UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 85

Une généralisation d'un théorème de Dunford-Pettis

Jacques Chaumat

Analyse Harmonique d'Orsay

1974

n° 85

Une généralisation d'un théorème de Dunford-Pettis

Jacques Chaumat

Analyse Harmonique d'Orsay
1974

UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE DUNFORD-PETTIS

par Jacques Chaumat

1. INTRODUCTION.

Etant donné un espace de probabilité (S,Σ,m), le théorème suivant, bien connu, caractérise les parties faiblement relativement compactes dans $L^1(m)\left[=L^1(S,\Sigma,m)\right]$:

THEOREME 0. <u>Pour toute partie</u> K <u>de</u> $L^1(m)$ <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

1) K <u>est faiblement relativement compacte</u> ;

2) K <u>est bornée et</u> $\lim\limits_{m(E)\to 0}\int_E |f|\,dm=0$ <u>uniformément sur</u> K ;

3) $\lim\limits_{C\to+\infty}\int_{\{x\in S,\ |f(x)|>C\}}|f|\,dm=0$ <u>uniformément sur</u> K ;

[voir [D_1] page 294, [G_1] pages 120 et 430, [G_3] page 289].

Soit H^∞ une sous-algèbre de $L^\infty(m)\left[=L^\infty(S,\Sigma,m)\right]$, fermée pour la topologie faible étoile $\left[\text{i.e. topologie } \sigma(L^\infty(m),L^1(m))\right]$, et contenant les constantes. Notons $H^{\infty\perp}$ l'orthogonal de H^∞ dans $L^1(m)$; le but de ce travail est de donner une extension du théorème 0 à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ moyennant une hypothèse sur les ensembles pics de H^∞.

Ce papier a comme point de départ la démonstration donnée par E. Amar $[A_2]$ d'un théorème de M. Mooney $[M]$ qui donne en substance que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement complet, quand m est la mesure de Lebesgue sur le cercle $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ et H^∞ la sous-algèbre de $L^\infty(m)$ des fonctions se prolongeant analytiquement dans le disque $D = \{z \in C : |z| < 1\}$. Dans cette démonstration il apparaît que le fait essentiel est un résultat sur les ensembles pics des H^∞ $[A_1]$. Il est très facile d'obtenir un résultat analogue pour $L^\infty(m)$ et par conséquent une démonstration du fait, bien connu, que $L^1(m)$ est faiblement séquentiellement complet $[D_1$, page 290$]$. Il devient alors naturel d'étendre le théorème 0, sous une forme adéquate, à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ pour des algèbres H^∞ vérifiant une bonne hypothèse sur les ensembles pics.

2. LE THEOREME.

Pour une fonction g de H^∞ considérons l'élément Tg de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ défini par $\langle Tg , g' \rangle = \int \bar{g}\, g' \, dm$ pour toute fonction g' de H^∞. Remarquons que, si $\|g\|_\infty = 1$, alors $\|g\|_1^2 \leq \|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leq \|g\|_1$, $[$les notations étant évidentes$]$; en conséquence T est une application linéaire, continue, injective et d'image dense, de H^∞ dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Notons M le spectre de Gelfand de l'algèbre uniforme $L^\infty(m)$, muni de la topologie de Gelfand. Alors, la transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $L^\infty(m)$ sur l'algèbre $\mathscr{C}(M)$ des fonctions continues sur M à valeurs complexes ; $\hat{f}$ désignera la transformée de Gelfand d'une fonction f de $L^\infty(m)$. L'algèbre H^∞ s'identifie à une sous-algèbre, $\widehat{H^\infty}$, de $\mathscr{C}(M)$, fermée pour la norme de la convergence uniforme sur M et contenant les constantes. Une forme linéaire ℓ sur $L^\infty(m)$, continue, peut être représentée, de manière unique, par une mesure $\hat{\ell}$ borélienne, régulière, bornée sur M, vérifiant, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}\, d\hat{\ell} = \langle f, \ell \rangle$. En particulier, pour toute fonction h de $L^1(m)$, la mesure hm se représente sur M par la mesure $\widehat{hm}$, et on a, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}\, d\widehat{hm} = \int f\, h\, dm$; de plus, il est facile de voir que la mesure $\widehat{hm}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$; réciproquement une mesure sur M, absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$, peut s'écrire $\widehat{hm}$ avec h dans $L^1(m)$. [voir [G_1], pages 17-19 et [D_1] pages 158-160].

DEFINITION 1. Un ensemble fermé, G, de M est un <u>ensemble pic</u> pour H^∞ si et seulement si il existe une fonction g dans H^∞ vérifiant $\hat{g}(x) = 1$ pour x dans G et $|\hat{g}(x)| < 1$ pour tout x dans $M \setminus G$.

DEFINITION 2. Une suite bornée $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est <u>d'interpolation</u> si et seulement si, pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, bornée, il existe une fonction g de H^∞ telle que $\langle f_n, g \rangle = \alpha_n$ pour tout n.

On est en position d'énoncer le résultat principal de ce travail :

THEOREME 1. <u>Soit</u> (S, Σ, m) <u>un espace de probabilité, et</u> H^∞ <u>une sous-algèbre de</u> $L^\infty(m)$, <u>contenant les constantes, fermée pour la topologie faible étoile. Supposons que tout sous-ensemble</u> E <u>de</u> M, <u>fermé, de</u> $\hat{m}$ <u>mesure nulle, soit inclus dans un ensemble pic de</u> H^∞ <u>de</u> $\hat{m}$ <u>mesure nulle. Alors, pour toute partie</u> K <u>de</u> $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

1) K <u>est faiblement relativement compacte</u> ;

2') K <u>est borné, et, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $\delta > 0$ <u>tel que</u> $g \in H^\infty$,

$\|g\|_\infty \leq 1$ et $\|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leq \delta$ implique $\sup\limits_{f\in K} |\langle f,g\rangle| \leq \varepsilon$;

3') $\lim\limits_{C\to+\infty} \left[\sup\limits_{f\in K} \left(\inf\limits_{\substack{g\in H^\infty \\ \|g\|_\infty \leq C}} \|f - Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}\right)\right] = 0$;

4) K est borné et ne contient aucune suite d'interpolation.

3. LEMME PRINCIPAL.

Un pas décisif dans la preuve du théorème 1 consiste dans le fait suivant :

LEMME 2. Soit $\{f_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ et f une forme linéaire continue sur H^∞, adhérente à la suite $\{f_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ dans le dual de $H^{\infty*}$ de H^∞ pour la topologie $\sigma(H^{\infty*},H^\infty)$. On peut prolonger f en une forme linéaire continue sur $L^\infty(m)$ qui se représente par une mesure μ sur M. Considérons la décomposition de Lebesgue de la mesure μ par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$. Si la mesure μ_s n'est pas orthogonale à $\widehat{H^\infty}$ on peut extraire de la suite $\{f_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'interpolation.

Preuve du lemme. On s'inspire largement d'une construction donnée dans $[G_2]$ pages 462-464 ; on peut voir aussi $[H_1]$ et $[K_1]$ pour des idées analogues.

a) Soit g_1 une fonction de H^∞ telle que $a = \int \hat{g}_1\, d\mu_s \neq 0$; puisque la mesure μ_s est singulière par rapport à la mesure $\hat{m}$, il existe un fermé F de M de $\hat{m}$ mesure nulle tel que $\int_{M\setminus F} |\hat{g}_1|\, d|\mu_s| \leq \frac{|a|}{2}$; du fait de l'hypothèse sur les ensembles pics de H^∞, il existe un fermé G de M contenant F, de $\hat{m}$ mesure nulle, et une fonction g de H^∞ tels que $\hat{g}(x) = 1$ pour x dans G et $|\hat{g}(x)| < 1$ pour tout

x dans $M\setminus G$. On a :

$$\left|\int_G \hat{g}_1\, d\mu_s - a\right| = \left|\int_{M\setminus G} \hat{g}_1\, d\mu_s\right| \le \int_{M\setminus G} |\hat{g}_1|\, d|\mu_s| \le \int_{M\setminus F} |\hat{g}_1|\, d|\mu_s| \le \frac{|a|}{2} \;;$$

donc $\int_G \hat{g}_1\, d\mu_s \neq 0$; en multipliant, au besoin, g_1 par une constante, on peut supposer que $\int_G \hat{g}_1\, d\mu_s = 1$.

b) Il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ telle que, pour tout x de M, $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\widehat{g^{n_i}}(x) - \widehat{g^{n_{i+1}}}(x)\right| \le 6$. Pour le montrer, construisons par récurrence une suite strictement croissante d'entiers positifs $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et une suite $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ décroissante de voisinages ouverts de G tels que :

i) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i = G$;

ii) $|\widehat{g^{n_i}}(x)| < 2^{-i}$ pour tout $x\in M\setminus V_{i-1}$ et tout $i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$;

iii) $|\widehat{g^{n_i}}(x)| < 2^{-i}$ pour tout $x\in V_i$ et tout $i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Notons, pour chaque entier n, $W_n = \{x\in M : |\hat{g}(x) - 1| < 2^{-n}\}$; clairement W_n est un ouvert contenant G et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = G$.

Commençons la récurrence. Pour $i = 0$, posons $V_o = M$; il n'y a rien à vérifier. Pour $i = 1$, posons $n_1 = 1$ et $V_1 = W_1$, clairement les assertions (ii) et (iii) sont vérifiées, et $V_1 \subset V_o$. Supposons la construction faite jusqu'à l'étape $i_o > 1$; on a $\sup_{x\in M\setminus V_{i_o}} |\hat{g}(x)| < 1$ car $|\hat{g}(x)| < 1$ pour tout x dans $M\setminus G$, et

V_{i_o} est un ouvert contenant G ; choisissons alors, un entier n_{i_o+1} strictement plus grand que n_{i_o} tel que $\left|\widehat{g^{n_{i_o+1}}}(x)\right| < 2^{-(i_o+1)}$ pour tout x dans $M\setminus V_{i_o}$, et posons

$$V_{i_o+1} = W_{i_o+1} \cap V_{i_o} \cap \left\{x\in M : \left|\widehat{g^{n_{i_o+1}}}(x) - 1\right| < 2^{-(i_o+1)}\right\} ;$$

Clairement les assertions (ii) et (iii) sont vérifiées et $V_{i_o+1} \subset V_{i_o}$. Pour conclure la construction, il suffit de vérifier l'assertion (i), ce qui est immédiat car, pour tout $i \geq 1$, on a que $G \subset V_i \subset W_i$.

Calculons maintenant, pour chaque x de M, $G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{g^{n_i}}(x) - \widehat{g^{n_{i+1}}}(x)|$; si x appartient à $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i = G$ alors $G(x) = 0$; si x appartient à $V_{i_o} \setminus V_{i_o+1}$, pour un entier $i_o \geq 1$, on peut écrire :

$$G(x) \leq \sum_{i=1}^{i_o-1} |\widehat{g^{n_i}}(x) - \widehat{g^{n_{i+1}}}(x)| + |\widehat{g^{n_{i_o}}}(x)| + 2|\widehat{g^{n_{i_o+1}}}(x)| + |\widehat{g^{n_{i_o+2}}}(x)| + \sum_{i=i_o+2}^{\infty} |\widehat{g^{n_i}}(x) - \widehat{g^{n_{i+1}}}(x)| ;$$

on obtient alors, en utilisant l'assertion (ii) pour majorer le premier terme, l'assertion (iii) pour majorer le dernier terme et le fait que $|\hat{g}(x)| \leq 1$ pour tout x de M, la majoration désirée. Si x appartient à $V_o \setminus V_1 = M \setminus V_1$, on peut écrire

$G(x) \leq |\widehat{g^{n_1}}(x)| + |\widehat{g^{n_2}}(x)| + \sum_{i=2}^{\infty} |\widehat{g^{n_i}}(x) - \widehat{g^{n_{i+1}}}(x)|$ et conclure comme dans le cas précédent.

c) Considérons la suite $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ de fonctions de H^∞ définie par $\ell_i = g_1 . g^{n_i}$. Cette suite est bornée et on a que $\lim_{i \to +\infty} \widehat{\ell_i}(x) = 0$ pour tout x dans $M \setminus G$ et $\widehat{\ell_i}(x) = \widehat{g_1}(x)$ pour tout x de G, et tout i de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit p un entier ; puisque f_p appartient à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, il existe une mesure μ_p sur M absolument continue par rapport à $\hat{m}$ telle que $\int \hat{k}\, d\mu_p = \langle f_p, k \rangle$ pour toute fonction k de H^∞ ; alors on a : $\lim_{i \to +\infty} \langle f_p, \ell_i \rangle = 0$ (*). Puisque $\langle \ell_i, f \rangle = \int \hat{\ell}_i\, d\mu = \int \hat{\ell}_i\, h\, d\hat{m} + \int_{M \setminus G} \hat{\ell}_i\, d\mu_s + \int_G \hat{g}_1\, d\mu_s$ on a que : $\lim_{i \to +\infty} \langle \ell_i, f \rangle = 1$ (**).

d) Etant donnée une constante $c > 0$, on va maintenant utiliser les assertions (*) et (**) [dans c)], et le fait que la forme linéaire f est adhérente faiblement dans $H^{\infty *}$ à la suite $\{f_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ (***), pour construire une sous-suite $\{\ell_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite

$\{\ell_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et une sous-suite $\{f_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{f_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

i) $|\langle f_{p_k}, \ell_{i_j}\rangle| \leq 2^{-j}c$ dès que $k \leq j-1$;

ii) $|\langle f_{p_k}, \ell_{i_j}\rangle - 1| \leq 2^{-j}c$ dès que $k \geq j$.

On procède par récurrence de la manière suivante : du fait de l'assertion (**) il existe un entier i_o tel que $|\langle \ell_{i_o}, f\rangle - 1| \leq \frac{c}{2}$; du fait de l'assertion (***) il existe un entier p_o tel que $|\langle f_{p_o}, \ell_{i_o}\rangle - \langle \ell_{i_o}, f\rangle| \leq \frac{c}{2}$; alors on a $|\langle f_{p_o}, \ell_{i_o}\rangle - 1| \leq c$.

Supposons que l'on ait construit $\{\ell_{i_n}\}_{0\leq n\leq N}$ et $\{f_{p_n}\}_{0\leq n\leq N}$ en sorte que :

$$(i_N) \qquad |\langle f_{p_k}, \ell_{i_j}\rangle| \leq 2^{-j}c \quad \text{dès que} \quad \begin{cases} k \leq j-1 \\ 0 \leq k \leq N \\ 0 \leq j \leq N \end{cases} ;$$

$$(ii_N) \qquad |\langle f_{p_k}, \ell_{i_j}\rangle - 1| \leq 2^{-j}c \quad \text{dès que} \quad \begin{cases} k \geq j \\ 0 \leq k \leq N \\ 0 \leq j \leq N \end{cases} ;$$

$$(iii_N) \qquad |\langle \ell_{i_j}, f\rangle - 1| \leq 2^{-j}\frac{c}{2} \quad \text{dès que} \quad 0 \leq j \leq N.$$

Du fait des assertions (*) et (**) il existe un entier i_{N+1} strictement plus grand que i_N tel que $|\langle f_{p_k}, \ell_{i_{N+1}}\rangle| \leq 2^{-(N+1)}$ pour tout k, $0 \leq k \leq N$, et, $|\langle \ell_{i_{N+1}}, f\rangle - 1| \leq 2^{-(N+1)}\frac{c}{2}$; du fait de l'assertion (***) il existe un entier p_{N+1} strictement plus grand que p_N tel que $|\langle \ell_{i_j}, f\rangle - \langle f_{p_{N+1}}, \ell_{i_j}\rangle| \leq 2^{-(N+1)}\frac{c}{2}$ pour tout entier j, $0 \leq j \leq N+1$; alors du fait de l'assertion (iii_N) et de la construction i_{N+1} et de p_{N+1} on a que

$$|\langle f_{p_{N+1}}, \ell_{i_j}\rangle - 1| \leq |\langle \ell_{i_j}, f\rangle - 1| + |\langle f_{p_{N+1}}, \ell_{i_j}\rangle - \langle \ell_{i_j}, f\rangle| \leq 2^{-j}\frac{c}{2} + 2^{-(N+1)}\frac{c}{2} \leq c2^{-j}$$

pour tout entier j, $0 \leq j \leq N+1$; ce qui achève la construction.

e) On a construit ainsi, pour toute constante $c > 0$, une suite $\{\mathfrak{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de fonctions de H^∞, $[\mathfrak{a}_n = \ell_{i_n}]$, et une sous-suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{f_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, $[b_n = f_{p_n}]$, telles que

i) $|\langle b_p, \mathfrak{a}_i\rangle| \leq 2^{-i}c$ dès que $p \leq i-1$;

ii) $|\langle b_p, \mathfrak{a}_i\rangle - 1| \leq 2^{-i}c$ dès que $p \geq i$;

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\mathfrak{a}}_n(x) - \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}(x)| \leq K$ pour tout x de M,

K étant un nombre réel positif ne dépendant ni de x ni de c.

La seule chose à montrer est l'assertion (iii), ce que l'on déduit immédiatement de la majoration obtenue pour la suite $\{g^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ dans b) ; on peut choisir $K = 6\|g_1\|_\infty$.

f) Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $|\alpha_n| \leq 1$ pour tout entier n ; considérons, alors, la suite de fonctions de H^∞, $\{A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $A_{\alpha,n} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i+1})$; puisque $|\widehat{A_{\alpha,n}}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| |\hat{\mathfrak{a}}_i(x) - \hat{\mathfrak{a}}_{i+1}(x)| \leq K$, la suite $\{A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; soit A_α une fonction de $L^\infty(m)$ adhérente à la suite $\{A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour la topologie faible étoile ; on a que A_α appartient à H^∞ et que, pour toute fonction h de $L^1(m)$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{i\to+\infty} \int A_{\alpha,n_i} h\, dm = \int A_\alpha h\, dm$; or $\int A_{\alpha,n_i} h\, dm = \int \widehat{A_{\alpha,n_i}}\, \hat{h}\, dm$, et la suite $\{\widehat{A_{\alpha,n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement, de manière bornée, sur M, vers la fonction $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(\hat{\mathfrak{a}}_i(x) - \hat{\mathfrak{a}}_{i+1}(x))$; donc $\lim_{i\to+\infty} \int \widehat{A_{\alpha,n_i}}\, \hat{h}\, dm = \int \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(\hat{\mathfrak{a}}_i(x) - \hat{\mathfrak{a}}_{i+1}(x))\, \widehat{h}\, dm = \int A_\alpha h\, dm$; on en déduit que A_α est unique et que, pour tout p entier, puisque b_p appartient à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, $\langle b_p, A_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle b_p, \mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_{n+1}\rangle$; estimons $\langle b_p, \mathfrak{a}_{n+1} - \mathfrak{a}_n\rangle$, du fait des assertions (i) et (ii) de e) on obtient $|\langle b_p, \mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_{n+1}\rangle| \leq 2^{-n+1}c$ si $p \neq n$ et

$|\langle b_p, \alpha_p - \alpha_{p+1}\rangle - 1| \leq 2^{-p+1}C$; d'où $|\langle b_p, A_\alpha\rangle - \alpha_p| \leq 4C$. Pour $C = \frac{1}{8}$ on obtient alors que pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que $|\alpha_n| \leq 1$ pour tout entier n, il existe une fonction A_α de H^∞ telle que

i) $\|A_\alpha\|_\infty \leq K$

ii) $|\langle b_p, A_\alpha\rangle - \alpha_p| \leq \frac{1}{2}$ pour tout p entier.

g) Pour obtenir le fait que la suite $\{b_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ est d'interpolation et conclure la preuve du lemme, on utilise maintenant un argument standard, $[K_2$ Lemme 1$]$; rappelons-le: soit $s = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes ; notons $\|s\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$.
Il existe une fonction B_1 de H^∞ avec $\|B_1\|_\infty \leq K\|s\|_\infty$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle b_n, B_1\rangle - s_n| \leq \frac{1}{2}\|s\|_\infty$.
Considérons la suite $s_2 = \{-\langle b_n, B_1\rangle + s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; il existe une fonction B_2 de H^∞ avec $\|B_2\| \leq \frac{K}{2}\|s\|_\infty$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle b_n, B_1 + B_2\rangle - s_n| \leq \frac{1}{4}\|s\|_\infty$. On construit ainsi, par récurrence, une suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de H^∞ telle que $\|B_n\|_\infty \leq 2^{1-n}K\|s\|_\infty$ et $\sup_{p\in\mathbb{N}} |\langle b_p, \sum_{i=1}^{n} B_i\rangle - s_p| \leq 2^{-n}\|s\|_\infty$. Alors la fonction $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$ appartient à H^∞ et on a $\langle b_p, B\rangle = s_p$ pour tout entier p.

Comme application immédiate du Lemme 2 on a le

COROLLAIRE 3. <u>Pour toute suite bornée $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, ou bien on peut en extraire une suite d'interpolation, ou bien elle est relativement faiblement compacte</u>.

Preuve. Considérons l'adhérence $\mathfrak{F}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H^{\infty *}$. Si $\mathfrak{F}$ est inclus dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est, trivialement, relativement compacte. Si $\mathfrak{F}$ n'est pas inclus dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$, considérons un élément f de $\mathfrak{F} \setminus L^1(m)/H^{\infty\perp}$;

il existe une mesure μ sur M telle que $\int \hat{g}\, d\mu = \langle g,f\rangle$, pour toute fonction g de H^∞ ; dans la décomposition de Lebesgue de la mesure μ par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$, clairement on a que la mesure μ_s n'est pas orthogonale à $\widehat{H^\infty}$ [sinon $h\hat{m}$ représenterait aussi la forme linéaire f pour H^∞, qui appartiendrait donc à $L^1(m)/H^{\infty\perp}$] ; alors, par application du Lemme 2, on peut extraire de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'interpolation.

Remarquons que les deux assertions du corollaire 3 sont contradictoires : en utilisant le théorème d'Eberlein-Šmulian [D_1 page 430] on a que, si la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement faiblement compacte, de toute sous-suite de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite faiblement convergente ; ce qui est clairement contradictoire avec la première assertion du corollaire 3.

Comme conséquence triviale du corollaire 3, on a le fait que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement sequentiellement complet [D_1 page 290].

4. PREUVE DU THEOREME.

L'équivalence de (1) et (4). C'est une simple conséquence du corollaire 3 et du théorème d'Eberlein-Šmulian.

(2') implique (1). Raisonnons par l'absurde ; si K n'est pas faiblement relativement compacte, ou bien K n'est pas bornée et l'assertion (2') est fausse, ou bien K est bornée, et, par application du théorème d'Eberlein-Smulian, on peut construire une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de K dont l'adhérence dans $H^{\infty*}$ n'est pas inclus dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$. Comme dans la preuve du corollaire 3 et en utilisant la démonstration du lemme 2, on voit qu'il existe une sous-suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite bornée $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de H^∞ telles que : $|\langle b_n,\alpha_n\rangle -1| \leq 2^{-n}c$ pour tout entier n, et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\hat{\alpha}_n(x)| = 0$ $\hat{m}$ presque partout sur M ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int |\alpha_n| dm = \int |\hat{\alpha}_n| d\hat{m}$ et, par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(\alpha_n)\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} = 0$; on contredit ainsi l'assertion (2').

(1) implique (2'). a) Raisonnons par l'absurde ; si l'assertion (2') est fausse, ou bien K n'est pas bornée et elle ne peut être faiblement relativement compacte, ou bien K est bornée et alors il existe une suite bornée $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans K, un nombre réel ε strictement positif, et une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans H^∞ telles que :

i) pour tout n entier $\|g_n\|_\infty \leq 1$,

ii) $\|Tg_n\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leq \frac{1}{n}$,

iii) $|\langle f_n,g_n\rangle| \geq \varepsilon$.

Clairement, en prenant au besoin une sous-suite de la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et du fait de l'assertion (ii) on peut supposer que

ii') il existe une suite croissante de sous-ensembles mesurable $\{E'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k entier, $1 - m(E'_k) \leq \frac{1}{2^k}$ et la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, uniformément sur E'_k, vers 0.

Considérons, pour chaque entier n, une fonction h_n dans $L^1(m)$ telle que $\|h_n\|_1 \leq \|f_n\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} + 1$, et, pour toute fonction g de H^∞, $\int h_n g\, dm = \langle f_n,g\rangle$. Soit μ une mesure sur M, adhérente à la suite de mesures $\{\widehat{h_n g_n m}\}_{n\in\mathbb{N}}$, pour la topologie faible étoile. Clairement, du fait de l'assertion (iii), on a que $\int d\hat{\mu} \neq 0$. Ecrivons la décomposition de Lebesgue de la mesure μ par rapport à la mesure $\hat{m}$: $\mu = h\hat{m} + \mu_s$. Pour tout entier p, il existe un ouvert fermé F_p de M tel que $1 - \hat{m}(F_p) \leq \frac{1}{2^p}$ et

$|\mu_s|(F_p) = 0$; il existe un sous-ensemble de S, F'_p, mesurable, tel que $\{x \in M : \hat{X}_{F'_p}(x) = 1\} = F_p$ [où $X_{F'_p}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble F'_p, c'est une fonction de $L^\infty(m)$] ; en conséquence, du fait de la construction de la mesure μ, il existe une suite strictement croissante d'entiers $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{i\to+\infty} \int \widehat{X_{F'_p\cap E'_p}}\, d\,\widehat{h_{n_i} g_{n_i} m} = \int \widehat{X_{F'_p\cap E'_p}}\, d\mu = \int \hat{X}_{F'_p\cap E'_p}(h\, d\hat{m} + d\mu_s) = \int X_{F'_p\cap E'_p}\, h\, d\hat{m} =$ $\lim\limits_{i\to+\infty} \int_{F'_p\cap E'_p} h_{n_i} g_{n_i}\, dm = 0$; or, si on note $E_p = \{x \in M : \widehat{X_{E'_p}}(x) = 1\}$, on a que $1 - \hat{m}(E_p \cap F_p) \leq 1 - \hat{m}(E_p) + 1 - \hat{m}(F_p) = 1 - m(E'_p) + 1 - \hat{m}(F_p) \leq \frac{1}{2^{p-1}}$; donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \int \widehat{X}_{F'_p\cap E'_p}\, h\, d\hat{m} = \int h\, d\hat{m} = 0$; en conséquence $\int \mu_s \neq 0$ et comme H^∞ contient les constantes, la mesure μ_s n'est pas orthogonale à $\widehat{H^\infty}$.

b) Appliquons alors la construction du lemme 2. On a vu que pour tout nombre réel $c > 0$, il existe une sous-suite de la suite $\{f_n\, g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f'_n\, g'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et une suite de fonctions de H^∞, bornée, $\{\ell_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, vérifiant les assertions (i), (ii) et (iii) de la partie e) de la preuve du lemme 2.

Supposons que la suite $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit relativement faiblement compacte [sinon il n'y a rien à démontrer]. Par le théorème d'Eberlein-Šmulian, en prenant au besoin une sous-suite de la suite $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que la suite $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$: soit f' la limite. On a alors les faits suivants, assez évidents :

i) $\lim\limits_{i\to+\infty} \langle f'_i\, ,\, g'_i(\ell_i - \ell_{i+1})\rangle = 1$;

ii) $\lim\limits_{i\to+\infty} \langle f'_p\, ,\, g'_i(\ell_i - \ell_{i+1})\rangle = 0$ pour tout entier p ;

iii) $\lim\limits_{i\to+\infty} \langle f'\, ,\, g'_i(\ell_i - \ell_{i+1})\rangle = 0$;

iv) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |\hat{g}'_i(x)|\, |\hat{\ell}_i(x) - \hat{\ell}_{i+1}(x)| \leq K$ pour tout x de M.

Les assertions (i) et (iv) sont des conséquences des assertions (i), (ii) et (iii) de la partie e) de la preuve du lemme 2, les assertions (ii) et (iii) sont conséquence de l'assertion (ii') de la partie a) de la présente démonstration.

Pour alléger l'écriture, notons $\ell'_i = g'_i(\ell_i - \ell_{i+1})$.

c) Montrons que, pour tout nombre réel $c > 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

i) $|\langle f'_{n_i}, \ell'_{n_i}\rangle - 1| \leq 2^{-j}c$

ii) $|\langle f'_{n_i}, \ell'_{n_j}\rangle| \leq 2^{-j}c$ pour tout entier i et tout entier j, $i \neq j$;

iii) $\sum_{i=0}^{\infty} |\ell'_{n_j}(x)| \leq K$ pour tout x de M.

Il est clair que, pour toute suite strictement croissante d'entiers, l'assertion (iii) est vraie et il est facile de trouver une suite strictement croissante d'entiers $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que l'assertion (i) soit vraie. Construisons alors une sous-suite de cette suite pour obtenir l'assertion (ii). Il existe un entier i_o tel que $|\langle f', \ell'_{m_{i_o}}\rangle| \leq 2^o \frac{c}{2}$. Il existe un entier i_1 tel que $i_1 > i_o$, $|\langle f'_{m_{i_o}}, \ell'_{m_{i_1}}\rangle \leq 2^{-1}c$, $|\langle f', \ell'_{m_{i_1}}\rangle| \leq 2^{-1}\frac{c}{2}$ et $|\langle f' - f'_{m_{i_1}}, \ell'_{m_{i_o}}\rangle| \leq 2^o \frac{c}{2}$; clairement on a alors l'assertion (ii) pour $0 \leq i \leq 1$ et $0 \leq j \leq 1$. Supposons que l'on a réalisé la construction jusqu'à l'étape p, $p > 1$; il existe un entier i_{p+1} tel que $i_{p+1} > i_p$, $|\langle f'_{m_{i_j}}, \ell'_{m_{i_{p+1}}}\rangle| \leq 2^{-(p+1)}c$ pour tout entier j, $j \leq p$, $|\langle f', \ell'_{m_{ip+1}}\rangle| \leq 2^{-(p+1)}\frac{c}{2}$ et $|\langle f' - f'_{m_{i_{p+1}}}, \ell'_{m_{i_j}}\rangle| \leq 2^{-j}\frac{c}{2}$ pour tout $j \leq p$; il est facile de vérifier que l'entier i_{p+1} fait l'affaire.

d) On peut maintenant conclure comme dans la preuve du Lemme 2 que la suite $\{f'_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ est d'interpolation ce qui est absurde.

L'équivalence de (2') et (3') : elle a été obtenue dans un cadre très général par A. Grothendieck [voir [G_3] pages 296-298] ; il obtient aussi le fait que (3') implique (1), dans le même cadre.

5. APPLICATIONS.

1. $H^\infty = L^\infty(m)$. Montrons que le théorème 1 s'applique : si E est un fermé de M de $\hat{m}$ mesure nulle, il existe une suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts fermés de M vérifiant :

i) $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout n entier ;

ii) $E \subset E_n$ pour tout n entier ;

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{m}(E_n) = 0$.

Puisque E_n est un ouvert fermé de M, il existe un sous-ensemble E'_n de S dont la fonction caractéristique X_n vérifie $\hat{X}_n(x) = 0$ pour x de $M \setminus E_n$. Considérons la fonction G de $L^\infty(m)$ définie par $G = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$; clairement $F = \{x\in M : \hat{G}(x)=1\}$ contient F et est un ensemble pic pour $L^\infty(m)$, de $\hat{m}$ mesure nulle.

Pour retrouver l'énoncé du théorème 0, il suffit alors de constater que, dans ce cas, l'assertion (3) est la traduction exacte de l'assertion (3') et que les assertions (2) et (2') sont équivalentes [ce qui est facile à montrer].

2. $H^\infty = H^\infty(D)$. Notons $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans le disque unité, ouvert, du plan complexe, $D = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$. La mesure m_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$, la frontière topologique de D. Il est bien connu [H_2] que l'on peut considérer $H^\infty(D)$ comme une sous-algèbre de $L^\infty(m_1)$ fermée pour la topologie faible étoile, et contenant les constantes. Le fait que tout fermé de M de $\hat{m}_1$ mesure nulle soit inclus dans un ensemble pic pour H^∞ de $\hat{m}_1$ mesure nulle est

un résultat de E. Amar et A. Lederer [A_1]. Rappelons que $H^{\infty\perp}$ est le sous-espace de $L^1(m_1)$, H^1_o, des fonctions dont les coefficients de Fourier négatifs ou nuls sont nuls [H_2]. Il est clair, alors, que le théorème 1, dans ce cas, précise le théorème de M. Mooney qui dit, en substance, que $L^1(m_1)/H^1_o$ est faiblement séquentiellement complet [M]. Les idées développées dans le présent travail se rattachent à la preuve que donne E. Amar dans [A_2] du théorème de M. Mooney. Citons une troisième démonstration de ce théorème donnée par V. P. Havin [H_3].

Le théorème 1 montre que l'espace de Banach $L^1(m_1)/ H^1_o$ "ressemble" à $L^1(m_1)$. Très récemment, dans une direction opposée, A. Pełczinski a montré que $L^1(m_1)/H^1_o$ n'est isomorphe à aucun sous-espace fermé d'un $L^1(\mu)$ [communication orale].

3. $H^\infty = H^\infty(U)$. Considérons l'ouvert U obtenu en enlevant au disque D un nombre fini de disques fermés, deux à deux disjoints inclus dans D ; notons $H^\infty(U)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans U. La mesure m_2 est la mesure linéaire, normalisée, sur la frontière topologique de U. Il est bien connu [[G_2] p. 150] que $H^\infty(U)$ peut être considérée comme une sous-algèbre de $L^\infty(m_2)$, fermée pour la topologie faible étoile, et contenant les constantes. Le fait que tout fermé de M, de $\hat{m}_2$ mesure nulle, soit inclus dans un ensemble pic pour H^∞, de $\hat{m}_2$ mesure nulle est une conséquence immédiate du résultat de E. Amar et A. Lederer [A_1], précédemment cité, et du corollaire 12-8, page 59 dans [G_2].

6. REMARQUES.

1. Il est possible de démontrer l'équivalence de (1) et (4) pour un sous-espace

vectoriel H^∞ de $L^\infty(m)$, fermé pour la topologie faible étoile et tel que tout fermé de M de $\hat{m}$ mesure nulle soit inclus dans un ensemble pic pour H^∞ de $\hat{m}$ mesure nulle [voir [G$_1$] Lemme 12.4, page 57, pour une "définition convenable" des ensembles pics pour un espace vectoriel de fonctions et [H$_1$] pour avoir une idée des modifications à apporter dans la preuve de l'équivalence]. Cela montre que, dans le théorème 1, seule "(1) implique (2')" utilise le fait que H^∞ est une algèbre contenant les constantes. Est-il possible d'améliorer la preuve du théorème 1 sur ce point et d'obtenir alors le théorème 1 pour de "bons" sous-espaces vectoriels de $L^\infty(m)$?

2. Un théorème très général de H. Rosenthal et L. Dor [D$_2$] dit que d'une suite bornée d'un espace de Banach, ou bien on peut extraire une suite faiblement de Cauchy, ou bien on peut extraire une suite équivalente à la base canonique de ℓ_1. Il suffit alors, pour obtenir l'équivalence de (1) et (4), de démontrer que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$

3. Du fait de la remarque précédente, on peut se poser la question suivante : les propositions (1), (2'), (3'), (4) ne sont-elles pas équivalentes dès que $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement complet ? L'exemple qui suit prouve qu'il n'en est rien. La mesure m_3 est la mesure de Lebesgue plane restreinte au disque unité ouvert du plan complexe et H^∞ est l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans D, que l'on peut considérer comme une sous-algèbre de $L^\infty(m_3)$ fermée pour la topologie faible étoile et contenant les constantes. Clairement, l'espace $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ est isométriquement isomorphe à l'espace $L^1(m_1)/H^1_o$ défini dans la première application, car, si on munit $H^\infty(D)$ de la topologie τ de la convergence uniforme sur tout compact, on voit

que $L^1(m_1)/H^1_o$ et $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ ne sont rien d'autre que le dual H^∞ de $H^\infty(D)_\tau$ et que ce dual est un sous-espace vectoriel fermé du dual $H^{\infty*}$ de $H^\infty(D)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur D. On en déduit le fait que $L^1(m_3)/H^{\infty\perp}$ est faiblement séquentiellement complet. Considérons dans $H^{\infty'}$ la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour chaque entier n et chaque fonction g de H^∞ par $\langle f_n, g\rangle$ = le coefficient de z^n dans le développement de Taylor à l'origine de la fonction g. Clairement, cette suite converge faiblement vers 0 et, pour tout entier n, $\langle f_n, z^n\rangle = 1$ et $\|Tz^n\|_{L^1(m_3)/H^{\infty\perp}} \leq \int |z^n|\, dm_3 \leq \frac{2\pi}{n+2}$; aussi (1) n'implique pas (2'). En fait, dans ce cas, c'est la seule implication fausse dans le théorème 1.

[A_1] AMAR, E. et LEDERER, A. Points exposés de la boule unité de $H^\infty(D)$. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272 (1971), 1449-1452.

[A_2] AMAR, E. Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées. Pacific J. of Math. 16 (1973), 191-194.

[D_1] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J. T. Linear operators (tome 1). Pure and Applied Math. Interscience Publishers Inc., New York (1958).

[D_2] DOR, L. E. On sequences spanning a complex ℓ_1 space. (A paraître).

[G_1] GAMELIN, T. W. Uniform algebras. Prentice Hall Series in Modern Analysis (1969).

[G_2] GAMELIN, T. W. and GARNETT, J. Distinguished homomorphism and Fiber algebra. Amer. J. Math. 42 (1970), 455-474.

[G_3] GROTHENDIECK, A. Espaces vectoriels topologiques. Publ. Soc. Math. Sao Paulo (1964).

[H_1] HEARD, E. A. A sequential F. and M. Riesz theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 832-835.

[H_2] HOFFMAN, K. Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall Series in modern analysis (1962).

[H_3] HAVIN, V. P. Complétion faible de L^1/H^1_o (en russe). Vestnik Leningradskogo Universiteta, 13 (1973), 77-81.

[K_1] KAHANE, J.-P. Another theorem on bounded analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 827-831.

[K_2] KATZNELSON, Y. The algebra of continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 313-315.

[M] MOONEY, M. C. A theorem on bounded analytic functions. Pacific J. Math. 43 (1972), 457-462.