UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

N°184-76-54

SOLUTIONS FORTES D'INEQUATION VARIATIONNELLE D'EVOLUTION

H. ATTOUCH - A. DAMLAMIAN

Publication Mathématique d'Orsay

N°184-76-54

SOLUTIONS FORTES D'INEQUATION VARIATIONNELLE D'EVOLUTION

H. ATTOUCH - A. DAMLAMIAN

Publication Mathématique d'Orsay

SOLUTIONS FORTES D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES D'EVOLUTION

H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN

I - INTRODUCTION.

Soit H un espace de Hilbert réel ; on notera respectivement $|.|$ et $<.,.>$ la norme et le produit scalaire sur H .

Etant donnée $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctions convexes, semi-continues inférieurement de H dans $]-\infty,+\infty]$, non identiquement égales à $+\infty$, on se propose d'établir un théorème d'existence pour les équations d'évolution du type

$$(1.1) \qquad \frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$$

où $\partial\phi(t,.)$ désigne le sous-différentiel de $\phi(t,.)$ dans H , et f est donné dans $L^2(0,T;H)$; on cherchera u dans $\mathscr{C}([0,T];H) \cap W^{1,2}_{loc}(0,T;H)$, espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à dérivée-distribution dans $L^2(0,T;H)$, de sorte que (1.1) soit vérifié pour presque tout t de $]0,T[$; on dira alors que u est solution forte de (1.1).

Si v est solution forte de (1.1) avec un second membre $g(.)$, on obtient facilement, utilisant la monotonie de $\partial\phi(t,.)$ dans H , que :

$$\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \qquad |u(t)-v(t)| \leq |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(\tau)-g(\tau)|d\tau \ .$$

On en déduit l'existence d'au plus une solution forte de (1.1) prenant pour $t = 0$ une valeur donnée u_o dans H .

Dans le cas où ϕ ne dépend pas de t , le problème (1.1) a été résolu par H. BREZIS [6] qui établit pour un f donné dans $L^2(0,T;H)$ et u_o donné dans $D(\phi)$ l'existence et l'unicité de u solution forte de (1.1) avec $u(0) = u_o$; on constate en outre l'existence d'un effet régularisant sur la condition initiale c'est ce type de résultat que nous nous proposons d'étendre au cas où $\phi(t,.)$ dépend de t .

Le problème (1.1) est lui-même un cas particulier du problème général

$$(1.2) \qquad \frac{du}{dt} + A(t,u(t)) \ni 0$$

où les $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$ sont des opérateurs m-accrétifs dans un Banach X . Ce probème a été étudié par de nombreux auteurs ; une des difficultés techniques réside dans le fait que le domaine de l'opérateur $A(t,.)$ peut varier avec t ; pour plus de clarté dans l'exposé, nous passerons en revue les divers résultats obtenus sur le problème (1.2) <u>en les énonçant uniquement dans le cadre Hilbertien</u> (c'est à dire $A(t,.)$ maximal monotone).

A| T. KATO en 1967, [10], énonce un théorème d'existence lorsque les $A(t,.)$ sont univoques, de domaine indépendant de t, et vérifient

$$(1.3) \qquad |A(t,x)-A(s,x)| \leq |t-s|.L(|x|)(1+|A(t,x)|)$$

pour tout s et t de $[0,T]$, tout x de D domaine des $A(t,.)$; ($L(.)$ désigne une fonction croissante) M. CRANDALL et A. PAZY en 1972, [8], généralisent ce résultat, et montrent, lorsque les $A(t,.)$ sont de domaine fixe D et vérifient pour tout x de D

$$(1.4) \qquad \forall s,t \in [0,T] \ , \ \forall \lambda>0 \ , \ |A_\lambda(t,x)-A_\lambda(s,x)| \leq |a(t)-a(s)| \ L(|x|)(1+|A^o(t,x)|)$$

où $a(.)$ est à variation bornée et continue, ($A^o(t,x)$ désigne l'élément de norme minimum du convexe fermé non vide $A(t,x)$), L croissante, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (I + \frac{t}{n} A(\frac{kt}{n},.))^{-1} u_o$$ existe et est solution forte de (1.2), avec $u(0) = u_o$

pour un u_o dans D.

R.H. MARTIN en 1972, [12] démontre un résultat quand les domaines des $A(t,.)$ peuvent varier mais en restant fortement liés ; sa condition, exprimant en un certain sens que les résolvantes varient régulièrement avec le temps t, semble d'utilisation malaisée.

B| Dans le cas où les $A(t)$ sont des sous différentiels nous allons énumérer les résultats, suivant que la condition de dépendance par rapport à t porte sur ϕ, ϕ^* ou ϕ_λ.

a) <u>Les hypothèses portent sur</u> ϕ :

J. WATANABE [18], 1973 ; le domaine des $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ est indépendant de t et il existe $L(.)$ croissante telle que :

$$(1.5) \qquad \forall u \in D(\phi) \ , \ \forall s,t \in [0,T] \ |\phi(t,u)-\phi(s,u)| \leq |t-s| \ L(|u|) \ [1+\phi(t,u)]$$

H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN [4], 1975 ; le domaine des $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ est indépendant de t et il existe L croissante, a absolument continue tels que :

$$(1.6)\quad \forall u \in D(\phi)\ ,\ \forall s,t \in [0,T]\ \ |\phi(t,u)-\phi(s,u)| \leq |a(t)-a(s)|\ L(|u|)\ [1+\phi(t,u)]$$

on constate en outre l'existence d'un effet régularisant sur la condition initiale.
K. MARUO [13] ; même type d'hypothèses avec a continue à variation totale bornée.
N. KENMOCHI [11], 1975 ; le domaine des $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ peut varier :

$$(1.7)\quad \exists\, r>0\ ,\ \exists\, c_r>0 : \forall\, 0\leq s\leq t\leq T\ ,\ \forall\, z \in D(\phi(s,.))\ ,\ |z| < r\ ,\ \exists\, \tilde{z} \in D(\phi(t,.)) :$$

$$|\tilde{z}-z| \leq c_r\,|t-s|$$

$$\phi(t,\tilde{z}) \leq \phi(s,z) + c_r\,|t-s|\,(1+|\phi(s,z)|)\ .$$

Remarquons de façon générale que même si le domaine des $(\phi(t_i))_{t\in[0,T]}$ est indépendant de t, $t \in [0,T]$, le domaine de $A(t) = \partial\phi(t,.)$ peut varier.

b) <u>Les hypothèses portent sur</u> ϕ^* :

(On rappelle que ϕ^* est la fonction conjuguée de ϕ : $\phi^*(x) = \operatorname*{Sup}_{y\in H}\ \{<x,y>-\phi(y)\})$.

J.J. MOREAU [14], 1972, étudie (1.1) dans le cas où $\phi(t,.)$ est la fonction indicatrice d'un convexe fermé $K(t)$; le problème (1.1) s'interprète alors comme un problème de "rafle" par un convexe mobile ; dans le cas où le convexe est à rétraction absolument continue il met en évidence l'existence d'une solution forte pour un u_o dans $K(0)$.
J.C. PERALBA [15], 1972, généralise en partie ce résultat au cas de fonctions convexes, s.c.i., propres en faisant l'hypothèse :
il existe $k(.)$ lipschitzienne et a dans $W^{1,2}(0,T;\mathbb{R})$ tels que

$$(1.8)\quad \forall\, s,t \in [0,T]\ ,\ \forall\, x \in H\ ,\ \ |\phi^*(t,x)-\phi^*(s,x)| \leq k(x)\ |a(t)-a(s)|$$

(dans le cadre étudié par MOREAU, cela revient à supposer le convexe à variation absolument continue).

c) <u>Les hypothèses portent sur</u> ϕ_λ (où ϕ_λ est la régularisée Yosida de ϕ c'est à dire $\phi_\lambda(x) = \operatorname*{Min}_{y\in H}\ \{\phi(y) + \frac{1}{2\lambda}\,|x-y|^2\}$:

H. ATTOUCH et P. BENILAN et A. DAMLAMIAN et C. PICARD, [2], 1974 :
il existe b et c dans $L^2(0,T)$ tels que

$$(1.9) \qquad \frac{d}{dt}\phi_\lambda(t,x) \leqslant b(t)\ [|x|.|A_\lambda(t,x)| + |A_\lambda(t,x)| + |x| + c(t)]$$

où l'on suppose que pour tout x dans H et tout $\lambda>0$, l'application $t \mapsto \phi_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue.

On vérifie que (1.3), (1.5), (1.6), (1.8) rentrent dans le cadre de l'hypothèse (1.9) qui en est donc une généralisation ; de plus, on obtient à partir de (1.9) l'existence d'une solution au problème (1.1) sous les hypothèses (1.10) ou (1.11) suivantes :

$$(1.10) \qquad \forall\, x \in H,\ \forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \quad \phi(t,x) \leqslant \phi(s,x) + (a(t)-a(s))[c_1\phi(s,x)+c_2|x|+c_3]$$

$$(1.11) \qquad \forall\, x \in H,\ \forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \quad \phi^*(s,x) \leqslant \phi^*(t,x) + (a(t)-a(s))[c_1\phi^*(t,x)+c_2|x|+c_3]$$

où a est croissante et dans $W^{1,2}(0,T;H)$; (remarquons que lorsque a est continue, il est équivalent dans (1.10) ou (1.11) de supposer $a(.)$ croissante ou $a(.)$ à variation bornée cf. (3.10)).

La formulation (1.9) demande elle-même à être améliorée car ne contient pas (1.4) dans le cas $A(t) = \partial\phi(t,.)$, ne contient pas (1.10) dans le cas où a est à variation bornée ; de plus, elle n'est pas stable par addition et se révèle d'un emploi peu commode lorsque l'on impose une contrainte (dépendant du temps) à la solution u de (1.1) ; nous nous proposons de démontrer un résultat (Th. 2.1) qui permette ces différentes généralisations ; c'est l'objet de la partie II.

Dans III, on obtiendra la condition suivante (Théorème 3.1), pour pouvoir résoudre (1.1).

ii) il existe $b \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $a \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$, m mesure positive bornée sur $]0,T[$ et α, β constantes positives tels que :

$$\forall\ \lambda>0\ ,\ \forall\ x \in H\ ,\quad t \mapsto e^{a(t)}[\phi_\lambda(t,x) + \alpha|x|^2 + \beta]$$

est à variation essentielle bornée et vérifie l'inégalité suivante au sens des distributions :

$$d[e^{a(t)}(\phi_\lambda(t,x)+\alpha|x|^2+\beta)] \leqslant b(t)[|A_\lambda(t,x)|(\ x\ +1)]dt + (1+|x|^2)m\ .$$

Cette condition permet d'établir l'existence d'une solution forte à (1.1), sous l'hypothèse (1.10) avec a seulement croissante (Théorème 3.6) ; d'autre part, sa formulation ne fait intervenir les $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ que pour t dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle de $]0,T[$, ce qui est en accord avec la notion de solution de (1.1) et sa formulation variationnelle :

$$\forall v \in L^2(0,T;H) \qquad \int_0^T \phi(t,v(t))dt \geq \int_0^T \phi(t,u(t))dt$$

$$+ \int_0^T \langle f(t) - \frac{du}{dt}(t), v(t)-u(t)\rangle \, dt \; .$$

Dans l'appendice nous donnerons les quelques résultats concernant les fonctions à variation essentielle bornée dont nous avons besoin dans les parties (II) et (III).

Donnons à présent un exemple simple qui ne rentre dans aucun des cadres cités auparavant (et pour lequel nous montrerons l'existence d'une solution forte) ; nous comparerons sur cet exemple les différentes méthodes.

(1.12) <u>Exemple</u>.

On se place dans $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

Soit $(a_i)_{i=1,\ldots,n} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ telles que

a) $\exists\, \alpha,\beta > 0$ tels que $\forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega \quad \alpha \leq a_i(t,x) \leq \beta \quad (i=1,2,\ldots,n)$

b) $\forall\, i=1,\ldots,n \quad t \mapsto a_i(t,.) \in VB(0,T;L^\infty(\Omega))$ (i.e. à variation bornée de $[0,T]$ dans $L^\infty(\Omega)$) ; on considère la fonctionnelle sur $L^2(\Omega)$

$$\phi(t,u) = \begin{cases} 1/2 \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x) \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx & u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty \quad \text{ailleurs} . \end{cases}$$

Cette fonctionnelle $\phi(t,.)$ est convexe, sci, sur $L^2(\Omega)$ de domaine indépendant de $t \in [0,T]$, et son sous-différentiel $A(t) = \partial\phi(t,.)$ dans $L^2(\Omega)$ est défini par

$$D(A(t)) = \{u \in H_0^1 \;/\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Omega)\} \; .$$

$$A(t,u) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) .$$

1°) <u>Condition en</u> $t \in [0,T]$ <u>sur</u> $\phi(t,.)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $s,t \in [0,T]$;

$$|\phi(t,u)-\phi(s,u)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|a_i(t,.)-a_i(s,.)\|_{L^\infty} . \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

or $\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \phi(t,u)$; compte tenu de l'hypothèse b) il existe $a(.)$ à variation bornée telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad |\phi(t,u)-\phi(s,u)| \leq |a(t)-a(s)| \; \phi(t,u) .$$

2°) <u>Condition sur</u> $\overset{*}{\phi}(t,.)$

Etant donné f dans $L^2(\Omega)$

$$\phi^*(t,f) = \min_{\substack{v \in (L^2(\Omega))^N \\ -\operatorname{div} v = f}} \{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{a_i(t,x)} |v_i|^2 \, dx\} .$$

(cf. [5], par exemple) ; on en déduit l'existence d'une fonction à variation bornée b telle que : $\forall f \in L^2(\Omega) \qquad |\phi^*(t,f)-\phi^*(s,f)| \leq |b(t)-b(s)| . \phi^*(t,f)$.

3°) <u>Condition sur</u> $A(t,.)$ (resp. $A_\lambda(t,.)$.

On est amené à supposer $D(A(t)) = D$ indépendant de t , les coefficients $a_i(t,.)$ dans $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ (auquel cas $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$) et l'application $t \longrightarrow a_i(t,.) \in VB(0,T ; W^{1,\infty}(\Omega))$; on déduit alors l'existence d'une fonction $c(.)$ à variation bornée telle que

$$\forall u \in D \qquad |A(t,u)-A(s,u)|_{L^2(\Omega)} \leq |c(t)-c(s)| . |A(t,u)|_{L^2(\Omega)} .$$

Cette condition est elle même équivalente, les $A(t,.)$ étant univoques de domaine indépendant de t (cf. [8], Lemma 3.2), à

$$\forall u \in D , \; \forall \lambda>0 , \; \forall s,t \in [0,T] \quad |A_\lambda(t,u)-A_\lambda(s,u)|_{L^2(\Omega)} \leq |c(t)-c(s)| . |A_\lambda(t,u)|_{L^2(\Omega)} .$$

En utilisant l'inégalité

$$\forall\, u \in H_o^1(\Omega) \qquad |\phi(t,u)-\phi(s,u)| \leqslant |a(t)-a(s)|.\phi(t,u) \ ,$$

et le théorème 3.6 (assurant l'existence d'une solution forte au problème (1.1) sous la condition (1.10) avec seulement a croissante), on obtient l'existence, (sous les seules hypothèses $t \longrightarrow a_i(t,.)$ à variation bornée de $[0,T]$ dans $L^\infty(\Omega)$ et l'existence des constantes α et β telles que $0 < \alpha \leqslant a_i(.) \leqslant \beta$) d'une solution forte au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad ; \quad u(0) = u_o$$

(pour u_o donné dans $L^2(\Omega)$ et f dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on obtient $u \in \mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$, avec $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\forall\, t>0 \ \ u(t,.) \in H_o^1(\Omega))$.

II - <u>UN THEOREME D'EXISTENCE DE SOLUTIONS FORTES POUR DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES D'EVOLUTION</u>.

Nous nous proposons dans cette partie de montrer le résultat suivant où H désigne un espace de Hilbert réel séparable (pour toutes les définitions et résultats utilisés concernant les fonctions à variation essentielle bornée, nous renvoyons à l'appendice):

(2.1) <u>Théorème</u>.

Soit $\phi(t,.)$ une famille de fonctions convexes, semi-continues inférieurement, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$, définies pour t appartenant au complémentaire d'un ensemble négligeable de $]0,T[$; on suppose que pour presque tout t de $]0,T[$, il existe une suite $\phi_n(t,.)$ de fonctions convexes continues sur H vérifiant :

(i) $\forall\, x \in H \qquad \phi_n(t,x) \uparrow \phi(t,x)$ (i.e. converge en croissant).

(ii) L'application $x \longmapsto \phi_n(t,x)$ est Fréchet différentiable, de différentielle $A_n(t,x)$, lipschitzienne en x , de constante de Lipschitz $k_n(t)$ dans $L^2(0,T)$ et telle que $t \longmapsto A_n(t,0)$ soit dans $L^2(0,T;H)$.

(iii) Il existe b dans $L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ et m mesure positive bornée sur $]0,T[$ tels que, pour tout x dans H et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application

$t \longmapsto \phi_n(t,x)$ *est à variation essentielle bornée sur* $]0,T[$ *et vérifie*

$$d\phi_n(t,x) \leq b(t)\left[(|x|+1)|A_n(t,x)|\right]dt + (|x|^2+1)m$$

au sens des mesures.

On pose $\phi(0,x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lim\limits_{t\to 0^+} \text{ess}\ \phi_n(t,x))$ *qui est convexe, sci, sur* H *; alors*

a) pour tout u_o *dans* $D(\phi(0,.))$ *et tout* f *dans* $L^2(0,T;H)$ *il y a existence et unicité de* u *solution forte de*

$$(P) \qquad \frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t) \quad p.p.t \in]0,T[\ ; \ u(0) = u_o$$

avec $u \in \mathscr{C}([0,T] H) \cap W^{1,2}(0,T;H)$ *; de plus l'application* $t \longmapsto \phi(t,u(t))$ *est à variation essentielle bornée.*

b) Pour tout u_o *dans* $\overline{D(\phi(0,.))}$ *et* f *dans* $L^1(0,T;H)$ *avec* $\sqrt{t}\,f$ *dans* $L^2(0,T;H)$ *, il y a existence et unicité de* u *solution de (P) avec* $u \in \mathscr{C}([0,T];H)$ *et* $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$ *dans* $L^2(0,T;H)$ *.*

<u>Démonstration du Théorème 2.1</u>.

L'application $t \longmapsto \phi_n(t,x)$ étant mesurable, l'application $t \longmapsto A_n(t,x)$ est scalairement mesurable et, H étant séparable, fortement mesurable ; d'autre part

$$|A_n(t,u(t)| \leq |A_n(t,0)| + k_n(t)|u(t)|$$

et donc pour tout u dans $\mathscr{C}([0,T];H)$ l'application $t \longmapsto A_n(t,u(t))$ est aussi dans $L^2(0,T;H)$; on en déduit (Théorème de Cauchy-Lipschitz) l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout f dans $L^2(0,T;H)$, de u_n solution de

$$(2.2) \qquad \frac{du_n}{dt} + A_n(t,u_n(t)) = f(t) \qquad u_n(0) = u_o$$

avec $u_n \in \mathscr{C}([0,T];H) \cap W^{1,2}(0,T;H)$.

En vue de passer à la limite sur (2.2) nous utiliserons les résultats suivants dont nous rappelons l'énoncé (cf. [1]).

(2.3) Proposition.

Soit H *un Hilbert réel,* A *un opérateur maximal monotone de graphe faiblement fermé et* $B^n \xrightarrow{R} B$ *une suite convergente d'opérateurs maximaux monotones dans* H *; soit* $f \in H$ *et* $u_n \in H$ *tels que*

$$Au_n + B^n u_n \ni f \ , \quad |u_n| \leq C \ , \quad |Au_n| \leq C \ ;$$

alors $(u_n \rightharpoonup u) \Longrightarrow (Au + Bu \ni f)$.

(2.4) Proposition.

Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ϕ *une suite d'intégrandes convexes normales sur* H *; on suppose*

(i) p.p. $t \in]0,T[$ $\phi_n(t,.)$ *converge en croissant vers* $\phi(t,.)$.

(ii) La fonctionnelle Φ_1 *associée à* ϕ_1 *est sci propre sur* $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$

(où l'on note $\Phi_n(u) = \int_0^T \phi_n(t,u(t))dt$ *la fonctionnelle sur* $\mathcal{H}$ *associée à* ϕ_n*)* *alors* $\partial\Phi_n \xrightarrow{R} \partial\Phi$ *dans* $L^2(0,T;H)$ *où* Φ *est la fonctionnelle associée à* $\phi = \sup \phi_n$.

Pour appliquer ces résultats à la situation présente il suffit de poser : $A = \frac{d}{dt}$ dans $\mathcal{H}$ avec $D(A) = \{u \in W^{1,2}(0,T;H) \ ; \ u(0) = u_o\}$, et de noter que $\partial\Phi_n = \{(u,v) \in \mathcal{H} \ / \text{p.p.t} \quad v(t) = A_n(t,u(t))\}$; (remarquons que les fonctionnelles Φ_n sont partout définies sur $\mathcal{H}$ et donc continues) ; tenant compte d'autre part de l'unicité de u solution forte de (P) et du fait que

$$\left(\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leq C \ ; \ u_n(0) = u_o \right) \Longrightarrow \left(|u_n|_{L^2(0,T;H)} \leq C' \right)$$

on se ramène à montrer que $\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leq C$; nous aurons à cet effet besoin de quelques lemmes préliminaires.

(2.5) Lemme.

Les $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfaisant aux conditions du Théorème 2.1, il existe un ensemble négligeable* E *dans* $[0,T]$ *et deux constantes positives* c_1 *et* c_2 *telles que :*

(2.6) $\forall t \in [0,T]\setminus E\ ,\ \forall x \in H \qquad \phi_n(t,x) \uparrow \phi(t,x)$

(2.7) $\forall t \in [0,T]\setminus E\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in H \qquad \phi_n(t,x) + c_1|x|^2 + c_2 \geq 0$

(2.8) $\forall s,t \in [0,T]\setminus E\ ,\quad 0 \leq s \leq t \leq T\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in H$

$$\phi_n(t,x) \leq \phi_n(s,x) + \int_s^t b(\tau)\,[|A_n(\tau,x)|\,|x| + |A_n(\tau,x)|]dt + (1+|x|^2)m([s,t[) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H ; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pourra trouver un ensemble $E_{n,p}$ de complémentaire négligeable dans $[0,T]$ tel que :

$$\forall s,t \in [0,T]\setminus E_{n,p} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T$$

$$\phi_n(t,x_p) \leq \phi_n(s,x_p) + \int_s^t b(\tau)\,[|A_n(\tau,x_p)|\,|x_p| + |A_n(\tau,x_p)| + |x_p|^2]d\tau \tag{2.9}$$
$$+\ m([s,t[)$$

(cela découle de l'hypothèse (ii) du Théorème (2.1) et de la Proposition (4.3) de l'appendice).

Posons $E = \bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} E_{n,p} \cup E_1$,

où E_1 est l'ensemble de complémentaire négligeable dans $[0,T]$ tel que

$$\forall t \in [0,T]\setminus E_1\ ,\ \forall x \in H\ ,\quad \phi_n(t,x) \uparrow \phi(t,x)\ .$$

On approche alors un x dans H à l'aide des $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et l'on passe à la limite sur (2.9) ce qui donne (2.8) (le passage à la limite sur l'intégrale est justifié par le théorème de Lebesgue :

$$|A_n(\tau,x_p)| \leq |A_n(\tau,0)| + k_n(\tau)|x_p| \quad ;$$

montrons à présent (2.7) ; à cet effet, désignons de façon générale par $t \longmapsto \tilde{\phi}_n(t,x)$ la régularisée à gauche de la fonction $t \longrightarrow \phi_n(t,x)$; (on a $\tilde{\phi}_n(t,x) = \phi_n(t,x)$ p.p.$t \in]0,T[$; par passage à la limite sur (2.8) on obtient

$$\forall s \in [0,T]\setminus E\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad \forall x \in H$$

$$\tilde{\phi}_n(T,x) \leq \phi_n(s,x) + \int_s^T b(\tau)\,[|A_n(\tau,x)|.|x| + |A_n(\tau,x)|]d\tau + (1+|x|^2)m([s,T[) . \tag{2.10}$$

D'autre part la fonction $\tilde{\phi}_1(T,.)$ est convexe, continue sur H ; il existe donc $\alpha,\beta \geq 0$ tels que

$$\forall x \in H \qquad \tilde{\phi}_1(T,x) + \alpha|x| + \beta \geq 0 .$$

Reportant dans (2.10) où l'on prend $n = 1$ on obtient

$\forall s \in [0,T] \setminus E$, $\forall x \in H$

$$\phi_1(s,x) + \alpha|x| + \beta + \int_s^T b(\tau)\left[|A_1(\tau,x)|.|x|+|A_1(\tau,x)|\right]d\tau + (1+|x|^2)m(]0,T[) \geq 0 .$$

Remarquant enfin que

$$|A_1(\tau,x)||x| + |A_1(\tau,x)| \leq (|A_1(\tau,0)|+k_1(\tau)|x|)(|x|+1)$$

et que $\forall s \in [0,T] \setminus E$, $\forall x \in H$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \phi_n(s,x) \geq \phi_1(s,x)$, on obtient (2.7).

(2.11) <u>Lemme</u>.

Soit $u \in \mathcal{C}([0,T];H) \cap W^{1,1}(0,T;H)$ *; l'application* $t \longmapsto \phi_n(t,u(t))$ *est à variation essentielle bornée sur* $]0,T[$ *et l'on a*

p.p. $s,t \in [0,T]$, $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\phi_n(t,u(t)) \leq \phi_n(s,u(s)) + \int_s^t \left[\langle A_n(\tau,u(\tau)), \frac{du}{d\tau}\rangle + q_n(\tau,u(\tau)).b(\tau)\right]d\tau + \int_{[s,t[} (1+|u(\tau)|^2)\, dm(\tau)$$

(et donc au sens des mesures $d\phi_n(t,u(t)) \leq \langle A_n(t,u(t)), \frac{du}{dt}\rangle + q_n(t,u(t)).b(t) + (1+|u(t)|^2)dm(t)$

où l'on a posé $q_n(\tau,x) = |A_n(\tau,x)|(|x|+1)$.

<u>Démonstration</u> : Soient $0 \leq s \leq t \leq T$, $s,t \in [0,T] \setminus E$, E défini par le lemme (2.5)

$$\phi_n(t,u(t)) - \phi_n(s,u(s)) \leq [\phi_n(t,u(t))-\phi_n(t,u(s))] + [\phi_n(t,u(s))-\phi_n(s,u(s))]$$

$$\leq \langle A_n(t,u(t)),u(t)-u(s)\rangle + [\phi_n(t,u(s))-\phi_n(s,u(s))]$$

d'où d'après (2.8)

$$\phi_n(t,u(t)) - \phi_n(s,u(s)) \leq \langle A_n(t,u(t)),u(t)-u(s)\rangle + \int_s^t b(\tau)\ q_n(\tau,u(s))d\tau$$
$$+ (1+|u(s)|^2)\ m([s,t[)$$
$$\leq \langle A_n(t,u(t)),u(t)-u(s)\rangle + \int_s^t b(\tau)\ q_n(\tau,u(s))d\tau$$
$$+ (1+|u(t)|^2)\ m(]0,t[)$$
$$- (1+|u(s)|^2)\ m(]0,s[) + m(]0,t[)(|u(s)|^2-|u(t)|^2).$$

Posons $\psi(\theta) = \phi_n(\theta,u(\theta)) - (1+|u(\theta)|^2)\ m(]0,\theta[)$; on a donc

$\forall\ 0\leq\sigma\leq\theta\leq T$, $\sigma,\theta \in [0,T]\setminus E$

$$\psi(\theta) \leq \psi(\sigma) + \langle A_n(\theta,u(\theta)),u(\theta)-u(\sigma)\rangle + \int_\sigma^\theta b(\tau)\ q_n(\tau,u(\sigma))d\tau + m(]0,\theta[)(|u(\sigma)|^2-|u(\theta)|^2)$$

or $q_n(\tau,u(\sigma)) \leq q_n(\tau,u(\tau) + \widetilde{k}_n(\tau)\rho(|\tau-\sigma|)$ où ρ est continue croissante de $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et nulle en zéro, et où $\widetilde{k}_n$ est dans $L^2(0,T)$; d'où

$$\text{(2.12)}\qquad \psi(\theta) \leq \psi(\sigma) + \langle A_n(\theta,u(\theta)),u(\theta)-u(\sigma)\rangle + \int_\sigma^\theta b(\tau)\ q_n(\tau,u(\tau))d\tau$$
$$+ \rho\ (|\theta-\sigma|) \int_\sigma^\theta \widetilde{k}_n(\tau)\ b(\tau)d\tau + m(]0,\theta[)(|u(\sigma)|^2 - |u(\theta)|^2)$$

On en déduit que $\psi(.)$ est une fonction à variation positive essentielle absolument continue (cf. Appendice) et, à partir de (2.12) on obtient, notant $\widetilde{\psi}$ la régularisée à gauche de la fonction $\psi(\widetilde{\psi}$ est égale presque partout à ψ , et $\widetilde{\psi}$ est à variation positive absolument continue):

p.p. θ , $\sigma\in]0,T[$, $0<\sigma\leq\theta<T$

$$\widetilde{\psi}(\theta) \leq \widetilde{\psi}(\sigma) + \langle A_n(\theta,u(\theta)),u(\theta)-u(\sigma)\rangle + \int_\sigma^\theta b(\tau)\ q_n(\tau,u(\tau))d\tau + \rho\ (|\theta-\sigma|) \int_\sigma^\theta \widetilde{k}_n(\tau)\ b(\tau)d\tau$$
$$- m(]0,\theta[)(|u(\theta)|^2-|u(\sigma)|^2)$$

et $\widetilde{\psi}(.)$ étant presque partout dérivable

$$\text{p.p. }\theta \in \left]0,T\right[\,,\ \frac{d\widetilde{\psi}}{d\theta} = \lim_{\substack{\sigma\to\theta \\ \sigma<\theta}} \frac{\widetilde{\psi}(\theta) - \widetilde{\psi}(\sigma)}{\theta - \sigma} \leqslant \langle A_n(\theta,u(\theta)), \frac{du}{d\theta}\rangle + b(\theta)\, q_n(\theta,u(\theta))$$

$$- m(\left]0,\theta\right[) \frac{d}{d\theta} |u(\theta)|^2 .$$

Or on a $\widetilde{\psi}(\theta) \leqslant \widetilde{\psi}(\sigma) + \int_\sigma^\theta \frac{d\widetilde{\psi}}{d\tau} d\tau$, d'où en intégrant par parties et en revenant à Φ_n:

$$\Phi_n(\theta,u(\theta)) \leqslant \Phi_n(\sigma,u(\sigma)) + \int_\sigma^\theta [\langle A_n(\tau,u(\tau)), \frac{du}{d\tau}\rangle + b(\tau).q_n(\tau,u(\tau))]\, d\tau$$

$$+ \int_{[\sigma,\theta[} |u(\tau)|^2\, dm(\tau) - m(\left]0,\theta\right[)\, |u(\theta)|^2 + m(\left]0,\sigma\right[)|u(\sigma)|^2$$

$$+ m(\left]0,\theta\right[)(1+|u(\theta)|^2) - m(\left]0,\sigma\right[)(1+|u(\sigma)|^2) ,$$

ce qui donne 2.11).

<u>Suite de la démonstration du Théorème 2.1.</u>

a) <u>On suppose</u> u_o <u>dans</u> $D(\Phi(0,.))$.

Ecrivant (2.11) avec $u = u_n$, tenant compte de (2.7) et de la définition de $\Phi(0,.)$, on obtient, en remarquant que $A_n(t,u_n(t)) = f(t) - \frac{du_n}{dt}(t)$:

$$(2.13) \quad \forall\, t \in [0,T] \quad \int_o^t \left|\frac{du_n}{d\tau}\right|^2 d\tau \leqslant \Phi(0,u_o) + c_1|u_n(t)|^2 + c_2$$

$$+ \int_o^t |f(\tau)|\, \left|\frac{du_n}{d\tau}\right| d\tau + \int_o^t b(\tau)\left[|f(\tau)| + \left|\frac{du_n}{d\tau}\right|\right](1+|u_n(\tau)|)\, d\tau$$

$$+ \int_{]0,t[} (1+|u_n(\tau)|^2)\, dm(\tau) .$$

Cette relation obtenue pour presque tout t est vraie pour tout t par continuité.

Posons $M_n(t) = \sup\{|u_n(s)| \ ;\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$. Après transformation élémentaire, (2.13) donne :

$$(2.14) \qquad \int_o^t \left|\frac{du_n}{d\tau}\right|^2 d\tau \leqslant c_3\, M_n^2(t) + c_4 ,$$ où c_3 et c_4 sont deux constantes positives indépendantes de n .

On conclut à l'aide du lemme suivant :

(2.15) <u>Lemme</u>.

Sous l'hypothèse (2.14) on a l'estimation :

$$\int_0^t \left|\frac{du_n}{d\tau}\right|^2 d\tau \leqslant 4^{(8c_3t+1)} [c_3|u_o|^2 + c_4]$$

Démonstration : On voit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation $\frac{d|u|^2}{dt} = 2 \langle u, \frac{du}{dt} \rangle$, que pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$:

$$M_n(t)^2 \leqslant M_n(s)^2 + 2\, M_n(t) \sqrt{|t-s|}\, \left(\int_s^t \left|\frac{du_n}{d\tau}\right|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

soit en utilisant (2.14)

$$M_n(t)^2 \,(1-4\, c_3(t-s)) \leqslant 2\, M_n(s)^2 + 4(t-s)\, c_4 \,. \tag{2.16}$$

Onchoisit $t_k = k.r$ où $r = \frac{1}{8\, c_3}$ et (2.16) donne, après une récurrence simple :

$$M_n(T)^2 \leqslant -\frac{c_4}{3\, c_3} + 4^{(1+\frac{T}{r})} \left(|u_o|^2 + \frac{c_4}{3\, c_3}\right) . \tag{2.17}$$

Reportant alors dans (2.14), on obtient le résultat du Lemme (2.15).

Nous allons à présent établir quelques résultats concernant la solution u de (P) ; notons tout d'abord que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad w - L^2(0,T;H)$$

et que par conséquent

$\forall x \in H$, $\forall t \in [0,T]$ $\langle u_n(t),x\rangle \rightarrow \langle u(t),x\rangle$ (i.e. $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans ω-H).

Reprenant (2.11) avec $u = u_n$ on obtient que,

$$\text{ess}\ V_{[0,T]}\ \phi_n(.,u_n(.)) \leqslant c$$

et donc que les $(\phi_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont relativement compacts dans $L^1(0,T;\mathbb{R})$; on peut donc en extraire une sous suite convergente dans $L^1(0,T;\mathbb{R})$ que nous noterons toujours $\phi_n(u_n)$ pour plus de simplicité ; on a donc $\phi_n(u_n) \xrightarrow{L^1} v$; tenant compte de la croissance de la suite $(\phi_n(t,.))_{n\in\mathbb{N}}$,

$\forall\, n \geqslant n_o$ $\phi_n(t,u_n(t)) \geqslant \phi_{n_o}(t,u_n(t))$ d'où passant à la limite inférieure, et tenant compte de la semi-continuité inférieure de l'application $x \longmapsto \phi_{n_o}(t,x)$,

$$v(t) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t,u_n(t)) \geq \underline{\lim}\, \phi_{n_o}(t,u_n(t)) \geq \phi_{n_o}(t,u(t))$$

et passant au sup. en $n_o \in \mathbb{N}$

(2.18) $\qquad v(t) \geq \phi(t,u(t)) \quad$ p.p.$t \in]0,T[$.

D'autre part,

$$\text{p.p.}t \in]0,T[\quad \phi^n(t,u(t)) \geq \phi^n(t,u_n(t)) + \langle u(t)-u_n(t),\, f(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\rangle \;;$$

intégrant sur $[0,T]$,

$$\int_o^T \phi^n(t,u(t))dt \geq \int_o^T \phi^n(t,u_n(t))dt + \int_o^T \langle u(t)-u_n(t),f(t)\rangle\, dt - \int_o^T \langle u\,(t), \frac{du_n}{dt}\rangle\, dt$$
$$+ \frac{1}{2}|u_n(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_o|^2$$

d'où, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, tenant compte du fait que :

. $\phi^n(t,u(t)) \to \phi(t,u(t))$ dans L^1 (d'après Beppo-Levi, tenant compte (2.7))

. $\phi^n(t,u_n(t)) \to v(t)$ dans $L^1(0,T;\mathbb{R})$

. $u_n \rightharpoonup u$ et $\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ dans $w - L^2(0,T;H)$

. $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ dans w-H

on obtient après réduction

$$\int_o^T \phi(t,u(t))dt \geq \int_o^T v(t)\, dt$$

et comparant ce résultat à (2.18) on obtient : p.p.$t \in]0,T[\quad v(t) = \phi(t,u(t))$;

par conséquent

(2.19) $\qquad \phi^n(.,u_n(.)) \to \phi(.,u(.))$ dans $L^1(0,T;\mathbb{R})$.

(Toute la suite converge et l'on obtient également que $\phi(.,u(.))$ est à variation essentielle bornée).

b) Effet régularisant sur la condition initiale.

Etablissons tout d'abord des estimations sur les solutions approchées : Soit w la solution de (P) associée à un w_o dans $D(\phi(0))$ et un second membre nul ; désignant par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les solutions approchées correspondantes, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les solutions approchées correspondant à u_o et f, ($u_o \in D(\phi(0))$ et $f\in L^2(0,T;H)$)

$$\forall t \in [0,T] \quad |w_n(t)-u_n(t)| \leqslant |w_o-u_o| + \int_o^T |f(\tau)|\, d\tau$$

d'où

$$\text{(2.20)} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C(|u_o|_H;|f|_{L^1}) \ ;$$

d'autre part

$$\text{p.p.}\, t \in]0,T[\quad \phi^n(t,w_n(t)) \geqslant \phi^n(t,u_n(t)) + \langle w_n(t)-u_n(t), f(t)-\frac{du_n}{dt}\rangle$$

$$\geqslant \phi^n(t,u_n(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_n(t)-u_n(t)|^2$$

$$+ \langle w_n(t)-u_n(t), f(t)-\frac{dw_n}{dt}\rangle$$

et intégrant sur $[0,T]$

$$\int_o^T \phi^n(t,u_n(t))dt \leqslant \frac{1}{2}|w_o-u_o|^2 + \int_o^T \phi^n(t,w_n(t))dt + \int_o^T |w_n(t)-u_n(t)|.|f(t) - \frac{dw_n}{dt}|\, dt$$

et par conséquent

$$\text{(2.21)} \qquad \int_o^T \phi^n(t,u_n(t))dt \leqslant C(|u_o|_H,|f|_{L^1}) \ ; \quad \text{compte tenu de (2.19)}$$

$$\text{(2.22)} \qquad \int_o^T \phi(t,u(t))dt \leqslant C(|u_o|_H,|f|_{L^1}) \ .$$

Revenant à (2.11) où l'on remplace u par u_n ; p.p. $s,t \in]0,T[$ $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$

$$\phi_n(t,u_n(t)) \leqslant \phi_n(s,u_n(s)) + [1 + C^2_{(|u_o|,|f|_{L^1})}]\, m([s,t[) + \int_s^t [\langle f(\tau)-\frac{du_n}{d\tau}, \frac{du_n}{d\tau}\rangle$$

$$+ b(\tau)(1 + C_{(|u_o|,|f|_{L^1})})(|\frac{du_n}{d\tau}| + |f(\tau)|)]\, d\tau$$

d'où désignant par ξ une fonction régulière de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^T \xi(t)\, d\phi_n(t,u_n(t)) + \int_0^T \xi(t)\left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 dt \leqslant \left[1 + C^2_{(|u_o|,|f|_{L^1})}\right] \int_{]0,T[} \xi(t)\, dm(t)$$

$$+ \int_0^T \xi(t)\left[|f(t)|.\left|\frac{du_n}{dt}\right| + b(t)\ (1+C_{(|u_o|_H,|f|_{L^1})})(|f(t)|+\left|\frac{du_n}{dt}\right|)\right] dt$$

d'où l'existence d'un $\varepsilon>0$ et d'une fonction continue $C(\cdot)$ tels que

$$\int_0^T \xi(t)\, d\phi_n(t,u_n(t)) + \varepsilon \int_0^T \xi(t)\ \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 dt \leqslant C(|u_o|_H;|f|_{L^1};|\sqrt{\xi}f|_{L^2};|\xi|_{L^\infty}) .$$

Supposant $\xi(0) = 0$, et intégrant par parties le terme $\int_0^T \xi(t)\, d\phi_n(t,u_n(t))$ (cf. Appendice (4.3)), on obtient, tenant compte également de (2.7) et (2.20)

$$\varepsilon \int_0^T \xi(t)\ \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 dt \leqslant \int_0^T \xi'(t)\ \phi_n(t,u_n(t))dt + C(|u_o|_H;|f|_{L^1};|\sqrt{\xi}f|_{L^2};|\xi|_{L^\infty}) .$$

Tenant compte de (2.19) et du fait que l'application $v \longmapsto \int_0^T \xi(t)|v(t)|^2 dt$ est convexe continue et donc faiblement sci sur $L^2(0,T;H)$, on obtient faisant tendre n vers $+\infty$

$$(2.23)\quad \varepsilon \int_0^T \xi(t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \leqslant \int_0^T \xi'(t)\ \phi(t,u(t))dt + C(|u_o|_H;|f|_{L^1};|\sqrt{\xi}f|_{L^2};|\xi|_{L^\infty}).$$

A l'aide de (2.22) et (2.23) on va mettre facilement en évidence l'existence d'un effet régularisant sur la condition initiale ;

Soit $u_o \in \overline{D(\phi(0,.))}$, $u_{o,m} \to u_o$ dans H ; $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $u_{o,m} \in D(\phi(0,.))$;
Soit $f \in L^1(0,T;H)$, $\sqrt{t}\ f \in L^2(0,T;H)$, $f_m \to f$ dans $L^1(0,T;H)$, $\sqrt{t}\ f_m \to \sqrt{t}\ f$ dans $L^2(0,T;H)$ et, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $f_m \in L^2(0,T;H)$; on note u_m la solution de (P) correspondant aux données $u_{o,m}$ et f_m ;

$$\forall\ t \in [0,T],\ \forall\ m \in \mathbb{N} ,\ \forall\ p \in \mathbb{N}\quad |u_m(t)-u_p(t)| \leqslant |u_{o,m}-u_{o,p}| + \int_0^T |f_m(\tau)-f_p(\tau)|d\tau .$$

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathscr{C}([0,T];H)$ et converge uniformément vers une fonction u ; prenant dans (2.23) $\xi(t) = t$ on obtient

$$\varepsilon\int_0^T t\left|\frac{du_m}{dt}\right|^2 dt \leqslant \int_0^T \phi(t,u_m(t))dt + C(|u_{o,m}|_H ; |f_m|_{L^1} ; |\sqrt{t}\, f_m|_{L^2})$$

et tenant compte de (2.22)

$$(2.24) \qquad \left\|\sqrt{t}\,\frac{du_m}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant C\ .$$

La fonction u vérifie donc $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$; il reste à montrer que p.p. $t\in\,]0,T[$ $\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$; or cela découle immédiatement de l'écriture du problème (P) sous la forme suivante ; étant donné $\delta>0$, $\forall\, v \in L^2(\delta,T;H)$

$$\int_\delta^T \phi(t,v(t))dt \geqslant \int_\delta^T \phi(t,u_m(t))dt + \int_\delta^T \langle f(t)-\frac{du_m}{dt},v(t)-u_m(t)\rangle\ dt\ .$$

Passant à la limite lorsque $m \longrightarrow +\infty$, par convergence faible de $\frac{du_m}{dt}$ vers $\frac{du}{dt}$ dans $L^2(\delta,T;H)$ d'après (2.24), par convergence forte de u_m vers u dans $\mathscr{C}([0,T];H)$, et d'après la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $u \longmapsto \int_\delta^T \phi(t,u(t))dt$, on obtient

$$\forall\,\delta>0\ ,\ \forall\, v \in L^2(0,T;H) \quad \int_\delta^T \phi(t,v(t))dt \geqslant \int_\delta^T \phi(t,u(t))dt + \int_\delta^T \langle f(t)-\frac{du}{dt},v(t)-u(t)\rangle dt\ ,$$

ce qui entraîne (cf. [1] par exemple) que p.p.$t\in\,]0,T[$ $f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \partial\phi(t,u(t))$. On vérifie aisément d'autre part que l'application $t \longmapsto t\phi(t,u(t))$ est à variation essentielle bornée ; (on reprend l'inégalité au sens des mesures de (2.11) que l'on "multiplie" par t) .

(2.25) <u>Remarque</u>.

Si l'on suppose que

$$\text{p.p.}t\in\,]0,T[\ ,\ \forall\, x\in D(\partial\phi(t,.))\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad |A_n(t,x)| \leqslant C|\partial\phi^o(t,x)|$$

ce qui est le cas lorsque $A_n(t,x) = A_\lambda(t,x)$, approximation Yosida de $A(t,.)$, on montre directement à partir de (2.11) que l'application $t \longrightarrow \phi(t,u(t))$ est à variation essentielle bornée (pour u_o dans $D(\phi(0,.))$.
Il suffit de remarquer que

$$C^{-1}\,|A_n(t,u(t))| \leqslant |\partial\phi^o(t,u(t))| \leqslant |f(t)|+\left|\frac{du}{dt}\right| \quad \text{p.p.}t\in\,]0,T[\ .$$

III - EXEMPLES ET APPLICATIONS AUX INEQUATIONS VARIATIONNELLES D'EVOLUTION AVEC CONTRAINTES DEPENDANT DU TEMPS.

Nous allons tout d'abord appliquer le Théorème (2.1) en prenant comme approximation de ϕ , l'approximation Yosida ϕ_λ .

(3.1) Théorème.

Soit $\phi(t,.)$ *une famille de fonctions convexes, sci, propres sur* H , *définie pour* t *appartenant au complémentaire d'un ensemble négligeable de* $[0,T]$; *on suppose*

(i) *il existe* α_1 *constante positive et* β_1 *dans* $L^1(0,T)$ *tels que*

$$p.p.\, t \in]0,T[\quad \forall x \in H \quad \phi(t,x) + \alpha_1|x|^2 + \beta_1(t) \geq 0 \; ;$$

(ii) *il existe* $b \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $a \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$, m *mesure positive bornée sur* $]0,T[$, α *dans* $L^\infty(0,T)$ *et* β *dans* $L^1(0,T)$; *tels que :*

$\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$, $t \mapsto e^{a(t)}[\phi_\lambda(t,x)+\alpha|x|^2+\beta]$ *est à variation essentielle bornée et vérifie l'inégalité suivante au sens des distributions :*

$$d[e^{a(t)}(\phi_\lambda(t,x)+\alpha|x|^2+\beta)] \leq b(t)[|A_\lambda(t,x)|(|x|+1)]dt + (1+|x|^2)m \; .$$

Les conclusions du Théorème (2.1) sont alors vérifiées ; en particulier pour u_0 *tel que* $\sup\limits_{\lambda>0} [\lim\limits_{t\to 0^+} \mathrm{ess}\, e^{a(t)}(\phi_\lambda(t,u_0)+\alpha|u_0|^2+\beta)]$ *soit fini, et* f *dans* $L^2(0,T;H)$ *il existe* u *unique solution forte de*

$$\frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t) \quad ; \quad u(0) = u_0 \; .$$

Démonstration : La démonstration repose sur le Théorème (2.1) et un théorème de changement de variable dont nous rappelons l'énoncé :

(3.2) Proposition.

Soit ϕ *une intégrande normale sur* $[0,T] \times H$ *et* $\gamma : [0,\hat{T}] \longrightarrow [0,T]$ *une bijection bilipschitzienne croissante, on pose*

$$\hat{\phi}(\tau,x) = \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau).\phi(\gamma(\tau),x) \quad et \quad \hat{f}(\tau) = f\circ\gamma(\tau).\frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) .$$

Alors $\hat{\phi}$ *est encore une intégrande normale,* $\hat{f}$ *, pour* f *donné dans* $L^2(0,T;H)$ *, est dans* $L^2(0,\hat{T};H)$ *et si* u *est solution de*

$\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$; $u(0) = u_o$ *alors* $v(\tau) = u\circ\gamma(\tau)$ *est solution de*

$\frac{dv}{d\tau}(\tau) + \partial\hat{\phi}(\tau,v(\tau)) \ni \hat{f}(\tau)$; $v(0) = u_o$ *où* u_o *est donné dans* H .

(on remarque que si $\phi(t,.)$ est convexe, il en est de même de $\hat{\phi}(\tau,.)$) .

. Soit alors $\gamma : [0,\hat{T}] \longrightarrow [0,T]$ définie par $\gamma(\int_0^t e^{-a(s)}ds) = t$, i.e. $\gamma^{-1}(t) = \int_0^t e^{-a(s)}ds$ avec par conséquent $\hat{T} = \int_0^T e^{-a(s)}ds$; la fonction γ réalise bien une bijection bilipschitzienne croissante de $[0,\hat{T}]$ sur $[0,T]$.

. Posons $\psi_n(t,x) = e^{a(t)}[\phi_{1/n}(t,x)+\alpha|x|^2+\beta]$ et $\hat{\psi}_n(\tau,x) = \psi_n(\gamma(\tau),x)$.

Montrons que la famille $(\hat{\psi}_n(\tau,.))$ satisfait aux conditions du Théorème (2.1) : elle est tout d'abord définie pour τ appartenant au complémentaire d'un ensemble négligeable (si E négligeable, $\gamma^{-1}(E)$ est négligeable puisque $\int 1_{\{\gamma^{-1}(E)\}}(\tau)\, d\tau = \int_E (\gamma^{-1})'(t)\, dt = 0$) ; pour presque tout $\tau \in]0,\hat{T}[$ la fonction $x \longmapsto \hat{\psi}_n(\tau,x)$ est convexe, Fréchet différentiable de différentielle $\hat{A}_n(\tau,x)$ définie par

$$\hat{A}_n(\tau,x) = e^{a(\gamma(\tau))}[A_{1/n}(\gamma(\tau),x) + 2\alpha.x] .$$

On vérifie immédiatement que la suite $(\hat{\psi}_n(\tau,x))_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $\hat{\psi}(\tau,x) = \psi(\gamma(\tau),x)$ où $\psi(t,x) = e^{a(t)}[\phi(t,x)+\alpha|x|^2+\beta]$; vérifions à présent les points ii) et iii) du Théorème (2.1) :

ii) Soit x_o fixé dans H ; la fonction $t \longmapsto \psi_n(t,x_o)$ étant à variation essentielle bornée, il existe une constante positive c_n telle que

$$\text{p.p.}t \in]0,T[\quad \phi_{1/n}(t,x_o)+\alpha|x_o|^2+\beta \leq e^{-a(t)}c_n \leq c'_n ;$$

par conséquent

$$\phi(t,J_{1/n}(t,x_o)) + \frac{n}{2}|x_o - J_{1/n}(t,x_o)|^2 + \alpha|x_o|^2 + \beta(t) \leqslant c'_n .$$

Tenant compte de l'hypothèse (i) du Théorème (3.1), on déduit pour n suffisamment grand, l'existence de deux fonctions positives c''_n et c'''_n de carré intégrable telles que

$$\text{p.p.}\, t \in]0,T[\quad |A_{1/n}(t,x_o)| \leqslant c''_n(t)$$

$$\text{p.p.}\, \tau \in]0,\hat{T}[\quad |\hat{A}_n(\tau,x_o)| \leqslant c'''_n(\tau).$$

iii) Remarquons tout d'abord que si h, à variation essentielle bornée sur $]0,T[$, satisfait à une inégalité du type $dh \leqslant m_1$ (au sens des mesures) la fonction $\hat{h} = h\circ\gamma$ satisfait à l'inégalité $d\hat{h} \leqslant \hat{m}_1$ où $\hat{m}_1$ est la mesure image par γ de m_1 ; par conséquent, étant donné $\chi \in D(]0,\hat{T}[)$

$$\int_0^{\hat{T}} \chi(\tau)\, d\hat{\psi}_n(\tau,x) \leqslant \int_0^T \chi\circ\gamma^{-1}(t).b(t)(|A_{1/n}(t,x)|\,|x| + |A_{1/n}(t,x)|)dt$$
$$+ \int_0^T \chi\circ\gamma^{-1}(t).(1+|x|^2)\, dm(t) .$$

Notant $\hat{m}$ la mesure image sur $]0,\hat{T}[$, par γ , de m on obtient

$$\int_0^{\hat{T}} \chi(\tau)\, d\hat{\psi}_n(\tau,x) \leqslant \int_0^{\hat{T}} \chi(\tau).\, \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau).b(\gamma(\tau)).(|A_{1/n}(\gamma(\tau),x)|(|x|+1))\, d\tau$$
$$+ \int_0^{\hat{T}} \chi(\tau).(1+|x|^2)\, d\hat{m}(\tau) .$$

Tenant compte de l'expression de $\hat{A}_n(\tau,x)$ en fonction de $A_{1/n}(\gamma(\tau),x)$, il existe une constante positive c telle que

$$d\hat{\psi}_n(\tau,x) \leqslant c.b\circ\gamma(\tau)\,[|\hat{A}_n(\tau,x)|.(|x|+1)+|x|^2+1]\, d\tau + (1+|x|^2)\hat{m}.$$

Appliquant le Théorème (2.1), pour un u_o satisfaisant à la condition de l'énoncé du Théorème (3.1) et f dans $L^2(0,\hat{T};H)$ il existe v unique solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{d\tau} + e^{a(\gamma(\tau))}\partial\phi(\gamma(\tau),v(\tau)) + 2\alpha\, e^{a(\gamma(\tau))}v(\tau) \ni f(\tau) \qquad \text{p.p.}\, \tau \in]0,\hat{T}[\\ v(0) = u_o . \end{cases}$$

Par application de la Proposition (3.2) et d'un théorème de perturbation lipschitzien (cf. [6] par exemple) on déduit alors l'existence de u solution forte de

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t) \quad ; \quad u(0) = u_o \; .$$

Nous allons à présent reprendre les différents types d'hypothèses sur la dépendance des fonctions $\phi(t,.)$ par rapport à t (cf. partie (I)) et montrer qu'elles rentrent dans le cadre du Théorème 3.1 :

(3.3) Définition.

On dira, reprenant les hypothèses faites dans [2], (H. ATTOUCH, P. BENILAN, A. DAMLAMIAN, C. PICARD) qu'une famille de fonctions $(\phi(t,.))_{t \in [0,T]}$ convexes, sci, propres, satisfait à la condition (H') si :

(i) Il existe $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\text{p.p.}t \in]0,T[\quad \forall x \in H \quad \phi(t,x) + \alpha_1|x|^2 + \beta_1 \geq 0 \; .$$

(ii) Pour tout $x \in H$, pour tout $\lambda>0$, l'application $t \longmapsto \phi_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue (i.e. il existe $h_{\lambda,x}$ absolument continue telle que $\forall\ 0\leq s\leq t\leq T \quad \phi_\lambda(t,x) \leq \phi_\lambda(s,x) + |h_{\lambda,x}(t)-h_{\lambda,x}(s)|$) et il existe b et c dans $L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ tels que

$$\forall x \in H\ ,\ \forall \lambda>0\ ,\ \text{p.p.}t \in]0,T[\quad \frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,x) \leq b(t)[|A_\lambda(t,x)|(\,x\,+1)+|x|^2+c(t)]$$

(3.4) Proposition.

Sous l'hypothèse (H'), pour tout u_o *dans* $D(\phi(0,.))$ *et tout* f *dans* $L^2(0,T;H)$ *, il existe* u *unique solution forte de (P) avec* $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ *; il existe en outre* $h \in L^1(0,T)$ *tel que*

$$\forall\ 0\leq s\leq t\leq T \qquad \phi(t,u(t)) \leq \phi(s,u(s)) + \int_s^t h(\tau)\,d\tau$$

(i.e. $t \longmapsto \phi(t,u(t))$ *est à variation positive absolument continue).*
Lorsque u_o *appartient à* $\overline{D(\phi(0,.))}$ *, il existe* u *unique solution de (P) et* $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ *.*

Démonstration : La Proposition (3.4) découle directement du Théorème (3.1) en remarquant de façon générale que si h est une fonction à variation positive absolument continue sur $[0,T]$, elle vérifie :

a) $dh \leqslant h'(t)\,dt$ au sens des mesures

b) $\forall\, t \in [0,T[\quad h(t^+) \leqslant h(t)$.

Prenant $h(t) = \phi_\lambda(t,x)$ il s'en suivra

$$d\phi_\lambda(t,x) \leqslant b(t)[|A_\lambda(t,x)||x|+|A_\lambda(t,x)+|x|^2]dt + b(t)\,c(t)\,dt$$

et $\sup\limits_{\lambda>0}\,[\lim\limits_{t\to 0^+} \phi_\lambda(t,u_0)] \leqslant \sup\limits_{\lambda>0}\,[\phi_\lambda(0,u_0)] = \phi(0,u_0) < +\infty$

et l'on sera bien dans les conditions d'application du Théorème (3.1).

Afin que l'exposé soit complet, nous allons reprendre en détail les nombreux corollaires que l'on peut tirer de la Proposition (3.4) et du Théorème (3.1) ; (cf. également C. PICARD [16]).

(3.5) Définition.

On dira que la famille $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ vérifie l'hypothèse (H), (resp. (H^*)) , s'il existe a croissante (resp. $\tilde{a}$ croissante et dans $W^{1,2}(0,T;\mathbb{R})$) , deux constantes positives c_1 et c_2 tels que

$$\forall\, x \in H\ ,\ \forall\, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \quad \phi(t,x) \leqslant \phi(s,x) + (a(t)-a(s))[\phi(s,x)+c_1|x|^2+c_2]$$

(resp.) $\forall\, x \in H\ ,\forall\, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \quad \phi^*(s,x) \leqslant \phi^*(t,x) + (\tilde{a}(t)-\tilde{a}(s))[\phi^*(t,x)+c_1|x| + c_2]$.

(3.6) Théorème.

Sous l'hypothèse (H) ou (H^*), pour un u_0 dans $D(\phi(0,.))$ et f dans $L^2(0,T;H)$, il existe u unique solution forte de

$$(P)\quad \frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)\ ;\quad u(0) = u_0 \quad \text{avec } \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)\ .$$

De plus pour u_0 dans $\overline{D(\phi(0,.))}$, on obtient u solution de (P) avec $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T;H)$.

Démonstration : a) Soit $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $\lambda>0$, $x \in H$ fixés ; posons or $e^{-a(s)} - e^{-a(t)} - (a(t)-a(s))e^{-a(t)} \geqslant 0$ et g est positive, par conséquent

$$g(t)e^{-a(t)} \leqslant g(s)e^{-a(s)}$$

on a donc

$$(3.7) \quad \forall\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\ ,\ \forall\ \lambda>0\ ,\ \forall\ x\in H \quad e^{-a(t)}[\phi_\lambda(t,x)+\alpha_1|x|^2+\beta_1] \leqslant e^{-a(s)}[\phi_\lambda(s,x)+\alpha_1|x|^2+\beta_1]$$

et l'on est dans les conditions d'application du Théorème (3.1) avec $b = m = 0$; on sait donc résoudre le problème (P) correspondant pour un u_o tel que $\sup\limits_{\lambda>o}\ [\lim\limits_{t\to o^+} e^{-a(t)}(\phi_\lambda(t,u_o)+\alpha_1|u_o|^2+\beta_1)] < +\infty$; or prenant $s = 0$ et faisant tendre t vers zéro dans (3.7)

$$\lim_{t\to o^+} e^{-a(t)}[\phi_\lambda(t,x)+\alpha_1|x|^2+\beta_1] \leqslant e^{-a(0)}[\phi_\lambda(0,x)+\beta_1]$$

et par conséquent pour un u_o dans $D(\phi(0,.))$ la condition est vérifiée ;

b) on fait à présent l'hypothèse (H^*)

On se ramène au cas $\phi(t,.) \geqslant 0$ en considérant

$$\Phi(t,x) = \phi(t,x) - \langle x,x_o\rangle + \sup_{t\in[0,T]} \phi^*(t,x_o) \quad \text{où} \quad x_o\in D(\phi^*(T,.))\ ;$$

on a alors $\Phi(t,.) \geqslant 0$ pour tout t de $[0,T]$; d'autre part

$$\Phi^*(t,x) = \phi^*(t,x+x_o) - \sup_{t\in[0,T]} \phi^*(t,x_o) \quad \text{et} \quad \Phi^* \text{ vérifie encore } (H^*)\ .$$

Le problème associé aux $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ se ramène de façon évidente au problème associé aux $(\Phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ en modifiant le second membre de (P) .
Soient donc $\lambda>0$ et $x\in H$ donnés ; on utilise la relation

$$\phi_\lambda = \phi \,\nabla\, \frac{1}{2\lambda}|.|^2\ , \qquad \phi_\lambda = (\phi \,\nabla\, \frac{1}{2\lambda}|.|^2)^{**} = (\phi^* + \frac{\lambda}{2}|.|^2)^*$$

soit $\phi_\lambda(t,x) = \sup\limits_{y\in H} \{\langle x,y\rangle - \frac{\lambda}{2}|y|^2 - \phi^*(t,y)\}$ le sup étant atteint au point $y = A_\lambda(t,x)$; on en déduit :

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq \{<x,A_\lambda^t x> - \frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t x|^2 - \phi^*(t,A_\lambda^t x)\} - \{<x,A_\lambda^t x> - \frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t x|^2 - \phi^*(s,A_\lambda^t x)\}$$

$$\leq \phi^*(s,A_\lambda^t x) - \phi^*(t,A_\lambda^t x) \quad \text{et d'après } (H^*)$$

$$\leq \quad (\tilde{a}(t)-\tilde{a}(s))\left[\phi^*(t,A_\lambda^t x)+c_1|A_\lambda^t x|+c_2\right] \quad \text{et puisque} \quad \phi(t,.) \geq 0$$

$$\leq \quad (\tilde{a}(t)-\tilde{a}(s))\left[|x|\,|A_\lambda^t x| + c_1|A_\lambda^t x| + c_2\right]$$

on montre d'autre part que $t \longmapsto |A_\lambda^t x|$ est borné ; par conséquent l'application $t \longmapsto \phi_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue et vérifie
$\frac{d}{dt}\phi_\lambda(t,x) \leq \frac{d\tilde{a}}{dt}(t)\left[|x|.|A_\lambda(t,x)| + c_1|A_\lambda(t,x)| + c_2\right]$ p.p.$t \in]0,T[$.
On est donc dans les conditions d'application de la Proposition (3.4).

(3.8) Remarque.

Dans le cas où $\phi(t,.)$ est la fonction indicatrice d'un convexe fermé non vide $K(t)$, la condition (H^*) entraîne l'existence de u solution forte du problème de râfle, lorsque le convexe $K(t)$ est à rétraction absolument continue ; on retrouve ainsi un résultat de MOREAU [14].

(3.9) Remarque.

De façon générale, si l'on sait établir une majoration commune sur les normes uniformes des solutions approchées du problème (P), on peut dans les formulations des Théorèmes (2.1) et (3.1) prendre b, m, a fonctions croissantes de la norme de x dans H .

On obtient ainsi la généralisation suivante d'un résultat des auteurs [4], (cf. également J. WATANABE [18], K. MARUO [13]).

Soit $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctions, convexes, sci, propres sur H ; on suppose que

$\forall\, r>0$, $\exists\, c_r > 0$ et $a_r(.)$ croissante sur $[0,T]$ tels que

$\forall x \in H$, $|x| \leq r$, et $\forall\, 0\leq s\leq t\leq T \quad \phi(t,x) \leq \phi(s,x) + (a_r(t)-a_r(s))(\phi(s,x)+c_r)$.

Les conclusions du Théorème (3.6) sont alors vérifiées.

(3.10) Définition.

On dira que la famille $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ satisfait à la condition (K) si il existe $b \in \mathscr{C}([0,T];H) \cap W^{1,2}(0,T;H)$ et a croissante, (a(.) vérifiant en outre : il existe une subdivision finie $0<t_1<t_2 \ldots <t_n = T$ telle que $\forall\, i = 1,2,\ldots,n \quad a(t_i) - a(t_{i-1}) < 1)$ tels que :

$$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\ ,\quad \forall\, x \in D(\phi(s,.))\ ,\ \exists\ \tilde{x} \in D(\phi(t,.)) \text{ vérifiant}$$

$$(3.11) \qquad \begin{cases} |x-\tilde{x}| \leqslant |b(t)-b(s)|\,[1+|x|] \\ \phi(t,\tilde{x}) \leqslant \phi(s,x) + (a(t)-a(s))\,[|\phi(s,x)|+|x|^2+1]\ . \end{cases}$$

Ce type d'hypothèse a été étudié par KENMOCHI [11] dans le cas a(.) lipschitzien ; nous allons montrer que l'hypothèse (K) rentre dans le cadre du Théorème (3.1) ; (et l'on a encore les conclusions de la Proposition (3.6)).

(i) Montrons tout d'abord l'existence de $\alpha,\ \beta \geqslant 0$ tels que

$$\forall\, t \in [0,T]\ ,\ \forall\, x \in H \quad \phi(t,x) + \alpha|x|^2 + \beta \geqslant 0\ ;$$

choisissons $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = T$ tels que $\forall\, i = 0,\ldots,n-1 \quad |b(t_{i+1})-b(t_i)|<\lambda$ et $|a(t_{i+1})\ldots a(t_i)| < \lambda$ où λ est fixé $0<\lambda<1$; on peut trouver A et B constantes positives telles que

$$\forall\, i = 0,\ldots,n \quad \forall\, z \in H \qquad \phi(t_i,z) + A|z| + B \geqslant 0\ .$$

Soit $t \in [0,T]$; il existe un indice i tel que $t \in [t_{i-1},t_i]$; d'après l'hypothèse (K)

$$\forall\, z \in D(\phi(t,.))\ ,\ \exists\ \tilde{z} \in D(\phi(t_i,.)) \text{ tel que } |z-\tilde{z}| \leqslant |b(t_i)-b(t)|\,[1+|z|] \text{ et}$$

$$\phi(t_i,\tilde{z}) \leqslant \phi(t,z) + (a(t_i)-a(t))\,[|\phi(t,z)|+|z|^2+1]\ .$$

Tenant compte du choix des $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ on obtient

$$\phi(t,z) + A[|z|+\lambda(1+|z|)] + B + \lambda[|\phi(t,z)+|z|^2+1] \geqslant 0$$

soit $\phi(t,z) + \lambda|\phi(t,z)| + A_1|z|^2 + B_1 \geqslant 0$ d'où

$$\phi(t,z) + \alpha|z|^2 + \beta \geqslant 0 \quad \text{en prenant} \quad \alpha = A_1/1-\lambda \quad \text{et} \quad \beta = B_1/1-\lambda .$$

Par conséquent, $|\phi(t,x)| \leqslant \phi(t,x) + 2\alpha|x|^2 + 2\beta$, et dans (3.11), on peut supprimer la valeur absolue portant sur $|\phi(s,x)|$.

(ii) Soit $\lambda>0$ et $x \in H$ fixés et $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$;

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) = \phi(t,J_\lambda^t x) - \phi(s,J_\lambda^s x) + \frac{1}{2\lambda}\left(|x-J_\lambda^t x|^2 - |x-J_\lambda^s x|^2\right) .$$

D'après l'hypothèse (K) il existe $\tilde{z}$ tel que

$$|\tilde{z}-J_\lambda^s x| \leqslant |b(t)-b(s)| \left[1+|J_\lambda^s x|\right]$$

$$\phi(t,\tilde{z}) \leqslant \phi(s,J_\lambda^s x) + (a(t)-a(s)) \left[1+\phi(s,J_\lambda^s x)+|x|^2\right]$$

par conséquent

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leqslant \phi(t,J_\lambda^t x) - \phi(t,\tilde{z}) + (a(t)-a(s))\left[1+\phi(s,J_\lambda^s x)+|x|^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J_\lambda^t x|^2 - |x-J_\lambda^s x|^2\right]$$

or $\phi(t,\tilde{z}) \geqslant \phi(t,J_\lambda^t x) + \langle A_\lambda^t x, \tilde{z}-J_\lambda^t x\rangle$

$$\geqslant \phi(t,J_\lambda^t x) + \langle A_\lambda^t x, \tilde{z}-J_\lambda^s x\rangle + \langle A_\lambda^t x, J_\lambda^s x - J_\lambda^t x\rangle \quad .$$

Tenant compte d'autre part de l'inégalité

$$|x-J_\lambda^t x|^2 - |x-J_\lambda^s x|^2 - 2\langle x-J_\lambda^t x, J_\lambda^s x-J_\lambda^t x\rangle \leqslant 0$$

on obtient

$$(3.12) \quad \phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leqslant (b(t)-b(s))(1+|J_\lambda^s x|)\,|A_\lambda^t x| + (a(t)-a(s))$$
$$\left[\phi_\lambda(s,x)+|x|^2+1\right] .$$

Prenant $s = 0$, on obtient une majoration du type $(\lambda, x$ fixés)

$\forall\, t \in [0,T] \qquad \phi_\lambda(t,x) \leqslant \alpha_1 |A_\lambda^t x| + \beta_1$ où α_1 et β_1 sont des constantes positives (dépendant de λ et $|x|$) ; par conséquent

$$\alpha_1 |A^t_\lambda x| + \beta_1 \geqslant \phi_\lambda(t,x)$$
$$\geqslant \frac{\lambda}{2} |A_\lambda(t,x)|^2 - \alpha |J^t_\lambda x|^2 - \beta$$

et $t \longmapsto |A^t_\lambda x|$ est une application bornée sur $[0,T]$; on en déduit aisément l'existence de constantes positives c_1 , c_2 telles que

$\forall\ x \in H$, $\forall\ \lambda, 1 \geqslant \lambda > 0, \forall t \in [0,T]$ $|J^t_\lambda x| \leqslant c_1|x| + c_2$; revenant à (3.12)

$$(\phi_\lambda(t,x)+|x|^2+1) - (\phi_\lambda(s,x)+|x|^2+1) \leqslant c|b(t)-b(s)|\ [|A^t_\lambda x|\,|x|+|A^t_\lambda x|]$$
$$+ (a(t)-a(s))[\phi_\lambda(s,x)+|x|^2+1]$$

ce qui d'après le même argument que dans (3.6) (hypothèse (H)) entraîne que l'application $t \longmapsto e^{-a(t)}[\phi_\lambda(t,x)+|x|^2+1]$ est à variation positive absolument continue et vérifie

$$\frac{d}{dt}\, e^{-a(t)}[\phi_\lambda(t,x)+|x|^2+1] \leqslant c_1 \left|\frac{db}{dt}\right| [|A^t_\lambda x|.|x|+|A^t_\lambda x|]$$

et l'on est donc bien dans les conditions d'application du Théorème (3.1), la condition sur u_o d'après un argument déjà utilisé étant satisfaite pour $u_o \in D(\phi(0,.))$.

(3.13) Remarque.

On peut dans (3.11) prendre a croissante quelconque, à condition de remplacer dans la même formule $|\phi|$ par ϕ ;

(3.14) Remarque.

Toujours en restant dans le cadre du Théorème (3.1) on aurait pu faire l'hypothèse $(\tilde{K})$ suivante légèrement différente de l'hypothèse (K) .

Il existe a et b dans $W^{1,2}(0,T;\mathbb{R})$ tels que :

$\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $\forall\ z \in D(A(s)))$ $\exists\ \tilde{z} \in D(\phi(t,.)$ tel que

$$\begin{cases} |z-\tilde{z}| \leqslant |b(t)-b(s)|\ [1+|z|] \\ \phi(t,\tilde{z}) \leqslant \phi(s,z) + |a(t)-a(s)|\ [|A^o(s,z)|\,|z|+|A^o(s,z)|+1] . \end{cases}$$

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en remarquant que l'on est amené à appliquer $(\tilde{K})$ avec $z = J_\lambda^s x$ et que $|A^o(s,J_\lambda^s x)| \leq |A_\lambda^s x|$.

. Examinons à présent le lien entre le Théorème (3.1) et la condition de CRANDALL-PAZY [8] dans le cas où $A(t) = \partial\phi(t,.)$; les $A(t)$ sont de domaine fixe D ; supposons $0 \in D$ et $A(t,0) = 0$; on a alors (prenant $\phi(t,0) = 0$)

$$\forall x \in H \ , \ \ \forall t \in [0,T] \quad \phi_\lambda(t,x) = \int_0^1 \langle A_\lambda(t,\tau x),x\rangle \, d\tau$$

et si les A_λ vérifient :

$\forall s,t \in [0,T]$, $\forall \lambda>0$ $\quad |A_\lambda(t,x)-A_\lambda(s,x)| \leq |a(t)-a(s)|.L(|x|)$, (condition de Crandall-Pazy), les $\phi_\lambda(t,.)$ vont vérifier

$$|\phi_\lambda(t,x)-\phi_\lambda(s,x)| \leq \int_0^1 |A_\lambda(t,\tau x)-A_\lambda(s,\tau x)|.|x| \, d\tau$$

$$|\phi_\lambda(t,x)-\phi_\lambda(s,x)| \leq |a(t)-a(s)|.L(|x|).|x|$$

et lorsque a est à variation bornée, on en déduit pour u_o dans $D(\phi(0,.))$ l'existence de u solution forte de (P) ; on a de plus effet régularisant sur la condition initiale pour $u_o \in \overline{D(\phi(0,.))}$; ce résultat généralise donc en partie le résultat de CRANDALL-PAZY [8] où a est supposé à variation bornée continue.

<u>Application aux inéquations variationnelles avec contrainte dépendant du temps</u>.

On se propose d'étudier le problème "perturbé"

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) + \partial I_{K(t)} u(t) \ni f(t) \\ \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

où $K(t)$ désigne un convexe fermé dans l'espace H ; à cet effet on est amené à étudier la stabilité pour l'addition de la condition de dépendance en $t \in [0,T]$ du Théorème 2.1.

(3.15) <u>Proposition</u>.

Soit $(\phi_n(t,.))_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t \in [0,T]}}$ *et* $(\psi_n(t,.))_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t \in [0,T]}}$ *deux familles de fonctions* *convexes continues, satisfaisant à la condition de dépendance en* t *du Théorème (2.1) :*

$$(3.16)\quad \begin{cases} d\phi_n(t,x) \leq b_1(t)\left[|\partial\phi^n(t,x)|(|x|+1)\right] dt + (1+|x|^2)\, m_1 \\ d\psi_n(t,x) \leq b_2(t)\left[|\partial\psi^n(t,x)|(|x|+1)\right] dt + (1+|x|^2)\, m_2 . \end{cases}$$

On suppose de plus que leurs sous-différentiels sont liés par la relation

$$(3.17)\quad (\partial\phi_n(t,x),\partial\psi_n(t,x)) \geq - b(t)\left[(1+|x|)(|\partial\phi^n(t,x)|+|\partial\psi_n(t,x)|)\right] - c(t)(1+|x|^2).$$

Alors $j_n^t = \phi_n^t + \psi_n^t$ *vérifie*

$$dj_n(t,x) \leq 2(b_1+b_2)(t)(|\partial j_n(t,x)|(1+|x|))dt + (1+|x|^2)\left[m_1+m_2+8(b_1+b_2)(b+c^{1/2})dt\right]$$

où b, b_1, $b_2 \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $c \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, m_1 *et* $m_2 \in \mathcal{M}_B^+(0,T)$.

Démonstration : D'après (3.16) ajoutant les deux inégalités, on obtient

$$(3.18)\quad dj_n(t,x) \leq (b_1+b_2)(t)\left[(|\partial\phi^n(t,x)|+|\partial\psi^n(t,x)|)(1+|x|)\right]dt + (1+|x|^2)(m_1+m_2) .$$

Posons $u = \partial\phi^n(t,x)$, $v = \partial\psi^n(t,x)$, $\alpha = b(t)(1+|x|)$, $\beta = c(t)(1+|x|^2)$.
D'après (3.17) $\langle u,v\rangle \geq -\alpha(|u|+|v|) - \beta$; on utilise le lemme élémentaire suivant :

(3.19) Lemme.

Soient u, v *deux vecteurs de* H , *et* α *et* β *deux constantes positives, tels que*

$$\langle u,v\rangle \geq - \alpha(|u|+|v|) - \beta$$

alors $|u|+|v| \leq 2|u+v| + 4(\alpha+\sqrt{\beta})$.

On aura alors reprenant (3.18)

$$dj_n(t,x) \leq (b_1+b_2)(t)\left[(1+|x|)(2|\partial j_n(t,x)|+4b(t)(1+|x|)+4c(t)^{1/2}(1+|x|^2)^{1/2})\right]dt + (1+|x|^2)(m_1+m_2) ,$$

soit

$$dj_n(t,x) \leq 2(b_1+b_2)(t)\left[(1+|x|)|\partial j_n(t,x)|\right]dt + (1+|x|^2)\left[m_1+m_2+8(b_1+b_2)(b+c^{1/2})dt\right] .$$

La Proposition (3.15) à elle seule ne permet pas de conclure à l'existence d'une solution u au problème

$$(3.21) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) + \partial\psi(t,u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

où $\phi = \sup \phi_n$, $\psi = \sup \psi_n$ et où ϕ_n et ψ_n sont liés par la condition (3.17) ; le problème que l'on résoud est

$$(3.22) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial(\phi+\psi)(t,u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = u_o \ . \end{cases}$$

Nous allons montrer que la condition (3.17) assure en fait la maximale monotonie de l'opérateur $\partial\phi(t,.) + \partial\psi(t,.)$, et donc, que (3.21) et (3.22) sont équivalents ; nous allons donc dégager ce résultat préliminaire et ensuite énoncer le théorème général concernant l'équation (3.21).

(3.23) Lemme.

(On se place dans un espace de Hilbert réel H).

Soient ϕ^n , ψ^n deux suites croissantes de fonctions convexes différentiables, et $\phi = \lim \uparrow \phi_n$, $\psi = \lim \uparrow \psi_n$; on suppose qu'il existe

a) trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées avec $y_n = \partial\phi^n(x_n)$, $z_n = \partial\psi^n(x_n)$.

b) deux fonctions croissantes b et c à valeurs réelles positives telles que :

$$(3.24) \ \forall u \in H \ , \forall n \in \mathbb{N} \quad \langle\partial\psi^n(u),\partial\phi^n(u)\rangle \geq - b(|u|)(|\partial\phi^n(u)|+|\partial\psi^n(u)|) - c(|u|) ,$$

alors $\partial\psi + \partial\phi$ est maximal monotone et donc $\partial(\phi+\psi) = \partial\phi + \partial\psi$.

Démonstration : Soit $v \in H$; désignons par u_n le vecteur de H

(3.25) $$u_n + \partial\phi^n(u_n) + \partial\psi^n(u_n) = v$$

nous allons montrer que $u_n \rightharpoonup u$ avec $u + \partial\phi(u) + \partial\psi(u) \ni v$ ce qui entraînera que $\partial\phi + \partial\psi$ est maximal monotone ;
comparant (3.25) à

(3.26) $$x_n + \partial\phi^n(x_n) + \partial\psi^n(x_n) = w_n \quad \text{avec} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{bornées}$$

on obtient $$|u_n - x_n| \leqslant |w_n - v| \ ;$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée;par conséquent, tenant compte de (3.24), il existe b et c constantes positives telles que

(3.27) $$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \langle \partial\psi^n(u_n), \partial\phi^n(u_n)\rangle \geqslant -b(|\partial\phi^n(u_n)| + |\partial\psi^n(u_n)|) - c \ .$$

Multipliant (3.25) par $\partial\phi^n(u_n) + \partial\psi^n(u_n)$, tenant compte de (3.27) et du lemme(3.19), on obtient :

$$|\partial\phi^n(u_n)| \leqslant c \ , \quad |\partial\psi^n(u_n)| \leqslant c \ .$$

Soit $u_{n(k)} \xrightarrow{w-H} u$, $\partial\phi^{n(k)}(u_{n(k)}) \xrightarrow{w-H} \alpha$, $\partial\psi^{n(k)}(u_{n(k)}) \longrightarrow \beta$; on a $u + \alpha + \beta = v$.

Montrons que $\beta \in \partial\psi(u)$; par symétrie il s'en suivra que $\alpha \in \partial\phi(u)$; soit $\xi \in H$;

$$\psi^n(\xi) \geqslant \psi^n(u_n) + \langle v - u_n - \partial\phi^n(u_n), \xi - u_n\rangle \quad \text{d'où}$$

$$\psi(\xi) \geqslant \psi(u) + \langle v-u-\alpha, \xi\rangle + \langle v-u, -u\rangle + \underline{\lim} \langle \partial\phi^{n(k)}(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle$$

or $$\phi^n(u) \geqslant \phi^n(u_n) + \langle \partial\phi^n(u_n), u - u_n\rangle \quad \text{et par conséquent,}$$

$$\underline{\lim} \langle \partial\phi^{n(k)}(u_{n(k)}), u_{n(k)}\rangle \geqslant \langle \alpha, u\rangle$$

il en résulte que

$$\forall\, \xi \in H \qquad \psi(\xi) \geqslant \psi(u) + \langle v-u-\alpha, \xi - u\rangle \quad \text{soit} \quad \beta = v - u - \alpha \in \partial\psi(u) \ .$$

Nous sommes en mesure à présent d'énoncer le théorème suivant :

(3.28) Théorème.

Soient $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux familles de fonctions convexes satisfaisant aux conditions du Théorème (2.1) ; on suppose en outre :*

a) il existe b *dans* $L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ *et* c *dans* $L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ *tels que*

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ p.p.t\in\,]0,T[\quad (\partial\phi^n(t,x),\partial\psi^n(t,x)) \geq -\,b(t)(1+|x|)(|\partial\phi^n(t,x)|+|\partial\psi^n(t,x)|)$$
$$-\,c(t)(1+|x|^2)\ ;$$

b) il existe une suite de fonctions $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $p.p.t\in\,]0,T[$ *les suites* $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\partial\phi^n(t,x_n(t)))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\partial\psi^n(t,x_n(t)))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées.*
Pour tout u_o *dans* $D(\phi(0,.))\cap D(\psi(0,.))$ *et tout* f *dans* $L^2(0,T;H)$ *il existe alors* u *unique,* $u\in\mathscr{C}([0,T];H)\cap W^{1,2}(0,T;H)$, *solution de*

$$(3.29)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) + \partial\psi(t,u(t)) \ni f(t) \\ \\ u(0) = u_o\ . \end{cases}$$

Pour tout u_o *dans* $\overline{D(\phi(0,.))\cap D(\psi(0,.))}$, f *dans* $L^1(0,T;H)$ *et* $\sqrt{t}\,f$ *dans* $L^2(0,T;H)$, *il existe* u *unique solution de (3.29) avec* $\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt}$ *dans* $L^2(0,T;H)$.

Démonstration : Nous allons appliquer le Théorème (2.1) à la suite $(\phi_n+\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $p.p.t\in\,]0,T[\quad \forall x\in H \quad (\phi_n+\psi_n)(t,x) \uparrow (\phi+\psi)(t,x)$.

ii) L'application $x \longrightarrow (\phi_n+\psi_n)(t,x)$ est Fréchet différentiable de différentielle $\partial\phi_n(t,x) + \partial\psi_n(t,x)$ lipschitzienne en x et $t \longrightarrow \partial\phi_n(t,0) + \partial\psi_n(t,0)$ est dans $L^\infty(0,T;H)$.

iii) La condition de compatibilité (3.17) entraîne, compte tenu de la Proposition (3.15) l'existence d'une fonction $\tilde{b}$ dans $L^2(0,T;H)$ et d'une mesure positive m tels que

$$d(\phi_n+\psi_n)(t,x) \leq \tilde{b}(t)(|x|+1)|\partial(\phi_n+\psi_n)(t,x)| + (1+|x|^2)m\ .$$

D'autre part

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big[\lim_{t\to o^+}\text{ess}(\phi_n+\psi_n)(t,u_o)\Big] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big[\lim_{t\to o^+}\text{ess}\ \phi_n(t,u_o)\Big] + \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big[\lim_{t\to o^+}\text{ess}\ \psi_n(t,u_o)\Big]$$

et pour u_o dans $D(\phi(0,.)) \cap D(\psi(0,.))$ cette quantité est finie.

On conclut en remarquant que presque pour tout t de $]0,T[$, $\partial(\phi(t,.)+\psi(t,.)) = \partial\phi(t,.)+\partial\psi(t,.)$ ce qui résulte des hypothèses a) et b) et du Lemme (3.23).

(3.30) Corollaire.

Soit $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctions convexes satisfaisant aux conditions du Théorème (2.1) avec pour $\phi_n(t,.)$ les approximées Yosida de $\phi(t,.)$. Soit $(K(t))_{t\in[0,T]}$ une famille de convexes fermés non vides dans H ; on suppose

a) Il existe une fonction $a(.)$ dans $L^2(0,T;H)$ telle que :

$$\forall \lambda>0,\ p.p.\, t\in]0,T[\qquad (I+\lambda(\partial\phi(t,.)-a(t)))^{-1}K(t) \subset K(t) \ ;$$

b) l'application $t \longrightarrow K(t)$ est à rétraction absolument continue, (cf. MOREAU [14]), ou plus généralement $I^*_{K(t)}$ satisfait à (H^*) (cf. Définition (3.5)). Alors pour tout u_o dans $D(\phi(0,.)) \cap K(0)$ et tout f dans $L^2(0,T;H)$ il existe u unique solution forte de

$$(3.31) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) + \partial I_{K(t)}u(t) \ni f(t) \\ \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

et $u\in W^{1,2}(0,T;H) \cap \mathcal{C}([0,T];H)$; de plus pour $u_o \in \overline{D(\phi(0,.))} \cap K(0)$, f dans $L^1(0,T;H)$ et $\sqrt{t}\, f$ dans $L^2(0,T;H)$ il existe u unique solution de (3.31) avec $\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T;H)$.

(Dans ce qui précède $I_{K(t)}(.)$ désigne la fonction indicatrice du convexe $K(t)$) .

Démonstration : On applique le Théorème (3.28) aux familles $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ et $(\psi(t,.))_{t\in[0,T]}$ avec $\psi(t,.) = I_{K(t)}$, et en prenant comme approximation, l'approximation Yosida ; les $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ satisfont aux conditions du Théorème (2.1) par hypothèse, ainsi que les $(\psi(t,.))_{t\in[0,T]}$ d'après l'hypothèse b) et la Proposition (3.6).

Vérifions le point a) du Théorème (3.28) :

Notons tout d'abord que $\psi_\lambda(t,x) = \frac{1}{2\lambda}|x-P(t,x)|^2 \qquad (\psi(t,.) = I_{K(t)}(.))$

$$(I+\lambda\partial\psi(t,.))^{-1}x = P(t,x) \ , \quad \partial\psi_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda}(x-P(t,x))$$

où $P(t,x)$ désigne la projection du point x de H sur le convexe fermé non vide $K(t)$; montrons que presque pour tout t de $]0,T[$

$$(3.32) \qquad \forall\lambda>0 \ , \ \forall x\in H \quad \langle\partial\phi_\lambda(t,x),\partial\psi_\lambda(t,x)\rangle \geqslant -|a(t)|\cdot|\partial\psi_\lambda(t,x)| \ .$$

Posons pour simplifier les notations $\partial\phi_\lambda(t,.) = A_\lambda(.)$ et $P(t,.) = P(.)$ (on raisonne à t fixé), $J_\lambda(.) = (I+\lambda\partial\phi(t,.))^{-1}(.)$, $a(t) = a$, $K(t) = K$.

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda x,x-Px\rangle &= \langle A_\lambda x-A_\lambda Px,x-Px\rangle + \langle A_\lambda Px,x-Px\rangle \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda}\langle Px-J_\lambda(Px+\lambda a)+J_\lambda(Px+\lambda a)-J_\lambda Px,x-Px\rangle \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda(Px+\lambda a)-J_\lambda Px,x-Px\rangle \end{aligned}$$

compte tenu du fait que $J_\lambda(Px+\lambda a)\in K$ d'après l'hypothèse a). Par conséquent $\langle A_\lambda x,x-Px\rangle \geqslant -|a|\cdot|x-Px|$, d'où (3.32). Le point b) du Théorème (3.28) résulte encore de l'hypothèse a) que l'on écrit sous la forme $(I+\lambda\partial\phi(t,.))^{-1}(K(t)+\lambda a(t)) \subset K(t)$ et qui assure que $D(\partial\phi(t,.))\cap K(t) \neq \emptyset$; soit $x(t)\in D(\partial\phi(t,.))\cap K(t)$ et $y(t)\in\partial\phi(t,x(t))$; on a bien $|\partial\phi_\lambda(t,x(t))| \leqslant |y(t)|$ et $|\partial\psi_\lambda(t,x(t))| = 0$ p.p. $t\in]0,T[$.

(3.33) <u>Remarque</u>.

Le problème (3.31) a été abordé par H. ATTOUCH et P. BENILAN et A. DAMLAMIAN et C. PICARD, [3], par une méthode qui consiste à traiter le terme $\partial I_{K(t)}(.)$ comme une "perturbation du problème initial" $\frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$; cette méthode reprend en la systématisant une technique développée par H. BREZIS dans [7], concernant le même problème (3.31), et conduit à des résultats voisins de ceux énoncés dans (3.30).

(3.34) <u>Exemple</u>.

Les conclusions du Corollaire (3.30) sont vérifiées dans l'exemple suivant : $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

$A(t)$ comme dans l'exemple (1.12)

$K(t) = \{u\in L^2(\Omega) \ / \ u(x) \leqslant \psi(x,t) \ \text{ p.p. } x\in\Omega\}$ avec

$$\begin{cases} t \longrightarrow A(t)\psi(t,.) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \text{p.p.t} \quad \psi(t,.) \geqslant 0 \quad \text{sur la frontière de} \quad \Omega \\ \exists \; a \quad \text{absolument continue} : \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \quad \|(\psi(s,.)-\psi(t,.))^+\|_{L^2(\Omega)} \leqslant a(t)-a(s) \end{cases}$$

IV - APPENDICE.

On se propose d'établir quelques résultats concernant les fonctions définies presque partout, localement intégrables, dont la dérivée au sens des distributions est une mesure bornée ;

(4.1) Définitions.

a) Soit h définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$; on note

$$V_A(h) = \sup \sum |h(t_{i+1})-h(t_i)|$$

le sup étant pris sur l'ensemble des suites croissantes finies (t_i) dans A ; de même

$$V_A^+(h) = \sup \sum (h(t_{i+1})-h(t_i))^+ \; .$$

b) Soit h définie presque partout sur B sous ensemble de $\mathbb{R}$; on pose

$$\text{ess } V_B(h) = \inf V_A(h)$$

l'inf. étant pris sur l'ensemble des parties de complémentaires négligeables dans B sur lesquelles h est définie ;
(ess $V_B(h)$ est ce que nous appellerons la variation essentielle de h) ; on définit de même la variation positive essentielle ess $V_B^+(h)$.

c) On dit que h est à variation essentielle bornée sur B si ess $V_B(h) < +\infty$.

(4.2) Proposition.

Soit h définie presque partout sur $]a,b[$ et à valeurs réelles ; il y a équivalence entre

(i) h *est égale presque partout à une fonction à variation bornée sur* $[a,b]$.

(ii) *La dérivée au sens des distributions de* h *sur* $]a,b[$ *est une mesure borélienne bornée ; (et* h *est localement intégrable).*

(iii) h *est à variation essentielle bornée (i.e.* $\operatorname{ess} V_{]a,b[}(h) < +\infty$) .

(iv) h *est essentiellement bornée et à variation positive essentielle bornée (i.e.* $\operatorname{ess} V^+_{]a,b[}(h) < +\infty$) .

De plus, il existe une unique fonction $\tilde{h}$ *à variation bornée sur* $[a,b]$ *continue à gauche sur* $]a,b]$ *, continue à droite en* a *telle que*

$$\tilde{h}(t) = h(t) \quad p.p.\, t \in]a,b[$$

et

$$V_{[a,b]}\tilde{h} = \operatorname{ess} V_{]a,b[}(h)$$

$$= \text{masse totale de la mesure } |dh| .$$

$$V^+_{[a,b]}\tilde{h} = \operatorname{ess} V^+_{]a,b[}(h)$$

$$= \text{masse totale de la mesure } (dh)^+ .$$

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (iv) évident .

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Soit A_1 tel que $V^+_{A_1}(h)$ soit fini et A_2 un ensemble sur lequel h soit borné (A_1 et A_2 de complémentaires négligeables dans $]a,b[$) ; soit $A = A_1 \cap A_2$ de complémentaire évidemment négligeable et $(t_i)_{i=1}^n$ une suite croissante finie dans A ;
de l'égalité entre réels $|\beta-\alpha| = 2(\beta-\alpha)^+ - (\beta-\alpha)$, on déduit

$$\sum |h(t_{i+1}) - h(t_i)| \leq 2V^+_A(h) + h(t_1) - h(t_n)$$

puis

$$V_A(h) \leq 2V^+_{A_1}(h) + 2 \sup_{A_2} |h|$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) par une bijection croissante de $]a,b[$ sur $\mathbb{R}$, on se ramène au cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$; soit $(\rho_\varepsilon)_{\rho>0}$ un noyau régularisant, positif, à support dans $[-\varepsilon,+\varepsilon]$, $\int \rho_\varepsilon(t)\,dt = 1$; on pose

$$h_\varepsilon = h * \rho_\varepsilon \quad .$$

Montrons que $V_{\mathbb{R}}(h_\varepsilon) \leqslant \text{ess } V_{\mathbb{R}}(h)$ (i.e. $|h'_\varepsilon|_{L^1} \leqslant \text{ess } V_{\mathbb{R}}(h)$) .
Soit A de complémentaire négligeable dans $\mathbb{R}$ tel que $V_A(h)$ soit fini ; soit $(t_i)_{i=1}^n$ une suite finie croissante de $\mathbb{R}$; par définition de h_ε

$$h_\varepsilon(t_{i+1}) - h_\varepsilon(t_i) = \int [h(t_{i+1}-\tau) - h(t_i-\tau)]\,\rho_\varepsilon(\tau)\,d\tau \ .$$

Or le point $t_i - \tau$ appartient à A pour tout i $(i = 1,\dots,n)$ et pour presque tout τ ; par addition, on obtient

$$\sum |h_\varepsilon(t_{i+1}) - h(t_i)| \leqslant V_A(h)$$

et par conséquent

$$V_{\mathbb{R}}(h_\varepsilon) \leqslant \text{ess } V_{\mathbb{R}}(h)$$

(de plus $|h_\varepsilon|_{L^\infty} \leqslant \text{ess sup } |h|$) .

Il existe donc une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, telle que

$$h_{\varepsilon_n} \longrightarrow h \text{ presque partout et dans } L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

et h'_{ε_n} converge vaguement vers une mesure bornée m .

Par conséquent, h a pour dérivée au sens des distributions une mesure bornée m ;

(ii) $\Longrightarrow$ (i) on désigne toujours par h_ε les régularisés par convolution de h , et l'on montre par un argument classique que

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dh_\varepsilon}{dt} \right| dt \leqslant C \quad \text{(comme auparavant on se ramène à }]a,b[= \mathbb{R})$$

L'ensemble $A = \{t \in \mathbb{R} \ / \ h_\varepsilon(t) \longrightarrow h(t)\}$ est de complémentaire négligeable ; (L'argument suivant est tiré de [6] Proposition A.5, nous en reprenons l'idée afin que l'exposé soit complet). Etant donnée une suite finie $(t_i)_{i=1}^n$ de A on a

$$\sum_{i=1}^{n} |h_\varepsilon(t_i)-h_\varepsilon(t_{i-1})| \leqslant C$$

et à la limite lorsque ε tend vers zéro, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |h(t_i)-h(t_{i-1})| \leqslant C \quad \text{pour toute suite de } A .$$

On pose alors

$$V(t) = \sup \{\sum |h(t_i)-h(t_{i-1})|\}$$

le sup étant pris sur toutes les suites finies de $A \cap]-\infty,t]$; la fonction V est croissante et pour tout $s,t \in A$ avec $s \leqslant t$ on a

$$|h(t)-h(s)| \leqslant V(t) - V(s) .$$

Donc pour tout $t \in]-\infty,+\infty]$, $\lim\limits_{\substack{s\to t \\ s<t \\ s\in A}} h(s) = \tilde{h}(t)$ existe et $\lim\limits_{\substack{s\to -\infty \\ s\in A}} h(s) = \tilde{h}(-\infty)$ existe ; revenant à $[a,b]$ on a ainsi défini une fonction $\tilde{h}$ presque partout égale à h , à variation bornée, continue à gauche sur $]a,b]$, continue à droite en a .

(4.3) <u>Proposition.</u>

Soit f à variation essentielle bornée sur $]a,b[$; alors

i) pour presque tout s,t de $]a,b[$, $s \leqslant t$,

$$f(t) - f(s) = df([s,t[)$$

et par conséquent

$(df \leqslant m$ au sens des mesures$) \Longrightarrow ($p.p. s,t , $s \leqslant t$, $f(t) \leqslant f(s) + m([s,t[))$.

ii) Etant donné ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on a pour presque tout s et t de $]a,b[$, $s \leqslant t$

$$\int_{]s,t[} \phi \, df = \phi(t)\, f(t) - \phi(s)\, f(s) - \int_s^t f(t)\, \phi'(t)\, dt \, .$$

Démonstration : D'après la Proposition (4.2) il existe $\tilde{f}$ à variation bornée sur $[a,b]$, continue à gauche sur $]a,b]$, égale à f presque partout ; or c'est un résultat classique (cf. [17] par exemple) que $\tilde{f}$ vérifie alors

$$\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s) = d\tilde{f}([s,t[) = df([s,t[)$$

pour tout $0<s\leq t\leq T$; on en déduit i).

On vérifie d'autre part que la dérivée au sens des distributions et la mesure de Riemann-Stieljes coïncident, et l'on en déduit la formule ii) d'intégration par parties.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE.

H. ATTOUCH

[1] *Mesurabilité et Monotonie.*
A paraître.

H. ATTOUCH, P. BENILAN, A. DAMLAMIAN, C. PICARD

[2] *Inéquations variationnelles d'évolution avec conditions unilatérales.*
C.R.A.S. Paris, Ser. A, 279, 607-609 (1974).

[3] *Une résolution de* $\frac{du}{dt} + A(t)u + \partial\phi^t(u) \ni f$.
A paraître.

H. ATTOUCH, A. DAMLAMIAN

[4] *Problèmes d'évolution dans les Hilbert et applications.*
J. Math. Pures. App. 54 (1975) p.53-74.

[5] *Application des méthodes de convexité et de monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires.*
A paraître.

H. BREZIS

[6] *Opérateurs maximaux monotones dans les espaces de Hilbert et équations d'évolution.*
Lecture Notes 5, North Holland (1972).

[7] *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps.*
C.R.A.S. Paris t.274 (1972) p.310-312.

M. CRANDALL, A. PAZY

[8] *Nonlinear evolution equations in Banach spaces.*
Israel J. Math. 11 (1972) p.57-94.

A. DAMLAMIAN

[9] Thesis. Harvard University (1974).

T. KATO

[10] *Nonlinear semi-groups and evolution equations.*
J. Math. Soc. Japan 19 (1967) p.508-520.

N. KENMOCHI

[11] *The semi-discretisation method and nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities.*
Proc. Jap. Acad. 50 (1974) p.714-717.

R.H. MARTIN

[12] *Generating an evolution system in a class of uniformly convex Banach spaces.*
Journal of Functional Analysis 11, (1972) p.62-76.

K. MARUO

[13] *On some evolution equations of subdifferential operators.*
A paraître.

J. J. MOREAU

[14] *Rétraction d'une multiapplication.*
Séminaire d'Analyse convexe. Montpellier 1972. Exposé n°13.

J.C. PERALBA

[15] *Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps.*
C.R.A.S. Paris 275 (1972) p.93-96.

C. PICARD

[16] *Equations d'évolution avec condition unilatérale.*
Séminaire Lions-Brézis 1973-1974 (Paris VI).

W. RUDIN

[17] *Real and Complex Analysis.*
Mc. Graw Hill.

J. WATANABE

[18] *On certain nonlinear evolution equations.*
J. Math. Soc. Japan 25 (1973) p.446-463.

-:-:-:-:-

-:-