n° 53

A. ABDALIAN-FAKHIM

LES ENSEMBLES DE TYPE (S)

1974

Publications mathématiques d'Orsay

n° 53

A. ABDALIAN-FAKHIM

LES ENSEMBLES DE TYPE (S)

1974

Publications mathématiques d'Orsay

LES ENSEMBLES DE TYPE (S)

Introduction

Dans toute la suite sauf mention contraire Λ désigne un sous-ensemble fermé, discret, dénombrable de $\mathbb{R}$. La caractérisation des ensembles Λ tels que toute fonction mesurable bornée à spectre(*) dans Λ soit une fonction presque périodique (Bohr) est un problème ouvert.

Soit f une fonction bornée à spectre dans Λ . Notons par K_n le noyau de Fejer de rang n dans $\mathbb{R}$ [1], $K_n * f$ est à spectre fini donc c'est un polynôme trigonométrique et nous avons :

1°) Si f est une fonction bornée à spectre dans Λ alors $K_n * f$ converge faiblement vers f quand n tend vers infini Λ est un ensemble de synthèse spectrale .

2°) Si f est une fonction continue bornée à spectre dans Λ , alors $K_n * f$ converge uniformément sur tout compact vers f . Si de plus il existe un compact K et une constante C tel que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ on ait :

$$||P||_\infty \leqslant C \sup_{x\in K} |P(x)|$$

Alors f est presque périodique (Bohr).

3°) Si f est une fonction bornée uniformément continue à spectre dans Λ , alors elle est presque périodique Bohr. En effet, il suffit de remarquer qu'on peut approcher f uniformément par les polynômes trigonométriques $K_n * f$.

On peut alors poser les problèmes suivants :

(*) Pour la définition voir chapitre 3.

Problème 1

Caractériser Λ , ne possédant pas de compact associé, tel que toute fonction continue et bornée à spectre dans Λ soit presque périodique (Bohr).

Nous savons [3] que si Λ est de la forme, $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{Z}$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et les α_n $\mathbb{Q}$ - indépendants, alors Λ possède la propriété indiquée.

Problème 2

Caractériser Λ tel que, toute fonction bornée à spectre dans Λ soit presque périodique (Bohr).

Les ensembles de Sidon sont des ensembles qui possèdent cette propriété.

Les ensembles de type (S) que nous allons étudier constituent une classe plus large que les ensembles de Sidon répondant au problème 2. Nous allons étudier d'abord ces ensembles dans le cas de $\mathbb{Z}$ (chapitre 1 et 2), puis dans le cas de $\mathbb{R}$ (dernier chapitre).

Beaucoup des résultats obtenus ici s'étendent facilement dans le cadre général des groupes abélien localement compacts.

CHAPITRE 1

ENSEMBLE DE TYPE (S) DANS $\mathbb{Z}$

Notations

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers positifs, le groupe des entiers naturels, le corps des réels et le corps des complexes. $\mathbb{T}$ désigne le groupe additif des réels modulo 2π.

Les différentes notions, comme transformation de Fourier, série de Fourier etc ... serons celles définient dans [1].

Nous utiliserons les notations suivantes :

$M = M(\mathbb{T})$: l'algèbre de Banach de convolution des mesures de Radon bornées sur $\mathbb{T}$ avec la norme $||\mu||_M = \int_{\mathbb{T}} |d_\mu|$ si $\mu \in M$.

$B = B(\mathbb{Z})$: l'algèbre de Banach pour la multiplication ordinaire de transformées de Fourier des éléments de M avec la norme ; $||g||_B = ||\mu||_M$ si $g = \hat{\mu}$, $\mu \in M$.

$L^1 = L^1(\mathbb{T})$: l'algèbre de Banach pour la convolution des fonctions sommables définies sur $\mathbb{T}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ avec la norme $||f||_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|dx$, $f \in L^1$.

$A = A(\mathbb{Z})$: l'algèbre de Banach pour la multiplication ordinaire de transformés de Fourier des éléments de L^1 avec la norme ; $||h||_A = ||f||_1$ si $h = \hat{f}$, $f \in L^1$.

$C = C(\mathbb{T})$: l'algèbre de Banach des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$, avec le norme $||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|$, $f \in C$.

$L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$: l'algèbre de Banach des fonctions essentiellement bornées définies sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, avec la norme ; $||f||_\infty = \operatorname{Sup.ess.}_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|$, $f \in L^\infty$.

$P = P(\mathbb{T})$: l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques définis sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$; $Q(x) = \sum_{\text{fini}} a_\lambda e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Λ désignera un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ avec $\mathrm{Card}\ \Lambda_j < +\infty$, $j \geq 1$.

Si $D = D(\mathbb{T})$ est l'un des espaces de mesures où de fonctions sur $\mathbb{T}$ décrit ci-dessus, l'on notera par $D_\Lambda = D_\Lambda(\mathbb{T})$ le sous espace fermé de D , constitué par les éléments $f \in D$ tel que $\hat{f}(\lambda) = o$ pour les λ n'appartenant pas à Λ .

1°) Si $D = D(\mathbb{Z})$ est l'un des espaces B ou A, on notera par $D(\Lambda)$ le quotient de D par l'idéal des éléments de D s'annulant sur Λ muni de la norme quotient.

Soit $g = (g_j)_{j\geq 1}$ où $g_j \in D(\Lambda_j) j\geq 1$. On notera par :

$\bigoplus_{\ell^\infty} D(\Lambda_j)$; l'espace de Banach des suites $g = (g_j)_{j\geq 1}$ telles que

$$\sup_{j\geq 1} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)} < +\infty \text{ , muni de la norme; } \|g\| = \sup_{j\geq 1} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)}$$

$\bigoplus_{\ell^1} D(\Lambda_j)$: l'espace de Banach des suites $g = (g_j)_{j\geq 1}$ telles que

$$\sum_{j\geq 1} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)} < +\infty\text{, muni de la norme } \|g\| = \sum_{j\geq 1} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)}$$

$\bigoplus_{C_o} D(\Lambda_j)$: l'espace de Banach des suites $g = (g_j)_{j\geq 1}$ telles que

$$\lim_{j\to+\infty} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)} = 0\text{, muni de la norme } \|g\| = \sup_{j\geq 1} \|g_j\|_{D(\Lambda_j)}$$

2°) De la même manière l'on définit : $\bigoplus_{\ell^\infty} D_{\Lambda_j}$, $\bigoplus_{\ell^1} D_{\Lambda_j}$ et $\bigoplus_{C_o} D_{\Lambda_j}$.

Un calcul facile nous permet de vérifier que le dual de $\bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j}$ s'identifie isométriquement à $\bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ par :

$$(g,P) = \sum_{j\geq 1} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} g_j(\lambda)\ \hat{P}(\lambda) \text{ , } g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j) \text{ et } P \in \bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j}$$

le dual de $\bigoplus_{C_o} A(\Lambda_j)$ s'identifie isométriquement à $\bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j}$ par la forme bilinéaire définie ci-dessus avec $g \in \bigoplus_{C_o} A(\Lambda_j)$ et $P \in \bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j}$.

De même le dual de $A(\Lambda)$ s'identifie isométriquement à L^∞_Λ par :

$$(g,f) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g(\lambda)\ \hat{f}(\lambda) \text{ , } g \in A(\Lambda) \text{ et } f \in L^\infty_\Lambda$$

Enfin on écrira la série de Fourier d'un élément f de D_Λ sous la forme :

$$f \sim \sum_{\lambda\varepsilon\Lambda} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} = \sum_{j\geqslant 1} f_j(x) \;, \quad f_j \;\varepsilon\; P_{\Lambda_j} \;\; (j \geqslant 1)$$

Nous utiliserons souvent la notation :

$$(\xi,\lambda) = e^{i\xi\lambda} \quad .$$

Définition

Soit Λ un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ et soit $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ, Card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geq 1$.

DEFINITION 1.1 : On dira que Λ est un ensemble de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$, s'il existe une constante $C = C[\Lambda, (\Lambda_j)_{j\geq 1}]$ telle que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ, on ait :

$$\Sigma \, ||P_j||_\infty \leq C \, ||P||_\infty$$

Pour une partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ donnée, on dira que Λ est de type (S) et l'on sous entendra, relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$. On dira aussi que $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est de type (S).

Remarques et conséquences de la définition :

1°) Si $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est une partition telle que card $\Lambda_j = 1$, on retrouve la définition classique des ensembles de Sidon [4, page 120]. Rappelons qu'un sous ensemble Λ de $\mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ on ait :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{P}(\lambda)| \leq C \, ||P||_\infty \, .$$

2°) Si Λ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ alors $-\Lambda$ est de type (S) relativement à la partition $(-\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

3°) Si $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est de type (S) et si Λ_o est un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}$ $\Lambda_o \cap \Lambda = \emptyset$ alors $(\Lambda_j)_{j\geq 0}$ est un ensemble de type (S).
Plus généralement, si $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ sont deux partitions d'un même ensemble Λ telle que $\Lambda_j \neq \Lambda'_j$ pour un nombre fini d'indices seulement, alors $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ sont en même temps de type (S).

4°) La propriété d'être de type (S) est invariante par translation.

5°) Si $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) et si $(\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ est une partition de Λ telle que chaque Λ'_j soit réunion fini d'ensembles Λ_j , alors $(\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ est de type (S).

6°) Si $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) , alors $\Lambda' = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda'_j$, où Λ'_j est un sous ensembles de Λ_j , est de type (S).

7°) Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ et supposons que les Λ_j sont symétriques : $\Lambda_j = -\Lambda_j \quad j\geq 1$ alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une constante $C = C[\Lambda,(\Lambda_j)_{j\geq 1}]$ telle que pour tout <u>polynôme trigonométrique à valeurs réelles</u> et à spectre dans Λ on ait :

$$\sum_j ||P_j||_\infty \leqslant C||P||_\infty$$

(on dira alors que Λ est de type (S) réel).

(b) Λ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

En effet , soit P un polynôme trigonométrique, écrivons P sous la forme : $P(x) = \mathcal{R}e(P(x)) + i \quad \mathrm{Im}(P(x))$.

La propriété (a) entraîne :

$$\sum_j ||\mathcal{R}e\, P_j||_\infty \leqslant C||\mathcal{R}e\, P||_\infty$$

et

$$\sum_j ||\mathrm{Im}\, P_j||_\infty \leqslant C||\mathrm{Im}\, P||_\infty$$

ce qui nous donne :

$$\sum_j ||P_j||_\infty \leqslant C\Big[||\mathcal{R}e\, P||_\infty + ||\mathrm{Im}\, P||_\infty\Big] \leqslant 2C\, ||P||_\infty$$

d'où Λ est de type (S).

Problème

Soit Λ , $\Lambda \cap -\Lambda = \emptyset$ et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ . Considérons $\Lambda \cup -\Lambda$, on peut le décomposer de façon naturelle suivant la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geq 1}$ ou bien suivant la partition $(\Lambda_j)_{-\infty}^{+\infty}$.

Si Λ est de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$, est-ce que $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) ?

a) relativement à $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geq 1}$

b) relativement à $(\Lambda_j)_{-\infty}^{+\infty}$, $\Lambda_{-j} = -\Lambda_j \quad j\geq 1$

Plus généralement, est-ce que la réunion de deux ensembles de type (S) admet une partition relativement à laquelle elle soit de type (S).

Equivalences

THEOREME 1.1

Soit Λ un sous ensemble de $\mathbb{Z}$. Alors pour une partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ de Λ , card $\Lambda_j < +\infty \quad j \geq 1$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$

(ii) $\forall \; f \in L^{\infty}_{\Lambda} \quad f \sim \sum\limits_{j\geq 1} f_j(x)$, $\sum\limits_{j\geq 1} ||f_j||_{\infty} < +\infty$

(iii) $\forall \; f \in C_{\Lambda} \quad f \sim \sum\limits_{j\geq 1} f_j(x)$, $\sum\limits_{j\geq 1} ||f_j||_{\infty} < +\infty$

(iv) Pour toute suite $(g_j)_{j\geq 1}$, $g_j \in B(\Lambda_j)$, $\sup\limits_{j\geq 1} ||g_j||_{B(\Lambda_j)} < +\infty$

on peut trouver $g \in B(\Lambda)$ satisfaisant :

$$g(\lambda) = g_j(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda_j \; , \quad j \geq 1)$$

(v) Pour toute suite $(h_j)_{j\geq 1}$ $h_j \in A(\Lambda_j)_{j\geq 1}$, $\lim_{j\to+\infty} ||h_j||_{A(\Lambda_j)} = 0$

on peut trouver $h \in A(\Lambda)$ telle que :

$$h(\lambda) = h_j(\lambda) , \quad (\lambda \in \Lambda_j \quad j \geq 1)$$

(vi) Pour toute suite $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$, $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ $\varepsilon_j = \pm 1$

on peut trouver $g \in B(\Lambda)$ telle que :

$$\sup_{j>1} ||g(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} \leq \eta , \quad o < \eta < \frac{1}{2}$$

Preuve

Nous allons démontrer les implications suivantes :

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)} \Longrightarrow \text{vi)} \Longrightarrow \text{(i)}$$

et

$$\text{(iv)} \Longrightarrow \text{(v)} \Longrightarrow \text{(i)}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Soit $f \in L^\infty_\Lambda$, $f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} = \sum_{j\geq 1} f_j(x)$, montrons qu'alors :

$$\sum_j ||f_j||_\infty < +\infty$$

Pour N fixe considérons :

$$\sum_{j=1}^{N} ||f_j||_\infty$$

Soit K_n le noyau de Fejer et considérons :

$$\sum_{j=1}^{N} ||f_j * K_n||$$

$K_n * f$ est un polynôme trigonométrique et nous avons :

$$(K_n * f)_j = K_n * f_j$$

ce qui nous donne d'après l'hypothèse (i) :

$$\sum_{j=1}^{N} ||f_j * K_n|| \leq C||K_n * f|| \leq C||f||_\infty$$

Or K_n étant le noyau de Fejer, nous avons, pour chaque $j \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} ||K_n * f_j||_\infty = ||f_j||_\infty$$

ce qui entraîne que :

$$\sum_{j=1}^{N} ||f_j||_\infty \leqslant C||f||_\infty$$

et ceci indépendamment de N, d'où :

$$\sum_{j\geqslant 1} ||f_j||_\infty \leqslant C||f||_\infty$$

et la condition (ii) est satisfaite.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (iii)</u> :

Evident.

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (iv)</u> :

Soit l'injection canonique :

$$i \ : \ \bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j} \longrightarrow C_\Lambda$$

c'est une application linéaire continue de norme égale à 1. Le dual de $\bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j}$ est isomorphe et isométrique à $\bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ de même que celui de C_Λ à $B(\Lambda)$. Soit i^* la transposée de i :

$$i^* \ : B(\Lambda) \longrightarrow \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$$

La condition (iii) implique que i est surjective. Par conséquent, i est bijective et bicontinue et il en est de même pour i^*. En particulier, i^* surjective entraîne la propriété (iv).
La continuité de i^{*-1} entraîne l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$||g||_{B(\Lambda)} \leqslant C \sup_{j\geqslant 1} ||g_j||_{B(\Lambda_j)}$$

(iv) $\Longrightarrow$ (vi) :

Evident.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) :

Nous allons faire une démonstration par l'absurde.
Supposons que Λ n'est pas de type (S). Il existe alors $J_1 \subset \mathbb{N}$, un sous ensemble fini d'indices et $P^{(1)}$:

$$P^{(1)}(x) = \sum_{j\in J_1} P_j^{(1)}(x)$$

un polynôme trigonométrique à spectre dans $\bigcup_{j\in J_1} \Lambda_j$ satisfaisant :

$$\sum_{j\in J_1} ||P_j^{(1)}||_\infty = 1 \ , \quad ||P^{(1)}||_\infty \leqslant 1/2$$

Considérons $\Lambda \setminus (\bigcup_{j\in J_1} \Lambda_j)$, d'après la remarque 3° (page 6), cet ensemble n'est pas de type (S). Il existe donc $J_2 \subset \mathbb{N} \setminus J_1$, card $J_2 < +\infty$ et un polynôme trigonométrique :

$$P^2(x) = \sum_{j\in J_2} P_j^{(2)}(x)$$

à spectre dans $\bigcup_{j\in J_2} \Lambda_j$ tel que :

$$\sum_j ||P_j^{(2)}||_\infty = 1 \ , \quad ||P^{(2)}||_\infty < (\tfrac{1}{2})^2$$

De proche en proche, on construit une suite de sous ensembles (J_n) de $\mathbb{N}$, card $J_n < +\infty$ et une suite de polynômes trigonométriques :

$$P^{(n)}(x) = \sum_{j\in J_n} P_j^{(n)}(x)$$

satisfaisant.

(1) $\quad J_n \cap J_m = \emptyset \quad n \neq m \ , \quad \sum_{j\in J_n} ||P_j^{(n)}||_\infty = 1 \ , \quad ||P^{(n)}||_\infty < (1/2)^n$

Pour chaque n définissons $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon_j = \pm 1$, $j \in J_n$ par :

(2) $$\varepsilon_j \,\mathcal{R}e\,[P_j^{(n)}(\xi_j)] = ||\mathcal{R}e\ P_j^{(n)}||_\infty$$

Prenons $\varepsilon_j = 1$ et $\xi_j = 0$ si $j \geqslant 1$ et $j \notin \bigcup_{n\geqslant 1} J_n$

D'après (vi), nous pouvons trouver $g \in B(\Lambda)$ satisfaisant :

(3) $$\sup_{j\geqslant 1} \|g(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)\|_{B(\Lambda_j)} \leqslant \eta$$

Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$ telle que $\hat{\mu}|_\Lambda = g$, alors (3) entraîne, pour chaque n

$$\left| \int_{\mathbb{T}} P_j^{(n)}(x)\, d\mu(x) - \varepsilon_j \int_{\mathbb{T}} P_j^{(n)}(x)\, \delta_{\xi_j} \right| \leqslant \eta \|P_j^{(n)}\|_\infty \,,\ j \in J_n$$

d'où, en sommant pour $j \in J_n$, on déduit :

$$\eta \sum_{j\in J_n} \|P_j^{(n)}\|_\infty \geqslant \left| \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{j\in J_n} P_j^{(n)}(x)\Big) d\mu(x) - \sum_{j\in J_n} \varepsilon_j\, P_j^{(n)}(\xi_j) \right|$$

ce qui entraîne :

(4) $$\eta \sum_{j\in J_n} \|P_j^{(n)}\|_\infty \geqslant \left| \sum_{j\in J_n} \varepsilon_j\, P_j^{(n)}(\xi_j) \right| - \left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\mu\,(x) \right|$$

De (4) on peut déduire :

$$\eta \sum_{j\in J_n} \|P_j^{(n)}\|_\infty \geqslant \left| \sum_{j\in J_n} \varepsilon_j\, \mathcal{R}e\, P_j^{(n)}(\xi_j) \right| - \left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\mu\,(x) \right|$$

et finalement :

(5) $$\eta \sum_{j\in J_n} \|P_j^{(n)}\|_\infty \geqslant \sum_{j\in J_n} \|\mathcal{R}e\, P_j^{(n)}\|_\infty - \left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\mu\,(x) \right|$$

De même, on définit $\eta_j \in \mathbb{T}$ et $\alpha_j = \pm 1$ pour $\mathrm{Im}\big[P_j^{(n)}(x)\big]$, $j \geqslant 1$

En appliquant (vi) et par un calcul analogue, on obtient :

(6) $$\eta \sum_{j\in J_m} \|P_j^{(n)}\|_\infty \geqslant \sum_{j\in J_n} \|\mathrm{Im}\, P_j^{(n)}\|_\infty - \left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\nu\,(x) \right|$$

où ν est la mesure d'approximation donnée par (vi) pour $(\eta_j)_{j\geqslant 1}$ et $(\alpha_j)_{j\geqslant 1}$.

En additionnant (5) et (6) et en minorant le deuxième membre, on obtient :

$$2\eta \Big\| \sum_{j\in J_n} P_j^{(n)} \Big\|_\infty \geqslant \sum_{j\in J_n} \|P_j^{(n)}\|_\infty - \left[\left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\mu(x) \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} P^{(n)}(x)\, d\nu(x) \right| \right]$$

d'où

$$(7) \qquad (1 - 2\eta) \sum_{j \in J_n} ||P_j^{(n)}||_\infty \leqslant \Big[||\mu|| + ||\nu|| \Big] \, ||P^{(n)}||_\infty$$

or d'après (1), cette dernière inégalité s'écrit :

$$(1 - 2\eta) \leqslant \frac{||\mu|| + ||\nu||}{2^n} \qquad o < \eta < 1/2$$

ce qui est impossible pour n assez grand.

Nous allons montrer maintenant que :

$$(iv) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (i).$$

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (v)</u> :

Soit $(h_j)_{j \geqslant 1}$, $h_j \in A(\Lambda_j)_{j \geqslant 1}$ et $\lim\limits_{j \to +\infty} ||h_j||_{A(\Lambda_j)} = 0$

Posons :

$$D = \sup_{j \geqslant 1} ||h_j||_{A(\Lambda_j)}$$

Soit J_n le sous ensemble de $\mathbb{N}$ défini par :

$$J_n = \{ j \in \mathbb{N} \ , \ 2^{-n} D \leqslant ||h_j||_{A(\Lambda_j)} < 2^{-n+1} D \}$$

Chaque J_n possède un nombre fini de points et $J_n \cap J_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Pour n donné, définissons la suite $(g_j^{(n)})_{j \geqslant 1}$, $g_j^{(n)} \in B(\Lambda_j)$ $j \geqslant 1$, par :

$$g_j^{(n)} = h_j \qquad j \in J_n$$

$$g_j^{(n)} = o \qquad j \notin J_n$$

nous avons alors :

$$\sup_{j \geqslant 1} ||g_j^{(n)}||_{B(\Lambda_j)} \leqslant 2^{-n+1} D$$

D'après (iv) , il existe $g^{(n)} \in B(\Lambda)$ telle que :

$$g^{(n)}(\lambda) = g_j^{(n)}(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda_j \quad j \geqslant 1)$$

et d'après la dernière partie de la preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv) , il existe une constante $C > o$, telle que :

$$||g^{(n)}||_{B(\Lambda)} \leqslant C \sup_{j\geqslant 1} ||g_j^{(n)}||_{B(\Lambda_j)} \leqslant C\, D\, 2^{-n+1}$$

Si V_{k_n} est noyau de la Vallée-POUSSIN [1] d'ordre k_n choisi tel que :

$$||V_{k_n}||_1 \leqslant 3 , \quad \hat{V}_{k_n}(\lambda) = 1 \quad (\lambda \in \bigcup_{j\in J_n} \Lambda_j)$$

alors $\hat{V}_{k_n}\, g^{(n)}$ est un élément de $A(\Lambda)$ avec :

$$||\hat{V}_{k_n}\, g^{(n)}||_{A(\Lambda)} \leqslant 3\, C\, D\, 2^{-n+1}$$

Soit $h \in A(\Lambda)$ la somme dans $A(\Lambda)$ de la série convergente $\sum_{j\geqslant 1} \hat{V}_{k_n}\, g^{(n)}$.

Si $\lambda \in \Lambda$, soit j tel que $\lambda \in \Lambda_j$ et n tel que $j \in J_n$, alors on a :

$$h(\lambda) = \hat{V}_{k_n}(\lambda)\, g^{(n)}(\lambda) = h_j(\lambda)$$

et la condition (v) est démontrée.

Prouvons finalement que :

<u>(v) $\Longrightarrow$ (i)</u> :

Soit j l'injection canonique :

$$j : A(\Lambda) \longrightarrow \bigoplus_{C_o} A(\Lambda_j)$$

j est continue et de norme 1. Soit j^* la transposée de j , alors d'après la remarque du début de ce chapitre, on a :

$$j^* : \bigoplus_{\ell^1} P_{\Lambda_j} \longrightarrow L^\infty_\Lambda$$

La propriété (v) entraîne que j est surjective, donc bijective et bicontinue. $j^{*\,-1}$ continue, entraîne qu'il existe une constante $C > 0$ telle que , pour tout polynôme trigonométrique à spectre dans Λ , on a :

$$\sum_j ||P_j||_\infty \leqslant C\, ||P||_\infty$$

ce qui achève la preuve.

Remarque : D'après la démonstration du théorème, si Λ est de type (S), il existe trois constantes C_1, C_2, C_3 telles que :

$$\sum_j \|P_j\|_\infty \leqslant C_1 \|P\|_\infty \quad (P \in P_\Lambda)$$

$$\|g\|_{B(\Lambda)} \leqslant C_2 \sup_{j\geqslant 1} \|g_j\|_{B(\Lambda_j)} \quad (g \text{ et } (g_j)_{j\geqslant 1} \text{ défini dans (iv)})$$

et
$$\|h\|_{A(\Lambda)} \leqslant C_3 \sup_{j\geqslant 1} \|h_j\|_{A(\Lambda_j)} \quad (h \text{ et } (h_j)_{j\geqslant 1} \text{ défini dans (v)})$$

Or, il est facile de vérifier que ces trois constantes sont identiques.

Remarques sur la condition (vi) :

1°) - à propos de η

Nous n'avons pas pu démontrer dans le cas général que la condition (vi) avec $\eta < 1$ entraîne que Λ est de type (S). Néanmoins, il y a deux cas particuliers où l'on peut conclure facilement :

1$^{\text{er}}$ cas : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ avec les Λ_j symétriques, $\Lambda_j = -\Lambda_j$. Alors la condition (vi) pour $\eta < 1$ entraîne que Λ est de type (S). En effet, dans ce cas, d'après la remarque (7) il suffit de considérer des polynômes à valeurs réelles. En reprenant la preuve par l'absurde de (vi) $\Longrightarrow$ (i), on peut construire une suite de polynômes réels $P^{(n)}$ telle que :

$$\sum \|P_j^{(n)}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|P^{(n)}\|_\infty < (\tfrac{1}{2})^n$$

en appliquant la condition (vi) aux ξ_j et ε_j définis par :

$$\varepsilon_j P_j^{(n)}(\xi_j) = \|P_j^{(n)}\|_\infty , \quad j \in \bigcup_{n\in \mathbb{N}} J_n \quad \text{et} \quad \xi_j = o ,$$

$$\varepsilon_j = 1 \quad \text{si} \quad j \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$$

on aboutira à une contradiction.

$2^{\text{ème}}$ cas : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ et supposons que $\Lambda \cap -\Lambda = \emptyset$, alors la condition suivante entraîne que $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) par rapport à la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

Pour toute $(\xi_j)_{j\geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ $\varepsilon_j = \pm 1$ on peut trouver une mesure réelle μ satisfaisant :

$$\sup_{j\geq 1} \|\hat{\mu}(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)\|_{B(\Lambda_j)} \leq \eta, \ (o < \eta < 1).$$

2°) - à propos de (ε_j)

On peut remplacer la condition (vi) par la condition (vi)' .

(vi)' - pour $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ $\varepsilon_j \in \{0,1\}$

on peut trouver $g \in B(\mathbb{Z})$ satisfaisant :

$$\sup_{j\geq 1} \|g(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)\|_{B(\Lambda_j)} \leq \eta$$

avec $o < \eta < 1/4$.

Montrons que (vi)' entraîne (vi). Soit $(\xi_j)_{j\geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ $\varepsilon_j = \pm 1$.

Considérons :

$$J^1 = \{j \in \mathbb{N}\ ,\ \eta_j = +1\}\ ,\quad J^2 = \{j \in \mathbb{N}\ ,\ \eta_j = -1\}$$

soit $\varepsilon_j^1 \in \{0, 1\}$ défini par :

$$\varepsilon_j^1 = \begin{cases} \eta_j & j \in J^1 \\ o & j \in J^2 \end{cases}$$

Il existe alors $g_1 \in B(\mathbb{Z})$ telle que :

(1) $$\sup_{j} \|g_1(\lambda) - \varepsilon_j^1\,(\xi_j,\lambda)\|_{B(\Lambda_j)} \leq \eta$$

De même si :

$$\varepsilon_j^2 = \begin{cases} -\eta_j & j \in J^2 \\ o & j \in J^1 \end{cases}$$

il existe $g_2 \in B(\mathbb{Z})$ telle que :

(2) $$\sup_j \| g_2(\lambda) - \varepsilon_j^2 (\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j)} \leqslant \eta .$$

Ainsi pour $\eta_j = \varepsilon_j^1 - \varepsilon_j^2$, $j \geqslant 1$, $g = g_1 - g_2$ est un élément de $B(\mathbb{Z})$ tel que :

$$\| g(\lambda) - \eta_j(\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j)} = \| g_1(\lambda) - g_2(\lambda) - (\varepsilon_j^1 - \varepsilon_j^2)(\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j)}$$

et d'après (1) et (2) :

$$\| g(\lambda) - \eta_j(\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j)} \leqslant 2\eta < 1/2 \qquad (j \geqslant 1)$$

D'où la condition (vi).

3°) - <u>à propos de (ξ_j)</u>

Si on prend $\xi_j = o$, $j \geqslant 1$, la condition (vi) n'est plus suffisante.

A ce propos voir plus loin (Chapitre 3).

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION D'ENSEMBLES DE TYPE (S) DANS $\mathbb{Z}$

Note

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, Λ désignera un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ avec $\Lambda \cap -\Lambda = \emptyset$ et $0 \notin \Lambda$ et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ satisfaisant $\operatorname{card} \Lambda_j < +\infty$ $j \geq 1$ et $\overline{\lim\limits_{j\to+\infty}} \operatorname{card} \Lambda_j = +\infty$.

Les ensembles lacunaires par blocs : préliminaires

Dans cette partie Λ sera un sous ensemble de $\mathbb{N}$, $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ. Les résultats se généralisent sans peine à un sous ensemble symétrique avec une partition symétrique.

On notera par λ_j un élément générique de Λ_j et l'on suppose que $\lambda_j < \lambda_{j'}$ si $j < j'$. Nous distinguerons deux éléments d'un même bloc Λ_j par les indices supérieurs ; et l'on suppose que $\lambda_j^{(k)} < \lambda_j^{(k')}$ si $k < k'$.

On notera :

$$m_j = \min \Lambda_j \;, \qquad M_j = \max \Lambda_j \qquad j \geq 1$$

Le pas de Λ_j est :

$$p_j = \operatorname*{Inf}_{\substack{\lambda, \lambda' \in \Lambda_j \\ \lambda \neq \lambda'}} |\lambda - \lambda'|$$

Λ_1 et Λ_2 étant deux sous ensembles de $\mathbb{Z}$:

$$d(\Lambda_1, \Lambda_2) = \operatorname*{Inf}_{\substack{\lambda_1 \in \Lambda_1 \\ \lambda_2 \in \Lambda_2}} |\lambda_1 - \lambda_2|$$

DEFINITION 2.1 : On dira qu'un sous ensemble de $\mathbb{N}$ est q-lacunaire par blocs, s'il existe une partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ et un $q>1$ tels que :

$$(1) \qquad m_{j+1} > q\, M_j \quad . \quad (j\geq 1)$$

On dira aussi que $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est q-lacunaire par blocs.

Remarquons que si Λ possède une partition telle que card $\Lambda_j = 1$, on retrouve la définition classique des suites q-lacunaires [13] (page 202).

DEFINITION 2.2 : On dira que $\mu \in \mathbb{Z}$ est un <u>s-élément de Λ</u>, $s \geq 1$ si :

$$(2) \qquad \mu = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j} \qquad \varepsilon_{i_j} = \pm 1 \,, \quad \lambda_{i_j} \in \Lambda_{i_j} \quad i_1 > i_2 \dots > i_s$$

$\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j}$ sera appelé <u>une s-représentation de μ et λ_{i_1} le terme dominant de s-représentation de μ</u>. $(\lambda_{i_1} > \lambda_{i_2} > \dots > \lambda_{i_s})$.

Deux représentations $\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j}$ et $\sum_{j=1}^{s'} \varepsilon'_{i'_j} \lambda'_{i'_j}$ seront dites identiques si $s = s'$, $\varepsilon_{i_j} = \varepsilon'_{i'_j}$ et $\lambda_{i_j} = \lambda'_{i'_j}$, $1 \leq j \leq s$ $(= s')$. On notera par $S(\Lambda)$ l'ensemble des s-éléments de Λ, $s \geq 1$.

Nous allons donner quelques lemmes techniques qui sont des conséquences simples de la définition.

Notons par $I(\lambda_k)$ et $I(-\lambda_k)$ les sous ensembles définis par :

$$(3) \qquad I(\lambda_k) = \left[\lambda_k - M_{k-1} \frac{q}{q-1} \,, \; \lambda_k + M_{k-1} \frac{q}{q-1}\right]$$

$$I(-\lambda_k) = - I(\lambda_k) \qquad k \geq 1$$

On pourrait convenir qu'il s'agit d'intervalles dans $\mathbb{Z}$.

LEMME 2.1 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs.

Si $q > 1$, un s-élément μ de terme dominant λ_{i_1} $(s\geq 1)$

$$\mu = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j}$$

appartient à l'ensemble $I(\lambda_{i_1}) \cup I(-\lambda_{i_1})$.

Preuve :

Supposons $\varepsilon_{i_1} = 1$, d'où $\mu = \lambda_{i_1} + \sum_{j=2}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j}$. Nous avons alors :

$$\lambda_{i_1} - \sum_{j=1}^{s-1} M_{i_1-j} \leqslant \mu \leqslant \lambda_{i_1} + \sum_{j=1}^{s-1} M_{i_1-j}$$

Or :

$$\sum_{j=1}^{s-1} M_{i_1-j} = M_{i_1-1} \left(1 + \sum_{j=2}^{s-1} \frac{M_{i_1-j}}{M_{i_1-1}}\right) \leqslant M_{i_1-1} \left(1 + \sum_{j=2}^{s-1} \frac{1}{q^{j-1}}\right)$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^{s-1} M_{i_1-1} \leqslant M_{i_1-1} \frac{q}{q-1}$$

ce qui entraîne $\mu \in I(\lambda_{i_1})$.

Si $\varepsilon_{i_1} = -1$ par un raisonnement analogue, l'on trouve que $\mu \in I(-\lambda_{i_1})$.

LEMME 2.2 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j \geqslant 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs. Si :

$$\varepsilon < \frac{q-1}{2(q+1)}$$

alors les intervalles :

$$I_k = [m_k(1 - 2\varepsilon), M_k(1 + 2\varepsilon)] \quad k \geqslant 1$$

sont deux à deux disjoints.

Preuve :

Pour démontrer le lemme, il suffit que :

$$M_k(1 + 2\varepsilon) < m_{k+1} (1 - 2\varepsilon)$$

D'après (1) ceci est vrai si :

$$(1 + 2\varepsilon) < q(1 - 2\varepsilon)$$

ce qui est réalisé si l'on a :

$$\varepsilon < \frac{q-1}{2(q+1)}$$

d'où le lemme.

Posons :

$$(4) \qquad \Delta_k = \left[m_k - M_{k-1}\frac{q}{q-1}\,,\; M_k + M_{k-1}\frac{q}{q-1}\right] \cap \mathbb{Z} \quad k \geq 1$$

Nous avons évidemment : $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} I(\lambda) \subset \Delta_k$, $k \geq 1$.

LEMME 2.3 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs. Si $q>3$ alors les ensembles $\pm \Delta_k$ $k\geq 1$, sont deux à deux disjoints et nous avons :

$$d(\Delta_j, \Delta_k) \geq M_1 \frac{q-3}{q-1} \qquad k \neq j$$

Preuve :

Pour la première partie, il suffit de remarquer que les sous ensembles Δ_k définis par (4) sont contenus dans les sous ensembles I_k du lemme 2.2 pour $\varepsilon = \frac{1}{2(q-1)}$. Si $q > 3$ nous avons :

$$\frac{1}{2(q-1)} < \frac{q-1}{2(q+1)}$$

et en appliquant le lemme 2.2, on conclut que les Δ_k sont deux à deux disjoints.

Pour évaluer $d(\Delta_j, \Delta_k)$, $k \neq j$ considérons $d(\Delta_k, \Delta_{k+1})$.
Nous avons :

$$d(\Delta_k, \Delta_{k+1}) = m_{k+1} - M_k \frac{q}{q-1} - (M_k + M_{k-1}\frac{q}{q-1}) \quad k \geq 1 .$$

Pour le deuxième membre, nous avons :

$$m_{k+1}\left(1 - \frac{M_k}{m_{k+1}}\frac{q}{q-1} - \frac{M_k}{m_{k+1}} - \frac{M_{k-1}}{m_{k+1}}\frac{q}{q-1}\right) \geq m_{k+1}\frac{q-3}{q-1} \geq M_1 q \frac{q-3}{q-1}$$

ce qui entraîne pour tout j et k, $j \neq k$:

$$d(\Delta_j, \Delta_k) \geq M_1\, q \frac{q-3}{q-1}$$

Remarque : Si $q > 2$, on voit facilement que zéro n'appartient à aucun $\pm \Delta_k$.

LEMME 2.4 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs, $q > 3$.
Si un s-élément μ et un s'-élément ν de Λ sont égaux, nous avons nécessairement :

a) ou bien : leurs représentations sont identiques

b) ou bien : leurs représentations ne sont pas identiques, auquel cas, après avoir effectué toutes les simplifications possibles dans $\mu = \nu$, les termes dominants de deux cotés de l'égalité sont dans le même bloc.

Preuve :

Soit :

$$\mu = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j} ,$$

et

$$\nu = \sum_{j=1}^{s'} \varepsilon'_{i'_j} \lambda'_{i'_j}$$

Supposons $s' \leq s$.
Nous allons montrer que si $\mu = \nu$ alors :

b) ou bien il existe k $1 \leq k < s'$ tel que :

$$i'_j = i_j , \quad \varepsilon'_{i'_j} = \varepsilon_{i_j} , \quad \lambda'_{i'_j} = \lambda_{i_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1$$

et

$$i_k = i'_k \quad \varepsilon'_{i'_k} = \varepsilon_{i_k} , \quad \lambda'_{i'_k} \neq \lambda_{i_k}$$

a) ou bien, $s = s'$ et

$$i'_j = i_j \quad \varepsilon'_{i'_j} = \varepsilon_{i_j} , \quad \lambda'_{i'_j} = \lambda_{i_j} \qquad j = 1, 2, \ldots \; s(=s')$$

auquel cas la preuve est terminée.

Si $\mu = \nu$, alors nécessairement $i_1 = i'_1$. En effet, si $i_1 \neq i'_1$ le lemme 2.1 entraîne que :

$$\mu \in \Delta_{i_1} \cup (- \Delta_{i_1}) \quad \text{et} \quad \nu \in \Delta_{i'_1} \cup (- \Delta_{i'_1})$$

et comme $q > 3$ le lemme 2.3 entraîne que ces ensembles sont disjoints.
Nous avons de plus $\varepsilon_{i_1} = \varepsilon'_{i'_1}$ car $\Delta_j \cap (- \Delta_j) = \emptyset$ pour tout j. Nous

alors deux possibilités :

1) ou bien $\lambda_{i_1} \neq \lambda'_{i_1} = \lambda'_{i'_1}$, auquel cas la preuve est finie avec $k = 1$.

2) ou bien $\lambda_{i_1} = \lambda'_{i_1}$, dans ce cas, après simplification, l'égalité $\mu=\nu$ s'écrit :

$$\sum_{j=2}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j} = \sum_{j=2}^{s'} \varepsilon'_{i'_j} \lambda'_{i'_j}$$

En répétant le raisonnement ci-dessus, au bout d'un nombre fini d'opérations, on aura :

1) ou bien il existe k, $1 \leqslant k < s'$, tel que (a) est satisfait.

2) ou bien $i_j = i'_j$, $\varepsilon_{i_j} = \varepsilon'_{i'_j}$, $\lambda_{i_j} = \lambda'_{i'_j}$ $j = 1, 2, \dots s'$.

L'identité $\mu = \nu$ devient, après la simplification

$$0 = \sum_{j=s'+1}^{s} \varepsilon_{i_j} \lambda_{i_j}$$

Or d'après la remarque du lemme 2.3 , ceci n'est pas possible si $s > s'$. Donc, on a $s = s'$ et on obtient (b).

<u>PROPOSITION 2.1</u> : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par bloc. Supposons pour tout $j = 1, 2, \dots$

a) $m_{j+1} > q M_j$, $q > 3$

b) Si p_j est le pas de Λ_j , $p_{j+1} > \frac{2q}{q-1} M_j$

Alors, tout élément de $\mathbb{Z}$ s'obtient au plus d'une manière comme un s-élement de Λ , $s \geqslant 1$. De plus, zéro ne s'obtient pas comme s-élément.

<u>Preuve</u>

La remarque du lemme 2.3 entraîne que zéro ne s'obtient pas comme s-élément

D'après le lemme 2.4, pour qu'un s-élément μ et un s'-élément ν soient égaux il est nécessaire d'avoir :

$$\mu = \pm\lambda_j + \sum_{k=1}^{s-1} \varepsilon_{i_k} \lambda_{i_k} \qquad (i_k < j)$$

$$\nu = \pm\lambda'_j + \sum_{k=1}^{s'-1} \varepsilon'_{i'_k} \lambda'_{i'_k} \qquad (i'_k < j)$$

avec $\lambda_j \neq \lambda'_j$.

Or d'après le lemme 2.1 , nous avons :

$$\mu \in I(\pm\lambda_j) , \qquad \nu \in I(\pm\lambda'_j)$$

La condition (b) , entraîne que ces deux ensembles sont disjoints, ce qui achève la preuve.

Corollaire : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs, si pour tout $j = 1, 2, \ldots.$

a) $m_{j+1} > qM_j$, $q > 3$

b') $p_{j+1} > qM_j$

Alors, en plus du résultat de la proposition 2.1 , la distance entre deux s-éléments $s \geq 1$ est supérieure ou égale à δ_0 :

$$\delta_0 = \inf \left(M_1\, q\, \frac{q-3}{q-1} , p_1\right)$$

Preuve :

Remarquons que pour $q > 3$ nous avons $q > \frac{2q}{q-1}$ et par conséquent b') entraîne (b) et on a les propriétés de la proposition 1.2.

Il nous reste à évaluer la distance entre les s-éléments.

Le lemme 2.3 entraîne :

$$(1) \qquad d(\Delta_j,\Delta_k) \geq M_1\, q\, \frac{q-3}{q-1} \qquad j \neq k .$$

D'autre part :

$$d[I(\lambda_j), I(\lambda'_j)] = p_j - 2M_{j-1} \frac{q}{q-1} > M_{j-1}\, q - 2M_{j-1} \frac{q}{q-1}$$

ce qui nous donne :

$$(2) \qquad d[I(\lambda_j), I(\lambda'_j)] \geq M_1\, q \frac{q-3}{q-1} \qquad j \geq 2$$

Evaluons enfin la distance entre λ_j et un s-élément de $I(\lambda_j)$ différent de λ_j :

$$d[\lambda_j, I(\lambda_j)\setminus\{\lambda_j\}] \geqslant d[0, I(\lambda_{j-1})] \geqslant m_{j-1} - M_{j-1} \frac{q}{q-1}$$

ce qui nous donne :

$$(3) \qquad d[\lambda_j, I(\lambda_j)\setminus\{\lambda_j\}] \geqslant m_{j-1} \frac{q-2}{q-1} \geqslant M_1 q \frac{q-2}{q-1} \qquad j \geqslant 2\,.$$

En tenant compte de (1), (2), (3) la distance δ entre deux s-éléments $s \geqslant 1$, de Λ satisfait :

$$\delta \geqslant \mathrm{Inf}(M_1 q \frac{q-2}{q-1}, \quad M_1 q \frac{q-3}{q-1}, \quad p_1)$$

d'où

$$\delta_o = \mathrm{Inf}(M_1 q \frac{q-3}{q-1}, \quad p_1)\,.$$

<u>Cas particulier</u> : <u>blocs de progressions arithmétiques.</u>

Dans la suite, nous allons nous intéresser aux blocs de progressions arithmétiques :

$$(1) \qquad \Lambda_j = \{n f_j\}_{n=1}^{n_j} \qquad f_j > o \qquad j \geqslant 1$$

C'est pourquoi, on va grouper les résultats obtenus pour ce cas.

Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire où les Λ_j sont définis par (1) . La condition de lacunarité s'écrit :

$$f_{j+1} > q(n_j f_j), \qquad j \geqslant 1 \qquad (q > 1)$$

et le pas de Λ_j est $p_j = f_j$.

Si $q > 3$, le corollaire ci-dessus entraîne :

(i) zéro ne s'obtient pas comme s-élément de Λ , $s \geqslant 1$.

(ii) tout entier γ s'obtient au plus d'une manière comme un s-élément de Λ .

(iii) la distance entre deux s-éléments est supérieure ou égale à δ_o :

$$\delta_o = \mathrm{Inf}(f_1, n_1 f_1 \frac{q(q-3)}{q-1}) = \delta_o(\Lambda_1, q)$$

PROPOSITION 2.2 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire par blocs $q > 1$.

(*) Quelque soit $\alpha > 1$, on peut décomposer Λ en une réunion finie d'ensembles $\Lambda^{(k)}$, $1 \leq k \leq r$ tels que :

(i) $\Lambda^{(k)} \cap \Lambda^{(\ell)} = \emptyset$, $1 \leq k, \ \ell \leq r$, $\ell \neq k$.

(ii) Chaque $\Lambda^{(k)}$ est α-lacunaire par blocs, $1 \leq k \leq r$ relativement à la partition $\Lambda_j^{(k)} = \Lambda^{(k)} \cap \Lambda_j$, $j \geq 1$.

(**) Il existe $\alpha_0 = \alpha_0(q)$ tel que pour $\alpha \geq \alpha_0$ on peut trouver une décomposition de Λ comme dans (*) telle que
$S[\Lambda^{(\ell)}] \cap S[\Lambda^{(k)}] = \emptyset$ si $\ell \neq k$ où $S[\Lambda]$ désigne l'ensemble des s-éléments de Λ.

Preuve :

pour (*) : Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $q^r \geq \alpha$. Considérons les blocs :

$$\Lambda_k, \ \Lambda_{k+r}, \ \ldots . \ \Lambda_{k+jr} \qquad 1 \leq k \leq r, \quad j \geq 0.$$

Soit $\Lambda^{(k)}$ défini par :

$$\Lambda^{(k)} = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_{k+jr}$$

Il est facile de vérifier que les $\Lambda^{(k)}$ sont α-lacunaires par blocs.

pour (**) : Si $\alpha > 2$ il est facile de voir qu'un s-élément μ de la forme :

$$\mu = \lambda_{i_1}^{(k)} + \sum_{\ell=2}^{s} \varepsilon_{i_\ell} \lambda_{i_\ell}^{(k)}$$

appartient à l'intervalle :

$$\left[m_{i_1}^{(k)} \frac{\alpha-2}{\alpha-1} , \ M_{i_1}^{(k)} \frac{\alpha}{\alpha-1} \right]$$

Choisissons ε tel que

$$\varepsilon < \frac{q-1}{2(q+1)}$$

si l'on prend

$$\alpha > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

alors on a :

$$\frac{\alpha-2}{\alpha-1} > 1-\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\alpha-1} < 1+\varepsilon$$

et par conséquent :

$$\mu \in \left[m_{i_1}^{(k)}(1-2\varepsilon) \ , \ M_{i_1}^{(k)}(1+2\varepsilon)\right]$$

En appliquant le lemme 2.2 , on en déduit que ces intervalles sont deux à deux disjoints pour $1 \leqslant k \leqslant r$ et i_1 quelconque.

Maintenant si on prend :

$$\alpha_o = \alpha_o(q) = \mathrm{Sup}(2, \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon})$$

pour $\alpha \geqslant \alpha_o(q)$ la propriété (**) est satisfaite.

<u>Corollaire</u> : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ des blocs de progressions arithmétiques centrées à l'origine, q-lacunaire par blocs $q > 1$. Alors, il existe une décomposition de Λ, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}$ satisfaisant :

(*) chaque $\Lambda^{(k)}$ est q'-lacunaire avec $q' > 3$.

(**) $S[\Lambda^{(\ell)}] \cap S[\Lambda^{(k)}] = \emptyset$ si $\ell \neq k$ où $S[\Lambda]$ désigne l'ensemble des s-éléments de Λ

(***) le pas de sous ensemble $\bigcup_{k=1}^{r} S[\Lambda^{(k)}]$ est supérieur à δ_o où

$$\delta_o = \mathrm{Inf}\left[f_1, \ n_1 f_1 \frac{q^r-3}{q^r-1} \ , \ f_1 q \frac{q^r-q^{r-1}-2}{q^r-1}\right]$$

<u>Preuve</u> :

Définissons $r \in \mathbb{N}$ tel que $q^r > q^{r-1}+2$. Les $\Lambda^{(k)}$ définis dans la preuve de la proposition 2.2 sont q^r-lacunaire et $q^r > 3$. Comme $q^r > 3$ d'après la proposition 2.1 le pas des $S[\Lambda^{(k)}]$ est supérieur à $\delta_1 = \mathrm{Inf}\left[f_1, \ n_1 f_1 q^r \frac{q^r-3}{q^r-1}\right]$. Il est facile de voir que les s-éléments des $\Lambda^{(k)}$ se trouvent dans les intervalles :

$$\pm\left[m_{k+jr} \frac{q^r-2}{q^r-1} \ , \ M_{k+jr} \frac{q^r}{q^r-1}\right] , \quad 1 \leqslant k \leqslant r \ , \quad j \geqslant o$$

Evaluons la distance δ entre deux s-éléments de $\Lambda^{(k)}$ et $\Lambda^{(k')}$ $k \neq k'$. Pour cela considérons deux indices α et β, $\alpha = k + jr$, $\beta = k' + j'r$ et $\alpha > \beta$. Alors nous avons :

$$\delta \geqslant m_\alpha \frac{q^r-2}{q^r-1} - m_\beta \frac{q^r}{q^r-1} = m_\beta\left[\frac{m_\alpha}{m_\beta}\left(\frac{q^r-2}{q^r-1}\right) - \frac{q^r}{q^r-1}\right] \geqslant m_\beta\left[q^r \frac{q^r-2}{q^r-1} - \frac{q^r}{q^r-1}\right]$$

D'où :

$$\delta \geqslant f_1 \left[\frac{q(q^r - q^{r-1} - 2)}{q^r - 1}\right] > 0.$$

Ce qui nous donne (**) et implique que le pas de $\bigcup_{k=1}^{r} S[\Lambda^{(k)}]$ est supérieur à δ_0, $\delta_0 = \operatorname{Inf}\left[f_1, n_1 f_1 q^r \frac{q^r-3}{q^r-1}, f_1 q \frac{q^r - q^{r-1} - 2}{q^r - 1}\right]$.

Des ensembles q-lacunaires par blocs de Type (S)

Dans cette partie, nous allons considérer des ensembles Λ, q-lacunaire par blocs, $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$, $\Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où les Λ_j sont des progressions arithmétiques centrées à l'origine :

$$(1) \qquad \Lambda_j = \{n f_j\}_{n=1}^{n_j}, \quad f_{j+1} > q(n_j f_j) \quad j \geqslant 1 \quad (q > 1)$$

Pour $\tilde{q} > 1$, $\tilde{\Lambda}_j$ désignera le sous ensemble :

$$(2) \qquad \tilde{\Lambda}_j = \{n f_j\}_{n=1}^{[\tilde{q}\, n_j]}$$

où $[\tilde{q}\, n_j]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $\tilde{q}\, n_j$.

Soit $F_\alpha(x)$ le noyau de Fejer de $\mathbb{R}$, ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), sa transformée de Fourier est :

$$\hat{F}_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\lambda|}{\alpha} & \text{si} \quad |\lambda| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si} \quad |\lambda| > \alpha \end{cases}$$

On sait que les $\hat{F}_\alpha(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont les coefficients de Fourier d'une mesure positive sur $\mathbb{T}$([1] p. 137). Comme il n'y en a qu'un nombre fini de termes non nuls, c'est un polynôme trigonométrique. Si on le désigne encore par $F_\alpha(x)$ on a :

$$(3) \qquad F_\alpha(x) = \sum_{|n|\leqslant[\alpha]} \left(1 - \frac{|n|}{\alpha}\right) e^{inx}$$

Dans le cas où α est un entier F_α est le polynôme de Fejer d'ordre α.
Nous avons $F_\alpha \geq 0$ et $\|F_\alpha\|_1 = 1$.

PROPOSITION 2.3. : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$, un ensemble q-lacunaire, avec $q > 3$.
Si les Λ_j sont des progressions arithmétiques centrées à l'origine, alors $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

Preuve :

Nous allons montrer que $\Lambda \cup -\Lambda$ satisfait la condition (vi)' de la page (16) .
Soit $\xi \in \mathbb{T}^\infty$, $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$ et $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ donnés.
Considérons :

$$1 + K_j(x) = F_{n_j} \quad [f_j(x + \xi_j)] \qquad j \geq 1$$

où F_{n_j} est le noyau de Fejer d'ordre n_j.
Soit :

$$\Pi_M(x) = \prod_{j=1}^{M} (1 + \varepsilon_j K_j(x))$$

La condition $q > 3$ entraîne, d'après le corollaire de la proposition 2.1 que zéro ne s'obtient pas comme s-élément de Λ et que tout nombre $\gamma \in \mathbb{Z}$ s'obtient d'une seule manière comme s-élément, $s \geq 1$, de Λ .
Ce qui nous donne, en particulier :

$$\Pi_M(x) = 1 + \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j K_j(x) + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}\setminus(\Lambda \cup -\Lambda)\cup\{o\}} C_M(\gamma) e^{i\gamma x} \tag{4}$$

$1 + \varepsilon_j K_j \geq o$ car $1 + K_j \geq o$ et

$$1 + \varepsilon_j K_j = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 1 + K_j \end{cases}$$

donc il en est de même pour Π_M , ce qui nous donne :

$$\|\Pi_M\|_1 = \hat{\Pi}_M(o) = 1$$

Nous avons ainsi une suite $(\Pi_M)_{M\geq 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{T})$, avec

$$\|\Pi_M\|_1 = 1$$

Soit ν_1 une mesure, limite vague d'une sous-suite de Π_M. Si :

$$g_1 = \nu_1 \ , \ g_1 \in B(\mathbb{Z})$$

nous avons :

$$g_1(n f_j) = \varepsilon_j \hat{F}_{n_j}(n)\,(\xi_j, n f_j) \quad \text{si} \quad 1 \leq |n| \leq n_j, \quad j = 1,2,\ldots$$

Soit $\tilde{q} > 1$ défini par $q > 3\tilde{q} > 3$. Soit les $\tilde{\Lambda}_j$ définis par (2).
$\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j \geq 1} \tilde{\Lambda}_j$ est $(\frac{q}{\tilde{q}})$-lacunaire, $\frac{q}{\tilde{q}} > 3$. Posons :

$$1 + \tilde{K}_j(x) = F_{\tilde{q}\, n_j}\left[f_j(x + \xi_j)\right]$$

où $F_{\tilde{q}\, n_j}$ est défini par (3).

Si l'on définit :

$$\tilde{\Pi}_M(x) = \prod_{j=1}^{M} (1 + \varepsilon_j \tilde{K}_j(x))$$

Par un calcul analogue à celui fait dans la première partie de la preuve, on obtiendra $g_2 \in B(\mathbb{Z})$ satisfaisant :

$$g_2(n f_j) = \varepsilon_j \hat{F}_{\tilde{q} n_j}(n)(\xi_j, n f_j), \quad 1 \leq |n| \leq n_j \qquad j = 1,2,\ldots$$

Soit maintenant $g \in B(\mathbb{Z})$ défini par :

$$g = \frac{1}{\tilde{q}-1}\left[\tilde{q}\, g_2 - g_1\right]$$

En remarquant qu'on a :

$$\frac{1}{\tilde{q}-1}\left[\tilde{q}\, \hat{F}_{\tilde{q} n_j}(n) - \hat{F}_{n_j}(n)\right] = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leq |n| \leq n_j \ , \quad j = 1,2,\ldots$$

on en déduit :

$$g(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) \ \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j \cup - \Lambda_j) \qquad j \geq 1$$

La condition (vi)' étant ainsi réalisée, $\Lambda \cup - \Lambda$ est de type (S) par rapport à la partition $(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)_{j \geq 1}$.

Remarques :

1) Le spectre de g est contenu dans l'ensemble des s-éléments de $\tilde{\Lambda} \cup -\tilde{\Lambda}$, $s \geq 1$.

2) Nous pouvons remplacer la condition de lacunarité par :
il existe $\tilde{q} > 1$ tel que $\lambda \in \tilde{\Lambda} \cup \{o\}$ ne s'obtient pas comme s-élément de $\tilde{\Lambda}$, $s \geq 2$.

THEOREME 2.1 : Si $\Lambda = \bigcup_{j \geq 1} \Lambda_j$ est q-lacunaire par blocs, $q > 1$ et si les Λ_j sont des blocs de progressions arithmétiques centrés à l'origine. Alors $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j \geq 1}$.

Preuve :

Soit $\tilde{q}$, $q > \tilde{q} > 1$. Alors $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j \geq 1} \tilde{\Lambda}_j$ défini comme au début de ce paragraphe est $(\frac{q}{\tilde{q}})$-lacunaire. Comme $\frac{q}{\tilde{q}} > 1$ d'après la proposition 2.2 on peut trouver une décomposition de $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda} = \bigcup_{k=1}^{r} \tilde{\Lambda}^{(k)}$$

satisfaisant :

i) pour $1 \leq k \leq r$, $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ est α-lacunaire ($\alpha > 3$) relativement à la partition :

$$\tilde{\Lambda}_j^{(k)} = \tilde{\Lambda}^{(k)} \cap \Lambda_j \;, \quad j \geq 1 \;,$$

ii) aucun s-élément de $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ n'appartient à $\tilde{\Lambda}^{(p)}$ $p \neq k$.

Nous allons montrer que la condition (vi)' de la page 16 est satisfaite .

Soit $(\xi_j)_{j \geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $(\varepsilon_j)_{j \geq 1} = \varepsilon$ $\varepsilon_j = \pm 1$.

A une décomposition de $\tilde{\Lambda}$ correspond évidemment une décomposition de Λ, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}$ de même type.

Pour chaque k, $1 \leq k \leq r$, en appliquant la proposition 2.3 on obtient $g^{(k)} \in B(\mathbb{Z})$ satisfaisant :

$$g^{(k)}(\lambda) = \varepsilon_j \quad (\xi_j \ ,\lambda) \qquad \lambda \in (\Lambda_j^{(k)} \cup - \Lambda_j^{(k)}) \quad j \geq 1 \ .$$

De plus, compte tenu de la définition de $g^{(k)}$ et la propriété (ii), ci-dessus, nous avons :

$$g^{(k)}(\lambda) = o \qquad \text{si} \qquad \lambda \in [\tilde{\Lambda} \cup - \tilde{\Lambda}] \setminus [\tilde{\Lambda}^{(k)} \cup - \Lambda^{(k)}]$$

Soit alors :

$$g = \sum_{k=1}^{r} g^{(k)}$$

on obtient $g \in B(\mathbb{Z})$ telle que :

$$g(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j,\lambda) \qquad \lambda \in(\Lambda_j \cup - \Lambda_j) \ , \quad j > 1$$

Ce qui achève la preuve.

<u>Exemples</u> : Les ensembles de type (S) ont été introduits par Rosenthal [5] . Les ensembles définis par lui sont des ensembles q-lacunaires par blocs de progressions arithmétiques centrés à l'origine avec $q > 6\pi$. La formulation par dualité nous permet , outre l'amélioration de la constante de 6π à 1 , d'avoir une condition suffisante qui nous permet par l'introduction des "produits de Riesz généralisés" d'obtenir des résultats plus fins.

Voilà quelques ensembles de type (S) :

1) Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ prenons :

$$\Lambda_j = \{n\, q^j\, j!\}_{n=1}^{j+1} = \{n\, f_j\}_{n=1}^{j+1}$$

où $q > 1$ et $f_j = q^j\, j!$

2) $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ avec :

$$\Lambda_j = \{n(j!)\}_{n=1}^{j} = \{n\, f_j\}_{n=1}^{j} \quad , \quad f_j = (j)!$$

Ensembles de type (S) qui ne sont pas réunion finie des blocs lacunaires

Commençons par la remarque suivante. Si $\Lambda' = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda'_j$ est de type (S) avec la constante C' , alors pour θ et k deux entiers relatifs donnés l'ensemble $\Lambda = k + \theta\,\Lambda'$ est de type (S) relativement à la partition $(k + \theta\,\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ avec la même constante C'.

Soit $\Lambda' = \bigcup_{i\geq 1} \Lambda'_i$ et $\Lambda'' = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda''_j$ deux ensembles de type (S) avec des constantes C' et C'' respectivement. Considérons pour $i \geq 1$ et $j \geq 1$ $\Lambda_{j,i} = k_j + \theta_j\,\Lambda'_i$, k_j et θ_j étant des entiers relatifs. Si k_j et θ_j sont tels que :

$$\text{i)} \quad \Lambda_{j,i} \cap \Lambda_{k,\ell} = \emptyset \qquad (j,i) \neq (k,\ell)$$

$$\text{ii)} \quad \Lambda_{j,i} \subset \Lambda''_j \qquad i \geq 1 \;, \qquad (j \geq 1)$$

Alors $\Lambda = \bigcup_{j,i} \Lambda_{j,i}$ est de type (S) avec la constante $C'C''$. Soit en effet $P \in P_\Lambda$

$$P = \sum_{j,i} P_{j,i} = \sum_j \Big(\sum_i P_{j,i}\Big)$$

Les $\sum_i P_{j,i}$ sont des polynômes à spectres dans Λ''_j ce qui nous donne :

$$\sum_j \Big\|\sum_i P_{j,i}\Big\|_\infty \leq C''\, \|P\|_\infty$$

D'après la remarque du début de cette partie, pour tout j, les $\bigcup_i \Lambda_{j,i}$ sont de type (S) avec la même constante C'. D'où :

$$\sum_{i} \|P_{j,i}\|_\infty \leq C' \Big\|\sum_i P_{j,i}\Big\|_\infty \qquad (j \geq 1)$$

Nous obtenons finalement :

$$\sum_{j,i} ||P_{j,i}||_\infty \leqslant C'C''||P||_\infty$$

Ce qui montre que Λ est de type (S).

Le procédé que l'on vient de décrire va nous permettre de construire des ensembles de type (S) qui ne sont pas réunion d'un nombre fini d'ensembles q-lacunaires.

Rappelons un résultat de Steçkin pour les suites lacunaires.

LEMME DE STECKIN : ([6] page 388).

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble Λ soit la réunion finie des ensembles q-lacunaires est que :

$$N[x,\ 2x] = O(1), \qquad (x \to +\infty)$$

où $N[x,\ 2x] = \mathrm{Card}(\Lambda \cap [x,\ 2x])$.

Corollaire : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$. Une condition nécessaire pour que Λ soit la réunion finie d'ensembles q-lacunaires par blocs (les blocs étant les Λ_j) est que :

(1) $$N[x,\ 2x] = O(1) \quad , \qquad (x \to +\infty)$$

où $N[x,\ 2x] = \mathrm{card}\ \{j \in \mathbb{N} \ ,\ \Lambda_j \cap [x,\ 2x] \neq \emptyset\}$.

Preuve :

Par hypothèse $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}$ avec $\Lambda^{(k)} = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j^{(k)}$, q-lacunaire par blocs , $1 \leqslant k \leqslant r$.

Supposons que (1) n'est pas satisfaite et montrons qu'on a alors une contradiction. En effet, si (1) n'est pas satisfaite on peut trouver une suit Δ contenu dans Λ, $\Delta = \{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}$, satisfaisant :

a) $\lambda_j \in \Lambda_j$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $k \neq j$

b) pour la suite Δ , $N[x,\ 2x]$ n'est pas borné quand x augmente indéfiniment.

Or d'après l'hypothèse sur Λ, Δ est l'union finie de suites q-lacunaires, et d'après le lemme (b) est en contradiction avec cette propriété.

Soit $\Lambda' = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda'_j$ des blocs q-lacunaires de progressions arithmétiques centrées à l'origine, $q > 3$, avec $\overline{\lim_{j\to+\infty}} \text{ card } \Lambda_j = +\infty$.

Nous allons construire par récurrence, à partir de Λ', un autre ensemble de type (S). Supposons que nous avons défini k_ℓ et θ_ℓ, $1 \leq \ell \leq p-1$ ($k_1 = o$, $\theta_1 = 1$) tels que :

(i) si $\Lambda''_\ell = \{n\,\theta_\ell\}_{1\leq n \leq k_\ell} + \max \Lambda'_{2\ell+1}$ $\quad(1 \leq \ell \leq p-1)$

alors $\bigcup_{\ell=1}^{p-1} \Lambda''_\ell$ est un ensemble q'-lacunaire, avec $q' > 3$.

(ii) si $\Lambda_{\ell^2+r} = (k_\ell\,\theta_\ell + \theta_\ell\,\Lambda'_r)$, $\quad 1 \leq r \leq 2\ell+1 \quad (1 \leq \ell \leq p-1)$

alors on a , $\Lambda_{\ell^2+r} \subset \Lambda''_\ell$

Définissons k_p et θ_p et construisons Λ''_p et Λ_{p^2+r}, $1 \leq r \leq 2p+1$.

Soit θ_p défini par :

$$\frac{\theta_p}{\max \Lambda''_{p-1}} > q'$$

et k_p défini par :

$$k_p > \max \Lambda'_{2p+1}$$

Définissons maintenant :

$$\Lambda''_p = \{n\,\theta_p\}_{1\leq n\leq k_p} + \max \Lambda'_{2p+1}$$

et

$$\Lambda_{p^2+r} = k_p\,\theta_p + \theta_p\,\Lambda'_r\,, \quad 1 \leq r \leq 2p+1$$

Il est facile de vérifier que Λ''_p et les Λ_{p^2+r} satisfont (i) et (ii).

Considérons maintenant $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ nous avons :

1) Λ n'est pas la réunion finie des blocs lacunaires.

En effet, on a :

$$\max \Lambda_{(p+1)^2} = k_p\, \theta_p + \theta_p \max \Lambda'_{2p+1} < 2\theta_p\, k_p$$

et

$$\max \Lambda_{p^2+1} = k_p\, \theta_p + \theta_p \max \Lambda'_1 > k_p\, \theta_p\ .$$

Ce qui nous donne, avec la notation de corollaire du lemme de Steçkin :

$$2p = N\left[\max \Lambda_{p^2+1}\, ,\ \max \Lambda_{(p+1)^2}\right] < N\left[\theta_p\, k_p,\ 2\theta_p\, k_p\right]$$

d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} N\left[\theta_p k_p,\ 2\theta_p k_p\right] = +\infty$. Ce qui entraîne (1).

2) Λ est de type (S). Pour cela il est facile de voir que Λ'', Λ' et Λ possédent les propriétés indiquées au début de cette partie.

Quelques conditions arithmétiques

Soit Λ un sous ensemble de $\mathbb{Z}$. Dans cette partie nous supposerons que, $0 \notin \Lambda$, $\Lambda \cap -\Lambda = \emptyset$ et que $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est une partition quelconque de Λ.

La condition R_s

Soit $\gamma \in \mathbb{Z}$ un s-élément de Λ , $s \geq 1$

$$(1) \qquad \gamma = \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p} \qquad \varepsilon_{i_p} = \pm 1 \qquad (i_1 > i_2 \ldots\ldots > i_s)$$

Notons par $R_s(\gamma,\Lambda)$ le nombre de s-représentations distinctes de γ.

Dans la suite, nous utiliserons des conditions de type :

$$(2) \qquad R_s(\gamma,\Lambda) \leq B^s \qquad s \geq 1 \qquad (B > 1)$$

LEMME 2.5 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$, et supposons que pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}$ la condition (2) est satisfaite. Alors si Card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geqslant 1$, nous avons :

$$\lim_{\substack{j,k\to+\infty \\ j\neq k}} d(\Lambda_j, \Lambda_k) = +\infty.$$

Preuve :

D'après (2), si n est un entier, l'équation :

$$\pm \lambda_j \pm \lambda_k = n \qquad j \neq k$$

possède un nombre fini de solution. Quitte à enlever un nombre fini de blocs, nous avons donc :

$$d(\Lambda_j, \Lambda_k) > n , \qquad j \neq k$$

ce qui achève la preuve.

LEMME 2.6 : Soit $\Lambda = \bigcup_j \Lambda_j$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $R_s(0,\Lambda) = 0$ $\quad s \geqslant 1$

(ii) Si $\lambda \in \Lambda$, alors $+\lambda$ ne figure dans aucune s-représentation de λ .

(iii) Si $0 = \lambda_j + \lambda'_j + \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}$, $p = 1, 2, \ldots s$, alors $\lambda_j \neq -\lambda'_j$.

Preuve :

Immédiate.

Remarque : La condition $R_s(\gamma,\Lambda) \leqslant B^s$, $s \geqslant 1$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}$ avec la même constante B est invariante par translation. Plus précisément, si $p \in \mathbb{Z}$ alors $R_s(\gamma, \Lambda + p) \leqslant (2B)^s$ $s \geqslant 1$.

La condition R_s^2

Considérons le problème suivant :

Pour chaque s fixe trouver une borne supérieure de :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} R_s(\lambda, \Lambda)$$

et ceci uniformément par rapport à j.

Il n'est pas difficile de voir que ce nombre est inférieur au nombre des représentations de zéro de la forme :

$$(3) \qquad 0 = \sum_{p=1}^{s+1} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}$$

où un ou deux des indices i_p sont égaux à j, les autres indices étant différents de j et deux à deux distincts. Les deux rerpésentations de zéro de la forme :

$$0 = \lambda_j - \lambda_j + \sum_{p=2}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}$$

et

$$0 = \lambda_j' - \lambda_j' + \sum_{p=2}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}$$

sont supposées distinctes (voir la définition des s-représentations)

Notons pour $s \geq 3$ par $R_s^{2,j}(0,\Lambda)$ le nombre de représentation de zéro de la forme (3). On a alors :

$$(4) \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda_j} R_s(\lambda, \Lambda) \leq R_{s+1}^{2,j}(0,\Lambda) \qquad (s \geq 3)$$

Soit :

$$(5) \qquad R_s^2(0,\Lambda) = \operatorname{Sup}_j R_s^{2,j}(0,\Lambda)$$

Nous utiliserons plus loin la condition suivante :

$$R_s^2(0,\Lambda) \leq B^s \qquad (B > 1)$$

On peut remarquer que $R_s(0,\Lambda) \leq R_s^2(0,\Lambda) \quad (s \geq 3)$

LEMME 2.7 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j \geq 1} \Lambda_j$ satisfaisant :

(i) $(-\Lambda) \cap \Lambda = \emptyset$ et $0 \notin \Lambda$

(ii) $\overline{\lim_{j \geq 1}} \operatorname{card} \Lambda_j = +\infty$

(iii) $R_s^2(0,\Lambda) \leq B^s \quad s \geq 3 \quad (B > 1)$

Alors nous avons :

$$(*) \quad R_s(0,\Lambda) = 0 \qquad s \geq 1$$

$$(**) \quad R_s(\lambda,\Lambda) \leq B^{s+1} \qquad s \geq 1 \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

<u>Preuve</u> :

<u>Pour $(*)$</u> : Comme $0 \notin \Lambda$ et $\Lambda \cup -\Lambda = \emptyset$ nous avons :

$$R_1(0,\Lambda) = R_2(0,\Lambda) = 0$$

Il nous reste à démontrer que $R_s(0,\Lambda) = 0 \quad s \geq 3$.

Supposons qu'il existe $s_o \geq 3$ tel que :

$$0 = \sum_{p=1}^{s_o} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}, \; i_1 > i_2 > \dots > i_s, \quad \varepsilon_{i_p} = \pm 1.$$

D'après (iii) le nombre des s_o-représentations de zéro ; $R_{s_o}(0,\Lambda)$ est fini. Il existe donc une infinité d'indices $j \geq 1$ qui ne figurent dans aucune s_o-représentation de 0. Pour de tels j l'on peut obtenir zéro sous la forme :

$$(6) \qquad 0 = -\lambda_j + \lambda_j + \sum_{p=1}^{s_o} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}, \quad (\lambda_j \in \Lambda_j)$$

qui est une représentation de zéro de type (4). Quand λ_j parcourt Λ_j le nombre de représentation de zéro de la forme (6) est égale à card $\Lambda_j \cdot R_{s_o}(0,\Lambda)$. L'hypothèse (iii) implique que ce nombre doit satisfaire :

$$\text{card } \Lambda_j \cdot R_{s_o}(0,\Lambda) \leq R^{2,j}_{s_o+2}(0,\Lambda) \leq B^{s_o+2}.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour une infinité d'indices $j \geq 1$, ce qui d'après (ii) n'est possible que si $R_{s_o}(0,\Lambda) = 0$. Ce qui nous donne la propriété $(*)$.

<u>Pour $(**)$</u> : Si $\lambda = \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}$, $\lambda \in \Lambda_j$, nous avons :

$$0 = \lambda - \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_{i_p} \lambda_{i_p}.$$

Il s'agit d'une $(s+1)$-représentation de type (4) de zéro. Nous avons donc :

$$R_s(\lambda,\Lambda) \leqslant B^{s+1} \qquad s \geqslant 2$$

ce qui achève la preuve.

Remarques

1) - Si Λ satisfait les conditions du lemme 2.7, alors une représentation de type (6) ne peut pas se présenter.

2) - Pour avoir (**) il n'est pas nécessaire d'avoir les conditions (i) et (ii).

3) - Pour $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ quelconque satisfaisant la condition (iii) nous avons, soit $\sup_{j\geqslant 1} \operatorname{card} \Lambda_j < +\infty$, soit $R_s(0,\Lambda) = 0 \quad s \geqslant 3$.

Construction d'ensembles de type (S)

Nous allons considérer des blocs de progressions arithmétiques centrées à l'origine :

$$\Lambda_j = \{n\, f_j\}_{n=1}^{n_j} \quad , \quad \tilde{\Lambda}_j = \{n\, f_j\}_{n=1}^{[q' n_j]} \qquad (q' > 1)$$

THEOREME 2.2 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$, $0 \notin \Lambda$ où les Λ_j sont des blocs de progressions arithmétiques centrées à l'origine et $\overline{\lim_{j\to+\infty}} \operatorname{card} \Lambda_j = +\infty$. S'il existe $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ $\tilde{q} > 1$ tel que $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j\geqslant 1} \tilde{\Lambda}_j$ satisfasse

(i) $\tilde{\Lambda} \cap -\tilde{\Lambda} = \emptyset$, $\tilde{\Lambda}_j \cap \tilde{\Lambda}_k = \emptyset \quad j \neq k$

(ii) $R_s^2(0,\tilde{\Lambda}) \leqslant B^s$ si $s \geqslant 3 \quad (B > 1)$

Alors on peut trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < \alpha < 1$, $\xi \in \mathbb{T}^\infty$, $\xi = (\xi_j)_{j\geqslant 1}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ il existe $g \in B(\mathbb{Z})$ satisfaisant :

(a) $\quad ||g - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \alpha \quad , \quad j \geqslant 1$

(b) $\quad ||g||_{B(\mathbb{Z})} \leqslant C\,\alpha^{-1}$

En particulier, $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$.

<u>Preuve</u> :

Soit $o < \alpha < 1$, $\xi = (\xi_j)_{j\geqslant 1}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ donnés.

Définissons comme pour la proposition 2.3 :

$$(1) \qquad 1 + K_j(x) = F_{n_j}\left[f_j(x+\xi_j)\right]$$

où F_{n_j} est le noyau de Fejer d'ordre n_j.

Considérons, pour $M \in \mathbb{N}$:

$$(2) \qquad \Pi_M(x) = \prod_{j=1}^{M}\left[1 + \beta\,\varepsilon_j\,K_j(x)\right]$$

où $o < \beta < 1$ est une constante que l'on précisera dans la suite.

(2) s'écrit :

$$(3) \qquad \Pi_M(x) = 1 + \beta \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j\,K_j(x) + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} C_M(\gamma)\,e^{i\gamma x}$$

avec :

$$(4) \qquad |C_M(\gamma)| \leqslant \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s\,R_s(\gamma,\Lambda) \qquad \gamma \in \mathbb{Z}$$

$1 + K_j = F_{n_j} \geqslant o$ entraîne $1 + \beta\,K_j(x) \geqslant o$ si $o < \beta < 1$. Comme nous avons :

$$1 + \beta\,\varepsilon_j\,K_j(x) = \begin{cases} 1 + \beta\,K_j(x) \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}$$

(2) entraîne que $\Pi_M \geqslant o$. D'après le lemme 2.7 $R_s(0,\Lambda) = 0 \quad s \geqslant 1$.

Ainsi la positivité de Π_M et (3) nous donne :

$$||\Pi_M||_1 = \hat{\Pi}_M(o) = 1$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$. En prenant la limite vague d'une sous suite de

$(\Pi_M)_{M\in\mathbb{N}}$, on obtient une mesure positive ν . Si on note :

$$f = \hat{\nu} \quad \text{et} \quad C(\gamma) = \lim_{M\to+\infty} C_M(\gamma) \qquad \gamma \in \mathbb{Z}$$

nous avons pour chaque j :

$$(a_1) \qquad f(n\, f_j) = \beta\, \varepsilon_j\, \hat{F}_{n_j}(n)\, (\xi_j, nf_j) + C(n\, f_j) \qquad 0 < |n| \leqslant n_j$$

et

$$(b_1) \qquad ||f||_{B(\mathbb{Z})} \leqslant 1 .$$

Soit maintenant $F_{\tilde{q}n_j} = \sum_{|n|\leqslant[\tilde{q}n_j]} \left(1 - \frac{|n|}{\tilde{q}n_j}\right) e^{inx}$ définie par (3) (page 28)

Ecrivons :

$$1 + \tilde{K}_j(x) = F_{\tilde{q}n_j}\left[f_j(x + \xi_j)\right]$$

De la même façon en considérant :

$$\hat{\Pi}_M(x) = \prod_{j=1}^{M}\left[1 + \beta\, \varepsilon_j\, \tilde{K}_j(x)\right] = 1 + \beta \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j\, \tilde{K}_j(x) + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \tilde{C}_M(\gamma) e^{i\gamma x}$$

on a :

$$(5) \qquad |\tilde{C}_M(\gamma)| \leqslant \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s\, R_s(\gamma, \tilde{\Lambda}) \qquad \gamma \in \mathbb{Z}$$

et on obtient une mesure positive $\tilde{\nu}$ telle que si $\tilde{f} = \hat{\tilde{\nu}}$ et $\tilde{C} = (\gamma) = \lim_{M\to+\infty} \tilde{C}_M(\gamma)$ alors :

$$(\tilde{a}_1) \qquad \tilde{f}\,(n\, f_j) = \beta\, \varepsilon_j\, \hat{F}_{\tilde{q}f_j}(n)\, (\xi_j, \lambda) + \tilde{C}(n\, f_j) \quad (\, 0 < |n| \leqslant 2n_j)$$

$$(\tilde{b}_1) \qquad ||\tilde{f}||_{B(\mathbb{Z})} \leqslant 1$$

Posons : $g_1 = \frac{1}{\tilde{q}-1}\left[\tilde{q}\,\tilde{f} - f\right]$. (a_1) et $(\tilde{a}_1)$ entraînent :

$$(6) \qquad g_1(\lambda) = \beta\, \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) + \frac{1}{\tilde{q}-1}\left[\tilde{q}\,\tilde{c}(\lambda) - c(\lambda)\right], \; \lambda \in (\Lambda_j \cup -\Lambda_j)$$

Evaluons $||g_1(\lambda) - \beta\, \varepsilon_j(\xi_j, \lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)}$

Le dual de $P_{(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)}$ est isomorphe et isométrique à $B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)$ par :

$$(P,\ g) \ = \sum_{\lambda\varepsilon(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \hat{P}(\lambda)\ g(\lambda)$$

et on a : $||g||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} = \operatorname{Sup}_{||P||_\infty \leqslant 1} |\sum_\lambda \hat{P}(\lambda)\ g\ (\lambda)|$. Ce qui nous donne :

$$||g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \sum_{\lambda\ \varepsilon(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} |\ g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)|$$

en tenant compte de (6) on obtient :

$$||g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant (\tilde{q}-1)^{-1} \sum_{\lambda\varepsilon(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} |\tilde{q}\tilde{c}(\lambda) - c(\lambda)|$$

D'après la définition de $\tilde{c}(\lambda)$ et $c(\lambda)$ et les inégalités (4) et (5) on a :

$$||g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant (\tilde{q}-1)^{-1} \sum_{\lambda\varepsilon(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \left(\sum_{s=2}^{\infty} \beta^s [\tilde{q}R_s(\lambda,\tilde{\Lambda}) + R_s(\lambda,\Lambda)]\right)$$

or $R_s(\lambda,\Lambda) \leqslant R_s(\lambda,\tilde{\Lambda})$ et $R_s(\lambda,\tilde{\Lambda}) = R_s(-\lambda,\tilde{\Lambda})$.

D'où :

$$||g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \left[\frac{2(\tilde{q}+1)}{\tilde{q}-1}\right] \sum_{\lambda\varepsilon\Lambda_j} \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s\ R_s(\lambda,\tilde{\Lambda})$$

Or nous avons :

$$\sum_{\lambda\varepsilon\Lambda_j} R_s(\lambda,\tilde{\Lambda}) \leqslant R^{2,j}_{s+1}\ (0,\tilde{\Lambda}) \qquad s \geqslant 2$$

ce qui d'après l'hypothèse (ii) entraîne :

$$||g_1(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \delta \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s\ R^2_{s+1}(0,\Lambda) \leqslant \delta \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s\ B^{s+1}$$

avec $\delta = \dfrac{2(\tilde{q}+1)}{\tilde{q}-1}$.

En prenant $\beta = \dfrac{1}{K\,B^3}$, $K > 1$, nous avons :

$$\sum_{s=2}^{\infty} \beta^s \, B^{s+1} \leqslant \frac{\beta^2 \, B^3}{1-\beta \, B} \leqslant \beta \, \frac{1}{K-1}$$

Soit maintenant :

$$g = \frac{g_1}{\beta}$$

Nous avons alors :

$$\| g - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)} \leqslant \frac{\delta}{K-1}$$

(b_1) et $(\tilde{b}_1)$ nous donne :

$$\| g \|_{B(\mathbb{Z})} \leqslant \delta \, \beta^{-1} = \delta \, K \, B^3$$

pour $o < \alpha < 1$ donné, il suffit de choisir K tel que $\dfrac{\delta}{K-1} < \alpha$ pour avoir les propriétés (a) et(b) du théorème.
Si on choisit $\alpha < \frac{1}{4}$ la propriété (vi)' de page 16 est satisfaite, ce qui implique que $\Lambda \cup - \Lambda$ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)_{j \geqslant 1}$.

Remarques

1°) Le résultat du théorème subsiste s'il existe $\tilde{q} > 1$ tel que $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j \geqslant 1} \tilde{\Lambda}_j$ satisfait :

(i) $R_s(0,\tilde{\Lambda}) \leqslant B^s \quad s \geqslant 1 \quad (B > 1)$

(ii) $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{k=1}^{r} \tilde{\Lambda}^{(k)}$; $\tilde{\Lambda}^{(k)} = \bigcup_{j \varepsilon J_k} \tilde{\Lambda}_j$ $(1 \leqslant k \leqslant r \, , \, J_k \cap J_\ell = \emptyset \quad k \neq \ell)$

avec chaque $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ satisfaisant la condition du théorème relativement à la partition $(\tilde{\Lambda}_j)_{j \varepsilon J_k}$.

En effet, soit $o < \alpha < 1$, $\xi \in \mathbb{T}^\infty$ $\xi = (\xi_j)_{j \geqslant 1}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \geqslant 1}$, $\varepsilon_j \in \{0,1\}$.
On note $\xi^{(k)} = (\xi_j)_{j \varepsilon J_k}$ et $\varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_j)_{j \varepsilon J_k}$ $1 \leqslant k \leqslant r$.

Pour $\xi^{(k)}$ et $\varepsilon^{(k)}$, k fixe soit, $g_1^{(k)} \in B(\mathbb{Z})$ défini dans la preuve du théorème 2.2.

Posons :

$$g_j = \sum_{k=1}^{r} g_j^{(k)}$$

pour $j \in J_k$ nous avons :

$$||g_j(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant ||g_j^{(k)}(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} ||g_j^{(\ell)}||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)}$$

On peut pour toutes les conditions portant sur R_s et R_s^2 prendre la même constante $B > 1$.

D'après la démonstration du théorème 2.2 nous avons :

$$||g_j^{(k)}(\lambda) - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \frac{\beta^2 B^3}{1-\beta B}$$

D'autre partposons $\delta = \frac{2(\tilde{q}+1)}{\tilde{q}-1}$; on a la majoration suivante

$$||g_j^{(\ell)}||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \sum_{\lambda \in (\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} |g_j^{(\ell)}(\lambda)| \leqslant \delta \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s R_s(\lambda, \tilde{\Lambda}^{(\ell)}) ;$$

et si $\ell \neq k$ et $j \in J_k$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s R_s(\lambda, \tilde{\Lambda}^{(\ell)}) \leqslant \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s R_{s+1} \left[0, (\tilde{\Lambda}^{(\ell)} \cup \tilde{\Lambda}^{(k)})\right]$$

mais nous avons :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} R_{s+1}\left[0, \tilde{\Lambda}^{(\ell)} \cup \tilde{\Lambda}^{(k)}\right] \leqslant (r-1)\ R_{s+1}(0, \tilde{\Lambda})$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{r} ||g_j^{(\ell)}||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \delta\ (r-1) \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s R_{s+1}(0,\tilde{\Lambda}) \leqslant \delta(r-1) \sum_{s=2}^{\infty} \beta^s B^{s+1} \leqslant \delta(r-1)\ \frac{\beta^2 B^3}{1-\beta B}$$

Nous avons finalement pour $\beta = \frac{1}{K B^3}$, $K > 1$

$$||g_j - \beta\ \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} \leqslant \beta\ \frac{\delta r}{K-1}$$

$0 < \alpha < 1$ étant donné on choisit K tel que $\frac{\delta r}{K-1} < \alpha$. Soit alors $g = \frac{g_j}{\beta}$ ce qui nous donne :

$$||g(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} < \alpha$$

2°) Si on suppose dans le théorème 2.2 que $\tilde{\Lambda}$ satisfait de plus :

$$R_s(\gamma,\tilde{\Lambda}) \leqslant B^s \qquad s \geqslant 1 \qquad (\gamma \in \mathbb{Z})$$

$g \in B(\mathbb{Z})$ défini dans ce théorème possède aussi la propriété suivante :

$$|g(\lambda)| \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad \text{si} \quad \lambda \notin (\tilde{\Lambda} \cup -\tilde{\Lambda})$$

En effet, d'après les calculs du théorème 2.2 nous avons :

$$g(\lambda) = \frac{1}{\beta(\tilde{q}-1)} \left[\tilde{q}\,\tilde{c}(\lambda) - c(\lambda)\right] \quad \text{si} \quad \lambda \notin (\tilde{\Lambda} \cup -\tilde{\Lambda})$$

Pour les mêmes choix de β et de K nous aurons :

$$|g(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\beta}\,\frac{\delta}{2}\,\frac{\beta^2 B^3}{1-\beta B} \leqslant \frac{\delta}{2(K-1)} \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

Nous avons la même chose si Λ est comme dans la remarque précédente.

Remarque et commentaire

Les ensembles de type (S) que nous avons construit sont la réunion des blocs de progressions arithmétiques. La caractérisation par des propriétés arithmétiques des ensembles de type (S) est un problème ouvert.

Nous pouvons, néanmoins donner quelques éléments de réponses aux deux questions suivantes :

1°) Est-ce que toute réunion de blocs de progressions arithmétiques peut-être un ensemble de type (S) ?

L'exemple suivant apporte une réponse négative à cette question :

Contre exemple : Si $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1}\Lambda_j$, $\overline{\lim_{j\to+\infty}}\ \mathrm{card}\ \Lambda_j = +\infty$ avec les Λ_j contenus dans une même progression arithmétique infinie alors Λ n'est pas de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$.

Il suffit de vérifier que $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1}\Lambda_j$ où les Λ_j sont de la forme :

$$\Lambda_j = (\lambda_j + [0, N_j]) \cup (-\lambda_j - [0, N_j]) \qquad j \geqslant 1$$

avec $(N_j)_{j\geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs et $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers positifs tels que $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ $j \neq k$, n'est pas de type (S).

D'après un théorème de Wiener ([1] page 42) nous avons le résultat suivant : si μ est une mesure de Radon sur $\mathbb{T}$, alors :

$$(1) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N\leq n\leq N} \hat{\mu}(m+n) = \mu(\{o\})$$

uniformément par rapport à m.
Supposons que $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S). Soit $(g_j)_{j\geq 1}$ telle que g_j est constante et égale à ± 1 sur Λ_j , on a $(g_j)_{j\geq 1} \varepsilon \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$. Il existe donc une mesure μ telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda_j \ , \quad j \geq 1)$$

Pour un choix convenable de ± 1 la mesure ainsi obtenue ne satisfait pas (1). Ce qui entraîne que Λ ne peut être de type (S).

2°) Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$. Notons par A_j la plus petite progression arithmétique centrée à l'origine contenant Λ_j. Existe-t-il des ensembles Λ tels que les Λ_j ne soient pas des progressions arithmétiques centrées à l'origine Avec :

a) $A = \bigcup_{j\geq 1} A_j$ n'est pas type (S) relativement à $(A_j)_{j\geq 1}$.

b) $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$

L'exemple le plus simple d'un tel ensemble est donné par :

$$\Lambda = \{3^j\}_{j\geq 1} \cup \{3^j + 1\}_{j\geq 1} .$$

Λ est un ensemble de Sidon. Soit $\Lambda_j = \{3^j, 3^j + 1\}_{j\geq 1}$

On voit que les A_j sont des progressions arithmétiques de raison égale à 1. Ce qui entraîne que $A = \bigcup_{j\geq 1} A_j$ n'est pas de type (S). Tandis que Λ est de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

Etant donné $(\Lambda'_k)_{k=1}^n$ des blocs q-lacunaires de progressions arithmétiques centrées à l'origine, $q > 3$. Ecrivons

$$(\Lambda'_k = \{\ell\ f_k\}_{\ell=1}^{n_k})$$

considérons le sous ensemble Λ défini par :

(1) $\gamma \in \Lambda$ si $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \ell_k f_k$ $\ell_k \in \mathbb{Z}$ $|\ell_k| < n_k$ les ℓ_k sont non tous nuls.

Par la méthode employée dans [B] (cf. ensembles de type (S) faibles, chapitre 3), nous pouvons construire des blocs définis par (1) et satisfaisant (a) et (b).

Si $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ on a vu que pour $f \in L^\infty_\Lambda$:

$$f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} = \sum_{j\geq 1} f_j(x)$$

$\sum^N f_j$ convergent uniformément vers f. Mais il existe des exemples où non seulement $\sum_1^N f_j$ mais aussi les sommes partielles de la série de Fourier de f convergent uniformément pour toute fonction f continue à spectre dans Λ et cependant $\sum_{j\geq 1} \| f_j \| = +\infty$.

Pour $\theta \in \mathbb{Z}$ $\theta > 3$, $\Lambda = \{\theta^j + \theta^k\}_{j\neq k}$ est un tel ensemble. En effet on sait [7] que si f est une fonction continue à spectre dans Λ alors sa série de Fourier converge uniformément. Considérons maintenant la partition naturelle de Λ définie par :

$$\Lambda_j = \{\theta^j + \theta^k\}_{o\leq k\leq j-1} = \theta^j + \{\theta^k\}_{o\leq k\leq j-1}$$

Il suffit de montrer que Λ n'est pas de type (S) relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$. Les Λ_j ont une même constante de Sidon de sorte que si Λ est de type (S) alors Λ sera un ensemble de Sidon. Or il est facile de vérifier que la "condition de maille" n'est pas satisfaite par Λ. Donc Λ n'est pas de type (S) relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

<u>Problème</u> : Plus généralement nous pouvons poser la question pour les ensembles $E^{(k)}$ définis par :

$$\gamma \in E^{(k)} \qquad \gamma = \pm\, \theta^{n_1} \pm \theta^{n_2} \pm \ldots \pm \theta^{n_k}, \quad n_1 > n_2 > \ldots . > n_k$$

$$n_j \in \mathbb{N} \qquad (\theta \in \mathbb{N})$$

CHAPITRE 3

ENSEMBLES DE TYPE (S) DANS $\mathbb{R}$

Généralités

Pour les différentes notions rappelées dans cette partie, on pourra consulter [1] . Les notations qui ne seraient pas définies explicitement sont celles de [1] .

Soit $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. $\hat{f}$ désignera sa transformée de Fourier au sens des distribution définies par :

$$< \hat{h}, \hat{f} > = \int_{\mathbb{R}} h(x)\ f(x)\ dx$$

pour toute fonction $h \in L^{1}(\mathbb{R})$.

DEFINITION : On appellera le spectre de f et on notera $sp(f)$ le support de sa transformée de Fourier $\hat{f}$; $sp(f) = \Sigma \hat{f}$.

Pour une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}$ notons par $\tau(f)$ l'espace vectoriel engendré par les translatées de f .

DEFINITION 3.1 : On appelle spectre uniforme de f , l'ensemble $\sigma(f)$ des nombres réels λ tel que $e^{i\lambda x}$ appartient à l'adhérence de $\tau(f)$ pour la norme de convergence uniforme.

DEFINITION 3.2 : On appelle le spectre faible étoile de f , l'ensemble $\sigma_{*}(f)$ des nombres réels λ tel que $e^{i\lambda x}$ appartient à l'adhérence de $\tau(f)$ pour la topologie faible définie sur $L^{\infty}(\mathbb{R})$ par la dualité (L^{1}, L^{∞}).

PROPRIETE 3.1 : Soit f une fonction bornée et supposons que son spectre, $sp(f)$ est un sous-ensemble fermé et discret de $\mathbb{R}$, alors :

(i) les trois notions de spectres définies ci-dessus coïncident.

On sait ([1], p. 159 et p. 170) que pour $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$\sigma(f) \subset sp(f) \qquad \text{et} \qquad \sigma_*(f) = sp(f)$$

D'autre part ([1], p. 169) $\sigma(f)$ contient les points isolés de $sp(f)$. Comme $sp(f)$ est fermé et discret, nous avons (i).

Dans la suite, sauf mention contraire Λ désignera un sous ensemble fermé discret $\mathbb{R}$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, considérons la fonction à support compact $A_\lambda \in A(\mathbb{R})$ satisfaisant :

(a) l'intersection du support de A_λ avec Λ est exactement $\{\lambda\}$

(b) $A_\lambda(\lambda) = 1$

DEFINITION 3.3 : Soit f une fonction bornée à spectre dans un ensemble Λ fermé, discret . On appelle le coefficient de Fourier de f au point λ appartenant à Λ, le nombre complexe a_λ défini par :

(1) $$a_\lambda = \langle A_\lambda , \hat{f} \rangle$$

Conséquences

1°) le nombre complexe a_λ ne dépend pas de la fonction particulière A_λ choisie et qui satisfait les conditions (a) et (b).

2°) $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ détermine f. Plus précisément si a_λ est égale à zéro pour tout λ appartenant à Λ alors f est égale à zéro presque partout.

3°) si f est une fonction presque périodique (Bohr) la notion classique de coefficient de Fourier d'une telle fonction coïncide avec celle définie

On appelle la série de Fourier d'une fonction bornée f à spectre dans Λ la série formelle

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$$

où les a_λ sont définis par (1).

Remarquons que si P est un polynôme trigonométrique sa série de Fourier est égale à lui-même.

PROPRIETE 3.2 : Soit f une fonction bornée à spectre dans un ensemble Λ fermé discret si $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ est sa série de Fourier, nous avons alors :

(i) la somme des carrés de ses coefficients de Fourier est finie :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2 < +\infty$$

(ii) toute suite de carré sommable $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est la restriction à Λ de transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Pour démontrer (i) considérons le noyau de Fejer K_α. Soit $f \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R})$ $f \sim \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$. Nous avons :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\hat{K}_\alpha(\lambda)|^2 \cdot |a_\lambda|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{K_\alpha * f}(\lambda)|^2 \leqslant ||f||^2_\infty$$

en passant à la limite pour α tendant vers l'infini, on trouve :

$$(\Sigma |a_\lambda|^2)^{1/2} < +\infty$$

(ii) se démontre par dualité.

Remarque : Une telle fonction est en particulier une fonction presque périodique au sens de Besicovitch [9] .

$\mathbb{R}_d$ désigne $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète. Le dual de $\mathbb{R}_d$ est un groupe compact $\tilde{\mathbb{R}}$. L'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$ est continue, d'image dense. On appelle $\tilde{\mathbb{R}}$, le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.

PROPRIETE 3.3 : Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Alors :

(*) $B(\Lambda)$ est le même si l'on considère $B(\mathbb{R})$ ou $B(\mathbb{R}_d)$

(**) si $g \in B(\Lambda)$ on a :

(1) $$\|g\|_{B(\Lambda)} = \sup_{\substack{P \in P_\Lambda \\ \|P\|_\infty \leq 1}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{P}(\lambda)\, g(\lambda) \right|$$

Preuve :

(*) est évident.

Pour démontrer (**) il suffit de remarquer que $B(\Lambda) = A(\Lambda)$ isométriquement et que le dual de $A(\Lambda)$ s'identifie isométriquement à P_Λ.

Dans la suite nous évaluerons souvant $\|g\|_{B(\lambda)}$ par (1).

Ensembles de type (S) faibles dans $\mathbb{R}$

Soit Λ un sous ensemble discret et fermé de
Nous supposerons que Λ est de la forme :

$$\Lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}, \quad \lambda_i < \lambda_{i+1}, \quad i \geq 1 .$$

Soit $(\Lambda_j)_{j>1}$ une partition de Λ avec

$$\text{card } \Lambda_j < +\infty \quad j \geq 1 ; \text{ et } \quad \overline{\lim_{j\to+\infty}} \text{ card } \Lambda_j = +\infty$$

Considérons une fonction bornée à spectre dans Λ . Si $\sum_{\lambda\varepsilon\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$ désigne sa série de Fourier, on l'écrira sous la forme $\sum_{j\geqslant 1} f_j(x)$:

$$f_j(x) = \sum_{\lambda\varepsilon\Lambda_j} a_\lambda e^{i\lambda x}$$

f_j est alors un polynôme trigonométrique à spectre dans Λ_j .

DEFINITION 3.4 : Soit Λ un sous-ensemble fermé, discret de $\mathbb{R}$. On dira que Λ est un ensemble de type (S) faible relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$ s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ on ait :

$$(1) \qquad \sum_j ||P_j||_\infty < C||P||_\infty$$

la constante C ne dépendant que de Λ et de partition $(\Lambda_j)_{j>1}$.

Conséquences

1°) Si on prend la partition ponctuelle, l'on obtient la notion de l'ensemble de Sidon dans $\mathbb{R}$ discret ([10], [11]).

2°) Nous avons les conséquences déjà indiquées pour le cas de $\mathbb{Z}$ (chapitre 1, page 6).

Nous avons des propriétés analogue à celles indiquées dans le théorème 1.2. du chapitre 1. Pour cela il suffit de remplacer $\mathbb{T}$ et $\mathbb{Z}$ par $\hat{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}_d$ respectivement. Nous avons par exemple le théorème suivant :

THEOREME 3.1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit de type (S) faible est que si $o < \eta < 1/2$, alors, pour tout $\xi = (\xi_j)_{j\geqslant 1}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ $j \geqslant 1$ et $\varepsilon_j = \pm 1$, $j \geqslant 1$ il existe $g \in B(\mathbb{R}_d)$ tel que :

$$\sup_{j\geqslant 1} ||g - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} < \eta$$

<u>Remarque</u> : Comme dans le cas de $\mathbb{Z}$ nous avons :

1°). Si les blocs sont symétriques, il suffit de prendre $\eta < 1$

2°) On peut prendre $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ $j \geq 1$ dans le théorème 3.1 à condition que l'on suppose $o \leq \eta \leq 1/4$.

Nous allons développer maintenant une méthode de construction d'ensembles de type (S).

<u>DEFINITION 3.5</u> : Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. On dira qu'un polynôme trigonométrique G est <u>η-adapté</u> à Λ s'il possède les propriétés suivantes :

a) $G \geq o$ et $\hat{G}(o) = 1$

b) le spectre de G, soit $\tilde{\Lambda}$, contient Λ

c) $\|\hat{G} - 1\|_{B(\Lambda)} \leq \eta$.

<u>Remarque</u> : Il n'est pas difficile de voir, à l'aide de la propriété 3.3, que (c) est équivalent à :

$$\|P * G - P\|_\infty < \eta \, \|P\|_\infty \qquad (P \in P_\Lambda)$$

où $P * G(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{P}(\lambda)\, \hat{G}(\lambda)\, e^{i\lambda x}$.

<u>PROPOSITION 3.1</u> : Soit η un nombre réel positif alors tout sous ensemble fini de $\mathbb{R}$ possède un polynôme η-adapté.

<u>Preuve</u> :

Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ un sous ensemble fini de $\mathbb{R}$. Pour construire un polynôme adapté à Λ nous allons suivre [1] (page 165). Soit

On peut trouver $f_1, \ldots, f_q$ des nombres réels, indépendants sur les rationnels et que chaque λ_i, $1 \leq i \leq N$, s'obtient comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de $f_1, \ldots, f_q$:

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{i,k} f_k \qquad \alpha_k \in \mathbb{Z} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,N .$$

Si F_m désigne le polynôme de Fejer d'ordre m, considérons le polynôme $G(x)$ défini par :

$$G(x) = \prod_{k=1}^{q} F_m(f_k x)$$

Pour ε positif donné, on peut choisir m tel que G possède les propriétés suivantes [1] :

a) G est positif et $\hat{G}(o) = 1$

b) le spectre $\tilde{\Lambda}$ de G est contenu dans le groupe engendré par Λ.

c) pour tout $\lambda \in \Lambda$ nous avons :

$$1 - \varepsilon < \hat{G}(\lambda) < 1$$

Vérifions que par un choix convenable de ε, G sera un polynôme η-adapté.

Soit P un polynôme à spectre dans Λ :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, e^{i\lambda_i x} .$$

Nous avons :

$$P * G(x) - P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \hat{G}(\lambda_i) e^{i\lambda_i x} - \sum_{i=1}^{N} a_i \, e^{i\lambda x}$$

d'où :

$$||P * G - P||_\infty \leq \sup_{1 \leq i \leq N} |\hat{G}(\lambda_i) - 1| \sum_{i=1}^{N} |a_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq N} |\hat{G}(\lambda_i) - 1| . S(\Lambda) . ||P||_\infty$$

avec $S(\Lambda)$ la constante de Sidon de $\Lambda^{(*)}$.

(*) $\Lambda \subset \hat{\mathbb{R}}$ est un ensemble de Sidon (discret) s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ on ait :

$$(1) \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{P}(\lambda)| \leq C ||P||$$

On appelle constante de Sidon de Λ, $S(\Lambda)$ la borne inférieure des constantes C pour laquelle (1) est vérifié.

D'après (c)' , nous avons :

$$||P * G - P||_\infty \leqslant S(\Lambda).\varepsilon.||P||_\infty$$

Si pour $\eta > o$ donné, on prend $\varepsilon \leqslant \frac{\eta}{S(\Lambda)}$, la construction précédente montre que G est un polynôme η-adapté.

THEOREME 3.2 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ un sous ensemble discret fermé de $\mathbb{R}$. Si Λ possède les propriétés suivantes :

(i) pour $\eta < 1/4$ les Λ_j possèdent des polynômes η-adaptés. Soit G_j, $(j \geqslant 1)$ ces polynômes.

(ii) $\tilde{\Lambda}_j \cap \tilde{\Lambda}_k = \{o\}$ $j \neq k$ où $\tilde{\Lambda}_j$ est le spectre de G_j , $j \geqslant 1$

(iii) $\tilde{\Lambda} \cap - \tilde{\Lambda} = \emptyset$ où $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j\geqslant 1} \tilde{\Lambda}_j$

(iv) $\overline{\lim\limits_{j\to+\infty}} \operatorname{card} \Lambda_j = +\infty$

(v) $R_s^2(0,\tilde{\Lambda}) \leqslant B^s$ $s \geqslant 3$ $(B > 1)$

Alors Λ est un ensemble de type (S) faible relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$.

Preuve :

Nous allons montrer que les conditions du théorème 3.1 (remarque 2) sont satisfaites.

Soit $\xi = (\xi_j)_{j\geqslant 1}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$, $\varepsilon_j \in \{0,1\}$. Considérons :

$$1 + K_j(x) = G_j(x - \xi_j) \quad , \quad j \geqslant 1$$

Soit alors, pour $M \in \mathbb{N}$,

$$\prod_M(x) = \prod_{j=1}^{M} [1 + \beta\, \varepsilon_j\, K_j(x)] \;,\; o < \beta < 1$$

(1) $$\prod_M(x) = 1 + \beta \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j\, K_j(x) + \sum_{\gamma} C_M(\gamma)\, e^{i\gamma x}$$

$G_j \geqslant o$ entraîne que $1 + \beta \varepsilon_j K_j(x) \geqslant o$ si $o < \beta < 1$, ce qui nous donne :

$$\mathfrak{M}(\Pi_M) = \hat{\Pi}_M(o)$$

Les conditions (ii) – (v) impliquent $R_s(0,\Lambda) = 0 \quad s \geqslant$ (cf. Lemme 2.) ce qui nous donne, d'après (1) :

$$(\Pi_M) = \hat{\Pi}_M(o) = 1 \quad , \quad (M \in \mathbb{N})$$

En prenant la limite vague d'une sous suite de (Π_M) on obtient une mesure ν sur le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$. Soit g_1 sa transformée de Fourier en tant qu'un élément de $M(\tilde{\mathbb{R}})$. Calculons pour tout j,

$$||g_1 - \beta\, \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)}$$

Pour cela il suffit d'évaluer :

$$||\hat{\Pi}_M(\lambda) - \beta\, \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} \quad , \quad (M \geqslant j)$$

pour chaque j.

D'après la propriété 3.3 (page 53) on est ramené à évaluer :

$$\sup_{\substack{P \in P_{\Lambda_j} \\ ||P||_\infty \leqslant 1}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\, \hat{\Pi}_M(\lambda) - \beta \varepsilon_j\, P(\xi_j) \right|$$

(1) entraîne :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\, \hat{\Pi}_M(\lambda) = \beta \varepsilon_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\, \hat{K}_j(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\, C_M(\lambda)$$

ce qui nous donne :

$$\left|\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\, \hat{\Pi}_M(\lambda) - \beta \varepsilon_j P(\xi_j)\right| < \beta \varepsilon_j \left|\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda) \hat{K}_j(\lambda) - P(\xi_j)\right| + \left|\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda) C_M(\lambda)\right|$$

Or :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\hat{K}_j(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\hat{G}_j(-\lambda)(\xi_j,\lambda) = P * \check{G}_j(\xi_j) \text{ où } \check{G}_j(x) = G_j(-x)$$

G_j étant un polynôme η-adapté, nous avons :

$$(2) \qquad \beta \varepsilon_j \left| \sum \hat{P}(\lambda)\, \hat{K}_j(\lambda) - P(\xi_j) \right| = \beta \varepsilon_j \left| P * \check{G}(\xi_j) - P(\xi_j) \right| \leqslant \beta\, \eta$$

D'autre part :

(3) $\quad \left| \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda) C_M(\lambda) \right| \leqslant \sup_{\lambda \in \Lambda_j} |\hat{P}(\lambda)|\ C_M(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\ C_M(\lambda)$

Pour un calcul analogue à celui fait pour le théorème 2.2 on trouve pour $\beta = \dfrac{1}{K\,B^3}$, $K > 1$:

(4) $$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |C_M(\lambda)| \leqslant \frac{\beta}{K-1}$$

En tenant compte de (2), (3) et (4) nous avons donc :

$$\sup_{\substack{P \in \hat{P}_{\Lambda_j} \\ \|P\|_\infty \leqslant 1}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{P}(\lambda)\ \hat{~}_M(\lambda) - \beta \varepsilon_j\, P(\xi_j) \right| \leqslant \beta \left(\eta + \frac{1}{K-1}\right)$$

pour tout $M \geqslant j$. Ce qui nous donne :

$$\| \hat{\Pi}_M(\lambda) - \beta\, \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) \|_{B(\Lambda_j)} \leqslant \beta \left(\eta + \frac{1}{K-1}\right) \qquad (M \geqslant j)$$

Soit maintenant $g = \dfrac{g_1}{\beta}$, $g \in B(\mathbb{R}_d)$, et η' tel que $\eta < \eta' < \frac{1}{4}$, si on choisit $K > 1$ convenablement, on peut avoir $\eta + \frac{1}{K-1} < \eta'$.

On obtient donc :

$$\| g - \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) \|_{B(\Lambda_j)} < \eta' < \frac{1}{4}$$

Ce qui achève la preuve.

Remarques

1°) Il suffit d'avoir $\eta < \frac{1}{2}$. On appliquera alors le théorème 3.1. Les calculs se font comme on vient de les faire, seulement, ils sont plus longs.

2°) Si les blocs sont symétriques et si on remplace la condition (iii) par $\tilde{\Lambda}_j$ $(j \geqslant 1)$ symétrique, le théorème reste vrai avec $\eta < 1$.

3°) On peut faire des remarques analogues à celles faites pour le théorème 2.2.

4°) Considérons les ensembles définis à la page 48. En s'inspirant de la méthode de la proposition 3.1 et en appliquant le théorème 3.2, on peut montrer qu'il existe, dans $\mathbb{Z}$, des ensembles de type (S) qui ne sont contenus dans aucun ensemble de type (S) constitué des blocs de progressions arithmétiques centrés à l'origine.

Nous allons donner un exemple d'ensemble de type (S) faible.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Considérons une partition $(F_j)_{j\geqslant 1}$ de $\mathbb{N}$, card $F_j < +\infty$ $j \geqslant 1$ et une suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers positifs non bornés. Définissons Λ_j, $j \geqslant 1$ par :

(2) $$\Lambda_j = \{ \sum_{k\in F_j} \alpha_k f_k \; ; \; \alpha_k \in \mathbb{Z} \setminus \{o\} \; , \; \sup_k |\alpha_k| < n_j \}$$

<u>PROPOSITION 3.2</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels indépendants sur les rationnels. Pour toute partition $(F_j)_{j\geqslant 1}$ de $\mathbb{N}$, card $\Lambda_j < +\infty$, $j \geqslant 1$ et pour toute suite non bornée d'entiers positifs $(n_j)_{j\geqslant 1}$, l'ensemble $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ où Λ_j est défini par (2), est un ensemble de type (S) faible.

<u>Preuve</u> :

Nous allons montrer que Λ satisfait les conditions du théorème 3.2 (remarque 3). Soit $o < \eta < \frac{1}{2}$ fixe; pour chaque Λ_j, $(j \geqslant 1)$ considérons le polynôme G_j défini par la propsotion 3.1. Les G_j sont des polynômes η-adaptés. D'après la construction de ces polynômes ([1], page 165), comme les f_j sont indépendants sur les rationnels, on

$$\tilde{\Lambda}_j \cap \tilde{\Lambda}_k = \{o\} \; , \; j \neq k \; , \text{ et } \; \tilde{\Lambda} = \bigcup_{j\geqslant 1} \tilde{\Lambda}_j \text{ est symétrique}$$

Il est facile à voir que l'hypothèse $(f_j)_{j\geqslant 1}$ indépendant entraîne :

$$R_s^2 (0, \tilde{\Lambda}) = 0 \qquad s \geqslant 3 \; ,$$

Les hypothèses du théorème 3.2 étant ainsi vérifiées, Λ est un ensemble de type (S) faible.

<u>Remarque</u>

Si On construit des $\Lambda_j \subset \mathbb{R} \setminus \{o\}$ par récurrence avec Λ_1 quelconque et $\mathcal{G}_p(\Lambda_j) \cap \mathcal{G}_p(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_{j-1}) = \{o\}$ $j > 1$ où $\mathcal{G}_p(\Lambda)$ désigne le groupe engendré par Λ, en adaptant la démonstration de la proposition

3.2, on peut démontrer que $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) faible relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

Le théorème suivant nous donne une propriété intéressante des ensembles de type (S) faible.

THEOREME 3.3 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble de type (S) faible, alors toute fonction mesurable bornée, à spectre dans Λ est presque périodique (Bohr).

Preuve :

Il suffit d'adopter la démonstration du théorème 1.1.

Ensembles de type (S) fort

Soit Λ un sous ensemble discret fermé de $\mathbb{R}$ et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ, (card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geq 1$).

DEFINITION 3.6 : On dira que Λ est un ensemble de type (S) fort relativement à la partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ si pour tout $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ $g = (g_j)_{j\geq 1}$ on peut trouver une mesure bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \Lambda_j \quad (j \geq 1)$$

Conséquences

1°) Un ensemble de type (S) fort est en particulier un ensemble de type (S) faible. Ceci résulte du théorème 3.1 et du fait que toute mesure sur $\mathbb{R}$ est en particulier une mesure sur le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.

2°) Si $(\Lambda_j)_{j>1}$ est une partition de Λ avec card $\Lambda_j = 1$, $j > 1$ on retrouve la définition d'un ensemble de Sidon topologique ([10] , [11]) 3°) On peut trouver une constante C telle que :

$$||\hat{\mu}||_{B(\Lambda)} \leq C||g||_{\underset{\ell^\infty}{\bigoplus} B(\Lambda_j)}$$

4°) Nous avons les propriétés 2°), 3°), 4°), 5°), 6°) de la page 6 (chapitre 1)

Le théorème suivant nous permet de caractériser les ensembles de type (S) fort parmi les ensembles de type (S) faible. Rappelons la définition de compact associé.

DEFINITION 3.7 : Soit Λ un sous ensemble quelconque de $\mathbb{R}$ et K un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$. On diar que K est associé à Λ, s'il existe une constante $C = C(\Lambda,K)$ telle que pour tout polynôme trigonométrique P, à spectre dans Λ :

$$||P||_\infty \leq C||P||_{K,\infty}$$

où $||P||_{K,\infty} = \underset{x\in K}{\text{Sup}} |P(x)|$.

On dira alors que le couple (C,K) est adapté à Λ.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME ([10], page 75)

Si Λ possède un compact associé et si Λ_0 est un sous ensemble fini de alors $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda_0$ possède également un compact associé. Ce dernier compact contenant le premier.

THEOREME 3.3 : Soit Λ un sous ensemble fermé discret et dénombrable de $\mathbb{R}$ et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ, card $\Lambda_j < +\infty$, $j \geq 1$. Les proriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est de type (S) faible et possède un compact associé

(ii) Λ est de type (S) fort

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Soit $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$, $g = (g_j)_{j\geqslant 1}$, montrons qu'il existe une mesure de Radon μ, bornée sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda) , \qquad \lambda \in \Lambda_j \quad (j \geqslant 1)$$

Comme $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$, on peut trouver une suite de mesures $(\nu_j)_{j\geqslant 1}$ telles que :

(1) $$\sup_{j\geqslant 1} ||\nu_j||_{M(\mathbb{R})} < +\infty \quad \text{et} \quad \hat{\nu}_j(\lambda) = g_j(\lambda) \text{ si } \lambda \in \Lambda_j, \ (j\geqslant 1)$$

La donnée de g (ou $(\nu_j)_{j\geqslant 1}$), nous permet de définir une forme linéaire ℓ :

$$\ell(P) = \sum_j \int_{\mathbb{R}} P_j(x).d\nu_j(x) , \quad P \in P_\Lambda , \quad P(x) = \sum_j P_j(x)$$

Nous avons :

$$|\ell(P)| \leqslant \left| \sum_j \int_{\mathbb{R}} P_j \, d\nu_j(x) \right| \leqslant \sup_j ||\nu_j||.A.||P||_\infty$$

Si (C,K) est associé à Λ, on aura :

$$|\ell(P)| \leqslant \sup_j ||\nu_j||.A.||P||_\infty < \sup_j ||\nu_j||.A.C||P||_{K,\infty}$$

ℓ est donc continue pour la norme de convergence uniforme sur K. Il existe μ une mesure portée par K telle que $\ell(P) = \int_{\mathbb{R}} P.d_\mu$, $P \in P_\Lambda$. En prenant pour P les monômes $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \Lambda$ on obtient :

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int e^{i\lambda x} d\nu_j(x) = g_j(\lambda) \quad \lambda \in \Lambda_j \quad (j > 1)$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons que Λ est de type (S) fort. Ceci entraîne que Λ est de type (S) faible. Il nous reste à montrer que Λ possède un compact associé. Nous allons faire une démonstration par l'absurde.

Supposons donc que Λ n'a pas de compact associé. Soit $K_1 = [-1, +1]$, on peut alors trouver un polynôme trigonométrique $P^{(1)}$ à spectre dans Λ tel que :

$$||P^{(1)}||_\infty = 1 \qquad \text{et} \qquad ||P^{(1)}||_{K_1,\infty} < 1$$

Soit $\Lambda^{(1)} = \bigcup_j \Lambda_j$ tel que le spectre de $P^{(1)}$ soit contenu dans $\Lambda^{(1)}$.
D'après le lemme, $\Lambda \setminus \Lambda^{(1)}$ n'a pas de compact associé.
Soit $K_2 = [-2, +2]$, il existe alors un polynôme $P^{(2)}$ à spectre dans $\Lambda \setminus \Lambda^{(1)}$ tel que :

$$||P^{(2)}||_\infty = 1 \qquad \text{et} \qquad ||P^{(2)}||_{K_2,\infty} < \frac{1}{2}$$

Ainsi de proche en proche, on construit une suite de compact $K_n = [-n, +n]$ et une suite de polynômes $P^{(n)}$ à spectre dans $\Lambda \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \Lambda^{(j)}$ tels que :

(2) $$||P^{(n)}||_\infty = 1 \qquad ||P^{(n)}||_{K_n,\infty} < \frac{1}{2^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ecrivons pour chaque n, $P^n(x)$ sous la forme :

$$P^{(n)}(x) = \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} P_j(x)$$

Soit ξ_j tel que $|P_j(\xi_j)| \geqslant \frac{1}{2}||P_j||_\infty$ et soit α_j définie par :

$$|P_j(\xi_j)|\, e^{i\alpha_j} = P_j(\xi_j)$$

Considérons $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$, $g = (g_j)_{j\geqslant 1}$ définie par :

$$g_j(\lambda) = e^{-i\alpha_j}\,(\xi_j,\lambda)\,, \qquad \lambda \in \Lambda_j \qquad (j \geqslant 1)$$

Par hypothèse, il existe une mesure μ telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda) \qquad \lambda \in \Lambda_j$$

d'après (2)

(3) $$\int P^{(n)}\, d_\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or nous avons :

$$\int P^{(n)}(x) d_\mu(x) = \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} \int P_j(x) d_\mu(x) = \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \hat{P}_j(\lambda)\hat{\mu}(\lambda)$$

$$= \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} |P_j(\xi_j)|$$

ce qui entraîne :

$$1 = ||P^{(n)}||_{\infty} \leq \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} ||P_j||_{\infty} \leq 2 \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} |P_j(\xi_j)| = 2 \int P^{(n)}(x)\, d\mu(x)$$

pour tout n .

D'après (3) ceci est impossible.

Ce qui achève la preuve.

<u>Corollaire</u> : Soit Λ un sous ensemble fermé, discret, et symétrique de $\mathbb{R}$. Soit $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ satisfaisant ; card $\Lambda_j < +\infty$ $(j \geq 1)$, $\Lambda_j = -\Lambda_j$. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit de type (S) fort est que : pour tout $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 1$ et pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geq 1}$, $\varepsilon_j = 0, 1$ $(j \geq 1)$, il existe une mesure de Radon bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) \quad , \quad \lambda \in \Lambda_j \quad (j \geq 1)$$

<u>Preuve</u> : Nous allons faire une démonstration pour $\varepsilon_j = \pm 1$. Le corollaire s'en déduit facielement.

La condition nécessaire résulte de la définition. Pour démontrer qu'elle est suffisante, remarquons que la propriété indiquée entraîne que Λ est de type (S) faible. Il nous reste, d'après le théorème 3.3 à montrer que Λ possède un compact associé.

Pour cela notons que, Λ étant symétrique pour un polynôme à spectre dans Λ ses parties réelles et imaginaires sont également des polynômes trigonométriques à spectre dans Λ .

Il est facile de vérifier que pour un compact K de $\mathbb{R}$ la propriété :

$$||P||_{\infty} < C||P||_{K,\infty}$$

pour tout polynôme trigonométrique à valeurs complexes et à spectre dans Λ est équivalente à la même propriété avec seulement des polynômes trigonométriques à valeurs réelles (les constantes seront différentes).

Supposons donc que Λ ne possède pas de compact pour les polynômes trigonométriques à valeurs réelles. En reprenant le raisonnement par l'absurde fait dans la preuve du théorème 3.3 on achève la démonstration.

PROPOSITION 3.3. : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ tel que :

a) $\Lambda_j = \{n f_j\}_{j=1}^{n_j}$, $(j \geq 1)$ où $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs et $(n_j)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers positifs.

b) $f_{j+1} > q n_j f_j \quad j \geq 1 \; , \; q > 1$

Alors le sous ensemble $\Lambda \cup -\Lambda$ est de type (S) fort relativement à la partition $(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

Preuve :

Nous allons appliquer le corollaire précédent.
Soit $\tilde{q}$, $q > \tilde{q} > 1$ et $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j>1} \tilde{\Lambda}_j$; $\tilde{\Lambda}_j = \{n f_j\}_{j=1}^{[\tilde{q} n_j]}$. Considérons la décomposition de $\tilde{\Lambda}$ sous la forme $\bigcup_{k=1}^{r} \tilde{\Lambda}^{(k)}$ définie par la proposition 2.2 (Corollaire). A cette décomposition correspond la décomposition sous la forme $\bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}$ de Λ. Pour ces décompositions nous avons donc :

$(*)$ - $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ (resp. $\Lambda^{(k)}$) sont q'-lacunaire $q' > 3$

$(**)$ - $S[\tilde{\Lambda}^{(k)}] \cap S[\tilde{\Lambda}^{(\ell)}] = \emptyset$, $S[\Lambda^{(k)}] \cap S[\Lambda^{(\ell)}] = 0$, $\ell \neq k$.

$(***)$ $p(\bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}) \geq p(\bigcup_{k=1}^{r} \tilde{\Lambda}^{(k)}) \geq \delta_o > o$ où $p(A)$ désigne la pas de A.

On va construire $g = \sum_{k=1}^{r} g^{(k)}$ comme pour le théorème 2.1 . Pour cela il suffit de donner la consrruction de l'un des $g^{(k)}$. Supposons donc que l'on va construire $g^{(k)}$ telle que si $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)$ $\varepsilon_j = 0, 1$ alors :

$$g^{(k)}(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j, \lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda^{(k)} \cup -\Lambda^{(k)})$$

$$g^{(k)}(\lambda) = o \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda^{(\ell)} \cup -\Lambda^{(\ell)}) \quad \ell \neq k$$

(voir la preuve de la proposition 2.3).

La démonstration est calquée sur celles de la propositions 2.3 et théorème 2.1. Pour le détail des calculs on renvoit le lecteur à la preuve.

Posons :

$$\prod_M (x) = \prod_{j=1}^{M} (1 + \varepsilon_j K_j(x))$$

où $1 + K_j(x) = F_{n_j}'(f_j(x+\xi_j))$, F_{n_j} étant le polynôme de Fejer d'ordre n_j.

Soit la fonction :

$$\Delta(x) = \frac{b \sin^2 bx/2}{|bx/2|^2} \quad , \text{ où } \quad b \in \mathbb{R}^+$$

$\Delta(x)$ est une fonction positive sommable et nous avons :

$$\hat{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma}{b} + 1 & -b \leqslant \gamma \leqslant o \\ 1 - \frac{\gamma}{b} & o \leqslant \gamma \leqslant b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$||\Delta||_1 = \int_{\mathbb{R}} \Delta(x)\, dx = \hat{\Delta}(o) = 1$$

le spectre de Δ est contenu dans l'intervalle $[-b, +b]$.

D'après (***) le pas du psectre de $\prod_M$, pour tout M est supérieur ou égal à $\delta_o > o$.

Choisissons b tel que :

$$(1) \qquad b < \frac{\delta_o}{2}$$

Soit maintenant :

$$\phi_M(x) = \Delta(x) \cdot \prod_M (x)$$

ϕ_M est une fonction positive de $L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{\phi}_M(\lambda) = \sum_{\gamma} \hat{\prod}_M (\gamma) \cdot \hat{\Delta} (\lambda-\gamma)$$

et d'après (1), on aura :

$$\hat{\phi}_M(\lambda) = \hat{\prod}_M (\lambda) \cdot \hat{\Delta}(o) = \hat{\prod}_M (\lambda)$$

on en déduit :

$$||\phi_M||_1 = \hat{\phi}_M (o) = 1$$

Définissons la fonction f par :

$$f (\lambda) = \lim_{M\to+\infty} \hat{\phi}_M (\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^{-})$$

f étant une fonction continue, d'après un résultat de Paul Lèvy ([14]) il existe une mesure bornée ν telle que :

$$\hat{\nu} (\lambda) = f (\lambda)$$

En particulier :

$$\hat{\nu} (\lambda) = \varepsilon_j F_{n_j} (\lambda) \ (\xi_j,\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(k)} \cup - \Lambda_j^{(k)})$$

$$\hat{\nu} (\lambda) = o \qquad\qquad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(\ell)} \cup - \Lambda_j^{(\ell)}) \qquad \ell \neq k$$

Définissons pour $\tilde{\Lambda}^{(k)}$:

$$\tilde{\prod}_M (x) = \prod_{j=1}^{M} |1 + \varepsilon_j \tilde{K}_j (x)|$$

où $1 + \tilde{K}_j (x) = 1 + F_{\tilde{q}n_j} [f_j (x+\xi_j)]$, $F_{\tilde{q}n_j}$ étant défini comme au chapitre 2 (page 28). Si on considère $\tilde{\phi}_M(x) = \Delta(x) . \tilde{\prod}_M (x)$.

On obtient de façon analogue une mesure $\tilde{\nu}$ telle que :

$$\hat{\tilde{\nu}}(\lambda) = \underset{J}{\varepsilon}\, \hat{F}_{\tilde{q} n_j}(\lambda)\ (\xi_j,\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(k)} \cup -\Lambda_j^{(k)})$$

$$\hat{\tilde{\nu}}(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(\ell)} \cup -\Lambda_j^{(\ell)}), \quad \ell \neq k$$

Si $\mu = \frac{1}{\tilde{q}-1}[\tilde{q}\,\tilde{\nu} - \nu]$, alors :

(2) $$\hat{\mu}(\lambda) = \underset{J}{\varepsilon}(\xi_j,\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(k)} \cup -\Lambda_j^{(k)})$$

(3) $$\hat{\mu}(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(\ell)} \cup -\Lambda_j^{(\ell)}), \quad \ell \neq k$$

On recommence la construction précédente pour J^-. On obtient une mesure μ^- telle que :

(4) $$\hat{\mu}^-(\lambda) = (\xi_j,\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(1)} \cup -\Lambda_j^{(1)}), \quad \in J^-$$

(5) $$\hat{\mu}^-(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \lambda \in (\Lambda_j^{(1)} \cup -\Lambda_j^{(1)}), & \in J^+ \\ \lambda \in (\Lambda_j^{(\ell)} \cup -\Lambda_j^{(\ell)}), & \ell \neq 1 . \end{cases}$$

Si $g^{(k)} = \hat{\mu}|_{\Lambda \cup -\Lambda}$ d'après (2), (3), nous avons :

$$g^{(k)}(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j,\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in (\Lambda_j^{(1)} \cup -\Lambda_j^{(1)}), \quad j \geqslant 1$$

En prenant $g = \sum_{k=1}^{r} g^{(k)}$ il est facile de voir que les conditions du corollaire du théorème 3.3 sont satisfaites .

Elargissement - Stabilité

Soit Λ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle le pas de Λ le nombre $p(\Lambda)$ défini par :

$$p(\lambda) = \inf_{\substack{\lambda,\lambda'\in\Lambda \\ \lambda\neq\lambda'}} |\lambda - \lambda'|$$

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION ([15], page 139). Si le couple (C,K) est adapté à Λ alors :

(i) le pas de Λ est supérieur ou égal à $\frac{2}{C|K|}$

(ii) soit $\varepsilon < \frac{1}{C|K|}$, si $g \in B(\Lambda)$ et si $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}.\hat{f}$ contenu dans $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ la fonction $\phi(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g(\lambda)\, \hat{f}\,(x-\lambda)$ appartient à $B(\Lambda + [-\varepsilon, +\varepsilon])$ avec :

$$||\phi||_{B(\Lambda+[-\varepsilon,+\varepsilon])} \leq C'\,||g||_{B(\Lambda)}\, ||f||_1$$

Comme application, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble de type (S) fort et (C,K) un couple adapté à Λ. Si $\varepsilon < \frac{1}{C|K|}$ alors pour tout $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ $g = (g_j)_{j\geq 1}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}\ \hat{f}$ contenu dans $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, la fonction ϕ définie par :

$$\Phi(x) = \sum_j \sum_{\lambda\in\Lambda_j} g_j(\lambda)\, \hat{f}(x-\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in \Lambda_j\,, \quad |x-\lambda| < \varepsilon$$

appartient à $B(\Lambda+[-\varepsilon,+\varepsilon])$.

Preuve

Comme Λ est de type (S) fort, il existe $g \in B(\Lambda)$, $g(\lambda) = g_j(\lambda)$ si $\lambda \in \Lambda_j$. Ce qui nous donne :

$$\phi(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g(\lambda)\,\hat{f}(x-\lambda)$$ e t on applique la proposition précédente.

Corollaire : Si $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est de type (S) fort et si ε est choisi comme dans la proposition 3.4., pour tout $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$, $g = (g_j)_{j\geq 1}$ on peut trouver $\phi \in B(\Lambda+[-\varepsilon,+\varepsilon])$ satisfaisant :

$$\phi(x) = g_j(\lambda) \quad \text{si} \quad |x-\lambda| < \varepsilon \qquad \lambda \in \Lambda_j$$

Preuve

Il suffit d'appliquer la proposition (3.4) avec $f \in L^1(\ \ )$ tel que $\hat{f}$ soit à support dans $|-\varepsilon', +\varepsilon'|$ et $\hat{f}(x) = 1$ si $x \in |-\varepsilon, +\varepsilon|$. Ou $\varepsilon < \varepsilon' < \dfrac{1}{C|K|}$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des ensembles qui sont "voisins" à un ensemble de type (S) fort.

DEFINITION 3.8 : Soit Λ un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on dira que le sous-ensemble Λ' est α-voisin de Λ s'il existe une bijection ϕ de Λ sur Λ' telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \phi(\lambda)| < \alpha$.

Remarque : Si Λ est un ensemble de type (S) fort relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$, on sait que le pas de Λ est strictement positif. Ainsi si Λ' est un ensemble α-voisin à Λ et si α est "assez" petit les sous ensembles $\Lambda_j' = \phi(\Lambda_j)$ définissent une partition de Λ'. Dans la suite sauf mention contraire $(\Lambda_j')_{j\geq 1}$ désignera cette partition de Λ'.

Nous ne pouvons pas espérer que tout ensemble α-voisin à Λ soit aussi de type (S) fort. Autrement dit, tout ensemble α-voisin à Λ ne peut pas posséder de compact associé. En effet, on sait ([10], page 66) que si tout ensemble α-voisin à Λ possède un compact associé alors Λ est un ensemble de Sidon topologique.

La proposition suivante nous permet de caractériser certains ensembles α-voisins qui sont encore de type (S) fort.

DEFINITION 3.9 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (Λ_j étant une partition de Λ, card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geqslant 1$). Soit $\alpha = (\alpha_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres réels.

1) On dira que $\Lambda' = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda'_j$ est α-translaté de Λ si $\Lambda'_j = \Lambda_j + \alpha_j$ $j \geqslant 1$

2) On dira que $\Lambda' = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda'_j$ est α-homothétique de Λ si $\Lambda'_j = \alpha_j \Lambda_j$, $j \geqslant 1$

D'après la remarque de la définition 3.7, si les α_j sont assez petits, $(\Lambda'_j)_{j\geqslant 1}$ est certainement une partition de Λ'.

PROPOSITION 3.5 : Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j$ un ensemble de type (S) fort, relativement à $(\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$ et (C,K) un couple adapté à Λ. Si $\Lambda' = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda'_j$ satsifait l'une des conditions suivantes :

1) Λ' est α-translaté de Λ, $\alpha = (\alpha_j)_{j\geqslant 1}$ $\sup_{j\geqslant 1} |\alpha_j| < \dfrac{2}{C|K|}$

2) Λ' est α-homothétique de Λ $\alpha = (\alpha_j)_{j\geqslant 1}$

$$\sup_{j\geqslant 1}(\max \Lambda_j)\,|1-\alpha_j| < \frac{2}{C|K|}$$

Alors Λ' est de type (S) fort relativement à $(\Lambda'_j)_{j\geqslant 1}$.

Preuve

D'une manière générale si Λ' satisfait les conditions suivantes :

(*) Λ' est α- voisin à Λ $\qquad |\alpha| \leqslant \frac{2}{C|K|}$;

(**) pour tout $h' \in \underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda'_j)$ $h' = (h'_j)_{j\geqslant 1}$, $h = (h_j)_{j\geqslant 1}$ défini par $h_j(\lambda) = h'_j(\phi(\lambda))$ est dans $\underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda_j)$.
(ϕ étant la bijection de Λ sur Λ')

alors Λ' est de type (S) fort relativement à $(\Lambda'_j)_{j\geqslant 1}$. Il suffit maintenant de vérifier que la condition (1) ou (2) implique (*) et (**).
La condition (1) entraîne (*). Pour montrer (**), considérons $h' \in \underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda'_j)$, $h' = (h'_j)_{j\geqslant 1}$ soit $(\nu'_j)_{j\geqslant 1}$ $\nu_j \in M(\mathbb{R})$ telle que $\sup_{j>1} \|\nu'_j\| < +\infty$ et $h'_j(\lambda') = \hat{\nu}'_j(\lambda')$ $\lambda' \in \Lambda'_j$; nous avons alors :

$$h'_j(\lambda+\alpha_j) = \hat{\nu}'_j(\lambda+\alpha_j) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda+\alpha_j)x}\, d\nu'_j(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\, e^{i\alpha_j x}\, d\nu'_j(x) \quad (\lambda \in \Lambda_j,\ j\geqslant 1)$$

Soit alors $d\nu_j(x) = e^{i\alpha_j x}\, d\nu'_j(x)$. Les ν_j définissent un élément de $\underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda_j)$ et on a (**).

Dans le cas (2), pour $\lambda' \in \Lambda'_j$ et $\lambda \in \Lambda_j$ nous avons :

$$|\lambda' - \lambda| = |\alpha_j \lambda - \lambda| \leqslant |\lambda|\ |1 - \alpha_j| \leqslant (\max \Lambda_j)\ |1 - \alpha_j|$$

ce qui nous donne (*). Si $h' \in \underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda'_j)$ $h' = (h'_j)_{j\geqslant 1}$ soit $\nu'_j, \sup_{j>1}\|\nu'_j\| < +\infty$ telles que $h'_j(\lambda') = \hat{\nu}'_j(\lambda')$ $(\lambda' \in \Lambda_j)$, un calcul simple montre que les $d\nu_j(x) = \frac{1}{\alpha_j}\, d\nu'_j(\frac{x}{\alpha_j})$ définissent un élément de $\underset{\ell^\infty}{\oplus} B(\Lambda_j)$ satisfaisant (**).

La proposition suivante caractérise les ensembles de type (S) fort parmi les ensembles possédant un compact associé.

PROPOSITION 3.6 : Soit Λ un sous-ensemble fermé discret de $\mathbb{R}$ et $(\Lambda_j)_{j\geqslant 1}$ (card $\Lambda_j < +\infty$) une partition de Λ. S'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que tout α-translaté de Λ , $\alpha = (\alpha_j)_{j\geq 1}$ $|\alpha_j| \leq \alpha_o$ possède un compact associé, alors Λ est un ensemble de type (S) fort relativement à $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$.

<u>Preuve</u> :

Soit $\beta = (\beta_j)_{j\geq o}$, $o < \beta_j \leq \alpha_o$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \beta_j = o$. On peut trouver $\Lambda' = \bigcup\limits_{j\geq 1} \Lambda'_j$ un α-translaté de Λ , $\alpha = (\alpha_j)_{j\geq 1}$, $|\alpha_j| \leq \beta_j$, tel que Λ' soit de type (S) faible relativement à $(\Lambda'_j)_{j\geq 1}$ (on utilisera la remarque de la proposition 3.2). D'après l'hypothèse Λ' est donc de type (S) fort. La proposition 3.4 entraîne qu'il existe $\gamma_o > o$ tel que tout γ-translaté de Λ' ; $\gamma = (\gamma_j)_{j\geq 1}$ $|\gamma_j| \leq \gamma_o$ soit encore de type (S) fort. Le choix de $\alpha = (\alpha_j)_{j\geq 1}$ entraîne que Λ est un γ-translaté de Λ' , $\gamma = (\gamma_j)_{j\geq 1}$ avec $|\gamma_j| \leq \gamma_o$ sauf peut-être un nombre fini de γ_j . Ce qui nous permet de conclure.

Signalons enfin, une propriété dont tout ensemble α-voisin à un ensemble de type (S) fort possède

<u>DEFINITION 3.10</u> : Soit Λ un sous ensemble fermé discret et dénombrable de $\mathbb{R}$. On dira que Λ est de type (S_o) relativement à une partition $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ de Λ si pour toute fonction b définie sur Λ , constante sur chaque Λ_j et à valeurs ± 1 , on peut trouver une mesure de Radon bornée μ , sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\hat{\mu}(\lambda) = b(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \Lambda$$

On voit que les ensembles de Sidon et de type (S) sont des ensembles de type (S_o).

<u>PROPOSITION 3.7</u> : Soit $\Lambda = \bigcup\limits_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble de type (S) fort. si (C,K) est un couple associé à Λ et si Λ' est un ensemble α-voisin de Λ ;

$|\alpha| < \frac{2}{C|K|}$ alors Λ' est de type (S_o).

Preuve :

C'est une simple application du corollaire de la proposition 3.4 en prenant $g_j(\lambda) = \varepsilon_j$ $(\lambda \in \Lambda_j)$, $\varepsilon_j = \pm 1$.

Nous avons vu que tout ensemble α-voisin à un ensemble de type (S) fort ne peut pas posséder un compact associé. Ce qui avec la proposition 3.7 entraîne que tout ensemble de type (S_o) ne peut posséder un compact associé.

Ceci montre en particulier que tout ensemble de type (S_o) n'est pas de type (S) fort, dans le cas de $\mathbb{R}$.

Compact associé à un ensemble de type (S) fort

Soit $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble de type (S) fort . Soit K un compact associé à Λ . Il existe alors une constante A telle que si P est un polynôme trigonométrique à spectre dans Λ on a

$$||P||_\infty \leq A \, ||P||_{K,\infty}$$

On peut donc trouver une constante C telle que pour un tel polynôme trigonométrique, on ait

$$(1) \qquad \Sigma \, ||P_j||_\infty \leq C \, ||P||_{K,\infty}$$

DEFINITION 3.11 : Soit Λ un sous ensemble fermé discret de $\mathbb{R}$. Soit $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ , card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geq 1$. On dira que le compact K est S-propre pour Λ , s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique P à spectre dans Λ on a l'inégalité (1).

Dans ce cas on dira que le couple (C,K) est S-associé à Λ .

Remarques :

1°) Si $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ est la partition ponctuelle, l'on retrouve la définition d'un compact propre [12] pour un ensemble de Sidon et de couple associé ([10] page 55).

2°) Pour un sous ensemble Λ fermé discret de $\mathbb{R}$ la propriété d'être de type (S) fort est équivalente à la propriété de posséder un compact K S-propre.

Nous allons établir un critère pratique permettant de déterminer si un compact K est S-associé à un ensemble de type (S) fort et de donner une estimation de la constante C.

PROPOSITION 3.8 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact K de $\mathbb{R}$ soit associé à un ensemble de type (S) fort $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ est qu'il existe des constantes, $D = D(\Lambda,K)$ et $\eta = \eta(\Lambda,K)$ $0 < \eta < \frac{1}{2}$ telles que pour toute suite $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ et toute suite $\varepsilon_j = \pm 1$, il existe une mesure de Radon μ , à support dans K telle que :

$$||\mu|| \leq D , \qquad \sup_{j\geq 1} ||\hat{\mu} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} \leq \eta$$

Preuve :

Montrons que la condition de la proposition est suffisante. Soit $P(x) = \sum_{j=1}^{N} P_j(x)$ un polynôme à spectre dans Λ et soit $\delta \in \mathbb{R}$, $2\eta < \delta < 1$. Définissons ξ_j et $\varepsilon_j = \pm 1$ par $\varepsilon_j\ \mathcal{R}e(P_j(\xi_j)) \geq \delta\ ||\ \mathcal{R}e(P_j)||_\infty$ $j = 1,2,\ldots,N$, $\xi_j = 0$, $\varepsilon_j = +1$ si $j > N$.

Il existe alors une mesure bornée μ à support dans K telle que :

$$\sup_{j\geq 1} ||\hat{\mu}(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} \leq \eta , \qquad ||\mu|| \leq D$$

En tenant compte de la propriété 3.3 (p.53) et en adoptant le calcul du théorème 1.1 ((vi $\Longrightarrow$ (i)) on a :

$$(1) \qquad \eta \sum_{j=1}^{N} ||P_j||_\infty \geqslant \delta \sum_{j=1}^{N} ||\mathcal{R} P_j||_\infty - \left| \int_K P(x)d\mu(x) \right|$$

Définissons $\gamma_j \in \mathbb{R}$ et $\alpha_j = \pm 1$ par $\alpha_j \operatorname{Im}(P_j(\gamma_j)) \geqslant \delta ||\operatorname{Im} P_j||_\infty$ $j=1,2,\dots,N$, $\gamma_j = o$, $\alpha_j = + 1$ si $j > N$. Il existe une mesure bornée ν à support dans K telle que :

$$\sup_{j\geqslant 1} ||\hat{\nu}(\lambda) - \alpha_j(\gamma_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} \leqslant \eta \qquad ||\nu|| \leqslant D$$

Le même calcul nous donne :

$$(2) \qquad \eta \sum_{j=1}^{N} ||P_j||_\infty \geqslant \delta \sum_{j=1}^{N} ||\operatorname{Im} P_j||_\infty - \left| \int_K P(x)\, d\nu(x) \right|$$

De (1) et (2) on déduit :

$$(\delta - 2\eta) \sum_{j=1}^{N} ||P_j||_\infty \leqslant (||\mu|| + ||\nu||)\, ||P||_{K,\infty}$$

ce qui nous donne :

$$(3) \qquad \Sigma\, ||P_j||_\infty \leqslant \frac{2D}{-2\eta} ||P||_{K,\infty}$$

K est donc un compact S-propre. Λ étant de type (S) fort, K est associé à Λ .

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Comme Λ est de type (S) fort, il possède un compact associé, soit K ce compact. De la démonstration du théorème 3.3 ((i) $\Longrightarrow$ (ii)) on déduit que pour tout $g = (g_j)_{j\geqslant 1} \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ il existe une mesure bornée μ à support dans K telle que $\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda)$, $(\lambda \in \Lambda_j)$ $j \geqslant 1$. On en déduit que l'injection canonique de $B_K(\Lambda)$ dans $\bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ est surjective. Il est facile de voir qu'on a les propriétés indiquées dans l'énoncé.

<u>Remarques</u> :

1°) Si Λ est symétrique, il suffit de prendre $o < \eta < 1$ (cf. la remarque 1°) de la page 15).

2°) Si la condition $||\mu|| < D$ n'est pas satisfaite, on ne peut pas conclure que le compact K est associé à Λ. Nous allons voir qu'en absence de cette condition, K est associé à $\Lambda \setminus \Lambda_K$, card $\Lambda_K < +\infty$.

<u>DEFINITION 3.12</u> : Soit Λ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ, (card $\Lambda_j < +\infty$, $j \geq 1$). On dira que le compact K est <u>S-propre au sens large pour Λ</u>, s'il existe un sous-ensemble fini Λ_K de Λ tel que K soit S-propre pour $\Lambda \setminus \Lambda_K$. De façon analogue le couple (C,K) est <u>S-associé à Λ au sens large</u> s'il existe une partie finie de Λ telle que (C,K) soit S-associé à $\Lambda \setminus \Lambda_K$.

<u>Remarque</u> : D'après la remarque 2 de la définition 3.11 et le lemme de la page 62, si Λ possède un compact S-propre au sens large, alors il possède un compact S-propre au sens strict. Mais étant donner un compact K S-propre au sens large nous ne savons pas si le même compact est aussi S-propre au sens strict.

<u>THEOREME 3.4</u> : Soit Λ un sous ensemble fermé discret de $\mathbb{R}$, et $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ une partition de Λ, card $\Lambda_j < +\infty$ $j \geq 1$. Soit K un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Λ est de type (S) fort et K un compact associé à Λ au sens large

ii) pour toute suite $g = (g_j)_{j\geq 1}$, $g \in \bigoplus_{\ell^\infty} B(\Lambda_j)$ on peut trouver une mesure de Radon μ à support dans K telle que : $\hat{\mu}(\lambda) = g_j(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_j)$, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices;

iii) il existe η, $0 < \eta < \frac{1}{2}$, tel que pour toute suite $(\xi_j)_{j\geq 1}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ et pour toute $\varepsilon_j = \pm 1$, $j \geq 1$, on peut trouver une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ à support dans K satisfaisant :

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} ||\hat{\mu}(\lambda) - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j)} < \eta$$

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la démonstration du théorème 3.3 (première partie)

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) est évident.

Pour démontrer que (iii) entraîne (i), il suffit d'adapter la démonstration par l'absurde du théorème 1.1 ((vi) $\Longrightarrow$ (i)).

Remarque : Dans (iii) nous pouvons prendre $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ à condition de supposer $\eta < 1/4$.

La proposition suivante concerne les sous ensembles de $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 3.11 : Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^+$, $\Lambda = \bigcup_{j\geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire de progressions arithmétiques centrées à l'origine. Si $q > 3$ alors tout compact de $\mathbb{R}$ est associé à $\Lambda \cup - \Lambda$.

Preuve :

La propriété de posséder un compact associé étant invariante par translation, il suffit de montrer que pour tout ρ , $o < \rho < \pi$ l'intervalle $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ .

Pour cela on va montrer que la condition (iii) du théorème 3.4 (remarque) est satisfaite. Soit alors $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$ $\xi_j \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geq 1}\, \varepsilon_j \in \{0,1\}$

On va construire une masure de Radon à support dans $[-\rho, +\rho]$.

Soit $\tilde{q} > 1$ défini par $q > 3\tilde{q} > 3$.

Considérons, comme dans la proposition 2.3 :

$$(1) \qquad \prod_M(x) = \prod_{j=1}^{M} [1 + \varepsilon_j K_j(x)] = 1 + \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j K_j(x) + \sum_{\gamma\in S(\Lambda)\setminus[(\Lambda\cup-\Lambda)\cup\{o\}]} C_M(\gamma) e^{i\gamma x}$$

$$(2) \qquad \tilde{\prod}_M(x) = \prod_{j=1}^{M} [1 + \varepsilon_j \tilde{K}_j(x)] = 1 + \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \tilde{K}_j(x) + \sum_{\gamma\in S(\tilde{\Lambda})\setminus[(\tilde{\Lambda}\cup-\tilde{\Lambda})\cup\{o\}]} \tilde{C}_M(\gamma)\, e^{i\gamma x}$$

Soient ν et $\tilde{\nu}$ les mesures limites vagues de $\prod_M$ et $\tilde{\prod}_M$ (cf. proposition 2.3) qui sont telles que :

(3) $$||\nu|| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad ||\tilde{\nu}|| \leqslant 1 .$$

Soit :

(4) $$f_M(x) = (\tilde{q} - 1)^{-1} [\tilde{q} \tilde{\prod}_M(x) - \prod_M(x)] , \quad \mu_1 = (\tilde{q}-1)^{-1} [\tilde{q} \tilde{\nu} - \nu]$$

nous avons :

(5) $$\hat{f}_M(\lambda) = \hat{\mu}_1(\lambda) = \varepsilon_j(\xi_j,\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda_j) , \quad j \geqslant 1$$

Soit pour $o < \rho < \pi$ la fonction Δ définie par :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} |x| & \text{si} \quad |x| \leqslant \rho \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \rho \end{cases}$$

alors $\Delta \geqslant o$, $||\Delta||_1 = \hat{\Delta}(o) = 1$. La série de Fourier de Δ est absolument convergen te. Ecrivons :

(6) $$\Delta(x) = 1 + \sum_{o<|n|\leqslant N} a_n e^{inx} + \sum_{|n|>N} a_n e^{inx} = 1 + \Delta_1(x) + \Delta_2(x)$$

où $N \in \mathbb{N}$ est tel que :

(7) $$\sum_{|n|>N} |a_n| < \frac{1}{\beta} , \ (\beta > 1)$$

On précisera β par la suite.

On va montrer que la mesure $\mu = \Delta \cdot \mu_1$ satisfait :

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} ||\hat{\mu} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} < \eta < \frac{1}{4} .$$

Pour cela il suffit d'évaluer pour tout $M \geqslant j$:

$$||\widehat{f_M \Delta} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)}$$

ce qui, d'après la note de la page 53, revient à calculer :

$$\left| \int_{\mathbb{T}} P(x)\ \Delta(x)\ f_M(x)dx - \varepsilon_j\ P(\xi_j) \right| , \qquad P \in P_{(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)}$$

D'après (6) :

$$\int_{\mathbb{T}} P(x)\ \Delta(x)\ f_M(x)\ dx = \int_{\mathbb{T}} P(x) f_M(x) dx + \int_{\mathbb{T}} P(x)\Delta_1(x) f_M(x) dx + \int_{\mathbb{T}} P(x)\Delta_2(x) f_M(x) dx$$

(5) nous donne :

$$(8) \qquad \int_{\mathbb{T}} P(x)\ f_M(x)\ dx = \varepsilon_j\ P(\xi_j)$$

Le spectre de $P.\Delta_1$ est contenu dans $\Lambda \pm \{1, 2, \ldots, N\}$. D'autre part le spectre de f_M est contenu dans $S(\tilde{\Lambda})$. Comme $q > 3$ on sait que le pas de $S(\tilde{\Lambda})$ est supérieur à $\delta_o > o$ (proposition 2.1, corollaire). D'après l'expression de δ_o , quitte à enlever un nombre fini de blocs, on peut supposer $\delta_o \geq N$. Ce qui implique $(\Lambda \pm \{1,2,\ldots,N\}) \cap S(\tilde{\Lambda}) = \emptyset$ et on a :

$$(9) \qquad \int_{\mathbb{T}} P(x)\ \Delta_1(x)\ f_M(x)\ dx = o$$

D'après (3) et (4), $\|f_M\|_1 < \dfrac{\tilde{q}+1}{\tilde{q}-1}$. En tenant compte de (7), on aura :

$$(10) \quad \left|\int_{\mathbb{T}} P(x)\Delta_2(x) f_M(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{T}} P(x) \sum_{|n|>N} a_n e^{inx} f_M(x)dx\right| \leq \|P\|_\infty \sum_{|n|>N} |a_n|\ \|f_M\|_1 \leq \frac{1}{\beta}\ \frac{\tilde{q}+1}{\tilde{q}-1}\ \|P\|_\infty$$

Pour $\eta > o$ donné, on choisit β tel que $\dfrac{1}{\beta}\ \dfrac{\tilde{q}+1}{\tilde{q}-1} < \eta$. Alors (8), (9) et (10) nous donnent :

$$\left| \int_{\mathbb{T}} P(x)\ \Delta(x)\ f_M(x) - \varepsilon_j\ P(\xi_j) \right| < \eta\ \|P\|_\infty \qquad P \in P_{(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)}$$

Si $\eta < \frac{1}{4}$ alors $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ au sens large. $(o < \rho < \pi)$.
Ce qui d'après le lemme de la page 62 entraîne que pour tout $o < \rho < \pi$, $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ . Ce qui achève la preuve.

THEOREME 3.5 : Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$, $\Lambda = \bigcup_{j \geq 1} \Lambda_j$ un ensemble q-lacunaire de progressions arithmétiques centrées à l'origine. Si $q > 1$, alors tout compact de $\mathbb{R}$ est associé à $\Lambda \cup - \Lambda$.

Preuve :

Il suffit de démontrer que pour tout $\rho > o$ l'intervalle $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ. Pour cela on démontrera le théorème dans un cas particulier et puis on montrera comment le résultat se généralise au cas général.

Cas particulier : $q > 6$

Soit $\tilde{q} > 1$, $\frac{q}{2} > 3\tilde{q} > 3$. Il est facile de voir que les sous ensembles suivants sont α-lacunaire avec $\alpha > 3$.

$$\Lambda = \bigcup_{j\geqslant 1} \Lambda_j \text{ où } \Lambda_j = \{nf_j\}_{n=1}^{n_j}, \quad \tilde{\Lambda} = \bigcup_{j\geqslant 1} \tilde{\Lambda}_j \text{ où } \tilde{\Lambda}_j = \{nf_j\}_{n=1}^{[\tilde{q}n_j]}$$

$$\tilde{\tilde{\Lambda}} = \bigcup_{j\geqslant 1} \tilde{\tilde{\Lambda}}_j \text{ où } \tilde{\tilde{\Lambda}}_j = \{nf_j\}_{n=1}^{2[\tilde{q}n_j]}$$

nous avons également :

$$S(\Lambda) \subset S(\tilde{\Lambda}) \subset S(\tilde{\tilde{\Lambda}})$$

D'après la proposition 2.1 (corollaire) si $p[S(\tilde{\tilde{\Lambda}})]$ désigne le pas de $S(\tilde{\tilde{\Lambda}})$ on a :

$$(1) \qquad p[S(\tilde{\tilde{\Lambda}})] > \delta_o > 0$$

Pour $\xi = (\xi_j)_{j>1}$ $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)$ $\varepsilon_j \in \{0,1\}$ considérons $f_M(x)$ défini comme dans la proposition 3.11. Pour $P \in P_{(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)}$ considérons :

$$\int_{\mathbb{R}} P(x)\, f_M(x)\, \Delta(x)\, dx$$

où $\Delta(x)$ est la fonction définie dans la proposition précédente. $S_p(f_M) \subset S(\tilde{\Lambda})$ et $S_p(P) \subset (\Lambda \cup - \Lambda)$. Mais les blocs sont constitués de progressions arithmétiques d'où $S(\tilde{\Lambda}) + (\Lambda \cup - \Lambda) \subset S(\tilde{\tilde{\Lambda}})$. Ainsi $P(x)\cdot f_M(x)$ est un polynôme à spectre dans $S(\tilde{\tilde{\Lambda}})$. Ecrivons :

$$P(x)\, f_M(x) = \sum_{\gamma \in S(\tilde{\tilde{\Lambda}})} b(\gamma) e^{i\gamma x}$$

ce qui nous donne :

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}} P(x)\, f_M(x)\, \Delta(x)\, dx = \sum_{\gamma \in S(\tilde{\tilde{\Lambda}})} b(\gamma) \hat{\Delta}(-\gamma).$$

Mais on a :

$$\hat{\Delta}(\gamma) = \frac{4\sin^2(\rho\, x/2)}{\rho^2\, x^2}$$

Comme $p\,[S(\tilde{\Lambda})] > \delta_o$ il est facile de voir qu'on a :

$$(3) \qquad \sum_{\gamma\in S(\tilde{\Lambda})} |\hat{\Delta}(\gamma)| \leqslant 1 + \frac{8}{\rho^2} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2\,\delta_o^2} < 1 + \frac{4\,\pi^2}{3\rho^2\,\delta_o^2}$$

Soit alors $\tilde{\Delta}$ la fonction presque périodique définie par :

$$\tilde{\Delta}(x) = \sum_{\gamma\in S(\tilde{\Lambda})} \hat{\Delta}(\gamma)\, e^{i\gamma x}$$

Nous avons d'après (2) :

$$\int_{\mathbb{R}} P(x)\; f_M(x)\;\Delta(x)\;dx = \mathfrak{M}\left[P(x)\; f_M(x)\;\overline{\tilde{\Delta}(x)}\right] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} P(x) f_M(x)\overline{\tilde{\Delta}(x)}\,dx$$

En remarquant que $\mathfrak{M}\,[f_M(x)] < \frac{\tilde{q}+1}{\tilde{q}-1}$, si l'on adapte(*) les calculs de la proposition 3.11 , on obtient :

$$(4) \qquad \| f_M\cdot\Delta - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda) \|_{B(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)} < \eta$$

sauf pour un nb. fini de j.

Les $f_M\Delta$ sont des fonctions intégrables à support dans $[-\rho, +\rho]$.

En utilisant (3), il est facile de voir que l'on a :

$$(5) \qquad \| f_M\,\Delta \|_1 < 1 + \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{\rho^2\,\delta_o^2}$$

Soit maintenant μ la mesure de Radon à support dans $[-\rho, +\rho]$, obtenue comme la limite vague d'une sous suite des f_M . On déduit de (4)

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} \|\hat{\mu} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)\|_{B(\Lambda_j \cup - \Lambda_j)} < \eta$$

Si $\eta < \frac{1}{4}$ alors $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ au sens large pour tout $\rho > o$, ce qui nous permet de conclure.

(*) En faite les calculs seront exactement les mêmes que ceux de la proposition 3.11, $S(\tilde{\Lambda})$ jouant le même rôle que $\mathbb{Z}$.

Cas général : $q > 1$

Soit $\tilde{q} > 1$, $q > \tilde{q} > 1$. Si dans la proposition 2.2 (corollaire) on choisit r tel que $\tilde{q}^{r} < \tilde{q}^{(r-1)} + 2 < 6$ alors on peut avoir une décomposition de $\tilde{\Lambda}$ sous la forme $\bigcup_{k=1}^{r} \tilde{\Lambda}^{(k)}$ où les $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ sont α-lacunaires avec $\alpha > 6$ et $p[\bigcup_{k=1}^{r} S(\tilde{\Lambda}^{(k)})] > \delta_o$. Soit $\bigcup_{k=1}^{r} \Lambda^{(k)}$ la décomposition correspondante pour Λ . Pour $\xi = (\xi_j)_{j>1}$ $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ $\varepsilon_j \varepsilon\{0,1\}$ donnés, on va construire comme dans la première partie de la preuve des mesures $\mu^{(k)}$ pour chaque $\Lambda^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$. D'après ces calculs, on aura :

$$||\hat{\mu}^{(k)} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} < \eta \quad \text{si} \quad \Lambda_j \subset \Lambda^{(k)}$$

et

$$||\hat{\mu}^{(k)}||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} < \eta \quad \text{si} \quad \Lambda_j \subset \Lambda^{(\ell)} \quad \ell \neq k .$$

Soit $\mu = \sum_{k=1}^{r} \mu^{(k)}$; un calcul simple et un choix convenable de η (donc de β) nous donne :

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} \; ||\hat{\mu} - \varepsilon_j(\xi_j,\lambda)||_{B(\Lambda_j \cup -\Lambda_j)} < \frac{1}{5}$$

Ce qui montre que $[-\rho, +\rho]$ est associé à Λ au sens large et ceci pour tout $\rho > o$. Ce qui achève la preuve.

Remarques

1°) Il est facile de voir que quitte à enlever un nombre fini de bloc de Λ , on peut avoir :

$$(1) \qquad ||\mu|| \leqslant C , \qquad C = C(q)$$

pour la mesure μ construite dans le théorème 3.5.

Ainsi pour les ensembles définis dans le théorème 3.5 <u>le couple (C,K) est S-associé à Λ au sens large pour tout compact K</u> .

2°) Pour un ensemble $\Lambda = \underset{j>1}{\ } \Lambda_j$, le couple (C,K) ne peut pas être S-associé à Λ au sens strict pour tout compact K de avec la même constante C.

En effte, il est facile de voir qu'on a :

$$(2) \qquad |K| > \frac{2}{Cp(\Lambda)}$$

3°) Si $\Lambda = \underset{j>1}{\ } \Lambda_j$ est un ensemble de type (S) défini par la théorème 3.5, alors tout ensemble α-translaté (cf. définition 3.9, page 72) de Λ est aussi de type (S).

BIBLIOGRAPHIE

[1] - KATZNELSON Y. : An Introduction to Harmonic Analysis
John Wiley + Sons Inc. N.Y. 1968

[2] - LOOMIS L.H. : The Spectral Characterization of a class of Almost periodic Functions.,
Annals of Mathematics (Japon) Vol. 72 N° 2 (1960) 362-368

[3] - GRAMAIN F. et MEYER Y. : Ensembles de fréquences et Fonctions presque périodiques. A paraître.

[4] - RUDIN W. : Fourier Analysis in Groups, Intersciences publisphers N.Y. 1962

[5] - ROSENTHAL H.P. : On trigonometric Series Associated with weak-* closed Subspaces of Continious Functions.
Jour. of Math. + Meca. Vol. 17 N° 5 (1967) 485-490

[6] - STECKIN : Sur la convergence absolue des Séries de Fourier (en Russe)
Izv. Akad. Nauk. SSSR Serie Math. 20 (1950) 385-412

[7] - FIGA-TALAMANCA A. : An exemple in the theory of lacunary Fourier Series
Boll. U.M.I. N.3 (1970) 375-378

[8] - BONAMI A. : Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20,2 (1970) 335-402

[9] - BESICOVITCH A.S. : Almost periodic Functions
Dover Publications Inc. (1954)

[10] - DECHAMPS-GONDIN M. : Ensembles des Sidon Topologiques
1. Inst. Fourier (Grenoble)22,3 (1972) 51-79

[11] - MELA J.F. : Approximation diophantienne et ensemble lacunaire
Bull Soc. Math. France, Mémoire 19, 1969 (26-54).

[12] - HELSON et KAHANE J.P. : A Fourier Meth. in Diaphantine Problems
Jour. d'Analyse Math. 15 (1965) 245-262

[13] - ZYGMUND A. : Trigonometric Series. I. (2^{d} édition)

[14]

[15] - MEYER Y. : Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique
STADIA MATH. T. 34 (1970) 128-147

[16] - MELA J.F. A paraître.