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit I_k^n une suite croissante d'intervalles contenus
 dans I_k , telle que $\bigcup_n I_k^n = I_k$, les extrémités de I_k^n étant des rationnels de
 dénominateur 2^n . D'après le lemme III.2, on a $X_{I_k} = (\xi_{I_k^n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il suffit de
 poser $\eta_{I_k}^n = (\xi_{I_k^n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C.Q.F.D.

Lemme III.4. Soit $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ une suite de fonctions en escalier sur \mathbb{R}_+ ,
 deux à deux étrangères. Alors on a $X_{\varphi_k} = (\eta_{\varphi_k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les $\eta_{\varphi_k}^n$ étant des paquets
 formés avec les X_i ; pour n fixé, $\eta_0^n, \eta_1^n, \dots, \eta_k^n, \dots$ sont des paquets
 disjoints.

On écrit $\varphi_k = \sum_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj} 1_{I_{kj}}$, les I_{kj} ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq r_k$) étant des
 intervalles de \mathbb{R}_+ deux à deux disjoints. On a donc (lemme III.3)

$X_{I_{kj}} = (\zeta_{kj}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les ζ_{kj}^n étant, pour chaque n fixé, des paquets disjoints
 en les X_i . On a donc $X_{\varphi_k} = \sum_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj} X_{I_{kj}} = (\eta_{\varphi_k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$\eta_k^n = \sum_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj} \zeta_{kj}^n$. Pour n fixé, les η_k^n sont donc des paquets disjoints en les X_i . C.Q.F.D.

Soit ρ un réel > 1 ; si $I = [a, b[$, $0 \leq a < b$, on pose

$$\Delta_I^{j,n,\rho} = \left[j + \frac{a}{n\rho^j}, j + \frac{b}{n\rho^j} \right[\text{ si } \frac{b}{n} < 1, \quad \Delta_I^{j,n,\rho} = \emptyset \text{ si } \frac{b}{n} \geq 1.$$

Donc $\Delta_I^{0,n,\rho}, \Delta_I^{1,n,\rho}, \dots, \Delta_I^{n-1,n,\rho}$ sont des intervalles disjoints (respectivement contenus dans $[0, 1[$, $[1, 2[$, \dots , $[n-1, n[$). On pose

$$Y_I^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-\frac{j}{\rho}} X_{\Delta_I^{j,n,\rho}} = X_{\varphi_I^{\rho,n}} \quad \text{avec}$$

$$\varphi_I^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-\frac{j}{\rho}} 1_{\Delta_I^{j,n,\rho}}$$

Notons que si $I_0, I_1, \dots, I_k, \dots$ sont des intervalles disjoints, $\varphi_{I_0}^{\rho,n}, \varphi_{I_1}^{\rho,n}, \dots, \varphi_{I_k}^{\rho,n}, \dots$ sont des fonctions en escalier deux à deux étrangères.

On désigne par Γ_1 l'espace $\Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{B}}$, et par Γ_2 l'espace $\Gamma_1^{\mathbb{N}/\mathcal{B}}$. On définit $Y_I^\rho \in \Gamma_2$ en posant $Y_I^\rho = (Y_I^{\rho,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme III.5. Si I_1, \dots, I_k sont des intervalles de \mathbb{R}_+ deux à deux disjoints on a

$$\frac{M^{-1} (|\lambda_1|^\rho \mu(I_1) + \dots + |\lambda_k|^\rho \mu(I_k))^\rho}{1} \leq \|\lambda_1 Y_{I_1}^\rho + \dots + \lambda_k Y_{I_k}^\rho\|_1$$

$$\leq M (|\lambda_1|^\rho \mu(I_1) + \dots + |\lambda_k|^\rho \mu(I_k))^\rho.$$

Posons $I_i = [a_i, b_i[$ ($1 \leq i \leq k$) et soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$ pour $1 \leq i \leq k$. On a alors

$$\varphi_{I_i}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-\frac{j}{\rho}} 1_{\left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right[} \quad \text{d'où } \|\varphi_{I_i}^{\rho,n}\|_\rho = (b_i - a_i)^{\frac{1}{\rho}} = \mu(I_i)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Comme les $\varphi_{I_i}^{\rho, n}$ ($1 \leq i \leq k$) sont étrangères, si
 $\Phi_n = \lambda_1 \varphi_{I_1}^{\rho, n} + \dots + \lambda_k \varphi_{I_k}^{\rho, n}$, on a $\|\Phi_n\|_p = [|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \dots + |\lambda_k|^p \mu(I_k)]^{\frac{1}{p}}$.
 Or $\lambda_1 Y_{I_1}^{\rho, n} + \dots + \lambda_k Y_{I_k}^{\rho, n} = X_{\Phi_n}$, d'où il résulte que
 $M^{-1} \|\Phi_n\|_p \leq \|\lambda_1 Y_{I_1}^{\rho, n} + \dots + \lambda_k Y_{I_k}^{\rho, n}\|_1 \leq M \|\Phi_n\|_p$.

En faisant tendre n vers l'infini suivant l'ultrafiltre \mathcal{B} on obtient le résultat cherché. C.Q.F.D.

Lemme III.6. Si I_1, \dots, I_k sont des intervalles disjoints dans \mathbb{R}_+ , la distribution de $(Y_{I_1}^\rho, \dots, Y_{I_k}^\rho)$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \dots, \mu(I_k))$:

(Autrement dit, si J_1, \dots, J_k sont des intervalles disjoints dans \mathbb{R}_+ , $\mu(J_1) = \mu(I_1), \dots, \mu(J_k) = \mu(I_k)$, alors $(\epsilon_1 Y_{J_1}^\rho, \dots, \epsilon_k Y_{J_k}^\rho)$ a même distribution que $(Y_{J_1}^\rho, \dots, Y_{J_k}^\rho)$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ étant ± 1).

Posons $I_i = [a_i, b_i[$, $J_i = [c_i, d_i[$ ($1 \leq i \leq k$) avec $b_i - a_i = d_i - c_i$.
 Soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$, $\frac{d_i}{n} < 1$ ($1 \leq i \leq k$). On a alors

$$Y_{I_i}^{\rho, n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j X_{\left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right[} ;$$

$$\epsilon_i Y_{J_i}^{\rho, n} = \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_i \rho^j X_{\left[j + \frac{c_i}{n\rho^j}, j + \frac{d_i}{n\rho^j} \right[}$$

D'après le lemme III.1 les deux nk -uplets de variables aléatoires

$$\left(X_{\left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right[} \right)_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq k}} \quad \text{et} \quad \left(\epsilon_i X_{\left[j + \frac{c_i}{n\rho^j}, j + \frac{d_i}{n\rho^j} \right[} \right)_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq k}}$$

ont la même distribution. Il en résulte immédiatement que les k -uplets de variables

aléatoires $(Y_{I_i}^{\rho, n})_{1 \leq i \leq k}$ et $(\epsilon_i Y_{I_i}^{\rho, n})_{1 \leq i \leq k}$ ont la même distribution.

En faisant tendre n vers l'infini suivant \mathcal{D} et en appliquant la proposition I.3, on en déduit que les k -uplets $(Y_{I_i}^{\rho})_{1 \leq i \leq k}$ et $(\epsilon_i Y_{I_i}^{\rho})_{1 \leq i \leq k}$ ont la même distribution. C.Q.F.D.

Lemme III.7. Soient I_1, \dots, I_k, I, J des intervalles de \mathbb{R}_+ , I_1, \dots, I_k, I étant deux à deux disjoints ainsi que I_1, \dots, I_k, J , et $\mu(I) = \rho \mu(J)$. Alors les $(k+1)$ -uplets de variables aléatoires $(Y_{I_1}^{\rho}, \dots, Y_{I_k}^{\rho}, Y_I^{\rho})$ et $(Y_{I_1}^{\rho}, \dots, Y_{I_k}^{\rho}, \rho^{\frac{1}{p}} Y_J^{\rho})$ ont la même distribution.

On a $I_i = [a_i, b_i[$ ($1 \leq i \leq k$), $I = [a, b[$, $J = [c, d[$, $b - a = \rho(d - c)$.
Soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$ ($1 \leq i \leq k$), $\frac{b}{n} < 1$, $\frac{d}{n} < 1$.

On a alors :

$$Y_{I_i}^{\rho, n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}} X \left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right]$$

$$Y_I^{\rho, n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}} X \left[j + \frac{a}{n\rho^j}, j + \frac{b}{n\rho^j} \right]$$

$$\rho^{\frac{1}{p}} Y_J^{\rho, n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j+1}{p}} X \left[j + \frac{c}{n\rho^j}, j + \frac{d}{n\rho^j} \right]$$

Posons alors $Y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j+1}{p}} X \left[j+1 + \frac{a}{n\rho^{j+1}}, j+1 + \frac{b}{n\rho^{j+1}} \right]$.

On a immédiatement $Y^{(n)} - Y_I^{\rho, n} = \rho^{\frac{n}{p}} X \left[n + \frac{a}{n\rho^n}, n + \frac{b}{n\rho^n} \right] \overset{-X}{\sim} \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right]$

et donc $\|Y^{(n)} - Y_I^{\rho, n}\|_1 \leq M \left[\frac{2}{n} (b-a) \right]^{\frac{1}{p}}$. Donc $\|Y^{(n)} - Y_I^{\rho, n}\|_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, d'où il résulte que $Y_I^\rho = (Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par ailleurs, d'après le lemme III.1 les deux $(nk + n)$ -uplets de variables aléatoires :

$$\left(X_{\left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right[} \right)_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq k}} \quad \left(X_{\left[j+1 + \frac{a}{n\rho^{j+1}}, j+1 + \frac{b}{n\rho^{j+1}} \right[} \right)_{0 \leq j \leq n-1}$$

et

$$\left(X_{\left[j + \frac{a_i}{n\rho^j}, j + \frac{b_i}{n\rho^j} \right[} \right)_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq k}} \quad \left(X_{\left[j + \frac{c}{n\rho^j}, j + \frac{d}{n\rho^j} \right[} \right)_{0 \leq j \leq n-1}$$

ont la même distribution (les intervalles $\left[j + \frac{c}{n\rho^j}, j + \frac{d}{n\rho^j} \right[$ et $\left[j+1 + \frac{a}{n\rho^{j+1}}, j+1 + \frac{b}{n\rho^{j+1}} \right[$ ayant la même longueur).

Il en résulte que les deux $(k+1)$ -uplets de variables aléatoires

$$\left[\left(Y_{I_i}^{\rho, n} \right)_{1 \leq i \leq k}, Y^{(n)} \right] \text{ et } \left[\left(Y_i^{\rho, n} \right)_{1 \leq i \leq k}, o^{\frac{1}{p}} Y_J^{\rho, n} \right]$$

ont la même distribution. En faisant tendre n vers l'infini suivant \mathcal{B} et en appliquant la proposition I.3, on obtient le résultat cherché (puisque $Y_I^\rho = (Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$).

C.Q.F.D.

Lemme III.8. Si $0 \leq a < b < c$ alors $Y^\rho_{[a, c[} = Y^\rho_{[a, b[} + Y^\rho_{[b, c[}$.

Si n est assez grand pour que $\frac{c}{n} < 1$, on a immédiatement

$$Y^\rho_{[a, c[} = Y^\rho_{[a, b[} + Y^\rho_{[b, c[} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Choisissons maintenant une suite de réels $(\rho_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 1 en

décroissant. Pour fixer les idées, et simplifier un peu le calcul, nous prendrons

$\rho_\nu = e^{(2^{-\nu})}$. Pour chaque intervalle I de \mathbb{R}_+ , on définit dans $(\Gamma_2)^{\mathbb{N}/\mathcal{B}}$:

$$Y_I = (Y_I^{\rho_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}.$$

On a $M^{-1} \mu(I)^{\frac{1}{p}} \leq \|Y_I\|_1 \leq M \mu(I)^{\frac{1}{p}}$ (car les mêmes inégalités sont vraies pour $Y_I^{\rho_\nu}$). Si I_1, \dots, I_k sont des intervalles disjoints dans \mathbb{R}_+ , la distribution de $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k})$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \dots, \mu(I_k))$ (car cette propriété est vraie pour $(Y_{I_1}^{\rho_\nu}, \dots, Y_{I_k}^{\rho_\nu})$ d'après le lemme III.6 et il suffit d'appliquer la proposition I.3). Enfin

$$Y_{[a,c[} = Y_{[a,b[} + Y_{[b,c[} \quad \text{si } 0 \leq a < b < c \quad (\text{lemme III.8}).$$

Lemme III.9. Soient I_1, \dots, I_k, I, J des intervalles de \mathbb{R}_+ , I_1, \dots, I_k, I

d'une part, I_1, \dots, I_k, J , d'autre part étant deux à deux disjoints et

$\mu(I) = \sigma \mu(J)$ (σ réel > 0). Alors les $(k+1)$ -uplets de variables aléatoires

$(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, Y_I)$ et $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution.

On peut supposer $\sigma > 1$ (si $\sigma = 1$, le résultat est déjà vu ; si $\sigma < 1$, échanger les rôles de I et de J).

Supposons d'abord que $\sigma = e^{\frac{r}{2^s}}$, $r, s \in \mathbb{N}$, $r > 0$.

Lorsque $\nu \geq s$, les deux $(k+1)$ -uplets $(Y_{I_1}^{\rho_\nu}, \dots, Y_{I_k}^{\rho_\nu}, Y_I^{\rho_\nu})$ et $(Y_{I_1}^{\rho_\nu}, \dots, Y_{I_k}^{\rho_\nu}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J^{\rho_\nu})$ ont la même distribution : car alors $\sigma = \rho_\nu^{\frac{N}{\nu}}$ avec $N = r \cdot 2^{\nu-s}$, et il suffit d'appliquer N fois le lemme III.7.

On obtient alors le résultat en faisant tendre ν vers l'infini suivant l'ultrafiltre \mathcal{B} , et en appliquant la proposition I.3.

Dans le cas général, soit σ_n une suite de réels de la forme $e^{\frac{r}{2^s}}$ ($r, s \in \mathbb{N}$, $r > 0$) qui tend en croissant vers σ , et soit $I'_n \subset I$ une suite

croissante d'intervalles, $\mu(I'_n) = \sigma_n \mu(J)$, tels que $I - I'_n$ soit aussi un intervalle I''_n (dont la mesure tend vers 0). On a alors $Y_I - Y_{I'_n} = Y_{I''_n}$ donc $\|Y_I - Y_{I'_n}\| \leq M \mu(I''_n)^{\frac{1}{p}}$ donc $Y_{I'_n} \rightarrow Y_I$ au sens de L^1 . D'autre part, $\sigma_n^{\frac{1}{p}} Y_J \rightarrow \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J$. Comme $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, Y_{I'_n})$ et $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, \sigma_n^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution, on voit, quand $n \rightarrow \infty$, que $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, Y_I)$ et $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution C.Q.F.D.

On pose alors $Z_k = Y_{[k, k+1[}$; $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite échangeable symétrique de variables aléatoires, et on a $M^{-1} \leq \|Z_k\|_1 \leq M$. Vérifions que cette suite a les propriétés 1, 2 annoncées dans le théorème III.2.

Soient $a, b > 0$, $c = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$. Posons $I_0 = [0, 1[$, $I_1 = [1, 2[$,

$$J_1 = [K_1, K_1 + a^p[\quad , \quad J'_1 = [K_1 + a^p, K_1 + a^p + b^p[$$

$$J_2 = [K_2, K_2 + a^p[\quad , \quad J'_2 = [K_2 + a^p, K_2 + a^p + b^p[$$

avec $K_1 \geq 2$, $K_2 \geq K_1 + a^p + b^p$ (ce qui donne 6 intervalles disjoints).

D'après le lemme III.9 (appliqué 4 fois) les trois quadruplets (aZ_0, bZ_1, aZ_2, bZ_3) , $(aZ_0, bZ_1, Y_{J_2}, Y_{J'_2})$ et $(Y_{J_1}, Y_{J'_1}, Y_{J_2}, Y_{J'_2})$ ont la même distribution. Il en résulte que les deux triplets (aZ_0, bZ_1, aZ_2, bZ_3) et $(aZ_0, bZ_1, Y_{J_2} + Y_{J'_2})$ ont la même distribution; et également les deux couples $(aZ_0 + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et $(Y_{J_1} + Y_{J'_1}, Y_{J_2} + Y_{J'_2})$.

Or $Y_{J_1} + Y_{J'_1} = Y_{J_1 \cup J'_1}$, $Y_{J_2} + Y_{J'_2} = Y_{J_2 \cup J'_2}$, $J_1 \cup J'_1$ et $J_2 \cup J'_2$ étant deux intervalles de longueur c^p , disjoints de I_0, I_1 et disjoints entre eux. En appliquant de nouveau le lemme III.9 on voit que les deux triplets $(aZ_0, bZ_1, Y_{J_2 \cup J'_2})$ et (aZ_0, bZ_1, cZ_2) ont la même distribution; et également

les deux couples $(Y_{J_1 \cup J'_1}, Y_{J_2 \cup J'_2})$ et (cZ_0, cZ_1) . On en déduit que $(aZ_0 + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et (cZ_0, cZ_1) ont la même distribution ; et aussi $(aZ_0, bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et (aZ_0, bZ_1, cZ_2) . Donc les deux couples $(aZ_0 + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et $(aZ_0 + bZ_1, cZ_2)$ ont la même distribution, ce qui démontre la propriété 1.

Pour la propriété 2, comme $Z_k \in \Gamma_2^{N/\mathcal{D}}$, il reste à montrer que $\Gamma_2^{N/\mathcal{D}} = \Gamma^A/\mathcal{U}$, A étant un ensemble dénombrable et \mathcal{U} un ultrafiltre sur A, et que l'on a $Z_k = (z_k^\alpha)_{\alpha \in A}$, les z_k^α étant des paquets formés avec les X_i , deux à deux disjoints pour α fixé.

D'après la proposition I.6 (puisque $\Gamma_2 = \Gamma_1^{N/\mathcal{D}}$ et $\Gamma_1 = \Gamma^{N/\mathcal{D}}$) on a en fait $\Gamma_2^{N/\mathcal{D}} = \Gamma^{N^3}/\mathcal{U}$, \mathcal{U} étant un ultrafiltre sur N^3 .

Or, si $I_k = [k, k+1[$, on a $Z_k = Y_{I_k} = (Y_{I_k}^{\rho_\nu})_{\nu \in N}$; on a $Y_{I_k}^{\rho_\nu} = (X_{\varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n}})_{n \in N}$

Soient ν, n deux entiers fixés : alors $\varphi_{I_0}^{\rho_\nu, n}, \varphi_{I_1}^{\rho_\nu, n}, \dots, \varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n}, \dots$ est une suite de fonctions en escalier, deux à deux étrangères (en fait, $\varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n} = 0$ pour k assez grand). D'après le lemme III.4 on a donc

$X_{\varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n}} = (\eta_k^{r, n, \nu})_{r \in N}$, les $\eta_k^{r, n, \nu}$ étant des paquets formés avec les X_i

deux à deux disjoints pour r fixé (n, ν sont déjà fixés) et k variant dans N.

Dans Γ^{N^3}/\mathcal{U} , on a donc $Z_k = (\eta_k^{r, n, \nu})_{(r, n, \nu) \in N^3}$, et les $\eta_k^{r, n, \nu}$ sont des paquets formés avec les X_i deux à deux disjoints pour r, n, ν fixés.

Enfin, pour avoir $\|Z_k\|_1 = 1$, il suffit de remplacer Z_k par $Z_k/\|Z_k\|_1$

(noter qu'on avait $M^{-1} \leq \|Z_k\|_1 \leq M$). Le théorème III.2. est donc démontré.

Le lemme suivant montre qu'on a en fait $Z_k = U V_k$, U étant intégrable ≥ 0 , V_0, \dots, V_k, \dots étant p -stables, indépendantes et indépendantes de U .

Lemme III.10. Soient p un réel $1 < p \leq 2$ et $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite échangeable symétrique de variables aléatoires réelles dans $L^1(\beta; P)$ ayant la propriété suivante : si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $c = (a^p + b^p)^{1/p}$, les trois couples (cZ_0, cZ_1) , $(aZ_0 + bZ_1, cZ_2)$, $(aZ_0 + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ ont la même distribution. On a alors $Z_k = UV_k$, $U, V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ étant des variables indépendantes dans $L^1(\beta, P)$, $U \geq 0$, V_0, V_1, \dots, V_k étant p -stables.

Soit β^∞ la σ -algèbre de queue de la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors les variables Z_k sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur β^∞ , c'est-à-dire :

$$(*) \quad E^{\beta^\infty} \left[\prod_{k=0}^n f_k(Z_k) \right] = \prod_{k=0}^n E^{\beta^\infty} [f_k(Z_0)] \quad \text{où} \quad f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

est continue bornée ($0 \leq k \leq n$).

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, désignons par C_t la variable aléatoire $E^{\beta^\infty} e^{itZ_0}$. On a donc $|C_t| \leq 1$ et $C_{-t} = \overline{C_t}$.

En fait C_t est réel, donc $C_t = C_{-t}$: en effet on a $2i \operatorname{Im}(C_t) = C_t - C_{-t}$ et il suffit de montrer que $E(C_t - C_{-t})^2 = 0$. Or

$$E(C_t - C_{-t})^2 = E(C_t^2 + C_{-t}^2 - 2C_t \cdot C_{-t}) . \text{ Mais}$$

$$C_t^2 = (E^{\beta^\infty} e^{itZ_0})^2 = E^{\beta^\infty} (e^{it(Z_0+Z_1)}) , \text{ d'après } (*). \text{ De même}$$

$$C_{-t}^2 = E^{\beta^\infty} e^{-it(Z_0+Z_1)} \text{ et } C_t \cdot C_{-t} = E^{\beta^\infty} e^{it(Z_0-Z_1)} . \text{ Donc}$$

$$E(C_t - C_{-t})^2 = E(e^{it(Z_0+Z_1)}) + E(e^{-it(Z_0+Z_1)}) - 2E(e^{it(Z_0-Z_1)}) = 0$$

puisque par hypothèse $Z_0 + Z_1$, $-(Z_0 + Z_1)$ et $Z_0 - Z_1$ ont même distribution.

L'application $t \rightarrow C_t$ de \mathbb{R} dans $L^2(\beta, P)$ est continue : si $t, u \in \mathbb{R}$ on a

$$\|C_t - C_u\|_2^2 = E(C_t^2 + C_u^2 - 2C_t C_u) = E \left[e^{it(Z_0 + Z_1)} + e^{iu(Z_0 + Z_1)} - 2e^{i(tZ_0 + uZ_1)} \right]$$

d'après (*). Si u décrit une suite tendant vers t cette expression tend bien vers 0 (théorème de Lebesgue).

Si $t, u \in \mathbb{R}_+$ et $v = (t^p + u^p)^{\frac{1}{p}}$ alors $C_t C_u = C_v$; en effet, on a

$$E(C_t C_u - C_v)^2 = E(C_t^2 C_u^2 + C_v^2 - 2C_t C_u C_v) = E \left[e^{i(tZ_0 + uZ_1) + i(tZ_2 + uZ_3)} \right] \\ + E \left[e^{i(vZ_0 + vZ_1)} \right] - 2E \left[e^{i(tZ_0 + uZ_1 + vZ_2)} \right] \quad \text{d'après (*).}$$

Cette dernière expression vaut 0 puisque, par hypothèse, les couples $(tZ_0 + uZ_1, tZ_2 + uZ_3), (vZ_0, vZ_1), (tZ_0 + uZ_1, vZ_2)$ ont la même distribution.

En particulier $C_t \geq 0$ (puisque $C_t = (C_{t \cdot 2^{-\frac{1}{p}}})^2$), on a donc $0 \leq C_t \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$C_t > 0$ presque sûrement : soit $A = \{C_t = 0\}$, comme $C_t = (C_{t \cdot 2^{-\frac{1}{p}}})^2$,

on voit que $C_{t \cdot 2^{-\frac{1}{p}}}, \dots, C_{t \cdot 2^{-\frac{n}{p}}}, \dots$ sont nuls sur A . Donc

$E(C_{t \cdot 2^{-\frac{n}{p}}} \cdot 1_A) = 0$. Comme $C_{t \cdot 2^{-\frac{n}{p}}} \rightarrow C_0 = 1$ dans $L^2(\beta, P)$ on en déduit que

$P(A) = 0$.

On peut alors poser $C_t = e^{-U^p}$, U étant une variable aléatoire réelle ≥ 0 .

Si on pose $C'_t = C_{\frac{1}{t}}$, on a $C'_t \cdot C'_u = C'_{t+u}$ pour t, u dans \mathbb{R}_+ . On en déduit

que $C'_t = (C'_1)^t = e^{-tU^p}$ pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$. Si maintenant $t \in \mathbb{R}_+$, soit t_n une suite de rationnels ≥ 0 tendant vers t . Alors $C'_{t_n} \rightarrow C'_t$ dans $L^2(\beta, P)$ et

$C'_{t_n} \rightarrow e^{-t} U^p$ presque sûrement. On a donc $C'_t = e^{-t} U^p$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

et par suite $C_t = e^{-t^p} U^p$. Comme $C_t = C_{-t}$ on a finalement montré que

$E^{\beta^\infty} e^{itZ_0} = e^{-|t|^p} U^p$ pour $t \in \mathbb{R}$. D'après (*) on a

$$E^{\beta^\infty} e^{i(t_0 Z_0 + \dots + t_k Z_k)} = E^{\beta^\infty} (e^{it_0 Z_0}) \dots E^{\beta^\infty} (e^{it_k Z_k}) = e^{-(|t_0|^p + \dots + |t_k|^p) U^p}$$

En prenant l'intégrale des deux membres, on trouve

$$E (e^{i(t_0 Z_0 + \dots + t_k Z_k)}) = E (e^{-(|t_0|^p + \dots + |t_k|^p) U^p}).$$

Soient alors $V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ des variables p-stables indépendantes et indépendantes de U . Un calcul immédiat montre que

$$E [e^{i(t_0 UV_0 + \dots + t_k UV_k)}] = E [e^{-(|t_0|^p + \dots + |t_k|^p) U^p}] .$$

Il en résulte que les deux suites de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(UV_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ont la même distribution (probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Il existe donc une suite de variables $U', V'_0, \dots, V'_k, \dots$ ayant la même distribution que la suite $U, V_0, \dots, V_k, \dots$ telle que $Z_k = U'V'_k$. U' est bien intégrable car Z_k est intégrable et U', V'_k sont indépendantes. C.Q.F.D.

On peut maintenant montrer le théorème III.1 : d'après le théorème III.2 et le lemme III.10 on a dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_2$ une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ échangeable symétrique, avec $Z_k = UV_k$, $U, V_0, \dots, V_k, \dots$ étant indépendantes, $U \geq 0$ et V_0, \dots, V_k, \dots étant p-stables, de plus $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $z_k^n \in \Gamma$, $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant pour n fixé des paquets disjoints formés avec les X_i .

On a donc $z_k^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_k^n(i) X_i$ où $a_k^n(i) \in \mathbb{R}$ (la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$).

Soit $\tau : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ une application bijective, on pose $\tilde{z}_k^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_k^n(i) X_{\tau(n,i)}$

On a évidemment $\|\tilde{z}_k^n\| = \|z_k^n\| = 1$ (d'après le fait que la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est échangeable). Par ailleurs les \tilde{z}_k^n sont des paquets formés avec les X_i , deux à deux disjoints pour n, k variant dans \mathbb{N} : en effet, si $X_{\tau(n,i)}$ a un coefficient $\neq 0$ dans \tilde{z}_k^n et \tilde{z}_ℓ^m , on a $a_k^n(i) \neq 0$, $a_\ell^m(j) \neq 0$ et $\tau(n,i) = \tau(m,j)$; τ étant bijective, on a $m = n$ et $i = j$, donc $a_k^n(i) \neq 0$, $a_\ell^n(i) \neq 0$, ce qui montre que X_i a un coefficient non nul à la fois dans z_k^n et z_ℓ^n ; d'où $k = \ell$ (sinon z_k^n et z_ℓ^n sont des paquets disjoints).

On définit alors $\tilde{Z}_k \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$ en posant $\tilde{Z}_k = (\tilde{z}_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste à montrer que la suite $(\tilde{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est symétrique, échangeable et satisfait la propriété 1) du théorème III.1. Pour cela, il suffit de montrer que les deux suites $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ont la même distribution (probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), c'est-à-dire que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les $(k+1)$ -uplets (Z_0, \dots, Z_k) et $(\tilde{Z}_0, \dots, \tilde{Z}_k)$ ont la même distribution.

Or, d'après la proposition I.3, la distribution de (Z_0, \dots, Z_k) (resp. $(\tilde{Z}_0, \dots, \tilde{Z}_k)$) est la limite quand $n \rightarrow \infty$ suivant l'ultrafiltre \mathcal{D}_2 de la distribution de (z_0^n, \dots, z_k^n) (resp. $(\tilde{z}_0^n, \dots, \tilde{z}_k^n)$). Il suffit donc de voir que (z_0^n, \dots, z_k^n) et $(\tilde{z}_0^n, \dots, \tilde{z}_k^n)$ ont la même distribution; mais cela résulte immédiatement de la définition de $\tilde{z}_0^n, \dots, \tilde{z}_k^n$, de l'échangeabilité de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et du fait que z_0^n, \dots, z_k^n sont des paquets disjoints, et aussi $\tilde{z}_0^n, \dots, \tilde{z}_k^n$: C.Q.F.D.

IV. PREUVE DE 3 \Rightarrow 4 DANS LE THEOREME PRINCIPAL.

Considérons un sous-espace réflexif F de $L^1(\beta_0, P_0)$ et supposons que, dans une ultrapuissance $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_1$ de F , ($F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_1$ est donc un sous-espace de $L^1(\beta_1, P_1)$ avec $(\beta_1, P_1) = (\beta_0, P_0)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_1$) il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant les trois propriétés suivantes :

1) la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires est échangeable et symétrique ;

2) Elle engendre dans $L^1(\beta_1, P_1)$ un espace Γ isomorphe à ℓ^p et, plus précisément, il existe $M > 0$ tel que

$$\underline{M^{-1} (|\lambda_0|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_n X_n\|_1 \leq M (|\lambda_0|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}}$$

3) la σ -algèbre de queue de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans β_0 .

On a alors :

Lemme IV.1. Il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \mathbb{N} et une variable aléatoire $Z \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ (sous espace de $L^1(\mathcal{B}, P)$ avec $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$) ayant les propriétés suivantes :

1) $Z = UV$, $U \in L^1(\mathcal{B}, P)$, $U \geq 0$, V étant p-stable et indépendante de la σ -algèbre engendrée par \mathcal{B}_1 et U ;

2) $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \Gamma$, $\|z_n\| = 1$; les z_n étant des paquets disjoints formés avec les X_i .

A l'aide du théorème III.1, on construit dans $L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$ (avec $(\mathcal{B}_2, P_2) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_2$) une suite $Z_k = UV_k$ de variables aléatoires ayant les propriétés indiquées dans ce théorème. Soit $\Gamma_2 = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_2$, d'où $Z_k \in \Gamma_2$.

Soit \mathcal{B} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} , d'où $\Gamma_2^{\mathbb{N}}/\mathcal{B} \subset L^1(\mathcal{B}, P)$ avec $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_2, P_2)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$. On définit $Z \in \Gamma_2^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$ et $V \in L^1(\mathcal{B}, P)$ en posant $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $V = (V_k)_{k \in \mathbb{N}}$. D'après la proposition I.5.1., V est une variable p-stable indépendante de \mathcal{B}_2 , donc de la σ -algèbre engendrée par \mathcal{B}_1 et U (puisque $U \in L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$). D'autre part, on a $Z = UV$: en effet la distribution du triplet (Z_k, U, V_k) converge suivant \mathcal{B} vers celle de (Z, U, V) (proposition I.3); or la distribution de (Z_k, U, V_k) est toujours la même et $Z_k = UV_k$, d'où $Z = UV$.

Il reste à montrer que $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_1, P_1)^A / \mathcal{U}$, A étant un ensemble dénombrable et \mathcal{U} un ultrafiltre sur A , et que $Z = (z_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\|z_\alpha\| = 1$, les z_α étant des paquets disjoints formés avec les X_i . Or, d'après la proposition I.6, on a $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}/\mathcal{B}_2} / \mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} / \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_2$. On prend donc $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} = \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_2$. D'après le théorème III.1 on a $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets disjoints formés avec les X_i .
Donc $Z = (z_k^n)_{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. C.Q.F.D.

Le lemme suivant est un exercice de calcul de probabilités.

Lemme IV.2. Soit f une variable aléatoire ≥ 0 , \mathcal{B}_0 une σ -algèbre. Alors

$(E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n}})^n$ converge presque sûrement vers $e^{-E^{\mathcal{B}_0} f}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

- Noter qu'on ne suppose pas f intégrable ; donc $E^{\mathcal{B}_0} f$ est une variable aléatoire ≥ 0 finie ou infinie ; nous la définissons ici comme la limite quand $N \rightarrow +\infty$ de la suite croissante $E^{\mathcal{B}_0} f_N$ avec $f_N = f \cdot 1_{\{f \leq N\}}$.

- Notons aussi que $(E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n}})^n$ est une suite décroissante de variables aléatoires ≥ 0 ; en effet, on a $E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n}} = E^{\mathcal{B}_0} [(e^{-\frac{f}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}] \geq (E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$ (d'après l'inégalité $E^{\mathcal{B}_0} (|h|^r) \geq (E^{\mathcal{B}_0} |h|)^r$ si $r \geq 1$) et donc

$$(E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n}})^n \geq (E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n+1}})^{n+1}$$

- Supposons d'abord f bornée. On a alors $1 - \frac{f}{n} \leq e^{-\frac{f}{n}} \leq 1 - \frac{f}{n} + \frac{f^2}{2n^2}$ dès que $n > \|f\|_\infty$.

$$\text{Donc } (1 - \frac{1}{n} E^{\mathcal{B}_0} f)^n \leq (E^{\mathcal{B}_0} e^{-\frac{f}{n}})^n \leq (1 - \frac{1}{n} E^{\mathcal{B}_0} f + \frac{1}{2n^2} E^{\mathcal{B}_0} f^2)^n.$$

Quand $n \rightarrow \infty$ les deux membres extrêmes tendent vers $e^{-E^{\mathcal{B}_0} f}$ d'où le résultat.

Dans le cas général, posons $g_n = (E^{\beta_0} e^{-\frac{f}{n}})^n$, $g_{n,N} = (E^{\beta_0} e^{-\frac{f_N}{n}})^n$.

Quand $n \rightarrow \infty$, g_n tend en décroissant vers une variable g ; quand $N \rightarrow \infty$,

$g_{n,N}$ tend en décroissant vers g_n . Il en résulte que

$$g = \inf_{n,N} g_{n,N} = \inf_N (\inf_n g_{n,N}) = \inf_N e^{-E^{\beta_0} f_N} \text{ (d'après ce qu'on vient de montrer)} = e^{-E^{\beta_0} f} .$$

C.Q.F.D.

Considérons dans Γ , sous-espace réflexif de $L^1(\beta_1, P_1)$ une suite

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ et un ultrafiltre \mathcal{U} ayant les propriétés énoncées dans le lemme IV.1.

En appliquant le théorème I.1 avec ces données, on construit, dans une ultrapuis-

sance $\Gamma^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}$ de Γ , une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires échangeables au-

dessus de β_1 . Démontrons un certain nombre de propriétés de cette suite :

$$1^{\circ}) \quad M^{-2} (|\lambda_1|^p + \dots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_k T_k\| \leq M^2 (|\lambda_1|^p + \dots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

En effet soit θ l'isomorphisme de Γ sur ℓ^p défini par $\theta(X_i) = e_i$ ($i \in \mathbb{N}$),

les e_i formant la base canonique de ℓ^p ; on a $\|\theta\| \leq M$, $\|\theta^{-1}\| \leq M$. Comme

$\|z_n\| = 1$, et que les z_n sont des paquets disjoints formés avec les X_i , on a

$M^{-1} \leq \|\theta z_n\| \leq M$ et les θz_n sont deux à deux étrangers : par suite, si

$\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ on a

$$\|\mu_0 \theta z_0 + \dots + \mu_n \theta z_n\| = \left(\sum_{i=0}^n |\mu_i|^p \|\theta z_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

d'où

$$M^{-1} (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p) \leq \|\mu_0 z_0 + \dots + \mu_n z_n\| \leq M (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$M^{-2} (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\mu_0 z_0 + \dots + \mu_n z_n\| \leq M^2 (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

On montre alors, par récurrence sur k , que l'on a

$$M^{-2} (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p + |\lambda_1|^p + \dots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\mu_0 z_0 + \dots + \mu_n z_n + \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_k T_k\|$$

$$\leq M^2 (|\mu_0|^p + \dots + |\mu_n|^p + |\lambda_1|^p + \dots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui est immédiat d'après le théorème I.1. D'où en particulier le résultat cherché.

2°) la σ -algèbre de queue \mathcal{B}^∞ de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est contenue dans \mathcal{B}_0 .

En effet, d'après le théorème I.1, \mathcal{B}^∞ est contenue dans la σ -algèbre de queue de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc dans celle de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (puisque les z_n sont des paquets disjoints formés avec les X_n) et par suite dans \mathcal{B}_0 .

3°) Si $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée ($1 \leq j \leq k$), on a

$$\underline{E^{\mathcal{B}_0} \left[\prod_{j=1}^k f_j(T_j) \right] = \prod_{j=1}^k E^{\mathcal{B}_0} f_j(T_j)}$$

En effet, d'après le théorème I.1, la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est conditionnellement indépendante et équidistribuée sur \mathcal{B}_1 et on a donc

$$E^{\mathcal{B}_1} \left[\prod_{j=1}^k f_j(T_j) \right] = \prod_{j=1}^k E^{\mathcal{B}_1} f_j(T_j)$$

Or, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, on a, en particulier

$$E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_1} f(T_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et par suite}$$

$$E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_1} \frac{1}{n} [f(T_1) + \dots + f(T_n)]$$

Mais les variables T_n étant échangeables, $\frac{1}{n} [f(T_1) + \dots + f(T_n)]$ converge dans L^1 vers $E^{\mathcal{B}^\infty} f(T_1)$ (voir [5]). Donc

$E^{\beta_1} f(T_1) = E^{\beta_1} (E^{\beta^\infty} f(T_1)) = E^{\beta^\infty} f(T_1)$ puisque $\beta^\infty \subset \beta_1$. Or on a vu que $\beta^\infty \subset \beta_0 \subset \beta_1$. Il en résulte que $E^{\beta_1} f(T_1) = E^{\beta_0} f(T_1)$ et par suite

$E^{\beta_1} \left[\prod_{j=1}^k f_j(T_j) \right] = \prod_{j=1}^k E^{\beta_0} f_j(T_j)$. Le premier membre est donc β_0 -mesurable (puisque le deuxième l'est) et par suite est égal à $E^{\beta_0} \left[\prod_{j=1}^k f_j(T_j) \right]$. C.Q.F.D.

4°) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, $E^{\beta_0} f(T_1) = E^{\beta_0} f(UV)$, (UV étant les variables définies dans l'énoncé du lemme IV.1). En effet, si Φ est une variable β_0 -mesurable bornée, on a $E(f(T_1) \cdot \Phi) = \lim E[f(z_n) \cdot \Phi]$ (théorème I.1) $= E(f(Z) \cdot \Phi)$ (proposition I.3, puisque $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{U}}$ dans $\Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{U}}$ et $Z = UV$).

C.Q.F.D.

En particulier, on a $E^{\beta_0} e^{i\lambda T_1} = E^{\beta_0} e^{i\lambda UV}$. Mais, d'après le lemme

I.4, V est une variable p-stable, indépendante de la σ -algèbre engendrée par β_0 et U, d'où il résulte immédiatement que $E^{\beta_0} e^{i\lambda UV} = E^{\beta_0} e^{-|\lambda|^p U^p}$ (noter que $U \geq 0$). D'après la propriété 3°) ci-dessus, on a donc

$$5°) E^{\beta_0} e^{i(\lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_k T_k)} = \prod_{j=1}^k E^{\beta_0} e^{-|\lambda_j|^p U^p}.$$

On pose alors $S_n = n^{-\frac{1}{p}} (T_1 + T_2 + \dots + T_n)$; donc $M^{-2} \leq \|S_n\| \leq M^2$

(propriété 1°) ci-dessus); \mathcal{B} étant un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} , on définit $S \in \Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{B}}$ (où $\Gamma^{\mathbb{N}} = \Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{U}}$) en posant $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons que $\Gamma^{\mathbb{N}/\mathcal{B}}$ est une ultrapuissance de Γ (proposition I.6). Or Γ est lui-même un sous-espace de $F^{\mathbb{N}/\beta_1}$, ce qui montre que S appartient à une ultrapuissance de F.

D'après la propriété 5°) ci-dessus, on a

$$E^{\beta_0} e^{i\lambda S_n} = (E^{\beta_0} e^{-|\lambda|^p U^p/n})^n$$

D'après le lemme IV.2, quand $n \rightarrow \infty$, $E^{\beta_0} e^{i\lambda S_n}$ converge donc presque sûrement vers $e^{-E^{\beta_0} |\lambda|^p U^p}$.

Posons $\tilde{U}^p = E^{\beta_0} U^p$; \tilde{U} est donc une variable aléatoire ≥ 0 finie ou infinie, β_0 -mesurable. On a $E^{\beta_0} |\lambda|^p U^p = |\lambda|^p \tilde{U}^p$ pour $\lambda \neq 0$ (et $E^{\beta_0} |\lambda|^p U^p = 0$ pour $\lambda = 0$).

Soit X une variable aléatoire bornée, β_0 -mesurable quelconque. On a $E(e^{i\lambda S_n} \cdot X) = E(X \cdot E^{\beta_0} e^{i\lambda S_n})$; donc quand $n \rightarrow \infty$, $E(e^{i\lambda S_n} \cdot X) \rightarrow E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} X)$ si $\lambda \neq 0$; mais, par ailleurs $E(e^{i\lambda S_n} \cdot X)$ converge suivant \mathcal{D} vers $E(e^{i\lambda S} \cdot X)$ (proposition I.6). Donc

$$E(e^{i\lambda S} \cdot X) = E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} \cdot X) \text{ pour } \lambda \neq 0.$$

On en déduit d'abord que \tilde{U} est presque sûrement fini : car, si $A = \{\tilde{U} = +\infty\}$ et si on pose $X = 1_A$, on a pour $\lambda \neq 0$: $E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} \cdot 1_A) = 0$, donc $E(e^{i\lambda S} \cdot 1_A) = 0$; quand $\lambda \rightarrow 0$, $E(e^{i\lambda S} \cdot 1_A) \rightarrow E(1_A)$, d'où $P_0(A) = 0$.

Soit alors \hat{V} une variable p -stable indépendante de β_0 , on a immédiatement $E(e^{i\lambda \tilde{U} \hat{V}} \cdot X) = E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} \cdot X) = E(e^{i\lambda S} \cdot X)$. Donc, si Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires β_0 -mesurables, on a

$$E[e^{i(\lambda \tilde{U} \hat{V} + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_n Y_n)}] = E[e^{i(\lambda S + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_n Y_n)}].$$

Donc les $(n+1)$ -uplets $(\tilde{U} \hat{V}, Y_1, \dots, Y_n)$ et $(S; Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même distribution. Cela montre que $S = \tilde{U} \tilde{V}$, où \tilde{V} est une variable p -stable indépendante de β_0 . Comme S appartient à une ultrapuissance de F , on a obtenu l'implication 3 \Rightarrow 4 du théorème principal.

V. DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL ET DE L'EQUIVALENCE DES CONJECTURES (C) et (C').

$1 \Rightarrow 2$ est évident ; $3 \Rightarrow 4$ a été prouvé dans la partie IV et $4 \Rightarrow 1$ dans la partie II. Il reste à voir que $2 \Rightarrow 3$: Soit donc $F \subset L^1(\mathcal{B}_0, P_0)$ une ultrapuissance de E contenant un espace isomorphe à ℓ^p dont la base $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit finalement \mathcal{B} -mesurable (\mathcal{B} est une sous- σ -algèbre de \mathcal{B}_0). Il existe donc une suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans $L^1(\mathcal{B}_0, P_0)$, dont la σ -algèbre de queue est contenue dans \mathcal{B} et telle que $\|X_n - X'_n\|_1 \rightarrow \infty$.

Soit \mathcal{B} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} ; en appliquant le théorème I.1. à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient une suite échangeable Y_1, \dots, Y_k, \dots d'éléments de $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$. D'après la construction de la suite Y_k et le fait que $\|X_n - X'_n\| \rightarrow 0$ il est clair qu'on obtient la même suite de variables aléatoires en partant de la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il en résulte que la σ -algèbre de queue de la suite Y_k est contenue dans celle de la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c'est-à-dire dans \mathcal{B} .

D'autre part, d'après le théorème I.1. et le fait que l'on a :

$$M^{-1} \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i X_i \right\| \leq M \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour une certaine constante $M > 0$, on en déduit la même inégalité pour les Y_i (d'après le théorème I.1., 2), on a immédiatement, par récurrence sur k l'inégalité

$$M^{-1} \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i|^p + \sum_{j=1}^k |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^k \mu_j Y_j \right\| \leq M \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i|^p + \sum_{j=1}^k |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il en résulte que les Y_i engendrent un espace isomorphe à ℓ^p ; si on pose $Y'_n = Y_{2n+1} - Y_{2n}$, la suite Y'_n est échangeable, symétrique et engendre un espace isomorphe à ℓ^p , d'où le résultat cherché puisque les Y'_n sont dans une ultrapuissance de F , donc de E .

Preuve du théorème 0.3. :

$a \Rightarrow b$ est immédiat d'après $2 \Rightarrow 4$ dans le théorème principal.

$b \Rightarrow a$: on a $UV = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $Z_n \in E$, $UV \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$; en appliquant le théorème I.1. avec l'ultrafiltre \mathcal{D} et la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient dans $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ une suite échangeable Y_1, \dots, Y_k, \dots . Il est clair qu'on a $Y_k = UV_k$, V_k étant une suite de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de \mathcal{A} , de même distribution que V_k (donc symétriques). La σ -algèbre de queue de la suite UV_k est évidemment contenue dans la σ -algèbre engendrée par U , donc contenue dans \mathcal{B} .

On a par ailleurs

$$E \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i U V_i \right| = E \left| U \left| E \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i V_i \right| \right. \right|$$

Dans [1], il est montré que les variables $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrent un espace Λ_1 isomorphe à un espace d'Orlicz ℓ_f de suites, l'isomorphisme étant tel que l'image de V_n soit l'élément e_n de la base canonique de ℓ_f . Les variables UV_n engendrent donc aussi un espace Λ isomorphe à ℓ_f avec la même correspondance des bases. D'après un théorème de [4], ℓ_f contient un sous-espace Γ' isomorphe à ℓ^p , pour un $p \geq 1$, dont la base est formée de paquets disjoints d'éléments de la base canonique de ℓ_f . Par isomorphisme, Λ contient un sous-espace Γ , isomorphe à ℓ^p , dont la base est formée de paquets disjoints des $(UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La σ -algèbre de queue de la base de Γ est donc incluse dans \mathcal{B} : comme Λ est réflexif (sous-espace d'une ultrapuissance de E) on a $p > 1$. La condition 2 du théorème principal est donc satisfaite, donc aussi la condition 1, ce qui donne le résultat cherché.

Equivalence des conjectures C et C'.

On montre d'abord le

Lemme V.1. Soit E un espace de Banach ayant une base inconditionnelle

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et contenant un espace isomorphe à ℓ^p ($1 \leq p < \infty$). Alors il contient un espace isomorphe à ℓ^p dont la base est formée de paquets disjoints en les X_n .

Soit P_n l'opérateur de projection de E sur le sous-espace engendré par X_0, \dots, X_n ($P_n X_i = X_i$ si $i \leq n$, $P_n X_i = 0$ si $i > n$) et soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E formant la base d'un sous-espace isomorphe à ℓ^p . Pour chaque entier n fixé, il existe une sous-suite Y_{k_ν} de la suite Y_k telle que $P_n Y_{k_\nu}$ converge quand $\nu \rightarrow \infty$ (l'image de P_n étant de dimension finie). Par diagonalisation, il existe donc une sous-suite Z_k de la suite Y_k telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P_n Z_k$ converge quand $k \rightarrow \infty$, donc, si $U_k = Z_{2k+1} - Z_{2k}$, les U_k forment la base d'un espace K-isomorphe à ℓ^p (K réel ≥ 1), et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $P_n U_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Fixons $\epsilon > 0$; on choisit n_0 assez grand pour que $\|P_{n_0} U_0 - U_0\| \leq \epsilon$; puis k_1 assez grand pour que $\|P_{n_0} U_{k_1}\| \leq \epsilon/4$, puis $n_1 > n_0$ assez grand tel que $\|P_{n_1} U_{k_1} - U_{k_1}\| \leq \epsilon/4$; ayant défini $n_0 < n_1 < \dots < n_i$, $k_1 < \dots < k_i$, on choisit $k_{i+1} > k_i$ assez grand pour que $\|P_{n_i} U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+2}$ puis n_{i+1} assez grand pour que $\|P_{n_{i+1}} U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+2}$.

$$\text{On pose alors } V_0 = P_{n_0} U_0, \quad V_{i+1} = (P_{n_{i+1}} - P_{n_i}) U_{k_{i+1}} \quad (i \geq 0)$$

$$\text{et par suite } \|V_{i+1} - U_{k_{i+1}}\| \leq \|P_{n_i} U_{k_{i+1}}\| + \|P_{n_{i+1}} U_{k_{i+1}} - U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+1}$$

Il est clair que les V_i sont des paquets disjoints en les X_n . On montre qu'ils forment la base d'un espace isomorphe à ℓ^p , si ϵ est assez petit. On a en effet :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i V_i - \sum_{i=0}^n \lambda_i U_{k_i} \right\| &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|V_i - U_{k_i}\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot \epsilon / 2^i \\ &\leq 2 \epsilon \sup_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 2 \epsilon \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 K \epsilon \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i U_{k_i} \right\| \end{aligned}$$

Si $2 K \epsilon < 1$, cette inégalité montre que l'espace engendré par les V_i est isomorphe à celui qui est engendré par les U_{k_i} . C.Q.F.D.

On montre alors que (C') \Rightarrow (C) : soit E un sous-espace réflexif de dimension infinie de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$; E contient donc une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\|X_n\| = 1$, qui ne possède aucune sous-suite convergente. Soit \mathcal{B} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite échangeable obtenue à l'aide du théorème I.1 avec ces données; $Y_k \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}'$. Alors les Y_k sont distincts : si $Y_k = Y_\ell$ et $k \neq \ell$, alors $Y_1 = Y_2$ (d'après l'échangeabilité), soit $\|Y_1 - Y_2\| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_1 - X_n\| = 0$, ce qui donne une sous-suite convergente des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contrairement à l'hypothèse. On pose alors $Z_k = Y_{2k+1} - Y_{2k}$; la suite Z_k est échangeable, symétrique et non nulle; d'après (C') l'espace qu'elle engendre contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p , et d'après le lemme précédent, on peut supposer que la base de ce sous-espace est une suite U_k formée de paquets disjoints en les Z_k ; on a $U_k \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}'$, et la σ -algèbre de queue de la suite U_k est contenue dans celle de la suite Z_k , donc dans celle de la suite Y_k , et finalement dans \mathcal{A} d'après le théorème I.1. La condition 2 du théorème principal est donc vérifiée, et E contient donc un espace isomorphe à ℓ^p .

Bibliographique :

- [1] D. DACUNHA-CASTELLE
Variables échangeables et espaces d'Orlicz
Séminaire Maurey-Schwartz, 1974-75
Ecole Polytechnique, Paris.
- [2] D. DACUNHA-CASTELLE et J.L. KRIVINE
Applications des ultraproducts aux espaces de Banach
Studia Math. t. 41, 1972, p. 315-334
- [3] J.L. KRIVINE
Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés
(à paraître)
- [4] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI
On Orlicz sequences spaces. I.
Israël Journal of Math., vol. 10, n° 3, p. 379-390
- [5] J. NEVEU
Bases mathématiques du calcul des probabilités
Masson, Paris.
- [6] M. KADEC et A. PELCZYNSKI
Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p
Studia Math. 21 (1962), p. 161-176
- [7] D. DACUNHA-CASTELLE et J.L. KRIVINE
Sur les sous-espaces de L^1 .
Comptes-rendus Acad. des Sciences, Paris, t. 280 (1975), p. 645-648.

