UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 211

Commutateurs d'intégrales singulières

R. R. Coifman et Y. Meyer

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

n° 211

Commutateurs d'intégrales singulières

R. R. Coifman et Y. Meyer

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

COMMUTATEURS D'INTEGRALES SINGULIERES

par R. R. Coifman et Y. Meyer

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

THEOREME 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_n telle que la propriété suivante ait lieu. Pour toute fonction $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, toute primitive A de a, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, posons

$$T_\varepsilon(a,f)(x) = \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{[A(x) - A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}} f(y)\, dy.$$

Alors $T(a,f)(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon(a,f)(x)$ existe presque partout et l'on a $\|T(a,f)\|_2 \leq C_n \|a\|_\infty^n \|f\|_2$.

Nous prouverons également qu'en posant $T_*(a,f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(a,f)(x)|$, on a $\|T_*(a,f)\|_2 \leq C'_n \|a\|_\infty^n \|f\|_2$.

La preuve du théorème 1 sera décomposée en quatre parties.

Au § 1 nous supposerons que a et f appartiennent à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz. Nous montrerons alors l'existence d'un symbole $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que

$$(1)\qquad T(a,f)(x)=\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+s)\,x}\,\tau(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s)\,\hat a(\alpha_1)\ldots\hat a(\alpha_n)\,\hat f(s)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,ds.$$

Ce symbole est une fonction homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Au § 2 nous construirons une partition du bymbole τ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n$ permettant de prouver que si $\frac{n}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, $p>1$, $q>1$ et $r>1$, il existe une constante $C(p,q,n)$ telle que, pour toute fonction $a\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $f\in L^q(\mathbb{R})$, on ait

$$(2)\qquad \|T(a,f)\|_r \le C(p,q,n)\,\|a\|_p^n\,\|f\|_q .$$

Au § 3, l'emploi de méthodes introduites par Burkholder et Gundy ("inégalités aux bons λ") permettra de passer au cas $p=+\infty$, $q=r$ dans l'inégalité a priori (2).

Enfin au § 4, nous prouverons le théorème 1 quand $a\in L^\infty(\mathbb{R})$.

1. L'IDENTITE FONDAMENTALE.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $n\ge 1$ <u>un entier</u>. <u>Supposons que les</u> $n+1$ <u>fonctions</u> $a_1,\ldots,a_n$ <u>et</u> f <u>appartiennent à</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. <u>Soient</u> $A_1,\ldots,A_n$ <u>des primitives de</u> $a_1,\ldots,a_n$. <u>Alors, pour tout</u> x <u>réel, on a</u>

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|\ge\varepsilon}\frac{[A_1(x)-A_1(y)]\ldots[A_n(x)-A_n(y)]}{(x-y)^{n+1}}\,f(y)\,dy =$$

$$(3)\qquad c_n\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+s)x}\,\omega_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s)\,\hat a_1(\alpha_1)\ldots\hat a_n(\alpha_n)\,\hat f(s)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,ds$$

où $c_n=\dfrac{\pi}{(2\pi i)^{n+1}\,n!}$ et où $\omega_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s)=\dfrac{\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(s^n\ \mathrm{sign}\ s)}{\alpha_1\ldots\alpha_n}$

Dans cet énoncé, on a posé $\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}=\Delta_{\alpha_1}\circ\ldots\circ\Delta_{\alpha_n}$ et Δ_α est défini par $(\Delta_\alpha g)(s) = g(s+\alpha)-g(s)$.

La preuve de la proposition 1 repose sur les lemmes suivants.

LEMME 1. *Soient* g *une fonction de* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *et* x_0 *un nombre réel tels qu'il existe un entier* $n \geq 1$ *pour lequel* $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$. *Alors*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\text{v. p.} \int \frac{g(y)}{x - y}\, dy\right)(x_0) = (-1)^n\, n! \int \frac{g(y)}{(x_0-y)^{n+1}}\, dy.$$

La preuve très simple est laissée au lecteur.

LEMME 2. Soient $n \geq 1$ un entier et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et f $n+1$ fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour tout nombre réel x_0, on a

$$\text{v. p.} \int \frac{[\varphi_1(x) - \varphi_1(y)] \ldots [\varphi_n(x) - \varphi_n(y)]}{(x - y)^{n+1}}\, f(y)\, dy =$$

(4)

$$\frac{-\pi i}{(2\pi)^{n+1}\, n!} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(t_1+\ldots+t_n+s)\, x_0}\, \hat{\varphi}_1(t_1)\ldots\hat{\varphi}_n(t_n)\, \hat{f}(s)\, \Delta^n_{t_1,\ldots,t_n}(s^n \operatorname{sign} s)\, dt_1 \ldots dt_n\, ds.$$

Remarquons, en effet, que $\Delta^n_{t_1,\ldots,t_n}(s^n \operatorname{sign} s) =$

$\sum\limits_{J} (-1)^{n-|J|}(s + \sum\limits_{j\in J} t_j)^n \operatorname{sign}(s + \sum\limits_{j\in J} t_j)$; la sommation porte sur toutes les parties J de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $|J| = \operatorname{Card} J$.

Le membre de droite de (4) vaut donc

$\sum\limits_{J} \frac{(-1)^{n-|J|}}{n!} \sum\limits_{J} \prod\limits_{j\notin J} \varphi_j(x_0)\, D^n H(\prod\limits_{j\in J} \varphi_j(x)\, f(x))(x_0)$ où H est la transformation de Hilbert (convolution avec $1/x$). On applique alors le lemme 1 à

$g(y) = \prod\limits_{1}^{n} (\varphi_j(x_0) - \varphi_j(y))\, f(y)$.

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 1. On remarque d'abord que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue dont la dérivée n-ième, au sens des distributions, appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, on a $|\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} g| \leq \|g^{(n)}\|_\infty |\alpha_1| \ldots |\alpha_n|$.

Posons alors

$$I(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+s)\,x} \frac{\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(s^n \operatorname{sign} s)}{(i\alpha_1+\varepsilon)\ldots\ldots(i\alpha_n+\varepsilon)} \hat{a}_1(\alpha_1)\ldots\ldots$$

$$\ldots \hat{a}_n(\alpha_n)\,\hat{f}(s)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n\,ds.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} I(\varepsilon)$ est, au coefficient $c_n(i)^n$ près, le second membre de (3).

Mais $\dfrac{\hat{a}(\alpha)}{i\alpha+\varepsilon}$ est la transformée de Fourier de $A^{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\varepsilon t}\,a(t)\,dt.$

Cette dernière fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, le lemme 2 s'applique et donne

$$I(\varepsilon) = i(2\pi)^{n+1}\,\frac{n!}{\pi}\,\text{v. p.}\int \frac{\left[A_1^{\varepsilon}(x)-A_1^{\varepsilon}(y)\right]\ldots\left[A_n^{\varepsilon}(x)-A_n^{\varepsilon}(y)\right]}{(x-y)^{n+1}}\,f(y)\,dy.$$

Enfin, quand ε tend vers 0, $A_j^{\varepsilon}(x)\longrightarrow A_j(x)$, $1\le j\le n$, uniformément sur tout compact. Il en est de même pour toutes les dérivées de $A_j^{\varepsilon}(x)$. On montre alors sans difficulté que

$$\text{v.p.}\int \frac{\left[A_1^{\varepsilon}(x)-A_1^{\varepsilon}(y)\right]\ldots\left[A_n^{\varepsilon}(x)-A_n^{\varepsilon}(y)\right]}{(x-y)^{n+1}}\,dy \longrightarrow$$

$$\text{v. p.}\int \frac{\left[A_1(x)-A_1(y)\right]\ldots\left[A_n(x)-A_n(y)\right]}{(x-y)^{n+1}}\,f(y)\,dy.$$

2. $\|T(a,f)\|_r \le C(p,q,n)\,\|a\|_p^n\,\|f\|_q.$

Quelques définitions préliminaires sont nécessaires.

Dans tout ce paragraphe p, q et r désignent trois nombres réels tels que $p>n$, $q>1$, $r>1$ et $\frac{n}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$; de plus l'exposant conjugué de r est noté $s : \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$

DEFINITION 1. Avec les notations ci-dessus, $\Omega(p,q,n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions mesurables et bornées $\sigma : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{C}$ possédant la propriété suivante : il existe une constante C telle que, pour toute suite $a_1,\dots,a_n$, f et g de $n+2$ fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on ait

$$\left| \int_{\mathbf{R}^{n+1}} \sigma(\alpha_1,\dots,\alpha_n,s)\, \hat{a}_1(\alpha_1) \dots \hat{a}_n(\alpha_n)\, \hat{f}(s)\, \hat{g}(\alpha_1+\dots+\alpha_n+s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right|$$
$$\leq C \, \|a_1\|_p \dots \|a_n\|_p \, \|f\|_q \, \|g\|_s .$$

Une autre manière d'exprimer (5) est d'associer à σ l'opérateur $T_\sigma(a_1,\dots,a_n)$ défini par $\left[T_\sigma(a_1,\dots,a_n)\, f\right](x) =$

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} e^{i(\alpha_1+\dots+\alpha_n+s)x}\, \hat{a}_1(\alpha_1) \dots \hat{a}_n(\alpha_n)\, \hat{f}(s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n\, ds.$$

Alors (5) exprime que si $a_1, \dots, a_n$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $T_\sigma(a_1,\dots,a_n)$ envoie L^q dans L^r avec une norme ne dépassant pas $C\|a_1\|_p \dots \|a_n\|_p$.

En particulier, prouver (2) revient à montrer que $\omega_n \in \Omega(p,q,n)$.

Désignons par $\mathcal{S}^\times$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur le groupe multiplicatif $]0\,,+\infty[$; $\varphi \in \mathcal{S}^\times$ si et seulement si $\varphi(e^x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, espace usuel de Schwartz. Si $\sigma \in \Omega(p,q,n)$, la norme de σ est, par définition, la borne inférieure des constantes C figurant au second membre de (5).

PROPOSITION 2. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}^\times$, toute fonction $\sigma \in \Omega(p,q,n)$ et tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, $\varphi\left(\left|\frac{s}{\alpha_j}\right|\right) \sigma(\alpha_1,\dots,\alpha_n,s) \in \Omega(p,q,n)$.

On remarque d'abord que $\sigma \in \Omega(p,q,n)$ et $\tau \in \mathbf{R}$ entraînent que σ_τ, défini par $\sigma_\tau(\alpha_1,\dots,\alpha_n,s) = |s|^{i\tau}\sigma(\alpha_1,\dots,\alpha_n,s)$, appartient à $\Omega(p,q,n)$. La norme de σ_τ ne dépasse pas $C(1+|\tau|)\|\sigma\|$. Cela résulte de ce que $|s|^{i\tau}$ soit un multiplicateur de $\mathfrak{F}L^q$. La même remarque s'applique à $|\alpha_j|^{i\tau}\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s)$

La preuve de la proposition 2 est maintenant immédiate : on développe $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{i\tau}\,\psi(\tau)\,d\tau$ où ψ est la transformée de Mellin de φ ; la fonction ψ a donc une décroissance rapide à l'infini. Alors on a

$$\varphi\left(\left|\frac{s}{\alpha_j}\right|\right)\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} |s|^{i\tau}\,|\alpha_j|^{-i\tau}\sigma(\alpha\ , \dots, \alpha_n, s)\,\psi(\tau)\,d\tau$$

et cette dernière fonction appartient à $\Omega(p,q,n)$.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{C}$ <u>une fonction mesurable. Appelons</u> $\mathscr{C}$ <u>l'ensemble des</u> $\gamma = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ <u>tels que</u> $|\alpha_1|^{t_1} \dots |\alpha_n|^{t_n}\,\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s)$ <u>appartienne à</u> $\Omega(p,q,n)$. <u>Alors</u> $\mathscr{C}$ <u>est une partie convexe de</u> $\mathbf{R}^n$.

Il suffit de prouver que $\gamma_1 \in \mathscr{C}$, $\gamma_2 \in \mathscr{C}$ et $0 \leq u \leq 1$ impliquent $u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2 \in \mathscr{C}$. On posera $\gamma_1 = (s_1, \dots, s_n)$ et $\gamma_2 = (t_1, \dots, t_n)$.

On fixe les $n+2$ fonctions $a_1, \dots, a_n$, f et g dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et les deux points γ_1 et $\gamma_2 \in \mathscr{C}$ et on considère, pour $0 \leq u \leq 1$ et $z = u + iv \in \mathbf{C}$,

$$I(z) = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\alpha_1|^{z\,s_1 + (1-z)\,t_1} \dots |\alpha_n|^{z\,s_n + (1-z)\,t_n}$$

$$\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s)\,\hat{a}_1(\alpha_1) \dots \hat{a}_n(\alpha_n)\,\hat{f}(s)\,\hat{g}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + s)\,d\alpha_1 \dots d\alpha_n\,ds.$$

On vérifie sans difficulté que $\operatorname{Re} z \in [0,1]$ implique

$$\left|\,|\alpha_1|^{zs_1+(1-z)\,t_1} \dots |\alpha_n|^{zs_n+(1-z)\,t_n}\right| \leq \sup\left\{|\alpha_1|^{s_1} \dots |\alpha_n|^{s_n},\ |\alpha_1|^{t_1} \dots |\alpha_n|^{t_n}\right\}$$

; l'hypothèse $\gamma_1 \in \mathscr{C}$ et $\gamma_2 \in \mathscr{C}$ entraîne donc $|I(z)| \leq C_1$ où C_1 dépend de $a_1, \dots, a_n$, f et g. De plus si $\operatorname{Re} z = 0$, $|I(z)| \leq C_2(1 + |z|)^n \|a_1\|_p \dots \|a_n\|_p \|f\|_q \|g\|_s$ où C_2 ne dépend que de p, q et γ_2 ;

cela tient à l'hypothèse $\gamma_2 \in \mathcal{C}$ et à la remarque, déjà utilisée dans la démonstration de la proposition 2, que $\sigma \in \Omega(p,q,n)$ et $\tau \in \mathbf{R}$ impliquent $|\alpha_j|^{i\tau}\sigma \in \Omega(p,q,n)$. On a un résultat analogue si $\operatorname{Re} z = 1$. On considère la fonction holomorphe $(1+z)^{-n} I(z)$ à laquelle on applique le principe du maximum dans la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Il vient, si $\operatorname{Re} z \in [0,1]$,

$$|I(z)| \leq C_3(1+|z|)^n \|a_1\|_p \dots \|a_n\|_p \|f\|_q \|g\|_s$$

où C_3 ne dépend que de γ_1, γ_2, p et q. Désignons par Ω_n l'intersection des $\Omega(p,q,n)$ pour $\frac{n}{p} + \frac{1}{q} < 1$, $p > n$ et $q > 1$.

LEMME 3. <u>Supposons que</u> σ <u>appartienne à</u> Ω_n. <u>Alors la fonction</u> $\tau : \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{C}$ <u>définie par</u> $\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, s) = \sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, s+\alpha_{n+1})$ <u>appartient à</u> Ω_{n+1}.

Cela tient à l'identité $T_\tau(a_1, \dots, a_{n+1}, f) = T_\sigma(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}f)$ dont la preuve élémentaire est laissée au lecteur.

Nous allons montrer que $\omega_n \in \Omega_n$ en raisonnant par récurrence sur $n \geq 1$. Définissons d'abord $\omega_o(s) = \operatorname{sign} s$ et Ω_o comme l'ensemble des fonctions $m(s)$, mesurables et bornées sur $\mathbf{R}$, qui sont des multiplicateurs de $\mathfrak{F}L^p$ pour tout $p > 1$; $\omega_o \in \Omega_o$.

Posons enfin $\overline{\omega}_n = \dfrac{s}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \Delta^n_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(s^{n-1} \operatorname{sign} s)$. Nous supposons $n \geq 1$. Alors ω_n et $\overline{\omega}_n$ sont "équivalents" comme le prouve le

LEMME 4. <u>Pour tout</u> $n \geq 1$, $\omega_n - \overline{\omega}_n \in \Omega_n$.

En effet, appelons $T_\alpha g$ la fonction définie par $(T_\alpha g)(s) = g(s+\alpha)$. Alors

$\Delta_\alpha(sg(s)) = s(\Delta_\alpha g)(s) + \alpha(T_\alpha g)(s)$ et, de façon plus générale,

$$\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(sg(s)) = s(\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} g)(s) + \sum_{j=1}^n \alpha_j T_{\alpha_j} \Delta^{n-1}_{\alpha_1,\ldots,\check{\alpha}_j,\ldots}$$

où $\check{\alpha}_j$ signifie que α_j est omis dans la suite $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. En particulier

$$\omega_n = \frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n} \Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(s^n \operatorname{sign} s) = \bar{\omega}_n + \sum_{j=1}^n \omega_{n-1}(\alpha_1,\ldots,\check{\alpha}_j,\ldots,\alpha_n, s+\alpha_j).$$

Le lemme 4 résulte donc de l'hypothèse de récurrence et du lemme 3.

Revenons à la preuve de $\omega_n \in \Omega_n$, $n \geq 1$.

Soit φ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ et égale à 1 sur $[-n,n]$; supposons de plus que φ est paire. Cette fonction φ est fixée et servira à construire une partition de $\bar{\omega}_n$ sur $\mathbf{P}_n$.

LEMME 5. <u>On a</u> $\left[1 - \varphi(\frac{s}{\alpha_1})\right]\ldots\left[1 - \varphi(\frac{s}{\alpha_n})\right]\bar{\omega}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) = 0.$

En effet, si ce n'est pas le produit des crochets qui est nul, alors $|s| > n|\alpha_j|$ pour $1 \leq j \leq n$. On a donc $\operatorname{sign}(s + \sum_{j\in J} \alpha_j) = \operatorname{sign} s$ pour toute partie J de $\{1, \ldots, n\}$ et $\bar{\omega}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) = \dfrac{\operatorname{sign} s}{\alpha_1\ldots\alpha_n} \Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(s^{n-1}) = 0.$

LEMME 6. <u>Pour toute partie non vide</u> J <u>de</u> $\{1, \ldots, n\}$,

$$\omega_J = \prod_{j\in J} \varphi(\frac{s}{\alpha_j})\,\bar{\omega}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) \in \Omega_n.$$

Supposons que $\operatorname{Card} J = k \geq 1$. On peut, par symétrie, se restreindre au cas où $J = \{1, \ldots, k\}$.

On sait, grâce à l'hypothèse de récurrence et au lemme 3, que, pour tout j,

$$\frac{\alpha_j}{s}\,\bar{\omega}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) = \frac{\Delta^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(s^{n-1} \operatorname{sign} s)}{\alpha_1\ldots\check{\alpha}_j\ldots\alpha_n} \in \Omega_n.$$

De façon évidente $\sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) \in \Omega_n$ entraîne $\operatorname{sign} \alpha_j\, \sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s) \in \Omega_n$.

On a donc $\frac{|\alpha_j|}{s}\,\bar{\omega}_n \in \Omega_n$ pour $1 \le j \le n$. Si $0 \le \theta_j \le 1$ et $\sum_1^n \theta_j = 1$, la proposition 3 donne $\frac{|\alpha_1|^{\theta_1} \ldots |\alpha_n|^{\theta_n}}{s}\,\bar{\omega}_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, s) \in \Omega_n$. De façon évidente $\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, s) \in \Omega_n$ entraîne $\operatorname{sign} \alpha_j\, \sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, s) \in \Omega_n$.

En particulier si $\theta_j = \frac{1}{k}$ pour $1 \le j \le k$ et $\theta_j = 0$ sinon, le symbole $\tilde{\omega}_J = \frac{|\alpha_1 \ldots \alpha_k|^{1/k}}{s}\,\bar{\omega}_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, s)$ appartient à Ω_n. Pour terminer la preuve du lemme 6, il suffit de remarquer que $\omega_J = \prod_{1 \le j \le k} \psi(\frac{s}{\alpha_j}) \operatorname{sign} s\, \tilde{\omega}_J$ où $\psi(x) = |x|^{1/k} \varphi(x) \in \mathcal{S}^{\times}$.

La proposition 2 s'applique et l'on a $\omega_J \in \Omega_n$. Le lemme 5 permet d'écrire $\bar{\omega}_n = - \sum_J (-1)^{|J|} \omega_J$; la sommation est étendue à toutes les parties non vides J de $\{1, \ldots, n\}$. On en déduit $\bar{\omega}_n \in \Omega_n$ et le lemme 4 entraîne $\omega_n \in \Omega_n$.

3. METHODES DE VARIABLES REELLES.

Elles sont semblables à celles utilisées dans [3]. Nous allons cependant en reprendre l'exposé pour éviter la gêne du lecteur et y introduire quelques simplifications.

Nous nous proposons de systématiser les démonstrations pour les rendre éventuellement applicables à d'autres noyaux que $[A(x) - A(y)]^n/(x-y)^{n+1}$

DEFINITION 2. Un noyau $K(x,y)$ est appelé un noyau de Calderón-Zygmund s'il possède les propriétés suivantes

(a) $K(x,y)$ <u>est une fonction à valeurs complexes, définie et continue sur l'ouvert</u> Ω <u>de</u> $\mathbb{R}^2$ <u>défini par</u> $y \neq x$

(b) <u>les dérivées partielles</u> $\frac{\partial K}{\partial x}$ <u>et</u> $\frac{\partial K}{\partial y}$ <u>(prises au sens des distributions), sont des fonctions mesurables et localement bornées sur</u> Ω <u>et il existe une constante</u> C <u>telle que</u> $|K(x,y)| \leq C\,|y-x|^{-1}$, $\left|\frac{\partial K}{\partial x}\right| \leq C\,|y-x|^{-2}$ <u>et</u> $\left|\frac{\partial K}{\partial y}\right| \leq C\,|y-x|^{-2}$

(c) <u>l'opérateur tronqué</u> T_ε <u>étant défini, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>par</u> $T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y-x|\geq\varepsilon} K(x,y)\,f(y)\,dy$, <u>il est requis que pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} T_\varepsilon(f)(x)$ <u>existe pour presque tout</u> x. <u>Cette limite est la définition de</u> $T(f)(x)$.

(d) <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que, pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, <u>on ait</u> $\|T(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$.

La plus petite constante C pour laquelle (b) et (d) sont vérifiés est appelée la norme de K et est notée $\|K\|$.

Les noyaux de Calderón-Zygmund présentent un ensemble de propriétés remarquables mises en évidence par A. Calderón et A. Zygmund. Les techniques nouvelles introduites par ces auteurs s'appellent "méthodes de variables réelles" et ont été développées par Cotlar, Stein, Burkholder et Gundy. Voici une propriété importante des noyaux de Calderón-Zygmund que l'on démontre par les méthodes de variables réelles. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$ et si $K(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund, on pose $(T_* f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f)(x)|$. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 4. <u>Pour tout noyau</u> $K(x,y)$ <u>de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal associé</u> T_* <u>est borné sur</u> L^p <u>si</u> $1 < p < +\infty$ <u>et envoie</u> L^1 <u>dans</u> L^1<u>-faible</u>.

Lorsqu'une fonction $K(x,y)$ est définie par une formule explicite, les vérifications des propriétés (a), (b) et (c) ne présentent pas de difficultés sérieuses. En revanche (d) est beaucoup plus malaisée à démontrer.

Les difficultés que l'on rencontre dans la vérification de (d) ont amené les auteurs à introduire une condition plus maniable que nous allons présenter.

Pour tout intervalle I de nombres réels de longueur $|I|$ non nulle et finie et pour tout $p \in [1, +\infty[$, on pose, si $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$,

$M_p(f ; I) = (\frac{1}{|I|}\int_I |f|^p(t)\, dt)^{1/p}$.

DEFINITION 3. Soient $q \geq r \geq 1$ deux nombres réels et T un opérateur linéaire transformant les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en des fonctions mesurables.

Nous dirons que T vérifie la propriété $H(q,r)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout intervalle I de longueur non nulle et finie et toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans I, on ait

$$M_r(T(f) ; I) \leq C\, M_q(f ; I). \tag{6}$$

Si $r = 1$, nous écrirons $M(f ; I)$ au lieu de $M_r(f ; I)$. Remarquons que si $r \geq 1$, $M_r(f ; I) \geq M(f ; I)$ de sorte que $H(q,r)$ entraîne $H(q,1)$; dans la suite nous écrirons $H(q)$ au lieu de $H(q,1)$.

THEOREME 2. Soient q un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1,2[$ et $K(x,y)$ une fonction vérifiant les propriétés (a), (b) et (c) des noyaux de Calderón-Zygmund. Alors les deux propriétés suivantes de K sont équivalentes

(I) $K(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund

(II) l'opérateur T associé à K par la condition (c) possède la propriété $H(q)$.

L'implication (I) $\Longrightarrow$ (II) est immédiate. On a, grâce à la proposition 4, $\|T(f)\|_q \leq C_q \|f\|_q$ qui entraîne

$$\int_I |T(f)|^q \, dx \leq \|T(f)\|_q^q \leq C_q^q \|f\|_q^q = C_q^q |I| M_q^q(f \, ; I).$$

En divisant par $|I|$, il vient $M_q(T(f) \, ; I) \leq C\, M_q(f \, ; I)$ et a fortiori $M_r(T(f) \, ; I) \leq C\, M_q(f \, ; I)$ si $1 \leq r \leq q$ et $q \geq 1$.

La partie essentielle de la preuve de l'implication (II) $\Rightarrow$ (I) sera de montrer que la norme $\|K\|$ du noyau de Calderón-Zygmund K ne dépend que des constantes figurant dans (6) et dans la condition (b) de la définition 2.

La preuve du théorème 2 sera donnée plus loin. Montrons d'abord que le théorème 2 implique le théorème 1 lorsque $a = A' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si $A' = a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $K(x,y) = \dfrac{[A(x)-A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}}$, les vérifications de (a), (b) et (c) sont triviales et laissées au lecteur.

Pour démontrer (6), appelons J l'intervalle "double" de I ; le centre de J est l'origine de I et la longueur de J est quatre fois celle de I. On peut écrire $a = a_1 + a_2$ où $a_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le support de a_1 est contenu dans J, $a_1 = a$ sur I et $\|a_1\|_\infty \leq \|a\|_\infty$. Désignons par A_1 une primitive de a_1. Alors, si x et y appartiennent à I, on a, de façon évidente, $A_1(x) - A_1(y) = A(x) - A(y)$. Désignons par $K(x,y)$ le noyau $\dfrac{[A(x) - A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}}$ et par $K_1(x,y)$ le noyau $\dfrac{[A_1(x) - A_1(y)]^n}{(x-y)^{n+1}}$. On a, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans I et pour tout $x \in I$, $\int K(x,y)\, f(y)\, dy = \int K_1(x,y)\, f(y)\, dy$. Il en résulte que, si $1 < r < q$ et $\frac{n}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, grâce à (2),

$$\left(\int_I |T(f)|^r \, dx\right)^{1/r} \leq C \|a_1\|_p^n \|f\|_q \leq C\, |I|^{\frac{n}{p}} \|a\|_\infty^n \|f\|_q .$$

Il reste à démontrer le théorème 2.

Une première réduction, de caractère purement technique, consiste à se ramener au cas où $K(x,y)$ est une fonction indéfiniment dérivable sur tout $\mathbb{R}^2$. Nous allons pour cela approcher le noyau $K(x,y)$ par des noyaux $K_j(x,y)$ nuls au voisinage de la diagonale, vérifiant la condition (6) avec une constante C ne dépendant pas de $j \in \mathbb{N}$ et tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on ait, presque partout,

$$\int K_j(x,y)\, f(y)\, dy \longrightarrow \int K(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{7}$$

Nous prouverons que les noyaux $K_j(x,y)$ sont des noyaux de Calderón-Zygmund et que $\sup \|K_j\| < +\infty$. Alors la propriété (d) pour le noyau K résultera du lemme de Fatou.

Pour construire $K_j(x,y)$, on appelle φ une fonction de la classe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, paire, égale à 1 au voisinage de l'origine et l'on pose $\varphi_j(x,y) = \varphi\left[2^j(y-x)\right]$. Soit $K_j(x,y) = (1 - \varphi_j(x,y))\, K(x,y)$. On montre sans difficulté que $|K_j(x,y)| \leq C\,|y-x|^{-1}$, $\left|\frac{\partial K_j}{\partial x}(x,y)\right| \leq C\,|y-x|^{-2}$ et $\left|\frac{\partial K_j}{\partial y}(x,y)\right| \leq C\,|y-x|^{-2}$ où C ne dépend pas de j. Pour démontrer (6), appelons ψ la transformée de Fourier de φ. On a

$K_j(x,y) = K(x,y) - \frac{1}{2\pi} \int K_{j,t}(x,y)\, \psi(t)\, dt$ où

$K_{j,t}(x,y) = \exp(-i2^j tx)\, K(x,y)\, \exp(i2^j ty)$. Les multiplications par des caractères ne ne changeant ni les supports, ni les normes L^r des fonctions, les noyaux $K_{j,t}$ vérifient (6) avec une constante C ne dépendant ni de j, ni de t. Il en est donc de même pour $K_j(x,y)$ car $\psi(t) \in L^1$.

Pour s'assurer de (7), appelons $\mathcal{T}_j$ l'opérateur associé à K_j. On vérifie sans peine que $\mathcal{T}_j = -\, 2^j \int_0^\infty \varphi'(2^j\varepsilon) T_\varepsilon\, d\varepsilon$; T_ε étant l'opérateur tronqué

$\int_{|y-x|\geq\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy$. On en déduit qu'en tout point x où $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon(f)(x)$ existe, on a aussi $\lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{T}_j(f)(x) = T(f)(x)$.

Dans tout ce qui suit nous raisonnerons sur K_j et $\mathcal{T}_j$ mais pour éviter des notations trop lourdes, nous écrirons K au lieu de K_j et T au lieu de $\mathcal{T}_j$.

La preuve de l'implication II $\Longrightarrow$ I du théorème 2 repose sur l'utilisation des "inégalités aux bons λ" introduites par Burkholder et Gundy dans [1]. Mais tout d'abord quelques lemmes sont nécessaires. Les lemmes 7 et 8 n'utilisent que les conditions (b) portant sur K.

LEMME 7. Soit $\theta > 0$ un nombre réel. Il existe une constante $C(\theta)$ ayant la propriété suivante : pour tout intervalle I de longueur $\ell > 0$ et tout nombre réel x dont la distance à I, notée $d(x,I)$, dépasse $\theta\ell$, on a

(8) $\forall\, x_1 \in I,\ \forall\, x_2 \in I,\quad |K(x_1,x) - K(x_2,x)| \leq C(\theta) \dfrac{\ell}{[d(x,I)]^2}.$

Il suffit, compte tenu de l'hypothèse $\left|\dfrac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq C\,|y-x|^{-2}$, d'appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir (8).

LEMME 8. Il existe une constante C ayant la propriété suivante. Si $I = [\alpha, \alpha+\ell]$ est un intervalle de nombres réels et si $J = [\alpha-2\ell, \alpha+2\ell]$ est l'intervalle double, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, nulle sur J, pour tout $x_1 \in I$, tout $x_2 \in I$ et tout $\xi \in I$, on a

$$(9) \qquad |T(f)(x_2) - T(f)(x_1)| \leq C\, f^*(\xi).$$

La fonction maximale de Hardy et Littlewood, notée $f^*(x)$, est définie par $\sup\limits_{I \ni x} \dfrac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\, dt$.

La vérification de (9) est immédiate car $|T(f)(x_2) - T(f)(x_1)| \leq$
$$\int_{C_J} |K(x_2,y) - K(x_1,y)||f(y)|dy \leq C\ell \int_{C_J} \frac{|f(y)|}{(\xi - y)^2} dy \leq C f^*(\xi).$$

En conservant les notations du lemme 8, on a, de même,

$$(10) \qquad |T_*(f)(x_2) - T_*(f)(x_1)| \leq C f^*(\xi).$$

Pour prouver (10), il suffit de démontrer l'inégalité correspondante pour les opérateurs tronqués

$$(11) \qquad |T_\varepsilon(f)(x_2) - T_\varepsilon(f)(x_1)| \leq Cf^*(\xi).$$

Trois cas se présentent dans la vérification de (11).

Si $0 < \varepsilon \leq \ell$, $T_\varepsilon(f)(x) = T(f)(x)$ pour tout $x \in I$ et (11) n'est autre que (9).

Si $\ell \leq \varepsilon \leq 2\ell$, on a par des majorations très simples, pour tout $x \in I$, $|T_\varepsilon(f)(x) - T(f)(x)| \leq C f^*(\xi)$ et (11) résulte encore de (9).

Si enfin $\varepsilon > 2\ell$, appelons χ_ε la fonction caractéristique de $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ et posons $g = f\chi_\varepsilon$ et $h = f - g$. Par des majorations semblables à celles utilisées dans le second cas, il vient, pour tout $x \in I$, $|T_\varepsilon(f)(x) - T(h)(x)| \leq Cf^*(\xi)$ de sorte que (11) résulte encore de (9) appliqué à h et de la remarque évidente : $h^*(\xi) \leq f^*(\xi)$.

L'énoncé du lemme 9 nécessite d'introduire une variante de la fonction maximale de Hardy et Littlewood. Pour tout $q > 1$ et toute fonction mesurable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, nous poserons $M_q(f)(x) = \sup\limits_{I \ni x} M_q(f\,;\,I)$. On a alors

LEMME 9. <u>Si le noyau</u> $K(x,y)$ <u>vérifie</u> $H(q)$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que, pour toute fonction</u> $f \in L^2(\mathbf{R})$ <u>et tout</u> $x \in \mathbf{R}$, <u>on ait</u>

$$(12) \qquad T_*(f)(x) \leq [T(f)]^*(x) + C\, M_q(f)(x).$$

Ici encore il suffit de prouver (12) quand le membre de gauche de (12) est remplacé par $|T_\varepsilon(f)(x)|$. Désignons par I l'intervalle $[x\ ,\ x+\varepsilon/2]$ et par J l'intervalle "double" $[x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon]$. On décompose f en f_1+f_2 où f_1 est le produit de f par la fonction caractéristique de J et où $f_2 = f - f_1$. Par définition de l'opérateur tronquée, $T_\varepsilon(f)(x) = T(f_2)(x)$. Pour tout $y \in I$, on a

$$(13)\quad |T_\varepsilon(f)(x)| = |T(f_2)(x)| \leq |T(f_2)(x) - T(f_2)(y)| + |T(f_2)(y)| \leq$$
$$C\, f^*(x) + |T(f_2)(y)| \leq C\, f^*(x) + |T(f)(y)| + |T(f_1)(y)|.$$

en

L'inégalité (13) étant vérifiée pour tout $y \in I$, on peut prendre la moyenne sur I. Il vient, en appliquant $H(q)$,

$$(14)\quad |T_\varepsilon(f)(x)| \leq C\, f^*(x) + \frac{1}{|I|}\int_I |T(f)(y)|\,dy + C\Big(\frac{1}{|I|}\int_I |f_1|^q\,dy\Big)^{1/q}.$$

Il suffit maintenant d'utiliser la définition des fonctions $M_q(f)$ pour obtenir

$$(15)\qquad |T_\varepsilon(f)(x)| \leq C\, f^*(x) + [T(f)]^*(x) + C\, M_q(f)(x).$$

On remarque alors que $f^*(x) \leq M_q(f)(x)$ et, en prenant la borne supérieure du membre de gauche de (15) par rapport à $\varepsilon > 0$, on obtient (12).

PROPOSITION ("<u>Inégalité aux bons</u> λ"). <u>En supposant toujours que le noyau</u> $K(x,y)$ <u>vérifie</u> (a), (b), (c) <u>et</u> $H(q)$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>et un</u> $\gamma_0 > 0$, <u>ne dépendant que des constantes figurant dans les inégalités (b) et dans la définition de la condition</u> $H(q)$, <u>tels que la propriété suivante ait lieu : si</u> $0 < \gamma < \gamma_0$ <u>et</u> $\lambda > 0$,

$$(16)\qquad \Big|\big\{T_*(f) > 2\lambda\ ;\ M_q(f) \leq \gamma\lambda\big\}\Big| \leq C\gamma\,\big|\{T_*(f) > \lambda\}\big|.$$

On a désigné par $|\{F > \lambda\}|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) > \lambda$.

Puisque $K(x,y)$ est nul dès que $|y-x|$ est assez petit, il existe une constante C (dépendant de j, indice omis dans toute la démonstration) telle que $T_*(f)(x) \leq C(1+|x|)^{-1}$ lorsque $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; en particulier $T_*f \in L^2$.

Comme l'ont montré Burkholder et Gundy, (16) entraîne la propriété suivante. Pour tout $r > 0$, il existe une constante C_r, ne dépendant que de r et des constantes figurant dans les conditions (b) et $H(q)$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on ait

$$(17) \qquad \|T_*(f)\|_r \leq C_r \|M_q(f)\|_r$$

à condition que les deux membres de (17) soient finis. Si $r = 2$ et $q < 2$, $\|M_q(f)\|_2 \leq C'_q \|f\|_2$; (17) fournit la propriété (d) des noyaux de Calderon-Zygmund.

Il reste à prouver (16).

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T_\varepsilon(f)(x)$ est une fonction continue de x. L'ensemble $\Omega(\varepsilon)$ des x tels que $|T_\varepsilon(f)(x)| > \lambda$ est donc ouvert et il en est de même de la réunion Ω des $\Omega(\varepsilon)$; Ω est l'ensemble des x tels que $T_*(f)(x) > \lambda$. Puisque $T_*(f)(x) = O(|x|^{-1})$ à l'infini, Ω est borné et ses composantes connexes sont les intervalles ouverts disjoints $I_k =]\alpha_k, \alpha_k+\ell_k[$, $k \geq 0$. On désignera par J_k les intervalles "doubles" $]\alpha_k - 2\ell_k, \alpha_k + 2\ell_k[$.

Soit E_k l'ensemble des $x \in I_k$ tels que $T_*(f)(x) > 2\lambda$ et que $M_q(f)(x) \leq \gamma\lambda$. Nous allons montrer l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un $\gamma_o > 0$ tels que, pour tout $k \geq 0$,

$$(18) \qquad |E_k| \leq C\,\gamma\,\ell_k \quad \text{si} \quad 0 < \gamma < \gamma_o.$$

En additionnant les inégalités (18), on obtient (16).

Si E_k est vide, (18) est évidente.

Sinon, il existe au moins un $\xi \in I_k$ tel que $M_q(f)(\xi) \leq \gamma\lambda$. On pose alors $f = f_1 + f_2$ où f_1 est le produit de f par la fonction caractéristique de J_k.

On a alors, grâce à (10), pour tout $x \in I_k$,

$$|T_*(f_2)(x) - T_*(f_2)(\alpha_k)| \leq C\, f^*(\xi) \leq C\, M_q(f)(\xi) \leq C\,\gamma\lambda .$$

L'ensemble E_k est donc contenu dans l'ensemble E'_k des $x \in I_k$ tels que $T_*(f_1)(x) > \lambda(1 - C\gamma)$. Puisque $T_*(f_1)(x) \leq [T(f_1)]^*(x) + C\, M_q(f_1)(x)$, E'_k est lui-même contenu dans la réunion $F_k \cup G_k$ où

$$F_k = \left\{x \in I_k \ ;\ [T(f_1)]^*(x) > \frac{\lambda}{2}(1 - C\gamma)\right\}$$

et
$$G_k = \left\{x \ ;\ M_q(f_1)(x) > \frac{\lambda(1-C\gamma)}{2C}\right\}$$

Pour majorer la mesure de F_k, nous allons évaluer $[T(f_1)]^*(x)$ en utilisant l'inégalité évidente $T(f_1)^*(x) \leq 2 \sup\limits_{\ell>0} \frac{1}{2\ell}\int_{x-\ell}^{x+\ell} |T(f_1)|(t)\,dt$. Si $\ell \geq 3\ell_k$, l'intervalle $[x-\ell\ ,\ x+\ell]$ contient J_k et a fortiori contient le support de f_1. On peut donc utiliser $H(q)$ et il vient

$$\sup_{\ell \geq 3\ell_k} \frac{1}{2\ell}\int_{x-\ell}^{x+\ell} |T(f_1)(t)|\,dt \leq C \sup_{\ell > 3\ell_k} \left(\frac{1}{2\ell}\int_{x-\ell}^{x+\ell} |f_1|^q\,dt\right)^{1/q} \leq C M_q(f)(\xi) \leq C\gamma\lambda .$$

Si donc, pour $x \in I_k$, $[T(f_1)]^*(x) > \frac{\lambda}{2}(1 - C\gamma)$ et si $0 < \gamma < \gamma_o$, nécessairement $\sup\limits_{0<\ell\leq 3\ell_k} \frac{1}{2\ell}\int_{x-\ell}^{x+\ell} |T(f_1)|\,dt > \frac{1}{4}(1 - C\gamma)$. Désignons par $g(x)$ la fonction $T(f_1)(x)$ et définissons $g_1(x) = g(x)$ si $|x - \alpha_k| \leq 4\ell_k$; $g_1(x) = 0$ sinon. Alors, pour tout $x \in F_k$, $g_1^*(x) > \frac{\lambda}{4}(1 - C\gamma)$. En appliquant à la fonction g_1 l'inégalité de type faible de Hardy et Littlewood, il vient

$$|F_k| \leq \frac{C}{\lambda}(1 - C\gamma)^{-1} \int_{\alpha_k - 4\ell_k}^{\alpha_k + 4\ell_k} |T(f_1)|\,dt \leq \frac{C\ell_k}{\lambda}(1 - C\gamma)^{-1} M_q(f)(\xi) \leq \frac{C'\gamma}{1-C\gamma}\,\ell_k \ ;$$

nous avons pu, là encore, appliquer $H(q)$ puisque le support de f_1 est contenu dans $[\alpha_k - 4\ell_k\ ,\ \alpha_k + 4\ell_k]$.

Pour majorer $|G_k|$, on remarque d'abord que, pour tout $q \geq 1$ et toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $M_q(g)(x) = \left[(|g|^q)^*\right]^{1/q}(x)$. Il résulte alors de l'inégalité de type faible de Hardy et Littlewood que, pour toute fonction $g \in L^q$ et tout $s > 0$, on a

$$\left|\left\{M_q(g)(x) > s\right\}\right| \leq \frac{C^q}{s^q}\int_{\mathbb{R}} |g|^q \, dt.$$

En appliquant cette inégalité à $s = \frac{\lambda(1 - C\gamma)}{2C}$ et à $g = f_1$, et en tenant compte de $(M_q f)(\xi) \leq \gamma\lambda$, il vient $|G_k| \leq C\gamma^q(1 - C\gamma)^{-q}\ell_k \leq C'\gamma\ell_k$ si γ est assez petit.

On a donc, si $0 < \gamma < \gamma_0$, $|E_k| \leq |F_k| + |G_k| \leq C'' \gamma \ell_k$.

Bibliographie

[1] BURKHOLDER, D. L. and GUNDY, R. F. Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. vol. 124 (1970), 249-304.

[2] CALDERON, A. P. Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 53 (1965), 1092-1099.

[3] COIFMAN, R. and MEYER, Y. Commutators of singular integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 212 (1975), 315-331.

[4] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Vol. I and II. C.U.P. (1968).