UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N[os] 181-76.52

Jean-Michel BONY

Hyperfonctions et Equations aux Dérivées Partielles

cours de 3e cycle, 1974-75

rédigé par MM. Laurent et Prestel

élèves de l'Ecole Normale Supérieure

N^{os} 181-76.52

Jean-Michel BONY

Hyperfonctions et Equations aux Dérivées Partielles

cours de 3e cycle, 1974-75

rédigé par MM. Laurent et Prestel

élèves de l'Ecole Normale Supérieure

Introduction

Ce cours de 3e cycle (Orsay, 1974-75) était destiné en principe à des étudiants ou chercheurs déjà familiarisés, au moins au niveau des motivations, avec la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires, mais éventuellement moins entraînés au maniement de l'algèbre homologique.

Pour cette raison, et aussi pour des questions de temps, il ne pouvait être question de réexposer l'excellent et difficile article de M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara [10] sur la théorie des hyperfonctions et des microfonctions. On ne trouvera pas non plus dans ce cours une simplification de cette théorie. Il s'agit plutôt d'une présentation "padagogique" (du moins nous l'espérons), faisant un large usage de résultats admis sans démonstration. Notre objectif essentiel est de montrer comment on utilise les hyperfonctions et microfonctions pour étudier les équations aux dérivées partielles.

Dans la première partie, nous donnons une présentation que l'on pourrait qualifier d'axiomatique, du faisceau des hyperfonctions. L'existence de ce faisceau, le fait que les fonctions holomorphes aient des valeurs au bord dans ce faisceau, et le théorème du "Edge of the wedge" sont admis dès le début, et les démonstrations ultérieures s'appuient sur ces résultats admis.

Cela permet, au §2 de définir et d'étudier les opérations sur les hyperfonctions, et d'introduire le spectre singulier de Sato (support essentiel, analytic wave front), l'un des outils essentiels de la théorie. Aux paragraphes 3 et 4, en suivant Bony-Schapira [1][8], nous montrons comment des théorèmes d'existence et de prolongement pour les solutions holomorphes d'équations aux dérivées partielles dans le domaine complexe, fournissent des théorèmes dans le domaine réel en "en prenant les valeurs au bord". Nous retrouvons ainsi le théorème de micro-ellipticité de Sato, et donc le théorème de Homgren, et nous exposons les résultats de [8] sur le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques.

La seconde partie est plus ambitieuse, elle vise à donner une idée de l'ensemble de l'article [10] de Sato-Kawai-Kashiwara : microfonctions, calcul pseudo-différentiel réel et complexe, transformations de contact quantifiées, applications à la classification des équations aux dérivées partielles, et à la propagation des singularités.

Là encore, nous admettons sans justification des résultats profonds de [10] (nous serions bien en peine, avec la définition simple que nous en donnons, de démontrer que les microfonctions forment un faisceau). Les opérations sur les microfonctions sont étudiées au §1. Nous étudions ensuite les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe, en nous inspirant de la présentation donnée dans [11]. Nous suivons [10] pour le calcul symbolique et pour étudier, au §3, les formes réduites des opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe, ce qui fait intervenir de manière importante les opérateurs d'ordre infini.

Au paragraphe 4, nous montrons comment les opérateurs pseudo-différentiels opèrent sur les microfonctions, en prenant la valeur au bord de l'action sur les fonctions holomorphes, présentation inspirée de [11] et [12], et nous admettons l'existence des "transformations de contact quantifiées". Enfin, au paragraphe 5, nous résumons toute la 3e partie de [10], en montrant comment tout le calcul opérationnel précédent permet de ramener, dans les cas "génériques", les équations aux dérivées partielles à quelques types simples, et d'en déduire des résultats d'existence, de régularité, de propagation des singularités.

Je remercie très vivement MM. Laurent et Prestel qui ont rédigé ce cours. En fait, ils ont accompli bien plus qu'un travail de rédaction. A de nombreuses reprises, ils ont établi des démonstrations complètes là où je m'étais borné à donner quelques indications fort elliptiques.

Partie I : Etude élémentaire des hyperfonctions.

1. Introduction axiomatique des hyperfonctions.

1.1 Exemples de valeurs au bord de fonctions holomorphes en dimension 1.

Exemple 1 : $\frac{1}{z}$ en dimension 1.

On sait que $\lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{x+iy}$ est une distribution : $\boxed{\frac{1}{x+i0} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} - i\pi\delta}$

et de même : $\boxed{\frac{1}{x-i0} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} + i\pi\delta}$

Les valeurs au bord de $\frac{1}{z}$ sont donc des distributions sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : fonctions holomorphes sur le disque unité.

$$D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \qquad C = \partial D = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Soit f une fonction holomorphe sur D :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \quad |z| < 1 \quad \text{avec } \forall \rho < 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < +\infty.$$

Posons formellement $b(f)(\theta) = \sum a_n e^{in\theta}$.

Proposition 1 : $b(f) \in L^2(C) \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$.

Démonstration : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série de Fourier de $b(f)$, or la transformation de Fourier est une bijection entre $L^2(C)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$.

Proposition 2 : $b(f) \in \mathcal{D}'(C) \iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à croissance lente, i.e. $\exists m \in \mathbb{N} \ \exists c > 0 \ |a_n| < C n^m$.

Démonstration : C est compact donc $\mathcal{D}'(C) = \mathcal{S}'(C)$ et on sait que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}'(C)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{N})$.

Proposition 3 : Dans le cas où f est une fonction holomorphe quelconque sur D, $b(f)$ est une fonctionnelle analytique sur C.

Démonstration : Soit g une fonction analytique sur la variété réelle C.

Alors il existe $\varphi(z)$ holomorphe dans une couronne $\{\rho_1 < |z| < \rho_1'\}$ avec $\rho_1 < 1 < \rho_1'$ telle que

$$\varphi(z)|_C = g(e^{i\theta})$$

φ admet un développement de Laurent autour de 0 :

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n Z^n .$$

Soit $\rho < 1$, $1/\rho < \rho_1'$ alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|\rho^{-n} < +\infty$ donc $\exists M$ $\forall n$ $|b_n|(\frac{1}{\rho})^n < M$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n|b_n|\rho^{-n} \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < +\infty \text{ puisque } \rho < 1 .$$

$\sum a_n b_n$ est donc une série absolument convergente et on obtient une dualité en posant :

$$\langle b(f), g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n .$$

Si une suite $\{g_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 uniformément sur C, la suite correspondante $\{\varphi_p\}$ converge vers 0 uniformément sur $\{\rho_1 < |z| < \rho_1'\}$ et donc si $\rho < 1$ et $\frac{1}{\rho} < \rho_1'$ $M_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n^p(\frac{1}{\rho})^n$ $M_p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, donc $\langle b(f), g_p\rangle \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

$b(f)$ est une fonctionnelle analytique sur C. q.e.d.

1.2 Introduction axiomatique des hyperfonctions.

Nous admettrons qu'il existe un faisceau d'espaces vectoriels $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, pour tout voisinage complexe $\tilde{\omega}$ de ω dans $\mathbb{C}^n$ et tout cône convexe ouvert non vide Γ de $\mathbb{R}^n$, une application

$b : \mathcal{O}((\omega+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}) \to \mathcal{B}(\omega)$ linéaire qui satifont aux axiomes (A1), (A2) et (A3) ci-dessous.

Définition : Les sections de $\mathcal{B}$ sont appelées hyperfonctions.

(On trouvera la construction du faisceau $\mathcal{B}$ dans Sato [5] ou dans Schapira [6].

Axiome 1 (compatibilité avec les restrictions).

On se donne ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\omega}$ voisinage ouvert de ω dans $\mathbb{C}^n$ et Γ cône ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$.

(A1) (1) Soient deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ voisinages de ω, $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega}'$ tels que $\tilde{\omega}' \subset \tilde{\omega}$ alors

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{O}((\omega+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}) \qquad b(f) = b(f|_{(\omega+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}'})}$$

(2) Soit ω' ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans ω :

$$\boxed{\omega'\subset\omega \quad f \in ((\omega+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}) \qquad b(f|_{(\omega'+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}}) = b(f)|_{\omega'}}$$

(3) Soit Γ' cône ouvert convexe non vide contenu dans Γ

$$\boxed{\Gamma'\subset\Gamma \quad \forall f \in \mathcal{O}((\omega+i\Gamma)\cap\tilde{\omega}) \qquad b(f|_{(\omega+i\Gamma')\cap\tilde{\omega}}) = b(f)}$$

Axiome 2 .

(A2) Soient ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{B}(\omega)$.

Alors il existe une famille finie $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ de cônes ouverts convexes non vides, un voisinage ouvert complexe $\tilde{\omega}$ de ω et une famille de fonctions holomorphes $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que $f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega+i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{\omega})$ et

$$\boxed{\sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) = u}$$

<u>Axiome</u> 3 (Propriété du "Edge of the Wedge").

Si Γ_α et Γ_β sont deux cônes ouverts de $\mathbb{R}^n$ nous noterons

$\Gamma_{\alpha\beta}$ l'enveloppe convexe de $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$.

(A3) <u>Forme</u> 1 : forme globale.

Soient $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille finie de cônes ouverts convexes non vides.

Pour chaque α soit $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n + i\Gamma_\alpha)$ tel que $\boxed{\sum b(f_\alpha) = 0}$

Alors il existe une famille de fonctions holomorphes $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$ telle que

→ $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n + i\,\Gamma_{\alpha\beta}) \qquad \forall(\alpha,\beta) \in A \times A$

→ $\boxed{g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0} \qquad \forall(\alpha,\beta) \in A \times A$

→ $\forall\, \alpha \in A \qquad \boxed{f_\alpha = \sum_{\beta \in A} g_{\alpha\beta}\Big|_{(\mathbb{R}^n + i\Gamma\alpha)}}$

(A3) <u>Forme</u> 2 : forme locale.

<u>Notation</u> : $\mathcal{O}(\omega + io\Gamma)$ est défini par : $f \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma) \Longleftrightarrow \exists\, U$ ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que :

→ $f \in \mathcal{O}(U)$

→ $\forall\, \omega' \subset\subset \omega \quad \forall\, \Gamma'$ tel que $\Gamma' \cap S^{n-1} \subset\subset \Gamma \cap S^{n-1}$ (S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$)

$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad U \supset (\omega' + i\Gamma) \cap \{z / |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$

ω et $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ étant donnés comme dans la forme 1, soit $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + io\,\Gamma_\alpha)$ et $\boxed{\sum b(f_\alpha) = 0}$. Alors il existe une famille de fonctions holomorphes $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$ telle que

$\rightarrow\ g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\omega+i0\Gamma_{\alpha\beta}) \qquad \forall(\alpha,\beta) \in A\times A$

$\rightarrow\ g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0 \qquad \forall(\alpha,\beta) \in A\times A$

$\rightarrow\ \forall\ \alpha \in A \quad f_\alpha = \sum_{\alpha\in A} g_{\alpha\beta}\big|_{U_\alpha} \qquad (\text{si } f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha))$

Nous admettrons la propriété suivante :

Théorème : Le faisceau $\mathcal{B}$ est flasque.

Rappelons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un ensemble X est flasque si pour tout couple (U,V) d'ouverts de X tels que $U\subset V$, l'application de restriction $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est surjective.

1.3 Hyperfonctions et fonctions analytiques.

Proposition : Le faisceau des fonctions analytiques s'identifie à un sous-faisceau du faisceau des hyperfonctions.

Démonstration : Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction analytique sur ω se prolonge holomorphiquement en une fonction $\tilde{f}$ sur un voisinage complexe $\tilde{\omega}$ de ω . $\tilde{f} \in \mathcal{O}((\omega+i\mathbb{R}^n)\cap\tilde{\omega})$ donc on peut définir $b(\tilde{f}) \in \mathcal{B}(\omega)$. Nous avons donc défini une application linéaire $i : \mathcal{A}(\omega) \rightarrow \mathcal{B}(\omega)$

$$f \mapsto i(f) = b(\tilde{f})$$

$\rightarrow$ $i(f)$ est indépendant du choix de $\tilde{f}$.

En effet si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux prolongements de f , ils coïncident sur un voisinage $\tilde{\omega}$ de ω et donc :

$$b(\tilde{f}_1) - b(\tilde{f}_2) = b((\tilde{f}_1-\tilde{f}_2)\big|_{\tilde{\omega}}) = b(0) = 0 .$$

$\rightarrow$ i est injective.

Soit $f \in \mathcal{A}(\omega)$ telle que $i(f) = 0$ donc $b(\tilde{f}) = 0$.

D'après l'axiome (A3) $\tilde{f} = \tilde{f}_\alpha = g_{\alpha\alpha}$ avec $2g_{\alpha\alpha} = 0$ donc $\tilde{f} = 0$ donc $f = 0$.

Pour chaque ω, $\mathfrak{A}(\omega)$ se plonge dans $\mathfrak{B}(\omega)$ q.e.d.

Remarque : Cette identification est bien compatible avec l'idée intuitive de valeur au bord puisque si on se donne $g \in \mathcal{O}(\tilde{\omega})$ où $\tilde{\omega}$ est un voisinage de ω on a : $i(g_{|\omega}) = b(g)$.

1.4 Valeurs au bord des fonctions holomorphes à croissance lente.

Théorème 1.4.1 : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\omega}$ un voisinage de ω dans $\mathbb{C}^n$ et Γ un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit f une fonction holomorphe sur $(\omega+i\Gamma) \cap \tilde{\omega}$ à croissance lente au voisinage de ω, i.e. :

$$\exists A > 0 \quad \exists C > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall (x+iy) \in (\omega+i\Gamma) \cap \tilde{\omega} \quad |f(x+iy)| \leqslant \frac{C}{|y|^A}.$$

Posons $f_y(x) = f(x+iy)$.

Il existe une distribution T sur ω telle que, pour tout cône Γ' dont l'intersection avec la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est relativement compacte dans $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}$, f_y converge vers T dans $\mathcal{D}'(\omega)$ lorsque y tend vers 0 dans Γ'.

Démonstration : Soit Γ' un cône de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma' \cap \mathbb{S}^{n-1}$ soit relativement compact dans $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}$; il peut être recouvert par un nombre fini de cônes de révolution ouverts tels que chacun d'eux soit strictement contenu dans un cône de révolution, de même axe, lui-même inclus dans Γ.

Par un changement de coordonnées on peut se ramener au cas de deux cônes :

$\Gamma_1 = \{y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^n / |y'| \leqslant k_1 y_1\} \subset \Gamma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n / |y'| \leqslant k_2 y_1\}$ avec $\boxed{k_2 > k_1}$

et donc il suffit de montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{O}((\omega+i\Gamma_2)\cap\tilde{\omega}) \\ f \text{ à croissance lente} \end{array}\right\} \Longrightarrow f_y \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\omega) \text{ si } y \to 0 \text{ dans } \Gamma_1.$$

On sait (Schwartz [7] ch. III §3) que la convergence des distributions est une propriété locale donc il suffit de montrer que chaque point de ω possède un voisinage sur lequel le théorème 1 est vrai. Par une translation on peut se ramener au voisinage de l'origine.

ω et $\tilde{\omega}$ sont ouverts donc il existe une boule B dans $\mathbb{C}^n$ de rayon $2r$, de centre 0 telle que $B\cap\mathbb{R}^n \subset \omega$ et $B\subset\tilde{\omega}$.

Posons $G = \{z \in \mathbb{C}^n / z = x+iy \ ; \ |x| < r \ ; \ 0 < y_1 \leqslant r \ ; \ y_2 = \dots = y_n = 0\}$

$B_0 = \{z \in \mathbb{C}^n / z = x+iy \ ; \ |x| < r \ ; \ y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0\}$

$G_0 = G \cup B_0$.

$G \subset B \subset \tilde{\omega}$; $G \subset G_0 \cap \mathbb{R}^n + i\Gamma_1$, $G_0 \cap \mathbb{R}^n = B_0$ est un voisinage de 0 et de plus si $z \in G$, $z = (z_1,\dots,z_n)$, alors le segment défini par les points z et $(ir, z_2,\dots,z_n)$ est contenu dans G donc on peut définir pour tout $z \in G$:

$P_1 f(z) = \int_{[ir,z_1]} f(t, z_2,\dots,z_n)dt$ et par récurrence $P_1^n f(z) = P_1 \circ P_1^{n-1} f(z)$.

En majorant A au besoin on peut supposer que A n'est pas entier et donc $A = N+\alpha$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$.

Posons $u(z) = P_1^N f(z)$ et $v(z) = P_1 u(z) = P_1^{N+1} f(z)$.

$\forall z \in G \quad |f(z)| \leqslant \dfrac{C}{|y|^A} \leqslant \dfrac{C}{|y_1|^A}$ donc $|P_1 f(z)| \leqslant C\displaystyle\int_{y_1}^{r} \frac{ds}{s^A} \leqslant \frac{C'}{y_1^{A-1}}$,

donc $$|u(z)| \leqslant \frac{C_1}{y_1^{\alpha}} \text{ pour tout } z \in G .$$

Montrons que v se prolonge continûment à G_0.

Soient $y_1 = (y_{1,1},\dots,y_{1n}) = (y_{1,1},y_1')$ et $y_2 = (y_{21},\dots,y_{2n}) = (y_{21},y_2')$ deux points de Γ_1 et soit x tel que $|x| < r$:

$$v(x+iy_1) - v(x+iy_2) = v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x) = \int_{[ir,x_1+iy_{11}]} u(t,x'+iy_1')dt - \int_{[ir,x_1+iy_{21}]} u(t,x'+iy_2')dt$$

$$v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x) = \int_{[ir,x_1+iy_{11}]} [u(t,x'+iy_1') - u(t,x'+iy_2')]dt - \int_{[y_{11},y_{2,1}]} u(x_1+is\,,\,x'+iy_2')ds$$

$$\left|\int_{[y_{11},y_{21}]} u(x_1+is\,,\,x'+iy_2')ds\right| \leqslant C_1 \left|\int_{y_{11}}^{y_{21}} \frac{ds}{s^\alpha}\right| \leqslant C_2\left|\,|y_{11}|^{1-\alpha} - |y_{21}|^{1-\alpha}\right| \leqslant C_2\left|\,|y_1|^{1-\alpha} - |y_2|^{1-\alpha}\right| .$$

Par ailleurs, d'après la formule des accroissements finis :

$$|u(t,x'+iy_1') - u(t,x'+iy_2')| \leqslant |y_1'-y_2'| \quad \sup|\partial u(t)|$$

avec $\sup|\partial u(t)| = \sup\limits_{i=2,\dots,n} \left|\frac{\partial u}{\partial z_i}(t,x'+iy')\right| \qquad (y' = (y_2,\dots,y_n))$

$y_j \in [y_{1j},y_{2j}]$ pour $j = 2,\dots,n$.

Posons $s = \mathfrak{Im}\, t$.

Les points $y' = (y_2,\dots,y_n)$ considérés sont tels que $(s,y') \in \Gamma_1$ donc le polydisque de centre (s,y') et de rayon λs est, pour un λ fixé assez petit, contenu dans Γ_2 et donc d'après les formules de majoration de Cauchy (u est holomorphe) :

$$\sup|\partial u(t)| \leqslant \frac{1}{\lambda s} \sup_{z\in G} |u(z)| \leqslant \frac{C_1}{\lambda} \times \frac{1}{s^{1+\alpha}}$$

$$\left|\int_{[ir,x_1+iy_{11}]} [u(t,x'+iy_1') - u(t,x'+iy_2')dt\right| \leqslant \frac{C_1}{\lambda} |y_1'-y_2'| \int_{y_{11}}^{r} \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \leqslant C_3 |y_1'-y_2'| \times \frac{1}{y_{11}^\alpha} ,$$

donc $|v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x)| \leqslant C_2\left|\,|y_1|^{1-\alpha} - |y_2|^{1-\alpha}\right| + C_3 |y_1'-y_2'| \dfrac{1}{y_{11}^\alpha}$.

On peut recommencer la majoration en remplaçant y_1 par y_2 donc finalement :

$$|v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x)| \leqslant C_4 \; \big| |y_1|^{1-\alpha} - |y_2|^{1-\alpha} \big| + C_5 \; |y_1' - y_2'| \times \frac{1}{(\sup(y_{11}, y_{21}))^\alpha} \, .$$

y_1 et $y_2 \in \Gamma_1$ donc $\sup(y_{11}, y_{12}) \geqslant k_1 \sup(|y_1'|, |y_2'|) \geqslant \frac{k_1}{2} (|y_1' - y_2'|)$

$$|v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x)| \leqslant C_4 \big| |y_1|^{1-\alpha} - |y_2|^{1-\alpha} \big| + C_6 \; |y_1' - y_2'|^{1-\alpha} \, ,$$

$$\|v_{y_1} - v_{y_2}\|_\infty = \sup_{|x|<r} |v_{y_1}(x) - v_{y_2}(x)| \leqslant C_7 \; |y_1 - y_2|^{1-\alpha} \, .$$

Soit $B' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$.

Le filtre des v_y lorsque y parcourt le filtre des voisinages de 0 dans Γ_1 est un filtre de Cauchy donc si $y \to 0$ dans Γ_1, v_y converge vers une fonction <u>continue</u> v_o sur B', convergence dans $\mathscr{C}^o(B')$ donc v_y converge vers v_o au sens des distributions sur B'.

La dérivation par rapport à x_1 est continue de $\mathscr{D}'(B')$ dans lui-même et par ailleurs $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{N+1} v_y(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{N+1} P_1^{N+1} f(x+iy) = f_y(x)$ donc si on pose $T = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{N+1} v_o$ on aura :

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y \in \Gamma_1}} f_y = \lim_{\substack{y \to o \\ y \in \Gamma_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{N+1} v_y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{N+1} \lim_{\substack{y \to o \\ y \in \Gamma_1}} v_y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{N+1} v_o = T \, ,$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Nous allons montrer que, inversement, toute distribution est localement limite de fonctions holomorphes à croissance lente. Pour cela il nous faut tout d'abord étudier les cônes de $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u> : Une partie de S^{n-1} (sphère unité de $\mathbb{R}^n$) sera dite <u>propre</u> si elle engendre dans $\mathbb{R}^n$ un cône <u>saillant convexe</u>.

Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des cônes ouverts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties <u>fermées propres</u> de $\mathbb{S}^{n-1}$.

<u>Définition</u> : Si Γ est un cône de $\mathbb{R}^n$, le <u>polaire</u> Γ^o de Γ est la partie de $\mathbb{S}^{n-1}$ définie par :

$$\Gamma^o = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} / \forall x \in \Gamma \quad \langle x,y\rangle \geqslant 0\} .$$

<u>Proposition</u> : L'application $\Gamma \to \Gamma^o$ est une bijection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$.

Si $\Gamma \in \mathcal{G}$ on a : $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall y \in \Gamma^o \quad \langle x,y\rangle > 0\}$

et $\bar{\Gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall y \in \Gamma^o \quad \langle x,y\rangle \geqslant 0\}$.

<u>Démonstration</u> : a) $\Gamma \in \mathcal{G} \Longrightarrow \Gamma^o \in \mathcal{F}$ donc on a bien une application $\Gamma \to \Gamma^o$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$. En effet si il existait $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que z et $-z$ appartiennent à Γ^o on aurait :

$$\forall x \in \Gamma \quad \langle x,z\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle x,-z\rangle \geqslant 0 \text{ donc } \langle x,z\rangle = 0$$

or Γ est ouvert donc contient une base de $\mathbb{R}^n$ donc $z = 0$ ce qui est impossible puisque $z \in \mathbb{S}^{n-1}$; donc Γ^o engendre un cône saillant.

b) Si $I \in \mathcal{F}$, soit $I^p = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall y \in I \ \langle x,y\rangle > 0\}$,

$I^p = \bigcap_{y \in I} \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x,y\rangle > 0\}$ est une intersection de demi-espace ouverts, donc est ouvert convexe.

$$I \in \mathcal{F} \Longrightarrow I^p \in \mathcal{G} .$$

c) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall y \in \Gamma^o \quad \langle x,y\rangle > 0\} = (\Gamma^o)^p$,

en effet $y \in \Gamma^o \Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x,y\rangle \geqslant 0\} \supset \Gamma$.

$\overline{(\Gamma^o)^p} = \bigcap_{y \in \Gamma^o} \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x,y\rangle \geqslant 0\}$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent Γ donc $\overline{(\Gamma^o)^p} = \bar{\Gamma}$ puisque Γ est convexe. Γ est ouvert convexe donc $\Gamma = (\Gamma^o)^p = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall\, y \in \Gamma^o \quad \langle x,y\rangle > 0\}$.

<u>Proposition</u> : $(\mathbb{R}^n)^o = \emptyset$ et le polaire d'un demi-espace est un point. On a aussi : $\Gamma_1^o \cap \Gamma_2^o = (\text{env. convexe } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))^o$.

<u>Théorème</u> 1.4.2 : Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement <u>fini</u> de S^{n-1} par des fermés propres dont les intersections deux à deux sont de mesure de Lebesgue nulle.

Pour chaque α , soit Γ_α le cône ouvert convexe dont I_α est le polaire.

Soit T une distribution sur $B(o,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leqslant r\}$. Alors pour tout $r' < r$ il existe une famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions holomorphes à croissance lente au voisinage de $\mathbb{R}^n$ telle que $f_\alpha \in \mathcal{O}(B(o,r')+i\Gamma_\alpha)$ et

$$T\big|_{B(o,r')} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io)$$ où $f_\alpha(x+io)$ désigne la limite de f_α au sens du théorème 1.4.1 .

<u>Démonstration</u> : En multipliant T par une fonction χ de classe C^∞ qui vaut 1 sur $B(o,r')$ et 0 en dehors de $B(o,r)$ on se ramène au cas d'une distribution sur $\mathbb{R}^n$, à support compact.

Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier $\hat{T}(\xi) = \langle T_x, e^{-ix\xi}\rangle$ est une fonction analytique, à croissance lente à l'infini.

Posons $f_\alpha(z) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^+\times I_\alpha} e^{+i\rho\langle z,\theta\rangle}\, \hat{T}(\rho\theta)\, \rho^{n-1}\, d\rho\, d\theta \qquad (\rho \in \mathbb{R}^+ \quad \theta \in I_\alpha)$.

$\hat{T}$ est à croissance lente $(|\hat{T}(\rho\theta)| \leqslant C\, \rho^N)$ donc si $\mathcal{I}m\langle z,\theta\rangle$ reste strictement positif sur I_α , l'intégrale est convergente, en particulier si $z \in \mathbb{R}^n + i\Gamma_\alpha$.

On a alors : $$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_j}(z) = (2\pi)^{-n} \iint \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(e^{+i\rho\langle z,\theta\rangle}\right) \hat{T}(\rho\theta)\rho^{n-1}\, d\rho\, d\theta = 0 \qquad j = 1,\dots,n ,$$

donc f_α <u>est à croissance lente au voisinage de</u> $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème 1.4.1 on peut donc définir $f_\alpha(x+io)$ dans $\mathcal{D}'$ par :

$$\langle f_\alpha(x+io)\,,\,\varphi(x)\rangle = \lim_{\substack{y \to o \\ y\in\Gamma_\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x+iy)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle f_\alpha(x+io)\,,\,\varphi(x)\rangle = \lim_{\substack{y \to o \\ y\in\Gamma_\alpha}} \iiint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\times I_\alpha} e^{+i\rho\langle x+iy,\theta\rangle}\,\hat{T}(\rho\theta)\rho^{n-1}\,\varphi(x)\,dx\,d\rho\,d\theta$$

$$= \lim_{\substack{y \to o \\ y\in\Gamma_\alpha}} \iint_{\mathbb{R}^+\times I_\alpha} e^{-\rho\langle y,\theta\rangle}\,\hat{T}(\rho\theta)\rho^{n-1}\,d\rho\,d\theta \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho\langle x,\theta\rangle}\,\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{\substack{y \to o \\ y\in\Gamma_\alpha}} \iint_{\mathbb{R}^+\times I_\alpha} e^{-\rho\langle y,\theta\rangle}\,\hat{T}(\rho\theta)\hat{\varphi}(-\rho\theta)\rho^{n-1}d\rho\,d\theta\ .$$

$\varphi \in \mathcal{E}^\infty_o(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}(\rho\theta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donc $\hat{T}(\rho\theta)\hat{\varphi}(-\rho\theta)\rho^{n-1}$ est intégrable donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\langle f_\alpha(x+io)\,,\,\varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}^+\times I_\alpha} \hat{T}(\rho\theta)\hat{\varphi}(-\rho\theta)\rho^{n-1}\,d\rho\,d\theta$$ et puisque $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$:

$$\Big\langle \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(x)\hat{\varphi}(-x)dx = \langle T\,,\,\hat{\hat{\varphi}}(-x)\rangle = \langle T\,,\,\varphi\rangle$$

donc
$$\boxed{T = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io)}$$
q.e.d.

1.5 <u>Les théorèmes classiques du "Edge of the Wedge"</u>.

Pour plus de détails voir Morimoto [9] .

a) <u>Théorèmes de Bogolyubov</u>.

Soient Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et Ω un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

Soient f^+ et f^- deux fonctions holomorphes respectivement sur $\Omega\cap(U+i\Gamma)$ et $\Omega\cap(U-i\Gamma)$.

<u>Hypothèse</u> : 1) <u>version continue du théorème</u> :

f^+ et f^- se prolongent continûment à U et $f^+|_U = f^-|_U$.

2) <u>version distribution</u> :

Il existe une distribution T sur U telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_C(U) \qquad \langle T,\varphi\rangle = \lim_{\substack{y\to o\\ y\in\Gamma}} \int_U f^+(x+iy)\varphi(x)dx = \lim_{\substack{y\to o\\ y\in\Gamma}} \int_U f^-(x-iy)\varphi(x)dx \ .$$

3) <u>version hyperfonction</u> :

Les hyperfonctions sur U $b(f^+)$ et $b(f^-)$ sont égales.

<u>Conclusion</u> : Alors il existe un voisinage Ω' de U , avec $\Omega' \subset \Omega$ tel que si f^+ et f^- vérifient une des hypothèses ci-dessus, il existe une fonction f holomorphe sur Ω' telle que :

$f \in \mathcal{O}(\Omega')$ $\quad f = f^+$ sur $\Omega' \cap U+i\Gamma$ et $f = f^-$ sur $\Omega' \cap U-i\Gamma$.

b) <u>Théorèmes d'Epstein</u>.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ et Γ l'enveloppe convexe de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Soit Ω un voisinage complexe d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

Alors il existe $\Omega' \subset \Omega$ voisinage de U tel que si f_1 et f_2 sont deux fonctions holomorphes respectivement sur $\Omega \cap U+i\Gamma_1$ et $\Omega \cap U+i\Gamma_2$ et vérifient l'analogue d'une des hypothèses 1) 2) ou 3) du théorème précédent, il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega' \cap U+i\Gamma)$ telle que

$f = f_1$ sur $\Omega' \cap U+i\Gamma_1$ et $f = f_2$ sur $\Omega' \cap U+i\Gamma_2$.

c) <u>Théorème de Martineau</u>.

Soit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille finie de cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque α , soit f_α une fonction holomorphe et à croissance lente dans

$\mathbb{R}^n+i\Gamma$.

Soit $\Gamma_{\alpha\beta}$ l'enveloppe convexe de $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$.

(i) Il y a équivalence entre :

a) $\forall(\alpha,\beta) \in A\times A \quad \exists f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n+i\Gamma_{\alpha\beta})$ avec

$$f_{\beta\alpha} = -f_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad f_\alpha = \sum_{\beta\in A} f_{\alpha\beta}\Big|_{\mathbb{R}^n+i\Gamma_\alpha} .$$

b) Il existe une famille $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ qui vérifie les conditions du (a) et telle que de plus chaque $f_{\alpha\beta}$ soit à croissance lente.

(ii) Si les fonctions à croissance lente f_α vérifient $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io) = 0$ au sens des distributions, alors il existe une famille $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ vérifiant les conditions équivalentes de (i).

<u>Corollaire</u> : Si $\mathcal{B}$ est le faisceau qui vérifie les axiomes (A1), (A2) et (A3) alors le faisceau des distributions $\mathcal{D}'$ sur $\mathbb{R}^n$ s'identifie à un sous faisceau de $\mathcal{B}$.

<u>Démonstration du corollaire</u> : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T une distribution sur ω .

Soit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille finie de cônes ouverts convexes dont les polaires $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ forment un recouvrement de S^{n-1} par des fermés dont les intersections deux à deux sont de mesure de Lebesgue nulle.

Soit ω' un ouvert relativement compact de ω . D'après le théorème 1.4.2 il existe des fonctions holomorphes f_α à croissance lente sur $\omega'+i\Gamma_\alpha$ telles que

$$T|_{\omega'} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha\,(x+io) .$$

On peut donc définir l'élément de $\mathcal{B}(\omega')$: (où b est l'application valeur au bord de l'axiome (A1))

$$B_{\omega'}(T) = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) .$$

Supposons que l'on ait une deuxième famille de cônes $(\Delta_\beta)_{\beta\in B}$ et des $g_\beta \in \mathcal{O}(\omega'+i\Gamma_\beta)$ tels que $T|_{\omega'} = \sum_{\beta\in B} g_\beta(x+io)$. Soit $B'_{\omega'}(T) = \sum b(g_\beta)$

$\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io) - \sum_{\beta\in B} g_\beta(x+io) = 0$ sur ω' donc d'après le théorème de Martineau (ii) il existe une famille $(h_{\gamma\gamma'})_{(\gamma,\gamma')\in(A\cup B)\times(A\cup B)}$ qui vérifie :

$$h_{\gamma\gamma'} + h_{\gamma'\gamma} = 0 \qquad f_\alpha = \sum_{\gamma'\in A\cup B} h_{\alpha\gamma'} \quad \text{et} \quad g_\beta = -\sum_{\gamma'\in A\cup B} h_{\beta\gamma'} \qquad (\alpha,\beta)$$

donc $$B_{\omega'}(T) - B'_{\omega'}(T) = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) - \sum_{\beta\in B} b(g_\beta) = 0 .$$

$B_{\omega'}(T)$ ne dépend donc que de T et de ω'.

Soit $(\omega_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de ω par des ouverts relativement compacts dans ω. La famille $(B_{\omega_j}(T))_{j\in J}$ définit une hyperfonction et une seule ($\mathcal{B}$ est un faisceau) que nous noterons $B_\omega(T)$.

(D'après l'axiome A1 on a $B_{\omega_i\cap\omega_j}(T) = B_{\omega_i}(T)|_{\omega_i\cap\omega_j} = B_{\omega_j}(T)|_{\omega_i\cap\omega_j}$ $\forall i,j$).

Nous avons donc défini une application $B_\omega : \mathcal{D}'(\omega) \to \mathcal{B}(\omega)$ pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, il reste à montrer qu'elle est injective.

B_ω est manifestement une application linéaire.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\omega)$ telle que $B_\omega(T) = 0$ donc pour tout j $B_{\omega_j}(T) = 0$.

On a $T|_{\omega_j} = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x+io)$ et $\sum b(f_\alpha) = 0$ donc d'après l'axiome (A3) il existe une famille $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in A\times A}$ telle que :

$$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\omega_j+i\Gamma_{\alpha\beta}) \qquad g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0 \quad \sum_{\beta\in A} g_{\alpha\beta} = f_\alpha .$$

D'après le théorème de Martineau (i) il existe une famille $(h_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ qui vérifie : $h_{\alpha\beta}+h_{\beta\alpha}=0$ $\quad f_\alpha=\sum_{\beta\in A} g_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ à croissance lente sur $\mathbb{R}^n+i\Gamma_{\alpha\beta}$.

On a alors : $T|_{\omega_j}=\sum f_\alpha(x+io)=\sum g_{\alpha\beta}(x+io)=0$

donc $T=0$. q.e.d.

$B_\omega : \mathcal{D}'(\omega)\to\mathcal{B}(\omega)$ est donc une application linéaire injective.

2. Propriétés élémentaires des hyperfonctions.

2.1 Opérations élémentaires sur les hyperfonctions.

a) Multiplication d'une hyperfonction par une fonction analytique.

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u\in\mathcal{B}(\omega)$.

D'après l'axiome (A2) il existe une famille finie de cônes ouverts convexes $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ et une famille $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que :

$$f_\alpha\in\mathcal{O}(\omega+io\Gamma_\alpha) \quad \text{et} \quad u=\sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)\ .$$

Soit $\varphi\in\mathcal{A}(\omega)$ et $\tilde{\varphi}$ un prolongement holomorphe de φ à un voisinage complexe de ω.

On pose par définition : $\boxed{\varphi u=\sum_{\alpha\in A} b(\tilde{\varphi}f_\alpha)\in\mathcal{B}(\omega)}$.

Il faut montrer que cette définition est indépendante des choix de $\tilde{\varphi}$ et de la décomposition de u.

→ Si $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ sont deux prolongements de φ ils coïncident sur un voisinage de ω donc d'après l'axiome (A1) :

$$\forall\alpha\in A \quad b(\tilde{\varphi}_1 f_\alpha)=b(\tilde{\varphi}_2 f_\alpha)\ .$$

→ Montrons que φu est indépendant de la décomposition de u. Par linéarité il suffit de montrer que $u = 0 \Longrightarrow \varphi u = 0$.

Soient donc $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ tels que $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma_\alpha)$ et $\sum b(f_\alpha) = 0$; d'après l'axiome (A3) forme 2 il existe des fonctions $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ telles que

$$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma_{\alpha\beta}) \quad g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad f_\alpha = \sum_{\beta\in A} g_{\alpha\beta} ,$$

donc
$$\sum_{\alpha\in A} b(\tilde{\varphi} f_\alpha) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times A} b(\tilde{\varphi} g_{\alpha\beta}) = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Remarque</u> : La définition de la multiplication est compatible avec la multiplication des fonctions analytiques lorsqu'on identifie le faisceau des fonctions analytiques à un sous-faisceau de $\mathcal{B}$:

Soient $\varphi \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in \mathcal{A}(\omega)$, $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f}$ deux prolongements holomorphes de φ et f, et soit $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

$$\varphi i(f) = \varphi b(\tilde{f}) = b(\tilde{\varphi}\tilde{f}) = i(\varphi f) \qquad \text{q.e.d.}$$

b) <u>Dérivation des hyperfonctions.</u>

Soit $u \in \mathcal{B}(\omega)$, $u = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma_\alpha)$.

On pose par définition $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{\alpha\in A} b\left(\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\right)}$.

On montre comme pour la multiplication que cette définition est indépendante de la décomposition de u.

<u>Remarque</u> : Cette définition est compatible avec la dérivation des fonctions analytiques :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(i(f)) = b\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\tilde{f}\right) = b\left(\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\right) = i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) .$$

c) Action d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques.

$$P(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant M \\ \alpha\in\mathbb{N}^n}} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \qquad a_\alpha \text{ analytique.}$$

Définition 1 : Il suffit d'appliquer successivement les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction analytique définies précédemment.

Définition 2 : Pour chaque α soit $\tilde{a}_\alpha$ un prolongement holomorphe de a_α et soit
$$\tilde{P}(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum \tilde{a}_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

si $u = \sum_{j\in J} b(f_j)$ on pose $\boxed{P(x,\frac{\partial}{\partial x})u = \sum_{j\in J} b(\tilde{P}(z,\frac{\partial}{\partial z})f_j)}$.

On vérifie immédiatement que les deux définitions coïncident et sont compatibles avec l'action sur les fonctions analytiques.

2.2 Précisions sur l'axiome (A2).

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des ouverts d'holomorphie. Pour les démonstrations voir Hörmander [2] .

Définition 1 : Ω ouvert de $\mathbb{C}^n$ est un ouvert d'holomorphie si il n'existe pas deux ouverts Ω_1 et Ω_2 vérifiant :

(a) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$;

(b) Ω_2 est connexe et $\Omega_2 \not\subset \Omega$;

(c) $\forall u \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists u_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tel que $u = u_2$ dans Ω_1 .

Définition 2 : Ω ouvert de $\mathbb{C}^n$ est un ouvert pseudo-convexe si il existe une fonction plurisousharmonique u telle que :

$$\forall c \in \mathbb{R} \qquad \Omega_c = \{z/z\in\Omega \ , \ u(z) < c\} \subset\subset \Omega \ .$$

Théorème : Il y a identité entre ouverts d'holomorphie et ouverts pseudo-convexes.

Propriétés : → Si Ω et Ω' sont deux ouverts d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ $\Omega \cap \Omega'$ et $\Omega \times \Omega'$ sont des ouverts d'holomorphie respectivement de $\mathbb{C}^n$ et de $\mathbb{C}^{2n}$.

→ Les ouverts convexes sont des ouverts d'holomorphie.

Proposition : Soient ω_1 et ω_2 deux ouverts d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ tels que $\omega_1 \cup \omega_2$ soit encore d'holomorphie.

Alors $\forall f \in \mathcal{O}(\omega_1 \cap \omega_2)$ $\exists f_1 \in \mathcal{O}(\omega_1)$ $\exists f_2 \in \mathcal{O}(\omega_2)$ tels que

$$f_1|_{\omega_1 \cap \omega_2} - f_2|_{\omega_1 \cap \omega_2} = f \ .$$

Théorème de Grauert : Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ possède dans $\mathbb{C}^n$ un système fondamental de voisinages qui sont des ouverts d'holomorphie.

Nous pouvons maintenant étudier comment une hyperfonction se décompose en valeurs au bord de fonctions holomorphes.

Proposition 2.2.1 : Soit $u \in \mathcal{B}(\omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ et une famille de fonctions holomorphes $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ qui vérifient $f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega})$ pour $\tilde{\omega}$ voisinage complexe de ω, $u = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha)$ et enfin si Γ_α° est le polaire de Γ_α (cf § 1.4) diamètre de $\Gamma_\alpha^\circ \leqslant \varepsilon$.

Démonstration : Le faisceau $\mathcal{B}$ étant flasque, on peut supposer que ω est convexe.

D'après l'axiome (A2), $u = \sum b(f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega})$ où Γ_α est un cône ouvert convexe et d'après le théorème de Grauert on peut choisir $\tilde{\omega}$ pseudo-convexe.

Si le diamètre de Γ_α^o est supérieur à ε, soit H_α un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ qui partage Γ_α^o en deux sous-ensembles tels que le diamètre de l'un d'eux soit égal à ε.

Soient E_α^+ et E_α^- les deux demi-espaces fermés déterminés par H_α, soit δ la droite normale à H_α et $\delta^+ = E_\alpha^+ \cap \delta$, $\delta^- = E_\alpha^- \cap \delta$. On a $\Gamma_\alpha \cap \delta = \emptyset$. Posons $\Gamma_\alpha^+ = \Gamma_\alpha + \delta^+ = \overbrace{\mathrm{conv}(\Gamma_\alpha \cup \delta^+)}^{o}$, $\Gamma_\alpha^- = \Gamma_\alpha + \delta^-$. $\omega + i\Gamma_\alpha^+$ et $\omega + i\Gamma_\alpha^-$ sont convexes et leur intersection est $\omega + i\Gamma_\alpha$.

Les ouverts pseudo-convexes sont stables par intersection donc :

$\Omega^+ = (\omega + i\Gamma_\alpha^+) \cap \tilde{\omega}$, $\Omega^- = ((\omega + i\Gamma_\alpha^-) \cap \tilde{\omega})$ et $\Omega^+ \cup \Omega^- = (\omega + i(\Gamma_\alpha + \delta)) \cap \tilde{\omega}$ sont pseudo-convexes donc f_α qui est holomorphe sur $\Omega^+ \cap \Omega^- = (\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega}$ se décompose en $f_\alpha = f_\alpha^+ + f_\alpha^-$ avec $f_\alpha^{\pm} \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha^{\pm}) \cap \tilde{\omega})$.

$(\Gamma_\alpha^{\pm})^o = \Gamma_\alpha^o \cap E^{\pm}$ donc en itérant le procédé on peut écrire :

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} f_\alpha^i \quad \text{avec} \quad f_\alpha^i \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha^i) \cap \tilde{\omega}) \quad \text{et} \quad \mathrm{diam}(\Gamma_\alpha^i) \leqslant \varepsilon$$

et ceci pour chaque α. D'où $u = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{n_\alpha} b(f_\alpha^i)$. q.e.d.

<u>Théorème</u> 2.2.1 : Soit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille finie de cônes ouverts convexes et supposons que les intérieurs des polaires des Γ_α recouvrent la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$. Alors pour toute hyperfonction $u \in \mathcal{B}(\omega)$ il existe des $f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega})$ pour $\tilde{\omega}$ voisinage de ω, telles que

$$u = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha).$$

<u>Démonstration</u> : Soit $U_\alpha = \widehat{\overset{\circ}{\Gamma}_\alpha}$. $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

L'application <u>continue</u> $x \mapsto \sup_{\alpha \in A} d(x, \complement U_\alpha)$ ne s'annule pas sur le <u>compact</u> $\mathbb{S}^{n-1}$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre $\leqslant \varepsilon$ soit contenu dans l'un des U_α .

D'après la proposition précédente, $u = \sum_{j \in J} b(f_j)$, $f \in \mathcal{O}((\omega + i\Delta_j) \cap \tilde{\omega})$ avec diam $\overset{\circ}{\Delta}_j \leqslant \varepsilon$. Pour chaque j choisissons un $\alpha(j)$ tel que $\overset{\circ}{\Delta}_j \subset U_{\alpha(j)}$ et donc $\Gamma_{\alpha(j)} \subset \Delta_j$. Alors $f_j \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_{\alpha(j)}) \cap \tilde{\omega})$ et on a

$$u = \sum_{\alpha \in A} b\Big(\sum_{\{j/\alpha(j)=\alpha\}} f_j \Big) . \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Remarque</u> : Nous démontrerons un résultat plus fort dans le § 1.2.4 de la 2è partie : si les $(\overset{\circ}{\Gamma}_\alpha)_{\alpha \in A}$ (et pas nécessairement leurs intérieurs) recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$ on peut encore écrire :

$$u = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha) \quad \text{avec} \quad f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega}) .$$

<u>Proposition</u> 2.2.2 : Supposons que $u \in \mathcal{B}(\omega)$ ait deux décompositions :

$u = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha) = \sum_{\beta \in B} b(g_\beta)$ avec $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + io\Gamma_\alpha)$ et $g_\beta \in \mathcal{O}(\omega + io\Gamma_\beta)$.

Si $M = \bigcup_{\alpha \in A} \overset{\circ}{\Gamma}_\alpha$ et $N = \bigcup_{\beta \in B} \overset{\circ}{\Gamma}_\beta$, il existe des cônes $(\Gamma_\gamma)_{\gamma \in}$ et des fonctions $h_\gamma \in \mathcal{O}(\omega + io\Gamma_\gamma)$ avec $u = \sum_{\gamma \in C} b(h_\gamma)$ et $\bigcup_{\gamma \in C} \overset{\circ}{\Gamma}_\gamma \subset M \cap N$.

<u>Preuve</u> : $\sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha) - \sum_{\beta \in B} b(g_\beta) = 0$ donc d'après l'axiome (A3) il existe des fonctions $(h_{\gamma\gamma'})_{(\gamma,\gamma') \in A \cup B \times A \cup B}$ telles que $h_{\gamma\gamma'} \in \mathcal{O}(\omega + io\Gamma_{\gamma\gamma'})$

$\Gamma_{\gamma\gamma'} = \operatorname{conv}(\Gamma_\gamma \cup \Gamma_{\gamma'})$

$$h_{\gamma\gamma'} + h_{\gamma'\gamma} = 0 \qquad f_\alpha = \sum_{\gamma \in A \cup B} h_{\alpha\gamma} \quad \text{et} \quad g_\beta = -\sum_{\gamma \in A \cup B} h_{\beta\gamma} ,$$

donc $u = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\gamma \in A} b(h_{\alpha\gamma}) + \sum_{\alpha \in A} \sum_{\gamma \in B} b(h_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} b(h_{\alpha\beta})$.

Prenons $C = A \times B \quad \Gamma_{(\alpha,\beta)} = \mathrm{conv}(\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta)$.

On a $\quad u = \sum_{\gamma \in C} b(h_\gamma)$ avec $h_\gamma \in \mathcal{O}(\omega + io\Gamma_\gamma)$,

et enfin

$$\Gamma^o_\gamma = \Gamma^o_{(\alpha,\beta)} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subset M \cap N \text{ pour tout } (\alpha,\beta) \in A \times B .$$

Remarque : Si $M \cap N = \emptyset$ u est analytique car pour tout $\gamma = (\alpha,\beta)$ $\Gamma_\gamma = \mathbb{R}^n$.

2.3 Spectre singulier d'une hyperfonction.

Définition : Soit $u \in \mathcal{B}(\omega)$. Le spectre singulier de u , noté SSu , est la partie fermée de $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$ définie par : $(x_o,\xi^o) \notin SSu$ si et seulement si il existe un voisinage V de x_o , une famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cônes ouverts convexes avec $\xi^o \notin \Gamma^o_\alpha$ pour tout α et des fonctions $f_\alpha \in \mathcal{O}(V + io\Gamma_\alpha)$ tels que $u|_V = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha)$.

Définition : Si $u \in \mathcal{B}(\omega)$, le support singulier analytique de u , noté supp sing u , est le complémentaire du plus grand ouvert de ω sur lequel u est analytique.

On désigne par π la projection : $\pi : \omega \times \mathbb{S}^{n-1} \to \omega$.

Proposition 2.3.1 : $\pi(SSu) = \text{supp sing } u$.

Lemme : Soient $u \in \mathcal{B}(\omega)$, $x_o \in \omega$ et $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de cônes ouverts convexes tels que $\{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} / (x_o,\xi) \in SSu\} \subset \bigcup_{\alpha \in A} \overset{o}{\widehat{\Gamma^o_\alpha}}$.

Alors il existe un voisinage V de x_o , et des fonctions $f_\alpha \in \mathcal{O}(V + io\Gamma_\alpha)$ telles que $u|_V = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha)$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $W_\alpha = \overset{\frown}{\Gamma^o_\alpha}$. $K = S^{n-1} \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha)$ est un compact.

Si $\xi \in K$ $(x_o, \xi) \notin SSu$ donc par définition de SSu :

$\forall \xi \in K$ $\exists V_\xi$ voisinage de x_o $\exists (\Delta_j^\xi)_{j \in J_\xi}$ famille de cônes ouverts convexes

$\exists f_j^\xi \in \mathcal{O}(V_\xi + io\Delta_j^\xi)$ tels que $u|_{V_\xi} = \sum_{j \in J_\xi} b(f_j^\xi)$ et $\xi \notin (\Delta_j^\xi)^o$ $\forall j \in J_\xi$.

Puisque $(\Delta_j^\xi)^o$ est fermé il existe un voisinage U_ξ de ξ , ouvert dans S^{n-1} et tel que $(\Delta_j^\xi)^o \cap U_\xi = \emptyset$ pour tout $j \in J_\xi$.

Par compacité K est recouvert par un nombre fini de U_ξ , soient $U_{\xi_1}, \ldots, U_{\xi_m}$.

Nous noterons $V_{\xi_i} = V_i$, $U_{\xi_i} = U_i$, $\Delta_j^{\xi_i} = \Delta_j^i$, $f_j^{\xi_i} = f_j^i$ et $J_{\xi_i} = J_i$.

Si $V = \bigcap_{i=1}^m V_i$ $u|_V = \sum_{j \in A_1} b(f_j^1) = \ldots = \sum_{j \in A_m} b(f_j^m)$

avec $\bigcup_{j \in A_1} (\Delta_j^1)^o \subset \complement U_1 , \ldots , \bigcup_{j \in A_m} (\Delta_j^m)^o \subset \complement U_m$.

Il résulte de la proposition 2.2.2 que $u|_V$ peut se mettre sous la forme :

$u|_V = \sum_{\lambda \in \Lambda} b(g_\lambda)$ avec $g_\lambda \in \mathcal{O}(V + io\Delta_\lambda)$ et $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda^o \subset \bigcap_{i=1}^n \complement U_i$,

or $\bigcap_{i=1}^n \complement U_i = \complement \bigcup_{i=1}^n U_i \subset \complement K = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ donc $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda^o \subset \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \overset{\frown}{\Gamma^o_\alpha}$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre $\leqslant \varepsilon$ rencontrant $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda^o$ soit contenu dans l'un des W_α . D'après la proposition 2.2.1 et sa démonstration on peut écrire $u|_V = \sum_{\mu \in M} b(h_\mu)$ avec $h_\mu \in \mathcal{O}(V + io\Gamma_\mu)$ diam $\Gamma_\mu^o \leqslant \varepsilon$ et $\bigcup_{\mu \in M} \Gamma_\mu^o = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda^o$.

$\forall \mu$ $\exists \alpha(\mu)$ $\Gamma_\mu^o \subset W_{\alpha(\mu)} \subset \Gamma^o_{\alpha(\mu)}$. Choisissons un $\alpha(\mu)$ pour chaque μ .

$u|_V = \sum_{\alpha \in A} b(\sum_{\alpha = \alpha(\mu)} h_\mu)$ avec $\sum_{\alpha = \alpha(\mu)} h_\mu \in \mathcal{O}(V + io\Gamma_\alpha)$ car $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_\mu$ si $\alpha = \alpha(\mu)$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Démonstration de la proposition 2.3.1 :

a) Si $x_0 \notin$ supp sing u , il existe un voisinage V de x_0 sur lequel u est analytique et donc se prolonge holomorphiquement à un voisinage complexe $\tilde{V}$ de V en une fonction $\tilde{u} \in \mathcal{O}(\tilde{V})$.

$u = b(\tilde{u})$ avec $\tilde{u} \in \mathcal{O}((V+i\mathbb{R}^n) \cap \tilde{V})$ et puisque $(\mathbb{R}^n)^o = \emptyset$ on en déduit que $\forall\, \xi_o \in \mathbb{S}^{n-1}$ $(x_o, \xi^o) \notin SSu$ donc $x_o \notin \pi(SSu)$ donc $\pi(SSu) \subset$ supp sing u .

b) Soit $x_o \notin \pi(SSu)$. $\{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}/(x_o,\xi) \in SSu\} = \emptyset$ donc on peut appliquer le lemme à la famille de cônes composée de l'unique cône $\mathbb{R}^n$: il existe V voisinage de x_o et $f \in \mathcal{O}(V+io\mathbb{R}^n)$ $u|_V = b(f)$ donc $u \in \mathcal{a}(V)$ et $x_o \notin$ supp sing u . D'où $\pi(SSu) \supset$ supp sing u .

Exemples :

(1) Soit log z une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.

Alors $\log(x+io) - \log(x-io) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -2i\pi & \text{si } x > 0 \end{cases}$,

donc $$Y(x) = \frac{1}{2i\pi}\,(\log(x-io) - \log(x+io)) .$$

Dans $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées x_1, x_2 :

$$Y(x_1) = \frac{1}{2i\pi}\,[b(f_2) - b(f_1)]$$

avec $f_1(z_1,z_2) = \log z_1$ pour $\mathfrak{Im}\, z_1 > 0$ $f_2(z_1,z_2) = \log z_1$ pour $\mathfrak{Im}\, z_1 < 0$, pour $j = 1,2$ on a $f_j \in \mathcal{O}(R^2+i\Gamma_j)$ et $\Gamma_1 = \{y_1 > 0\}$ $\Gamma_2 = \{y_1 < 0\}$, donc $SSY(x_1) \subset \{(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)/x_1 = x_2 = 0 \ \ \xi_2 = 0 \ \ \xi_1 = \pm 1\}$.

Comme le front d'onde C^∞ de $Y(x_1)$ est égal à ce dernier ensemble, il en est de même de $SSY(x_1)$.

(2) Soit H_o une droite dont la normale n'est pas une direction de $SSY(x_1)$, H_t des hyperplans parallèles à H_o dépendant régulièrement de t , $Y|_{H_t}$ est la restriction de Y à H_t . Alors $t \mapsto Y|_{H_t}$ est une application régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}'$.

Dans une direction de $SSY(x_1)$ on ne peut toujours définir la trace de Y : En un point de $\{x_1 = 0\}$ on ne peut définir la trace sur la droite $\{x_1 = 0\}$.

Ce résultat sera généralisé dans le paragraphe suivant.

2.4 Trace d'une hyperfonction. Produit de deux hyperfonctions.

2.4.1 : Trace d'une hyperfonction.

Théorème 2.4.1 : Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $(p,q \geqslant 1)$. Si une hyperfonction $u \in B(\omega)$ est telle que $SSu \cap \{(x,0;0,\tau) | (x,0) \in \omega , \tau \in S^{q-1}\} = \emptyset$, on peut définir la restriction de u à $\mathbb{R}^p \cap \omega$, notée $u\ (x,0)$: $u(x,0)$ est alors un élément de $B(\omega \cap \mathbb{R}^p)$. De plus, $SSu(x,0) \subset \{(x,\xi) | x \in \omega \cap \mathbb{R}^p ;$ $\exists\, \tau \in S^{q-1}$, $(x,0;\xi,\tau) \in SSu\}$.

Démonstration : Soit (x_o,ξ_o) tel que : $\forall\, \tau \in S^{q-1}$, $(x_o,0;\xi_o,\tau) \notin SSu$ et $(x_o,0) \in \omega$. Puisque $SSu \cap \{(x,0;0,\tau) | (x,0) \in \omega , \tau \in S^{q-1}\} = \emptyset$, ξ_o est non nul. $\{(\xi,\tau) | (x_o,0;\xi,\tau) \in SSu\}$ et $\{(\xi_o,\tau) | \tau \in S^{q-1}\}$ sont des fermés disjoints de S^{p+q-1} et il existe donc une famille finie $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ de cônes ouverts convexes non vides de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tels que :

$$\forall\, \alpha \in A ,\ \Gamma_\alpha^o \cap \{(\xi_o,\tau) | \tau \in S^{q-1}\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{(\xi,\tau) | (x_o,0;\xi,\tau) \in SSu\} \subset \bigcup_{\alpha\in A} \overset{\circ}{\widehat{\Gamma_\alpha^o}} .$$

D'après le lemme de la prop. 2.3.1 , il existe un voisinage V de $(x_o,0)$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et des fonctions $f_\alpha \in \mathcal{O}(V+io\Gamma_\alpha)$ tels que : $u_{|V} = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$.

Puisque $I = \{(\xi_o,\tau) | \tau \in S^{q-1}\}$ est le polaire de $H_o = \{(x,0) | \langle x,\xi^o\rangle \geqslant 0\}$, et que I et Γ_α^o sont des parties disjointes de S^{n-1} , l'enveloppe convexe de H_o et de Γ_α est égale à $\mathbb{R}^n$. Si donc $x \in \Gamma_\alpha$, on a :

$$\exists y \in \Gamma_\alpha \,, \exists z \in H_o \,, -x = y+z \,.$$

D'où $-z = x+y \in \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\alpha$.

Il en résulte que $-z \in \Gamma_\alpha \cap H_o \subset \Gamma_\alpha \cap \mathbb{R}^p$. Pour tout $\alpha \in A$, $\Gamma_\alpha \cap \mathbb{R}^p$ est non vide : $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \mathbb{R}^p$ est donc un cône ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^p$.

On peut donc poser : $u(x,0)_{|V\cap\mathbb{R}^p} = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha(z,0))$, $f_\alpha(z,0)$ étant holomorphe dans $V\cap\mathbb{R}^p + i\Gamma'_\alpha$. Il est immédait que $u(x,0)$ ne dépend pas du choix des fonctions f_α dont u est la valeur au bord, l'application $f(z,\tau) \mapsto f(z,0)$ étant linéaire. Enfin, puisque le polaire de Γ'_α est l'enveloppe convexe de Γ_α^o et de $\{0\} \times S^{q-1}$ et que Γ_α^o ne rencontre pas $\{(\xi_o,\tau) | \tau \in S^{q-1}\}$, la décomposition de $u(x,0)_{|V\cap\mathbb{R}^p} = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha(z,0))$ avec $x_o \in V\cap\mathbb{R}^p$, $f_\alpha \in \mathcal{O}(V\cap\mathbb{R}^p + i\Gamma'_\alpha)$ et $\xi_o \notin \Gamma'^o_\alpha$ montre que $(x_o,\xi_o) \notin SSu(x,0)$.

<u>Remarque</u> : L'inclusion entre $SSu(x,0)$ et $\{(x,\xi) | \exists \tau \,, (x,0;\xi,\tau) \in SSu\}$ peut être stricte. Par exemple, si $u(x_1,x_2) = Y(x_1+x_2) + Y(x_1-x_2)$, on a :

$$SSu = \{(x,x;\xi,-\xi)\} \cup \{(x,-x;\xi,\xi)\} \,, \; SSu(0,x_2) = \emptyset \; (u(0,x_2) = 1)$$

et $\{(x_2,\xi_2) / \exists \xi_1 \,, (0,x_2,\xi_1,\xi_2) \in SSu\} = \{(0,\pm 1)\} \neq \emptyset$.

2.4.2 : Produit tensoriel de deux hyperfonctions.

1) Soient w_1 un ouvert de $\mathbb{R}^{p_1}$, w_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{p_2}$, $u_1 \in B(w_1)$ et $u_2 \in B(w_2)$. Il existe des familles de cônes ouverts convexes non vides de $\mathbb{R}^{p_i}$, $(\Gamma_{\alpha_i})_{\alpha_i \in A_i}$, et des fonctions $f_{\alpha_i} \in \mathcal{O}(w_i + io\Gamma_{\alpha_i})$ tels que pour $i=1,2$:

$$u_i = \sum_{\alpha_i \in A_i} b(f_{\alpha_i}) .$$

Les fonctions $(f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2})(z_1,z_2) = f_{\alpha_1}(z_1)f_{\alpha_2}(z_2)$ sont holomorphes dans $w_1 \times w_2 + io\Gamma_{\alpha_1} \times \Gamma_{\alpha_2}$, $w_1 \times w_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$ et $\Gamma_{\alpha_1} \times \Gamma_{\alpha_2}$ est un cône ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$. De plus, l'application $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi\otimes\psi$ étant bilinéaire, on peut définir sans ambiguité (i.e. indépendamment de la décomposition de u_i en somme des valeurs au bord des f_{α_i}, $i = 1,2$) un élément de $B(w_1 \times w_2)$ par : $\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in A_1\times A_2} b(f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2})$,
$f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2} \in \mathcal{O}(w_1 \times w_2 + io\Gamma_{\alpha_1} \times \Gamma_{\alpha_2})$.

Cette hyperfonction sera notée $\boxed{u_1 \otimes u_2 = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in A_1\times A_2} b(f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2})}$.

2) Spectre singulier d'un produit tensoriel.

Si Γ est un cône de $\mathbb{R}^n$, on pose : $\Gamma^p = \{\xi \in \mathbb{R}^n | \forall x \in \Gamma, \langle x,\xi\rangle \geqslant 0\}$. Γ^o est alors la trace de Γ^p sur S^{n-1}. Si $I_1 \subset S^{p_1-1}$ et $I_2 \subset S^{p_2-1}$, on notera $I_1 \otimes I_2$ la partie de $S^{p_1+p_2-1}$ égale à
$\{(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2) | \xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2 \text{ et } \lambda_1^2+\lambda_2^2 = 1\}$.

Proposition : Si $u_i \in B(w_i)$ où w_i est un ouvert de $\mathbb{R}^{p_i}$ $(i = 1,2)$, on a : $SS\, u_1 \otimes u_2 \subset \{(x_1,x_2;\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2) | (x_i,\xi_i) \in SSu_i (i = 1,2), (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1^2+\lambda_2^2 = 1\} \cup \{(x_1,x_2,\xi_1,0) | x_1\xi_1 \in SSu_1\} \cup \{(x_1,x_2,0,\xi_2) | (x_2,\xi_2) \in SSu_2\}$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^o = \Gamma_1^o \otimes \Gamma_2^o$. Par définition, (x_1,x_2) appartient à $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^p$ si : $\forall \xi_1 \in \Gamma_1$, $\forall \xi_2 \in \Gamma_2$, $\langle x_1,\xi_1\rangle + \langle x_2,\xi_2\rangle \geqslant 0$.

Si $(\xi_1,\xi_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ est fixé, on doit donc avoir :

$$\forall \lambda > 0 \ , \ \langle x_1,\xi_1\rangle + \langle x_2,\lambda\xi_2\rangle \geqslant 0 \ .$$

Soit, $\forall \lambda > 0$, $\langle x_2,\xi_2\rangle \geqslant -\dfrac{\langle x_1,\xi_1\rangle}{\lambda}$.

Donc $\langle x_2,\xi_2\rangle \geqslant 0$ pour tout $\xi_2 \in \Gamma_2$ et $x_2 \in \Gamma_2^p$. De même $x_1 \in \Gamma_1^p$. Réciproquement, $\Gamma_1^p \times \Gamma_2^p$ est évidemment inclus dans $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^p$. Il en résulte que $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^p = \Gamma_1^p \times \Gamma_2^p$ et, en prenant les traces sur $S^{p_1+p_2-1}$, on obtient : $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^o = \Gamma_1^o \otimes \Gamma_2^o$.

Supposons que $(x_1,\xi_1) \notin SSu_1$ ou $(x_2,\xi_2) \notin SSu_2$ soit, pour fixer les idées, $(x_1,\xi_1) \notin SSu_1$.

Il existe donc un voisinage V_1 de x_1 dans $\mathbb{R}^{p_1}$ tel que :

$u_1|_{V_1} = \sum_{\alpha\in A_1} b(f_{\alpha_1})$, $f_{\alpha_1} \in \mathcal{O}(V_1+io\Gamma_{\alpha_1})$ et $\forall \alpha_1 \in A_1$, $\xi_1 \notin \Gamma_{\alpha_1}^o$.

Avec les notations du 1), on a donc :

$$u_1 \otimes u_2|_{V_1 \times w_2} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in A_1\times A_2} b(f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2}) \ , \ f_{\alpha_1} \otimes f_{\alpha_2} \in \mathcal{O}(V_1 \times w_2 + io\Gamma_{\alpha_1} \times \Gamma_{\alpha_2}) .$$

Puisque $\xi_1 \notin \Gamma_{\alpha_1}^o$, la direction (ξ_1,ξ_2) n'est pas dans $\Gamma_{\alpha_1}^o \otimes \Gamma_{\alpha_2}^o$. Donc, $(\xi_1,\xi_2) \notin \Gamma_{\alpha_1}^o \otimes \Gamma_{\alpha_2}^o = (\Gamma_{\alpha_1} \times \Gamma_{\alpha_2})^o$ pour tout $(\alpha_1,\alpha_2) \in A_1 \times A_2$.

Puisque $V_1 \times w_2$ est un voisinage de (x_1,x_2) dans $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$, il résulte de la définition du spectre singulier que $(x_1,x_2;\xi_1,\xi_2)$ n'est pas dans $SS(u_1 \otimes u_2)$.

2.4.3 : Produit de deux hyperfonctions.

Soient w un ouvert de $\mathbb{R}^p$, u et v deux éléments de $B(w)$. $u \otimes v$ est alors un élément de $\mathcal{B}(w \times w)$ qui vérifie :

$SSu \otimes v \subset \{(x,y;\xi,\tau) | (x,\xi) \in SSu$ ou $\xi = 0$ et $(y,\tau) \in SSv$ ou $\tau = 0\}$.

Si C est une partie de $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$, on pose : $\check{C} = \{(x,-\xi) | (x,\xi) \in C\}$.

Si $SSu \cap \check{SSv} = \emptyset$, $SSu \otimes v$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(x,x;\xi,-\xi) | x \in w, \xi \in S^{p-1}\}$. On peut donc définir la trace de $u \otimes v$ sur le sous-espace de $\mathbb{R}^{2p}$ défini par $x = y$. Par définition, $u(x) \otimes v(y)|_{x=y}$ est le produit $u(x)v(x)$ des hyperfonctions u et v : uv est un élément de $\mathcal{B}(w)$.

D'après le théorème 2.4.1 :

$SSuv \subset \{(x,\xi) | x \in w ; \exists\, \tau \in S^{p-1}, (x,x;\xi+\tau,\xi-\tau) \in SSu \otimes v\}$

$SSuv \subset \{(x,\xi) | \exists \tau \in S^{p-1}, (x,\xi+\tau) \in SSu$ et $(x,\xi-\tau) \in SSv ; x \in w\}$
$\cup\, SSu \cup SSv$.

Puisque $\xi = \frac{1}{2}[(\xi+\tau) + (\xi-\tau)]$, la dernière inclusion montre que si les restrictions de u et v à un ouvert w' vérifient $SSu \subset w' \times I$ et $SSv \subset w' \times \mathfrak{J}$, alors $SSuv$ est contenu dans $w' \times \mathrm{Conv}(I,\mathfrak{J})$ où $\mathrm{Conv}(I,\mathfrak{J})$ désigne la trace sur S^{p-1} de l'enveloppe convexe des cônes Γ_I et $\Gamma_{\mathfrak{J}}$ de $\mathbb{R}^p$ engendrés par I et $\mathfrak{J}$. On peut résumer ces résultats dans le

Théorème : Soient u et v deux éléments de $B(w)$ tels que $SSu \cap \check{SSv} = \emptyset$. Le produit tensoriel $u \otimes v$ admet une restriction, notée uv et désignée par produit de u et de v, au sous-espace de $\mathbb{R}^{2p}$ défini par

$x = y$. De plus : $SSuv \subset SSu \cup SSv \cup \{(x,\xi) \mid \exists\, \tau \in S^{p-1}\ ;\ (x,\xi+\tau) \in SSu\ ;$
$(x,\xi-\tau) \in SSv\}$.

2.5 Intégration des hyperfonctions le long des fibres.

Dans toute la suite, on notera (x,t) les variables dans $\mathbb{R}^{n+p}$ $(x \in \mathbb{R}^n\ ,\ t \in \mathbb{R}^p)$ et (z,τ) les variables dans $\mathbb{C}^{n+p}$.

Définition : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et u une hyperfonction définie sur $U \times V$.

On dira que $u(x,t)$ est une hyperfonction indépendante de $t \in V$ sur $U \times V$ s'il existe $v(x) \in \mathcal{B}(U)$ telle que $u(x,t) = v(x) \otimes 1_V$

où 1_V désigne la fonction $1_V : \begin{array}{l} V \to \mathbb{C} \\ x \mapsto 1 \end{array}$

c'est-à-dire qu'il existe des cônes $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ ouverts convexes dans $\mathbb{R}^n$ et des fonctions $f_\alpha(z,\tau) \in \mathcal{O}(U \times V + i o\Gamma_\alpha \times \mathbb{R}^p)$ indépendantes de $\tau \in V+i\mathbb{R}^p$ telles que
$$u = \sum b(f_\alpha)\ .$$

Proposition 1 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert connexe de $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{B}(U\times V)$ est telle que $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0$ sur $U \times V$ alors u est indépendante de $t \in V$ sur $U \times V$ et réciproquement.

Démonstration : Ecrivons $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ et $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ où les V_i et les U_j sont des ouverts relativement compacts respectivement dans V et dans U .

Supposons que u soit indépendant de t sur chaque $U_j \times V_i$, donc $\forall (i,j) \in I \times J \quad \exists\, v_{ij} \in \mathcal{B}(U_j)$ tel que $u_{|U_j\times V_i} = v_{ij} \otimes 1_{V_i}$. Si

$U_j \cap U_k \neq \emptyset$ et $V_i \neq \emptyset$ on a $u_{|(U_j\cap U_k)\times V_i} = v_{ij|U_j\cap U_k} \otimes 1_{V_i} = v_{ik|U_j\cap U_k} \otimes 1_{V_i}$.

Si $V_i \neq \emptyset \quad 1_{V_i} \neq 0$ donc $v_{ij|U_j\cap U_k} = v_{ik|U_j\cap U_k}$.

Pour i fixé les v_{ij} définissent donc une hyperfonction $v_i \in \mathcal{B}(U)$ telle que $$u|_{U\times V_i} = v_i \otimes 1_{V_i} .$$

Si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ $1_{V_i\cap V_j} \neq 0$ donc : $u|_{U\times(V_i\cap V_j)} = v_i \otimes 1_{V_i\cap V_j} =$
$= v_j \otimes 1_{V_i\cap V_j} \Longrightarrow v_i = v_j$; $V_i \cap V_j \neq \emptyset \Longrightarrow v_i = v_j$. V est connexe donc $\forall (i,j)$ $v_j = v_i$ donc il existe v telle que $u = v \otimes 1_V$ sur $U\times V$.

q.e.d.

Il suffit donc de montrer que si U_1 et V_1 sont des ouverts relativement compacts convexes respectivement dans U et V alors u est indépendant de t sur $U_1 \times V_1$.

$u \in \mathcal{B}(U\times V)$ donc $u = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in \mathcal{O}(U\times V + io\Gamma_\alpha)$ Γ_α cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum b(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau}) = 0$ donc d'après l'axiome 3 de la définition des hyperfonctions il existe des $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ telles que :

$\to g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U\times V + io\Gamma_{\alpha\beta})$ avec $\Gamma_{\alpha\beta}$ = enveloppe convexe de $(\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta)$.

$\to g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0$ et $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau} = \sum_{\beta\in A} g_{\alpha\beta}|_{U\times V + io\Gamma_\alpha}$.

Pour tout couple (α,β) soit $\Gamma'_{\alpha\beta}$ un cône ouvert convexe tel que $\Gamma'_{\alpha\beta} \cap S^n$ soit relativement compact dans $\Gamma_{\alpha\beta} \cap S^n$. $U_1 \times V_1$ est relativement compact dans $U\times V$ donc par définition de $\mathcal{O}(U\times V + io\Gamma_{\alpha\beta})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $L_{\alpha,\beta,\varepsilon} = (U_1\times V_1 + i\,\Gamma'_{\alpha\beta}) \cap \{(z,\tau) \in \mathbb{C}^{n+1} / |\mathcal{I}m(z,\tau)| < \varepsilon\}$ alors $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(L_{\alpha,\beta,\varepsilon})$.

<u>Rappel</u> : <u>Théorème de Malgrange-Ehrenpreis</u>.

Si K est un convexe de $\mathbb{C}^n$, f holomorphe sur K et $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, il existe g holomorphe sur K telle que $P(D)g = f$.

$L_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ est convexe donc il existe $G_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(L_{\alpha,\beta,\varepsilon})$ telle que $\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial\tau} = g_{\alpha\beta}|_{L_{\alpha,\beta,\varepsilon}}$. Les relations $g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0$ et $\frac{\partial f_\alpha}{\partial\tau} = \sum g_{\alpha\beta}$ montrent que

sur $L_{\alpha,\beta,\varepsilon}$: $G_{\alpha\beta}(z,\tau) + G_{\beta\alpha}(z,\tau) = h_{\alpha\beta}(z,\tau)$ $h_{\alpha\beta}$ fonction holomorphe indépendante de τ,

et $f_\alpha = \sum_{\beta\in A} G_{\alpha\beta} + k_\alpha$ k_α indépendante de τ.

$$u|_{U_1\times V_1} = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} b(k_\alpha) + \sum_{(\alpha,\beta)\in A} b(G_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\sum_{(\alpha,\beta)\in A} b(h_{\alpha\beta}) + \sum_{\alpha\in A} b(k_\alpha),$$

donc $u|_{U_1\times V_1}$ est indépendant de t ce qui termine la démonstration de la prop. 1.

<u>Proposition</u> 2 : Pour toute hyperfonction $u \in \mathcal{B}$ il existe une hyperfonction $v \in \mathcal{B}$ telle que $\frac{\partial^p v(x,t)}{\partial t_1 \ldots \partial t_p} = u(x,t)$.

<u>Preuve</u> : Si la proposition 2 est vraie pour $p=1$, il suffit de prendre p fois la primitive pour obtenir le résultat pour p quelconque.

$\boxed{p=1}$: Soit U un ouvert convexe <u>relativement compact</u> de $\mathbb{R}^{n+1}$.
$u = \sum b(f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^{n+1}+i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{\omega})$ avec $\tilde{\omega}$ voisinage de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Soit $L_{U,\alpha,\varepsilon} = (U+i\Gamma_\alpha)\cap\{(z,\tau) \in \mathbb{C}^{n+1}/|\mathcal{I}m(z,\tau)| < \varepsilon\}$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L_{U,\alpha,\varepsilon} \subset (\mathbb{R}^{n+1}+i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{\omega}$ pour tout $\alpha \in A$.

$L_{U,\alpha,\varepsilon}$ est convexe donc d'après le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, il existe $F_{\alpha,U} \in \mathcal{O}(L_{U,\alpha,\varepsilon})$ telle que $\frac{\partial F_{\alpha,U}}{\partial\tau}(z,\tau) = f_\alpha(z,\tau)|_{L,U,\alpha,\varepsilon}$.

Si $v_U = \sum_{\alpha \in A} b(F_{\alpha,U})$ on a $\frac{\partial v_U}{\partial t} = u|_U$.

Soit $(U'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts convexes relativement compacts de R^n telle que $R^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U'_j$ et soit pour tout j $U_j = U'_j \times]-j,+j[$. $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante d'ouverts convexes relativement compacts de R^{n+1} et $R^{n+1} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$.

Pour tout j , on définit comme précédemment $v_j \in \mathcal{B}(U_j)$ telle que $\frac{\partial v_j}{\partial t} = u|_{U_j}$. $\frac{\partial}{\partial t} v_{j+1}|_{U_j} = u|_{U_j} = \frac{\partial}{\partial t} v_j$ donc d'après la prop. 1 , il existe $w \in \mathcal{B}(U'_j)$ telle que $v_{j+1}|_{U_j} - v_j = w \otimes 1_{]-j,+j[}$. $\mathcal{B}$ est un faisceau flasque et $U'_{j+1} \supset U'_j$ donc w s'étend en une hyperfonction $\tilde{w}$ sur U'_{j+1} .

Posons $v'_{j+1} = v_{j+1} - \tilde{w} \otimes 1_{]-j-1,j+1[}$ sur $U_{j+1} = U'_{j+1} \times]-j-1,j+1[$.

On a alors $v'_{j+1}|_{U_j} = v_j$ et $\frac{\partial v'_{j+1}}{\partial t} = \frac{\partial v_{j+1}}{\partial t} = u|_{U_{j+1}}$.

En raisonnant par récurrence on peut donc définir pour tout j une hyperfonction v'_j telle que $v'_j|_{U_j} = v'_{j-1}$ et $\frac{\partial v'_j}{\partial t} = u|_{U_j}$.

Les v'_j définissent une hyperfonction $v \in \mathcal{B}(R^{n+1})$ telle que $\frac{\partial v}{\partial t} = u$. q.e.d.

<u>Définition</u> : Soit $u \in \mathcal{B}(\omega \times \mathbb{R}^p)$ et $\pi : \omega \times \mathbb{R}^p \to \omega$ la projection canonique. On dira que le <u>support de</u> u <u>est propre en</u> t <u>si</u> $\pi|_{\operatorname{supp} u}$ <u>est propre.</u>

i.e. $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$ $\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{Supp} u$ est compact.

Nous allons définir l'intégration par rapport à t des hyperfonctions de ce type.

(1) Intégration par rapport à une variable.

Soit $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ avec un support propre en $t \in \mathbb{R}$ et soit v une primitive de u par rapport à t. (Il en existe d'après la prop. 2).

Si U est un ouvert relativement compact dans $\mathbb{R}^n$, il existe t_o et t_1 tels que si $U_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in U\ t > t_1\}$ et $U_o = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in U\ t < t_o\}$, alors $u=0$ sur U_o et sur U_1 donc d'après la prop. 1, v est indépendante de t sur chacun des ouverts U_o et U_1 : il existe w_o et w_1 dans $\mathcal{B}(U)$ telles que

$$v\big|_{U_1} = w_1 \otimes 1_{]t_1,+\infty[} \quad \text{et} \quad v\big|_{U_o} = w_o \otimes 1_{]\infty,t_o[}\ .$$

Sur U on peut donc définir $w_U = w_1 - w_o$. Si U_α et U_β sont deux ouverts relativement compacts de $\mathbb{R}^n$ on a $w_{U_\alpha}\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = w_{U_\beta}\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ donc si $\mathbb{R}^n = \bigcup U_j$ les w_{U_j} définissent une hyperfonction $w \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

On pose : $\boxed{w(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dt \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.

w ne dépend que de u, et pas de la primitive v choisie d'après la proposition 1.

(2) Intégration par rapport à plusieurs variables.

Soit $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+p})$ de support propre en $t \in \mathbb{R}^p$ $(t = (t_1,\dots,t_p))$.

Lemme : (1) supp u est propre en t_i pour $i = 1,\dots,p$

(2) $\operatorname{supp}[\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dt_i]$ est propre en $(t_1,\dots t_{i-1}, t_{i+1},\dots t_p)$ pour $i = 1,\dots p$.

Démonstration : Prenons $i = 1$.

$\pi_1 : \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p-1}$ $\qquad$ $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+p-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x,t) \longmapsto (x,t_2,\dots,t_p)$ $\qquad$ $(x,t_2,\dots,t_p) \longmapsto x$.

→ Montrons (1) K compact de $\mathbb{R}^{n+p-1}$. $\pi_2(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$ donc $\pi_1^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} u = \pi^{-1}(\pi_2(K))$ est compact dans $\mathbb{R}^{n+p}$. q.e.d.

→ (2) K compact de $\mathbb{R}^n$. $\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} u$ est compact dans $\mathbb{R}^{n+p}$ donc est contenu dans un compact $K \times I \times H$ $\quad$ H compact de $\mathbb{R}^{p-1}$.
I intervalle compact de $\mathbb{R}$,

donc $\pi_2^{-1}(K) \cap \operatorname{supp}[\int u(x,t)dt_1] \subset K \times H$ qui est compact. q.e.d.

On peut donc intégrer successivement u par rapport aux t_i et définir :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^p} u(x,t)dt = \int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}} dt_2 \dots \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,\dots,t_p)dt_p} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Propriété : Cette intégrale est indépendante de l'ordre d'intégration.

Démonstration : Il suffit de montrer que l'on peut permuter $\int_{\mathbb{R}} dt_i$ et $\int_{\mathbb{R}} dt_{i+1}$ donc on est ramené au cas $p=2$.

Il faut montrer que : $\int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_2 = \int_{\mathbb{R}} dt_2 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_2$.

D'après la proposition 2, il existe $v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+2})$ telle que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = u$.

Il faut montrer que les intégrales sont égales sur chaque ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$. On remplace donc u par $u|_{U \times \mathbb{R}^2}$. U rel comp dans $\mathbb{R}^n$.

Il existe $t_1^1, t_1^o, t_2^1, t_2^o$ tels que $\operatorname{supp} u \subset U \times [t_1^o, t_1^1] \times [t_2^o, t_2^1]$.

Soient pour $j = 1,2$ $U_{o,j} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+2} / x \in U \; t_j < t_j^o\}$ et

$U_{1,j} = \{(x,t)/x \in U \; t_j > t_j^1\}$. (Voir figure à la fin de la démonstration).

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = 0$ sur $U \times I \times J$

on a d'après la prop. 1 $\frac{\partial v}{\partial t_2} = w(x,t_2) \otimes 1$ d'où

$v(x,t_1,t_2) = w_1(x,t_1) \otimes 1 + w_2(x,t_2) \otimes 1$.

On voit donc qu'il existe v telle que $\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = u$ et $v = 0$ sur

$U_{o,1} \cup U_{o,2}$ et alors on a sur $U_{1,j}$ pour $j = 1,2$

$v(x,t_1,t_2) = w_j(x,t_1) \otimes 1 + w_j'(x,t_2) \otimes 1$.

Sur $U_{1,j} \cap U_{o,j}$, $v = 0$ donc w_2 et w_1' ne dépendent que de x, on peut

donc les supposer nuls en modifiant w_2' et w_1.

Sur $U_{12} \cap U_{11}$ on a alors $w_2'(x,t_2) \otimes 1 = w_1(x,t_1) \otimes 1$ donc il existe

$w(x)$ telle que sur $U_{12} \cap U_{11}$ on ait $w_1 = w_2' = w$.

Finalement : → $v(x,t_1,t_2) = 0$ si $t_1 < t_1^o$ ou si $t_2 < t_2^o$

→ $v(x,t_1,t_2) = w_1''(x,t_1)$ si $t_2 > t_2^1$

→ $v(x,t_1,t_2) = w_2''(x,t_2)$ si $t_1 > t_1^1$

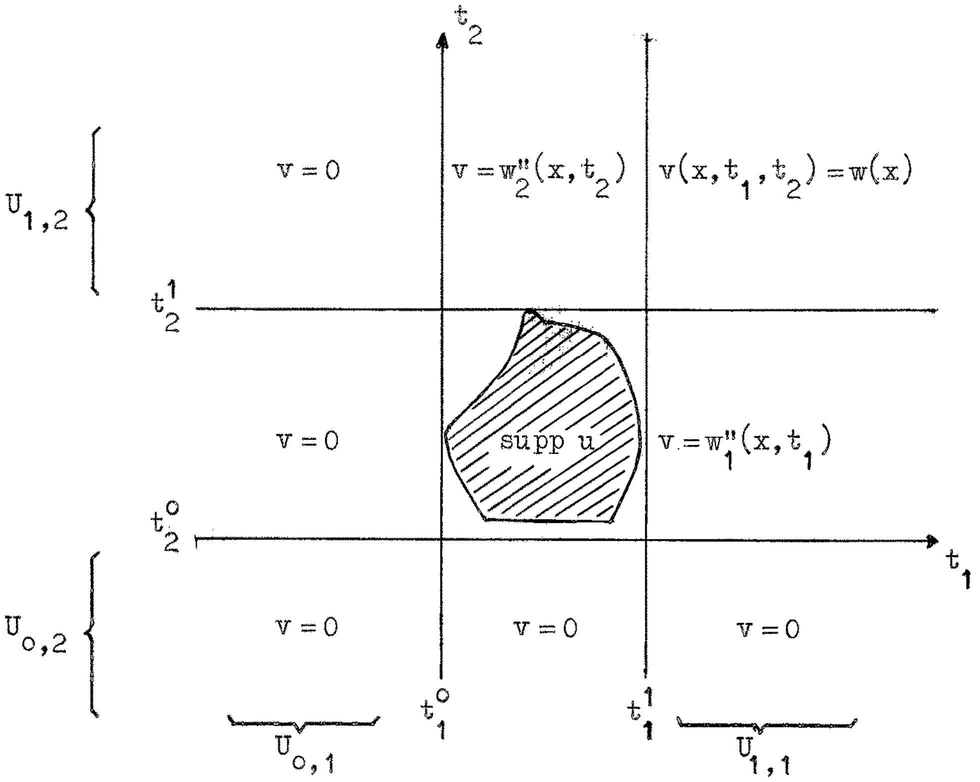
→ $v(x,t_1,t_2) = w_1'' = w_2'' = w(x)$ si $t_2 > t_2^1$ et $t_1 > t_1^1$.

Intégrons pour $x \in U$

$$\int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_2 = \int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} dt_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t_1} w_1''(x,t_1)dt_1 = w(x) ,$$

de même $$\int_{\mathbb{R}} dt_2 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t_2} w_2''(x,t_2)dt_2 = w(x) ,$$

donc $$\int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_2 = \int_{\mathbb{R}} dt_2 \int_{\mathbb{R}} u(x,t_1,t_2)dt_1$$



<u>Théorème</u> 2.5.1 : Soit $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+p})$ tel que supp u soit propre en t.

Soit $w(x) = \int_{\mathbb{R}^p} u(x,t)dt$.

Alors $SSw \subset \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} / \exists\, t \in \mathbb{R}^p$ tel que $(x,t,\xi,0) \in SSu\}$.

<u>Preuve</u> : Supposons le théorème vrai pour $p = 1$

$SSw \subset \{(x,\xi)/\exists t_1 \in \mathbb{R}(x,t_1,\xi,0) \in SS(\int_{\mathbb{R}^{p-1}} u(x,t)dt_2\ldots dt_p)\} \subset$

$\{(x,\xi)/\exists(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2(x,t_1,t_2,\xi,0,0) \in SS\int_{\mathbb{R}^{p-2}} u(x,t)dt_3\ldots dt_p)\}$,

donc $SSw \subset \{(x,\xi)/\exists t \in \mathbb{R}^p(x,t,\xi,0) \in SSu\}$ q.e.d.

$\boxed{p = 1}$. Soit (x_o,ξ_o) tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $(x_o,t,\xi_o,0) \notin SSu$. Il faut montrer que $(x_o,\xi_o) \notin SSw$.

SSu est fermé donc il existe un voisinage V de $\{(x_o,t)/t \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\{(x,t,\xi_o,0)/(x,t) \in V\} \cap SSu = \emptyset$.

$V_1 = \{(x,t) \in V/\|x-x_o\| < 1\}$ vérifie encore la même propriété.

Si $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection canonique, $\pi(V_1)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$ donc puisque le support de u est propre en t, il existe t_o et t_1 tels que

$$u\big|_{\pi(V_1)\times\mathbb{R}\setminus[t_o,t_1]} = 0 .$$

Choisissons $t'_o < t_o$ et $t'_1 > t_1$. Soit $V_2 = \{(x,t) \in V_1/t \in]t'_o,t'_1[\}$.

$\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $U = \{(x,t)/\|x-x_o\| < \varepsilon \quad t \in]t'_o,t'_1[\} \subset V_2 \subset V$.

$(x,t) \in U \Longrightarrow (x,t,\xi_o,0) \notin SSu$ donc on peut écrire $u\big|_U = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$,

avec $f_\alpha \in \mathcal{O}((U+i\Gamma_\alpha)\cap\{(z,\tau) \in \mathbb{C}^{n+1}/|\Im m(z,\tau)| < \varepsilon'\})$ et $(\xi_o,0) \notin \Gamma^o_\alpha$ $\forall\, \alpha \in A$.

U est convexe donc d'après la démonstration de la prop. 2, pour tout α, il existe $F_\alpha \in \mathcal{O}((U+i\Gamma_\alpha)\cap\{|\Im m(z,\tau)| < \varepsilon'\})$ tel que $\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial\tau} = f_\alpha$.

Soit $v = \sum_{\alpha\in A} b(F_\alpha)$ v est une primitive de u donc :

$$v\big|_{t>t_1} = v_1(x)\otimes 1 \quad \text{et} \quad v\big|_{t<t_o} = v_o(x)\otimes 1 ,$$

et $w(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dt = v_1(x) - v_o(x)$ sur $\pi(U) = \{\|x-x_o\| < \varepsilon\}$, donc

$$SS(w\big|_{\pi(U)}) \subset SSv_1 \cup SSv_o .$$

$v_1(x) = v(x,t''_1)$ pour un point t''_1 quelconque dans $]t'_1,t_1[$, donc

$$SSv_1 \subset \{(x,\xi)/\exists\,\eta\ (x,t''_1,\xi,\eta) \in SSv\} .$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} v(x,t) = 0$ au voisinage de (x_o,t''_1) donc dans ce voisinage

$$SSv \subset Car(\frac{\partial}{\partial t_1}) = \{(x,t,\xi,\eta)/\eta = 0\} .$$

$(x_o,\xi_o) \in SSv_1 \Longrightarrow \exists\,\eta$ t.q. $(x_o,t''_1,\xi_o,\eta) \in SSv$ donc $\eta = 0$, donc

$$(x_o,t''_1,\xi_o,0) \in SSv .$$

Or $(\xi_o,0) \notin \Gamma^o_\alpha$ $\forall\,\alpha \in A$ et $v = \sum b(F_\alpha)$ $F_\alpha \in \mathcal{O}(U+io\Gamma_\alpha)$, donc

$$(x_o, t_1'', \xi_o, 0) \notin SSv ,$$

donc $(x_o,\xi_o) \notin SSv_1$ et de même $(x_o,\xi_o) \notin SSv_o$, donc $(x_o,\xi_o) \notin SSw$.

q.e.d.

2.6 <u>Fonctionnelles analytiques et hyperfonctions.</u>

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A}(K)$ l'espace des fonctions analytiques sur K muni de la topologie définie par :

$$\mathcal{A}(K) = \underset{\tilde{\omega} \supset K}{\text{lim. induct.}}\ \mathcal{O}(\tilde{\omega}) \quad \text{où } \tilde{\omega} \text{ parcourt l'ensemble des voisinages complexes de } K .$$

Une <u>fonctionnelle analytique sur</u> K est un élément de $\mathcal{A}'(K)$, le dual topologique de $\mathcal{A}(K)$.

Soit $\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) / \text{supp } u \subset K\}$.

<u>Théorème</u> 2.6.1 : $\mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{A}'(K)$ sont algébriquement isomorphes et donc toute hyperfonction est somme localement finie de fonctionnelles analytiques.

<u>Démonstration</u> : voir Schapira [6].

Nous allons montrer le théorème dans le cas $n = 1$.

(1) Définissons une application $\Phi : \mathcal{A}'(K) \to \mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ pour K compact de $\mathbb{R}$. Notons $\mathbb{C}^+ = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{C}^- = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_-^*$ $(\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[)$ donc $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{C}^- = \mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{A}'(K)$.

La transformée de Cauchy de u : $f(z) = \langle u_t , \frac{-1}{(2\pi i)(z-t)} \rangle$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$ qui définit une hyperfonction v :

$$\Phi : \mathcal{A}'(K) \to \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K) \to \mathcal{B}_K(\mathbb{R})$$

$$u \mapsto f(z) = \langle u_t , \frac{1}{2i\pi(t-z)} \rangle \mapsto v = b(f|_{\mathbb{C}^+}) - b(f|_{\mathbb{C}^-}) .$$

(2) Définissons inversement $\phi : \mathcal{B}_K(\mathbb{R}) \to \mathfrak{a}'(K)$.

Nous poserons par définition : $\langle\phi(v),\varphi\rangle = \int_K \varphi(x)v(x)dx$ pour $\varphi \in \mathfrak{a}(K)$, où $\int_K v(x)dx$ désigne l'intégrale définie au paragraphe 2.4.

$\phi(v) \in \mathfrak{a}'(K)$ si $\phi(v) : \mathfrak{a}(K) \to \mathbb{C}$ est continue donc il faut montrer que pour V voisinage complexe de K , $\phi(v)$ est continue de $\mathcal{O}(V)$ dans $\mathbb{C}$.

<u>Lemme</u> : Soit $v \in \mathcal{B}_K(\mathbb{R}^n)$. $v = b(f^+) - b(f^-)$ avec $f^\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\varepsilon \cap \tilde{\omega})$ $\varepsilon = +$ ou $-$; $\tilde{\omega}$ voisinage complexe de $\mathbb{R}$ que l'on peut supposer simplement connexe.

supp $v \subset K$ donc d'après l'axiome (A3) il existe $f \in \mathcal{O}(\tilde{\omega}\setminus K)$ qui prolonge f^+ et f^- .

Soit γ un chemin dans $\tilde{\omega}\setminus K$ entourant une fois K , orienté suivant le sens positif de $\mathbb{R}^2$:

alors $$\int_K v(x)dx = -\int_\gamma f(z)dz .$$

<u>Démonstration</u> : $\tilde{\omega}$ est simplement connexe donc il en est de même pour $\tilde{\omega} \cap (\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}\setminus K)$ et $\tilde{\omega} \cap (\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}\setminus K)$. Sur chacun de ces ouverts f admet une primitive, soient F^+ et F^- .

Ces primitives définissent une primitive w de v : $w = b(F^+) - b(F^-)$.

Soient x_1 et x_2 les intersections de γ avec $\mathbb{R}$.

$$\int_K v(x)dx = w(x_2) - w(x_1) = F^+(x_2) - F^+(x_1) - F^-(x_2) + F^-(x_1) = -\int_\gamma f(z)dz .$$

q.e.d.

$\int_K v(x)\varphi(x)dx = -\int_\gamma f(z)\varphi(z)dz$ où γ est un chemin dans $V \cap \tilde{\omega}$ pour $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ et v défini par $f \in \mathcal{O}(\tilde{\omega}\setminus K)$ donc $\phi(v)$ est continue de $\mathcal{O}(V)$

dans $\mathbb{C}$. q.e.d.

(3) <u>Montrons que</u> $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$: Soit $v \in \mathcal{B}_K(\mathbb{R})$. v s'écrit

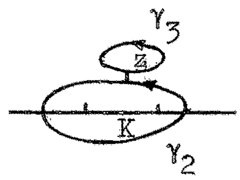
$v = b(f_{|\mathbb{C}^+}) - b(f_{|\mathbb{C}^-})$ $f \in \mathcal{O}(\tilde{\omega}\setminus K)$. $\Phi \circ \Psi(v) = b(g_{|\mathbb{C}^+}) - b(g_{|\mathbb{C}^-})$ avec

$$g(z) = -\int_K \frac{v(x)}{2\pi i(z-x)}\, dx \,.$$

Si U est un voisinage assez petit d'un point z de $\tilde{\omega}\setminus K$, il existe des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ contenus dans $\tilde{\omega}\setminus K$ qui vérifient :

$\gamma_1 = \gamma_2 \cup \gamma_3$ γ_3 entoure z et n'entoure pas K

γ_2 entoure K et n'entoure pas z



donc γ_1 entoure z et K.

Si $z \in U$ $\quad g(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ d'après le lemme précédent.

$f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ d'après la formule de Cauchy.

Donc $g(z) - f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ se prolonge holomorphiquement à la région entourée par γ_1 donc à un voisinage de K. $g(z) - f(z)$ défini sur $\tilde{\omega}\setminus K$ se prolonge à $\tilde{\omega}$ donc $\Phi_o\Psi(v) - v = b((g-f)_{|\mathbb{C}^+}) - b((g-f)_{|\mathbb{C}^-}) = 0$.

(3) Montrons que Φ <u>est injective</u> :

$$u \in \mathcal{A}'(K) \qquad f(z) = \langle u_t, \frac{1}{2i\pi(t-z)}\rangle \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus K)\,.$$

Il existe r tel que $K \subset \{t \in \mathbb{R} / |t| < r\}$.

$R > r$ $\quad |z| > R \Longrightarrow \left\| \dfrac{1}{2i\pi(t-z)} \right\| \leqslant \dfrac{1}{2\pi(R-r)}$ pour tout t donc puisque u est continue :
$$\boxed{\lim_{z\to\infty} f(z) = 0}\,.$$

Si $\Phi(u) = 0$ $\quad f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc d'après le théorème de Liouville $f(z) = 0$.

Donc $u = 0$ q.e.d.

D'après (3) Φ est surjective donc Φ est bijective et $\Psi = \Phi^{-1}$.

3. Opérateurs différentiels dans le domaine complexe et applications.

$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$ a_α fonctions holomorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Définition : direction caractéristique de P : Soit z_o un point de $\mathbb{C}^n$ où $\mathbb{P}$ est défini. $\xi_o \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ est une direction caractéristique en z_o si $P_m(z_o,\xi_o) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z_o)\xi_o^\alpha = 0$.

Remarque : P_m étant homogène ; ξ_o caractéristique $\Longrightarrow$ $\lambda\xi_o$ caractéristique pour tout $\lambda \neq 0$ donc les directions caractéristiques sont en fait définies dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

Définition : Une hypersurface (réelle ou complexe) $\sum$ est non caractéristique en z_o si $P_m(z_o,\xi^o) \neq 0$ où ξ^o est un vecteur normal non nul à $\sum$ en z_o. (En un point de $\sum$ où la normale est définie).

3.1 Théorème de Cauchy-Kovalewski et application.

3.1.1 : Théorème de Cauchy-Kovalewski précisé).

(1) Soit H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ dans lequel on choisit des coordonnées telles que H ait pour équation $z_n = 0$.

Soit $P(z,\partial/\partial z)$ un opérateur différentiel défini au voisinage de 0. Supposons que H n'est pas caractéristique pour P en 0 $(P_m(0;0,\ldots 0,1)\neq 0)$. Alors étant données $f(z_1,\ldots,z_n)$ holomorphe au voisinage de 0 et pour

$j = 0,\dots,m-1$ $v_j(z_1,\dots z_{n-1})$ holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$.

Il existe une et une seule fonction holomorphe au voisinage de 0 et telle que

$$\begin{cases} Pu = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^j u_{|H} = v_j(z_1\dots z_{n-1}) \end{cases}$$

(2) De plus, il existe $\delta > 0$ tel que si $f \in \mathcal{O}(B(0,a))$ $(a \leqslant a_o)$ et $v_j \in \mathcal{O}(B'(0,a))$ $j = 0,\dots m-1$ alors $u \in \mathcal{O}(B(0,\delta a))$.

Ce δ est valable pour P et les opérateurs assez voisins de P.

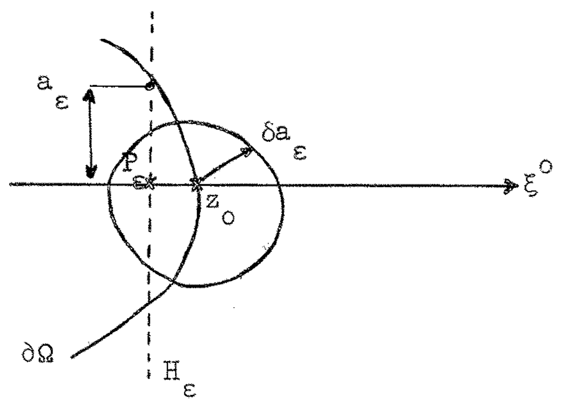
<u>Démonstration</u> : La première partie est le théorème classique de Cauchy-Kovalevski et la deuxième partie apparaît dans la démonstration de celui-ci à l'aide des séries majorantes.

<u>Théorème</u> 3.1.2 : Soient Ω ouvert dont la frontière est de classe C^1, z_o un point de cette frontière et P un opérateur différentiel défini au voisinage de z_o.

On suppose que $\partial\Omega$ est non caractéristique en z_o.

Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $Pf \in \mathcal{O}(V)$ où V est un voisinage de z_o.
Alors il existe un voisinage W de z_o tel que f s'étende holomorphiquement à $\Omega \cup W$.

<u>Démonstration</u> :



Pour tout $\varepsilon > 0$ soit

$H_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n / \langle z-z_o , \xi^o\rangle = -\varepsilon\}$, où ξ^o est la normale à $\partial\Omega$ en z_o.

$a_\varepsilon = \sup \{a / H_\varepsilon \cap B(P_\varepsilon,a) \subset \Omega\}$ où P_ε est le point intersection de H_ε et de la normale à $\partial\Omega$ en z_o. $\partial\Omega$ est de classe C^1 donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty$.

f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$g_\varepsilon \begin{cases} P(z,\frac{\partial}{\partial z})g_\varepsilon = P(z,\frac{\partial}{\partial z})f \\ (\frac{\partial}{\partial \xi^o})^j g_\varepsilon\Big|_{H_\varepsilon} = (\frac{\partial}{\partial \xi_o})^j f\Big|_{H_\varepsilon} \qquad j = 0,\dots m-1 . \end{cases}$$

Pf est holomorphe dans V voisinage de z_o donc si ε est assez petit

$$B(P_\varepsilon, a_\varepsilon) \subset V \quad \text{pour} \quad \varepsilon < \varepsilon_1 .$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, il existe $\delta > 0$ et ε_o tels que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$ si $Pf \in \mathcal{O}(B(P_\varepsilon,a))$ et $f_{|H_\varepsilon} \in \mathcal{O}(B(P_\varepsilon,a))$, alors $g_\varepsilon \in \mathcal{O}(B(P_\varepsilon,a\delta))$. (En effet en faisant subir à $\mathbb{C}^n$ une translation de longueur ε et de direction ξ^o on est ramené à 1 hyperplan fixe et à l'opérateur $P(z-\varepsilon,\frac{\partial}{\partial z})$ qui est voisin de P si ε est petit).

$B(P_\varepsilon,a_\varepsilon) \subset V$ si $\varepsilon < \varepsilon_1$ et $\delta a_\varepsilon > \varepsilon$ si $\varepsilon < \varepsilon_2$ et donc $B(P_\varepsilon, \delta u_\varepsilon)$ est un voisinage de z_o. Si $\varepsilon < \inf(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $B(P_\varepsilon,a_\varepsilon) \subset V$ et $B(P_\varepsilon,a_\varepsilon) \cap H_\varepsilon \subset \Omega$, donc g_ε est défini dans $B(P_\varepsilon,\delta a_\varepsilon)$. Pour ε assez petit f s'étend donc holomorphiquement à $B(P_\varepsilon,\delta a_\varepsilon)$ qui est un voisinage de z_o et W est donc $B(P_\varepsilon,\delta a_\varepsilon)$ pour un tel ε fixé.

3.2 <u>Théorème d'existence et de prolongement</u>. (cf. Bony-Schapira [1])

<u>Théorème</u> 3.2.1 : Soient $\omega \subset \Omega$ deux convexes de $\mathbb{C}^n$, ω étant localement compact et Ω ouvert. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des directions caractéristiques en un point de Ω au moins pour l'opérateur $P(z,\partial/\partial z)$ à coefficients holomorphes dans Ω. On suppose que tout hyperplan réel de normale appartenant à $\bar{\mathbf{A}}$ et

coupant Ω coupe aussi ω. Si f est holomorphe au voisinage de ω et si Pf se prolonge holomorphiquement dans Ω, alors f se prolonge holomorphiquement dans Ω.

<u>Démonstration</u> : Soient $z_o \in \omega$, $z_1 \in \Omega$ et $\alpha > 0$ tels que $Z_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,[z_o,z_1]) \leqslant \alpha\}$ soit contenu dans Ω ($[z_o,z_1]$ désignant le segment fermé d'extrémités z_o et z_1).

Montrons qu'il existe un compact K de ω tel que tout hyperplan de normale dans $\bar{A}$ coupant Z_α coupe aussi K. Dans le cas contraire, K_j étant une suite croissante de compacts de ω telle que $\omega = \bigcup_j K_j$, on aurait : $\forall j$, $\exists H_j$ hyperplan de normale $\zeta_j \in \bar{A} \cap S^{2n-1}$ et passant par $z_j \in K_\alpha$ tel que :

$$H_j \cap K_j = \emptyset .$$

Comme $Z_\alpha \times (\bar{A} \cap S^{2n-1})$ est compact, on peut, en extrayant au besoin une sous-suite, supposer que $\lim_j z_j = z \in Z_\alpha$ et $\lim_j \zeta_j = \zeta \in \bar{A} \cap S^{2n-1}$. Soit H l'hyperplan de normale ζ, passant par z. Puisque $H \cap \omega$ est non vide ($\zeta \in \bar{A}$ et $z \in Z_\alpha \subset \Omega$), soit $y \in H \cap \omega$. y est limite d'une suite (y_n) avec $y_n \in H_n \cap \omega$. Puisque ω est localement compact, il existe un compact K de ω qui est un voisinage de y dans ω (pour la topologie induite par $\mathbb{C}^n$ sur ω). Comme $y = \lim_n y_n$ dans ω, il existe un entier n_o tel que $y_n \in K$ pour $n \geqslant n_o$. D'autre part, puisque (K_j) est croissante et $\omega = \bigcup K_j$, il existe un entier n_1 tel que $K \subset K_{n_1}$ et on peut supposer $n_1 \geqslant n_o$. On aura donc : $\forall n \geqslant n_1$, $y_n \in K \subset K_{n_1}$. Ceci est contradictoire car $y_j \in H_j \cap \omega \subset H_j \cap \complement_\omega K_j$ et par conséquent $y_n \notin K_j$ pour $n \geqslant j$.

Soit $z_t = (1-t)z_o + tz_1$ et $L_t = \mathrm{Conv}(K, z_t)$ (on peut évidemment supposer que K est convexe et que $z_o \in K$).

Soit $L_t^\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, L_t) < \varepsilon\}$ où $0 < \varepsilon < \alpha$ est tel que $K_{2\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) < 2\varepsilon\}$ soit inclus dans l'ouvert $\tilde{\omega}$ où f est définie. L_t^ε est un ouvert convexe dont la frontière est de classe C^1. Si P est un hyperplan de normale dans $\bar{A}$ tangent à L_t^ε, on a $P \cap L_t^\varepsilon = \emptyset$, donc $P \cap K = \emptyset$ et, d'après le choix de K, $P \cap Z_\alpha = \emptyset$. Donc, puisque $0 < \varepsilon < \alpha$, P ne rencontre pas la boule fermée B_t^ε de centre z_t et de rayon ε. Supposons que P rencontre $\overline{L_t^\varepsilon} \setminus \overline{K_\varepsilon}$: P contient alors un point de la forme $z = \lambda x + \mu y$, $\lambda + \mu = 1$ et $\mu \neq 0$ avec $x \in \bar{K}_\varepsilon$ et $y \in B_t^\varepsilon$ (en effet, $\overline{L_t^\varepsilon}$ est l'enveloppe convexe de $\bar{K}_\varepsilon$ et de B_t^ε et $z \notin \bar{K}_\varepsilon$). Puisque P est un hyperplan d'appui du fermé convexe $\overline{L_t^\varepsilon}$, $\overline{L_t^\varepsilon}$ est situé dans un des demi-espaces fermés limités par P, soit E_1. Puisque $x \in E_1$, $y \in E_1$ et $z \in P$, le segment $[x,y]$ est contenu dans P, ce qui est contradictoire car $y \in B_t^\varepsilon$. On en déduit que $P \cap (\overline{L_t^\varepsilon} \setminus \overline{K_\varepsilon}) = \emptyset$ et par conséquent que $P \cap L_t^\varepsilon \subset P \cap \bar{K}_\varepsilon \subset P \cap \tilde{\omega}$ et P est donc tangent à $\overline{L_t^\varepsilon}$ en un point de $\tilde{\omega}$. Il en résulte qu'en tout point frontière de L_t^ε non dans $\tilde{\omega}$, l'hyperplan tangent à sa normale n'appartenant pas à $\bar{A}$.

Soit alors $t_1 = \sup\{t \mid f \in \mathcal{O}(L_t^\varepsilon)\}$ (t_1 est bien défini car $f \in \mathcal{O}(L_o^\varepsilon)$). Puisque $L_t^\varepsilon = \bigcup_{o<t'<t} L_{t'}^\varepsilon$, on a $f \in \mathcal{O}(L_{t_1}^\varepsilon)$. Montrons que $t_1 = 1$. Si $t_1 < 1$, on applique le théorème de prolongement 3.1.2 à l'ouvert convexe $L_{t_1}^\varepsilon$ en tout point $z \in F = \partial L_{t_1}^\varepsilon \cap \tilde{\omega}$ (ce qui précède montre que les hypothèses du théorème sont satisfaites pour $z \in F$). On a donc :

$\forall\, z \in F$, $\exists\, V_z$ voisinage de z tel que f se prolonge holomorphiquement à V_z. L'ouvert $\left(\bigcup_{z\in F} V_z\right) \cup \tilde{\omega}$ est un voisinage de $\overline{L^{\varepsilon}_{t_1}}$, donc contient un ensemble $L^{\varepsilon}_{t'_1}$ avec $t'_1 > t_1$, ce qui contredit la définition de t_1.

Pour tout $z_1 \in \Omega$, on a donc un prolongement holomorphe de f à un ouvert étoilé de z_o contenant z_1 (à savoir L^{ε}_1) ce qui, par unicité du prolongement analytique, définit un prolongement de f à Ω.

Application : problème de Cauchy dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $P(z,\partial/\partial z)$ un opérateur d'ordre m à coefficients holomorphes dans $\mathbb{C}^n$, H l'hyperplan complexe $z_n = 0$.

Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$ $(j = 0,\dots m-1)$. D'après le théorème de Cauchy-Kowaleski, le problème de Cauchy $\begin{cases} Pf = g \\ D^j_{z_n} f\big|_{z_n=0} = h_j(z') \quad (j=0,\dots m-1) \end{cases}$

a une solution et une seule F holomorphe au voisinage de H.

Proposition : S'il existe sur S^{2n-1} un voisinage V de $(0,\dots,0,1)$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et tout $\zeta \in V$, $P_m(z,\zeta)$ soit non nul, la solution F du problème de Cauchy s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C}^n$.

Démonstration : On applique le théorème 3.2.1 avec $\omega = H$, $\Omega = \mathbb{C}^n$. Si H_ζ est un hyperplan de normale $\zeta \in \bar{A}$, ζ n'appartient pas à $\overset{\circ}{V}$ et H_ζ coupe $\omega = H$.

Remarque : On pourrait remplacer l'hypothèse de la proposition par :

$\forall A > 0$, $\exists\, V_A$ voisinage de $(0,\dots 0,1)$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $|z| < A$ et $\forall \zeta \in V_A$, $P_m(z,\zeta) \neq 0$.

3.2.2 : <u>Théorème d'existence et de prolongement au bord.</u>

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$, $z_o \in \partial\Omega$ et Γ_{z_o} le cône des normales intérieures de Ω en z_o (Γ_{z_o} est le cône convexe des normales aux hyperplans d'appui de $\bar{\Omega}$ en z_o contenues dans le demi-espace contenant Ω).

Soient $I = \overline{\Gamma_{z_o} \cap S^{2n-1}}$, I_1 et I_2 des parties fermées et propres de S^{2n-1} telles que $I \subset I_1 \subset I_2$, que I_1 soit un voisinage de I et que I_2 soit un voisinage de I_1. Soient Γ'_1 et Γ'_2 les cônes ouverts convexes de polaires respectifs I_1 et I_2. Notons $\Gamma_1 = z_o + \Gamma'_1$, $\Gamma_2 = z_o + \Gamma'_2$, $H_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n | \mathrm{Re}\langle z-z_o,\zeta\rangle = -\varepsilon\}$ où ζ est un élément I.

On utilisera les propriétés suivantes :

α) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Gamma_1 \cap \{z \in \mathbb{C}^n | |z-z_o| \leqslant \varepsilon\}$ est contenu dans Ω.

β) Pour tout $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon = H_\varepsilon \cap \bar{\Gamma}_1$ est une base compacte de $\bar{\Gamma}_1$ (i.e. K_ε est compact et $\bar{\Gamma}_1$ est le cône engendré par K_ε).

γ) L'intersection des demi-espaces contenant K_ε et dont l'hyperplan frontière H n'a pas sa normale dans I_2 est un voisinage de z_o.

(On peut supposer que $H = H(x,\zeta)$ est un hyperplan d'appui de K_ε passant par $x \in K_\varepsilon$ et de normale $\zeta \in C = \overline{S^{2n-1}\setminus I_2}$. Soit $d(x,\zeta)$ la distance de $H(x,\zeta)$ à z_o. $d(x,\zeta)$ ne s'annule pas sur le compact $K_\varepsilon \times C$, donc $d(x,\zeta) \geqslant \alpha > 0$ pour $(x,\zeta) \in \bar{K}_\varepsilon \times C$ et $B(z_o,\frac{\alpha}{2})$ est un voisinage de z_o).

Si $W \subset \mathbb{C}^n$, on notera $C(W)$ l'ensemble $\bar{A}$ où $A = \{\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\} | \exists z \in W, P_m(z,\zeta) = 0\}$.

<u>Théorème</u> 3.2.2 (existence et prolongement) : Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$, $z_0 \in \partial\Omega$ et $P(z,\partial/\partial z)$ un opérateur défini au voisinage de $\Omega \cup \{z_0\}$. On suppose que les normales à Ω en z_0 ne sont pas caractéristiques (i.e. $\forall \zeta \in \Gamma_{z_0}$, $P_m(z_0,\zeta) \neq 0$). En désignant par $\mathcal{V}_{z_0}$ l'ensemble des voisinages de z_0, on a alors :

a) $\forall V \in \mathcal{V}_{z_0}$, $\exists W \in \mathcal{V}_{z_0}$ tq : $\forall g \in \mathcal{O}(\Omega \cap V)$, $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega \cap W)$, $Pf = g$.

b) $\forall V \in \mathcal{V}_{z_0}$, $\exists W \in \mathcal{V}_{z_0}$ tq : $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $Pf \in \mathcal{O}(\Omega \cup V) \Longrightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega \cup W)$.

1) <u>Démonstration de</u> b) : Par continuité, il existe $V' \in \mathcal{V}_{z_0}$ et un voisinage $\mathfrak{J}$ de $I = \overline{\Gamma_{z_0} \cap S^{2n-1}}$ tels que : $\forall (z,\zeta) \in \overline{V'} \times \overline{\mathfrak{J}}$, $P_m(z,\zeta) \neq 0$.

Donc, $C(V') \cap \overline{\mathfrak{J}} = \emptyset$. On peut choisir les ensembles I_1 et I_2 des propriétés β) et γ) tels que : $I \subset I_1 \subset I_2 \subset \overset{\circ}{\mathfrak{J}}$. Si $U = V \cap V'$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $\overline{\Gamma}_1 \cap \{z \mid |z-z_0| \leqslant \varepsilon'\}$ est contenu dans $(\Omega \cap U) \cup \{z_0\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon'$ tel que : $K_\varepsilon = H_\varepsilon \cap \overline{\Gamma}_1 \subset \Omega \cap U$.

Soit W l'intérieur de l'intersection des demi-espaces contenant K_ε et dont la normale n'appartient pas à I_2. Comme on peut supposer que $U = V \cap V'$ est convexe, $\Omega' = W \cap U$ et $\omega' = W \cap U \cap \Omega$ sont des ouverts convexes et on peut appliquer le théorème 3.2.1 de prolongement à Ω' et ω' : en effet, si un hyperplan caractéristique coupe Ω', sa normale n'est pas dans I_2 car $I_2 \cap C(\Omega') \subset I_2 \cap C(V') = \emptyset$ et il coupe donc K_ε et ω'. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si Pf se prolonge à $\Omega \cup V$, f se prolonge à $W \cap U$ et donc à $\Omega \cup (W \cap U)$ par unicité du prolongement $(\Omega \cap (W \cap U)$ est convexe).

2) <u>Démonstration de</u> a) : A) On supposera dans une première étape que I_2 <u>est inclus dans un cône de révolution non caractéristique</u> R .

Il existe $\zeta_0 \in I_2$ et $\alpha > 0$ tels que : $R = \{\lambda\zeta | \lambda > 0 \, , \, |\zeta| = 1$ et $|\zeta-\zeta_0| \leqslant \alpha\}$.

Puisque R est non caractéristique, on a : $\forall \zeta \in R$, $P_m(z_0,\zeta) \neq 0$.

Soit $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe $\{\langle z-z_0,\zeta_0\rangle = -\varepsilon\}$. Il existe $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ tels que : $\Gamma_1 \cap \{|z-z_0| \leqslant \varepsilon'\} \subset \Omega$ et $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma_1 \subset V \cap V' \cap \Omega$ (V' est défini au 1)).

Montrons que si $\zeta \in C(U)$, l'hyperplan réel d'équation $\mathrm{Re}\langle z-z_0,\zeta\rangle = 0$ coupe $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma_2$. Les points d'intersection sont les éléments $z \in \Gamma_2$ solution de :

$$(S) \quad \begin{cases} f(z) = \mathrm{Re}\langle z-z_0,\zeta\rangle = 0 & (1) \\ g(z) = \mathrm{Re}\langle z-z_0,i\zeta_0\rangle = 0 & (2) \\ h(z) = \varepsilon + \mathrm{Re}\langle z-z_0,\zeta_0\rangle = 0 & (3) \end{cases}$$

Soit (S') le système $\left\{\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right.$ et supposons que (S') n'ait pas de solution $z \in \Gamma_2$. Puisque Γ_2 est convexe, l'ensemble $\{(f(z),g(z)) | z \in \Gamma_2\}$ est un convexe de R^2 ne contenant pas 0 : il est donc contenu dans un demi-plan ouvert de la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \lambda' x+\mu' y > 0\}$ où $(\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. On a donc :

$$\forall z \in \Gamma_2 \, , \, \lambda' f(z) + \mu' g(z) = \mathrm{Re}(\langle z-z_0,\lambda'\zeta+i\mu'\zeta_0\rangle) > 0 \, .$$

En prenant la trace sur S^{2n-1} de la direction $\lambda'\zeta+i\mu'\zeta_0 \neq 0$, on voit qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda\zeta+i\mu\zeta_0 \in \Gamma_2^o \subset I_2$. Puisque $I_2 \subset R$, $\lambda\zeta+i\mu\zeta_0$ est de la forme $\zeta_0+\theta$ avec $|\theta| \leqslant \alpha$. On a donc :

$$\frac{\lambda}{1-i\mu}\,\zeta = \zeta_o + \frac{\theta}{1-i\mu} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\theta}{1-i\mu}\right| \leqslant |\theta| \leqslant \alpha$$

et $\zeta \in R$, cône non caractéristique, d'où contradiction (car $\zeta \in C(U)$) .

Donc $(S')\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$ a une solution $z_2 \in \Gamma_2$. Si $u' = z_2 - z_o$, on a donc : $\mathrm{Re}\langle u',\zeta\rangle = 0$, $\mathrm{Re}\langle u', i\zeta_o\rangle = 0$ et $\mathrm{Re}(\langle u',\zeta_o\rangle) > 0$ car $\zeta_o \in \overset{o}{\Gamma_2}$. Donc, en posant $u = \dfrac{\varepsilon u'}{\mathrm{Re}\langle u',\zeta_o\rangle}$, u appartient à $-z_o + \Gamma_2$ et si $z \in \Gamma_2$ est une solution du système (S'), $z+u$ appartient à Γ_2 et $z+u$ est solution du système $(S)\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}$. Comme (S) a des solutions dans Γ_2 , l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z-z_o,\zeta\rangle = 0$ $(\zeta \in C(U))$ coupe $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma_2$. Soit : <u>tout hyperplan caractéristique passant par</u> z_o <u>coupe</u> $\Gamma_2 \cap \tilde{H}_\varepsilon$.

Rappelons que $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ ont été fixés tels que :

$\Gamma_1 \cap \{|z-z_o| \leqslant \varepsilon'\} \subset \Omega$ et $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma_1 \subset \Omega \cap U$ avec $U = V \cap V'$.

D'après le théorème de cauchy-Kowalevski, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans un voisinage convexe $\tilde{\omega}$ de $\Gamma_1 \cap \tilde{H}_\varepsilon$. $K = \tilde{H}_\varepsilon \cap \bar{\Gamma}_2$ est un compact de $\bar{\Gamma}_2$ et $z_o \notin K$. Puisque I_2 est un voisinage de I_{81}, K est contenu dans l'ouvert Γ_1 . Comme on a aussi $K \subset \tilde{\omega}$, il existe un voisinage ouvert convexe W_1 de 0 (que l'on peut supposer inclus dans U) tel que : $K+W_1 \subset \Gamma_1 \cap \tilde{\omega}$.

Si H est un hyperplan caractéristique passant par z_o+w $(w \in W)$, $-w + H$ est caractéristique et passe par z_o , donc coupe $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma_2$ d'après ce qui précède. Donc H rencontre $w + (\Gamma_2 \cap \tilde{H}_\varepsilon) \subset W+K \subset \Gamma_1 \cap \tilde{\omega}$. Soient alors Ω' l'enveloppe convexe de $W \cap \Omega$ et de $\Gamma_1 \cap \tilde{\omega}$ (où l'on a posé $W = z_o+W_1$) , $\omega' = \tilde{\omega} \cap \Gamma_1$. Soit H un hyperplan caractéristique passant par $x \in \Omega'$. On a

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $x_1 \in \omega'$ et $x_2 \in W$. L'équation de H est donc :

$$\lambda_1 \langle z-x_1, \zeta\rangle + \lambda_2 \langle z-x_2,\zeta\rangle = 0 \quad (\text{car } \lambda_2+\lambda_2 = 1) .$$

L'hyperplan $\langle z-x_2,\zeta\rangle = 0$ coupe ω' en y_2 et H coupe ω' en $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2 \in \omega'$ car ω' est convexe. D'après le théorème 5.2.1 , f est holomorphe dans Ω' , donc dans $\Omega \cap W$.

B) <u>Fin de la démonstration</u> :

Soit $\alpha > 0$ tel que la distance de I_2 à $C(U)$ soit supérieure à 2α . Si Γ_{z_o} n'est pas réduit à un point, soit δ une droite réelle de vecteur directeur ζ telle que $\delta \cap \bar\Omega = \{z_o\}$. Pour $\varepsilon = \pm 1$, notons $I_{2,\varepsilon} = I_2 \cap \{y \in S^{2n-1} \mid \varepsilon\langle y,\zeta\rangle \geqslant 0\}$, $\delta^\varepsilon = \{\lambda\zeta \mid \varepsilon\lambda \geqslant 0\}$, Ω^ε = Enveloppe convexe de Ω et de δ^ε . En itérant le processus, on voit qu'il existe un entier p tel que les 2^p parties de S^{2n-1} $I_{2,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_p}$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ sont de diamètre $< \alpha$ et donc contenues dans un cône de révolution non caractéristique $R_{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_p}$. Le théorème résulte alors de ce que, étant vrai pour Ω^+ et Ω^- , il est vrai pour Ω .

En effet, soit V un voisinage (supposé convexe) de z_o , $g \in \mathcal{O}(\Omega \cap V)$. Alors $\Omega \cap V = (\Omega^+ \cap V) \cap (\Omega^- \cap V)$ et $[\mathrm{conv}(\Omega,\delta)] \cap V = (\Omega^+ \cap v) \cup (\Omega^- \cap V)$ sont des ouverts convexes, donc pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$ et il existe $g^\varepsilon \in \mathcal{O}(\Omega^\varepsilon \cap V)$ $(\varepsilon = \pm 1)$ tels que $g = g^+ + g^-$. Le théorème étant supposé vrai pour Ω^+ et Ω^- , on a pour $\varepsilon = \pm 1$:

$$\exists\, W^\varepsilon \in \mathcal{V}_{z_o} \; , \; \exists\, f_\varepsilon \in \mathcal{O}(\Omega^\varepsilon \cap W^\varepsilon) \; , \quad Pf^\varepsilon = g^\varepsilon .$$

Donc, $g = g^+ + g^- = P(f^+ + f^-)$ dans $\Omega \cap W$, avec $W = W^+ \cap W^-$. q.e.d.

Remarque : Le théorème reste vrai si Ω vérifie une "condition de cône" au point z_o : il existe I partie fermée et propre de S^{2n-1} telle que, pour tout voisinage I' de I, il existe un voisinage V de z et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z \in V \cap \Omega$, on ait $z + (\Gamma' \cap \{|z-z_o| < \varepsilon\}) \subset \Omega$ avec Γ' cône ouvert convexe tel que $\Gamma'^o = I'$. Cette condition est invariante par C^1 difféomorphisme.

3.3 Spectre singulier et opérateurs différentiels.

Théorème 3.3.1 (M. Sato) : Soit $P(x,\partial/\partial x)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in \mathcal{B}(\omega)$, on a :

$$SS(u) \subset SS(Pu) \quad \{(x,\xi) \in \omega \times S^{n-1} \,|\, P_m(x,\xi) = 0\} .$$

Démonstration : Soit $(x_o,\xi^o) \in \omega \times S^{n-1}$ tel que $(x_o,\xi^o) \notin SS(Pu)$ et $P_m(x_o,\xi^o) \neq 0$. Soit I_o, $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement fini de S^{n-1} tel que :

1) I_o, $I_\alpha (\alpha \in A)$ sont des parties fermées propres de S^{n-1}.

2) $\{\overset{o}{I}_o , (\overset{o}{I}_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ recouvre S^{n-1}, $\xi_o \in \overset{o}{I}_o$ et $\xi_o \notin I_\alpha$ si $\alpha \in A$.

3) $\exists V$ voisinage de x_o tel que : a) $\forall (x,\xi) \in V \times I_o$, $P_m(x,\xi) \neq 0$.

b) $\{\xi \,|\, \exists x \in V , (x,\xi) \in SS(Pu)\} \subset \bigcup_{\alpha\in A} \overset{o}{I}_\alpha$.

Soient Γ_o et Γ_α les cônes ouverts convexes de polaires respectifs I_o et I_α. On peut mettre u et $Pu = v$ sous la forme :

$$u = b(f_o) + \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) \quad , \quad f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{\omega})$$

$$Pu|_V = v|_V = \sum_{\alpha\in A} b(g_\alpha) \quad , \quad g_\alpha \in \mathcal{O}((V + i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{V}) .$$

Puisque $Pu = v$, $b(Pf_o) + \sum_{\alpha\in A} b(Pf_\alpha - g_\alpha) = 0$.

Donc, $\exists\, h_{o\alpha} \in \mathcal{O}(V + io\Gamma_{o\alpha})$, $Pf_o = \sum_{\alpha\in A} h_{o\alpha}$, $\Gamma^o_{o\alpha} = I_o \cap I_\alpha$.

Soit $\Gamma'_{o\alpha}$ un cône dont le polaire est un voisinage de $I_o \cap I_\alpha$ vérifiant : $\forall \xi \in (\Gamma'_{o\alpha})^o$, $P_m(x_o,\xi) \neq 0$.

Les fonctions $h_{o\alpha}$ sont alors holomorphes dans des ouverts du type $\Omega_{o\alpha} = (V+i\Gamma'_{o\alpha}) \cap \tilde{V}$.

Soit N une normale intérieure de $\Omega_{o\alpha}$ au point x_o , $N = \eta_1+i\eta_2$. On a : $\forall z \in \Omega_{o\alpha}$, $\mathrm{Re}(z-x_o,N) \geqslant 0$ (car $\Omega_{o\alpha}$ convexe).

Donc, $\forall u \in -x_o+V$, $\forall y \tau \Gamma'_{o\alpha}$, $u.\eta_1 + y.\eta_2 \geqslant 0$ pour $|y|$ petit.

Avec $u=0$, on obtient : $\forall y \in \Gamma'_{o\alpha}$, $|y| < \varepsilon \Longrightarrow y\eta_2 \geqslant 0$.

On en déduit que $\eta_2 \in (\Gamma'_{o\alpha})^o$.

Puisque $-x_o+V$ est un voisinage V_o de 0 et $\forall u \in V_o$, $u.\eta_1 \geqslant 0$, on a $u=0$.

Les normales en x_o à $\Omega_{o\alpha}$ sont donc du type $i\xi$, avec $\xi \in (\Gamma'_{o\alpha})^o$. Elles ne sont donc pas caractéristiques, et d'après la partie "existence" du théorème 3.2.2 : $\exists W_{o\alpha}$ voisinage de z_o , $\exists f_{o\alpha} \in (\Omega_{o\alpha} \cap W_{o\alpha})$, $Pf_{o\alpha} = g_{o\alpha}$.

Puisque $(\Gamma'_{o\alpha})^o$ est un voisinage de $I_o \cap I_\alpha$, f_o et $f_{o\alpha}$ sont holomorphes dans un ouvert $(V+i\Gamma'_o) \cap \tilde{V}'$ où $\tilde{V}'$ est un voisinage complexe de x_o et Γ'_o un cône ouvert convexe dont le polaire est un voisinage de I_o où l'on peut supposer que $P_m(x_o,\xi)$ ne s'annule pas $(\xi \in (\Gamma'_o)^o)$.

Donc, $Pf_o = \sum_{\alpha\in A} h_{o\alpha} = \sum_{\alpha\in A} P(f_{o\alpha})$ dans $(V+i\Gamma'_o) \cap \tilde{V}'$.

Puisque $P(f_o - \sum_{\alpha\in A} f_{o\alpha}) = 0$, on peut appliquer la partie "prolongement" du théorème 3.2.2 , car les normales à $(V+i\Gamma'_o) \cap \tilde{V}'$ sont de la forme $i\xi$, avec $\xi \in (\Gamma'_o)^o$, donc non caractéristiques. On en déduit que $f_o - \sum_{\alpha\in A} f_{o\alpha}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage W de x_o. On a alors :

$$u_{|W} = b(f_o - \sum_{\alpha\in A} f_{o\alpha}) + \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha + f_{o\alpha}) \ , \ f_o - \sum_{\alpha\in A} f_{o\alpha} \in \mathcal{O}(W) \ .$$

Puisque ξ_o n'appartient pas à $\Gamma_\alpha^o(\alpha \in A)$, il résulte de la définition de SSu que $(x_o,\xi^o) \notin SS(u)$.

Corollaire : Soit P un opérateur elliptique $(\forall x \in \omega, \forall \xi \neq 0, P_m(x,\xi) \neq 0\}$. Si Pu est analytique dans ω, alors u est analytique dans ω.

Démonstration : On a $SS(u) \subset SS(Pu)$ et $u \in (\omega) \Longleftrightarrow SSu = \emptyset$.

Théorème 3.3.2 : Soit P un opérateur elliptique. $\forall v \in \mathcal{B}(\omega)$, $\exists u \in \mathcal{B}(\omega)$, $Pu = v$.

Démonstration : On écrit v comme somme des valeurs au bord des fonctions g_α. Grâce au théorème de prolongement, les solutions f_α de $Pp_\alpha = g_\alpha$ au voisinage de $\omega + i\Gamma_\alpha$ ont une valeur au bord, ce qui fournit une hyperfonction solution $(u = \sum b(f_\alpha))$.

3.4 Théorème de Holmgren.

Théorème 3.4.1 (cf. Sato-Kawai-Kashiwara [10] page 471) : Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{B}(U)$. Si $(0,\pm N) = (0;(0,\ldots,0,\pm 1)) \notin SSu$ et si $\operatorname{supp} u \subset \{x_n \geqslant 0\}$ alors $0 \notin \operatorname{supp} u$.

Démonstration : Pour ε et δ fixés soient

$V = \{x \in \mathbb{R}^n / -\delta + \varepsilon(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2) < x_n < +\delta - \varepsilon(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)\}$ et

$t(x) = x_n + \varepsilon(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)$ donc $t(V) =]-\delta,+\delta[$.

Lemme 1 : Soit $\chi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \chi$ compact dans $]-\delta,+\delta[$.

On peut écrire $\chi = b(f_1) + b(f_2)$ avec $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-)$ si

$\mathbb{C}^{\pm} = \mathbb{R} \pm]0,+\infty[$. Posons par définition $\chi o t = b(f_1 o \tilde{t}) + b(f_2 o \tilde{t})$ avec $\tilde{t}(z) = z_n + \varepsilon(z_1^2+\dots+z_{n-1}^2)$.

Alors $SS\ \chi o t \subset \{(x, \pm \frac{\operatorname{grad}_x t(x)}{\|\operatorname{grad}_x t(x)\|}) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} / x \in V\}$.

<u>Preuve</u> : $f_1 o \tilde{t}(z)$ est défini si $\mathfrak{Im}\ \tilde{t}(z) > 0$.

Or $\mathfrak{Im}\ \tilde{t}(z) = y_n + 2\varepsilon(x_1 y_1+\dots+x_{n-1}y_{n-1}) = y.\operatorname{grad}_x t(x)$ et de même $f_2 o \tilde{t}(z)$ est défini si $y.\operatorname{grad}_x t(x) < 0$.

$\operatorname{grad}_x t(x)$ ne s'annulle pas donc $x \mapsto f(x) = \frac{\operatorname{grad}_x t(x)}{\|\operatorname{grad}_x t(x)\|}$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$. Si W_o est un voisinage fermé propre de $f(x_o)$, il existe un voisinage U_o de x_o tel que $x \in U_o \Longrightarrow f(x) \in W_o$.

$f_1 o \tilde{t}$ est donc défini sur $U_o + i\Gamma_{W_o}$ et $f_2 o \tilde{t}$ est défini sur $U_o - i\Gamma_{W_o}$ si Γ_{W_o} est le cône ouvert convexe dont le polaire est W_o .

W_o peut être choisi arbitrairement petit donc $(x,\xi) \in SS\ \chi o t \Longrightarrow \xi = \pm \operatorname{grad}_x t(x)$ d'où le lemme.

SSu est fermé et $(0,\pm N) \notin SSu$ donc il existe U_1 voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage de $+N$ et de $-N$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$ tels que $SSu \cap U_1 \times W = \emptyset$.

$\operatorname{grad}_x t(x) = (2\varepsilon x_1,\dots,2\varepsilon x_{n-1},1)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \leqslant \varepsilon$, alors

$$\pm \frac{\operatorname{grad}_x t(x)}{\|\operatorname{grad}_x t(x)\|} \in W .$$

$V \subset \{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 < \delta/\varepsilon \ ;\ |x_n| < \delta\}$ donc pour ε fixé comme ci-dessus, si $\delta \leqslant \varepsilon$.

$$\forall x \in V \quad \pm \frac{\operatorname{grad}_x t(x)}{\|\operatorname{grad}_x t(x)\|} \in W \text{ et si } \delta \text{ assez petit } V \subset U_1 .$$

Prenons donc ε et δ tels que $V \subset U_1$ et $\forall x \in V$

$(x, \pm \frac{\operatorname{grad}_x t(x)}{\|\operatorname{grad}_x t(x)\|}) \subset U_1 \times W$.

Soit $\chi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \chi$ compact dans $]-\delta,+\delta[$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0.

D'après le lemme on a donc $SSu \cap \overset{\vee}{SS}\, \chi o t = \emptyset$ donc on peut définir le produit $u(x)\, \chi o t(x)$.

L'application $t : V \cap \{x_n \geqslant 0\} \longrightarrow \{t \in \mathbb{R}/|t| < \delta\}$ est <u>propre</u>

$$x \longmapsto t(x) = x_n + \varepsilon(x_1^2+\dots+x_{n-1}^2)$$

donc $\operatorname{supp} \chi(t(x))$ est compact dans V donc si $\chi_V(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble V on peut définir pour toute fonction φ analytique sur V :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V(x)\ \chi(t(x))\ u(x)\ \varphi(x)\ dx \qquad \text{(voir § 2.5).}$$

<u>Lemme</u> 2 : Si $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} u(x,t+a)dt = \int_{\mathbb{R}} u(x,s)ds$.

<u>Démonstration</u> : évident puisque si $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = u(x,t)$ on a $\frac{\partial v(x,t+a)}{\partial t} = u(x,t+a)$ donc en appliquant ce lemme avec $a = \varepsilon\|x'\|^2 = \varepsilon(x_1^2+\dots+x_{n-1}^2)$ on obtient

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1\dots dx_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \chi_V(x',s)\chi(s+\varepsilon\|x'\|^2)u(x',s)\varphi(x',s)ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{R}} \chi_V(x',s-\varepsilon\|x'\|^2)\chi(s)u(x',s-\varepsilon\|x'\|^2)\varphi(x',s-\varepsilon\|x'\|^2)ds$$

$$I = \int_{-\delta}^{+\delta} \chi(t)dt \int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2<\delta/\varepsilon} u(x',t-\varepsilon\|x'\|^2)\ \varphi(x',t-\varepsilon\|x'\|^2)dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Posons $v(t) = \int_{\|x'\|^2 < \delta/\varepsilon} u(x',t-\varepsilon\|x'\|^2)\ \varphi(x',t-\varepsilon\|x'\|^2)dx_1\dots dx_{n-1}$.

D'après le théorème 2.5.1 :

$$SSv(t) \subset \{(t,\eta)/\exists x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ (x',t,0,\eta) \in SSu(x',t-\varepsilon\|x'\|^2)\} .$$

Une démonstration analogue à celle du lemme 1 montre que :

$$SSu(x',x_n-\varepsilon\|x'\|^2) \subset \{(x,\xi)/((x',x_n-\varepsilon\|x'\|^2), \frac{(\xi_1+2\varepsilon x_1,\dots,\xi_n+2\varepsilon x_{n-1},\pm 1+\xi_n)}{\|\xi_1+2\varepsilon x_1,\dots,\pm 1+\xi_n\|}) \in SSu\}$$

or $x \in V \Longrightarrow (x,\mathrm{grad}_x t(x)) \notin SSu$, donc $SSv(t) = \emptyset$.

v est analytique sur $]-\delta,+\delta[$.

Si $t < 0$ $t-\varepsilon\|x'\|^2 < 0$ donc $u(x',t-\varepsilon\|x'\|^2) \equiv 0$ donc $v = 0$.

D'après le principe du prolongement analytique $v = 0$ sur $]-\delta,+\delta[$ donc $I=0$.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(V)$ $\int_V u(x)\varphi(x)\chi(t(x))dx = 0$ donc $u(x)\chi(t(x))$ est nulle sur V en tant que fonctionnelle analytique donc d'après le théorème 2.6.1 $u\,\chi o t$ est nulle en tant qu'hyperfonction.

$\chi = 1$ au voisinage de 0 donc $u = 0$ au voisinage de 0 . q.e.d.

<u>Théorème</u> 3.4.2 (théorème d'unicité de Holmgren) : Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques au voisinage de 0 .

Supposons que l'hyperplan H , d'équation $x_n = 0$ est non caractéristique pour P au point 0 : i.e. si N est la normale à H $P_m(0,N) \neq 0$.

Alors pour toute hyperfonction u définie au voisinage de 0 :

$$\left.\begin{array}{l} Pu = 0 \\ \mathrm{Supp}\, u \subset \{x_n \leqslant 0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \notin \mathrm{Supp}\, u .$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème 3.3.1 : $SSu \subset \{(x,\xi)/P_m(x,\xi) = 0\}$

$P_m(0,\pm N) \neq 0 \Longrightarrow (0,\pm N) \notin SSu$ et on est donc ramené au théorème précédent.

4. Problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques (cf. Bony-Schapira [8]).

Considérons un opérateur différentiel $P(x,D_x)$ d'ordre m à coefficients analytiques dans la boule $B(0,R)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $P_m(x,D)$ sa partie principale.

Définition : L'opérateur P est hyperbolique dans la direction $N=(0,\dots,0,1)$ au point x_o s'il vérifie une des conditions équivalentes :

(i) $\forall \xi \in R^n \quad \xi \neq 0 \Longrightarrow P_m(x_o,N+i\xi) \neq 0$.

(ii) Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, l'équation en τ $P_m(x_o,(\xi',\tau)) = 0$ n'a que des racines réelles.

Dans ce cas, la direction N est non caractéristique pour P, i.e. $P_m(x_o,N) \neq 0$.

Démonstration : $\rightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ N est non caractéristique.

$P_m(x_o,\xi)$ est homogène en ξ, $N \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donc $P_m(x_o,N+iN) \neq 0$ donc $(1+i)^m P_m(x_o,N) \neq 0$.

$\rightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii). Prenons $\tau = \alpha+i\beta \quad \beta \neq 0$.

$$P_m(x_o,(\xi',\alpha+i\beta)) = (i\beta)^m P_m(x_o,N-\frac{i}{\beta}(\xi',\alpha)) \neq 0 \begin{cases} \text{d'après (i) si } (\xi',\alpha) \neq 0 \\ \text{car } N \text{ est non caractéristique} \\ \qquad \text{si } (\xi',\alpha) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\quad P_m(x_o,N+i\xi) = (-i)^m P_m(x_o,(-\xi',\xi_n+i)) \neq 0$

si $\xi = (\xi',\xi_n)$ est réel.

Soient $N=(0,\dots,0,1)$, H l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, $B'(0,R) = H \cap B(0,R)$ et pour tout couple (a,δ) de réels positifs soit $K(a,\delta)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0,R)$ et des points $\pm\delta a N$.

Théorème 4.1 : Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel hyperbolique dans la direction N en tout point de $B(0,R)$.

Il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $a < R$ et :

→ pour toute hyperfonction $v \in \mathcal{B}(K(a,\delta'))$ telle que $(x,\pm N) \notin SSv$ si $x \in B(0,a)$

→ pour toute famille $(w_j)_{0\leqslant j\leqslant m-1}$ d'hyperfonctions de $\mathcal{B}(B'(0,a))$

<u>il existe une et une seule hyperfonction</u> $u \in \mathcal{B}(K(a,\delta'))$ qui vérifie

$$Pu = v \quad \text{et} \quad \forall j = 0,\dots,m-1 \ (\frac{\partial}{\partial x_n})^j u_{|H} = w_j \ .$$

Remarquons tout d'abord que si $Pu = v \in \mathcal{B}(K(a,\delta))$ on peut effectivement définir $(\frac{\partial}{\partial x_m})^j u_{|H}$ et donc donner un sens aux conditions initiales du problème de Cauchy : en effet $Pu = v \Longrightarrow SSu \subset SSv \cup \{(x,\xi) | P_m(x,\xi) = 0\}$.

Or $\forall x \in B(0,R)$ $P_m(x,\pm N) \neq 0$ et par hypothèse $(x,\pm N) \notin SSv$ donc en tout point de $B'(0,a)$, $(x,\pm N) \notin SSu$ et donc on peut définir la trace de u sur H ainsi que les traces des $(\frac{\partial}{\partial x_n})^j u$ $j = 1 , m-1$.

<u>Lemme</u> 1 : Soit $P(x,D)$ vérifiant les hypothèses du théorème ; P s'étend holomorphiquement à un opérateur $P(z,D)$ défini sur un voisinage complexe W de $B(0,R)$.

Pour tout $R' < R$, il existe $C > 0$ et U voisinage complexe de $B(0,R') \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\forall\, z = x+iy \in U$ $\forall \zeta = \xi+i\eta \in \mathbb{C}^n$ $\forall \tau \in \mathbb{C}$

$$P_m(z,\xi + \tau N) = 0 \Longrightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leqslant C(|\eta| + |\xi||y|) \ .$$

<u>Lemme</u> 2 : Soit $\pi(z,\tau)$ un polynôme de degré m en τ à coefficients holomorphes dans un ouvert $\tilde{V}$ de $\mathbb{C}^n$. On suppose que le coefficient de τ^m est 1 et que l'équation $\pi(z,\tau) = 0$ n'a que des racines en τ réelles pour z réel ($z \in V = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^n$) .

Alors pour tout compact K de $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ tels que :

$$\pi(z,\tau) = 0, \mathrm{Re}\, z \in K, |\mathfrak{Im}\, z| < \varepsilon \Longrightarrow |\mathfrak{Im}\,\tau| \leqslant C|\mathfrak{Im}\, z| .$$

Montrons que le lemme 1 se déduit du lemme 2 :

$$P_m(z,\zeta+\tau N) = a_{(0,\ldots 0,m)}(z)(\tau+\zeta_n)^m + \sum_{\substack{i<m \\ |\alpha'|+i=m}} a_{(\alpha',i)}\zeta'^{\alpha'}(\zeta_n+\tau)^i .$$

N est non caractéristique donc $P_m(z,N) = a_{(0,0\ldots 0m)}(z) \neq 0$ donc l'opérateur $[a_{(0,\ldots 0m)}(z)]^{-1}P(z,D)$ a les mêmes propriétés que $P(z,D)$ et on peut donc supposer que le coefficient de τ^m dans $P(z,\zeta+\tau N)$ est 1.

Appliquons le lemme 2 en prenant $P_m(z,\zeta+\tau N)$ pour $\pi(z,\tau)$, (z,ξ) pour z , $\tilde{V} = W \times \mathbb{C}^n$, $K = B(0,R') \times \{|\xi| = 1\}$: il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que

$$(P_m(z,\zeta+\tau N) = 0 , z = x+iy , |x| < R', |y| < \varepsilon , |\xi| = 1 , |\eta| < \varepsilon)$$

$$\Longrightarrow |\mathfrak{Im}\,\tau| \leqslant C(|y| + |\eta|) .$$

On en déduit par homogénéité :

$$P_m(z,\zeta+\tau N) = 0 , |x| < R', |y| < \varepsilon , |\eta| < \varepsilon|\xi| \Longrightarrow |\mathfrak{Im}\,\tau| < C(|y||\xi| + |\eta|) .$$

Par ailleurs N est non caractéristique donc $P_m(z,\zeta+N) \neq 0$ si $\zeta = 0$ et z varie dans le compact $\overline{B(0,R')} + i[-\varepsilon,+\varepsilon]$ sur lequel P_m est défini, donc il existe $C_1 > 0$ tel que $P_m(z,\zeta+N) = 0 \Longrightarrow |\zeta| > C_1$, d'où par homogénéité $\forall z$ tel que $|x| < R'$, $|y| < \varepsilon$, $P_m(z,\zeta+\tau N) = 0 \Longrightarrow |\zeta| > C_1|\tau|$ si de plus $|\eta| \geqslant \varepsilon|\xi|$ on a $|\mathfrak{Im}\,\tau| \leqslant |\tau| \leqslant \frac{1}{C_1}(|\xi|+|\eta|) \leqslant C_1'|\eta| \leqslant C_1'(|\eta|+|\xi||y|)$, d'où finalement $\forall z \in B(0,r') + iB(0,\varepsilon)$ $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n$ $P_m(z,\zeta+\tau N) = 0 \Longrightarrow$

$$|\mathfrak{Im}\,\tau| \leqslant C(|\eta|+|\xi||y|) .$$

Pour la démonstration du lemme 2, nous utiliserons une version modifiée du théorème des tubes de Bochner :

Théorème 4.A (Théorème classique des tubes de Bochner) :

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et f holomorphe dans $\mathbb{R}^n+i\Omega$. Alors f se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{R}^n+i\tilde{\Omega}$ où $\tilde{\Omega}$ désigne l'enveloppe convexe de Ω.

Théorème 4.B (Kashiwara [3], Komatsu [4]) :

Soit L la partie de $\mathbb{C}^n$ définie par :

$$L = \{(x+iy) \in \mathbb{C}^{n+1}/|(x_1,\ldots x_n)| < r_1, |x_{n+1}| < r_2, y_1 = \ldots + y_n = 0, 0 < y_{n+1} \leqslant b\}.$$

Si f est une fonction holomorphe au voisinage de L, pour tout $a_1 < r_1$ et tout $a_2 < r_2$ il existe une constante $C > 0$ telle que f est holomorphe dans l'ouvert

$$\tilde{L} = \{(x+iy) \in \mathbb{C}^{n+1}/|(x_1,\ldots x_n)| < a_1, |x_{n+1}| < a_2, |(y_1,\ldots,y_n)| < C|y_{n+1}|,$$
$$0 < y_{n+1} < b\}.$$

Démonstration du lemme 2 : Le coefficient dominant de $\pi(z,\tau)$ est 1 donc si z varie dans un compact, les zéros de $\pi(z,\tau)$ restent dans un compact donc si K est un compact de $V = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^n$, il existe k tel que :

$$\pi(z,\tau) = 0, z \in K \Longrightarrow |\tau| \leqslant k.$$

Par ailleurs, d'après la compacité de K, il existe $r > 0$ et un nombre fini de points $x_1,\ldots,x_p$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,r)$ et $\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,2r) \subset V$.
De plus il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_i,r) + i[-\varepsilon,+\varepsilon] \subset \tilde{V}$ pour $i = 1,\ldots p$.

Plaçons-nous dans une de ces boules que l'on peut supposer centrée en 0 et appliquons le théorème 4.B à $f(z,\tau) = \frac{1}{\pi(z,\tau)}$ qui est holomorphe au voisinage de $L = \{(z,\tau) \in \mathbb{C}^{n+1}/|x| < 2r, |\mathrm{Re}\tau| < k+1, y = 0, 0 < \mathrm{Im}\tau \leqslant k+1\}$ alors il existe $C > 0$ tel que f est défini sur $\tilde{L}$ (donc $\pi(z,\tau) \neq 0$ sur $\tilde{L}$) avec

$$\tilde{L} = \{(z,\tau)/|x| < r, |\mathrm{Re}\tau| < k+\tfrac{1}{2}\ |y| < C|\mathfrak{Im}\tau|, 0 < \mathfrak{Im}\tau < k+1\} .$$

Or $\pi(z,\tau) = 0 \Longrightarrow |\mathrm{Re}\tau| \leqslant |\tau| \leqslant k < k+\frac{1}{2}$ et $|\mathfrak{Im}\tau| \leqslant |\tau| < k+1$, donc

$$|x| < r, \mathfrak{Im}\tau > 0, \pi(z,\tau) = 0 \Longrightarrow C|\mathfrak{Im}\tau| \leqslant |y| .$$

On répète l'opération sur chaque boule $B(x_i,2r)$ et pour $\mathfrak{Im} z < 0$ et on obtient le lemme 2.

<u>Traduction géométrique du lemme</u> 1.

Posons $\mathbf{A}_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C}^n / \exists z = x+iy, |x| < R', |y| \leqslant \varepsilon, P_m(z,\zeta) = 0\}$.

<u>Proposition</u> 4.1 : Si l'on conserve les notations du lemme 1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a < R'$ et tout $\varepsilon > 0$, tout hyperplan passant par le point $\delta a\ N = (0,\ldots,0,\delta a)$, de normale dans $\mathbf{A}_\varepsilon$ coupe l'ensemble

$$D(a,\varepsilon) = \{z = x+iy \in \mathbb{C}^n / |(x_1,\ldots,x_{n-1})| \leqslant a, |(y_1,\ldots,y_{n-1})| \leqslant \varepsilon , x_n = y_n = 0\}$$

$$= B'(0,a) + i\{|y'| \leqslant \varepsilon\} .$$

<u>Preuve</u> : Il faut montrer la compatibilité des équations :

$$\mathrm{Re} < z-\delta a N,\zeta> = 0 \quad x_n = y_n = 0 \quad |x'| < a \quad |y'| < \varepsilon ,$$

sachant que $\zeta \in \mathbf{A}_\varepsilon$ donc $P_m(z,i\zeta',i\zeta_n) = 0$ donc $|\zeta_n| \leqslant C(\varepsilon|\eta'|+|\xi'|)$.

Soit $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $|x'| < a$ et $\langle x',\xi'\rangle = \frac{a}{2}|\xi'|$ et soit $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $|y'| < \varepsilon$ et $\langle y',\eta'\rangle = \frac{\varepsilon}{2}|\eta'|$

$$\langle x',\xi'\rangle + \langle y',\eta'\rangle > \frac{a}{2}|\xi'| + \frac{\varepsilon}{2}|\eta'| \geqslant C\delta_a(\varepsilon|\eta'| + |\xi'|) \geqslant \delta a\ \zeta_n ,$$

à condition que $C\delta a \leqslant \frac{a}{2}$ et $C\delta a\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ donc si $\delta < \inf(\frac{1}{2C}, \frac{1}{2CR'})$ donc $\exists \lambda \leqslant 1$ tel que $\langle\lambda x',\xi'\rangle = -\langle\lambda y',\eta'\rangle + \delta a\ \zeta_n$.

Donc $\exists x',y'$ $|x'| < a$ $|y'| \leqslant \varepsilon$ tels que si $z = (x',0) + i(y',0)$

$$\langle \mathrm{Re} z - \delta a N,\zeta\rangle = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Démonstration du théorème</u> : Soient $(\Gamma'_\alpha)_{\alpha\in A}$ des cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que les intérieurs $\overset{\circ}{I'_\alpha}$ de leurs polaires respectifs I'_α recouvrent S^{n-2}.

Rappelons que $B'(0,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n = 0 \; \|(x_1,\dots,x_{n-1})\| < a\}$.

Puisque $(x,\pm N)$ n'est pas dans SSv si $x \in K(a,\delta)$ ($K(a,\delta)$ désignant l'intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0,a)$ et de $\pm\delta a N$), il existe un voisinage V de N dans S^{n-1} tel que : $\forall\, x \in K(a,\delta)$, $\forall\, \xi \in V$, $(x,\pm\xi) \notin SSv$.

Fixons M assez grand pour que, I_α désignant l'ensemble

$\{(\xi',\xi_n) \in S^{n-1} / \exists\, \lambda > 0$, $\lambda\xi' \in I'_\alpha$ et $|\lambda\xi_n| \leqslant M\}$, on ait :

$$S^{n-1} = V \cup (-V) \cup \Big(\bigcup_{\alpha\in A} \overset{\circ}{I_\alpha}\Big).$$

Si Γ_α est le cône ouvert convexe de polaire I_α, on a : $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \{y_n = 0\}$.

Puisque $SSv \subset \bigcup_{\alpha\in A} \overset{\circ}{I_\alpha}$, $\exists\, g_\alpha \in \mathcal{O}((K(a,\delta)+i\Gamma_\alpha)\cap\tilde{\omega})$, $v = \sum_{\alpha\in A} b(g_\alpha)$.

Puisque $S^{n-1} = \bigcup_{\alpha\in A} \overset{\circ}{I'_\alpha}$, $\exists\, h_{\alpha j} \in \mathcal{O}((B'(0,a)+i\Gamma'_\alpha)\cap\tilde{\omega}')$, $w_j = \sum_{\alpha\in A} b(h_{\alpha j})$.

Comme la direction $\pm N$ n'est caractéristique pour $P(z,\partial/\partial z)$ en aucun point de $B'(0,a)$, il existe pour $\alpha \in A$ une solution f_α et une seule du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Pf_\alpha = g_\alpha \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^j f_\alpha\Big|_{z_n=0} = h_{\alpha j}(z')\ ,\ j=0,\dots,m-1 \end{cases}$$

holomorphe au voisinage de $\{x_n = y_n = 0$, $x'+iy' \in (B'(0,a) + i\Gamma'_\alpha)\cap\tilde{\omega}'\}$.

Pour montrer que f_α admet une valeur au bord dans $K(a,\delta)$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3 :

Notation : Si Γ est un cône, $\Gamma_{(\varepsilon)}$ désigne l'intersection de Γ et de la boule $B(0,\varepsilon)$.

Il existe une constante $\delta' > 0$ vérifiant :

Toute fonction f holomorphe au voisinage de $B'(0,r) + i\Gamma_{(\varepsilon)} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ pour un $\varepsilon > 0$, un nombre r tel que $0 < r < a$ et un cône ouvert convexe Γ' de $\mathbb{R}^{n-1}$ et qui a la propriété que, pour un cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{R}^n$ contenant Γ', Pf se prolonge holomorphiquement dans $K(r,\delta') + i\Gamma_{(\varepsilon)}$, se prolonge elle-même dans un ouvert de type $K(r,\delta') + i\tilde{\Gamma}_{(\varepsilon')}$, $\tilde{\Gamma}$ étant un cône convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant Γ' et $\varepsilon' > 0$.

Admettons provisoirement le lemme. Soient $a_n = a(1-\frac{1}{n})(n \geqslant 2)$ et $B'_n = B'(0,a_n)$. Pour $n \geqslant 2$, la fonction f_α vérifie les hypothèses du lemme pour un $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$, avec $r = a_n$, $\Gamma' = \Gamma'_\alpha$ et $\Gamma = \Gamma_\alpha$. Il existe donc $\varepsilon'_n > 0$ et Γ^n_α cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant Γ'_α tels que f_α soit holomorphe dans $K_n + i\,\Gamma^n_{\alpha,(\varepsilon'_n)}$. On peut supposer que $\Gamma^m_\alpha \subset \Gamma^n_\alpha$ si $m \leqslant n$ (cela résulte de la démonstration du lemme). f_α est donc holomorphe dans l'ouvert $\bigcup_{n\geqslant 2} (K(a_n,\delta') + i\Gamma^n_{\alpha,(\varepsilon'_n)})$ qui contient un ouvert de la forme $(K(a,\delta') + i\Gamma^2_\alpha) \cap \tilde{\omega}$ où $\tilde{\omega}$ est un voisinage complexe de $K(a,\delta')$. Puisque $\Gamma'_\alpha \subset \Gamma^2_\alpha \cap \mathbb{R}^{n-1}$, on peut définir $b(f_\alpha)$ et $b(f_{\alpha}|_{z_n=0})$. On a donc, en posant $u = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha)$:

$$\left\{\begin{array}{l} P_u = \sum_{\alpha\in A} b(Pf_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} b(g_\alpha) = v \\ (\frac{\partial}{\partial z_n})^j u|_{z_n=0} = \sum_{\alpha\in A} b[(\frac{\partial}{\partial z_n})^j f|_{z_n=0}] = \sum_{\alpha\in A} b(h_{\alpha j}) = w_j \, . \end{array}\right.$$

<u>Preuve du lemme</u> :

1) Soit D' une demi-droite contenue dans Γ'. Il existe une constante C $(0 < C < 1)$ telle que pour tout $y' \in D'$, les boules $B'(y', C|y'|)$ et $B(y', C|y'|)$ sont contenues dans Γ' et Γ respectivement. D'après le théorème de Cauchy-Kovalevski précisé (th. 3.1.1) ; il existe une constante $c > 0$ telle que f soit holomorphe dans $B(x', ck) + iB(y', ck)$ (avec $k = \inf(C|y'|, r-|x'|))$ chaque fois que $B'(y', C|y'|) \subset \Gamma'_{(\varepsilon)}$ et que $B(y', C|y'|) \subset \Gamma_{(\varepsilon)}$. Ces deux conditions sont réalisées si $|y'| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{1+C}$. Lorsque $y' \in D'$, $|y'| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $x' \in B'(0,r)$, f est holomorphe dans $B(x', ck) + iB(y', ck)$ où $k = \inf(C|y'| r - |x'|)$. En faisant varier x' et D' et en restreignant au besoin C, on voit qu'il <u>existe un cône ouvert convexe</u> Γ^1 <u>de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>contenant</u> Γ', <u>et tel que</u> f <u>soit holomorphe dans un voisinage ouvert et convexe de</u> $B'(0,r) + i\Gamma^1_{(\frac{\varepsilon}{2})}$.

2) Soit $\gamma \in \Gamma'$ un vecteur de norme 1. Il existe une constante μ $(0 < \mu < \frac{1}{2})$ telle que $\{|y' - \lambda\gamma| < \lambda\mu\}$ soit contenu dans Γ' pour tout $\lambda > 0$.

D'après la traduction géométrique du lemme 1 (prop. 4.1) si $\eta > 0$, tout hyperplan de normale appartenant à A_η et passant par $\delta r N$ coupe $B'(0,r) + i\{|y'| < \eta\}$.

En transformant cette situation par translation et homothétie, on obtient :

<u>Tout hyperplan de normale dans</u> A_α <u>et passant par</u> $\mu\delta r N + i\frac{\alpha}{2}\gamma$ <u>coupe l'ensemble</u> $B'(0,r) + i\{|y' - \frac{\alpha}{2}\gamma| < \mu\alpha\} \subset B'(0,r) + i\Gamma'_{(\alpha)}$ (car $0 < \mu < \frac{1}{2}$).

3) Soient $C(\alpha,\gamma)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de $(B'(0,r) + i\Gamma_{(\alpha)}$ et du point $\mu\delta rN + i\alpha\gamma$, $\Omega = \bigcup_{0<\alpha<\frac{\varepsilon}{2}} C(\alpha,\gamma)$, δ' un nombre fixé tel que $0 < \delta' < \mu\delta$, $x^o \in K(r,\delta')$, E_{x^o} le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ d'équations $x = x^o$ (i.e. $x_1 = x_1^o, \ldots x_n = x_n^o$, $y \in \mathbb{R}^n$) et $\Omega_{x^o} = \Omega \cap E_{x^o}$. Désignons par $\mathcal{H}_\alpha$ l'homothétie de centre $\mu\delta rN + i\alpha\gamma$ et de rapport $\frac{\mu\delta r - x_n^o}{\mu\delta r}$. Puisque $x_o \in K(r,\delta')$ on a : $\frac{\mu\delta r - x_n^o}{\mu\delta r} > \frac{\delta - \delta'}{\delta} > 0$.

Ω_{x^o} contient l'ensemble $\bigcup_{0<\alpha<\frac{\varepsilon}{2}} \mathcal{H}_\alpha(\Gamma^1_{(\alpha)})$. Or, $\bigcup_{0<\alpha<\frac{\varepsilon}{2}} \mathcal{H}_\alpha(\Gamma^1_{(\alpha)})$ contient un ouvert de la forme $\tilde{\Gamma}'_{(\varepsilon')}$ pour un $\varepsilon' > 0$ (on peut prendre $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{\delta'}{\mu\delta r})$) et un cône ouvert convexe $\tilde{\Gamma}'$ tel que $\tilde{\Gamma}' \cap \mathbb{R}^{n-1}$ contienne Γ' (en effet, le cône $\Gamma^1 \cap \mathbb{R}^{n-1}$ contient Γ') .

4) Avec le nombre $\delta' > 0$ fixé au 3), montrons que si Pf est holomorphe dans $K(r,\delta') + i\Gamma_{(\varepsilon)}$, f se prolonge à $K(r,\delta') + i\tilde{\Gamma}_{(\varepsilon')}$. Γ et $\tilde{\Gamma}'$ contiennent Γ' , leur intersection $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \tilde{\Gamma}'$ est non vide et c'est donc un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant Γ' . Soient $x_o \in K(r,\delta')$, $C_{x_o}(\alpha,\gamma) = C(\alpha,\gamma) \cap \{x_o + i\tilde{\Gamma}\}$ et $D(x_o,\alpha,\gamma)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de $(B'(0,r) + i\Gamma_{(\alpha)})$ et de $C_{x_o}(\alpha,\gamma)$. Par construction, $D(x_o,\alpha,\gamma)$ est contenu dans $C(\alpha,\gamma)$ et Pf est holomorphe dans $D(x_o,\alpha,\gamma)$. Si $z = x+iy \in D(x_o,\alpha,\gamma)$, on a $|y| \leqslant \alpha$ et les directions caractéristiques de P en un point de $D(x_o,\alpha,\gamma)$ appartiennent à A_α . D'après 2), tout hyperplan caractéristique coupant $D(x_o,\alpha,\gamma)$ coupe aussi $(B'(0,r) + i\Gamma'_{(\alpha)})$ et d'après 1), f est holomorphe au voisinage de $B'(0,r) = i\Gamma'_{(\alpha)}$. En appliquant le théorème 3.2.1, on obtient un prolongement holomorphe de f à $D(x_o,\alpha,\gamma)$. f est donc holomorphe dans l'ouvert

$V = \bigcup_{\substack{0<\alpha<\frac{\varepsilon}{2} \\ x_o \in K(r,\delta')}} D(x_o,\alpha,\gamma)$. Par définition de $D(x_o,\alpha,\gamma)$, l'ouvert $V \cap E_{x_o}$ contient l'ouvert $\tilde{\Gamma}_{(\varepsilon')}$ et f est donc holomorphe dans $K(r,\delta') + i\tilde{\Gamma}_{(\varepsilon')}$.

Partie II : Microfonctions et équations pseudo-différentielles.

1. Definition des microfonctions.

1.1 Introduction : le faisceau $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

1.1.1 : Proposition 1.1.1.

a) Le préfaisceau $\omega \mapsto \frac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$ est un faisceau de base $\mathbb{R}^n$.

b) Ce faisceau est flasque.

Démonstration : a) Soient $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$ et $u_i \in \frac{\mathcal{B}(\omega_i)}{\mathcal{A}(\omega_i)}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in I\times I \ , \ u_i|_{\omega_{ij}} = u_j|_{\omega_{ij}} \qquad (\omega_{ij} = \omega_i \cap \omega_j) .$$

Pour $i \in I$, soit $\tilde{u}_i \in \mathcal{B}(\omega_i)$ un représentant de u_i.

Les fonctions $\psi_{ij} = \tilde{u}_i - \tilde{u}_j$ sont analytiques dans ω_{ij} et,

$$\forall i,j,k \in I \ , \quad \psi_{ij} + \psi_{jk} + \psi_{ki} = 0 \ \text{ dans } \omega_{ijk} .$$

$(\psi_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ est donc un 1-cocycle et, le faisceau $\mathcal{A}$ étant cohomologiquement trivial $(\forall q \geq 1 \ , \ H^q(\omega,\mathcal{A}) = 0)$, il existe des fonctions $\psi_i \in \mathcal{A}(\omega_i)$ telles que : $\forall (i,j) \in I^2$, $\psi_{ij} = (\psi_i - \psi_j)|_{\omega_{ij}}$.

Donc, $\forall (i,j) \in I^2$, $\tilde{u}_i - \psi_i = \tilde{u}_j - \psi_j$ dans ω_{ij}.

Si $\tilde{v}_i = \tilde{u}_i - \psi_i \in \mathcal{B}(\omega_i)$, $\tilde{v}_i$ est un représentant de u_i et, puisque $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j$ dans ω_{ij}, il existe une section $\tilde{v} \in \mathcal{B}(\omega)$ telle que : $\forall i \in I$, $\tilde{v}|_{\omega_i} = \tilde{v}_i$.
Si v est l'image canonique de $\tilde{v}$ dans $\frac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$ on a donc : $i \in I$, $v|_{\omega_i} = v_i$.
$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ est donc un faisceau.

b) $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ est flasque. Soit $u \in \frac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$. Si $\tilde{u} \in \mathcal{B}(\ )$ est un représentant de u, il existe un prolongement $\tilde{v}$ de $\tilde{u}$ à $\mathbb{R}^n$, car $\mathcal{B}$ est flasque. Si v est l'image de $\tilde{v}$ dans $\dfrac{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$, on a $\tilde{v}|_\omega = \tilde{u}$ et $v|_\omega = u.v$ est donc un prolongement de u à $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 : Décomposition de $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ en dimension 1.

Soient $\omega \subset \mathbb{R}^1$ et $u \in \mathcal{B}(\omega)$. Il existe un voisinage complexe $\tilde{\omega}$ de ω et des fonctions $f^{\pm} \in \mathcal{O}((\omega + i\mathbb{R}^{\pm}) \cap \tilde{\omega})$ telles que : $u = b(f^+) - b(f^-)$.

Si $u = 0$, il existe une fonction φ holomorphe dans $\tilde{\omega}$ qui prolonge f^+ et f^-.

Désignons par $\mathcal{B}^{\pm}(\omega)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}(\omega)$ valeur au bord d'une fonction holomorphe dans $(\omega + i\mathbb{R}^{\pm}) \cap \tilde{\omega}$. D'après les remarques précédentes, $\dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$ est somme directe de $\dfrac{\mathcal{B}^+(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$ et de $\dfrac{\mathcal{B}^-(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$.

Cette décomposition correspond à celle du spectre singulier de u en éléments de type $(x,+1)$ et $(x,-1)$ et la somme directe $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}^+ \oplus \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}^-$ peut être considérée comme un faisceau de base $\mathbb{R} \times \{-1,+1\}$. Le paragraphe suivant généralise cette construction.

1.2 Microfonctions et valeurs au bord (cf Sato-Kawai-Kashiwara [10]).

Définition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. On pose :

$$\mathcal{C}(U) = \frac{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}{\{u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid SS(u) \cap U = \emptyset\}} .$$

Théorème 1.2.1 :

1) Si $U \subset \omega \times S^{n-1}$, $\mathcal{C}(U) = \dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSu \cap U = \emptyset\}}$.

2) Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1}) = \dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$.

3) Si $u \in \mathcal{B}(\omega)$, on associe à u son image canonique $\tilde{u}$ dans $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1})$.

Alors deux éléments u_1 et u_2 de $\mathcal{B}(\omega)$ ont même image si et seulement si $u_1 - u_2$ est analytique dans ω. On a de plus : $SS(u) = \operatorname{supp} \tilde{u}$.

Démonstration : 1) Notons provisoirement $\mathscr{C}'(U)$ le quotient $\dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSu \cap U = \emptyset\}}$.

Si $u \in \mathscr{C}(U)$, soit $\bar{u} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ un représentant de u et u' l'image de $\bar{u}_{|\omega}$ dans $\mathscr{C}'(U)$. L'application $u \mapsto u'$ est bien définie car si $v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $U \cap SSv = \emptyset$, $U \cap SS(v_{|\omega}) = \emptyset$.

Si $u' \in \mathscr{C}'(U)$, soit $\bar{u}' \in \mathcal{B}(\omega)$ un représentant de u', $\bar{u} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ un prolongement de $\bar{u}'$ à $\mathbb{R}^n$ et u l'image de $\bar{u}$ dans $\mathscr{C}(U)$. L'application $u' \mapsto u$ est bien définie (i.e. ne dépend ni des représentants ni des prolongements choisis) car si $v \in \mathcal{B}(\omega)$ et $U \cap SS(v) = \emptyset$, on a $U \cap SS(\bar{v}) = \emptyset$ pour tout prolongement $\bar{v} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de v (la section de $SS\bar{v}$ au-dessus d'un point $x \in \omega$ ne dépend que de la restriction de $\bar{v}$ à un voisinage arbitraire de x, ω par exemple).

Enfin, les applications $u \mapsto u'$ et $u' \mapsto u$ sont évidemment des bijections réciproques et $\mathscr{C}(U) \simeq \mathscr{C}'(U)$.

2) Si $U = \omega \times S^{n-1}$, $\{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSu \cap U = \emptyset\} = \{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSu = \emptyset\} = \mathcal{A}(\omega)$ et par conséquent $\mathscr{C}(\omega \times S^{n-1}) = \dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$.

3) D'après 2), u_1 et $u_2 \in \mathcal{B}(\omega)$ ont même image dans $\mathscr{C}(\omega \times S^{n-1})$ si et seulement si $u_1 - u_2 \in \mathcal{A}(\omega)$.

Si U est un ouvert de $\omega \times S^{n-1}$ et $\bar{u} \in \mathcal{B}(\omega)$ est un représentant de $u \in \mathscr{C}(\omega \times S^{n-1})$, on a :

$$\mathrm{Supp}\, u \cap U = \emptyset \Longleftrightarrow u_{|U} = 0 \Longleftrightarrow SS\bar{u} \cap U = \emptyset .$$

Les fermés $SS\bar{u}$ et $\mathrm{supp}\, u$ de $\omega \times S^{n-1}$ sont donc égaux.

Théorème 1.2.2 : Le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ est un faisceau flasque de base $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$.

Démonstration : Avec la définition choisie ci-dessus, il est certainement très difficile de montrer que $\mathcal{C}$ est un faisceau. Par contre, on voit facilement que $\mathcal{C}$ est flasque. En effet, si $\bar{u} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est un représentant de $u \in \mathcal{C}(U)$, l'image de $\bar{u}$ dans $\dfrac{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)}$ est un prolongement de u .

Dans S.K.K. [10], on introduit d'abord, par voie cohomologique, un faisceau $\mathcal{C}$, puis on démontre (ce qui n'est pas facile) que $\mathcal{C}$ est flasque, et enfin que $\mathcal{C}(U)$ est l'espace défini ci-dessus.

Théorème 1.2.3 : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I une partie fermée et propre de S^{n-1} , polaire de Γ . On a alors :

$$\{u \in \mathcal{C}(\omega \times S^{n-1}) \mid \mathrm{supp}\, u \subset \omega \times I\} \cong \frac{\mathcal{O}(\omega + i o \Gamma)}{\mathcal{A}(\omega)} .$$

Démonstration : Soit $\bar{u} \in \mathcal{B}(\omega)$ un représentant de $u \in \mathcal{C}(\omega \times S^{n-1}) = \dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$. D'après le théorème 1.2.1 , $\mathrm{supp}\, u = SS\bar{u}$ et il suffit de démontrer le

Lemme : Soit I une partie fermée et propre de S^{n-1} , polaire du cône ouvert convexe Γ . Alors $\mathcal{O}(\omega + i o \Gamma) \cong \{v \in \mathcal{B}(\omega) \mid SSv \subset \omega \times I\}$.

Preuve du lemme : Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages fermés et propres de I , avec $I_{n+1} \subset I_n$. Soit (ω_n) une famille croissante d'ouverts tels que $\omega_n \subset\subset \omega_{n+1}$ et $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$.

Puisque $\omega \times \overset{\circ}{I}_n$ recouvre SSv , on a pour tout n :

$v_{|\omega_n} = b(f_n)$ avec $f_n \in \mathcal{O}((\omega_n+i\Gamma_n) \cap \{|y_n| < \varepsilon_n\})$ (avec $\Gamma_n^o = I_n$) .

On peut de plus supposer que la suite (ε_n) est décroissante.

Si $m \geqslant n$, on a : $v_{|\omega_n} = b(f_n) = b(f_m)$. Donc, si $\Omega_p = (\omega_p+i\Gamma_p) \cap \{|y| < \varepsilon_p\}$, f_n et f_m coïncident dans $\Omega_n \cap \Omega_m$ et cette intersection est connexe. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit donc un élément unique f de $\mathcal{O}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n)$.

On a alors : $u = b(f)$ et $f \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma)$.

1.2.4 : Précisions sur le théorème de décomposition.

1) Lemme : Soit $\mathcal{F}$ un faisceau flasque de base X et soient $F_1,\dots,F_n$ des fermés de X . Si $u \in \mathcal{F}(X)$ et si $\operatorname{supp} u \subset F_1 \cup \dots \cup F_n$, il existe alors $u_1,\dots,u_n \in \mathcal{F}(X)$ tels que $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\operatorname{supp} u_i \subset F_i$.

Démonstration : Par récurrence, on se ramène au cas où $n = 2$.

Soit $v \in \mathcal{F}(X \setminus (F_1 \cap F_2))$ défini par : $\begin{cases} v = u & \text{sur } X \setminus F_1 \\ v = 0 & \text{sur } X \setminus F_2 \end{cases}$

$\mathcal{F}$ étant flasque, v se prolonge en $\tilde{v} \in \mathcal{F}(X)$.

Si $u_1 = u-\tilde{v}$ et $u_2 = \tilde{v}$, on a bien $u = u_1+u_2$ et $\operatorname{supp} u_1 \subset F_1$ (car $\tilde{v} = u$ sur $X \setminus F_1$) , $\operatorname{supp} u_2 \subset F_2$ (car $\tilde{v} = v = 0$ sur $X \setminus F_2$) .

2) Théorème 1.2.4 : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(\Gamma_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de cônes ouverts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{B}(\omega)$ telle que :

$SSu \subset \bigcup_{j=1}^{n} \omega \times \Gamma_j^o$.

Il existe alors des fonctions $f_j \in \mathcal{O}(\omega+io\Gamma_j)$ telles que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} b(f_j) .$$

Démonstration : Soit $\tilde{u}$ l'image de u dans $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1}) = \dfrac{\mathcal{B}(\omega)}{\mathcal{A}(\omega)}$. D'après le théorème 1.2.1 , $\operatorname{Supp} \tilde{u} = SSu \subset \bigcup_{j=1}^{n} \omega \times \Gamma_j^o$.

D'après le lemme, il existe $v_1,\dots,v_n \in \mathscr{C}(\omega \times S^{n-1})$ ($\mathscr{C}$ est flasque) telles que : $\tilde{u} = \sum_{j=1}^{n} v_j$ et $\operatorname{supp} v_j \subset \omega \times \Gamma_j^o$. Si $u_j \in \mathscr{B}(\omega)$ est un représentant de v_j, $SSu_j = \operatorname{supp} v_j \subset \omega \times \Gamma_j^o$. Donc (théorème 1.2.3), il existe une fonction $f_j \in \mathscr{O}(\omega + io\Gamma_j)$ telle que $u_j = b(f_j)$.

L'image de $u - \sum_{j=1}^{n} u_j$ dans $\mathscr{C}(\omega \times S^{n-1})$ étant nulle, il existe une fonction $f \in \mathscr{A}(\omega)$ telle que $u = f + \sum_{j=1}^{n} u_j$. Si $\tilde{f}$ est un prolongement holomorphe de f à un voisinage complexe de ω, on a :

$$u = b(f_1 + \tilde{f}) + \sum_{j=2}^{n} b(f_j) \ , \ f_1 + \tilde{f} \in \mathscr{O}(\omega + io\Gamma_1)$$

$$f_j \in \mathscr{O}(\omega + io\Gamma_j) \qquad (2 \leqslant j \leqslant n) .$$

1.3 <u>Propriétés élémentaires des microfonctions : opérateurs différentiels, traces, intégration le long des fibres et produit tensoriel.</u>

1.3.1 : <u>Opérateurs différentiels.</u>

Soit $P(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Puisque, pour $u \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, $SSPu$ est contenu dans SSu, l'application $u \mapsto Pu(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ définit par passage au quotient une application de $\mathscr{C}(U) = \dfrac{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}{\{u \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \mid SSu \cap U = \emptyset\}}$ dans $\mathscr{C}(U)$, que l'on notera encore P.

<u>Remarque</u> : Si P est un opérateur différentiel dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\omega \times S^{n-1}$, P définit de même une application de $\mathscr{C}(U)$ dans $\mathscr{C}(U)$ (car $\mathscr{C}(U) = \dfrac{\mathscr{B}(\omega)}{\{u \in \mathscr{B}(\omega) \mid SSu \cap U = \emptyset\}}$).

1.3.2 : <u>Trace.</u>

On démontre dans [10] le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1.3.2 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$ et u une microfonction définie dans un voisinage ouvert de $\{(x,0;\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{p+q} \times S^{p+q-1} | (x,\xi) \in U\}$ et telle que la projection $\pi : (x,0;\xi,\tau) \mapsto (x,\xi)$ soit propre sur le support de u. On peut alors définir "de façon naturelle" la restriction de u à $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$, microfonction sur U notée $u|_{\mathbb{R}^p \times S^{p-1}}$. On a de plus : $\text{supp}\, u|_{\mathbb{R}^p \times S^{p-1}} \subset \pi(\text{supp}\, u)$. Cette notion de trace est compatible avec la notion de trace des hyperfonctions (au sens précisé ci-dessous).

b) <u>Compatibilité avec les hyperfonctions</u> :

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$, $u \in \mathcal{B}(\omega)$ telle que $SSu \cap \{(x,0;0,\tau) | (x,0) \in \omega$ et $\tau \in S^{q-1}\}$ soit vide et $\tilde{u}$ l'image de u dans $\mathcal{C}(\omega \times S^{p+q-1})$. On sait que l'on peut définir l'hyperfonction $u|_{\mathbb{R}^p}$.

Montrons que la restriction de $\tilde{u}$ à $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$ est alors définie. Puisque $SSu = \text{supp}\, \tilde{u}$, l'hypothèse faite sur SSu montre qu'il existe un réel a $(0 < a < 1)$ tel que : $\{(x,0;\xi,\tau) \in \text{supp}\, \tilde{u}\} \subset \{(x,0;\lambda\xi,\mu\tau) | \xi \in S^{p-1}$, $\tau \in S^{q-1}$, $\lambda^2+\mu^2 = 1$ et $|\mu| < a\}$.

Par définition, $\pi^{-1}(x,\xi) = \{(x,0;\lambda\xi,\mu\tau) | \tau \in S^{q-1}$, $\lambda^2+\mu^2 = 1$ et $\lambda \neq 0\}$. Si K est un compact de $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$, $\pi^{-1}(K) \cap \text{supp}\, \tilde{u}$ est donc l'image du compact $K \times S^{q-1} \times \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 | \lambda^2+\mu^2 = 1$ et $|\mu| \leqslant a\}$ par l'application continue $((x,\xi),\tau,(\lambda,\mu)) \mapsto (x,0;\lambda\xi,\mu\tau)$. $\pi^{-1}(K) \cap \text{supp}\, \tilde{u}$ est donc un compact de $\mathbb{R}^{p+q} \times S^{p+q-1}$ et l'application π étant propre sur $\text{supp}\, \tilde{u}$, on peut définir $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^p \times S^{p-1}}$. La compatibilité affirme que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & u|_{\mathbb{R}^p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}|_{\mathbb{R}^p \times S^{p-1}} & = & (\widetilde{u|_{\mathbb{R}^p}}) \end{array}$$

1.3.3 : Intégration le long des fibres.

On démontre dans [10] p. 294 le

Théorème 1.3.3 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times S^{p-1}$ et u une microfonction définie dans un voisinage ouvert de $\{(x,t;\xi,0) \in \mathbb{R}^{p+q} \times S^{p+q-1} \mid (x,\xi) \in U$ et $t \in \mathbb{R}^q\}$. Si l'application $\pi : (x,t) \mapsto x$ est propre sur $\operatorname{supp} u \cap \mathbb{R}^{p+q}$, on peut définir "de façon naturelle" l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^q} u(x,t)dt$, microfonction sur U. Cette notion d'intégrale le long des fibres est compatible avec la notion analogue pour les hyperfonctions.

b) Compatibilité avec les hyperfonctions :

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $u \in \mathcal{B}(\omega \times \mathbb{R}^q)$ une hyperfonction telle que l'application $\pi : (x,t) \mapsto x$ soit propre sur le support de u et $\tilde{u}$ l'image de u dans $\mathcal{C}((\omega \times \mathbb{R}^q) \times S^{p+q-1})$. On sait que l'on peut définir l'hyperfonction $\int u(x,t)dt$. Puisque SSu est contenu dans $\operatorname{supp} u \times S^{p+q-1}$, $\operatorname{supp} \tilde{u} = SSu$ est contenu dans $\operatorname{supp} u \times S^{p+q-1}$ et l'application π est propre sur $\operatorname{supp} \tilde{u} \cap \mathbb{R}^{p+q}$. On peut donc définir la microfonction $\int_{\mathbb{R}^q} \tilde{u}(x,t)dt \in \mathcal{C}(\omega \times S^{p-1})$ et la compatibilité affirme que le diagramme suivant est commutatif :

$$\mathcal{B}(\omega\times\mathbb{R}^q) \ni u \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^q} u(x,t)dt \in \mathcal{B}(\omega)$$

$$\mathcal{C}((\omega\times\mathbb{R}^q)\times S^{p+q-1}) \ni \tilde{u} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^q} \tilde{u}(x,t)dt = \int_{\mathbb{R}^q} \widetilde{u(x,t)}dt \in \mathcal{C}(\omega\times S^{p-1})$$

1.3.4 : Produit tensoriel.

Soient U_i des ouverts de $\mathbb{R}^{p_i}\times S^{p_i-1}$ et $u_i \in \mathcal{C}(U_i)$ $(i=1,2)$.

Désignons par $U_1 \otimes U_2$ l'ouvert de $\mathbb{R}^{p_1+p_2}\times S^{p_1+p_2-1}$ défini par :

$U_1\otimes U_2 = \{(x_1,x_2;\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2) | (x_i,\xi_i)\in U_i \ (i=1,2)\ ,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \lambda_1^2+\lambda_2^2=1\}.$

Si $v_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p_i})$, on sait que $SSv_1\otimes v_2 \subset SSv_1 \otimes SSv_2$. L'application $(v_1,v_2)\mapsto v_1\otimes v_2$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p_1})\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p_2})\to\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p_1+p_2}))$ définit donc par passage au quotient une application bilinéaire de $\mathcal{C}(U_1)\times\mathcal{C}(U_2)$ dans $\mathcal{C}(U_1\otimes U_2)$, que l'on notera encore $\otimes$. $u_1\otimes u_2 \in \mathcal{C}(U_1\otimes U_2)$ est le produit tensoriel des microfonctions u_1 et u_2.

2. Opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe.

2.1 Introduction.

Opérateurs différentiels dans le domaine complexe

Il existe des opérateurs d'ordre infini qui opèrent sur les fonctions holomorphes :

Exemple en dimension 1 : $P(z,D_z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(\frac{d}{dz})^n$.

Soit $f \in \mathcal{O}(\omega)$ z_0 et ρ tels que $\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\rho\}\subset\omega$.

Alors $\exists\, C>0$ tel que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $|D^n f(z_0)| \leqslant n!\rho^{-n}\times C$.

Donc $P(z,D_z)$ opère sur les fonctions holomorphes à condition que : $\forall\,\varepsilon>0$ $\forall\, K$ compact de ω $\exists\, C_{\varepsilon,K}$ tel que $\sup_{z\in K}|a_n(z)| \leqslant C_{\varepsilon,K}\frac{\varepsilon^n}{n!}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Par exemple e^{D_z} n'opère pas sur les fonctions holomorphes contrairement à $\operatorname{ch}\sqrt{D_z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\frac{d}{dz})^n$.

Nous avons vu (§ 1.31) que les opérateurs différentiels opèrent sur les microfonctions par l'intermédiaire des fonctions holomorphes.

Il en sera de même pour les opérateurs pseudo-différentiels et c'est pourquoi nous allons étudier les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe.

2.2 Définition des opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 2.2.1 : On appelle symbole ou opérateur pseudo-différentiel dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ ($\mathbb{P}^{n-1}$ est l'espace projectif complexe de dimension $n-1$) la donnée d'une somme formelle $P(z,\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k(z,\zeta)$ où les P_k vérifient :

(1) Soit $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ la projection canonique et $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ alors $P_k(z,\zeta)$ est défini et holomorphe dans $\tilde{U}$.

(2) $P_k(z,\zeta)$ est homogène de degré k en ζ .

i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad P_k(z,\lambda\zeta) = \lambda^k P_k(z,\zeta)$.

(3) a) $\forall K$ compact de $\tilde{U}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_{\varepsilon,K} > 0$ tel que

$$\forall (z,\zeta) \in K \ \forall n \geq 0 \quad |P_n(z,\zeta)| \leq C_{\varepsilon,K} \frac{\varepsilon^n}{n!} .$$

b) $\forall K$ compact de $\tilde{U}$ $\exists C_K > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0 \qquad \forall (z,\zeta) \in K \quad |P_{-n}(z,\zeta)| \leq (C_K)^{n+1} n! .$$

Définition 2.2.2 : $P(z,\zeta)$ est un opérateur d'ordre fini m si $\forall k > m$ $P_k(z,\zeta) = 0$. Soit $\mathcal{P}(\omega)$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels définis sur l'ouvert ω de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.

On obtient ainsi <u>le faisceau $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ des opérateurs pseudo-différentiels.</u>

<u>Remarque</u> : Si $n \geqslant 2$, les seuls opérateurs pseudo-différentiels globaux sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ (i.e. définis sur un ouvert $\omega \times \mathbb{P}^{n-1}$, $\omega \subset \mathbb{C}^n$) sont les opérateurs différentiels.

<u>En effet</u> : Fixons $z_o \in \omega$; $P_k(z_o,\zeta)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ donc si $n \geqslant 2$ $P_k(z_o,\zeta)$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^n$, or P_k est homogène de degré k donc

→ si $k < 0$ $P_k(z_o,\zeta) = 0$

→ si $k \geqslant 0$ $P_k(z_o,\zeta)$ est un polynôme homogène de degré k en ζ.

Donc $P(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha_1 \geqslant 0,\dots,\alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha=(\alpha_1\dots\alpha_n)}} P_\alpha(z)\zeta^\alpha$ et d'après les relations (3) de la définition 1 on voit que P est un opérateur différentiel opérant sur les fonctions holomorphes par :

$$P(z,D_z)f(z) = \sum_\alpha P_\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha f(z) .$$

2.3 <u>Développement d'un opérateur pseudo-différentiel au voisinage d'un point (z_o,ζ_o) de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.</u>

La définition des pseudo-différentiels est invariante par transformation linéaire donc on peut choisir une base telle que $z_o = 0$ et $\zeta_o = (0,\dots,0,1)$.

$P(z,\zeta)$ est défini au voisinage de (z_o,ζ_o) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ donc en particulier sur $\tilde{U} = \{|z| \leqslant a, |\zeta_j| \leqslant K|\zeta_m| \quad j = 1,\dots,m-1\}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$P_k(z,\zeta) = \zeta_n^k \, P_k\left(z, \frac{\zeta'}{\zeta_n}, 1\right) .$$

$P_k(z, \frac{\zeta'}{\zeta_n}, 1)$ est une fonction holomorphe de $\frac{\zeta'}{\zeta_n}$ définie dans un poly-disque de rayon K de $\mathbb{C}^{n-1}$ donc :

$$P_k(z, \zeta', \zeta_n) = \zeta_n^k \sum_{\substack{\alpha_1 \geqslant 0 \ldots \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ \alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}} A_{k,\alpha'}(z)\left(\frac{\zeta'}{\zeta_n}\right)^{\alpha'} = \sum_{\alpha' \geqslant 0} A_{k,\alpha'}(z)\zeta'^{\alpha'} \zeta_n^{k-|\alpha'|},$$

avec $|A_{k,\alpha'}(z)\, K^{|\alpha'|}| \leqslant \sup\limits_{\substack{z \in H \\ |\zeta_n|=1 \ |\zeta'| \leqslant K}} |P_k(z,\zeta)| \quad \forall z \in H$ pour H compact.

Posons $\alpha_n = k - |\alpha'|$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

(α_n peut être négatif donc $|\alpha|$ peut être négatif)

$$P_k(z,\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha| = k \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} > 0}} a_\alpha(z)\zeta^\alpha \quad \text{en posant } a_\alpha(z) = A_{|\alpha|,\alpha'}(z),$$

d'où finalement :

$$\boxed{P(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ \alpha_n \in \mathbb{Z}}} a_\alpha(z)\zeta^\alpha}$$

avec les majorations suivantes, pour z appartenant à un compact :

$$\forall \varepsilon, \exists C_\varepsilon \to \text{si } |\alpha| \geqslant 0 \quad |a_\alpha(z)| \leqslant C_\varepsilon \frac{1}{K^{|\alpha'|}} \frac{\varepsilon^{|\alpha|}}{(|\alpha|)!}$$

$$\exists C \to \text{si } |\alpha| < 0 \quad |a_\alpha(z)| \leqslant C^{-|\alpha|+1} \frac{(-|\alpha|)!}{K^{|\alpha'|}}.$$

2.4 <u>Action des opérateurs pseudo-différentiels sur les microfonctions holomorphes.</u>

Soit Σ l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation $\{z_n = 0\}$ et ω un ouvert de Σ.

Notons $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ l'ensemble des germes de fonctions multiformes sur les ensembles $\tilde{\omega} \setminus \omega$, pour $\tilde{\omega}$ voisinage de ω dans $\mathbb{C}^n$, telles que de plus

$h(z',z_n) = f(z',z_n e^{2i\pi}) - f(z',z_n)$ soit holomorphe sur $\tilde{\omega}$.

($\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}\Sigma = 1$ dans $\mathbb{C}^n$ donc on peut "faire le tour" de ω dans $\tilde{\omega}$, c'est-à-dire définir $(z',z_n e^{2i\pi})$ sur le revêtement universel de $\tilde{\omega}$ ω).

Soit $\mathcal{O}(\omega)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de ω.

Définition : Le faisceau des "microfonctions holomorphes" est défini sur $\sum$ pour tout ouvert ω de $\sum$ par :

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega) = \frac{\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)}{\mathcal{O}(\omega)}}$$

Soit f une fonction multiforme sur un ensemble $\tilde{\omega}\setminus\omega$, dont le germe appartient à $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}$ et soit $h(z',z_n) = f(z',z_n e^{2i\pi}) - f(z',z_n)$,

$$g(z',z_n) = f(z',z_n) - h(z',z_n)\cdot\frac{\log z_n}{2i\pi}.$$

$$g(z',z_n e^{2i\pi}) - g(z',z_n) = f(z',z_n e^{2i\pi}) - f(z',z_n) - h(z',z_n) = 0.$$

Donc g est une fonction uniforme sur $\tilde{\omega}\setminus\omega$ donc elle a un développement de Laurent : $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k(z')z_n^k$, $\alpha_k(z') \in \mathcal{O}(\omega)$.

h est holomorphe sur $\tilde{\omega}$ donc a un développement de Taylor :

$$h(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k(z')z_n^k$$

$$f(z',z_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k(z')z_n^k + \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k(z')\, z_n^k\,\frac{\log z_n}{2i\pi}.$$

$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega) = \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)/\mathcal{A}(\omega)$ donc tout élément de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ a une <u>représentation unique</u> : $\tilde{f}(z',z_n) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k\geqslant 0} \beta_k(z')\, z_n^k \log z_n + \sum_{k<0} \alpha_k(z')z_n^k$.

<u>Notation</u> : 1) Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,\dots,-n,\dots\}$ $\Phi_\lambda(\tau) = \frac{+1}{2i\pi} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(-\tau)^{\lambda+1}}$, où Γ est la fonction d'Euler.

2) Si $(-\lambda) \in \mathbb{N}^*$ $\Phi_\lambda(\tau) = \frac{-1}{2i\pi} \frac{\tau^{-\lambda-1}}{(-\lambda-1)!} \log \tau$.

3) Si $\ell \in \mathbb{Z}$ on note $\delta^{(\ell)}(z_n)$ l'élément de $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}$ associé à Φ_ℓ.

On vérifie immédiatement que $\frac{d}{d\tau}\Phi_\lambda(\tau) = \Phi_{\lambda+1}(\tau) + f(\tau)$ où f est un polynôme en τ , donc $\frac{d}{dz_n}\delta^{(\ell)}(z_n) = \delta^{(\ell+1)}(z_n)$.

On a donc pour tout élément de $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ une représentation unique

$$\tilde{f}(z',z_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z')\Phi_k(z_n) ,$$

avec $\to$ si $k \geqslant 0$ $c_k(z') = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}(2i\pi)\ \alpha_{-k-1}(z') \in \mathcal{O}(\omega)$

$\to$ si $k < 0$ $c_k(z') = -(-k-1)!\ \beta_{-k-1}(z')$ $\in \mathcal{O}(\omega)$.

La série $\sum_{k<0} \alpha_k(z')z_n^k$ converge si $|z_n| > 0$ donc

$\forall \varepsilon > 0$ $\forall K$ compact de ω $\exists C_{\varepsilon,K} > 0$ tel que $\sup_{z'\in K} |\alpha_k(z')| \leqslant C_{\varepsilon,K}\ \varepsilon^{-k}$

donc $\sup_{z'\in K} |c_k(z')| \leqslant \frac{C_{\varepsilon,K}}{k!}\ \varepsilon^k$ $\forall k \geqslant 0$.

La série $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k(z')z_n^k$ converge si $|z_n| < \rho$ pour un ρ fixé donc $\forall K$ compact de ω $\exists C_k > 0$ tel que $\sup_{z'\in K} |\beta_k(z')| \leqslant \frac{C_k}{\rho^k}$

donc $\forall K$ compact de ω $\exists\ C \geqslant 1$ tel que $\sup_{z'\in K} |c_k(z')| \leqslant (-k-1)!\,C^{-k-1}\ \forall k$ ($C = \sup(1,1/\rho)$) .

Nous avons donc montré la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 2.4.1 : Tout élément f de $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ a une représentation unique :

$$f(z',z_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z')\delta^{(k)}(z_n)$$

avec : pour tout compact K de ω et tout $\varepsilon > 0$, il existe C_K et $C_{K,\varepsilon}$ tels que

$$C_{K,\varepsilon} > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 0 \quad \sup_{z' \in K} |c_k(z')| \leqslant \frac{C_{\varepsilon,K}}{k!}\,\varepsilon^k$$

$$C_K \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k < 0 \quad \sup_{z' \in K} |c_k(z')| \leqslant (-k)!\,C_k^{-k-1} .$$

Montrons comment les opérateurs pseudo-différentiels opèrent sur $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}$:

Soit ω un ouvert de $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^n / z_n = 0\}$ et soit $P(z,\zeta)$ un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage du fibré projectif normal à ω, i.e. au voisinage de $\{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \,/\, z_n = 0\ z' \in \omega\ ;\ \zeta_1 = \ldots = \zeta_{n-1} = 0\}$.

Localement P peut être développé comme au paragraphe 3.

Donc il existe des $(\omega_i)_{i \in I}$ avec $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ et sur chaque ω_i on a un développement $P(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ \alpha_n \in \mathbb{Z}}} a_\alpha(z)\zeta^\alpha$ valable pour $z \in \tilde{\omega}_i$ voisinage de ω_i dans $\mathbb{C}^n$.

En développant les a_α en série entière au voisinage de ω_i, on obtient :

$$P(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ k \geqslant 0 \quad \alpha_n \in \mathbb{Z}}} a_\alpha^k(z') z_n^k \zeta^\alpha \quad \text{avec} \quad a_\alpha^k(z') = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^k a_\alpha(z',0) .$$

Un élément u de $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega_i)$ s'écrit $u(z',z_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(z')\Phi_j(z_n)$.

<u>Définition</u> : On pose :

a) $\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} \Phi_j(z_n) = \Phi_{j+\alpha_n}(z_n)$ pour $\alpha_n \in \mathbb{Z}$.

(Si $\alpha_n \geqslant 0$, la définition coïncide avec la dérivation classique de la fonction $\Phi_j(z_n)$).

Donc $$\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} u(z',z_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(z')\Phi_{j+\alpha_n}(z_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{j-\alpha_n}(z')\Phi_j(z_n) .$$

b) $(\frac{\partial}{\partial z'})^{\alpha'} u(z',z_n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\frac{\partial}{\partial z'})^{\alpha'} c_j(z')\Phi_j(z_n)$

(dérivation terme à terme de la série).

c) $$z_n^k \, \Phi_j(z_n) = \begin{cases} \frac{(-j-1+k)!}{(-j-1)!} & \Phi_{j-k}(z_n) \quad \text{si} \quad j < 0 \\ (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} & \Phi_{j-k}(z_n) \quad \text{si} \quad j \geqslant k \\ 0 & \qquad\qquad \text{si} \quad 0 \leqslant j < k \end{cases}$$

(c'est la multiplication de Φ_j comme fonction de z_n par z_n^k modulo les fonctions holomorphes).

On a donc :

$$P(z,D_z)\, u(z',z_n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j(z')\, \Phi_j(z_n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j(z')\delta^{(j)}(z_n)$$

avec : → si $j < 0$ $\quad d_j(z') = \sum\limits_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ \alpha_n \in \mathbb{Z}\ 0 \leqslant k < -j}} a_\alpha^k(z')(\frac{\partial}{\partial z'})^{\alpha'} c_{j+k-\alpha_n}(z') \times \frac{(-j-1)!}{(-k-j-1)!}$

→ si $j \geqslant 0$ $\quad d_j(z') = \sum\limits_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \geqslant 0 \\ \alpha_n \in \mathbb{Z}\ k \geqslant 0}} a_\alpha^k(z')(\frac{\partial}{\partial z'})^{\alpha'} c_{j+k-\alpha_n}(z') \times \frac{(-1)^k (j+k)!}{j!}$

Si $U \subset \omega_i$, et si $\operatorname{supp} u \subset U$ alors $\operatorname{supp} Pu \subset U$, donc on peut définir P sur $\mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ en appliquant P localement.

<u>Théorème</u> 2.4.1 : Soient ω ouvert de Σ , $P(z,\zeta)$ un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage du fibré projectif normal à ω et soit $u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$.

<u>Alors $P(z,D_z)\, u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$.</u>

a) Si $u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ alors $(\frac{\partial}{\partial z_n})^{\alpha_n} u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$.

<u>En effet</u> : $u = \Sigma\, c_j(z')\, \delta^{(j)}(z_n)$ avec $\sup\limits_{z'\in K} |c_k(z')| \leqslant \frac{C_{\varepsilon,K}}{k!}\varepsilon^k \qquad k \geqslant 0$

$$\sup_{z'\in K} |c_k(z')| \leqslant (-k)!\, C_k^{-k-1} \qquad k < 0$$

$$Pu = \Sigma\, d_j(z')\, \delta^{(j)}(z_n) \quad \text{avec} \quad d_j(z') = c_{j-\alpha_n}(z') .$$

Sauf pour un nombre fini de terme, j est du même signe que $j-\alpha_n$.

→ Si j et $j-\alpha_n$ sont $\geqslant 0$, $\sup\limits_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant \dfrac{C_{\varepsilon,K}\,\varepsilon^{j-\alpha_n}}{(j-\alpha_n)!} \leqslant$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^j}{j!} \times C_{\varepsilon,K} \times \varepsilon^{-\alpha_n} \times \frac{j!}{(j-\alpha_n)!}$$

$j!/(j-\alpha_n)! \leqslant j^{\alpha_n}$ donc $\sup\limits_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant C_{\varepsilon,K} \dfrac{(2\varepsilon)^j}{j!} \left(\dfrac{j}{\varepsilon}\right)^{\alpha_n} \dfrac{1}{2^j}$.

Si $j \to \infty$ $\quad j^{\alpha_n} \dfrac{1}{2^j} \to 0$ donc $\exists\, C$ t.q. $\forall j \quad j^{\alpha_n} \dfrac{1}{2^j} < C$

$$\sup_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant C'_{\varepsilon,K} \frac{(2\varepsilon)^j}{j!}$$

$$\text{donc} \left.\begin{array}{l} \forall j \geqslant 0 \\ j-\alpha_n \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \sup_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant C'_{\varepsilon/2,K} \frac{\varepsilon^d}{j!} .$$

→ Si j et $j-\alpha_n$ sont $\leqslant 0$, $\sup\limits_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant (-j+\alpha_n)!\, C_K^{-j+\alpha_n-1}$

$$\leqslant (-j)!\, C_k^{-j+\alpha_n-1} \times (-j+\alpha_n)^{\alpha_n} .$$

En changeant la constante : $\sup\limits_{z'\in K} |d_j(z')| \leqslant (-j)!\,(C'_K)^{-j-1}$.

Avec de nouvelles constantes les majorations sont vraies pour tous les j

et donc $\left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}$.

b) Si $u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ alors $\left(\dfrac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(u)$.

En effet si les c_j restent dans un compact K on a d'après la formule

de Cauchy :

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} c_j(z')\right| \leqslant \frac{1}{\rho^{|\alpha'|}} \times \sup_{z'\in K} |c_j(z')|$$ avec ρ ne dépendant que de K.

Donc si $u \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ $\quad \left(\dfrac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} u = \sum\limits_{j,\alpha'} \left(\dfrac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} c_j(z')\Phi_j(z_n)$ est aussi dans cet ensemble.

c) $u \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega) \Longrightarrow z_n^k u \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$: la démonstration est la même qu'au (a).

2.5 <u>Action sur les fonctions holomorphes.</u>

Soient ω un ouvert de Σ et P un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage du fibré projectif normal de ω, $P^*\omega$. Si f est holomorphe au voisinage de ω, on désigne par $D^{-1}_{z_n,\Sigma}(f)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} D_{z_n} g = f \\ g|\Sigma = 0 . \end{cases}$$

Ainsi, pour k entier $\geqslant 1$, $D^{-k}_{z_n,\Sigma}(f)$ est la $k^{\text{ème}}$ primitive de f par rapport à z_n qui s'annule sur Σ ainsi que ses $(k-1)$ premières dérivées par rapport à z_n.

Si $P = \sum_{\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}\geqslant 0} a_\alpha(z)D^\alpha$, on définit un opérateur P_Σ par :

$$P_\Sigma(f) = \sum_{\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}\geqslant 0} a_\alpha(z)\, D^{\alpha'}_{z'}\, D^{\alpha_n}_{z_n,\Sigma}(f) ,$$ en convenant que $D^{\alpha_n}_{z_n,\Sigma}(f) = D^{\alpha_n}_{z_n} f$ si $\alpha_n \geqslant 0$.

$f(z)\log z_n$ est un élément de $\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ et se met sous la forme :

$$f(z)\log z_n = \sum_{\ell\geqslant 0} \alpha_\ell(z')\, z_n^\ell \log z_n = \sum_{\ell\leqslant -1} \mathscr{C}_\ell(z')\, \Phi_\ell(z_n)$$

avec $\mathscr{C}_\ell(z') = -2i\pi(-1-\ell)!\,\alpha_{-1-\ell}(z')$ pour $\ell \leqslant -1$.

Donc, $$D^{\alpha_n}_{z_n}(f(z)\log z_n) = -\sum_{\ell\leqslant -1} 2i\pi(-1-\ell)!\,\alpha_{-1-\ell}(z')\,\Phi_{\ell+\alpha_n}(z_n)$$

$$= -\sum_{\ell\leqslant -1+\alpha_n} 2i\pi(-1-\ell+\alpha_n)!\,\alpha_{-1-\ell+\alpha_n}\,\Phi_\ell(z_n) .$$

Si $\alpha_n \geqslant 0$, il en résulte l'égalité suivante, modulo les couches multiples (i.e. les éléments de $\mathscr{E}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$ de la forme $\sum_{k>0} \gamma_k(z')\frac{1}{z_n^k}$) :

$$D_{z_n}^{\alpha_n}(f(z)\log z_n) = \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(\ell+\alpha_n)!}{\ell!} \alpha_{\ell+\alpha_n} z_n^{\ell} \log z_n = (\log z_n).(D_{z_n}^{\alpha_n} f) .$$

Si $\alpha_n < 0$, $D_{z_n}^{\alpha_n} = \sum_{\ell\geqslant|\alpha_n|} \frac{(\ell-|\alpha_n|)!}{\ell!} \alpha_{\ell-|\alpha_n|} z_n^{\ell} \log z_n$.

Or, $\sum_{\ell\geqslant|\alpha_n|} \frac{(\ell-|\alpha_n|)!}{\ell!} \alpha_{\ell-|\alpha_n|} z_n^{\ell}$ est la $|\alpha_n|^{\text{ème}}$ primitive de f qui s'annule sur Σ $(\Sigma = \{z_n = 0\})$ avec ses $(|\alpha_n|-1)$ premières dérivées.

Donc, si $\alpha_n < 0$, $D_{z_n}^{\alpha_n} f \log z_n = (\log z_n).D_{z_n,\Sigma}^{\alpha_n}(f)$.

Or, $P(f(z)\log z_n)$ s'écrit d'une façon et d'une seule :

$P(f \log z_n) = g(z)\log z_n$ + couches multiples, avec g holomorphe au voisinage de ω .

D'autre part, $D_{z_n}^{\alpha_n}(f(z)\log (z_n)) = D_{z_n,\Sigma}^{\alpha_n}(f)\ (\log z_n)$ + couches multiples, d'après le calcul qui précède. Il résulte de l'unicité du développement de $P(f \log z_n)$ que :

$P_{\Sigma}(f) = g \Longleftrightarrow P(f(z)\log z_n) = g(z)\log z_n$ + couches multiples.

Le point de vue du §2.4 est donc plus général que celui du §2.5 (on ne perd pas d'informations sur les couches multiples).

2.6 <u>Etude algébrique des opérateurs pseudo-différentiels. Composition, Adjoint, Changement de coordonnées.</u>

On trouvera une démonstration complète des résultats de ce paragraphe dans : <u>Sato-Kawaï-Kashiwara</u> [10], p. 344, § 1.5.

1) <u>Composition.</u>

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, $P(z,D_z)$ et $Q(z,D_z)$ des éléments de $\mathcal{P}(U)$. Si $P(z,\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k(z,\zeta)$ et $Q(z,\zeta) = \sum_{\ell=-\infty}^{-\infty} Q_{\ell}(z,\zeta)$, on pose :

$$R_m(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha\geqslant 0\\ k+\ell-|\alpha|=m}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\alpha} P_k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} Q_{\ell} .$$

Soit $R = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_m(z,\zeta)$.

<u>Théorème</u> 2.6.1 : La série formelle $\sum_{-\infty}^{+\infty} R_m(z,\zeta)$ définit un opérateur pseudo-différentiel appartenant à $\mathcal{P}(U)$ et noté $P \circ Q$. Soient Σ un hyperplan tel que $P^*\Sigma \subset U$, ω un ouvert de Σ et u un élément de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$. On a alors l'égalité :

$$Ru = (P \circ Q)u = P[Qu] \quad \text{dans } \mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma} .$$

<u>Démonstration</u> : 1) Si P et Q sont des opérateurs différentiels d'ordre fini, la formule de Leibniz montre que l'opérateur : $u \mapsto P[Qu]$ a pour symbole $P \circ Q$. Par linéarité, et sous réserve de convergence, on est ramené au cas où $P = D_z^\alpha$ avec $\alpha_n < 0$ et $Q = b(z)D_z^\beta$. On peut développer $b(z)$ en série entière par rapport à z_n : $b(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} b_\ell(z')z_n^\ell$. Toujours sous réserve de convergence, on est ramené au cas où $P = D_z^\alpha$ $(\alpha_n < 0)$ et $Q = b(z')z_n^\ell D_z^\beta$. Puisque $D_{z_n}^{\alpha_n}$ commute avec $D_{z_1},\dots D_{z_{n-1}}, z_1,\dots z_{n-1}$, il suffit de démontrer la proposition pour $P = D_{z_n}^{+\alpha_n}$ et $Q = z_n^\ell D_{z_n}^{\beta_n}$. Soient $Q_1 = z_n^\ell$ et $Q_2 = D_{z_n}^{\beta_n}$. On vérifie que pour $u \in \mathcal{C}_{C^n|\Sigma}$, $Qu = Q_1[Q_2 u] = (Q_1 \circ Q_2)(u)$. Donc, si $P(Q_1 u) = (P \circ Q_1)u$, on a :

$$P(Qu) = P(Q_1(Q_2 u)) = (P \circ Q_1)(Q_2 u) = [(P \circ Q_1) \circ Q_2]u = [P \circ (Q_1 \circ Q_2)]u$$

(l'associativité de $\circ$ s'établit par vérification directe).

Soit $P(Qu) = (P \circ Q)(u)$.

2) Montrons que $P(Q_1 u) = (P \circ Q_1)(u)$ avec $P = D_z^{-k}$ et $Q_1 = z^\ell$, k , $\ell \geqslant 0$ (pour alléger les notations, z désigne maintenant une variable dans $\mathbb{C}$: $z = z_n$) . u s'écrit de manière unique : $u = f(z)\log z + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{z^n}$,

f holomorphe.

a) D'après le § 2.5, $D_z^{-k}(f(z)\log z) = (D_\Sigma^{-k} f)\log z$.

Supposons que : $D_\Sigma^{-k}(zf) = z\, D_\Sigma^{-k} f - k\, D_\Sigma^{-k-1} f$. (1) (c'est vrai pour $k=0$).

Par intégration par parties : $D_\Sigma^{-k-1}(zf) = \int_0^z D_\Sigma^{-k}\,(wf(w))dw$

$$D_\Sigma^{-k-1}(zf) = \int_0^z [w\, D_\Sigma^{-k} f(w) - k\, D_\Sigma^{-k-1} f(w)]dw = [w\, D_\Sigma^{-k-1} f(w)]_0^z - \int_0^z D_\Sigma^{-k-1} f(w)dw - k\, D_\Sigma^{-k-2} f$$

$$D_\Sigma^{-k-1}(zf) = z\, D_\Sigma^{-k-1} f(z) - (k+1) D_\Sigma^{-k-2} f(z) .$$

Donc, (1) est vrai pour tout $k \geqslant 0$. La formule :

$$(2) \quad (P \circ Q_1)(u) = P(Q_1 u) = \sum_{r=0}^{\ell} \frac{1}{r!}\,(-k)\ldots(-k-2+1)\ell\ldots(\ell-r+1) z_1^{\ell-r}\, D^{-k-2} u$$

est donc vérifiée pour $\ell = 1$, $k \geqslant 0$ et $u = f(z)\log z$. Par récurrence et en utilisant le fait que $D_z^{-1}(zf(z)\log z) = z\, D_z^{-1}(f(z)\log z) - D_z^{-2}(f(z)\log z)$, on montre la validité de (2) pour tout $\ell \geqslant 1$ et pour $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}|0}$ de la forme $f(z)\log z$.

b) Enfin, on vérifie la formule sur les couches multiples $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{z^n}$ par calcul direct.

<u>Corollaire</u> 2.6.1 : Si Q est d'ordre $\leqslant 0$, $(P \circ Q)_\Sigma = P_\Sigma \circ Q_\Sigma$ (la composition est celle des opérateurs définis sur les fonctions holomorphes).

<u>Démonstration</u> : Soit $u = f(z)\log z_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}(\omega)$.

$$Qu = \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leqslant 0 \\ \alpha_1,\ldots\alpha_{n-1} \geqslant 0}} a_\alpha(z)\, D^\alpha(f(z)\log z_n) = g(z)\log z_n .$$

En effet, tous les α_n intervenant dans la sommation sont $\leqslant 0$ et, en intégrant $f(z)\log z_n$ on n'obtient pas de couches multiples.

(On obtiendrait le même résultat en supposant que $d^o Q \leqslant m$ et que f s'annule sur Σ avec ses $(m-1)$ premières dérivées : dans la sommation, $\alpha_n \leqslant m$ et les m premières dérivées de $f \log z_n$ par rapport à z_n ne comportent pas de couches multiples).

Donc, $Qu = (Q_\Sigma f)\log z_n$ et :

$$P[Qu] = P[(Q_\Sigma(f))\log z_n] = [P_\Sigma(Q_\Sigma f)]\log z_n \quad + \text{couches multiples.}$$

Or, $P[Qu] = (P\circ Q)(f(z)\log z_n) = [(P\circ Q)_\Sigma f]\log z_n$ + couches multiples.

Par unicité de la décomposition, $P_\Sigma(Q_\Sigma f) = (P\circ Q)_\Sigma(f)$.

D'où :
$$(P\circ Q)_\Sigma = P_\Sigma \circ Q_\Sigma \ .$$

On a également montré que :

<u>Si</u> Q <u>est d'ordre</u> $\leqslant m$ <u>et si</u> f <u>s'annule avec ses</u> $(m-1)$ <u>premières dérivées sur</u> Σ , <u>alors</u> $(P\circ Q)_\Sigma(f) = P_\Sigma(Q_\Sigma f)$.

2) <u>Adjoint de</u> P .

<u>Théorème</u> 2.6.2 : Si $P = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k(z,\zeta)$, l'adjoint P^* de P est défini par $P^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_k(z,\zeta)$, avec $Q_k = \sum_{k=j-|\alpha|} \frac{(-1)^j}{\alpha!} D_\zeta^\alpha D_z^\alpha P_j$.

2.7 <u>Inversion des opérateurs elliptiques.</u>

<u>Théorème</u> 2.7.1 : Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. On suppose que le symbole principal $P_m(z,\zeta)$ de P ne s'annule pas dans U . Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel et un seul dans U , d'ordre $-m$, tel que : $P\circ Q = Q\circ P = I$.

<u>Démonstration</u> : a) Montrons d'abord qu'il suffit de trouver, pour tout $(z_0,\zeta_0) \in U$, un voisinage $U(z_0,\zeta_0)$ de (z_0,ζ_0) et des opérateurs E_0 et

F_o tels que : $PE_o = F_oP = I$ dans $U(z_o,\zeta_o)$. Alors

$F_o = F_o(PE_o) = (F_oP)E_o = E_o$ dans $U(z_o,\zeta_o)$.

Si $U_{o1} = U(z_o,\zeta_o) \cap U(z_1,\zeta_1) \neq \emptyset$, on a dans U_{o1} :

$$PE_1 = E_1P = PE_o = E_oP = I \text{ .}$$

Donc, $0 = E_1[P(E_1-E_o)] = (E_1P)(E_1-E_o) = E_1-E_o$ et $E_o = E_1$.

L'existence locale d'un inverse à droite et d'un inverse à gauche implique donc l'existence globale d'un inverse ($\mathcal{P}$ est un faisceau).

b) <u>Lemme</u> (cf. S. K. K. [10] p. 356). Soit R un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\leqslant -1$ défini au voisinage de (z_o,ζ_o) . La série $\sum_{n\geqslant 0} R^n$ définit au voisinage de (z_o,ζ_o) un opérateur S tel que : $S(I-R) = (I-R)S = I$.

Soit alors $Q_{-m}(z,\zeta) = \dfrac{1}{P_m(z,\zeta)}$. Le symbole principal de $Q_{-m}P$ est 1. Donc $Q_{-m}P = I-R$ où R est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\leqslant -1$. D'après le lemme, il existe S tel que $(I-R)S = S(I-R) = I$.

Donc, $S(Q_{-m}P) = (S\,Q_{-m})P = I$ et $S\,Q_{-m}$ est un inverse à gauche. On montrerait de même l'existence d'un inverse à droite.

Ce théorème permet une nouvelle démonstration du théorème de Cauchy-Kovalewski.

<u>Corollaire</u> : <u>Théorème de Cauchy-Kovalewski</u> : Soit P un opérateur différentiel d'ordre m . On suppose que l'hyperplan Σ $(z_n = 0)$ n'est pas caractéristique. Soient $g(z)$ et $h_j(z')$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ des fonctions holomorphes au voisinage de 0 . Le problème
$$\left| \begin{array}{l} Pf = g \\ D_n^j f_{|\Sigma} = h_j \text{ , } j = 0,\dots m-1 \end{array}\right.$$

a alors une solution et une seule f holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$.

Démonstration : 1) Existence de f.

Puisque $\Sigma\,(z_n = 0)$ est non caractéristique pour P, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage V de $(0,\dots 0,1)$ dans $\mathbb{P}^{n-1}$ tels que :

$$\forall (z,\zeta) \in U \times V \;,\; P_m(z,\zeta) \neq 0 \,.$$

P admet donc dans $U \times V$ un inverse P^{-1}, opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-m$. Soient $k_j(z')$ des fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$ (on précisera par la suite les valeurs des k_j). Puisque P^{-1} est d'ordre $-m$, l'élément de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n|\Sigma}$ égal à $P^{-1}[g(z)\log z_n + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{k_j(z')}{z_n^{j+1}}]$ est de la forme $f(z)\log z_n$ pour une fonction f holomorphe au voisinage de 0 et uniquement définie.

D'après les hypothèses faites sur P, on peut écrire :

$P = A_m(z)D_{z_n}^m + A_{m-1}(z,(D_z))D_{z_n}^{m-1} + \dots A_0(z,D_{z'})$, où les $A_j(z,D_{z'})$ sont des opérateurs différentiels en $D_{z'} = (D_1,\dots D_{n-1})$ et $A_m(z) \neq 0$ dans U.

On a, modulo les fonctions holomorphes :

$$D_{z_n}(f(z)\log z_n) = (D_{z_n} f)\log z_n + \frac{f(z',0)}{z_n}$$

$$\vdots$$

$$D_{z_n}^m(f \log z_n) = (D_{z_n}^m f)\log z_n + m\,\frac{(D_{z_n}^{m-1}f)(z',0)}{z_n} + \dots \frac{(-1)^{m-1}f(z',0)}{z_n^m}\,.$$

Or, $\quad P(f(z)\log z_n) = g(z)\log z_n + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \dfrac{k_j(z')}{z_n^{j+1}}\,.$

Par unicité de la décomposition, on trouve en égalant les deux expressions de $P(f(z)\log z_n)$:

$$Pf(z) = g$$

$$(S)\begin{cases} k_{m-1} = (-1)^{m-1} A_m(z) f(z',0) \\ k_{m-2} = (-1)^{m-2}[mA_m(z)(D_{z_n} f)(z',0) + A_{m-1}(z,D_{z'})f(z',0)] \\ \vdots \\ k_o = \qquad mA_m(z)(D_{z_n}^{m-1} f)(z',0) + \ldots + A_1(z,D')f(z',0) \ . \end{cases}$$

Puisque $A_m(z)$ ne s'annule pas dans U, on peut résoudre le système (S) de proche en proche, et ce de manière unique. On définit alors les k_j comme étant les valeurs des membres de droite obtenues en remplaçant les $(D_{z_n}^j f)(z',0)$ par les $h_j(z')(0 \leqslant j \leqslant m-1)$. D'après ce qu'on vient de montrer, la fonction $f(z) = \frac{1}{\log z_n} P^{-1}[g(z)\log z_n + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{k_j(z')}{z_n^{j+1}}]$ est telle que $Pf = g$ et que les $(D^j f)(z',0)$ vérifient le système (S). Comme la solution de (S) est unique, on a : $\forall\, j = 1,\ldots m-1$, $(D^j f)(z',0) = D^j f_{|\Sigma} = h_j$.

L'opérateur pseudo-différentiel P^{-1} permet donc de donner la forme explicite de la solution d'un problème de Cauchy.

2) La solution du problème de Cauchy est unique. Soit en effet f une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 et telle que :

$$\begin{cases} Pf = 0 \\ D_n^j f_{|\Sigma} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots m-1 \end{cases}$$

Soit $\varphi = D_n^m f$. Puisque f est m-plate sur Σ , on a :

$$(D_n^{-m})_\Sigma \varphi = (D_n^{-m})_\Sigma (D_n^m f) = (D_n^{-m} \circ D_n^m)_\Sigma f = f \ .$$

Donc, $(PD_n^{-m})_\Sigma \varphi = P_\Sigma[D_n^{-m}{}_\Sigma(\varphi)] = Pf = 0$.

Comme PD_n^{-m} est inversible et d'ordre 0 , on a $\varphi = 0$ et donc $f = 0$.

3. Formes réduites des opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe.

3.1 Notion d'équivalence pour les systèmes d'équations différentielles et pseudo-différentielles.

a) Une première notion est la relation d'équivalence classique dans un monoïde :

(1) Si P et Q sont deux opérateurs différentiels où pseudo-différentiels:
$P \sim Q \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ Il existe deux opérateurs pseudo-différentiels inversibles A et B tels que :

$$Q = B^{-1} P A .$$

(2) Si P et Q sont deux matrices à m lignes et p colonnes et à coefficients dans l'espace des opérateurs différentiels ou dans celui des opérateurs pseudo-différentiels :

(Une telle matrice P définit un système $\sum_{j=1}^{p} P_{ij}(z,D_z)u_j = f_i \quad i = 1,\dots,m$)

$P \sim Q \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ Il existe des matrices carrées inversibles A et B à coefficients opérateurs pseudo-différentiels telles que :

$$Q = B^{-1} P A .$$

Remarque : Dans l'espace des matrices à coefficients différentiels on n'obtient pas la même relation d'équivalence selon que l'on suppose les coefficients de A et B pseudo-différentiels d'ordre fini ou d'ordre quelconque.

Exemple : $P = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}$ et $Q = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sont équivalents modulo les opérateurs d'ordre infini mais ne le sont pas modulo les opérateurs d'ordre fini.

b) Une seconde notion consiste à introduire de nouvelles "inconnues" avec des relations les reliant :

<u>Exemple</u> : $P : (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y})u = f$ et $Q : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u - v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u = f \end{cases}$

sont équivalentes en ce sens que les solutions de l'une donnent immédiatement les solutions de l'autre.

<u>Définition</u> : Soit $\mathcal{P}$ l'anneau des opérateurs pseudo-différentiels et soit $P = (P_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice à coefficients dans $\mathcal{P}$.

Notons $\mathfrak{M}_P$ le quotient du $\mathcal{P}$-module libre à p-générateurs $U_1, \ldots, U_p$ par le $\mathcal{P}$-module engendré par les m-vecteurs $\sum_{j=1}^{p} P_{ij}\, U_j \quad i = 1, \ldots, m$

$$\mathfrak{M}_p = \mathcal{P}U_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}U_p / \{(\sum_{j=1}^{p} P_{ij}\, U_j)_{i=1\ldots m}\} .$$

On dira que deux systèmes P et Q sont <u>équivalents</u> si les $\mathcal{P}$-modules $\mathfrak{M}_P$ et $\mathfrak{M}_Q$ sont <u>isomorphes</u>.

On voit que la 1ère notion est un cas particulier de la deuxième.

Dans le paragraphe 5.1 nous étudierons comment sont liées les résolubilités des opérateurs équivalents.

3.2 <u>Théorème d'équivalence pour les opérateurs pseudo-différentiels de type principal.</u>

<u>Théorème</u> 3.2.1 : Soient P et Q deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre fini m définis au voisinage du point $(z_o, \zeta_o) \in \mathbb{C}^n \times S^{n-1}$.

Supposons que P et Q ont même partie principale $P_m = Q_m$ avec $P_m(z_o, \zeta_o) = 0$ et que de plus ils sont de type principal :

i.e. 1) $d_{z,\zeta}\, P_m(z_o, \zeta_o) \neq 0$

2) $d_{z,\zeta}\, P_m(z_o, \zeta_o)$ est non parallèle à $(\zeta_o, 0)$.

Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel inversible (d'ordre 0) $R(z, D_z)$

tel que :

$$P = R^{-1} Q R$$

<u>Démonstration</u> : Pour simplifier les notations nous ferons la démonstration dans le cas $m = 0$, mais elle est identique dans le cas général.

Après un changement de coordonnées on peut supposer que $z_o = 0$ et $\zeta_o = (1,0,\ldots 0)$. Si $P(z,\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{0} P_k(z,\zeta)$ il suffit de montrer le théorème pour $Q(z,\zeta) = P_o(z,\zeta)$.

Prenons R de la forme $R(z,\zeta) = \sum_{-\infty}^{0} R_k(z,\zeta)$ et déterminons les R_k :

La relation $RP = QR$ s'écrit pour $k = 0,\ldots -\infty$:

$$k \text{ fixé} : \sum_{\ell+m-|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\alpha} R_{\ell}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} P_m = \sum_{\ell-|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{\alpha} P_o \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} R_{\ell}$$

$$k = 0 \qquad R_oP_o = P_oR_o \qquad \text{toujours vérifié}$$

$$k = -1 \qquad R_{-1}P_o + R_oP_{-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R_o}{\partial\zeta_i} \frac{\partial P_o}{\partial z_i} = R_{-1}P_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_o}{\partial\zeta_i} \frac{\partial R_o}{\partial z_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_o}{\partial\zeta_i} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial P_o}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial\zeta_i} - P_{-1}\right)R_o = 0 .$$

Au <u>rang</u> k : $R_kP_o + R_{k+1}P_{-1} + (\text{termes en } R_{k+2},\ldots,R_o) + \sum_i \frac{\partial}{\partial\zeta_i} R_{k+1} \frac{\partial}{\partial z_i} P_o$

$+ (\text{termes en } R_{k+2},\ldots,R_o) = P_oR_k + \sum_i \frac{\partial}{\partial\zeta_i} P_o \frac{\partial}{\partial z_i} R_{k+1}$

$+ (\text{termes en } R_{k+2},\ldots,R_o)$.

Si on note H_{P_o} le champ hamiltonien de P_o on a donc :

$$(H_{P_o} - P_{-1})R_{k+1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_o}{\partial\zeta_i} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial}{\partial z_i}P_o \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\right) - P_{-1}\right]R_{k+1} = F_{k+1}(R_{k+2},\ldots,R_o)$$

où F_{k+1} est un opérateur différentiel qui ne dépend que de P.

Si on peut déterminer $R_o,\ldots,R_{k+2}$, on a donc à résoudre une équation différentielle du 1er ordre en R_{k+1}.

L'hypothèse faite sur P signifie qu'il existe $i \in [2,\dots,n]$ tel que $\frac{\partial P_o}{\partial z_i}(z_o,\zeta_o) \neq 0$ ou qu'il existe $j \in [1,\dots,n]$ tel que $\frac{\partial P}{\partial \zeta_j}(z_o,\zeta_o) \neq 0$ donc $\frac{\partial P_o}{\partial \zeta_j}(z,\zeta) \neq 0$ au voisinage de (z_o,ζ_o).

1 $\frac{\partial P_o}{\partial z_i}(z,\zeta) \neq 0 \qquad i \in [2,\dots,n]$.

L'hyperplan $H_i = \{\zeta_i = 0\}$ est non caractéristique pour $H_{P_o} - P_{-1}$ (puisque le coefficient de $\frac{\partial}{\partial \zeta_i}$ est $\frac{\partial P_o}{\partial z_i} \neq 0$) et $(z_o,\zeta_o) \in H_i$ (puisque $i > 1$ et $\zeta_o = (1,0,\dots 0)$), donc le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (H_{P_o} - P_{-1})R_o = 0 & \text{a une et une seule solution d'après Cauchy-} \\ R_o = 1 \quad \text{sur } H_i & \text{Kovalevski.} \end{cases}$$

de même si $R_o,\dots,R_{k+1}$ sont déterminés, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (H_{P_o} - P_{-1})R_k = F_k(R_{k+1},\dots,R_o) & \text{a une et seule solution.} \\ R_k = 0 \quad \text{sur } H_i & \end{cases}$$

On peut donc déterminer les R_k par récurrence.

2 $\frac{\partial P_o}{\partial \zeta_j}(z,\zeta) \neq 0 \qquad j \in [1,\dots,n]$.

On fait exactement la même démonstration qu'en 1 en remplaçant H_i par $H'_j = \{z_j = 0\}$ qui est non caractéristique et tel que $(z_o,\zeta_o) \in H'_j$. Le théorème de Cauchy-Kovalevski précisé montre que le domaine de définition de R_k est un voisinage de (z_o,ζ_o) indépendant de k.

$(H_{P_o} - P_{-1})$ est un opérateur qui transforme les fonctions homogènes de degré k en ζ en fonctions homogènes de degré $k-1$. (Puisque P_o est homogène de degré 0 donc H_{P_o} de degré -1 et P_{-1} homogène de degré -1).

Par ailleurs le calcul de F_k montre immédiatement que si $R_o,\ldots R_{k+1}$ sont homogènes de degrés respectifs $0,\ldots,k+1$, alors $F_k(R_{k+1},\ldots R_o)$ est homogène de degré $k-1$.

La donnée initiale $R_o = +1$ est homogène de degré 0 et les données $R_k = 0$ sont homogènes de degré k pour k quelconque.

Donc on voit par récurrence sur k que R_k <u>est homogène de degré</u> k.

Nous avons défini R comme somme formelle de fonctions holomorphes R_k homogènes de degré k en ζ.

On montre dans S. K. K. [10] p. 359 que les R_k vérifient les majorations de définition d'un opérateur pseudo-différentiel.

La donnée initiale $R_o = 1$ sur H_i ou sur H'_j montre que R_o ne s'annule pas au voisinage de (z_o,ζ_o) donc que R <u>est inversible</u>, et on a bien $RP = P_oR$ donc $P = R^{-1} P_o R$.

3.3 <u>Théorème de préparation de Weierstraß</u>.

<u>Théorème de division</u> 3.3.1 : Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre fini m défini au voisinage du point (z_o,ζ_o).

(On supposera $z_o = 0$ et $\zeta_o = (1,0,\ldots,0)$).

Supposons que $P_m(0;(1,0,\ldots,0,\varepsilon)) = a\varepsilon^p + o(\varepsilon^p)$ avec $a \neq 0$.

Alors pour tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre fini $S(z,D_z)$ défini au voisinage de (z_o,ζ_o), il existe deux opérateurs pseudo-différentiels R et Q d'<u>ordre fini</u> définis de <u>manière unique</u> tels que :

1) $S(z,D_z) = Q(z,D_z)\, P(z,D_z) + R(z,D_z)$

2) $R(z,D_z) = \sum_{j=o}^{p-1} R^j(z,D_{z'})D_{z_n}^j$

où $R^j(z,D_{z'})$ est un opérateur pseudo-différentiel qui ne dépend pas de D_{z_n}.

De plus si l'ordre de S est s, alors Q est d'ordre inférieur ou égal à $s-p$ et R d'ordre inférieur ou égal à s.

Démonstration : Appliquons le théorème de préparation de Weierstrass sur les fonctions holomorphes au symbole principal de P : on a de manière unique $P_m(z,\zeta) = e(z,\zeta)\ \{\zeta_n^p + \sum_o^{p-1} h^j(z,\zeta')\zeta_n^j\}$ avec $\zeta = (\zeta',\zeta_n)$ et $e(z,\zeta)$ inversible et homogène de degré $m-p$.

e est donc le symbole d'un opérateur inversible $E(z,D_z)$.

Le symbole principal de $E^{-1}P$ est $\zeta_n^p + \sum_o^{p-1} h^j(z,\zeta')\zeta_n^j$ donc

$$P(z,D_z) = E(z,D_z)[D_{z_n}^p + \tilde{P}(z,D_z)]$$

où E est elliptique et $\tilde{P}$ a un symbole polynomial de degré inférieur strictement à p en ζ_n.

Supposons le théorème vrai pour $P = D_{z_n}^p + \tilde{P}$: on aura

$$S = Q(D_{z_n}^p + \tilde{P}) + R \qquad R = \sum_o^{p-1} R^j\ D_{z_n}^j$$

$$S = QE^{-1} \times E(D_{z_n}^p + \tilde{P}) + R = (QE^{-1})P + R$$

donc le théorème est vrai pour P.

On peut donc supposer $P(z,D_z) = D_{z_n}^p + \tilde{P}(z,D_z)$.

Calculons R_k et Q_k par approximations successives :

$\rightarrow Q_o = 0$

$\rightarrow S = Q_k D_n^p + Q_{k-1}\tilde{P} + R_k$

pour les symboles : $S(z,\zeta) - Q_{k-1}(z,\zeta)\tilde{P}(z,\zeta) = Q_k(z,\zeta)\zeta_n^p + R_k(z,\zeta)$.

On suppose que R_i et Q_i sont calculés pour $i \leqslant k-1$.

Posons $R_k(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \zeta_n^j} (S(z,\zeta) - Q_{k-1}(z,\zeta)\tilde{P}(z,\zeta))\Big|_{\zeta_n=0} \times \zeta_n^j$.

R_k est le début du développement de Taylor de $S-Q_{k-1}\tilde{P}$ donc $S-Q_{k-1}\tilde{P}-R_k$ est divisible par ζ_n^p :

$$S(z,\zeta) - Q_{k-1}(z,\zeta)\tilde{P}(z,\zeta) - R_k(z,\zeta) = \zeta_n^p Q_k(z,\zeta) .$$

Vérifions par récurrence que R_k est d'ordre $\leqslant s$ et Q_k d'ordre $\leqslant s-p$:

→ $Q_o = 0$ et $R_1(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \zeta_n^j} (S(z,\zeta))\Big|_{\zeta_n=0} \zeta_n^j$ est d'ordre $\leqslant s$.

→ Si Q_{k-1} est d'ordre $\leqslant s-p$ et R_k d'ordre $\leqslant s$ et puisque $\tilde{P}$ est d'ordre $< p$ $\zeta_n^p Q_k(z,\zeta) = S(z,\zeta) - Q_{k-1}(z,\zeta)\tilde{P}(z,\zeta) - R_k(z,\zeta)$ est d'ordre $\leqslant s$, donc Q_k est d'ordre $\leqslant s-p$.

$$R_{k+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_n}\right)^j (S-Q\tilde{P})\Big|_{\zeta_n=0} \times \zeta_n^j \quad \text{est alors d'ordre} \leqslant s .$$

Posons $q_k = Q_{k+1} - Q_k$ $r_k = R_{k+1} - R_k$ d'où $S = (\sum q_k)P + \sum r_k$.

On montre dans S. K. K. [10] p. 368 que les séries $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ convergent et fournissent des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels.

$Q = \sum q_k$ est d'ordre $\leqslant s-p$ et $R = \sum r_k$ d'ordre $\leqslant s$.

<u>Unicité de la décomposition</u> : $S = QP + R = Q'P + R' \Longrightarrow (Q-Q')P = R' - R$.

Soit q_ν le symbole principal de $Q-Q'$ et r_μ le symbole principal de $R'-R$

$$q_\nu P_m(z,\zeta) = r_\mu(z,\zeta)$$

$P_m(0,(1,0,\ldots,\varepsilon)) = a\varepsilon^p + o(\varepsilon^p)$ tandis que r_μ est un polynôme de degré au plus $p-1$ en ζ_n donc $r_\mu(z,\zeta) \equiv 0$ donc $R = R'$ et $Q = Q'$.

Corollaire 3.3.1 : Théorème de préparation pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m défini au voisinage de $(z_o,\zeta_o) = (0;(1,0,\ldots,0))$ tel que $P_m(0;(1,0,\ldots,\varepsilon)) = a\varepsilon^p + o(\varepsilon^p)$ $a \neq 0$. Alors on a de manière unique : $P(z,D_z) = E(z,D_z)W(z,D_z)$ où E est inversible au voisinage de (z_o,ζ_o) et

$$W(z,D_z) = D_{z_n}^p + \sum_{j=0}^{p-1} R^j(z,D_{z'})D_{z_n}^j \qquad (R_j \text{ indépendant de } D_{z_n})$$

de plus R^j est d'ordre $\leqslant p-j$.

Preuve : Appliquons le théorème de division à $S(z,D_z) = D_{z_n}^p$: on a de manière unique $D_{z_n}^p = Q(z,D_z)P(z,D_z) + \sum_o^{p-1} R^j(z,D_{z'})D_{z_n}^j$ avec Q d'ordre $\leqslant 0$ et R^j d'ordre $\leqslant p-j$ donc cette relation donne pour les symboles principaux la relation suivante :

$$\zeta_n^p - \sum_o^{p-1} r^j(z,\zeta')\zeta_n^j = q^o(z,\zeta)P_m(z,\zeta)$$

(q^o est la partie homogène de $d^o 0$ de Q).

On a vu dans la démonstration du théorème de division que P_m s'écrit de manière unique :

$$P_m(z,\zeta) = e(z,\zeta)(\zeta_n^p + \sum r_1^j(z,\zeta')\zeta_n^j)$$

donc $r^j = -r_1^j$ et $e^{-1} = q$ donc q est inversible.

Q a un symbole principal inversible donc est inversible :

$$P(z,D_z) = Q^{-1}(z,D_z)[D_{z_n}^p - \sum_o^{p-1} R^j(z,D_{z'})D_{z_n}^j] \qquad \text{q.e.d.}$$

3.4 Forme réduite des opérateurs à variété caractéristique plate.

Soit $P(z,D)$ un opérateur d'ordre m, défini au voisinage de (z_o,ζ_o) ($z_o = 0$ et $\zeta_o = (0,\ldots,1)$) et de symbole principal ζ_1^m. D'après le théorème de préparation (corollaire 3.3.1), il existe un opérateur elliptique inversible E_P et des opérateurs pseudo-différentiels $P_j(z,D')$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ d'ordre $\leqslant j$ et ne dépendant pas de D_n tels que :

$$P = E_P[D_1^m + P_o(z,D')D_1^{m-1} + \dots P_{m-1}(z,D')] .$$

Soit $A_P(z,D')$ la matrice d'ordre m d'opérateurs pseudo-différentiels :

$$A_P(z,D') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -P_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -P_1 & -P_0 \end{pmatrix}$$

L'équation $E_P^{-1} P\, u_o = v$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} u_1 = D_1\, u_o \\ \\ u_{m-1} = D_1\, u_{m-2} \\ (D_1 I - A_P)\begin{pmatrix} u_o \\ \vdots \\ u_{m-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v\end{pmatrix} \end{cases}$$

, I désignant la matrice unité d'ordre m .

<u>Théorème</u> 3.4.1 (cf [10] Th. 5.2.1 p. 434) : Soient $P(z,D)$ et $Q(z,D)$ deux opérateurs pseudo-différentiels définis au voisinage de (z_o,ζ_o) et de symbole principal ζ_1^m. P et Q sont alors microlocalement (i.e. au voisinage de (z_o,ζ_o)) équivalents. Plus précisément, il existe deux $m \times m$ matrices inversibles R_P et R_Q d'opérateurs pseudo-différentiels telles que :

$$R_P^{-1}(D_1 I - A_P)R_P = D_1 I \quad \text{et} \quad R_Q^{-1}(D_1 I - A_Q)R_Q = D_1 I .$$

Les opérateurs $E_P^{-1}P$ et $E_Q^{-1}Q$ sont donc tous deux équivalents à D_1^m , et il en est de même pour P et Q .

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer l'existence de R_P , car P et Q , A_P et A_Q vérifient les mêmes hypothèses. Pour alléger les notations, nous noterons $A_P(z,D') = A(z,D')$. Le théorème 3.4 résulte alors du lemme suivant :

<u>Lemme</u> (cf [10] p. 436) : Sous les hypothèses précédentes, il existe une $m \times m$ matrice inversible R d'opérateurs pseudo-différentiels telle que : $R^{-1}(D_1 I - A)R = D_1 I$.

<u>Démonstration</u> : Au voisinage de (z_o,ζ_o) , D_n est inversible et il en est de même de la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} D_n^{m-1} & & & 0 \\ & D_n^{m-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul immédiat montre que :

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & D_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D_n \\ -P_{m-1}D_n^{-m+1} & & \cdots & -P_1 D_n^{-1} & -P_o \end{pmatrix} = B_o + \begin{pmatrix} 0 & D_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & D_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = B_o + N = B$$

N est nilpotente d'ordre m (i.e. $N^m = 0$) et B_o est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $\leqslant 0$ (car P_j $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ est d'ordre $\leqslant j$) .

Puisque $M(D_1 I - A)M^{-1} = D_1 I - B$, on est ramené à montrer que $D_1 I - B$ est équivalent à $D_1 I$. Pour ce faire, on se propose de définir un opérateur inversible $R = \sum_{k=o}^{\infty} R_k(z,D')$ tel que : $(D_1 I - B)R = RD_1$.

Par récurrence, on définit les R_k par $R_o = I$ et, si $k \geqslant 1$:

R_k est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_1} R_k(z,D') = B(z,D')R_{k-1}(z,D') \\ R_k(z,D')\big|_{z_1=0} = R_k(0,z',D') = 0 \ . \end{cases}$$

Puisque B est d'ordre 1, R_k est d'ordre k. En utilisant le fait que $B = B_0 + N$ où B_0 est d'ordre 0 et N est nilpotente, on montre (cf [10] p. 435, § 5.2, théorème 5.2.1) que la série formelle $\sum_{k\geq 0} R_k(z,D')$ définit bien un opérateur pseudo-différentiel (d'ordre infini).

D'après la formule de Leibniz pour les opérateurs pseudo-différentiels, on obtient les égalités matricielles suivantes :

$$\forall k \geq 1 \ , \quad BR_{k-1} = \frac{\partial}{\partial z_1} R_k = D_1 R_k - R_k D_1$$

($\frac{\partial}{\partial z_1} R_k$ désigne l'opérateur donc les coefficients sont dérivés par rapport à z_1. $D_1 R_k$ désigne l'opérateur composé de R_k et de D_1).

Donc, $\quad D_1 R - RD_1 = \sum_{k\geq 0} (D_1 R_k - R_k D_1) = \sum_{k\geq 1} BR_{k-1} = BR$.

De plus, pour $z_1 = 0$ on a : $R_{|z_1=0} = \sum_{k\geq 0} R_{k|z_1=0} = I$.

La matrice $R(z,D')$ vérifie donc : $\begin{cases} [D_1 - B(z,D')]R(z,D') = R(z,D').D_1 \\ R(0,z',D') = I \ . \end{cases}$

Il reste à montrer que $R(z,D')$ est inversible.

Puisque ${}^tB(z,D')$ a les mêmes propriétés de $B(z,D')$ (i.e. est la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice dont les coefficients sont d'ordre ≤ 0), il existe un opérateur $\tilde{R}$ tel que : $\begin{cases} [D_1 - {}^tB(z,D')]\tilde{R} = \tilde{R}D_1 \\ \tilde{R}(0,z',D') = I \end{cases}$

Si $S = {}^t\tilde{R}$, on a donc : $\begin{cases} S(D_1 - B) = D_1 S \\ S(0,z',D') = I \end{cases}$

On en déduit que : $D_1 SR = S(D_1 - B)R = SRD_1 \quad (\alpha)$

$$(D_1 - B)RS = RD_1 S = RS(D_1 - B) \quad (\beta) .$$

1) Montrons que $RS = I$.

Soit $Q(z,D') = R(z,D')S(z,D')$. D'après (α), Q vérifie : $\begin{cases} D_1 Q = QD_1 \\ Q(0,z',D') = I \end{cases}$.

Or $\frac{\partial}{\partial z_1} Q = D_1 Q - QD_1$. Q est donc solution de : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_1} Q = 0 \\ (Q-I)\big|_{z_1=0} = 0 \end{cases}$

Si $Q(z,D') - I = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} q_\ell(z,D')$ où $q_\ell(z,\zeta')$ est homogène de degré ℓ en ζ' , on a : $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_1} q_\ell(z,\zeta') = 0 \\ q_\ell(0,z',\zeta') = 0 \end{cases}$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, q_ℓ est nul pour tout ℓ et $Q-I = 0$. Il en résulte que $Q = RS = I$.

2) Montrons que $SR = I$.

Soit $Q = SR - I$. La relation (β) s'écrit : $(D_1 - B)Q = Q(D_1 - B)$. L'opérateur Q vérifie donc : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_1} Q(z,D') - B(z,D')Q(z,D') + Q(z,D')B(z,D') = 0 & (1) \\ Q(0,z',D') = 0 & (2) \end{cases}$

Soit $\sum_{j=0}^{\infty} z_1^j\, Q^j(z',\zeta')$ le développement de Taylor de $Q(z_1,z',\zeta')$ par rapport à z_1 au voisinage de $z_1 = 0$.

D'après (2), $Q^0(z',\zeta') = Q(0,z',\zeta') = 0$.

Faisons l'hypothèse de récurrence que $Q^j(z',\zeta') = 0$ si $j \leqslant n$. En dérivant n fois l'expression (1) par rapport à z_1 et compte tenu de $j!Q^j(z',\zeta') = (\frac{\partial}{\partial z_1})^j Q(z,\zeta')\big|_{z_1=0}$, on obtient : $(\frac{\partial}{\partial z_1})^{n+1} Q(z,\zeta')\big|_{z_1=0} = 0$, d'où $Q^{n+1}(z,\zeta') = 0$.

$Q^j(z,\zeta')$ est donc nul pour tout $j \geqslant 0$ et $Q = \sum_{j\geqslant 0} z_1^j Q^j = 0$.

Il en résulte que $SR = I$.

4. Action des opérateurs pseudo-différentiels sur les microfonctions.

4.1 Noyau d'un opérateur pseudodifférentiel.

Soit $P(z,D_z)$ un opérateur pseudo-différentiel défini pour z voisin de 0 et ζ appartenant à un voisinage de $L = \{\zeta_n = 1 , \sum_{i=1}^{n-1} |\zeta_i| \leqslant k\}$.

On peut alors mettre P sous la forme : $P(z,\zeta) = \sum_{\substack{\alpha'\geqslant 0 \\ \alpha_n \in Z}} a_\alpha |z| \zeta^\alpha$.

$a_\alpha(z)$ est le coefficient de $\zeta'^{\alpha'}$ dans le développement en série entière de ζ' de la composante homogène de degré $|\alpha|$ de P. Si les $p_i \geqslant 0$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n-1} p_i \leqslant k$, le polydisque de $\mathbb{C}^{n-1}$ de centre 0 et de multirayon $(p_1,\dots p_{n-1})$ est contenu dans L. Puisque $P_{|\alpha|}(z,\zeta',1)$ est holomorphe au voisinage de L, la formule intégrale de Cauchy montre que :

$$|a_\alpha(z)| \leqslant \frac{A}{p'^{\alpha'}} \sup_{'\in L} P_{|\alpha|}(z,\zeta',1) .$$

Donc, si z reste dans un compact fixe K, on a :

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$, $|\alpha| \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n-1} p_i \leqslant k \Longrightarrow \sup_K |a_\alpha(z)| \leqslant \dfrac{C_\varepsilon\ \varepsilon^{|\alpha|}}{|\alpha|!\ p'^{\alpha'}}$

(2) $\exists C > 0$, $|\alpha| < 0$ et $\sum_{i=1}^{n-1} p_i \leqslant k \Longrightarrow \sup_K |a_\alpha(z)| \leqslant \dfrac{C^{-|\alpha|}(-|\alpha|)!}{p'^{\alpha'}}$

<u>Définition</u> : Le noyau de P est la série $\sum_{\alpha'\geqslant 0} a_\alpha(z)\, \Phi_\alpha(w)$.

<u>Théorème</u> 4.1 : Sous les hypothèses précédentes, il existe $r > 0$ tel que la série $K(z,w)$ converge absolument pour $z \in K$ et $\begin{cases} |w_n| \leqslant r \\ 0<|w_n|<k|w_j| \ (j=1,\dots n-1) \end{cases}$

Démonstration : Pour $z \in K$, les coefficients $a_\alpha(z)$ vérifient les majorations (1) et (2). Il faut donc distinguer trois cas, selon les signes de α_n et de $|\alpha|$.

1) $|\alpha| < 0$ et $\alpha_n < 0$ (à un nombre fini de termes près, on est dans ce cas lorsque P est d'ordre fini).

On a alors, pour tous $p_i \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} p_i \leqslant k$:

$$|a_\alpha(z)\ \phi_\alpha(w)| \leqslant \left|\frac{\log w_n}{w_1\dots w_n}\right| \frac{C^{-|\alpha|}(-|\alpha|)!}{p'^{\alpha'}} \frac{\alpha'!}{|w'|^{\alpha'}} \frac{|w_n|^{-\alpha_n}}{(-\alpha_n-1)!} .$$

Posons $|\alpha| = -p$, $p_i = \dfrac{k\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j}$ et considérons la série suivante :

$$S = \sum_{\alpha', p>0} \left|\left(\frac{w_n}{kw'}\right)^{\alpha'}\right| |Cw_n|^p \frac{\alpha'!p!}{(p+|\alpha'|-1)!} \frac{\left(\sum_1^{n-1} \alpha_j\right)^{|\alpha'|}}{\alpha_1^{\alpha_1}\dots\alpha_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} .$$

Si $w_1\dots w_n \neq 0$, la convergence de S entraîne celle de $\sum_{\substack{|\alpha|<0\\ \alpha_n<0}} |a_\alpha(z)\ \phi_\alpha(w)|$.

Or, d'après la formule de Stirling, il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\forall\, \alpha_1,\dots\alpha_{n-1} \geqslant 0 , \frac{|\alpha'|^{|\alpha'|}}{\alpha_1^{\alpha_1}\dots\alpha_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \leqslant C \frac{|\alpha'|!}{\alpha'!} \frac{\sqrt{\alpha_1}\dots\sqrt{\alpha_{n-1}}}{\sqrt{|\alpha'|}} .$$

Donc, $$S \leqslant C \sum_{\alpha', p\geqslant 0} \left|\left(\frac{w_n}{kw'}\right)^{\alpha}\right| p|Cw_n|^p \frac{\alpha'!(p-1)!}{(p+|\alpha'|-1)!} \frac{|\alpha'|}{\alpha'!} \sqrt{\alpha_1}\dots\sqrt{\alpha_{n-1}}$$

$$\leqslant C\left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \sqrt{\alpha_i} \left|\frac{w_n}{kw'}\right|^{\alpha_i}\right)\right] \left(\sum_{p\geqslant 0} p|Cw_n|^p\right) .$$

La série converge donc pour $0 < |w_n| < \frac{1}{C}$ et $|w_n| < k|w_i|$.

2) Si $|\alpha| \geqslant 0$, des calculs analogues montrent que la série converge absolument pour $0 < |w_n| < \frac{1}{C}$, $|w_n| < k|w_i|$. (Dans le cas $|\alpha| \geqslant 0$ et

$\alpha_n > 0$, on obtient la convergence pour $0 < \varepsilon \leqslant |w_n|$ et $|w_n| < k|w_i|$, pour tout $\varepsilon > 0$).

On choisit donc r tel que $0 < r < \frac{1}{C}$.

4.2 Calcul pseudodifférentiel précisé.

1) Introduction dans le cas d'une variable.

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, z un point de Ω , γ un chemin fermé dans Ω dont l'image ne contient pas z et dont l'indice par rapport à z est 1 et f une fonction holomorphe dans Ω .

a) La formule intégrale ce Cauchy montre que :

$$\forall\ n \geqslant 0\ ,\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}}\, n!\ d\omega = \int_\gamma f(\omega)\ \Phi_n(z-\omega)d\omega$$

où l'on a posé : $\phi_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i\pi} \ \frac{n!}{t^{n+1}}$, $n \geqslant 0$. (cf § 2.4).

b) Soit 6 un point de γ . On peut supposer que $6 = \gamma(0)$. Il existe une détermination continue de $\log[\gamma(t)-z]$ pour $0 < t < \varepsilon$, ε étant choisi assez petit. Cette détermination se prolonge pour $0 < t < 1$ et on la notera encore $\log[\gamma(t)-z]$. La différence des intégrales sur γ de deux déterminations continues de $f(\gamma(t)) \log[\gamma(t)-z]$ est un multiple de $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Les intégrales ne dépendent donc pas de la détermination choisie. La valeur commune de ces intégrales sera notée $\int_{6\gamma 6} f(\omega) \log(\omega-z)d\omega$.

Soit F la primitive de f telle que $F(6) = 0$. Par intégration par parties, on obtient :

$\alpha_n > 0$, on obtient la convergence pour $0 < \varepsilon \leqslant |w_n|$ et $|w_n| < k|w_i|$, pour tout $\varepsilon > 0$).

On choisit donc r tel que $0 < r < \frac{1}{C}$.

4.2 Calcul pseudodifférentiel précisé.

1) Introduction dans le cas d'une variable.

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, z un point de Ω , γ un chemin fermé dans Ω dont l'image ne contient pas z et dont l'indice par rapport à z est 1 et f une fonction holomorphe dans Ω .

a) La formule intégrale ce Cauchy montre que :

$$\forall\ n \geqslant 0\ ,\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}}\, n!\ d\omega = \int_\gamma f(\omega)\ \Phi_n(z-\omega)d\omega$$

où l'on a posé : $\phi_n(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2i\pi}\ \dfrac{n!}{t^{n+1}}$, $n \geqslant 0$. (cf § 2.4).

b) Soit 6 un point de γ . On peut supposer que $6 = \gamma(0)$. Il existe une détermination continue de $\log[\gamma(t)-z]$ pour $0 < t < \varepsilon$, ε étant choisi assez petit. Cette détermination se prolonge pour $0 < t < 1$ et on la notera encore $\log[\gamma(t)-z]$. La différence des intégrales sur γ de deux déterminations continues de $f(\gamma(t))\ \log[\gamma(t)-z]$ est un multiple de $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Les intégrales ne dépendent donc pas de la détermination choisie. La valeur commune de ces intégrales sera notée $\int_{6\gamma 6} f(\omega)\ \log(\omega-z)d\omega$.

Soit F la primitive de f telle que $F(6) = 0$. Par intégration par parties, on obtient :

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{6\gamma 6} f(\omega)\log(z-\omega)d\omega = - \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 [F(\gamma(t))]'\log(z-\gamma(t))dt$$

$$= -[F(\gamma(t))\log(z-\gamma(t))]_0^1 + \frac{1}{2i\pi} \int \frac{F(\gamma(t))}{-(z-\gamma(t))} \gamma'(t)dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int \frac{F(\omega)}{\omega - z} d\omega = F(z) .$$

Si $\phi_{-n}(t) = - \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \log t \ (n \geqslant 1)$ (cf § 2.4), on a donc :

$$F(z) = \int_{6\gamma 6} \phi_{-1}(z-\omega) f(\omega)d\omega .$$

Or, $\frac{d}{dt} \phi_{-n}(t) = \phi_{-n+1}(t) + h_n(t)$ où $h_n(t)$ est holomorphe pour $n \geqslant 2$.

Soit $D_6^{-n}f$ la $n^{\text{ème}}$ primitive de f qui s'annule en 6 avec ses $(n-1)$ premières dérivées. On a donc : $\int_{6\gamma 6} f(\omega)\ \phi_{-1}(z-\omega)d\omega = D_6^{-1}f(z)$.

Supposons que : $\int_{6\gamma 6} f(\omega)\ \phi_{-n}(z-\omega)d\omega = D_6^{-n}f(z)$, $n \geqslant 1$.

Par intégration par parties $(n \geqslant 1)$:

$$\int_{6\gamma 6} f(\omega)\ \phi_{-n-1}(z-\omega)d\omega = \int_{6\gamma 6} D_6^{-1}f(\omega)[\phi_{-n}(z-\omega) + h_{n+1}(z-\omega)]d\omega$$

$$= D_6^{-n}[D_6^{-1}f](z) = D_6^{-n-1}f(z) .$$

On a donc : $\forall\, n \geqslant 1$, $D_6^{-n}f(z) = \int_{6\gamma 6} f(\omega)\ \phi_{-n}(z-\omega)d\omega$.

2) Cas général.

Si α est le multi-indice $(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ on notera :

$$\phi_\alpha(\tau) = \phi_{(\alpha_1,\dots\alpha_n)}(\tau_1,\dots\tau_n) = \phi_{\alpha_1}(\tau_1)\dots\phi_{\alpha_n}(\tau_n) .$$

Soit Σ l'hyperplan $z_n = 0$, $\mathbb{T}^n$ le tore à n dimensions.

Définition : Un n-cycle s'appuyant sur Σ est une application continue $\gamma : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^n$ telle que $\gamma(t_1,\dots t_{n-1},0) \in \Sigma$ pour $(t_1,\dots t_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1}$.

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage convexe de l'image de γ et $\alpha \neq 0$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\gamma_n(t_1,\dots t_{n-1},\varepsilon)$ est voisin de 0

et il existe une détermination continue de $\log(\gamma_n(t)-\alpha)$ pour $t = (t',\varepsilon)$, $t' \in \mathbb{T}^{n-1}$; $]0,1[$ étant simplement connexe, on peut étendre cette détermination à $\mathbb{T}^{n-1} \times]0,1[$. Si $\log[\gamma_n(t)-\alpha]$ désigne cette détermination continue sur $\mathbb{T}^{n-1} \times]0,1[$, la différence des intégrales sur γ de deux déterminations continues de $f(\gamma(t))\log[\gamma_n(t)-\alpha]$ est un multiple de $\int_\gamma f(\omega)d\omega = 0$.
La valeur commune de ces intégrales est donc bien définie et sera notée
$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} f(\omega)\log(\omega_1-\alpha)d\omega$.

<u>Théorème</u> 4.2.1 : Soient γ un n-cycle s'appuyant sur Σ tel que $\frac{1}{(2i\pi)^n}\int \frac{d\tilde{z}_1\ldots d\tilde{z}_n}{(\tilde{z}_1-z_1)\ldots(\tilde{z}_n-z_n)} = 1$, et f une fonction holomorphe dans un ouvert convexe Ω contenant l'image de γ . Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha',\alpha_n)$ avec $\alpha' \geqslant 0$, on a :

$$D^\alpha_\Sigma f(z) = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_\alpha(z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} .$$

<u>Démonstration</u> : a) Si $\alpha_n \geqslant 0$, l'égalité ci-dessus n'est autre que la formule intégrale de Cauchy.

b) On a :

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_\alpha(z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}) = \int_0^1 dt_n \int \phi_\alpha(z-\gamma(t))f(\gamma(t))\,\frac{D(\gamma_1,\ldots\gamma_n)}{D(t_1,\ldots t_n)}\,dt_1\ldots dt_{n-1} .$$

On raisonne alors par récurrence sur α_n comme dans le 1) b) en utilisant le fait que pour $t_n = 0,1$, $D^{\alpha_n+1}_\Sigma f(\alpha_n \leqslant -2)$ s'annule sur le $(n-1)$ cycle $\gamma(0,t') = \gamma(1,t')$ dont l'image est contenue dans Σ .

<u>Définition</u> : Soit Σ l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation $(z_n = \sigma)$.

Un ouvert convexe Ω de $\mathbb{C}^n$ est k-Σ-plat si :

Pour tout $z = (z',z_n) \in \Omega$, le polydisque D de Σ défini par

$D = \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n / \tilde{z}_n = \sigma \quad |\tilde{z}_j - z_j| \leqslant \frac{1}{k} |z_n - \sigma|\}$ est contenu dans Ω.

<u>Théorème</u> 4.2.2 : Soient Ω_o un ouvert borné, $P(z,\zeta)$ un opérateur pseudodifférentiel défini pour $z_o \in \bar{\Omega}_o$, $\sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_i| \leqslant k|\zeta_n|$ et Σ l'hyperplan d'équation $(z_n = \sigma)$.

Soit Ω un ouvert contenu dans Ω_o, k-Σ-plat, de diamètre inférieur ou égal à r (r est le rayon de convergence défini dans le théorème précédent donc r ne dépend que de P et Ω_o).

a) $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ la série $\Sigma\, a_\alpha(z)\, D_\Sigma^\alpha f(z)$ converge uniformément sur tout compact. On note $P_\Sigma f(z) = \sum a_\alpha(z) D_\Sigma^\alpha f(z)$.

b) Pour tout $z \in \Omega$, il existe dans Ω un n-cycle γ s'appuyant sur Σ tel que :

$$\text{(i)} \qquad (2i\pi)^{-n} \int_\gamma \frac{d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_n}{(\tilde{z}_1 - z_1) \dots (\tilde{z}_n - z_n)} = 1 .$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall \tilde{z} \in \gamma \qquad 0 < |\tilde{z}_n - z_n| \leqslant k|\tilde{z}_j - z_j| .$$

c) Pour tout n-cycle γ possédant les propriétés (i) et (ii) du b) on a :

$$P_\Sigma f(z) = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z, z-\tilde{z})\, f(\tilde{z})\, d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_n .$$

<u>Démonstration</u> : Montrons tout d'abord comment on peut donner un sens à l'intégrale du c).

$$K(z,w) = M(z,w) + N(z,w) \log w_n ,$$

avec $M(z,w) = \sum_{\substack{\alpha' \geqslant 0 \\ \alpha_n \geqslant 0}} a_\alpha(z)\, \Phi_\alpha(w)$ holomorphe pour $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0 \dots$ et $w_n \neq 0$

et $N(z,w) = \sum_{\substack{\alpha' \geqslant 0 \\ \alpha_n < 0}} a_\alpha(z)\, \frac{\Phi_\alpha(w)}{\log w_n}$ holomorphe pour $w_1 \neq 0 \dots$ et $w_{n-1} \neq 0$, w_n quelconque.

$z \in \Omega$ tandis que d'après (ii) $|\tilde{z}_n - z_n| > 0$ donc $z \notin \gamma$.

Si $z \in \Omega$ $\tilde{z}-z$ ne s'annule pas si $\tilde{z}$ parcourt γ, donc $M(z,z-\tilde{z})$ et $N(z,z-\tilde{z})$ sont holomorphes en $\tilde{z}$ sur γ.

φ étant holomorphe au voisinage de γ peut-on donner un sens à

$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \varphi(\tilde{z}) \log(\tilde{z}_n - \alpha) d\tilde{z}$ pour $\alpha \neq \sigma$?

γ est un n-cycle s'appuyant sur Σ : $\gamma : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^n$.

Pour ε petit, $t_n = \varepsilon$ $\gamma(t)$ est voisin de σ et donc $\gamma_n(t) \neq \alpha$ donc on peut choisir une détermination continue de $\log(\gamma_n(t)-\alpha)$ pour $t_1, \ldots t_{n-1} \in \mathbb{T}^{n-1}$ et $t_n = \varepsilon$.

$]0,1[$ est simplement connexe, donc on peut étendre cette détermination à $\mathbb{T}^{n-1} \times]0,1[$ de manière uniforme. $\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \varphi(\tilde{z}) \log(\tilde{z}_n - \alpha) d\tilde{z}$ est alors indépendant de cette détermination si et seulement si $\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \varphi(\tilde{z}) d\tilde{z} = 0$.

Dans le cas du théorème on a $\varphi(\tilde{z}) = N(z,z-\tilde{z})\, f(\tilde{z})$ qui est singulière en $\tilde{z}_1 = z_1, \ldots \tilde{z}_{n-1} = z_{n-1}$ mais est holomorphe en $\tilde{z}_n$ donc il existe $\Phi(\tilde{z})$ telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}_n}(\tilde{z}) = \varphi(\tilde{z})$

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \varphi(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}_n}(\tilde{z})\, d\tilde{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{z}_n = \int d\tilde{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{z}_{n-1} \int dz_n\, \Phi(\tilde{z}) = 0$$

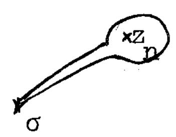
donc l'intégrale $\int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})\, f(\tilde{z}) d\tilde{z}$ a un sens si γ vérifie les propriétés de b).

<u>Démonstration de</u> b) : $\gamma = (\gamma_1, \ldots \gamma_n)$. Soit $z = (z_1, \ldots z_n) \in \Omega$ fixé.

Choisissons tout d'abord un chemin $\lambda : \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui vérifie :

1) $\lambda(0) = \lambda(1) = \sigma$

2) λ est d'indice 1 par rapport à z_n



3) λ est contenu dans un voisinage d'ordre ε du segment $[\sigma, z_n]$.

On peut maintenant définir γ par :

$$j = 1,\dots n-1 \qquad \gamma_j(t_1,\dots,t_n) = z_j + \left|\frac{1}{k}(\lambda(t_n)-z_n)\right| e^{2i\pi t_j}$$

$$\gamma_n(t_1,\dots,t_n) = \lambda(t_n) .$$

→ γ est un n-cycle s'appuyant sur Σ

→ γ vérifie (i) .

En effet dans $\Omega \setminus \bigcup_{j=1,\dots,n} \{\tilde{z}_j = z_j\}$ γ est homotope à la frontière distinguée d'un polydisque D de centre $(z_1,\dots z_n)$.

(On transforme d'abord λ en un cercle par homotopie donc γ_n puis on se ramène à un rayon constant pour les γ_j) .

Donc $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\tilde{z}_1\wedge\dots\wedge d\tilde{z}_n}{(\tilde{z}_1-z_1)\dots(\tilde{z}_n-z_n)} = \int_D \frac{d\tilde{z}_1\wedge\dots\wedge d\tilde{z}_n}{(\tilde{z}_1-z_1)\dots(\tilde{z}_n-z_n)} = (2\pi i)^n$

→ γ vérifie (ii) : $|\gamma_j(t)-z_j| = \frac{1}{k}|\gamma_n(t)-z_n|$.

→ Enfin $\gamma \subset \Omega$.

En effet si $\tilde{z}_n$ appartient au segment $[\sigma, z_n]$ alors puisque Ω est k-Σ-plat, Ω contient le polydisque de centre $(z_1,\dots z_{n-1})$ et de rayon $\frac{1}{k}|\tilde{z}_n-z_n|$. (Par homothétie).

Ω est ouvert tandis que le segment $[\sigma, z_n]$ est compact, donc il existe un voisinage V de $[\sigma, z_n]$ tel que si $\tilde{z}_n \in V$ alors Ω contient le polydisque de centre $(z_1,\dots z_{n-1})$ et de rayon $\frac{1}{k}|\tilde{z}_n-z_n|$.

Il suffit donc de tracer λ dans V et alors $\gamma \subset \Omega$.

Pour un tel chemin γ , on a vu que $\displaystyle\int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$ a un sens.

$\gamma \subset \Omega$ donc au voisinage de γ on a $K(z,z-\tilde{z}) = \Sigma\, a_\alpha(z)\, \Phi_\alpha(z-\tilde{z})$ et la série est absolument convergente donc :

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = \int_{\Sigma\gamma\Sigma}\sum a_\alpha(z)\Phi_\alpha(z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = \sum_\alpha \int_{\Sigma\gamma\Sigma} a_\alpha(z)\Phi_\alpha(z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} .$$

Or on a vu que si γ est un n-cycle s'appuyant sur Σ (Th. 4.2.1) :

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \Phi_\alpha(z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = D_\Sigma^\alpha f(z)$$

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = \Sigma\, a_\alpha(z)\, D_\Sigma^\alpha f(z) .$$

Il existe un voisinage V de z tel que si $u \in V$ le chemin γ vérifie encore les propriétés de b), donc la série $\sum_\alpha a_\alpha(u)\, D_\Sigma^\alpha f(u)$ converge sur V uniformément.

La série $\sum_\alpha a_\alpha(u)\, D_\Sigma^\alpha f(u)$ est donc uniformément convergente sur tout compact et de plus :

$$P_\Sigma f(z) = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} = \sum_\alpha a_\alpha(z)\, D_\Sigma^\alpha f(z) .$$

<u>Remarque</u> : A l'aide de ce théorème et du théorème d'inversion des pseudo-différentiels, on peut montrer le théorème de Cauchy-Kowalevski précisé :

P opérateur différentiel d'ordre m , Σ hyperplan non caractéristique. (On peut prendre P pseudodifférentiel) :

Il existe P^{-1} tel que $PP^{-1} = P^{-1}P = \mathrm{id}$ au voisinage de $z \in \Sigma$ et $\zeta = (0,\ldots,0,1)$.

$f = P_\Sigma^{-1} g$ est solution de $\begin{cases} P_\Sigma f = g & (Pf = g \text{ si } P \text{ est différentiel}) \\ D^j f_{|\Sigma} = 0 & j = 0,\ldots,m-1 . \end{cases}$

Si g est défini dans un ouvert k-Σ-plat Ω , f est défini dans le même ouvert.

k est le meilleur tel que P^{-1} soit défini si $|\zeta_j| \leqslant k|\zeta_n|$ donc

$$k = \sup\{\ell \,/\, |\zeta_j| \leqslant \ell|\zeta_n| \Longrightarrow P_m(z,\zeta) \neq 0\} .$$

4.3 <u>Changement d'hyperplan.</u>

<u>Théorème</u> 4.3.1 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel défini pour z appartenant à un voisinage de $\bar{\Omega}_0$ et $\sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j| \leqslant k|\zeta_n|$.

Soient les hyperplans $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^n / z_n = \sigma\}$ et $\Sigma' = \{z \in \mathbb{C}^n / z_n = \sigma'\}$.

Soient Ω et Ω' deux ouverts tels que :

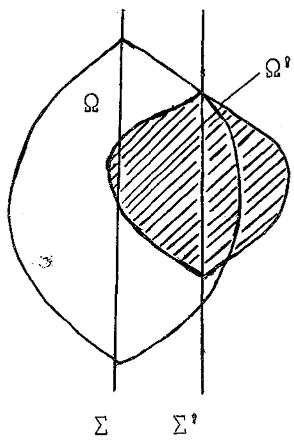
→ Ω est k-Σ-plat et Ω' est k-Σ'-plat.

→ $\Omega' \cap \Sigma' \subset \Omega$.

→ $\Omega \subset \Omega_0$ $\Omega' \subset \Omega_0$ et Ω et Ω' de diamètre $\leqslant r$.

Alors si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ on a : $\begin{cases} (*) & P_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Omega) \\ (**) & P_{\Sigma'} f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega') \\ (***) & P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f \in \mathcal{O}(\Omega') . \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : (*) C'est le théorème précédent (Th. 4.2.2).



(**) $\Omega \cap \Omega' \subset \Omega'$ tandis que $\Omega \cap \Omega' \cap \Sigma' = \Omega' \cap \Sigma'$ donc puisque Ω' est k-Σ'-plat, il en est de même pour $\Omega \cap \Omega'$.

Donc d'après le théorème précédent $P_{\Sigma'} f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega')$.

(***) Nous allons construire des chemins γ et γ' qui vérifient les hypothèses de b) théorème 2.

Soit $z \in \Omega'$.

(1) Construction de γ' :

$\rightarrow$ $\lambda : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\begin{cases} \lambda(0) = \sigma' \\ \lambda \text{ d'indice } 1 \text{ par rapport à } z_n \\ \lambda \text{ contenu dans un voisinage donné de } [\sigma', z_n] \end{cases}$

$\rightarrow$ $\gamma'_j(t_1,\ldots t_n) = z_j + \frac{1}{k}\,|\lambda(t_n)-z_n|\,e^{2i\pi t_j}$ $\quad j = 1,\ldots n-1$

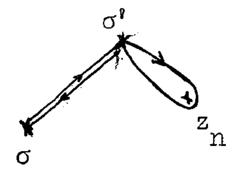
$\rightarrow$ $\gamma'_n(t_1,\ldots t_n) = \lambda(t_n)$.

(2) Construction de γ :

$\rightarrow$ $\gamma_n(t_n) = (1-3t_n)\sigma + 3t_n\sigma'$ si $t_n \in [0,1/3]$

$\rightarrow$ $\gamma_n(t_n) = \lambda(3t_n-1)$ si $t_n \in [1/3,2/3]$

$\rightarrow$ $\gamma_n(t_n) = (3t_n-2)\sigma + 3(1-t_n)\sigma'$ si $t_n \in [2/3,1]$



(γ_n parcourt le segment $[\sigma',\sigma]$, le chemin λ puis le segment $[\sigma',\sigma]$)

$\gamma_n(1) = \gamma_n(0)$ donc γ_n est un cycle.

Alors pour γ : $j = 1,\ldots n-1$ $\quad \gamma_j(t_1,\ldots,t_n) = z_j + \frac{1}{k}|\gamma_n(t_n)-z_n|\,e^{2i\pi t_j}$

$\gamma_n(t_1,\ldots,t_n) = \gamma_n(t_n)$.

Propriétés de γ : $\rightarrow$ si $t_n \in [1/3,2/3]$ $\quad \gamma(t) \in \Omega'$

$\rightarrow$ si $t_n \in [0,1/3] \cup [2/3,1]$ $\quad \gamma(t) \in \Omega$.

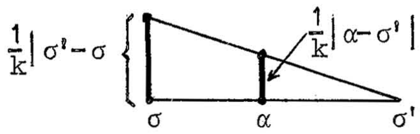
En effet : Les points $\{\tilde{z}_n = \sigma' \quad \tilde{z}_j = z_j + \frac{1}{k}|z_n-\sigma'|\,e^{2\pi i t_j}\}$ sont dans $\Omega' \cap \Sigma'$
$j = 1,\ldots n-1$

(puisque Ω' est k-Σ'-plat et $z \in \Omega'$) donc dans Ω .

Soit $\tilde{z} = (\tilde{z}',\sigma')$ tel que $|\tilde{z}_j-z_j| \leqslant \frac{1}{k}\,|z_n-\sigma'|$.

Ω est convexe donc $\tilde{z} \in \Omega$. Ω est k-Σ-plat donc le polydisque de centre $\tilde{z}'$ de l'hyperplan Σ et de rayon $\frac{1}{k}|\sigma-\sigma'|$ est dans Ω .

Puisque Ω est convexe le polydisque de l'hyperplan $\tilde{z}_n = \alpha$ pour α appartenant au segment $[\sigma, \sigma']$, de centre $\tilde{z}'$ et de rayon $\frac{1}{k}|\alpha - \sigma'|$ est dans Ω.



Ceci est vrai pour tout $\tilde{z}'$ tel que $|\tilde{z}_j - z_j| \leqslant \frac{1}{k}|z_n - \sigma'|$ donc le polydisque de l'hyperplan $\{\tilde{z}_n = \alpha\}$ centré en $z' = (z_1, \ldots z_{n-1})$ et de rayon $\frac{1}{k}[|z_n - \sigma'| + |\sigma' - \alpha|]$ donc celui de rayon $\frac{1}{k}[|z_n - \alpha|]$ sont dans Ω.

Ceci montre que si $\gamma_n(t_n)$ est sur le segment $[\sigma, \sigma']$, $\gamma \subset \Omega$.

Si $\boxed{z \in \Omega \cap \Omega'}$ $\gamma' \subset \Omega \cap \Omega'$ puisque $\Omega \cap \Omega'$ est k-Σ'-plat.

Donc γ est contenu dans Ω pour $t_n \in [1/3, 2/3]$ donc d'après ce qui précède $\gamma \subset \Omega$ pour tout t_n.

D'après le théorème 2 on a :

$$P_\Sigma f = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z, z-\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

$$P_{\Sigma'} f = \int_{\Sigma'\gamma'\Sigma'} K(z, z-\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}.$$

$$P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f = \int_{\Sigma\gamma\Sigma - \Sigma'\gamma'\Sigma'} K(z, z-\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}.$$

Soit Δ défini par : $\begin{cases} \delta_n(t_1, \ldots, t_n) = (1-t_n)\sigma + t_n\sigma' \\ \delta_j(t_1, \ldots, t_n) = z_j + \frac{1}{k}|\delta_n(t) - z_n| e^{2\pi i t_j} \end{cases}$

$t_n \in]0,1[\quad t_j \in \mathbb{T} \quad j < n$.

Donc, si K_1 et K_2 sont deux déterminations de K telles qu'il existe une détermination de K sur γ égale à K_1 sur $[\sigma, \sigma']$ et à K_2 sur $[\sigma', \sigma]$ on a :

$$P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f = \int_\Delta K_1(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} - \int_\Delta K_2(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$$
$$= \int_\Delta (2\pi i)N(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z} \quad (\text{si} \quad K(z,w) = M(z,w) + N(z,w) \log w_n) .$$

Si $z \in \Omega' \setminus \Omega \cap \Omega'$ $P_\Sigma f$ et $P_{\Sigma'} f$ ne sont pas définis, mais $\int_\Delta 2\pi i\, N(z,z-\tilde{z})f(\tilde{z})d\tilde{z}$ est défini, donc $P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f$ se prolonge holomorphiquement à $\Omega' \setminus \Omega \cap \Omega'$ donc $P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f \in \mathcal{O}(\Omega')$.

Théorème 4.3.2 : Soient P et Q deux opérateurs pseudo-différentiels définis au voisinage de $|\zeta_i| \leqslant k|\zeta_n|$ $(i = 1,\ldots n-1)$, Σ l'hyperplan d'équation $z_n = \sigma$, Ω et Ω' des ouverts k-Σ-plats tels que : $\Omega' \supset \Omega$ et $\Omega \cap \Sigma = \Omega' \cap \Sigma$. Alors, pour toute fonction f holomorphe dans Ω , $[(P \circ Q)_\Sigma - P_\Sigma \circ Q_\Sigma]f$ est holomorphe dans Ω' .

Démonstration : On se limite au cas où Q est d'ordre fini. Si Q est d'ordre $\leqslant m$ et si f est m-plate sur Σ , alors $(P \circ Q)_\Sigma f = P_\Sigma (Q_\Sigma f)$ (Cor. 2.6.1).

Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. La fonction $f_o = \sum_{j=o}^{m} \frac{1}{j!} (D^j_{z_n} f|_\Sigma)\ (z-\sigma)^j$ est holomorphe dans l'ouvert $V = \{(z',z_n) | z_n \in \mathbb{C}$ et $(z',\sigma) \in \Omega \cap \Sigma\}$.

Si $H = (P \circ Q)_\Sigma - P_\Sigma \circ Q_\Sigma$, on a donc :

$Hf = Hf_o + H(f-f_o) = Hf_o$ car $f-f_o$ est m-plate sur Σ .

Puisque $f_o \in \mathcal{O}(\Omega')$ (car $\Omega' \in V$) , on a bien : $Hf = Hf_o \in \mathcal{O}(\Omega')$.

4.4 Action des opérateurs pseudodifférentiels sur les micro-fonctions.

Définition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Un opérateur pseudodifférentiel sur U est un symbole $P(x,\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_\ell(x,\xi)$ tel que :

1) Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $p_\ell(x,\xi)$ est analytique et homogène de degré ℓ en ξ dans l'ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ correspondant à U $(\tilde{U} = \{(x,\xi) | \exists \lambda > 0 , (x,\lambda\xi) \in U\})$.

2) Pour tout $(x_0,\xi_0) \in U$, $P(x,\xi)$ se prolonge en un symbole $P(z,D_z)$ d'opérateur pseudodifférentiel complexe défini dans un voisinage de $(\overline{x_0,\xi_0})$ ($(\overline{x_0,\xi_0})$ est l'image canonique de (x_0,ξ_0) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$).

On notera par $\mathcal{P}(U)$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels dans U.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudodifférentiel défini au voisinage de $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $x_0 = 0$ et $\xi_0 = (0,\ldots,0,1)$. Il existe $\tilde{\omega}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et $k > 0$ tel que $P(x,D_x)$ se prolonge en un opérateur pseudodifférentiel complexe $P(z,D_z)$ défini dans l'ouvert $\tilde{\omega} \times \{\sum_{i=1}^{n-1} |\zeta_i| < k|\zeta_n|\}$. Soient Σ_ε l'hyperplan d'équation $z_n = i\varepsilon$, $\omega = \tilde{\omega} \cap \mathbb{R}^n$, $I_k = \{y \in S^{n-1} | \sum_{i=1}^{n-1} |y_i| < ky_n\}$ et Γ_k le cône ouvert de polaire I_k.

Proposition 4.4 : Soit u une microfonction à support dans $\omega \times I_k$, f une fonction holomorphe dans $\omega + i0\Gamma_{k'}$ $(0 < k' < k)$ telle que u soit égale à l'image de $b(f)$ dans $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1})$. Alors la valeur au bord de $P_{\Sigma_\varepsilon}(f)$ est définie et l'image de $b(P_{\Sigma_\varepsilon} f)$ dans $\mathcal{C}(\omega \times S^{n-1})$ ne dépend ni de la fonction f telle que $b(f) = u$ ni de $\varepsilon > 0$ supposé assez petit.

<u>Démonstration</u> : Puisque $\{v \in \mathscr{C}(\omega \times S^{n-1}) \mid \operatorname{supp} v \subset \omega \times \bar{I}_r\} \cong \frac{\mathcal{O}(\omega+i0\Gamma_r)}{\mathcal{O}(\omega)}$ $(r > 0)$ et que le support de u est compact dans $\omega \times I_k$, il existe $k' > 0$ tel que $k' < k$ et que, modulo fonctions holomorphes, u soit la valeur au bord d'une fonction f holomorphe dans $(\omega+i\Gamma_{k'}) \cap \tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_1$ étant un voisinage complexe de ω. Fixons k_1 tel que $k' < k_1 < k$. P est alors défini au voisinage de $\tilde{\omega} \times \{\sum_1^{n-1} |\zeta_i| \leqslant k_1|\zeta_n|\}$.

$\Gamma_{k'}$ est le cône polaire de $I_{k'}$, donc $\Gamma_{k'} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n > k' \sup_{i=1,\dots n-1} |y_i|\}$.

L'ensemble $\Delta = \{(z',z_n) \mid z_j = x_j + iy_j \ (j = 1,\dots n-1)$, $z_n = i\varepsilon$, $x' \in \omega \cap \mathbb{R}^{n-1}$ et $\sup_{i=1,\dots n-1} |y_i| < \frac{\varepsilon}{k'}\}$ est contenu dans $(\omega+i\Gamma_{k'}) \cap \Sigma_\varepsilon$. Désignons par $D(z',\Omega)$ le polydisque de Σ_ε de centre $(z',i\varepsilon)$ et de rayon r. Soit

$\Omega'_\varepsilon = \{(z',z_n) \mid D(z',\frac{1}{k_1}|z_n-i\varepsilon|) \subset \Delta\}$.

Comme Δ est ouvert dans Σ_ε, Ω'_ε est ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Puisque $0 < k' < k_1$, $D(o,\frac{\varepsilon}{k_1})$ est contenu dans Δ, donc Ω'_ε est un voisinage de 0. Par définition, Ω'_ε est k_1-Σ_ε-plat et il en est de même de $\Omega'_\varepsilon \cap (\omega+i\Gamma_{k'})$ (car $k' < k_1$ et $\Gamma_{k'}$ est stable par homothéties). Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\Omega_\varepsilon = \Omega'_\varepsilon \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid |y_n| < 2\varepsilon\}$ est un voisinage de 0 contenu dans $\tilde{\omega}$ et $\Omega_{1,\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap (\omega+i\Gamma)$ est k_1-Σ_ε-plat. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\Omega_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n$ contient un voisinage ω_1 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui ne dépend pas de ε. On peut définir $P_{\Sigma_\varepsilon} f$ dans l'ouvert k_1-Σ_ε-plat et l'image $b(P_{\Sigma_\varepsilon} f)$ dans $\mathscr{C}(\omega_1 \times S^{n-1})$ est une microfonction à support dans $\omega_1 \times I$.

Montrons que cette microfonction ne dépend pas des choix de f et ε.

1) Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Le transformé par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$, d'un polydisque contenu dans Δ' (Δ' étant défini comme Δ, mais en remplaçant ε par ε') est contenu dans Δ. Les points de Δ' appartiennent donc à l'enveloppe k'-Σ_ε-plate de Δ, donc à son enveloppe k_1-Σ_ε-plate. Il en résulte que $\Omega_{\varepsilon'} \cap \Sigma_{\varepsilon'} \subset \Omega_\varepsilon$. Si $\Omega_{1,\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)$, $\Omega_{1,\varepsilon}$ est k_1-Σ_ε-plat, $\Omega_{1,\varepsilon}$ contient $\Omega_{\varepsilon'} \cap \Sigma_{\varepsilon'}$ et f est holomorphe dans Ω_1.
D'après le théorème 4.3.1, $P_{\Sigma_\varepsilon} f - P_{\Sigma_{\varepsilon'}} f$ est holomorphe dans $\Omega_{\varepsilon'}$. $\Omega_{\varepsilon'}$ étant un voisinage de 0, $b(P_{\Sigma_\varepsilon} f)$ et $b(P_{\Sigma_{\varepsilon'}} f)$ ont même image dans $\mathscr{C}(\omega_1 \times I)$ ($\Omega_{\varepsilon'} \cap \mathbb{R}^n$ contient ω_1 pour ε assez petit).

2) Supposons que $u = b(f) = b(g)$. Il existe alors un voisinage complexe $\tilde{\omega}'$ de ω tel que $f-g$ soit holomorphe dans $\tilde{\omega}'$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\Omega_2 \subset \tilde{\omega}'$, alors $f-g \in \mathcal{O}(\Omega_\varepsilon)$, Ω_ε est k-Σ_ε-plat et on a donc : $P_{\Sigma_\varepsilon}(f-g) \in \mathcal{O}(\Omega_\varepsilon)$. $P_{\Sigma_\varepsilon} f$ et $P_{\Sigma_\varepsilon} g$ définissent donc la même microfonction $v = Pu \in \mathscr{C}(\omega_1 \times I)$.

<u>Remarques</u> : α) Si $u = \sum_{j \in J} u_j$, $u_j \in \mathscr{C}(\omega_j \times I_j)$, est une somme localement finie de microfonctions, on peut choisir des coordonnées dans les $\omega_j \times I_j$ et définir, pour $j \in J$, $P_{\Sigma_j} u_j = v_j$, d'où la définition d'une microfonction v par la somme localement finie $\sum_{j \in J} v_j$. Pour définir ainsi l'action de P sur u (i.e. par $Pu = v$), il faudrait vérifier que la définition ne dépend pas du choix des systèmes de coordonnées.

β) $(P_\Sigma \circ Q_\Sigma)f$ et $(P \circ Q)_\Sigma f$ sont holomorphes dans $\Omega_{1,\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma)$. Mais d'après le théorème 4.3.2, $[(P \circ Q)_\Sigma - P_\Sigma \circ Q_\Sigma]f$ est holomorphe dans Ω_ε , qui est un voisinage de 0 , donc $(P \circ Q)u = P[Qu]$.

Dans S. K. K. [10] p. 324, on montre (par voie cohomologique) le résultat plus précis :

<u>Théorème</u> 4.3 : Le faisceau $\mathscr{C}$ est muni d'une structure de faisceau de $\mathscr{P}$-module. De plus, si u est une microfonction à support dans $\omega \times I$ (I étant défini comme ci-dessus) et si $P(x,D_x) \in \mathscr{P}(\omega \times I)$, Pu coïncide avec l'action définie ci-dessus.

<u>Application</u> : On peut retrouver aisément le théorème fondamental de Sato :

$$SSu \subset SSPu \cup \{(x,\xi) \mid P_m(x,\xi) = 0\} \qquad (u \in \mathscr{B}(\omega)) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_0,\xi_0) \notin SSv$ $(Pu = v)$, $(x_0,\xi_0) \notin \{(x,\xi) | P_m(x,\xi) = 0\}$. Il existe un voisinage U de (x_0,ξ_0) ne rencontrant pas $SSPu \cap \{P_m(x,\xi) = 0\}$. P est donc inversible dans U et si $\tilde{u}$ désigne l'image de u dans $\mathscr{C}(U)$, on a $P(x,D_x)\tilde{u} = 0$ car $SSPu \cap V = \emptyset$. Donc, $P^{-1}(P\tilde{u}) = \tilde{u} = 0$ dans $\mathscr{C}(U)$ et $SSu \cap U = \emptyset$.

Donc $(x_0,\xi_0) \notin SSu$.

4.5 <u>Transformations de contact quantifiées.</u>

<u>Rappels</u> : Dans $M = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n$, la 1-forme canonique est $\omega_{(x,\xi)} = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$. Si $\sigma = d\omega$, σ_m est une forme symplectique sur $T_m(M) \cong M$, pour tout $m \in M$. Le champ hamiltonien H_f de $f \in C^\infty(M)$ est défini par :

$\forall\, u \in M$, $df_m(u) = - \sigma_m(H_{f\,m}, u)$. On a alors :

$$H_f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} .$$

Si $f,g \in C^{\infty}(M)$, le crochet de Poisson de f et g est défini par :

$\{f,g\} = \sigma(H_f,H_g)$, soit $\{f,g\}_m = \Sigma \dfrac{\partial f}{\partial \xi_i} \dfrac{\partial g}{\partial x_i} - \dfrac{\partial g}{\partial \xi_i} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $m \in M$.

Si P et Q sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre fini p et q respectivement, le symbole principal (d'ordre $p+q-1$) de $PQ-QP = [P,Q]$ est égal à : $\{P_p,Q_q\}$.

Dans $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n\setminus\{0\})$, l'action de R_+^* $((x,\xi)\mapsto(x,\lambda\xi),\lambda > 0)$ définit une structure homogène. Muni de cette action et de la 2-forme $\sigma = d\omega$, $\mathbb{R}^n \times \{\mathbb{R}_n\setminus 0\}$ est une variété symplectique cônique. Par passage au quotient, on obtient la structure de contact sur $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Une 1-forme ω' est canonique s'il existe une fonction $\lambda(x,\xi) > 0$ telle que $\omega' = \lambda(x,\xi)\omega$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}_x^n \times S_\xi^{n-1}$, V un ouvert de $\mathbb{R}_y^n \times S_\eta^{n-1}$ et Φ un difféomorphisme de U sur V .

<u>Définition</u> : Φ est une transformation de contact si l'image d'une 1-forme canonique sur U est une 1-forme canonique sur V .

Soient $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ les ouverts de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n\setminus\{0\})$ correspondant à U et V ($\tilde{U} = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n\setminus\{0\}) \mid \exists\, \lambda > 0 , (x,\lambda\xi) \in U\}$) . Soit $\tilde{\phi}$ la fonction homogène de degré 1 en ξ définie sur $\tilde{U}$ par : $\forall (x,\xi) \in V$, $\tilde{\phi}(x,\lambda\xi) = \lambda\phi(x,\xi)$ pour $\lambda > 0$. Si $f \in C^{\infty}(\tilde{V})$, on définit $\tilde{\phi}^* f \in C^{\infty}(\tilde{U})$ par : $\tilde{\phi}^* f(x,\xi) = f(\phi(x,\xi))$.

ϕ est une transformation de contact si elle vérifie les énoncés équivalents suivants :

a) $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ conserve la 2-forme canonique $\sigma = d\omega = \Sigma\, d\xi_i \wedge dx_i$.

b) $\forall f , g \in C^{\infty}(\tilde{V})$, $\tilde{\phi}^*\{f,g\} = \{\tilde{\phi}^* f , \tilde{\phi}^* g\}$.

On montre dans S. K. K. [10] p. 391 le théorème suivant :

Théorème 4.5.1 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n_x \times S^{n-1}_\xi$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n_y \times S^{n-1}_\eta$, ϕ un difféomorphisme analytique transformation de contact de U sur V . Il existe alors (de manière non unique) un isomorphisme de faisceaux $\bar{\phi} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$ et un isomorphisme (que l'on notera encore $\bar{\phi}$) de faisceaux : $\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$ tels que :

1) Si ω est un ouvert de U et $P \in \mathcal{P}(\omega)$, $u \in \mathcal{C}(\omega)$, alors $\bar{\phi}P \in \mathcal{P}(\phi(\omega))$ et $\bar{\phi}u \in \mathcal{C}(\phi(\omega))$.

2) $\bar{\phi}$ est compatible avec les restrictions de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$.

3) $\bar{\phi}(PQ) = \bar{\phi}(P)\,\bar{\phi}(Q)$ pour tous $P,Q \in \mathcal{P}(U)$.

4) $\forall\, P \in \mathcal{P}(U)$, $\forall u \in \mathcal{C}(U)$, $\bar{\phi}(Pu) = \bar{\phi}(P)\,\bar{\phi}(u)$.

5) Si $P \in \mathcal{P}(U)$ est d'ordre fini m , $\bar{\phi}P$ est d'ordre m dans $\mathcal{P}(V)$ et :

$$(\bar{\phi}P)_m = P_m \circ \phi^{-1} .$$

Avec [S.K.K.], nous dirons que $\bar{\phi}$ est une transformation de contact quantifiée associée à ϕ .

Remarque : Dans le cadre C^∞ , l'analogue de $\bar{\phi}$ est un opérateur intégral de Fourier $\mathcal{F}$ inversible associé à ϕ et : $\bar{\phi}u = \mathcal{F}u$

$$\Phi P = \mathcal{F} P \mathcal{F}^{-1} .$$

5. Etude micro-locale des équations différentielles et pseudodifférentielles.

5.1 Retour sur la notion d'équivalence.

Soit $P(x,D)$ un opérateur pseudodifférentiel (ou différentiel) défini au voisinage d'un point $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$.

On sait que P définit une application $\mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{C}$.

Ker P est le faisceau des microfonctions telles que $Pu = 0$.

Coker P est le faisceau quotient de $\mathcal{C}$ par le faisceau $\mathfrak{J}mP = P(\mathcal{C})$.

On a donc la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, P \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, P \longrightarrow 0$$

→ Coker $P = 0$ si et seulement si P est <u>microlocalement résoluble</u> :

i.e. $\forall v \in \mathcal{C}_{x_0,\xi_0}$ $\exists u \in \mathcal{C}_{x_0,\xi_0}$ t.q. $Pu = v$

ou encore $\forall v \in \mathcal{B}_{x_0}$ $\exists u \in \mathcal{B}_{x_0}$ t.q. $SS(Pu-v)$ (x_0,ξ_0)

(Si $\mathcal{F}$ est un faisceau on note $\mathcal{F}_{x_0}$ l'ensemble des sections définies au voisinage de x_0) .

→ Ker $P = 0$ si et seulement si P est <u>analytiquement micro-hypoelliptique</u> :

i.e. $u \in \mathcal{B}_{x_0}$ $SS(Pu) \not\ni (x_0,\xi_0) \Longrightarrow SSu \not\ni (x_0,\xi_0)$.

De même, on peut étudier la propagation des singularités des solutions à l'aide des supports des éléments de Ker P .

<u>Définition</u> : Soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{P}$-module à un générateur défini par

$\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{P}P$ ($\mathcal{P}$ est le faisceau des opérateurs pseudodifférentiels).

Soient $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ la projection canonique et $M_p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$Q \mapsto Q \circ P$.

<u>Proposition</u> : La suite $0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{M_p} \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ est exacte.

<u>Démonstration</u> : Il faut vérifier que M_p est injectif. Nous ne le démontrerons que dans le cas où P est d'ordre fini et pour les opérateurs d'ordre fini.

(P d'ordre fini) $M_p(Q) = Q \circ P = 0 \rightarrow \sigma(Q \circ P) = \sigma(Q)\ \sigma(P) = 0$

(Q d'ordre fini) $\sigma(P)$ et $\sigma(Q)$ sont des fonctions holomorphes donc $\sigma(Q) = 0$
donc $Q = 0$;

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux faisceaux de $\mathcal{P}$-modules à gauche on note $\mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{N})$ l'ensemble des applications $\mathcal{P}$-linéaires de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. On sait qu'il existe des foncteurs $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{M},\mathcal{N})$ tels que si la suite

$0 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_3 \longrightarrow 0$ est exacte on ait la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M}_3,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M}_2,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M}_1,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_3,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_2,\mathcal{N}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_1,\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{M}_1,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots$$

$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{M_p} \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ donne donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi'} \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{C}) \xrightarrow{M'_p} \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow \cdots$$

$\mathcal{C}$ est un $\mathcal{P}$-module donc $\mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ est un isomorphisme .
$$L \longmapsto L(\mathrm{Id})$$

M'_p induit donc une application $M''_p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

$$M''_p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$u \longmapsto Lu : (Q \longmapsto Qu) \longmapsto Lu \circ P\ (Q \longmapsto QPu) \longmapsto Pu\ .$$

Par ailleurs puisque $\mathcal{C}$ est un $\mathcal{P}$-module $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{C}) = 0$, on a donc la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{C}) \longrightarrow 0$.

Donc : $$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M},\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Coker}\, P$$

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Ker}\, P \;.$$

Ce qui précède montre l'intérêt de la notion d'équivalence définie au 3.1 puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M},\mathcal{C})$ et $\mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{C})$ ne dépendent que du module $\mathcal{M}$.

Ces notions sont surtout importantes pour les systèmes d'équation :

<u>Exemple</u> : Donnons-nous un système de r équations à 1 variable :

$$P_1 u = v_1 \;\ldots\; P_r u = v_r \;.$$

$\mathrm{Ext}^1 = 0$ signifie que si les v_i vérifient les relations de compatibilité $P_i v_j = P_j v_i$ alors il existe u vérifiant le système.

<u>Noyau et conoyau des opérateurs elliptiques.</u>

$P \in \mathcal{P}_{x_o,\xi_o}$ P d'ordre fini $P_m(x_o,\xi_o) \neq 0$.

P est inversible au voisinage de (x_o,ξ_o) donc est une bijection : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Donc $$\boxed{\mathrm{Ker}\, P = 0 \qquad \mathrm{Coker}\, P = 0}\;.$$

5.2 <u>Opérateurs à partie principale réelle et de multiplicité constante.</u>

<u>1ère étape</u> : $P = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ au voisinage d'un point (x_o,ξ_o) tel que $\xi_n = 0$.

Prenons $x_o = 0$ et $\xi_o = (1,0,\ldots,0)$.

<u>Définition</u> : Une microfonction u est indépendante de x_n si elle a un représentant hyperfonction qui est indépendant de x_n (i.e. valeur au bord de fonctions holomorphes indépendantes de z_n) .

<u>Proposition</u> : $$\mathrm{Coker}\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = 0$$

$\mathrm{Ker}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)$ = faisceau des microfonctions localement indépendantes de x_n .

Démonstration : $P = \frac{\partial}{\partial x_n}$ est un opérateur hyperbolique dans la direction $(0,\dots,0,1)$ donc si $v \in \mathcal{B}_{x_0}$ avec $(0,\dots,0,\pm 1) \notin SSv$ et $w \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ il existe une et une seule hyperfonction u définie au voisinage de x_0, telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = v \quad \text{et} \quad u|_{\{x_n=0\}} = w .$$

Soit u une microfonction définie au voisinage de (x_0,ξ_0). u s'étend en une microfonction sur $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ à support compact ne contenant pas les points $(x;0,\dots 0,\pm 1)$. Soit $\tilde{u}$ une hyperfonction associée à u.

$SS\tilde{u} = \operatorname{supp} u \not\ni (x;0,\dots,0,\pm 1)$ donc il existe une hyperfonction $\tilde{f}$ telle que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} = \tilde{u}$. Par passage au quotient, on définit une microfonction f qui vérifie $\frac{\partial f}{\partial x_n} = u$. Donc $\operatorname{Coker}(\frac{\partial}{\partial x_n}) = 0$.

Soit u une microfonction telle que $Pu = 0$. u se prolonge en une microfonction sur un ouvert $\omega \times S^{n-1}$, à support compact et telle que $\operatorname{supp} \frac{\partial u}{\partial x_n}$ ne contienne pas $\omega \times \{\pm\xi_0\}$ avec $\xi_0 = (1,\dots,0,0)$.

Soit $\tilde{u}$ une hyperfonction associée à u. $SS \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \not\ni \omega \times \{\pm\xi_0\}$. Donc sur ω

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} = \sum_{\alpha\in A} b(f_\alpha) \qquad f_\alpha \in \mathcal{O}((\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega}) \qquad \pm\xi_0 \notin \Gamma_\alpha^o .$$

Au-dessus d'un convexe relativement compact dans ω, le théorème de Malgrange-Ehrenpreis (cf. l'intégration des hyperfonctions § 2.5 de la 1ère partie) donne des fonctions g_α telles que : $\frac{\partial g_\alpha}{\partial z_n} = f_\alpha$.

Soit $\quad \tilde{u}_1 = \Sigma\ b(g_\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{u}-\tilde{u}_1) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} - \Sigma\ b(f_\alpha) = 0$.

Donc au voisinage de x_0 $\tilde{u}-\tilde{u}_1 = \tilde{v}$ hyperfonction indépendante de x_n (cf. § 2.5 de la 1ère partie).

En passant au quotient on trouve $u = u_1 + v$ avec v micro-fonction indépendante de x_n et $\operatorname{supp} u_1 = SS\,\tilde{u}_1 \not\ni \{(x,\pm\xi_0)\}$ donc u_1 est nulle au voisinage de (x_0,ξ_0).

Donc u est indépendante de x_n au voisinage de (x_0,ξ_0). q.e.d.

2ème étape : P est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal ζ_n^m.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass (cf. § 3.3) P s'écrit :

$$P(x,D) = E(x,D')[D_n^m + \sum_{k=1}^{m} A_k(x,D')D_n^{m-k}]$$

où E est un opérateur elliptique, $D' = (D_1,\ldots D_{n-1})$ et $A_k(x,D')$ un opérateur pseudodifférentiel indépendant de D_n.

E est elliptique donc ne modifie pas $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Coker} P$, on peut donc supposer que :

$$P(x,D) = D_n^m + \sum_{k=1}^{m} A_k(x,D')D_n^{m-k} .$$

Posons $U = (U_0,\ldots U_{n-1})$ $\quad V = (0,\ldots,0,v)$

et

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ A_m & A_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $Pu = v \Longleftrightarrow u = U_0$ et $(\frac{\partial}{\partial x_n} I + \mathcal{A})U = V$.

Localement $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ se plonge dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ donc $\mathcal{A}$ s'étend au domaine complexe au voisinage de (x_0,ξ_0).

Au § 3.4 on a vu qu'il existe des matrices inversibles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ telles que

$$\mathcal{R}^{-1}(z,D_z)(\frac{\partial}{\partial z_n} I + \mathcal{A}(z,D_z))\,\mathcal{S}(z,D_z) = \frac{\partial}{\partial z_n} I .$$

En se restreignant au domaine réel, on obtient deux matrices <u>inversibles</u> $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ telles que :

$$\mathcal{R}^{-1}(x,D_x)(\frac{\partial}{\partial x_n} I + \mathcal{A})\,\mathcal{S}(x,D_x) = \frac{\partial}{\partial x_n} I \ .$$

Donc $Pu = v \Longleftrightarrow (u = U_0 \quad U = \mathcal{S}U' \quad (\frac{\partial}{\partial x_n})U' = \mathcal{R}^{-1}V)$.

On a à résoudre n équations $\frac{\partial}{\partial x_n} U'_i = V'_i$ ce qui est toujours possible d'après la 1ère étape.

Donc $\boxed{\text{Coker } P = 0}$.

Soit u tel que $Pu = 0$;

$$Pu = 0 \Longleftrightarrow u = U_0 \qquad (\frac{\partial}{\partial x_n} I + \mathcal{A})U = 0 \ ,$$

d'où
$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\mathcal{S}^{-1}U) = 0 \ ,$$

donc $\mathcal{S}^{-1}U = (U'_1,\dots U'_{m-1})$ avec U'_i microfonction localement indépendante de x_n

$$U = \mathcal{S}U' \qquad (\mathcal{S} \text{ dépend de } x_n) \ .$$

Soit $\mathcal{F}_p$ le faisceau des vecteurs U tels que $(\frac{\partial}{\partial x_n} I + \mathcal{A})U = 0$.

$\mathcal{F}_p$ est flasque dans la direction $x_1,\dots x_{n-1}$ et localement constant en x_n , c'est-à-dire qu'une section est déterminée par sa donnée sur un hyperplan $x_n = \text{cste}$ (localement seulement c'est-à-dire si x_n varie sur un intervalle connexe).

$$\boxed{\text{Ker } P = \left\{u \in \mathcal{C} \ / \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \vdots \\ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{m-1}u \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_p \right\}}$$

Ker P est un faisceau flasque transversalement à l'axe des x_n , et localement constant en x_n , c'est-à-dire qu'une section sur un ouvert $U \times I$, U contenu dans un hyperplan $x_n = \text{cte}$ et I invervalle connexe de $\mathbb{R}$ est déterminée par sa donnée sur U .

3ème étape : Cas général.

Définitions : Soit $q(x,\xi)$ une fonction analytique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ homogène en ξ.

Variété caractéristique de q : $V_q = \{(x,\xi)/q(x,\xi) = 0\}$.

Champ hamiltonien de q : $\mathcal{H}_q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$.

Bandes bicaractéristiques de q : les courbes intégrales de $\mathcal{H}_q$.

Théorème 5.2 : Soit $P(x,D)$ un pseudodifférentiel dans un voisinage U de (x_0,ξ_0), de partie principale $a(x,\xi)\, q(x,\xi)^m$ avec

a et q homogène en ξ, $a(x,\xi)$ inversible sur U

$q(x,\xi)$ réel, dq non proportionnel à

$\Sigma\, \xi_i\, dx_i$ sur V_q.

Alors Coker $P = 0$

Ker P est un faisceau $\begin{cases} 1) \text{ porté par } V_q \\ 2) \text{ constant le long du flot hamiltonien} \\ 3) \text{ flasque transversalement} \end{cases}$

Ker P constant le long du flot hamiltonien signifie qu'une section est déterminée par sa valeur sur un hyperplan de V_q transversal au flot hamiltonien (localement).

Corollaire 5.2 : Propagation des singularités.

(1) Soit u une microfonction telle que $Pu = 0$ et $(x_0,\xi_0) \in \mathrm{Supp}\, u$
Alors la bande bicaractéristique de q passant en (x_0,ξ_0) est contenue dans le supp u.

(1bis) $u \in \mathcal{B}_{x_0}$ $SS(Pu) \cap U = \emptyset$.

Alors $SSu \cap U$ est réunion de bandes bicaractéristiques de q .

(2) Soit F un fermé tubulaire de U (i.e. réunion de bandes bicaractéristiques) . Alors il existe localement $u \in \mathscr{C}(U)$ t.q. $Pu = 0$ et $\operatorname{supp} u = F$.

(2bis) $\exists\, u \in \mathscr{B}(u)$ t.q. $SS(Pu) \cap U = \emptyset$ et $SSu = F$.

(3) Si u est définie dans un ouvert tubulaire $U_1 \subset U$ et si $Pu = 0$, on peut localement prolonger u en $\tilde{u} \in \mathscr{C}(U)$ avec $P\tilde{u} = 0$.

<u>Démonstration du théorème</u> :

<u>Rappel</u> : <u>Théorème de Jacobi</u>. Il existe une <u>transformation de contact</u>

$$F : U \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{qui transforme } q(x,\xi) \text{ en}$$
$$(x_0,\xi_0) \mapsto (0;1,0\ldots,0)$$
$$q_1(y,\eta) = q_0 F^{-1}(y,\eta) = \eta_n \,.$$

Soit Φ une transformation de contact quantifiée telle que :

$$\sigma(\Phi(P)) = \sigma(P) \circ F^{-1} \,.$$

Soit $\tilde{P} = \Phi(P)$. $\sigma(\tilde{P}) = \sigma(P) \circ F^{-1} = \eta_n^m \times \tilde{a}(y,\eta)$

$$\tilde{V} = \{\eta_n = 0\} \,. \qquad \mathscr{H}_q \text{ devient } H_{\tilde{q}} = \frac{\partial}{\partial y_n} \,.$$

Donc $\operatorname{Coker} \tilde{P} = 0$ et $\operatorname{Ker} \tilde{P}$ est un faisceau localement constant en x_n , flasque transversalement (d'après la 2è étape).

Φ est un isomorphisme de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{C}$ donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \tilde{P} \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{\tilde{P}} \mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Coker} \tilde{P} \longrightarrow 0$$

devient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} P \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{P} \mathscr{C} \longrightarrow \operatorname{Coker} P \longrightarrow 0 \,.$$

Donc Φ transforme $\operatorname{Ker} \tilde{P}$ en $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Coker} \tilde{P}$ en $\operatorname{Coker} P$.

$$\operatorname{Coker} \tilde{P} = 0 \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Coker} P = 0}$$

et Ker P est un faisceau porté par V, constant le long du flot hamiltonien, et flasque transversalement. q.e.d.

5.3 Opérateurs de type Cauchy-Riemann.

$$\sigma(P) = a(x,\xi)\, q(x,\xi)^m$$

avec a inversible $q = r+is$ et $\{r,s\} = 0$ si $r = s = 0$ a,q homogènes en ξ.

Rappelons que l'on définit le crochet de Poisson par : $\{r,s\} = \mathcal{H}_r(s) = \mathcal{H}_s(r)$

1ère étape : $P = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Théorème 5.3.1 : (*) Coker $P = 0$.

(**) Si $(x_0,\xi_0) \in \operatorname{Supp} u$ avec $u \in \operatorname{Ker} P$, alors toute la feuille $x_3 = x_3^0, \dots, x_n = x_n^0$, $\xi = \xi^0$ est contenue dans $\operatorname{supp} u$.

(***) Soit F fermé qui est une réunion de feuilles $\exists u \in \operatorname{Ker} P$ t.q. $\operatorname{supp} u = F$.

2ème étape : Cas général.

Théorème 5.3.2 : Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre fini m, $V = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n \,|\, P_m(x,\xi) = 0\}$. On suppose qu'il existe un voisinage W de (x_0,ξ_0) tel que :

1) Dans W, $P_m(x,\xi) = a(x,\xi)[q(x,\xi) + ir(x,\xi)]^k$ où $a(x,\xi)$ est inversible et q et r sont réels.

2) Les 1-formes dq, dr et $\omega = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$ sont linéairement indépendantes dans W (la variété $V \cap W$ est donc de codimension 2).

3) $\{q,r\} = 0$ dans $V \cap W$ ($V \cap W$ est donc une variété involutive de

codimension 2. Puisque $[H_q,H_r] = H_{\{q,r\}} = 0$, il passe par tout point m de $V \cap W$ une variété intégrale et une seule du système de champs de vecteurs (H_q,H_r) . Cette variété de dimension 2 est la 2-feuille bicaractéristique passant par m) .

Il existe alors un voisinage U de (x_o,ξ_o) tel que :

1) $\mathrm{Coker}\, P_{|U} = 0$ (i.e. P est résoluble micro-localement dans U) .

2) Si $u \in \mathrm{Ker}\, P$ et $\mathrm{supp}\, u \subset U$, le support de u est une réunion de 2-feuilles bicaractéristiques (i.e. les singularités se propagent le long des 2-feuilles bicaractéristiques).

3) Soit F un fermé de $U \cap V$ stable par le feuilletage des 2-feuilles ; alors il existe localement $u \in \mathrm{Ker}\, P$ telle que : $\mathrm{supp}\, u = F$.

<u>Démonstration</u> : a) On admettra que $q(x,\xi) + ir(x,\xi) = c(x,\xi)[\tilde{q}(x,\xi)+i\tilde{r}(x,\xi)]$ avec $c(x,\xi)$ inversible et $\{\tilde{q},\tilde{r}\} = 0$ dans un voisinage de V .

b) Puisque $\{\tilde{q},\tilde{r}\} = 0$ et que $d\tilde{q}$, $d\tilde{r}$ et ω sont linéairement indépendantes, il existe une transformation de contact ϕ telle que :

$$\tilde{q} \circ \phi^{-1} = \eta_1 \ , \ \tilde{r} \circ \phi^{-1} = \eta_2 \ , \ \phi(x_o,\xi_o) = (y_o,\eta_o) \ , \ y_o = 0 \ \text{ et } \ \eta_o = (0,\ldots 0,1)$$

$$\bar{\phi}P = \tilde{P}(y,D_y) \ \text{ et } \ \tilde{P}_m(y,\eta) = P_m(\phi^{-1}(y,\eta)) = d(y,\eta)\ [\eta_1 + i\eta_2]^k \ ,$$

où $d(y,\eta)$ est inversible et homogène de degré $m-k$.

En multipliant $\tilde{P}$ à gauche par un opérateur pseudodifférentiel inversible R^{-1} convenable, on obtient : $R^{-1} \circ \tilde{P}(y,D_y) = Q(y,D_y)$, où le symbole principal de Q est $(\eta_1 + i\eta_2)^k$.

$Q(y,D_y)$ se prolonge en un opérateur pseudodifférentiel complexe $Q(z,D_z)$ défini au voisinage de $(y_o,\eta_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Soit Ψ le difféomorphisme défini par : $Y = \Psi^{-1}(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} Y_1 = y_1 + iy_2 \\ Y_2 = y_1 - iy_2 \\ Y_j = y_j \quad \text{si} \quad j \geqslant 2 . \end{cases}$

On a alors : $\Psi^* Q = Q_1(Y,D_Y)$ et le symbole principal de $Q_1(Y,D_Y)$ est $(D_{Y_1})^k$. D'après le théorème d'équivalence, $Q(Y,D_Y)$ est équivalent à $D_{Y_1}^k$. Donc, $Q(y,D_y)$ est équivalent à $(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2})^k$, c'est-à-dire à $I_k(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2})$ où I_k est la matrice carrée unité d'ordre k.

Le théorème résulte alors de l'étude de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y_1} + i\,\frac{\partial}{\partial y_2}$, en remarquant que la transformation de contact ϕ^{-1} transforme $\frac{\partial}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial}{\partial y_2}$ en $H_{\tilde{q}}$ et $H_{\tilde{r}}$ respectivement et les feuilles $y_3 = y_3^o, \ldots y_n = y_n^o$ en les 2-feuilles bicaractéristiques.

Dans le cas où la variété bicaractéristique est de dimension quelconque, le théorème se généralise de la manière suivante :

<u>Théorème</u> 5.3.3 : Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m. On suppose que $V = \{(x,\xi) | P_m(x,\xi) = 0\}$ est une variété régulière de codimension r et que :

1) Il existe des fonctions $q_i(x,\xi)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ telles que $V = \{q_1(x,\xi) = \ldots = q_r(x,\xi) = 0\}$ et que les 1-formes $dq_1, \ldots dq_r$ et $\omega = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$ sont linéairement indépendantes sur V.

2) Si $(x_o,\xi_o) \in V$ et si (Δ_x, Δ_ξ) est transversal à V $((\Delta_x,\Delta_\xi) \notin T_{(x_o,\xi_o)}(V))$ alors $P_m(x_o + \varepsilon\Delta_x\ ,\ \xi_o + \varepsilon\Delta_\xi) = a\varepsilon^\mu + o(\varepsilon^\mu)$ avec

$a \neq 0$ (i.e. P_m s'annule au même ordre μ dans toutes les directions transversales à V).

3) V est involutive ($\{q_i,q_j\} = 0$, $i,j = 1,\dots r$) .

Sous ces hypothèses, on a :

1) P est résoluble micro-localement (i.e. Coker $P = 0$) .

2) Si u est une solution, supp u est une réunion de r-feuilles bicaractéristiques (variétés intégrales de $(H_{q_1},\dots H_{q_r})$) .

1) On peut supposer que $\{q_i,q_j\} = 0$ au voisinage de V .

D'après la formule intégrale de Taylor à l'ordre μ et l'hypothèse 2), il existe des fonctions analytiques $a_\alpha(x,\xi)$ ($|\alpha| = \mu$ et $\alpha = (\alpha_1,\dots\alpha_r)$) , homogènes de degré $m-\mu$, telles que :

$$\alpha)\quad P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=\mu} a_\alpha(x,\xi)\, q^\alpha(x,\xi)$$

$$\beta)\quad \forall\, u \in R^r\{0\}\ ,\ \sum_{|\alpha|=\mu} a_\alpha(x,\xi)\, u^\alpha \neq 0\ .$$

2) Puisque les q_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ sont en involution et que $dq_1,\dots dq_r$ et ω sont linéairement indépendantes, il existe une transformation canonique ϕ telle que :

$$q_i \circ \phi^{-1} = \eta_i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r\ ,\ \phi(u) = (y_1,\dots y_r\ ,\ z_1,\dots z_{n-r})\ .$$

Alors $\bar{\phi}P = Q(y,z;D_y,D_z)$ et le symbole principal de Q est :

$$\sigma(Q) = Q_m = B(y,z;\eta,\zeta) \sum_{|\alpha|=\mu} A_\alpha(y,z;\eta,\zeta)\eta^\alpha \qquad \text{où } B \text{ est un}$$

opérateur elliptique d'ordre $m-\mu$ et où les $A_\alpha(|\alpha| = \mu)$ sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 . Donc $Q_1 = B^{-1}Q$ a pour symbole principal :

$$\sigma(Q_1) = \sum_{|\alpha|=\mu} A_\alpha\, \eta^\alpha\ .$$

D'après $1(\beta)$, il vient de plus : $\forall u \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, $\sum_{|\alpha|=\mu} A_\alpha(y,z;\eta,\zeta)u^\alpha \neq 0$.

Le théorème se démontre alors en étudiant la forme réduite de P , soit $\tilde{P} = \sum_{|\alpha|=\mu} A_\alpha(y,z;D_y,D_z)D_y^\alpha$ + Termes d'ordre $\leqslant \mu-1$, à l'aide de théorèmes d'existence et de prolongement pour les opérateurs $\tilde{P}_\Sigma$ dans le domaine complexe. (cf. Bony-Schapira [11]) .

5.4 Opérateurs de type Lewy-Mizokata.

Etude des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre fini m et de symbole principal $P_m(x,\xi) = a(x,\xi)[q(x,\xi) + ir(x,\xi)]^k$ lorsque dq , dr et ω sont linéairement indépendantes et que $\{q,r\} \neq 0$ au voisinage de (x_o,ξ_o).

I) Réduction du problème :

1) On peut supposer que $q+ir = b(x,\xi)[\tilde{q}(x,\xi)+i\,\tilde{r}(x,\xi)]^k$ où $\{\tilde{q},\tilde{r}\}$ est homogène de degré 1 et non nulle au voisinage de (x_o,ξ_o) .

2) Il existe une transformation canonique ϕ telle que :

$$\tilde{q}\circ\phi^{-1} + \eta_1 \ , \ \tilde{r}\circ\phi^{-1} = \pm\, y_1\eta_2 \ , \ \phi(x_o,\xi_o) = (y_o,\eta_o) \ , \ y_o = 0 \ ,$$

$$\eta_o = (0,1,0,\ldots 0) \ .$$

$\bar{\phi}P = Q(y,D_y)$ et le symbole principal de Q est de la forme :

$Q_m = \sigma(Q) = \theta(y,\eta)(\eta_1 \pm y_1\eta_2)^k$ où $\theta(y,\eta)$ est inversible.

Si $Q_1 = \theta^{-1}(y,D_y)\,Q(y,D_y)$, le symbole principal de Q_1 est $(\eta_1 \pm iy_1\eta_2)^k$.

Q_1 s'étend en un opérateur pseudodifférentiel complexe défini au voisinage de $(y_o,\eta_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, $y_o = 0$, $\eta_o = (0,1,0,\ldots 0)$. Soit Ψ le difféomorphisme analytique défini par : $Y = \Psi^{-1}(t) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} Y_1 = y_1 \pm iy_1y_2 \\ Y_2 = -\frac{i}{2}\,y_1^2 + y_2 \\ Y_j = y_j \quad \text{si } 3 \leqslant j \leqslant n \ . \end{cases}$$

Alors $\Psi^* Q_1 = D^k_{Y_1}$. D'après le théorème d'équivalence pour les opérateurs pseudodifférentiels complexes, Q_1 est équivalent au système $I_k(D_{y_1} \pm iy_2 D_{y_2})$ où I_k est la matrice unité d'ordre k.

L'opérateur P est donc équivalent à $\dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\varepsilon x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ $\begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ si } \{q,r\} > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } \{q,r\} < 0 \end{cases}$

II) <u>Etudes de</u> $P = D_1 - 2\alpha x_1 D_2$ <u>et</u> $Q = D_1 + 2\beta x_1 D_2$ <u>au point</u> (x_o, ξ_o)

$(x_o = 0\ ,\ \xi_o = (0,1,0,\dots 0)\ ,\ \operatorname{Im} \alpha > 0\ ,\ \operatorname{Im} \beta > 0)$.

On montre dans S. K. K. [10] le :

<u>Théorème</u> 5.4.1 : Il existe un opérateur $K : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tel que la suite

$0 \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{Q} \mathscr{C} \xrightarrow{K} \mathscr{C} \xrightarrow{P} \mathscr{C} \longrightarrow 0$ soit exacte. Il en résulte que :

1) Q est injectif ($\operatorname{Ker} Q = 0$). Q est micro-hypoelliptique analytique.

Q n'est pas micro-localement résoluble ($\operatorname{Im} Q = \operatorname{Ker} K$ et

$\operatorname{Coker} Q = \mathscr{C}/\operatorname{Ker} K \neq 0$).

2) P n'est pas injectif ($\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} K \neq 0$) et P n'est donc pas micro-hypoelliptique analytique.

P est micro-localement résoluble ($\operatorname{Coker} P = 0$).

<u>Idées de la démonstration</u> : On se place dans $M = \mathbb{R}^2$. Soit $N = \{x_1 = 0\}$.

On définit le noyau $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^4)$ par :

$$K(x_1,x_2,x_1',x_2') = -\frac{\gamma}{4i\pi} \frac{1}{(x_2 - x_2' + \alpha x_1^2 + \beta x_1'^2 + i0)^{3/2}} \qquad (\gamma^2 = \alpha + \beta)$$

K opère sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\forall u \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\ ,\quad \operatorname{Ker}(x_1,x_2) = \int K(x_1,x_2,x_1',x_2')\, u(x_1',x_2')\, dx_1'\, dx_2' .$$

(Par définition, $K(x_1,x_2,x_1',x_2')\, u(x_1',x_2') = K(x_1,x_2,x_1',x_2') \otimes u(y_1,y_2)\Big|_{\substack{y_1 = x_1' \\ y_2 = x_2'}}$.

On vérifie que $SS(Ku) \subset SS(u)$ et K définit donc un opérateur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

On définit alors $\phi : \mathcal{C}_N \to \mathcal{C}_M$ et $\Psi : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_N$ par :

$$\phi : u(x_2) \mapsto u(x_2+\alpha x_1^2) = -\frac{1}{2i\pi}\int \frac{u(x_2')}{x_2+\alpha x_1^2 - x_2'}\, dx_2'$$

$$\phi : v(x_1,x_2) \mapsto Kv\Big|_{x_2=0} .$$

Alors $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_N}$, $\Phi \circ \Psi = K$. Donc, $\mathrm{Ker}\ P \cong \mathrm{Im}\ K \cong \mathcal{C}_N$.

On définit $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ par :

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{C}_N \to \mathcal{C}_M \qquad\qquad \text{et } \tilde{\Psi} : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}_N$$

$$u(x_2) \mapsto K(u(x_2)\delta(x_1)) \qquad\qquad v(x_1,x_2) \mapsto -\frac{-1}{2i\pi}\int \frac{v(x_1',x_2')dx_1'dx_2'}{x_2-x_2'+\beta x_1'^2+i0} .$$

Alors $\tilde{\Psi}\tilde{\Phi} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_N}$, $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_M}$ et par conséquent $\mathrm{Coker}\ Q \cong \mathcal{C}_N$.

Nous avons donc le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 5.4.2 : Soit $P(x,D)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m et de symbole principal $P_m(x,\xi) = a(x,\xi)[q(x,\xi) + ir(x,\xi)]^k$.

Supposons que dq , dr et $\omega = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$ sont des 1-formes linéairement indépendantes et que $\{q,r\} \neq 0$ au voisinage de (x_0,ξ_0) .

(A) Si $\{q,r\} > 0$

(i) $\mathrm{Coker}\ P \neq \emptyset$: P n'est pas micro-localement résoluble.

(ii) $\mathrm{Ker}\ P = \emptyset$: P est analytiquement microhypoelliptique.

(B) Si $\{q,r\} < 0$

(i) $\mathrm{Coker}\ P = \emptyset$: P est micro-localement résoluble.

(ii) $\mathrm{Ker}\ P \neq \emptyset$: P n'est pas analytiquement micro-hypoelliptique.

Références

[1] BONY-SCHAPIRA. Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inventiones Mathematicae, nº 17 (1972).

[2] L. HÖRMANDER. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, Princeton (1966).

[3] M. KASHIWARA. On the structure of hyperfonctions. Sugaku no Agumin nº 15 (1970) p. 19-72 (en Japonais).

[4] H. KOMATSU. A local version of Bochner's tube theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA.

[5] M. SATO. Theory of hyperfunctions II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, nº 8 (1960) p. 387-437.

[6] P. SCHAPIRA. Théorie des hyperfonctions. Lecture Notes in Math., Springer nº 126 (1970).

[7] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions. Hermann, Paris (1950-51).
Trois articles dans Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics nº 287, Springer (1973):

[8] BONY-SCHAPIRA. Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy. p. 82-98.

[9] M. MORIMOTO. Edge of the Wedge theorem and hyperfonctions. p. 41-81.

[10] SATO, KAWAI, KASHIWARA. Microfunctions and Pseudo-differential equations. p. 264-523.

[11] BONY-SCHAPIRA. Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. A paraître Ann. Inst. Fourier (1976).

[12] KASHIWARA-KAWAI. Microhyperbolic pseudo-differential operators I (à paraître).