UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 183-76-53

MESURABILITE ET MONOTONIE

Hedy ATTOUCH

Publication Mathématique d'Orsay

N° 183-76-53

MESURABILITE ET MONOTONIE

HEDY ATTOUCH

Publication Mathématique d'Orsay

MESURABILITÉ ET MONOTONIE

H. ATTOUCH

CHAPITRE 0 - INTRODUCTION.

1) A l'origine de ce travail, on trouve un certain nombre de problèmes soulevés par l'étude des solutions fortes d'équations d'évolution du type

$$(I) \qquad \frac{du}{dt}(t) + A(t,u(t)) \ni f(t) \ .$$

L'opérateur $A(t,.)$, $(t \in [0,T])$, est maximal monotone dans un espace de Hilbert H ; on cherche u continue de $[0,T]$ dans H , à dérivée distribution dans $L^2(0,T;H)$.

Une méthode générale pour étudier (I) consiste à l'approcher par

$$(I)_\lambda \qquad \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda(t,u_\lambda(t)) = f(t)$$

où $A_\lambda(t,.)$ est l'approximation Yosida de $A(t,.)$; l'opérateur $A_\lambda(t,.)$ est lipschitzien, et pour résoudre $(I)_\lambda$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on est amené naturellement à faire une hypothèse de mesurabilité sur la famille $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$, à savoir :

$$(0.1) \qquad \forall\, x \in H \ , \ \forall\, \lambda>0 \ , \quad t \mapsto A_\lambda(t,x) \ \text{ est mesurable.}$$

Mais dans la pratique, les $(A_\lambda(t,.))_{t\in[0,T]}$ ne sont pas des données du problème (I) . Le chapitre II est consacré à l'étude des différentes notions de mesurabilité portant sur des familles $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$ d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert séparable H ; on montre tout d'abord (Théorème 2.1) que la mesurabilité des résolvantes (0.1) est équivalente à la mesurabilité des graphes des opérateurs $A(t,.)$ au sens de C. Castaing [14] ; on fait également le lien, en montrant l'équivalence dans le cas où la dimension de H est finie, avec la mesurabilité des sections minimales $(A^o(t,.))_{t\in[0,T]}$ (Théorème 2.2).

Dans le cas où les $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$ sont des sous-différentiels de fonctions $(\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$, où $\phi(t,.)$ est convexe, semi-continue inférieurement, propre de H dans $]-\infty,+\infty]$, on montre (Théorème 2.3) l'équivalence entre la mesurabilité de la famille $(\partial\phi(t,.))_{t\in[0,T]}$ (au sens précédent), et la propriété d'intégrande normale au sens de R.T. Rockafellar [27] de l'application $(t,x) \mapsto \phi(t,x)$.

Dans de nombreux cas, il arrive que l'on ait à étudier non pas (I) mais un problème "perturbé"

$$\text{(II)} \qquad \frac{du}{dt}(t) + A(t,u(t)) + B(t,u(t)) \ni f(t) \ .$$

Si $B(t,.)$ est maximal monotone, on approche (II) par

$$\text{(II)}_\lambda \qquad \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(t,u_\lambda(t)) + B_\lambda(t,u_\lambda(t)) \ni f(t)$$

que l'on résoud par un théorème de perturbation lipschitzien (cf. [8]), les hypothèses faites par ailleurs sur A et B permettant de passer à la limite lorsque $\lambda \longrightarrow 0$.

On étend cette méthode au cas où $B(t,.)$ est seulement monotone, en montrant (Théorème 2.5) que l'on peut prolonger une famille mesurable (au sens des graphes) d'opérateurs monotones, en une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones ; on en déduit un théorème de perturbation (Théorème 3.1) s'appliquant directement au problème de la chaleur non linéaire dans un domaine variable (cf. [3]).

2) On est naturellement amené à considérer une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$, comme une application mesurable de $[0,T]$ dans $\mathfrak{M}_R$, où $\mathfrak{M}_R$ désigne l'ensemble des maximaux monotones muni de la topologie de la convergence des résolvantes (cf. Définition 1.1) ; appliquant la propriété de Lusin, on se ramène à étudier (Ch.I) la convergence, au sens des résolvantes, des suites d'opérateurs maximaux monotones (notion introduite par H. Brézis [10]). On établit alors le lien entre la convergence des opérateurs et la convergence des sections minimales (ou de façon équivalente des semi-groupes associés, cf. [10]) dans le Théorème A.1 (Additif Ch.I) ; dans le cas où les opérateurs $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-différentiels $(\partial\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre (Théorème 1.1) l'équivalence entre la convergence de $\partial\phi^n$ vers $\partial\phi$ dans $\mathfrak{M}_R$ et la convergence de ϕ^n vers ϕ au sens de Mosco (Définition 1.2) ; ce Théorème met clairement en évidence, la continuité de la transformation de Young-Fenchel $(\psi \mapsto \psi^*)$, et le résultat parallèle concernant la stabilité de la notion d'intégrande normale par passage à la fonction conjuguée.

Dans le Chapitre III, 3) on dégage un résultat abstrait (Théorème 3.2) assurant, sous une condition du type Brezis-Crandall-Pazy (cf. [8]) uniforme en $n \in \mathbb{N}$, la convergence dans $\mathfrak{M}_R$ de $A^n + B^n$ vers $A + B$ lorsque A^n converge vers A et B^n converge vers B ; ce théorème et les corollaires que l'on peut en déduire (Proposition 3.7) permettent de donner de nombreux exemples de suites convergentes d'opérateurs maximaux monotones (Exemples 1, 2, 3, 4 pages 68 à 81) ; utilisés conjointement avec le Théorème 1.1, ces résultats permettent de traiter simplement de nombreux problèmes concernant la convergence des solutions d'inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution (cf. Corollaires 3.3, 3.5, Théorème 3.3, Corollaire 3.1, et [0]).

-:-:-:-

CHAPITRE I - TOPOLOGIE DE LA R-CONVERGENCE.

1) Définition et propriétés de la topologie de la R-convergence.

Soit X un espace de Banach ; un opérateur multivoque A de X dans X est dit accrétif si $\forall\, \lambda>0 \quad (I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I+\lambda A)$ dans X; A est dit m-accrétif si en outre $\forall\, \lambda>0 \quad R(I+\lambda A) = X$.

Si X est un Hilbert, accrétif et monotone sont deux notions équivalentes. Tout d'abord établissons un lemme général qui comme corollaire donne un résultat dû à H. Brezis concernant le lien entre la convergence d'opérateurs m-accrétifs au sens des graphes et la convergence des résolvantes.

LEMME 1.1. *X espace vectoriel topologique réel.*
$(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, A opérateurs multivoques de X dans X .
Il y a équivalence ;

(i) $\forall (x,y)\in A\ ,\ \exists (x^n,y^n)\in A^n : x^n \to x\ ,\ y^n \to y\ ;$

(ii) $\forall\, \lambda>0\ ,\ \forall (x,y)\in (I+\lambda A)^{-1}\ ,\ \exists (x^n,y^n)\in (I+\lambda A^n)^{-1} : x^n \to x\ ,$ $y^n \to y\ ;$

(iii) $\exists\, \lambda>0\ ,\ \forall (x,y)\in (I+\lambda A)^{-1}\ ,\ \exists (x^n,y^n)\in (I+\lambda A^n)^{-1} : x^n \to x\ ,$ $y^n \to y\ .$

COROLLAIRE 1.1. *X Banach quelconque.*
$(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, A opérateurs m-accrétifs dans X .
Il y a équivalence ;

(i) $\forall (x,y)\in A\ ,\ \exists (x^n,y^n)\in A^n\ ,\ x^n \to x\ ,\ y^n \to y\ ;$

(ii) $\forall\, \lambda>0\ ,\ \forall\, x\in X\ ,\ (I+\lambda A^n)^{-1}x \to (I+\lambda A)^{-1}x\ ;$

(iii) $\exists\, \lambda>0\ ,\ \forall\, x\in X\ ,\ (I+\lambda A^n)^{-1}x \to (I+\lambda A)^{-1}x\ .$

Démonstration du Corollaire 1.1. :

(ii) $\Longrightarrow$ iii) évident

(iii) $\Longrightarrow$ i) découle de l'implication iii) $\Longrightarrow$ i) du lemme 1.1.

i) $\Longrightarrow$ ii) Soit $\lambda>0$, $x \in X$ fixés ; d'après i) $\Longrightarrow$ ii) du lemme 1.1 il existe $(x^n,y^n) \in (I+\lambda A^n)^{-1}$ tels que $x^n \to x$ et $y^n \to (I+\lambda A)^{-1}x$.

$$|(I+\lambda A^n)^{-1}x - (I+\lambda A)^{-1}x| \leq |(I+\lambda A^n)^{-1}x - (I+\lambda A^n)^{-1}x_n| + |(I+\lambda A^n)^{-1}x_n - (I+\lambda A)^{-1}x|$$

$$\leq |x - x_n| + |y_n - (I+\lambda A)^{-1}x|$$

et donc $(I+\lambda A^n)^{-1}x \to (I+\lambda A)^{-1}x$.

<u>Démonstration du Lemme 1.1.</u> :

i) $\Longrightarrow$ ii) Soit $(x,y) \in (I+\lambda A)^{-1}$ i.e. $y \in (I+\lambda A)^{-1}x$

$$\frac{x-y}{\lambda} \in Ay .$$

D'après (i) $\exists (y^n,z^n) \in A^n$ (i.e. $z^n \in A^n y^n$) tels que $y^n \to y$ et $z^n \to z = \frac{x-y}{\lambda}$.

Posons $x^n = \lambda z^n + y^n$ alors $x^n \in (I+\lambda A^n)y^n$ i.e. $y^n \in (I+\lambda A^n)^{-1}x_n$ et $y^n \to y$, $x^n \to \lambda z + y = \lambda(\frac{x-y}{\lambda}) + y = x$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) évident

iii) $\Longrightarrow$ i) Soit $(x,y) \in A$; alors $x \in (I+\lambda_o A)^{-1}(x+\lambda_o y)$; (λ_o donné par iii)).

D'après (iii) , $\exists (z^n,x^n) \in (I+\lambda_o A^n)^{-1}$: $x^n \to x$ et $z^n \to x + \lambda_o y$.

$$x_n \in (I+\lambda_o A^n)^{-1} z_n \Longrightarrow \frac{z_n - x_n}{\lambda_o} \in A^n x_n \quad \text{posons} \quad y_n = \frac{z_n - x_n}{\lambda_o} .$$

On a $(x^n,y^n) \in A^n$; $x_n \to x$ et $y_n \to \frac{1}{\lambda_o}[x+\lambda_o y-x] = y$.

<u>Remarque 1.1.</u> Soit $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$, A maximaux monotones dans H , Hilbert.
Alors la convergence de A^n vers A s'exprime également à l'aide de la convergence des sections minimales :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) où

$$\text{(iv)} : \begin{cases} \forall x \in D(A) , \ \exists x_n \in D(A^n) , \ x_n \to x \text{ et } (A^n)^o x_n \to A^o x . \\ \forall (n_k)_{k \in \mathbb{N}} , \text{ suite extraite, } \forall (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} , \\ \quad (x_{n_k} \xrightarrow{w-H} x , \ \sup_{k \in \mathbb{N}} |(A^{n_k})^o x_{n_k}| < +\infty) \Longrightarrow (x \in \overline{D(A)}) \end{cases}$$

cette condition exprimant la convergence des sections minimales et la convergence des domaines des opérateurs ; pour la démonstration de cette dernière équivalence cf. Additif n°1 page 17 (i).

Définition de la topologie de la R-convergence.

On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des opérateurs m-accrétifs d'un espace de Banach X

Définition 1.1. La topologie de la R-convergence sur $\mathcal{A}$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $(\Gamma_{\lambda,x})_{\substack{x\in H\\ \lambda>0}}$ de $\mathcal{A}$ dans X :

$$\Gamma_{\lambda,x}(A) = (I+\lambda A)^{-1}x \ .$$

On notera $\mathcal{A}_R$, $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la R-convergence et $A_n \longrightarrow A$ désignera la convergence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers A dans $\mathcal{A}_R$.

Dans le cadre hilbertien $(X = H$ Hilbert) on notera $\mathcal{M}$ (égal à $\mathcal{A}$) l'ensemble des maximaux monotones et $\mathcal{M}_R$, cet ensemble muni de la topologie de la R-convergence

PROPOSITION 1.1. *On suppose X séparable.*
$\mathcal{A}_R$ est un espace polonais (séparable, métrisable, complet pour une métrique induisant la topologie).

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans X et d la distance sur $\mathcal{M}$ définie par

$$d(A,B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, |(I+A)^{-1}x_n - (I+B)^{-1}x_n|) \ .$$

. Montrons que la topologie de la R-convergence est associée à cette métrique par exemple ;
La topologie associée à d est la topologie la moins fine sur $\mathcal{A}$ rendant continues les applications $(\Gamma_{1,x_n})_{n\in\mathbb{N}}$: $A \longrightarrow (I+A)^{-1}x_n$; on a donc

$$i : \mathcal{A}_R \longrightarrow (\mathcal{A},d) \quad \text{continue}$$

Montrons que $i : (\mathcal{A},d) \longrightarrow \mathcal{A}_R$ est continue ; il suffit de montrer que si $d(A^n,A) \longrightarrow 0$ alors $\forall\ \lambda>0$, $\forall\ x\in X$ $\Gamma_{\lambda,x}(A^n) \longrightarrow \Gamma_{\lambda,x}(A)$ (i.e. $A^n \longrightarrow A$) ;
Soit donc $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}, A$: $\forall\ k\in\mathbb{N}$ $(I+A^n)^{-1}x_k \longrightarrow (I+A)^{-1}x_k$; on en déduit immédiatement que $\forall\ x\in X$ $(I+A^n)^{-1}x \longrightarrow (I+A)^{-1}x$ et, tenant compte de l'implication iii) $\Longrightarrow$ ii) du corollaire 1.1, cela entraîne que $\forall\ \lambda>0$, $\forall\ x\in X$ $(I+\lambda A^n)^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}x$, i.e. $A^n \longrightarrow A$.

Soit $j : \mathcal{A} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$

$$j(A) = ((I+A)^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

L'application j est injective, car $\forall n \in \mathbb{N}$ $(I+A)^{-1}x_n = (I+B)^{-1}x_n$ entraîne $\forall x \in X$ $(I+A)^{-1}x = (I+B)^{-1}x$ et donc $A = B$; j est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $j(\mathcal{A})$; d'autre part, par définition de la topologie de la R-convergence, j est un homéomorphisme de $\mathcal{A}_R$ sur $j(\mathcal{A})$, où $j(\mathcal{A})$ est muni de la topologie induite par la topologie produit sur $X^{\mathbb{N}}$; donc $\mathcal{A}_R$ s'identifie donc à un sous ensemble de $X^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit ; $\mathcal{A}_R$ est donc séparable (X métrique séparable est à base dénombrable, donc $X^{\mathbb{N}}$ est à base dénombrable, donc $\mathcal{A}_R$ est à base dénombrable, donc $\mathcal{A}_R$ est séparable).

Montrons que $(\mathcal{A},d)$ est complet :

Soit $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{A},d)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|(I+A^k)^{-1}x_n - (I+A^{k'})^{-1}x_n| \longrightarrow 0$ quand k et $k' \longrightarrow +\infty$.

On en déduit la même propriété pour un x quelconque dans X, et X étant complet,

$\forall x \in X$ $(I+A^k)^{-1}x \longrightarrow F(x)$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

L'application $F : X \longrightarrow X$ est une contraction partout définie de X dans X .

Posons $A = F^{-1} - I$; alors $(I+A)^{-1} = F$ et donc $(I+A^k)^{-1}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} (I+A)^{-1}x$ dans X .

D'après le lemme 1.1, $\forall (x,y) \in A$, $\exists (x_k,y_k) \in A^k$ $x_k \longrightarrow x$ et $y_k \longrightarrow y$; or l'accrétivité se conserve pour la convergence au sens des graphes ; l'opérateur A est donc m-accrétif et la suite A^k converge vers A dans $\mathcal{A}_R$.

<u>Remarque 1.2.</u> 1°) Soit $\Lambda = (\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$, λ_m une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro et $(f(\lambda,.))_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de contractions partout définies de X dans X ; il y a équivalence

(i) $\exists A \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in \Lambda$ $f(\lambda,.) = (I+\lambda A)^{-1}$

(ii) $\forall \lambda,\mu \in \Lambda$, $\forall x \in X$ $f(\lambda,x) = f(\mu, \frac{\mu}{\lambda} x + (1 - \frac{\mu}{\lambda}) f(\lambda,x))$.

On a alors $A = f_1^{-1} - I$; (un opérateur m-accrétif est déterminé par la donnée d'une de ses résolvantes). Pour des résultats détaillés concernant les opérateurs accrétifs dans les Banach on pourra consulter P. Bénilan [6], et pour les problèmes concernant les opérateurs monotones dans les Hilbert, H. Brezis [8].

2°) Soit X un espace de Banach et A^n une suite d'opérateurs m-accrétifs dans X , il y a équivalence (en notant $G(A) = \{(x,y) \in X \times X / y \in Ax\}$) entre

(i) $\quad A^n \longrightarrow A$ dans $\mathcal{A}_R$

(ii) $\quad \overline{\lim}\, G(A^n) \subset G(A) \subset \underline{\lim}\, G(A^n)$.

Il suffit de montrer que : $(A^n \longrightarrow A$ dans $\mathcal{A}_R) \Longrightarrow (G(A) \supset \overline{\lim}\, G(A^n))$; soit $(x^n,y^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x^n,y^n) \in A^n$, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite, $x_{n_k} \longrightarrow x$, $y_{n_k} \longrightarrow y$; montrons que $(x,y) \in A$.

Soit $(\xi,\eta) \in A$, $\lambda>0$; on a $\xi = (I+\lambda A)^{-1}(\xi+\lambda\eta)$ et $x_{n_k} = (I+\lambda A^{n_k})^{-1}(x_{n_k}+\lambda y_{n_k})$;

d'après l'accrétivité de $A^{n(k)}$

$$|\xi - x_{n(k)}| \leqslant |\xi+\lambda\eta - (x_{n(k)}+\lambda y_{n(k)})| \quad \text{et à la limite}$$

$$|\xi - x| \leqslant |\xi+\lambda\eta - (x+\lambda y)| \quad \forall\, \lambda>0 , \quad \forall\, (\xi,\eta) \in A .$$

L'opérateur $A \cup (x,y)$ est donc accrétif et tenant compte de la maximalité de A , $y \in Ax$. Dans le cas $X = H$ Hilbert, A^n maximaux monotones on obtient un résultat un peu plus précis :

Soit $(x_{n(k)},y_{n(k)}) \in A^{n(k)}$ $\quad x_{n(k)} \longrightarrow x$, $\quad y_{n(k)} \longrightarrow y$ dans $(\omega\text{-}H)$ alors $(x,y) \in A$; en effet soit $(\xi,\eta) \in A$, il existe $(\xi^n,\eta^n) \in A^n$, $\xi^n \longrightarrow \xi$, $\eta^n \longrightarrow \eta$; d'après la monotonie de A^n ,

$$\langle \xi^{n(k)} - x_{n(k)}, \eta_{n(k)} - y_{n(k)} \rangle \geqslant 0 \quad \text{et à la limite}$$

$$\langle \xi - x, \eta - y \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, (\xi,\eta) \in A \quad \text{et donc} \quad y \in Ax .$$

(Raisonnement encore valable pour des m-accrétifs dans un Banach uniformément convexe).

3°) Pour tout opérateur A , m-accrétif dans un Banach X , on a la convergence

$$A_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} A \quad \text{dans} \quad \mathcal{A}_R \quad \text{où} \quad A_\lambda = 1/_\lambda(I-(I+\lambda A)^{-1}) \quad \text{est l'approximation}$$

Yosida de l'opérateur A ; (A_λ est accrétif, lipschitzien, partout défini, et donc m-accrétif).

En effet $(A_\lambda)_1 = A_{1+\lambda} \underset{\to 0}{\longrightarrow} (A)_1$ puisque

$A_{1+\lambda}x = \frac{1}{1+\lambda}(x - J_{1+\lambda}x)$ et $J_1x = J_{1+\lambda}((1+\lambda)x - \lambda J_1 x)$ d'où

$$|J_{1+\lambda}x - J_1x| \leqslant \lambda|x - J_1x| \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 .$$

COROLLAIRE 1.2. *Soit* $\mathcal{C}$ *un espace topologique et* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}_R$ *, il y a équivalence*

(i) F *continue*

(ii) $\forall\ \lambda>0$, $\forall\ x \in X$, $t \longrightarrow (I+\lambda F(t))^{-1}x$ *continue de* $\mathcal{C}$ *dans* X

(iii) $\exists\ \lambda_0>0$, $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dense dans* X *, telle que*

$$\forall\ n\in\mathbb{N} \qquad t \longrightarrow ((I+\lambda_0 F(t))^{-1}x_n \quad \textit{continu de } \mathcal{C} \textit{ dans } X .$$

2) Topologie de la R-convergence sur l'ensemble des sous-différentiels.

Dans ce paragraphe H désigne un espace de Hilbert non nécessairement séparable. Etant donné $\phi : H \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ convexe, s.c.i, propre, son sous-différentiel est maximal monotone ; rappelons

$$\partial\phi = \{(u,f)\in H\times H \ ;\ \forall\ v\in H \quad \phi(v) \geqslant \phi(u) + \langle f,v-u\rangle\}$$

$$= \{(u,f)\in H\times H \ ;\ \phi(u) + \phi^*(f) - \langle f,u\rangle = 0\}$$

où ϕ^* désigne la fonctionnelle conjuguée de ϕ :

$$\phi^*(f) = \sup_{v\in H}\{\langle f,v\rangle - \phi(v)\} .$$

On définit la régularisée Yosida d'une fonction convexe s.c.i. propre ϕ par

$$(\phi)_\mu = \phi\nabla\frac{1}{2\mu}|\cdot|^2 \quad \text{soit} \quad (\phi)_\mu(x) = \operatorname*{Min}_{y\in H}\{\phi(y) + \frac{1}{2\mu}|x-y|^2\} .$$

LEMME 1.2. *Soit* $(\phi^\lambda)_{\lambda>0}$ *une famille de fonctions convexes, s.c.i, propres ; il y a équivalence entre*

(i) *Il existe* ϕ *convexe, s.c.i., propre telle que :* $\forall\ \lambda>0 \quad \phi^\lambda = (\phi)_\lambda$

(ii) $\forall\ \lambda,\mu > 0 \qquad \phi^{\lambda+\mu} = (\phi^\lambda)_\mu$.

On a alors

$$\phi = \sup_{\lambda>0}\phi^\lambda$$

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\quad \phi^{\lambda} = (\phi)_{\lambda} \Longrightarrow \phi^{\lambda^*} = (\phi \nabla \frac{1}{2\lambda} |.|^2)^* = \phi^* + \frac{\lambda}{2} |.|^2$

et donc

$$(\phi^{\lambda+\mu})^* = \phi^* + \frac{\lambda}{2} |.|^2 + \frac{\mu}{2} |.|^2 = (\phi^{\lambda})^* + \frac{\mu}{2} |.|^2 = ((\phi^{\lambda})_{\mu})^* \quad \text{et donc} \quad \phi^{\lambda+\mu} = (\phi^{\lambda})_{\mu} = (\phi^{\mu})_{\lambda}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) par passage aux conjuguées

$(\phi^{\lambda+\mu})^* = (\phi^{\lambda})^* + \frac{\mu}{2} |.|^2$ et donc $(\phi^{\lambda})^* - \frac{\lambda}{2} |.|^2 = \psi$ est indépendant de λ.

Cette relation entraîne que ψ est sci et propre ; d'autre part $\psi = \lim_{\lambda \to o} (\phi^{\lambda})^*$ et donc ψ est convexe ; on a donc $\phi^{\lambda} = (\psi + \frac{\lambda}{2} |.|^2)^* = (\phi)_{\lambda}$ avec $\phi = \psi^*$.

Notations.

On notera $\mathcal{M}_{\phi}$ l'ensemble des sous-différentiels de fonctions convexes sci, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$; $\mathcal{M}_{\phi}$ est un sous-cône de $\mathcal{M}$ ensemble des maximaux nonotones de H dans H.

. On désignera plus précisément par $\mathcal{M}_{\phi_o}$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{\phi}$ formé par les sous-différentiels de fonctions convexes, sci, positives, nulles en 0.

PROPOSITION 1.2. *$\mathcal{M}_{\phi}$ est fermé dans $\mathcal{M}$ pour la topologie de la R-convergence.*

Démonstration : Soit $A^n = \partial\phi^n$ convergeant vers A dans $\mathcal{M}_R$; fixons-nous une suite $(x_i)_{i=o}^{\ell}$ $x_{\ell} = x_o$ et $(y_i)_{i=1}^{\ell}$ $y_i \in Ax_i$; d'après la définition de la convergence dans $\mathcal{M}_R$, pour tout i, $1 \leq i \leq \ell$ on va pouvoir trouver une suite $(x_i^n, y_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $y_i^n \in A^n x_i^n$ et $x_i^n \to x_i$, $y_i^n \to y_i$.

L'opérateur A^n étant cycliquement monotone

$$\sum_{i=1}^{\ell} \langle x_i^n - x_{i-1}^n, y_i^n \rangle \geq 0 \quad \text{et par passage à la limite}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \langle x_i - x_{i-1}, y_i \rangle \geq 0 \quad ; \quad \text{l'opérateur A étant cycliquement monotone et}$$

étant maximal monotone, est donc un sous-différentiel.

Remarque 1.3. On peut montrer que $\mathcal{M}_\phi$ est fermé pour une convergence plus faible que la R-convergence ; pour simplifier, prenons $A^n = \partial\phi^n$, $A^n \in \mathcal{M}_{\phi_0}$, $A \in \mathcal{M}$ et $A^n \longrightarrow A$ au sens suivant :

$\forall\ \lambda>0$, $\forall\ x \in H$ $(I+\lambda A^n)^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}x$ (dans ω-H) ; on a $\partial\phi^n(0) \ni 0$ et $\forall\ \lambda>0$ $\phi^n_\lambda(0) = 0$.

On en déduit $\phi^n_\lambda(x) = \int_0^1 <A^n_\lambda(\tau x),x> d\tau$ et par application du théorème de convergence dominée

$$\phi^n_\lambda(x) \longrightarrow f(\lambda,x) = \int_0^1 <A_\lambda(\tau x),x> d\tau \quad \text{et donc}$$

$$\phi^n_{\lambda+\mu}(x) \longrightarrow f(\lambda+\mu,x) = \int_0^1 <A_{\lambda+\mu}(\tau x),x> d\tau = \int_0^1 <(A_\lambda)_\mu(\tau x),x> d\tau$$

Or $f(\lambda,.)$ est Fréchet différentiable de différentielle A_λ (par passage à la limite immédiat). Donc $(f(\lambda,.))_\mu$ est Fréchet-différentiable de différentielle $(A_\lambda)_\mu$ (cf. [8]) ; d'où, remarquant que $(f(\lambda,.)_\mu(0) = 0$ et notant que les fonctions $f(\lambda,.)$ sont convexes $f(\lambda+\mu,.) = f(\lambda,.)_\mu$.

D'après le lemme 1.2, $f(\lambda,.) = (\phi)_\lambda$ avec $\phi = \sup f(\lambda,.)$ ce qui entraîne que

$$A_\lambda = \partial[(\phi)_\lambda] = [\partial\phi]_\lambda \quad \text{et donc} \quad A = \partial\phi \ .$$

Définitions 1.2.

1°) Soit X un espace topologique ; étant donnée une suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X on définit

$$\underline{\lim}\ A_n = \{x \in X \ ; \ \text{il existe} \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ x_n \in A_n \ , \ x_n \longrightarrow x\}$$

$$\overline{\lim}\ A_n = \{x \in X \ ; \ \text{il existe} \ (x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \ , \ x_{n(k)} \in A_{n(k)} \ , \ x_{n(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x\} .$$

On dit que A^n converge vers A , et on note $A^n \longrightarrow A$ si $\overline{\lim}\ A^n \subset A \subset \underline{\lim}\ A_n$

2°) Soit $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ϕ convexes, sci, propres, d'un Banach X dans $]-\infty,+\infty]$; on note

$$\text{Epi}\ \phi^n = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \ / \ \lambda \geq \phi^n(x)\}$$

On dira que ϕ^n converge vers ϕ et l'on notera $\phi^n \longrightarrow \phi$ si

$$\text{Epi}\ \phi^n \longrightarrow \text{Epi}\ \phi \quad \text{dans } X \times \mathbb{R} \text{ et } \omega - (X \times \mathbb{R}) .$$

Cette convergence a été étudiée en détail par Mosco [21], nous rappelons quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Soient $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A^n \subset X$; notant s-lim et ω-lim les limites associées respectivement aux topologies fortes et faibles sur X on a les inclusions évidentes :

$$s\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset s\text{-}\overline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n$$
$$s\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\underline{\lim}\, A^n \subset \omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n .$$

L'égalité entre ces quatre ensembles est donc équivalente à l'égalité entre $s\text{-}\underline{\lim}\, A^n$ et $\omega\text{-}\overline{\lim}\, A^n$ et donc

$$\phi^n \longrightarrow \phi \iff \omega\text{-}\overline{\lim}\ \mathrm{Epi}\ \phi^n \subset \mathrm{Epi}\ \phi \subset s\text{-}\underline{\lim}\ \mathrm{Epi}\ \phi^n .$$

On vérifie immédiatement que $\phi^n \longrightarrow \phi$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(s-sci) $\forall\, x \in D(\phi)\ \exists\, (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x^n \in D(\phi^n)$: $x^n \longrightarrow x$ et $\phi(x) \geqslant \overline{\lim}\ \phi^n(x^n)$

(ω-scs) $\forall (n(k))_{k\in\mathbb{N}}$, suite extraite, $\forall\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $x_k \rightharpoonup x \implies \phi(x) \leqslant \underline{\lim}\ \phi^{n(k)}(x_k)$.

LEMME 1.3. *Soit* $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ϕ *convexes, sci, propres de* X *Banach réflexif dans* $]-\infty,+\infty]$ *telles que* $\phi^n \longrightarrow \phi$ *(au sens de Mosco) ; il existe alors deux constantes* α, β *positives telles que pour tout* x *de* X , *pour tout entier* n ,

$$\phi^n(x) + \alpha|x| + \beta \geqslant 0 .$$

Démonstration : Raisonnons par l'absurde ; pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n(k) \in \mathbb{N}$ il existe $x_k \in X$ tels que $\phi^{n(k)}(x_k) + k(|x_k|+1) < 0$; on peut évidemment supposer la suite $n(k)$ croissante, car si pour n supérieur à $n(k)$ et pour tout x de H $\phi^n(x) + (k+1)(|x|+1) \geqslant 0$ on pourra trouver deux nombres α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ $\phi^n(x) + \alpha|x| + \beta \geqslant 0$;

Deux cas se présentent : a) la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
soit z une valeur d'adhérence faible de cette suite ;
on notera encore $x_k \rightharpoonup z$; on a d'après la propriété (ω-scs)

$$\phi(z) \leqslant \underline{\lim}\ \phi^{n(k)}(x_k) \leqslant \underline{\lim}\ [-k|x_k|-k] = -\infty$$

d'où la contradiction.

b) la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est non bornée ;

notons encore $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $|x_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$; soit $\xi_o \in D(\phi)$, d'après la propriété (s-sci) il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\xi_k \longrightarrow \xi_o$ et $\phi^{n(k)}(\xi_k) \longrightarrow \phi(\xi_o)$.

Posons
$$\begin{aligned} z_k &= t_k\, x_k + (1-t_k)\xi_k \\ &= \xi_k + t_k(x_k-\xi_k) \end{aligned}$$

et choisissons t_k de telle sorte que $z_k \longrightarrow \xi_o$, $t_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}|x_k-\xi_k|}$ par exemple

(Notons que $0 < t_k < 1$ pour k suffisamment grand puisque $|x_k-\xi_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$) ; utilisant la convexité de $\phi^{n(k)}$ on obtient

$$\begin{aligned} \phi^{n(k)}(z_k) &\leq t_k\, \phi^{n(k)}(x_k) + (1-t_k)\, \phi^{n(k)}(\xi_k) \\ &\leq - t_k.k[|x_k|+1] + (1-t_k)\, \phi^{n(k)}(\xi_k) \\ &\leq - \sqrt{k}.\, \frac{|x_k| + 1}{|x_k-\xi_k|} + (1-t_k)\, \phi^{n(k)}(\xi_k) \end{aligned}$$

et donc utilisant à nouveau la propriété (ω-scs)

$$\phi(\xi_o) \leq -\infty \quad \text{d'où la contradiction.}$$

<u>Remarque 1.4.</u> On utilise en fait dans cette démonstration la propriété (ω-scs), et la propriété (s-sci) sous une forme beaucoup plus faible à savoir :

$$\exists\ x_o \in D(\phi)\ \exists\ (x^n)_{n\in\mathbb{N}}\quad x^n \in D(\phi^n) : x^n \rightharpoonup x_o \quad \text{et} \quad +\infty > \overline{\lim}\ \phi^n(x^n)$$

Pour terminer ces préliminaires montrons le résultat suivant :

<u>LEMME 1.4.</u> *Soit (X,d) un espace métrique et $(a_{n,m})_{(n,m)\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_{n,m} \xrightarrow[(m\to+\infty)]{} a_n \quad \text{et} \quad a_n \longrightarrow a\ .$$

Il existe alors une application $m \longrightarrow k(m)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ croissante (non strictement croissante en général) telle que

$$a_{k(m),m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} a\ .$$

Démonstration : On construit par récurrence deux suites d'entiers strictement croissantes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\exists\, N_1 : \forall n \geq N_1 \quad |a-a_n| \leq 1/2 \quad \text{et} \quad \exists\, M_1 : \forall m \geq M_1 \quad |a_{N_1}-a_{N_1,m}| \leq 1/2$$

$$\exists\, N_2 > N_1 \quad \forall n \geq N_2 \quad |a-a_n| \leq 1/_{2^2} \quad \text{et} \quad \exists\, M_2 > M_1 \quad \forall m \geq M_2 \quad |a_{N_2}-a_{N_2,m}| \leq 1/_{2^2}$$

$$\exists\, N_p > N_{p-1} \quad \forall n \geq N_p \quad |a-a_n| \leq 1/_{2^p} \quad \text{et} \quad \exists\, M_p > M_{p-1} \quad \forall m \geq M_p \quad |a_{N_p}-a_{N_p,m}| \leq 1/_{2^p}.$$

Posons $k(m) = N_p$ si $M_{p+1} > m \geq M_p$; on a alors si $M_p \leq m < M_{p+1}$

$$|a-a_{k(m),m}| = |a-a_{N_p,m}| \leq |a-a_{N_p}| + |a_{N_p}-a_{N_p,m}|$$

$$\leq 1/_{2^p} + 1/_{2^p}$$

et donc $\forall\, m \geq M_p \quad |a-a_{k(m),m}| \leq 1/_{2^{p-1}}$; la suite $(a_{k(m),m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge donc vers a .

. Remarquons que cette démonstration revient à montrer qu'une limite inférieure d'ensemble est fermée.

Nous sommes à présent en mesure d'établir le lien, entre la convergence des sous-différentiels et la convergence au sens de Mosco, pour une suite de fonctions convexes s.c.i., propres.

THEOREME 1.1. *Soient* $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ϕ *convexes, sci, propres de* H *dans* $]-\infty,+\infty]$; *il y a équivalence*

(i) $\phi^n \longrightarrow \phi$ *au sens de Mosco.*

(ii) $\forall\,(u,f)\in\partial\phi$, $\exists\,(u^n,f^n)\in\partial\phi^n$, $u^n \longrightarrow u$, $f^n \longrightarrow f$, $\phi^n(u_n) \longrightarrow \phi(u)$ *et* $\phi^{n*}(f_n) \longrightarrow \phi^*(f)$.

(iii) $\partial\phi^n \longrightarrow \partial\phi$ *et*

$$\exists\,(u,f)\in\partial\phi \quad \exists\,(u^n,f^n)\in\partial\phi^n \quad u^n \longrightarrow u\,,\ f^n \longrightarrow f\,,\ \phi^n(u_n) \longrightarrow \phi(u)\,.$$

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit x fixé dans H ; posons $y_n = (I+\partial\phi^n)^{-1}x$ et montrons que $y_n \longrightarrow (I+\partial\phi)^{-1}x$; par définition de y_n , $x-y_n\in\partial\phi^n(y_n)$ et donc :

(1) $\forall z \in H \quad \phi^n(z) \geqslant \phi^n(y_n) + \langle x-y_n, z-y_n \rangle$.

Soit z_o fixé dans $D(\phi)$; il existe $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z^n \longrightarrow z_o$ et $\phi^n(z^n) \longrightarrow \phi(z_o)$;

(2) $$\phi^n(z^n) \geqslant \phi^n(y_n) + \langle x-y_n, z_n-y_n \rangle$$

Or la suite ϕ^n convergeant vers ϕ au sens de Mosco, d'après le lemme 1.3, il existe deux constantes α, β telles que pour tout ξ de H , pour tout n de $\mathbb{N}$

$$\phi^n(\xi) + \alpha|\xi| + \beta \geqslant 0 \text{ ; reportant dans (2)}$$

$$\phi^n(z^n) \geqslant -\alpha|y_n| - \beta + \langle x-y_n, z_n-y_n \rangle$$

d'où l'on déduit immédiatement que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; soit donc $y_{n(k)} \rightharpoonup y$; notons $n(k) = k$, on a donc $y_k \rightharpoonup y$.

Etant donné ξ dans H , d'après la propriété s-sci, il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\xi^k \longrightarrow \xi$ et $\phi(\xi) \geqslant \overline{\lim}\, \phi^k(\xi^k)$. Ecrivant (1) avec $z = \xi_k$ et passant à la limite inférieure :

$$\underline{\lim}\, \phi^k(\xi_k) \geqslant \underline{\lim}\, [\phi^k(y_k) + \langle \xi_k-y_k, x-y_k \rangle]$$

$$\phi(\xi) \geqslant \underline{\lim}\, \phi^k(y_k) + \langle \xi-y, x-y \rangle$$

et tenant compte de la propriété ω-scs

$$\phi(\xi) \geqslant \phi(y) + \langle \xi-y, x-y \rangle \quad \forall \xi \in H \text{ et donc } y = (I+\partial\phi)^{-1}x .$$

La suite toute entière converge donc faiblement et $y_n = (I+\partial\phi^n)^{-1}x \rightharpoonup y = (I+\partial\phi)^{-1}x$
Montrons que la suite converge fortement : utilisant la condition (s-sci) il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_n \longrightarrow y$ et $\phi(y) \geqslant \overline{\lim}\, \phi^n(\xi^n)$; d'autre part

$$\phi^n(\xi^n) - \phi^n(y_n) \geqslant \langle \xi^n-y_n, x-y^n \rangle$$

$$\phi^n(\xi^n) - \phi^n(y_n) - \langle \xi^n, x-y^n \rangle + \langle x, y_n \rangle \geqslant |y_n|^2 \text{ d'où}$$

$$\overline{\lim}\, \phi^n(\xi^n) + \overline{\lim}\, [-\phi^n(y^n)] - \langle y, x-y \rangle + \langle x, y \rangle \geqslant \overline{\lim} |y_n|^2$$

or $\overline{\lim}\, [-\phi^n(y^n)] = -\underline{\lim}\, \phi^n(y_n) \leqslant -\phi(y) \quad (\omega\text{-scs})$.

D'où $\qquad |y|^2 \geqslant \overline{\lim} |y_n|^2$ et donc $y_n \longrightarrow y$.

On a donc montré que $\partial\phi^n \longrightarrow \partial\phi$;

Soit $(f,u) \in \partial\phi$, il existe donc $(u^n,f^n) \in \partial\phi^n$ tels que $u^n \longrightarrow u$, $f^n \longrightarrow f$

D'après la propriété (ω-scs) on a $\phi(u) \leqslant \underline{\lim}\, \phi^n(u^n)$;

D'après la propriété (s-sci) il existe $\xi^n \in D(\phi^n)$ $\xi^n \longrightarrow u$ et $\phi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \phi^n(\xi^n)$.

Ecrivant que $f^n \in \partial\phi^n(u^n)$ $\qquad \phi^n(\xi^n) \geqslant \phi^n(u_n) + \langle f_n, \xi^n - u_n\rangle$ et donc

$$\phi(u) \geqslant \overline{\lim}\, \phi^n(\xi^n) \geqslant \overline{\lim}\, \phi^n(u_n)$$

ce qui entraîne que $\qquad \phi^n(u_n) \longrightarrow \phi(u)$.

De l'égalité $\qquad \phi^{n^*}(f_n) = \langle f_n, u_n\rangle - \phi^n(u_n)$ on déduit que $\phi^{n^*}(f_n) \longrightarrow \phi^*(f)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) évident

iii) $\Longrightarrow$ i) Posons $\psi^n(\xi) = \phi^n(\xi+u_n) - \phi^n(u_n) - \langle f_n,\xi\rangle$, $\psi(\xi) = \phi(\xi+u)-\phi(u)-\langle f,\xi\rangle$.

On a $\psi^n \geqslant 0$ et $\psi^n(0) = 0$ ce qui entraîne $\partial\psi^n(0) \ni 0$ et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N} ,\ \forall \lambda > 0 ,\ (I+\lambda\partial\psi^n)^{-1}(0) = 0 \text{ et } \psi^n_\lambda(0) = 0 ;$$

ψ vérifie les mêmes relations.

D'autre part $\partial\psi^n = \partial\phi^n(\cdot+u_n) - f_n$ et l'on vérifie immédiatement que $\partial\psi^n \longrightarrow \partial\psi$.

Supposons que l'on ait montré que $\psi^n \longrightarrow \psi$; alors

$$\phi^n(\xi) = \psi^n(\xi-u_n) + \phi^n(u_n) + \langle f_n, \xi-u_n\rangle$$

(ω-scs) $\quad$ soit $\xi^{n_k} \longrightarrow \xi$, $\underline{\lim}\, \phi^{n_k}(\xi^{n_k}) \geqslant \underline{\lim}\, \psi^{n_k}(\xi^{n_k}-u_{n_k}) + \lim \phi^{n_k}(u_{n_k})$

$$+ \lim \langle f_{n_k}, \xi_{n_k} - u_{n_k}\rangle$$

$$\geqslant \psi(\xi-u) + \phi(u) + \langle f,\xi-u\rangle = \phi(\xi) .$$

(s-sci) $\quad$ soit $\xi \in H$ $\exists\, v^n \in H$, $v^n \longrightarrow \xi-u$ et $\psi(\xi-u) > \overline{\lim}\, \psi^n(v^n)$.

Posant $\xi^n = v^n + u^n$ on a $\xi^n \longrightarrow \xi$ et $\psi(\xi-u) \geqslant \overline{\lim}\, \psi^n(\xi^n-u^n)$, d'où

$$\overline{\lim}\, \phi^n(\xi^n) = \overline{\lim}\, [\psi^n(\xi_n-u_n)+\phi^n(u_n)+\langle f_n,\xi_n-u_n\rangle] \leqslant \psi(\xi-u) + \phi(u) + \langle f,\xi-u\rangle = \phi(\xi) .$$

On conclut donc que $\phi^n \longrightarrow \phi$; on se ramène donc au cas ϕ^n, $\phi \geqslant 0$; $\phi^n(0) = \phi(0) = 0$.

On a alors $\forall \lambda>0$, $\forall x \in H$

$$\phi_\lambda^n(x) = \int_0^1 \langle A_\lambda^n(\tau x), x\rangle \, d\tau \longrightarrow \int_0^1 \langle A_\lambda(\tau x), x\rangle \, d\tau = \phi_\lambda(x)$$

d'après le théorème de convergence dominée ;

or $\phi^n(J_\lambda^n x) = \phi_\lambda^n(x) - \frac{1}{2\lambda}|x-J_\lambda^n x|^2 \longrightarrow \phi_\lambda(x) - \frac{1}{2\lambda}|x-J_\lambda x|^2 = \phi(J_\lambda x)$.

Donc $(J_\lambda^n x, \phi^n(J_\lambda^n x)) \longrightarrow (J_\lambda x, \phi(J_\lambda x))$; or $(J_\lambda x, \phi(J_\lambda x)) \longrightarrow (x, \phi(x))$ lorsque $x \in \overline{D(\phi)}$ et d'après le lemme 1.4, il existe une suite $\lambda(n)$ $(\lambda(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0)$ telle que $J_{\lambda(n)}^n x \longrightarrow x$ et $\phi^n(J_{\lambda(n)}^n x) \longrightarrow \phi(x)$; la condition (s-sci) est donc vérifiée.

Soit d'autre part une suite extraite $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $x_k \rightharpoonup x$;

$$\forall \lambda>0 \qquad \phi^{n(k)}(x_k) \geq \phi_\lambda^{n(k)}(x_k)$$

$$\geq \phi_\lambda^{n(k)}(x) + \langle A_\lambda^{n(k)} x, x_k - x\rangle .$$

Quand $k \longrightarrow +\infty$, $A_\lambda^{n(k)} x \longrightarrow A_\lambda x$, $x_k - x \rightharpoonup 0$, et $\phi_\lambda^{n(k)} x \longrightarrow \phi_\lambda x$ donc

$$\forall \lambda>0 \qquad \underline{\lim}\, \phi^{n(k)}(x_k) \geq \phi_\lambda(x) \quad \text{et}$$

$$\underline{\lim}\, \phi^{n(k)}(x_k) \geq \sup_{\lambda>0} \phi_\lambda(x) = \phi(x)$$; la condition (ω-scs) est donc vérifiée.

<u>COROLLAIRE</u> <u>1.3</u>. *Soit* ϕ^n, ϕ *une suite de fonctions convexes, sci, propres de* H *dans* $]-\infty,+\infty]$. *Il y a équivalence*

(i) $\phi^n \longrightarrow \phi$

(ii) $\phi^{n*} \longrightarrow \phi^*$

(iii) $\forall \lambda>0$ *(resp.* $\exists\, \lambda_0>0$*)* $\phi_\lambda^n \longrightarrow \phi_\lambda$

On a alors $\forall x \in H$, $\forall \lambda>0$ $\phi_\lambda^n x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_\lambda x$.

<u>Démonstration</u> : (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) On suppose $\phi^n \longrightarrow \phi$; on a $(\partial\phi^n)^{-1} = \partial(\phi^{n*})$

Soit $(f,u) \in \partial\phi^*$; on a donc $(u,f) \in (\partial\phi^*)^{-1} = \partial\phi$.

D'après l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) il existe $(u^n, f^n) \in \partial\phi^n$ tels que $u^n \longrightarrow u$, $f^n \longrightarrow f$, $\phi^n(u_n) \longrightarrow \phi(u)$ et $\phi^{n*}(f_n) \longrightarrow \phi^*(f)$.

On a alors $(f^n, u^n) \in \partial\phi^{n*}$, $f^n \longrightarrow f$, $u^n \longrightarrow u$, $\phi^{n*}(f_n) \longrightarrow \phi^{n*}(f)$ et $(\phi^{n*})^*(u_n) = \phi^n(u_n) \longrightarrow \phi(u) = (\phi^*)^*(u)$.

D'après l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) cela entraine donc $\phi^{n*} \longrightarrow \phi^*$.

Appliquant ce même argument à la suite ϕ^{n*} on obtient que

$$(\phi^{n*})^* = \phi^n \longrightarrow (\phi^*)^* = \phi .$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Pour montrer que $\phi^n_\lambda \longrightarrow \phi_\lambda$ il suffit donc de montrer que $\phi^{n*}_\lambda \longrightarrow \phi^*_\lambda$.

Or $\phi^n_\lambda = (\phi^n \nabla \frac{1}{2\lambda} |.|^2)$ et donc $(\phi^n_\lambda)^* = \phi^{n*} + \frac{1}{2\lambda} |.|^2$.

On vérifie alors de façon immédiate que la convergence de ϕ^{n*} est équivalente à la convergence de $(\phi^n_\lambda)^*$.

On remarque alors que $\forall\, x \in H$, $\forall\, \lambda>0$, $\phi^n_\lambda x \longrightarrow \phi_\lambda x$; en effet soit $x \in H$ fixé ; il existe une suite $x_n \in H$ $x_n \longrightarrow x$, $\phi^n_\lambda x_n \longrightarrow \phi_\lambda x$

$$|\phi_\lambda x - \phi^n_\lambda x| \leqslant |\phi_\lambda x - \phi^n_\lambda x_n| + |\phi^n_\lambda x_n - \phi^n_\lambda x|$$

$$\leqslant |\phi_\lambda x - \phi^n_\lambda x_n| + |x_n - x| \sup_{|\xi - x|\leqslant 1} |A^n_\lambda \xi| \qquad \text{(n suffisamment grand)}$$

$$\leqslant |\phi_\lambda x - \phi^n_\lambda x_n| + C|x_n - x| \quad \text{car}$$

$$|A^n_\lambda \xi| \leqslant |A^n_\lambda x| + \frac{1}{\lambda} |\xi - x| \leqslant |A^n_\lambda x| + \frac{1}{\lambda} \leqslant C \quad \text{la suite } A^n_\lambda x \text{ étant convergente.}$$

<u>COROLLAIRE</u> <u>1.4</u>. *Soient* K_n ,K *une suite de convexes fermés non vides dans* H ; *il y a équivalence :*

(i) $\quad \forall\, x \in H$, $\quad Proj_{K_n} x \longrightarrow Proj_K x$

(ii) $\quad \begin{cases} \forall\, x \in K,\ \exists\, x_n \in K_n, \quad x_n \longrightarrow x \\ \forall\, (n(k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ suite extraite, } \forall\, (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ x_k \in K_{n(k)}, \\ \qquad (x_k \longrightarrow x) \Longrightarrow (x \in K) . \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : On considère la suite $\phi^n = I_{K_n}$, $\phi = I_K$ (fonction indicatrice du convexe fermé non vide K_n) ; ϕ^n est donc convexe, sci, propre et (ii) est équivalent à la convergence de ϕ^n vers ϕ ; or $\forall\, \lambda>0$, $\forall\, x \in H$, $(I+\lambda\partial\phi^n)^{-1}x = Proj_{K_n} x$ et donc (i) est équivalent à la convergence des $\partial\phi^n$ vers $\partial\phi$; remarquant d'autre part que pour tout x dans K_n, $\partial I_{K_n}(x) \ni 0$ on conclut à l'aide du Théorème 1.1.

Remarque 1.5. On a obtenu le résultat (cf. Mosco [20]) concernant la continuité de la transformation de Young-Fenchel ($\phi \longrightarrow \phi^*$) pour le convergence au sens de Mosco comme un corollaire immédiat du Théorème 1.1 ; si l'on avait admis ce résultat on aurait pu donner une démonstration plus rapide de (i) $\Longrightarrow$ (ii) (du Théorème 1.1):

Soit $f \in \partial\phi(u)$; on a donc $\phi(u) + \phi^*(f) - \langle f,u\rangle = 0$.
Puisque $\phi^n \longrightarrow \phi$, $\phi^{n*} \longrightarrow \phi^*$ et il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n \longrightarrow u$, $f_n \longrightarrow f$, $\phi^n(u^n) \longrightarrow \phi(u)$ et $\phi^{n*}(f_n) \longrightarrow \phi^*(f)$.
On a donc $0 \leqslant \phi^n(u_n) + \phi^{n*}(f_n) - \langle f_n,u_n\rangle \leqslant \varepsilon_n$; $(\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0)$.
D'après les propriétés du sous-différentiel à ε-près (cf. Rockafellar), pour tout $\lambda>0$, il existe $v_{n,\lambda}$, $g_{n,\lambda}$ tels que $g_{n,\lambda} \in \partial\phi^n(v_{n,\lambda})$, $|v_{n,\lambda}-u_n| \leqslant \lambda$, $|g_{n,\lambda}-f_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\lambda}$.
Prenant $\lambda = \sqrt{\varepsilon_n}$ on trouve $(v_n,g_n) \in \partial\phi^n$ tels que $|v_n-u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}$ $|g_n-f_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}$ et $v_n \longrightarrow u$, $g_n \longrightarrow f$, ceci exprime bien que $\partial\phi^n \longrightarrow \partial\phi$.

On peut remarquer que cette démonstration se généralise directement au cas où H est remplacé par un espace de Banach .

Remarque 1.6. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ $e_n = (0,0,\ldots 0,1,0\ldots)$ base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$.

$$K_n = \{\lambda e_1 + (1-\lambda)e_n \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Alors $K_n \longrightarrow \mathbb{R}e_1$ dans ω-H .

$K_n \longrightarrow \{e_1\}$ dans H ; on a donc $\lim K_n \not\subset \omega\text{-}\lim K_n$.

D'autre part soit $x \in H$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\mathrm{Proj}_{K_n} x = \left(\frac{1+x_1-x_n}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+x_n-x_1}{2}\right)e_n \longrightarrow \left(\frac{1+x_1}{2}\right)e_1$$

$$\left|\mathrm{Proj}_{K_n} x - \frac{1+x_1}{2} e_1\right| = \left|-\frac{x_n}{2} e_1 + \left(\frac{1+x_n-x_1}{2}\right) e_n\right| \longrightarrow 0 \text{ uniquement pour } x_1 = 1 .$$

D'autre part on constate que $\mathrm{Proj}_{K_n} x \longrightarrow \mathrm{Proj}_{\mathbb{R}e_1} x = x_1 e_1$ uniquement pour $x_1 = 1$.
Donc la "convergence des ϕ^n dans ω-H" n'entraîne pas en général la convergence faible des résolvantes ; on voit également sur cet exemple que la "convergence des ϕ^n dans H" n'entraîne pas en général la convergence forte des résolvantes.

COROLLAIRE 1.5. *La convergence au sens de Mosco sur* $\Phi_0 = \{\phi : H \longrightarrow [0,+\infty]$, *convexe, sci,* $\phi(0) = 0\}$ *est associée à une topologie, à savoir la topologie de la R-convergence où l'on a identifié une fonctionnelle de* Φ_0 *et son sous-différentiel;*

cette topologie fait de Φ_o *un espace polonais lorsque* H *est supposé séparable.*

Démonstration : La première partie découle directement du Théorème 1.1 et du fait que si $\phi \in \Phi_o$, $\partial\phi(0) \ni 0$.

La deuxième partie découle de la Proposition 1.1 et de la proposition 1.2.

Remarque 1.7. Soit $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, A des sous-différentiels, $A^n \to A$; il existe alors ϕ^n , ϕ convexes sci, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$ tels que

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad A^n = \partial\phi^n \qquad A = \partial\phi \\ \phi^n \to \phi \quad \text{au sens de Mosco.} \end{cases}$$

En effet soit $A^n = \partial\psi^n$, $A = \partial\psi$ et $(u_o,f_o) \in \partial\psi$; il existe $(u_o^n,f_o^n) \in \partial\psi^n$ tel que $u_o^n \to u_o$, $f_o^n \to f_o$; posons $\phi^n(x) = \psi^n(x) - \psi^n(u_o^n) + \psi(u_o)$ et $\phi(x) = \psi(x)$. Alors $A^n = \partial\phi^n$, $A = \partial\phi$ et $(u_o,f_o) \in \partial\phi$, $(u_o^n,f_o^n) \in \partial\phi^n$, $u_o^n \to u_o$, $f_o^n \to f_o$, $\phi^n(u_o^n) \to \phi(u_o)$ et donc d'après (iii) $\Longrightarrow$ (i) du Théorème 1.1, on a $\phi^n \to \phi$.

Remarque 1.8. On pourrait penser (notant qu'une fonction convexe n'est déterminée par son sous-différentiel qu'à une constante additive près) remplacer la condition iii) du Théorème 1.1 par la condition plus faible suivante :

(iii bis) $\partial\Phi^n \to \partial\Phi$ et il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \to u$,
$\Phi^n(u_n) \to \Phi(u)$.

Donnons un exemple où la condition iii)bis n'entraîne pas la convergence au sens de Mosco de ϕ^n vers ϕ :

De façon générale, si l'on trouve $\phi^n \xrightarrow{M} \phi$ et $u_n \to u$ tels que $\phi^n(u_n) \to \phi(u) + \lambda$ $(\lambda>0)$, prenant $\Phi^n = \phi^n$ et $\Phi = \phi + \lambda$, on aura bien trouvé un tel exemple.

Prenons $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de mesure égale à 1 $(m(\Omega) = 1)$,

$$\phi^n(f) = \|f\|_{L^n(\Omega)} \quad , \quad \phi(f) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On a $\phi^n \uparrow \phi$, $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ϕ convexes, sci, propres et $\phi^n \xrightarrow{M} \phi$.
Il suffit alors de prendre (étant donné $\lambda>0$), notant χ_E la fonction caractéristique d'un ensemble E ,

$$u_n = \lambda.\chi_{E_n} \quad \text{avec} \quad m(E_n) = 1/n \quad \text{et} \quad u = 0 \ .$$

Additif Ch.I.

Lien entre la R-convergence d'opérateurs maximaux monotones et la convergence des sections minimales.

Soit $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones, A^n convergeant vers A dans $\mathcal{M}_R$ (cf. Définition 1.1) ; on sait alors (cf. H. Brezis [10]) que les sections minimales des opérateurs A^n convergent vers la section minimale de A (que l'on note A^o) au sens suivant :

$$(1) \qquad \forall\ x \in D(A) \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad (A^n)^o x_n \longrightarrow A^o x \ .$$

Cette convergence s'exprime également à l'aide des résolvantes ([10])

$$(1) \Longleftrightarrow (2) \quad \forall\ \lambda>0 \ , \ \forall\ x \in \overline{D(A)} \ , \quad (I+\lambda A^n)^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}x \ .$$

Lorsque l'une de ces deux conditions équivalentes est satisfaite on dira que $(A^n)^o$ converge vers A^o et l'on notera $(A^n)^o \longrightarrow A^o$; (mais il faut remarquer que $(A^n)^o$ et A^o ne sont pas en général des maximaux monotones!). On constate d'autre part, prenant $H = \mathbb{R}$ $A_n \equiv 0$, $A = \partial I_{[0,1]}$, que sur cet exemple $(A^n)^o \longrightarrow A^o$, mais A^n ne converge pas vers A dans $\mathcal{M}_R$: pour remonter de la convergence des sections minimales à la R-convergence des opérateurs, il faut rajouter une condition de convergence des domaines.

(3) Définition.

Soit $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs maximaux monotones ; on pose

$$w - \mathcal{M}\ \overline{\lim}\ D(A^n) = \{x \in H \ / \ x = w - \lim x_{n_K} \ ; \ \sup_{K\in\mathbb{N}} |(A^{n_K})^o x_{n_K}| < +\infty\} \ .$$

Nous allons à présent montrer le résultat suivant (annoncé dans la Remarque 1.1, page 2) :

Théorème A.1. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert* H *; il y a équivalence*

(i) $A_n \longrightarrow A$ *dans* $\mathfrak{M}_R$

(ii) $A_n^o \longrightarrow A^o$ *et* $w\text{-}\mathfrak{M}\ \mathrm{lim\,sup}\ D(A_n) \subset \overline{D(A)}$.

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ ii) Pour que l'exposé soit complet, montrons le premier point, $A_n^o \longrightarrow A^o$ (cf. [10]) : soit $u \in D(A)$; puisque $A^n \longrightarrow A$, il existe $(\xi_n,\eta_n) \in A^n$ $\xi_n \longrightarrow u$, $\eta_n \longrightarrow A^o u$.

Or $|A_n^o\,\xi_n| \leqslant |\eta_n|$ et la suite $(A_n^o\,\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée ; soit $A_{n_K}^o\,\xi_{n_K} \rightharpoonup \eta$. Puisque $\xi_{n_K} \longrightarrow u$, on en déduit $\eta \in Au$ (Remarque 1.2 page 5); par passage à la limite sur $|A_n^o\,\xi_n| \leqslant |\eta_n|$ on obtient

$$|\eta| \leqslant \underline{\lim}\ |A_n^o\,\xi_n| \leqslant \underline{\lim}|\eta_n| = |A^o u| \quad \text{et donc} \quad \eta = A^o u \ ;$$

la suite $A_n^o\,\xi_n \xrightarrow{\ w\text{-}H\ } A^o u$ et de l'inégalité $\overline{\lim}|A_n^o\,\xi_n| \leqslant \overline{\lim}|\eta_n| = |A^o u|$ on déduit la convergence forte.

Montrons à présent que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|A_n^o\,x_n| < +\infty$ alors $x \in \overline{D(A)}$.

Soit $(\xi,\eta) \in A$ et $(\xi_n,\eta_n) \in A_n$, $\xi_n \longrightarrow \xi$ et $\eta_n \longrightarrow \eta$; écrivons la monotonie de A^n aux points ξ^n et x_n : $<\eta_n - A_n^o\,x_n,\ \xi_n - x_n> \geqslant 0$ d'où

$$<A_n^o x_n, x_n> \geqslant <A_n^o x_n, \xi_n> + <x_n, \eta_n> - <\eta_n, \xi_n> .$$

Or $<A_n^o x_n, x_n> \leqslant |A_n^o x_n| . |x_n| \leqslant C$, C constante positive.

Soit z un point limite de $(A_n^o x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, passant à la limite on obtient

$\forall\ (\xi,\eta) \in A \quad C \geqslant <z,\xi> + <\eta, x-\xi>$.

Prenant $\xi = J_\lambda x$ et $\eta = A_\lambda x$ et multipliant par $\lambda>0$

$$\forall\ \lambda>0 \qquad \lambda\left[C+|z| . |J_\lambda x|\right] \geqslant |x-J_\lambda x|^2 .$$

Or $(J_\lambda x)_{\lambda>o}$ reste borné et l'on obtient $|x-J_\lambda x| \leq C_1.\sqrt{\lambda}$, d'où l'appartenance de x à $\overline{D(A)}$.

(ii) $\Longrightarrow$ i) Soit f donné dans H et $u_n = (I+A_n)^{-1}f$; montrons que $u_n \longrightarrow (I+A)^{-1}f$; soit $x_n \longrightarrow x$ et $A_n^o x_n \longrightarrow A^o x$ fixés ; l'opérateur $(I+A_n)^{-1}$ étant une contraction

$$|u_n-x_n| \leq |f-x_n-A_n^o x_n| \quad \text{et} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ reste bornée.}$$

Soit $u_{n_K} \xrightarrow{w-H} u$; puisque $|A_{n_K}^o u_{n_K}| \leq |f-u_{n_K}|$ d'après l'hypothèse de "convergence des domaines", $u \in \overline{D(A)}$.

Soit $\xi \in D(A)$ et $\xi_n \longrightarrow \xi$, $A_n^o \xi_n \longrightarrow A^o\xi$; écrivons la monotonie de A_{n_K} aux points u_{n_K} et ξ_{n_K} :

$$< f - u_{n_K} - A_{n_K}^o \xi_{n_K}, u_{n_K} - \xi_{n_K} > \geq 0 \quad \text{et à la limite}$$

$$\forall \xi \in D(A) \qquad < f - u - A^o\xi, u - \xi> \geq 0 .$$

Tenant compte du fait que u appartient à $\overline{D(A)}$ et que A^o est une section principale de A , on déduit $f - u \in Au$ i.e. $u = (I+A)^{-1}f$; par conséquent $u_n \rightharpoonup (I+A)^{-1}f$ et penant dans l'argument précédent $\xi = (I+A)^{-1}f$ (qui appartient bien à $D(A)$) on obtient $\overline{\lim}|u_n|^2 \leq |(I+A)^{-1}f|^2$ et donc

$$(I+A_n)^{-1}f \longrightarrow (I+A)^{-1}f .$$

-:-:-:-

CHAPITRE II - MESURABILITE D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS MONOTONES.

1) Lien entre les différentes notions de mesurabilité pour une famille d'opérateurs maximaux monotones.

Dans toute cette partie H (resp. X), sauf spécification explicite, désigne un espace de Hilbert séparable (resp. Banach séparable), $\mathfrak{M}_R$ (resp. $\mathfrak{A}_R$) l'ensemble des maximaux monotones (resp. des m-accrétifs) muni de la topologie de la R-convergence (cf. Définition 1.1). On désignera par $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu\geq 0$, σ-finie, avec $\mathcal{C}$ μ-complète.

THEOREME A. (Castaing [14], Théorème 30).

Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu\geq 0$ σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète,* X *un espace métrique séparable complet et* Γ *une multiapplication à valeurs fermées non vides de* T *dans* X *; il y a équivalence*

a) $\Gamma^{-1}(U)\in \mathcal{C}$ *pour tout ouvert* U *de* X

b) $\Gamma^{-1}(F)\in \mathcal{C}$ *pour tout fermé* F *de* X

c) $\Gamma^{-1}(B)\in \mathcal{C}$ *pour tout borélien* B *de* X

d) *Le graphe de* Γ *appartient à* $\mathcal{C}\otimes\mathcal{B}$ *où* $\mathcal{B}$ *désigne la tribu borélienne de* X

e) *Pour tout* x *de* X *, l'application* $t \longrightarrow d(x,\Gamma(t))$ *est mesurable*

f) *La multiapplication* Γ *possède une famille dénombrable de sections mesurables* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que pour tout* t *de* T *,* $\Gamma(t) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sigma_n(t)\}}$.

. Ce théorème est l'outil principal dont nous nous servirons dans les problèmes de mesurabilité. Citons en outre les travaux Debreu, Ioffe and Levin, Rockafellar relatifs à ce théorème.

THEOREME B. (Théorème de projection).

Soit $(T,\mathcal{C}, \mu)$, $\mu\geq 0$, $\mathcal{C}$ μ*-complète et* S *un espace souslinien ; si* G *appartient à* $\mathcal{C}\otimes\mathcal{B}(S)$ *, sa projection* $pr_T(G)$ *appartient à* $\mathcal{C}$.

Sous cette forme ce théorème est dû à M.F. Sainte Beuve [28] ; il généralise des énoncés précédents de Aumann, Valadier, Von Neumann.

Définition 2.1. Soit $(T,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geq 0$, σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète soit X un espace métrique séparable complet ; nous dirons qu'une multiapplication à valeurs fermées de T dans X est mesurable si $T_o = \{t \in T ; \Gamma(t) \neq \emptyset\}$ appartient à $\mathcal{C}$ et si Γ restreint à T_o possède une des propriétés équivalentes du Théorème A.

LEMME 2.1. *Soit $(T,\mathcal{C})$ un espace mesurable, et A une application de T dans $\mathcal{A}$ il y a équivalence :*

(i) $t \longrightarrow A(t)$ *mesurable de T dans $\mathcal{A}_R$.*

(ii) $\forall \lambda>0$, $\forall x \in H$, $t \longrightarrow (I+\lambda A(t))^{-1}x$ *mesurable de T dans X.*

(iii) $\exists \lambda_o>0$, $\forall x \in H$, $t \longrightarrow (I+\lambda_o A(t))^{-1}x$ *mesurable de T dans X.*

(iv) $\exists \lambda_o>0$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dense dans H*, $t \longrightarrow (I+\lambda_o A(t))^{-1}x_n$ *mesurable de T dans X.*

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) L'application $t \longrightarrow (I+\lambda A(t))^{-1}x$ est la composée de l'application $t \longrightarrow A(t)$ mesurable et de l'application $A \longrightarrow (I+\lambda A)^{-1}x$ continue de $\mathcal{A}_R$ dans X ; la composée est donc mesurable.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) évident.

Soit d la distance associée à λ_o et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, induisant la topologie de la R-convergence (cf. Proposition 2.1) ; étant donné B élément de $\mathcal{A}$ on a

$$d(A(t),B) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/_{2^n} \inf(1,|(I+\lambda_o A(t))^{-1}x_n - (I+\lambda_o B)^{-1}x_n|)$$

et donc pour tout B dans $\mathcal{A}$, l'application $t \longmapsto d(A(t),B)$ est mesurable ; l'espace $\mathcal{A}_R$ étant un polonais (en particulier tout ouvert est réunion dénombrable de boules ouvertes) on en déduit immédiatement que l'application $t \longrightarrow A(t)$ est mesurable de T dans $\mathcal{A}_R$.

<u>THEOREME 2.1</u>. *Soient* $(T, \mathcal{C}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu \geq 0$ σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète ; soit* A *une application de* T *dans* $\mathcal{a}$ *; il y a équivalence*

(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$ $\quad t \longrightarrow (I+\lambda A(t))^{-1}x$ *est mesurable de* T *dans* X .

(ii) $\quad t \longrightarrow G(A(t))$ *(graphe de* $A(t)$*) est multivoque mesurable de* T *dans* $X \times X$.

<u>Démonstration</u> : (i) $\Longrightarrow$ (ii) Notant que la graphe de $A(t)$ est fermé dans $X \times X$, nous allons montrer, suivant le Théorème A, que la multiapplication $t \longrightarrow G(A(t))$ possède une famille dénombrable, dense, de sections mesurables.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans X ; posons $\sigma_n(t) = (J_1^t\, x_n, A_1^t\, x_n)$ Compte tenu de la relation $A_\lambda^t x \in A^t(J_\lambda^t x)$ et de l'hypothèse i), $\sigma_n(t)$ est une section mesurable de la multiapplication $t \longrightarrow G(A(t))$; montrons que pour t fixé dans T , $\{\sigma_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $G(A^t)$:

Soit $(x,y) \in A^t$, on a $x = J_1^t(x+y) \qquad y = A_1^t(x+y)$ d'où

$$|x - J_1^t\, x_n| = |J_1^t(x+y) - J_1^t x_n| \leqslant |(x+y) - x_n|$$

$$|y - A_1^t\, x_n| = |A_1^t(x+y) - A_1^t x_n| \leqslant |(x+y) - x_n| \ .$$

Choisissant $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x+y-x_n| \leqslant \varepsilon$ on obtient le résultat désiré.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) La multiapplication $t \longrightarrow G(A(t))$ étant mesurable possède une famille dénombrable dense de sections mesurables, $t \longmapsto \sigma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$. L'application $(x,y) \longrightarrow (x+y,x)$ étant un homéomorphisme de $X \times X$ sur $X \times X$ et transformant le graphe de A en le graphe de $(I+A)^{-1}$ on déduit que $t \longmapsto \omega_n(t) = (x_n(t) + y_n(t), x_n(t))$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \longrightarrow G((I+A^t)^{-1})$; la multiapplication $t \longrightarrow G((I+A^t)^{-1})$ est donc mesurable de T dans $X \times X$ (d'après le Théorème A) ; montrons que cela entraîne que pour x fixé dans X , $t \longrightarrow (I+A^t)^{-1}x$ mesurable :

Soit $B \in \mathcal{B}(X)$ donné ;

$$\{t \in T \ / \ (I+A^t)^{-1}x \cap B \neq \emptyset\} = \{t \in T \ / \ (I+A^t)^{-1} \cap \{x\} \times B \neq \emptyset\} \ .$$

Or ce dernier ensemble appartient à $\mathcal{C}$ d'après l'équivalence f) $\Longleftrightarrow$ c) du Théorème A.

Remarque 2.1. On a montré en fait un résultat un peu plus général, à savoir :

Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète et A une multiapplication mesurable à valeurs dans les parties fermées de $X \times X$ où X est un Fréchet séparable ; on a les implications (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(i) $t \longrightarrow G(A(t))$ multivoque mesurable

(ii) $t \longrightarrow G((I+A(t))^{-1})$ multivoque mesurable de $\mathcal{C}$ dans $X \times X$

(iii) $\forall x \in H$ $E_x = \{t \ / \ x \in D((I+A(t))^{-1})\} \in \mathcal{C}$ et

$$t \in E_x \longrightarrow (I+A(t))^{-1}x \text{ mesurable.}$$

Si l'on suppose en outre que $\forall t \in \mathcal{C}$, $(I+A(t))^{-1}$ est univoque continue partout définie, on a les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : en effet on voit alors que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense dans X , $t \longrightarrow (x_n, (I+A(t))^{-1}x_n)$ forme une famille dénombrable dense de sections mesurables de la multiapplication $t \longrightarrow G((I+A(t))^{-1})$.

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

Définition 2.2. Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geq 0$, σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète et X un espace de Banach séparable ; on dira qu'une famille $(A(t))_{t \in T}$ d'opérateurs m-accrétifs dans X est mesurable si l'une des propriétés équivalentes du Théorème 2.1 est vérifiée.

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés au lien entre la mesurabilité des résolvantes et la mesurabilité des graphes des opérateurs ; le problème qui se pose naturellement est de voir si ces notions sont équivalentes à la mesurabilité pour tout x de X de l'application $t \longrightarrow A(t)x$.

PROPOSITION 2.1. *Soit $(A(t))_{t \in T}$ une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones ; alors l'application $t \longrightarrow \overline{D(A(t))}$ est multivoque mesurable et pour tout x de H , l'application $t \longrightarrow A^o(t)x$ est mesurable.*

Démonstration : Soit B un borélien de H ; montrons que $\{t \in T \ / \ D(A(t)) \cap B \neq \emptyset\}$ appartient à $\mathcal{C}$.

$\{t \in T \ / \ D(A(t)) \cap B \neq \emptyset\} = \mathrm{proj}_T \{G(\mathcal{A}) \cap (\mathcal{C} \times B \times H)\}$ où

$G(\mathcal{A}) = \{(t, x, y) \in T \times H \times H \ / \ (x,y) \in A(t)\}$.

Or $G(\mathcal{A}) \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}(H \times H)$ puisque par hypothèse $t \longrightarrow A(t)$ est mesurable ; de même $\mathcal{C} \times B \times H \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}(H \times H)$.

On conclut à l'aide du Théorème de projection ; la multiapplication $t \longrightarrow D(A(t))$ est donc mesurable (en ce sens) ; on en déduit immédiatement la mesurabilité de la multiapplication $t \longrightarrow \overline{D(A(t))}$, puisque, si B désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon r et $x \in H$,

$$\{t \in T \ / \ d(x,\overline{D(A(t))}) < r\} = \{t \in T \ / \ d(x,D(A(t))) < r\}$$

$$= \{t \in T \ / \ D(A(t)) \cap B(0,r) \neq \emptyset\} \in \mathcal{C}$$ d'après ce qui précède.

Donc $\forall\, x \in H$, $t \longrightarrow d(x,\overline{D(A(t))})$ est mesurable et l'on conclut à l'aide du Théorème A.

Soit à présent x fixé dans H ; prenant $B = \{x\}$, d'après la mesurabilité de la multiapplication $t \longrightarrow D(A(t))$,

$$E_x = \{t \in T \ / \ x \in D(A(t))\} = \{t \in T \ / \ D(A(t)) \cap \{x\} \neq \emptyset\}$$

appartient à $\mathcal{C}$. Or la famille $(A(t))_{t \in T}$ étant mesurable, $\forall\, \lambda > 0$ $t \longrightarrow A_\lambda(t,x)$ est mesurable de T, donc de E_x, dans H ; tenant compte du fait que $\forall\, t \in E_x$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda(t,x) = A^o(t,x)$ on conclut à la mesurabilité de l'application $t \longrightarrow A^o(t,x)$.

<u>Remarque 2.2</u>. Soit $(A(t))_{t \in T}$ une famille mesurable d'opérateurs m-accrétifs dans un Banach séparable X ; le raisonnement de la première partie de la Proposition 2.1 est valable dans ce cadre plus général, et l'on conclut à la mesurabilité de la multiapplication $t \longrightarrow D(A(t))$.

Notons toujours dans ce cadre que $\forall\, x \in X$, $t \longrightarrow A(t,x)$ est multivoque mesurable : en effet, $t \longrightarrow A(t,x)$ est une multiapplication à valeurs fermées de E_x dans X et étant donné B borélien de X

$$\{t \in T \ / \ A(t,x) \cap B \neq \emptyset\} = \{t \in T \ / \ G(A(t)) \cap \{x\} \times B \neq \emptyset\}.$$

Or $t \longrightarrow G(A(t))$ est multivoque mesurable de T dans $X \times X$ par hypothèse, et $\{x\} \times B \in \mathcal{B}(X \times X)$.

Si les opérateurs $A(t)$ sont en outre B-accrétifs (cf. Benilan [6]), pour tout x de $D(A(t))$, $A(t)x$ est un convexe fermé et si l'on suppose X réflexif de norme strictement convexe, pour tout x de $D(A(t))$, $A_\lambda(t)x \rightharpoonup A^o(t)x$ où $A^o(t)x$ désigne l'unique élément de norme minimum du convexe fermé $A(t)x$; sous ces hypothèses la Proposition 2.1 se généralise au cas accrétif.

PROPOSITION 2.1.(bis) . *Soit* $(A(t))_{t\in T}$ *une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones et* $t \mapsto x(t)$ *une sélection mesurable de la multiapplication* $t \mapsto D(A(t))$ *; alors, la multiapplication* $t \mapsto A(t,x(t))$ *est mesurable ainsi que l'application* $t \to A^o(t,x(t))$.

Démonstration : Posons $\Gamma(t) = A(t,x(t))$; on a l'équivalence

$$(t,y) \in G(\Gamma) \iff (t,x(t),y) \in G(A)$$

et donc $G(\Gamma) = \alpha^{-1}(G(A))$ où $\alpha : (t,y) \mapsto (t,x(t),y)$ est mesurable de

$(T \times H, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H))$ dans $(T \times H \times H, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H))$ puisque $x(.)$ est mesurable ; tenant compte du fait que $G(A)$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$, on déduit que $G(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(H)$, et donc que la multiapplication Γ est mesurable ;

d'autre part l'application $t \mapsto A_\lambda(t,x(t))$ est mesurable, l'application $(t,x) \to A_\lambda(t,x)$ étant de Caratheodory ; par passage à la limite, on en déduit que l'application $t \mapsto A^o(t,x(t))$ est mesurable (H séparable).

Remarque. La Proposition (2.1 bis) généralise la Proposition 2.1 en remarquant que si $x(.)$ est une application mesurable,

$$E_{x(.)} = \{t \in T \ / \ x(t) \in D(A(t))\} \text{ est mesurable ;}$$

en effet cet ensemble est égal à $\text{proj}_T \left[(G(x(.)) \times H) \cap G(A)\right]$; dans ces conditions la multiapplication (resp. l'application $t \to A(t,x(t))$ (resp. $t \mapsto A^o(t,x(t))$) est mesurable de $E_{x(.)}$ dans H .

LEMME 2.2. *Soit* H *un espace de Hilbert séparable et* T *localement compact muni d'une mesure de Radon positive* m *; soit* $t \mapsto \Gamma(t)$ *une multiapplication mesurable de* T *dans* H *, à valeurs convexes, fermées non vides ;*

Alors pour tout $\varepsilon>0$ *et pour tout compact* $K \subset T$ *, il existe* K_ε *compact,* $K_\varepsilon \subset K$ *,* $m(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *tel que l'application* $t \to \Gamma(t)$ *soit de graphe séquentiellement fermé dans* $K_\varepsilon \times \omega\text{-}H$ *(i.e. si* $t_n \to t$ *dans* K_ε *,* $x_n \rightharpoonup x$ *dans* $\omega\text{-}H$ *,* $x_n \in \Gamma(t_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, alors* $x \in \Gamma(t)$*)* .

<u>Démonstration</u> : Puisque la multiapplication $t \longrightarrow \Gamma(t)$ est mesurable, pour tout x de H l'application $t \longmapsto d(x,\Gamma(t)))$ est mesurable et l'application

$$t \longmapsto \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x = \Gamma(t) \cap \overline{B}\,(x,d(x,\Gamma(t))) \text{ est mesurable}$$

(cf. [14] pour le résultat concernant la mesurabilité de $t \longrightarrow \bigcap_{i\in I} \Gamma_i(t))$; étant donné $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H , par application de la propriété de Lusin, pour chaque K compact de T et chaque $\varepsilon>0$, on pourra trouver K_ε compact, $K_\varepsilon \subset K$, $m(K\setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad t \longmapsto \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x_n \text{ est continue de } K_\varepsilon \text{ dans } H .$$

Or $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\forall\, t$, $|\mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x_n - \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x_m| \leqslant |x_n - x_m|$ et par conséquent l'application $t \longmapsto \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x$ est continue de K_ε dans H pour tout x de H ; soit alors $t_n \longrightarrow t$ dans K_ε et $x_n \longrightarrow x$, $x_n \in \Gamma(t_n)$; puisque $x_n \in \Gamma(t_n)$, $\forall\, \xi \in H$

$$<\xi - \mathrm{proj}_{\Gamma(t_n)}\xi,\ \mathrm{proj}_{\Gamma(t_n)}\xi - x_n> \geqslant 0 ;$$

par passage à la limite $\forall\, \xi \in H$

$$<\xi - \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}\xi,\ \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}\xi - x> \geqslant 0 ;$$

prenant $\xi = x$ on obtient $x = \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x$ soit $x \in \Gamma(t)$.

. Le problème qui se pose à présent est celui de la réciproque à la Proposition précédente : pour l'instant nous ne connaissons la réponse que dans le cas où les opérateurs sont de domaine d'intérieur vide ; pour montrer ce résultat nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires.

LEMME 2.3. *A maximal monotone, D dense dans D(A) .*

$$\forall x \in \text{Int } D(A) \qquad Ax = \overline{\text{Conv}}\,\{\omega\text{-}\lim y_n \ ; \ y_n = \overset{\circ}{A}x_n \ , \ x_n \longrightarrow x \ , \ x_n \in D\} \ .$$

Démonstration : De façon générale $\forall\, x \in D(A)$

$$\overline{\text{Conv}}\,\{\omega\text{-}\lim y_n \ ; \ y_n \in Ax_n \ ; \ x_n \longrightarrow x \ ; \ x_n \in D\} \subset Ax \ .$$

En effet A est demi fermé et $\forall\, x \in D(A)$ Ax est un convexe fermé.

. Supposons $x \in \text{Int } D(A)$; alors Ax est borné et donc Ax est un convexe faiblement compact dans H ;
raisonnons par l'absurde :

soit $y \in Ax$, $y \notin Bx = \overline{\text{Conv}}\,\{\omega\text{-}\lim y_n \ ; \ y_n = \overset{\circ}{A}x_n \ ; \ x_n \longrightarrow x \ \ x_n \in D\}$.

D'après le Théorème de Hahn-Banach, on va pouvoir séparer strictement y du convexe faiblement compact Bx :

$$\exists\, z \in H \quad \langle z,y\rangle > \sup_{\xi \in Bx} \langle z,\xi\rangle$$

soit $\langle z,y-\xi\rangle > 0 \quad \forall\, \xi \in Bx \quad (*)$.

Construisons une suite $x_n \in D$, $x_n \longrightarrow x$ telle que $\dfrac{x_n - x}{|x_n - x|} \longrightarrow z$:

Soit $z_n = x + \frac{1}{n} z$, pour n suffisamment grand, x étant dans l'intérieur de $D(A)$, on pourra trouver un $x_n \in D \cap B(z_n, \frac{1}{n^2})$; on vérifie immédiatement qu'une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait à la condition précédente.

La suite x_n pour n suffisamment grand sera dans l'intérieur de $D(A)$ et donc $\{A^{\circ} x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné ; soit $A^{\circ} x_{n_k} \rightharpoonup u$.

D'après la monotonie de A : $\langle A^{\circ} x_{n_k} - y, x_{n_k} - x\rangle \geqslant 0$; divisant par

$|x_{n_k} - x|$ $(\neq 0)$ et faisant tendre k vers l'infini on obtient

$\langle z,y-u\rangle \leqslant 0$ pour un $u \in Bx$ d'où la contradiction avec $(*)$.

LEMME 2.4. *A maximal monotone, Int $D(A) \neq \emptyset$;*
D dense dans $D(A)$; alors

$$A = \{(x,y) \in \overline{D(A)} \times H \ ; \ \langle y-A^o\xi, x-\xi\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D\} \ .$$

Démonstration : L'une des inclusions étant évidente, il s'agit de montrer que

$((x,y) \in \overline{D(A)} \times H$ et $\langle y-A^o\xi, x-\xi\rangle \geq 0 \ \forall \xi \in D) \Longrightarrow y \in Ax$; d'après le Lemme 2.3 on se ramène à montrer que $A = M$ où

$$M = \{(x,y) \in \overline{D(A)} \times H \ ; \ \langle y-A^o\xi, x-\xi\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \text{Int } D(A)\} \ .$$

a) $A \subset M$ évident.

b) M est monotone ; tenant compte de la maximale monotonie de A, il s'en suivra bien l'égalité $A = M$.

Soit (x_1,y_1) , $(x_2,y_2) \in M$; notant $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ on a $x_1 = x + \frac{x_1-x_2}{2}$ et $x_2 = x - \frac{x_1-x_2}{2}$.

$$\langle y_1-A^o\xi, x_1-\xi\rangle \geq 0$$

$$\langle y_2-A^o\xi, x_2-\xi\rangle \geq 0 \quad \text{d'où en ajoutant}$$

$$\langle y_1+y_2-2A^o\xi, x-\xi\rangle + \langle y_1-y_2, \frac{x_1-x_2}{2}\rangle \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\langle y_1-y_2, x_1-x_2\rangle \geq \langle y_1+y_2, \xi-x\rangle + 2\langle A^o\xi, x-\xi\rangle \qquad \forall \xi \in \text{Int } D(A) \ .$$

Tout revient à montrer que $\overline{\lim}_{\substack{\xi \in \text{Int } D(A) \\ \xi \to x}} \langle A^o\xi, x-\xi\rangle \geq 0$:

Soit $\xi_o \in \text{Int } D(A) = \text{Int } \overline{D(A)}$; si $x \in \text{Int } D(A) = \text{Int } \overline{D(A)}$ c'est terminé ; sinon

$$\forall \ 0 < t \leq 1 \qquad x + t(\xi_o - x) = (1-t)x + t\,\xi_o \in \text{Int } \overline{D(A)}$$

Prenons $\xi_n = x + t_n(\xi_o - x)$; $t_n \downarrow 0$, on a bien $\xi_n \longrightarrow x$.

$$\langle A^o\xi_n - A^o\xi_{n+1}, \xi_n - \xi_{n+1}\rangle \geq 0 \quad \text{soit}$$

$$(t_n - t_{n+1})\left[\langle A^o\xi_n, \xi_o - x\rangle - \langle A^o\xi_{n+1}, \xi_o - x\rangle\right] \geq 0 \ .$$

Donc $\langle A^o \xi_n, \xi_o - x\rangle$ est une suite décroissante.

Supposons $\overline{\lim} \langle A^o \xi_n, x-\xi_n\rangle = \alpha < 0$ on aura alors

$$\langle A^o \xi_n, -t_n(\xi_o - x)\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand}$$

$$\langle A^o \xi_n, \xi_o - x\rangle \geqslant -\frac{\alpha}{2t_n} \left(n \text{ suffisamment grand}\right)$$

et donc $\langle A^o \xi_n, \xi_o - x\rangle \longrightarrow +\infty$ ce qui est contradictoire avec la décroissance de cette suite.

Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 2.2. *H Hilbert séparable, T localement compact muni d'une mesure de Radon positive m . Soit* $(A(t))_{t\in T}$ *une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones tels que* $\forall t \in T$ $\mathrm{Int}\, D(A(t)) \neq \emptyset$ *; il y a équivalence*

(i) La famille $(A(t))_{t\in T}$ *est mesurable.*

(ii) $\begin{cases} t \longrightarrow \overline{D(A(t))} \text{ est mesurable} \\ \forall x \in H, \ t \longrightarrow A^o(t,x) \text{ mesurable.}\end{cases}$

Démonstration : i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de la proposition précédente.

ii) $\Longrightarrow$ i) Remarquons tout d'abord que $t \longrightarrow \overline{D(A(t))}$ mesurable, entraîne, d'après le Lemme 2.2 que cette application est "Lusin de graphe séquentiellement fermé" dans $T \times \omega\text{-}H$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $D = \bigcup_{t\in T} D(A^t)$; alors $\forall t \in T$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dense dans $\mathrm{Int}\, D(A^t)$ et donc dans $\overline{D(A^t)}$ puisque $\overline{D(A^t)} = \overline{\mathrm{Int}\, D(A^t)}$.

Puisque $t \longrightarrow A^o(t,x_n)$ est mesurable, $E_n = \{t \in T ; x_n \in D(A^t)\}$ est mesurable et $t \in E_n \longrightarrow A^o(t,x_n)$ est mesurable.

Construisons la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n : T \longrightarrow H$:

$$X_n(t) = \begin{bmatrix} x_n & \text{sur } E_n \\ x_1 & \text{sur } E_1 \setminus E_n \\ x_2 & \text{sur } E_2 \setminus (E_1 \cup E_n) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_k & \text{sur } E_k \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1} \cup \\ \cdot & \\ \cdot & \end{bmatrix}$$

Alors X_n est mesurable de T dans H, et est bien définie puisque $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad t \longrightarrow A^o(t,X_n(t))$ est mesurable : en effet

$$\forall\, t \in T, \qquad X_n(t) \in D(A^t) \quad \text{et} \quad A^o(t,X_n(t)) = \left| \begin{array}{ll} A^o(t,x_k) & t \in E_k \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{k-1} \cup E_n)\ \ {\scriptstyle k\neq n} \\ \vdots & \\ A^o(t,x_n) & t \in E_n \\ \vdots & \end{array} \right.$$

. $\forall\, t \in [0,T]$ $\{X_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ dense dans $D(A^t)$; soit $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dense dans Int $D(A^t)$.

Alors $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\quad t \in E_{n(k)}$ et $X_{n(k)}(t) = x_{n(k)}$ par définition.

. Soit $\varepsilon>0$ et K compact dans T ; par application de la propriété de Lusin on pourra trouver K_ε compact, $K_\varepsilon \subset K$, $m(K\setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que :

$t \longrightarrow \overline{D(A^t)}$ soit de graphe séquentiellement fermé dans $K_\varepsilon \times \omega\text{-}H$;

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad t \longrightarrow X_n(t)$ soit continue sur K_ε ;

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad t \longrightarrow A^o(t,X_n(t))$ soit continue sur K_ε ;

. Soit $x_o \in H$ fixé ; montrons que si $t_n \longrightarrow t$ dans K_ε,

$$y_n = (I+A^{t_n})^{-1} x_o \longrightarrow (I+A^t)^{-1} x_o .$$

Notons $z_{n_o}(t) = X_{n_o}(t) + A^o(t,X_{n_o}(t))$;

z_{n_o} et X_{n_o} sont bornés sur K_ε ;

$X_{n_o}(t) = (I+A^t)^{-1}\, z_{n_o}(t)$ et donc

$|y_n - X_{n_o}(t_n)| \leq |x_o - z_{n_o}(t_n)|$ et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste donc bornée.

Soit $y_{n(k)} \rightharpoonup y$ dans ω-H .

L'application $t \longrightarrow \overline{D(A^t)}$ étant de graphe faiblement fermé sur K_ε, on aura $y \in \overline{D(A^t)}$. D'autre part écrivant la monotonie de A^{t_n} en y_n et $X_k(t_n)$

$$< x_o - y_n - A^o(t_n,X_k(t_n)) \,,\, y_n - X_k(t_n)> \ \geq 0 \qquad (*) \,.$$

Passant à la limite $(n \longrightarrow +\infty) \Longrightarrow$

$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \langle x_o - y - A^o(t,X_k(t)), y - X_k(t)\rangle \geqslant 0$ avec $y \in \overline{D(A^t)}$.

Donc d'après le Lemme 2.4, tenant compte de la densité des $(X_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ dans $D(A^t)$, cela entraîne que $y = (I+A^t)^{-1}x_o$; donc $(I+A^{t_n})^{-1} x_o \longrightarrow (I+A^t)^{-1} x_o = y$

Montrons que y_n converge fortement vers y : de la relation (*) on tire

$$\overline{\lim}\ |y_n|^2 \leqslant \langle x_o - A^o(t,X_k(t)),y\rangle + \langle X_k(t),-x_o+y+A^o(t,X_k(t))\rangle$$

D'après le Lemme 2.3 cela entraîne que

$$\overline{\lim}|y_n|^2 \leqslant \langle x_o - A^o(t,\xi),y\rangle + \langle \xi,y-x_o+A^o(t,\xi)\rangle \qquad \forall\, \xi \in \operatorname{Int} D(A^t)$$

$$\leqslant \langle \xi,y\rangle + \langle x_o,y-\xi\rangle + \langle A^o(t,\xi),\xi-y\rangle \ .$$

Or d'après le Lemme 2.4 $\quad \underline{\lim}_{\substack{\xi \in \operatorname{Int} D(A^t)\\ \xi\to y}} \langle A^o(t,\xi),\xi-y\rangle \leqslant 0$.

Donc $\qquad \overline{\lim}|y_n|^2 \leqslant |y|^2$ et $y_n \longrightarrow y$.

2) <u>Familles mesurables de sous-différentiels et intégrandes convexes normales.</u>

Nous supposons à présent $A(t) = \partial\phi^t$ où ϕ^t est convexe, sci, propre de H dans $]-\infty,+\infty]$;

<u>THEOREME C</u> (Rockafellar [27]).

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(T,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète ; soit $\phi : T \times H \longrightarrow\ ]-\infty,+\infty]$ telle que pour tout t de T , l'application $x \longrightarrow \phi(t,x)$ est convexe, sci, propre ; il y a équivalence

(i) ϕ est $\mathcal{T}\otimes B$ mesurable (B tribu borélienne de H)

(ii) La multiapplication $t \longrightarrow Epi\ \phi(t,.)$ est mesurable (où $Epi\ \phi(t,.) = \{(x,\lambda)\in H\times\mathbb{R}\ /\ \lambda \geqslant \phi(t,x)\}$)

. On dira que ϕ est une intégrande convexe normale si l'une des propriétés équivalentes ci-dessus est vérifiée ; on désigne toujours par $\mathcal{M}_\phi$ le cône des sous-différentiels de fonctions convexes, sci, propres de H dans $]-\infty,+\infty]$ et par $\mathcal{M}_{\phi_o}$ le sous-cône de $\mathcal{M}_\phi$ formé par les fonctions positives nulles à l'origine.

<u>THEOREME 2.3.</u> *Soit* $(T, \mathcal{C}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu \geq 0$ σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète et* $(\phi^t)_{t \in T}$ *une famille de fonctionnelles convexes sci, propres de* H *dans* $]-\infty, +\infty]$; *il y a équivalence*

(*i*) $(t,x) \in T \times H \to \phi(t,x)$ *est une intégrande convexe normale*

(*ii*) $\forall \lambda > 0$ $\forall x \in H$ $t \to (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}x$ *mesurable*
et il existe $t \to x_o(t)$ *et* $t \to y_o(t)$ *mesurables, telles que* $y_o(t) \in \partial\phi(t, x_o(t))$ μ*-p.p.t et* $t \to \phi(t, x_o(t))$ *mesurable.*

(*iii*) $\forall \lambda > 0$ $(t,x) \mapsto \phi_\lambda(t,x)$ *est une intégrande convexe normale.*

<u>Démonstration du Théorème 2.3.</u> i) $\Longrightarrow$ ii) Le graphe de la multiapplication $t \to \partial\phi^t$ est égal à

$$G(\partial\phi) = \{(t,x,y) \in T \times H \times H \ ; \ \phi(t,x) + \phi^*(t,y) - \langle x,y\rangle = 0\} .$$

Or ϕ étant une intégrande normale, ϕ^* l'est également :
la démonstration de ce résultat repose sur la remarque suivante : soit $t \to (r_n(t), \sigma_n(t)$ une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \mathrm{Epi}\ \phi(t)$; alors

$$\phi^*(t,x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\langle x, \sigma_n(t)\rangle - r_n(t)\} \quad \text{et} \quad \phi^* \text{ est une intégrande normale ;}$$

l'application $(t,x,y) \mapsto \phi(t,x) + \phi^*(t,y) - \langle x,y\rangle$ est donc $\mathcal{C} \otimes B(H \times H)$ mesurable, (tenant compte de l'égalité $B(H) \otimes B(H) = B(H \times H)$ car H est séparable).

L'application $t \to \partial\phi^t$ étant de graphe mesurable, est donc mesurable.

D'après le Théorème 2.1, les résolvantes dépendent mesurablement de $t \in T$; de plus posant $x_o(t) = J_1^t x_o$ et $y_o(t) = A_1^t x_o$ on a bien $t \to x_o(t)$, $t \to y_o(t)$ mesurables, pour tout t de T $y_o(t) \in \partial\phi(t, x_o(t))$, et $t \to \phi(t, x_o(t))$ est mesurable comme composée d'applications mesurables.

ii) $\Longrightarrow$ i) Posons

$\psi(t,x) = \phi(t,x) - \phi(t,x_o(t)) - \langle y_o(t), x - x_o(t)\rangle$ où $x_o(.)$ et $y_o(.)$ sont donnés dans la formulation de ii) ; pour tout t de T , $\psi(t,.)$ est une fonctionnelle convexe, sci, propre et $\psi(t,x_o(t)) = 0$, $\partial\psi(t,x_o(t)) \ni 0$; par conséquent, pour tout $\lambda > 0$ et tout t de T , $\psi_\lambda(t,x_o(t)) = 0$; pour t fixé dans T considérons la fonction $\tau \to \psi_\lambda(t, \tau x + (1-\tau)\, x_o(t))$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et écrivons qu'elle est égale à l'intégrale de sa dérivée :

$$\psi_\lambda(t,x) = \int_0^1 \langle A_\lambda^\psi\ (t,\tau x+(1-\tau)x_o(t)),\ x-x_o(t)\rangle\ d\tau$$

où $A_\lambda^\psi(t,.)$ est la différentielle Fréchet de $\psi_\lambda(t,.)$; or par hypothèse $t \longrightarrow \partial\phi^t$ est mesurable, d'autre part $\partial\psi^t = \partial\phi^t - y_o(t)$ et donc $t \longrightarrow \partial\psi^t$ est mesurable ce qui d'après le Théorème 2.1 entraîne la mesurabilité de $t \longrightarrow A_\lambda^\psi(t,x)$ pour tout x de H ; écrivant que l'intégrale ci-dessus est limite de somme de Riemann on conclut à la mesurabilité pour tout $\lambda>0$ et tout x de H de l'application $t \longrightarrow \psi_\lambda(t,x)$; compte tenu de la continuité de l'application $x \longrightarrow \psi_\lambda(t,x)$ pour tout t de T, l'application $(t,x) \longrightarrow \psi_\lambda(t,x)$ est de Caratheodory ; elle est donc mesurable de $T \times H$ muni de la tribu $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$; (cf. par exemple, Castaing et Valadier [14]). Or $\lim\limits_{\lambda\to o} \psi_\lambda(t,x) = \psi(t,x)$ et donc $(t,x) \longrightarrow \psi(t,x)$ est une intégrande normale ; compte tenu de la relation qui lie ϕ et ψ on obtient le résultat désiré.

i) $\Longleftrightarrow$ iii) Compte tenu de la relation

$$\phi_\lambda = (\phi\ \nabla\ \frac{1}{2\lambda}\ |.|^2)^{**}$$

$$=(\phi^* + \frac{\lambda}{2}\ |.|^2)^*$$

on conclut que si ϕ est une intégrande normale, ϕ_λ l'est également.

D'autre part $\phi = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \phi_{1/n}$; si ϕ_λ est une intégrande normale pour tout λ, ϕ l'est donc également.

<u>Remarque 2.3</u>. On a iii $\Longleftrightarrow$ iii)bis : $\exists\ \lambda_o, (t,x) \longrightarrow \phi_{\lambda_o}(t,x)$ intégrande normale. En effet on aura alors

$$\phi^* = \phi^*_{\lambda_o} - \frac{\lambda_o}{2}\ |.|^2 \quad \text{et donc} \quad \phi = (\phi^*_{\lambda_o} - \frac{\lambda_o}{2}\ |.|^2)^*$$ sera une intégrande convexe normale.

. Dans le cas T compact muni d'une mesure de Radon positive m, on aurait pu montrer (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) à l'aide du Théorème 1.1 : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $K_\varepsilon \subset T$, K_ε compact, $m(T\setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, tel que $t \longrightarrow \partial\phi^t$, $t \longrightarrow x(t)$, $t \longrightarrow y(t)$, $t \longrightarrow \phi(t,x(t))$ soient continues de K_ε dans respectivement $\mathfrak{M}_R$, H et $\mathbb{R}$; d'après le Théorème 1.1 si $t_n \longrightarrow t$ dans K_ε, $\phi(t_n,.)$ converge vers $\phi(t,.)$ au sens de Mosco ; l'application $t \longrightarrow \text{Epi}\ \phi(t)$ est donc multivoque sci de K_ε dans $H \times\ ]-\infty,+\infty]$; on en déduit que $t \longrightarrow \text{Epi}\ \phi(t)$ est mesurable et donc que ϕ est une intégrande normale.

Remarque 2.4. Soit $t \longrightarrow A^t$ une application mesurable de T dans $\mathfrak{M}_\phi$; il existe une famille $(\phi^t)_{t\in T}$ de fonctionnelles convexes, sci, propres telles que $A^t = \partial\phi^t$ et vérifiant la propriété suivante : $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est une intégrande normale.

En effet, soit $A^t = \partial\psi^t$ et $t \longrightarrow (x_o(t),y_o(t))$ une section mesurable de $t \longrightarrow A(t)$; posons $\phi(t,x) = \psi(t,x) - \psi(t,x_o(t))$; alors $\partial\phi(t) = \partial\psi(t)$, $\partial\phi(t,x_o(t)) \ni y_o(t)$, et $t \longrightarrow \phi(t,x_o(t)) = 0$ et d'après l'implication ii) $\Longrightarrow$ i) du Théorème 2.3, $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est une intégrande convexe normale.

COROLLAIRE 2.0. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(|.|)_{t\in T}$ une famille de normes hilbertiennes sur H, uniformément équivalentes ; on suppose*

(i) $\forall\, x \in H \quad t \longrightarrow |x|_t$ est mesurable

(ii) $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est une intégrande convexe normale.

Soit $A^t = \partial\phi^t$ le sous différentiel de ϕ^t pour le produit scalaire $<.,.>_t$; alors

$$\forall\, x \in H \quad \forall\, \lambda > 0,\ t \longrightarrow (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}x \text{ est mesurable.}$$

Démonstration : Elle calque la démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (ii) en remarquant que l'application $(t,x,y) \longrightarrow <x,y>_t$ est de Caratheodory donc $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}(H \times H)$ mesurable.

Ce Corollaire trouve son intérêt dans certains problèmes d'évolution : cf. H. Attouch [1].

COROLLAIRE 2.1. *Soit $(T,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète ; soit ϕ une intégrande convexe positive nulle à l'origine (i.e. $\phi(t,0) = 0$ $\forall\, t \in T$).*

Il y a équivalence entre :

(i) ϕ est une intégrande normale.

(ii) L'application $t \longrightarrow \phi(t)$ est mesurable de T dans Φ_o (cf. notations de la partie I).

Ce résultat découle directement de l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) du Théorème 2.3 (où l'on prend $x(t) = y(t) = 0$) et de la définition de la topologie de Φ_o (cf. Corollaire 1.5).

COROLLAIRE 2.2. *Soit* $(t,x) \in T \times H \longrightarrow \phi^n(t,x)$ *une suite d'intégrandes convexes normales et* $(\phi(t,.))_{t\in T}$ *une famille de fonctions convexes, sci, propres ; on suppose*

$$\forall t \in T \qquad \phi^n(t,.) \longrightarrow \phi(t,.) \quad \text{au sens de Mosco .}$$

Alors $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ *est une intégrande convexe normale.*

Démonstration : On se ramène tout d'abord au cas $\phi^n(t,.) \geqslant 0$, $\phi^n(t,0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in T$; on pose

$$\psi^n(t,x) = \phi^n(t,x+J_\lambda^n(t,x_o)) - \phi^n(t,J_\lambda^n(t,x_o)) - \langle x,A_\lambda^n(t,x_o)\rangle \text{ , } \lambda \text{ et } x_o \text{ fixés .}$$

$$\psi(t,x) = \phi(t,x+J_\lambda(t,x_o)) - \phi(t,J_\lambda(t,x_o)) - \langle x,A_\lambda(t,x_o)\rangle$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in T$, $\psi^n(t,.) \geqslant 0$, $\psi^n(t,0) = 0$; de même pour ψ .

D'autre part on a

$$\partial\psi^n(t,x) = \partial\phi^n(t,x+J_\lambda^n(t,x_o)) - A_\lambda^n(t,x_o)$$

$$\partial\psi\ (t,x) = \partial\phi(t,x+J_\lambda(t,x_o)) - A_\lambda(t,x_o)$$

et tenant compte du fait que $\partial\phi^n(t,.) \longrightarrow \partial\phi(t,.)$, $J_\lambda^n(t,x_o) \longrightarrow J_\lambda(t,x_o)$, $A_\lambda^n(t,x_o) \longrightarrow A_\lambda(t,x_o)$ on déduit que $\partial\psi^n(t,.) \longrightarrow \partial\psi(t,.)$ et donc $\forall t \in T$ $\psi^n(t,.) \longrightarrow \psi(t,.)$ (puisque ψ^n , $\psi \in \Phi_o$) . Or par hypothèse ϕ^n est une intégrande normale ; donc ψ^n l'est également ce qui signifie que $t \longrightarrow \psi^n(t,.)$ est mesurable de T dans Φ_o ; par conséquent l'application $t \longrightarrow \psi(t,.)$ comme limite simple d'applications mesurables est mesurable, ce qui signifie que $(t,x) \longrightarrow \psi(t,x)$ est mesurable ; tenant compte de la mesurabilité des applications $t \longrightarrow J_\lambda^t x_o$, $t \longrightarrow A_\lambda(t,x_o)$, $t \longrightarrow \phi(t,J_\lambda(t,x_o))$ (puisque $\phi^n(t,J_\lambda^n(t,x_o)) = \phi_\lambda^n(t,x_o) - \frac{\lambda}{2}\,|A_\lambda^n(t,x_o)|^2 \longrightarrow \phi_\lambda(t,x_o) - \frac{\lambda}{2}\,|A_\lambda(t,x_o)|^2$ (cf. Corollaire 1.3) on en déduit que $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est mesurable.

En fait on pourrait montrer ce Corollaire plus rapidement en passant par l'intermédiaire des $\phi_\lambda^n(t,.)$, mais cette démonstration dans le cas où $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi_o$ est plus naturelle et immédiate.

COROLLAIRE 2.3. *Soit* T *compact,* μ *mesure de Radon positive sur* T *et* ϕ *une intégrande convexe sur* $T \times H$ *, il y a équivalence* *(i)* ϕ *intégrande normale*

(ii) $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ K_\varepsilon$ *compact,* $K_\varepsilon \subset T$, $\mu(T\setminus K_\varepsilon)\leq \varepsilon$ *et* $(t_n \longrightarrow t$ *dans* K , $x_n \longrightarrow x) \Longrightarrow (\phi(t,x) \leq \underline{\lim}\ \phi(t_n,x_n))$.

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) soit

$\psi(t,x) = \phi(t,x+J_\lambda(t,x_o)) - \phi(t,J_\lambda(t,x_o)) - \langle x,A_\lambda(t,x_o)\rangle$.

On a évidemment, $(t,x) \longrightarrow \psi(t,x)$ est une intégrande normale, puisque $t \longrightarrow J_\lambda^t x_o$ est mesurable. D'autre part $\forall\, t\in T$, $\psi(t,.)\in \Phi_o$; d'après le Corollaire 2.1 l'application $t \longrightarrow \psi(t,.)$ est mesurable et d'après la propriété de Lusin, pour tout $\varepsilon>0$, il existe K_ε compact, $\mu(T\setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, telle que l'application $t \longrightarrow \psi(t,.)$ soit continue de K_ε dans Φ_o ; l'application $t \longrightarrow \psi(t,.)$ possèdera donc la propriété ω-scs sur K_ε ce qui entraîne (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) évident.

COROLLAIRE 2.4. *Soit* $(T,\mathcal{C},\mu)$ μ *positive,* σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète et* $(\Gamma(t))_{t\in T}$ *une famille de convexes fermés non vides dans un Hilbert séparable* H *; il y a équivalence :*

(i) $t \longrightarrow \Gamma(t)$ *est multivoque mesurable.*

(ii) $\forall\, x\in H$ $t \longrightarrow \mathrm{Proj}_{\Gamma(t)}\{x\}$ *est mesurable de* T *dans* H .

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) Posons $\phi(t,x) = I_{\Gamma(t)}(x)$ ($I_{\Gamma(t)}$: fonction indicatrice de $\Gamma(t)$) ; notant que Epi $\phi^t = [0,+\infty[\ \times\Gamma(t)$, dire que $t \longrightarrow \Gamma(t)$ est mesurable, est équivalent à dire que $t \longrightarrow$ Epi ϕ^t est mesurable, soit $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ intégrande normale ; or d'après le Théorème 2.3 cela entraîne que les résolvantes $t \longrightarrow (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}x = \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x$ sont mesurables.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) On utilise le Théorème 2.3((*ii*) $\Longrightarrow$ i)) en remarquant que $(I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}x = \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x$ et que, étant donné x_o dans H , posant $x_o(t) = \mathrm{proj}_{\Gamma(t)}x_o$ et $y_o(t) \equiv 0$, on a, $x(.)$, $y(.)$ et $\phi(.,x_o(.))$ mesurables et $y_o(t)\in \partial\phi^t(x_o(t))$ pour tout t de T

Des Corollaires 2.3 et 2.4 on déduit alors le résultat démontré de façon directe dans le Lemme 2.2.

3) Somme de familles mesurables.

Dans ce paragraphe on étudie le problème suivant : étant données deux familles mesurables $t \to A(t)$ et $t \to B(t)$ d'opérateurs maximaux monotones dans un Hilbert séparable H, l'application $t \to A(t) + B(t)$ est-elle encore mesurable ? Pour rester dans le cadre où nous nous sommes placés, nous ferons l'hypothèse $A(t) + B(t)$ maximal monotone.

Dans le cas où $A(t) = \partial\phi^t$ et $B(t) = \partial\psi^t$ sont des sous-différentiels de fonctions convexes sci, la condition $A(t) + B(t)$ maximal monotone se traduit par l'égalité $\partial\phi^t + \partial\psi^t = \partial(\phi^t + \psi^t)$. D'après le Théorème 2.3, Remarque 2.4 on peut supposer que ϕ et ψ sont des intégrandes normales ; il s'ensuit que $\phi + \psi$ est une intégrande normale et toujours d'après le même Théorème que la famille $(\partial\phi^t + \partial\psi^t)$, $t \in T$, est mesurable.

Dégageons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.5. *Soient A, B, $A + B$ des opérateurs maximaux monotones. Alors*

$$A + B_\lambda \to A + B \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_R$$

Démonstration : On sait déjà que $B_\lambda \to B$; soit $x_\lambda = (I+A+B_\lambda)^{-1}y$ où y est donné dans X ; on a donc $x_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda \ni y$; or d'après le Théorème de Brezis-Crandall-Pazy, la condition $A + B$ maximal monotone entraîne que x_λ tend vers x solution de $x + Ax + Bx \ni y$, soit $x = (I+A+B)^{-1}y$.

THEOREME 2.4. *Soit $(T, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geqslant 0$ σ-finie et $\mathcal{C}$ μ-complète et soit $(A(t))_{t \in T}$ et $(B(t))_{t \in T}$ deux familles mesurables d'opérateurs maximaux monotones telles que pour tout t de T, $A(t) + B(t)$ soit encore maximal monotone ; alors la famille $(A(t)+B(t))_{t \in T}$ est mesurable.*

Démonstration : Soit $\lambda > 0$ fixé ; montrons que la famille $(A(t)+B_\lambda(t))_{t \in T}$ est mesurable : soit $(\sigma_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to A(t)$, $\sigma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$; on vérifie que $(x_n(\cdot), y_n(\cdot) + B_\lambda(\cdot, x_n(\cdot)))_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to A(t) + B_\lambda(t)$; en effet soit $(x,y) \in A(t)+B_\lambda(t)$ alors $y - B_\lambda(t)x \in A(t)x$ et l'on peut trouver un indice n tel que $|x-x_n(t)| \leqslant \varepsilon$, $|y-B_\lambda(t)x-y_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent

$$|y-y_n(t) - B_\lambda(t,x_n(t))| \leqslant |y-y_n(t) - B_\lambda(t,x)| + |B_\lambda(t,x_n(t))-B_\lambda(t,x)|$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\lambda}|x-x_n(t)|$$

$$< \varepsilon(1+\frac{1}{\lambda})$$

Toujours d'après le Théorème A, on en déduit la mesurabilité de la famille d'opérateurs maximaux monotones $(A(t)+B_\lambda(t))_{t\in T}$, c'est-à-dire la mesurabilité de l'application $t \longrightarrow A(t) + B_\lambda(t)$ de T dans $\mathcal{M}_R$; et donc d'après le Lemme 2.5, l'application $t \longrightarrow A(t) + B(t)$ comme limite simple d'applications mesurables, est mesurable de T dans $\mathcal{M}_R$.

Nous dégageons de la démonstration du Théorème 2.4, un lemme général dont nous nous servirons par la suite :

__LEMME 2.6.__ *Soient* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$, A^n, B^n *m-accrétif.*
On suppose que $A^n \longrightarrow A$ *et* $B^n \longrightarrow B$ *dans* $\mathcal{a}_R$ *; alors* $\forall\ \lambda>0$ $A^n + B^n_\lambda \longrightarrow A + B_\lambda$.

__Démonstration__ : Soit $(x,y)\in A + B_\lambda$, $y - B_\lambda x \in Ax$; il existe donc $(x^n,z^n)\in A^n$ $x^n \longrightarrow x$, $z^n \longrightarrow y - B_\lambda x$.

Posons $y_n = z^n + B^n_\lambda x_n \in (A^n + B^n_\lambda)x_n$; on a d'une part $x^n \longrightarrow x$ et d'autre part

$$|y_n-y| = |z^n + B^n_\lambda x_n - y|$$

$$\leqslant |z^n - (y-B_\lambda x)| + |B_\lambda x - B^n_\lambda x| + |B^n_\lambda x - B^n_\lambda x_n|$$

$$\leqslant |z^n - (y-B_\lambda x)| + |B_\lambda x - B^n_\lambda x| + \frac{1}{\lambda}|x_n-x|$$

et donc $$y_n \longrightarrow y .$$

__Remarque 2.5.__ 1) La démonstration du Théorème 2.4 ne se généralise pas directement au cas accrétif car la première partie utilise le Théorème de Brezis-Crandall-Pazy qui sous sa version accrétive (cf. Bénilan [6]) ne permet pas de conclure ici ;

2) Le résultat du Théorème 2.4 se généralise trivialement en prenant $(A_i(t))_{i=1,\dots,n}$ une suite de familles mesurables d'opérateurs maximaux monotones et $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de réels $\geqslant 0$; alors la famille

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i(t)$ est encore mesurable (sous réserve que soient encore dans $\mathfrak{M}$ toutes les sommes partielles).

4) Prolongement mesurable de familles mesurables d'opérateurs monotones.

Dans cette partie, on s'attache au problème suivant : étant donnée une famille $(B^t)_{t\in T}$ d'opérateurs monotones, dépendant mesurablement de t, en un sens à préciser, peut-on la prolonger en une famille mesurable $(\tilde{B}^t)_{t\in T}$ d'opérateurs maximaux monotones ; c'est l'objet du Théorème 2.5, à l'élaboration duquel ont activement participé P. Bénilan et A. Damlamian.

Définition 2.3. 1) Soit $(T,\mathcal{T})$ un espace mesurable et Γ une multiapplication à valeurs non vides de T dans un espace topologique X ; on dira que Γ est mesurable si

$$\forall\, \mathcal{O} \text{ ouvert de } X\,,\quad \{t\in T \;/\; \Gamma(t)\cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}\,.$$

2) Une famille de multiapplication $(\Gamma(t))_{t\in T}$ de X dans X est dite mesurable si la multiapplication $t \longrightarrow G(A(t))$ est mesurable de T dans $X\times X$; $(G(A(t)) = \{(x,y)\in X\times X \;;\; y\in A(t)x\})$.

Remarquons que cette définition est compatible avec la définition 2.2.

Remarque 2.6. Soit $(T,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, μ positive σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète et $t \longrightarrow \Gamma(t)$ une multiapplication mesurable de T dans X espace métrique séparable complet ; alors $t \longrightarrow \overline{\Gamma(t)}$ est mesurable (et satisfait à toutes les conditions équivalentes du Théorème A).

En effet, soit $x\in X$ fixé, $d(x,\overline{\Gamma(t)}) = d(x,\Gamma(t))$ donc

$$\{t\in T \;/\; d(x,\overline{\Gamma(t)}) < r\} = \{t\in T \;/\; d(x,\Gamma(t) < r\}$$

$$= \{t\in T \;/\; \Gamma(t)\cap B(x,r) \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

ce qui signifie $t \longrightarrow d(x,\overline{\Gamma(t)})$ mesurable et donc $t \longrightarrow \overline{\Gamma(t)}$ mesurable (Théorème A).

LEMME 2.7. *Soit $(T,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, μ positive σ-finie, $\mathcal{T}$ μ-complète et (X,d) espace métrique séparable complet. On se donne une famille d'applications continues*

$(F(t))_{t\in T}$, $F(t) : D^t \to X$, D^t fermé dans X. On a les implications

(i) La famille $(F(t))_{t\in T}$ est mesurable.

(ii) L'application $t \to D(t)$ est mesurable et pour toute application h univoque mesurable de T dans H telle que pour presque tout t, $h(t)\in D^t$, l'application $t \to F(t,h(t))$ est mesurable.

(iii) L'application $t \to D(t)$ est mesurable et pour tout x de X, l'application $t \to F(t,x)$ est mesurable (i.e. $E_x = \{t \in T \,/\, x \in D^t\}$ est mesurable et $t \to F(t,x)$ est mesurable de E_x dans X).

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) Notons tout d'abord que, D^t fermé, entraîne que F^t est de graphe fermé dans $H \times H$; soit σ borélien de X ;

$\{t\in T \,/\, D^t \cap \sigma \neq \emptyset\} = \mathrm{proj}_T \{G(F) \cap T \times \sigma \times X\}$ et d'après le théorème de projection cet ensemble appartient à $\mathcal{C}$, ce qui exprime la mesurabilité de la multiapplication $t \to D^t$ (d'après le Théorème A).

La famille $(F(t))_{t\in T}$ étant mesurable, il existe une famille dénombrable $t \to (x_n(t),y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications mesurables de T dans $X \times X$ telles que pour tout t de T

$$G(F(t)) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (x_n(t),y_n(t))}$$

Soit h une sélection mesurable de la multiapplication $t \mapsto D^t = \mathrm{dom}\, F(t)$; pour tout $n\in\mathbb{N}$ posons

$$A_{k,n} = \{t\in T \,/\, d(h(t),x_k(t)) \leq \frac{1}{n}\} \quad .$$

On a $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,n}$; par un procédé standard, on fabrique à partir des $(A_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$, une partition mesurable $(C_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ de T, avec

$$\forall\, t\in C_{k,n} \qquad d(h(t),x_k(t)) \leq \frac{1}{n} \, .$$

Posons $z_n(t) = x_k(t)$ si $t\in C_{k,n}$.

Alors $\forall\, t\in T \qquad d(h(t),z_n(t)) \leq \frac{1}{n}$ et par conséquent

$\forall\, t \in T \quad z_n(t) \longrightarrow h(t)$ dans X ; d'autre part pour tout t on a $z_n(t) \in D^t$ et $F(t)$ étant continue sur D^t ,

$$F(t,h(t)) = \lim_{n\to+\infty} F(t,z_n(t)) \;.$$

La fonction $t \longmapsto F(t,h(t))$, comme limite simple de fonctions mesurables, est donc mesurable.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) La multiapplication $t \longrightarrow D^t$ étant mesurable à valeurs fermées, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'applications mesurables de T dans X telles que $\forall\, t \in T$, $D^t = \overline{\bigcup x_n(t)}$; les applications $t \longrightarrow F(t,x_n(t))$ sont mesurables par hypothèse et $t \longrightarrow h_n(t) = (x_n(t),F(t,x_n(t))$ est mesurable de T dans $X \times X$; tenant compte du fait que $G(F^t) = \overline{\bigcup h_n(t)}$, on déduit la mesurabilité de la famille $(F(t))_{t\in T}$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Par définition $E_x = \{t \in T \;/\; D^t \cap \{x\} \neq \emptyset\}$ et donc (Théorème A), E_x appartient à $\mathcal{T}$; soit d'autre part $t \longrightarrow h(t)$ une section mesurable de $t \longrightarrow D^t$; la fonction g_x qui vaut $h(t)$ sur $\complement E_x$ et x sur E_x , est donc mesurable de T dans X et $g_x(t)$ appartient à D^t pour tout t de T ; la fonction $t \longrightarrow F(t,g_x(t))$ est donc mesurable ; sa restriction à E_x , soit $t \longrightarrow F(t,x)$, est donc mesurable.

<u>Remarque 2.7.</u> 1) Dans le cas où $\forall\, t \in T$ $\operatorname{Int} D^t \neq \emptyset$, où dans le cas $D^t = D$ indépendant de t on a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) ; il suffit de reprendre le début de la démonstration du Théorème 2.2 : on met en évidence une famille $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications mesurables de T dans H telles que

$$\forall\, t \in T\;,\quad D^t = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n(t)\}} \quad \text{et}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\;,\quad t \longrightarrow F(t,x_n(t)) \quad \text{mesurable.}$$

On en déduit la mesurabilité de la famille $(F(t))_{t\in T}$.

2) Dans le cas où les $(F(t))_{t\in T}$ sont continues partout définies, on a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x \in X$, $t \longrightarrow F(t,x)$ mesurable.

3) L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est fausse en général :

prenons $X = \mathbb{R}$, et $F(t)$ la fonction constante égale à $\alpha(t)$ sur un domaine réduit à deux points $\{t,t+1\}$, avec $t \longrightarrow \alpha(t)$ non mesurable .

L'application $t \longrightarrow \operatorname{dom} F(t) = \{t,t+1\}$ est bien mesurable ; pour tout x de $\mathbb{R}$ l'application $t \longrightarrow F(t,x)$ est définie sur un ensemble réduit à deux points $\{x,x-1\}$ et est donc continue ; prenant $h(t) = t$, h est bien une section mesurable de $t \longrightarrow \operatorname{dom} F(t)$ et pourtant $t \longrightarrow F(t,h(t)) = \alpha(t)$ n'est pas mesurable.

PROPOSITION 2.2. *Soit $(T,\mathcal{C},\mu)$ μ positive σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète, H un espace de Hilbert séparable et soit $(F(t))_{t\in T}$ une famille mesurable de contractions (non partout définies) de H dans H . Il existe alors une famille $(\tilde{F}(t))_{t\in T}$, mesurable, de contractions partout définies telle que pour tout t de T , $\tilde{F}(t)$ soit un prolongement de $F(t)$.*

Démonstration : Tout d'abord pour $x \in \overline{D(F(t))} = \overline{D^t}$ on pose $\overline{F(t)}(x) = \lim\limits_{\substack{y\in D^t\\ y\to x}} F(t)x$ qui est bien définie ;

On a $G(\overline{F(t)}) = \overline{G(F(t))}$ et d'après la remarque 2.6 la famille $(\overline{F}(t))_{t\in T}$ est une famille mesurable de contractions, prolongeant la famille $(F(t))_{t\in T}$; on se ramène donc au cas où $F(t)$ est de graphe fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H ; il suffit de prolonger la famille $(F(t))_{t\in T}$ à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $t \longrightarrow F(t,x_n)$ soit mesurable ; on se donne donc un x_o fixé dans X .

Nécessairement la valeur prise en x_o par un prolongement de $F(t)$ doit appartenir à l'ensemble

$$U^t(x_o) = \{z\in H \;/\; d(z,F(t,\xi)) \leq d(x_o,\xi)\ \forall\, \xi \in D^t\} .$$

D'après le Théorème Valentine-Kinzbraun [17] , l'ensemble $U^t(x_o)$ est non vide ; notre problème consiste à montrer l'existence d'une section mesurable à la multiapplication $t \longrightarrow U^t(x_o)$, ce qui revient à montrer, remarquant que $U^t(x_o)$ est un fermé, que la multiapplication $t \longrightarrow U^t(x_o)$ est mesurable (Théorème A). Or la famille $(F(t))_{t\in T}$ étant mesurable, et $F(t)$ étant de graphe fermé pour tout t , il existe une famille $(x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications mesurables telles que les applications $t \longrightarrow F(t,x_n(t))$ soient mesurables, et telles que

$G(F(t)) = \overline{\bigcup \{x_n(t), F(t,x_n(t))\}}$ pour tout t de T ; par conséquent

$$U^t(x_o) = \{z \in H \;/\; d(z,F(t,x_n(t))) \leq d(x_o,x_n(t)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(F(t,x_n(t)),\, d(x_o,x_n(t)))$$

et donc

$$G(Ux_o) = \{(t,x) \in T \times H \; ; \; x \in U^t x_o\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G(Ux_o^n) \quad \text{où}$$

$$G(Ux_o^n) = \{(t,x) \in T \times H \; ; \; x \in \overline{B}(F(t,x_n(t)),d(x_o,x_n(t)))\}$$

Si l'on montre que $G(Ux_o^n) \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$ il en sera de même du graphe de Ux_o et d'après le Théorème A la multiapplication $t \longrightarrow U^t x_o$ sera mesurable ; or la mesurabilité de l'application $t \longrightarrow \overline{B}(h_n(t),r_n(t))$, où h_n (resp. r_n) est une application mesurable de T dans H (resp. $\mathbb{R}^+$) , est immédiate en remarquant que son graphe $\{(t,z) \in T \times H \;/\; d(z,h_n(t)) - r_n(t) \leq 0\}$ est mesurable : en effet l'application $(t,z) \longrightarrow d(z,h_n(t))$ est $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$ mesurable (cf. Castaing-Valadier [14] Lemme 14) (cet argument est encore valable en prenant au lieu de H un espace métrique séparable).

Soit donc $t \longrightarrow \xi(t)$ une section mesurable de $t \longrightarrow U^t x_o$; on pose $\widetilde{F}_o(t,x_o) = \xi_o(t)$.

La famille de contraction $(\widetilde{F}_o(t))_{t \in T}$ est encore mesurable puisque la famille $(x_n(.),F(.,x_n(.))_{n \in \mathbb{N}}$ augmentée de $(x_o,\xi(.))$ forme une famille dénombrable dense de sections mesurables ; on peut donc reprendre le même raisonnement et prolonger cette famille $(\widetilde{F}_o(t))_{t \in T}$ en une famille $(\widetilde{F}_1(t))_{t \in T}$ de contractions mesurables avec $D(\widetilde{F}_1(t)) \supset \{x_1\}$; par récurrence on construit une suite $(\widetilde{F}_n(t))_{t \in T}$; on pose $\forall\, t \in T \quad \widetilde{F}(t) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{F}_n(t)}$; et l'on vérifie immédiatement que la famille $(\widetilde{F}(t))_{t \in T}$ est solution du problème posé.

<u>Remarque 2.8.</u> On aurait pu énoncer la Proposition 2.2 dans un cadre plus général : on ne se sert de l'hypothèse H Hilbert et $T(t)$ contraction que pour avoir la propriété de prolongement ; on pourrait prendre une famille

mesurable $(T(t))_{t\in T}$ d'applications α-holdériennes d'un espace métrique séparable complet X dans un espace métrique séparable complet Y , pour lesquels on ait la propriété de prolongement (cf. référence communiquée par C. Castaing : L. Williams, J.H. Wells et J.L. Hayden [29]).

<u>THEOREME 2.5</u>. (H. Attouch, P. Benilan, A. Damlamian).

Soit $(T,\mathcal{C},\mu)$ *un espace mesuré,* μ *positive* σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète et* H *un Hilbert séparable. Soit* $(B^t)_{t\in T}$ *une famille mesurable d'opérateurs monotones (dans* H*) ; il existe alors une famille* $(\tilde{B}^t)_{t\in T}$ *mesurable, d'opérateurs maximaux monotones (dans* H*), telle que pour tout* t *de* T *,* $\tilde{B}^t$ *soit un prolongement de* B^t *.*

<u>Démonstration</u> : On se ramène tout d'abord au cas B^t fermé, en prenant sa fermeture, opération qui conserve la monotonie et la mesurabilité de la famille B^t (Remarque 2.6) ; on utilise alors la méthode de Minty (utilisant la transformation de Cayley) : on pose

$$F^t = \{(x+y,x-y) \;/\; (x,y) \in B^t\}$$

On vérifie aisément que F^t est, pour tout t , une contraction de graphe fermé définie sur $R(I+B^t)$. La famille $(F^t)_{t\in T}$ est mesurable : soit $(x_n(.),y_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'applications mesurables de T dans H x H telle que $\forall\, t \in T \quad B^t = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x_n(t),y_n(t))\}}$; posons $z_n(.) = (x_n(.)+y_n(.),x_n(.)-y_n(.))$ les applications $z_n(.)$ sont mesurables et

$$\forall\, t \in T \qquad F^t = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z_n(t)\}} .$$

D'après la Proposition 2.2, il existe une famille $(\tilde{F}^t)_{t\in T}$ mesurable de contractions partout définies telle que pour tout t de T , $\tilde{F}^t$ prolonge F^t

On pose $\quad \tilde{B}^t = \{(1/2(u+\tilde{F}^t u),1/2(u-\tilde{F}^t u)) \;;\; u \in H\}$.

On vérifie que $\tilde{B}^t$ est un opérateur monotone et que pour tout t de T , $(I+\tilde{B}^t)^{-1} = \frac{1}{2}(I+\tilde{F}^t)$. D'après le Théorème 2.1, la famille $\tilde{B}^t$ est une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones ; enfin $\tilde{B}^t$ prolonge B^t puisque

$$\begin{aligned}(x,y) \in B^t &\Longrightarrow (x+y,x-y) \in F^t\\ &\Longrightarrow (x+y,x-y) \in \tilde{F}^t\\ &\Longrightarrow (x,y) \in \tilde{B}^t .\end{aligned}$$

CHAPITRE III - APPLICATIONS.

1. Equations d'évolution dans les Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert, $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones ; l'une des motivations de ce travail est l'étude de l'équation d'évolution

$$(I) \qquad \frac{du}{dt} + A(t)\, u(t) \ni f(t) \quad ; \quad u(0) = u_o \ .$$

Une des façons d'étudier (I) consiste à l'approcher par

$$(I_\lambda) \qquad \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(t)\, u_\lambda(t) = f(t) \ ; \quad u_\lambda(0) = u_o$$

où $A_\lambda(t)$ désigne l'approximation Yosida de $A(t)$.

Afin de résoudre $(I)_\lambda$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on est naturellement amené à supposer que : $\forall\lambda > 0$, $\forall\, x\in H$, $t \longrightarrow A_\lambda(t)x$ est mesurable de $[0,T]$ dans H ; il était donc important de chercher le lien entre cette condition de mesurabilité et les autres conditions de mesurabilité que l'on pouvait définir directement sur les opérateurs $A(t)$ (mesurabilité des graphes, des sections minimales, des ϕ^t lorsque $A^t = \partial\phi^t$) ;

Donnons un exemple tiré de la théorie des équations d'évolution (cf. Kenmochi [17]) .

PROPOSITION 3.1. *Soit $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctions convexes, sci, propres de H , Hilbert séparable dans $]-\infty,+\infty]$, vérifiant : pour tout $r>0$, il existe a_r et b_r mesurables de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \ , \ \forall\, z \in D(\phi(s,.)) \ , \ |z| < r \ , \ \exists\, \tilde{z} \in D(\phi(t,.)) \ :$$

$$|z-\tilde{z}| \leqslant |a_r(t)-a_r(s)| \quad \text{et} \quad \phi(t,\tilde{z}) \leqslant \phi(s,z) + |b_r(t)-b_r(s)|\ [1+|\phi(s,z)|] \ .$$

Alors $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est une intégrande convexe normale et par conséquent pour tout $\lambda>0$ et tout $x \in H$, l'application $t \longrightarrow (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}x$ est mesurable.

Démonstration : Soit $\varepsilon>0$; d'après la propriété de Lusin appliquée aux fonctions a_r et b_r, il existe K_ε compact, $K_\varepsilon \subset [0,T]$ tel que a_r et b_r soient continues de K_ε dans $\mathbb{R}$. Montrons tout d'abord que pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $t_n \in K_\varepsilon$, $t_n \uparrow t$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_n \in D(\phi^{t_n}))$, $x_n \longrightarrow x$ on a

$$\phi(t,x) \leqslant \liminf \phi(t_n,x_n) .$$

Prenons r suffisamment grand de façon que $x_n \in B(0,r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il existe alors $\tilde{x}_n \in D(\phi^t)$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} ,\ |x_n-\tilde{x}_n| \leqslant |a_r(t)-a_r(t_n)| \quad \text{et}$$

$$\phi(t,\tilde{x}_n) \leqslant \phi(t_h,x_n) + |b_r(t)-b_r(t_n)|\,[1+|\phi(t_n,x_n)|] .$$

Notons $a = a_r$ et $b = b_r$; on a donc $\tilde{x}_n \longrightarrow x$ et

$$\phi(t,\tilde{x}_n) \leqslant \begin{cases} (1+(b(t)-b(t_n)))\ \phi(t_n,x_n) + |b(t)-b(t_n)| & \text{si} \quad \phi(t_n,x_n) \geqslant 0 \\ (1-(b(t)-b(t_n)))\ \phi(t_n,x_n) + |b(t)-b(t_n)| & \text{si} \quad \phi(t_n,x_n) \leqslant 0 . \end{cases}$$

On en déduit $\underline{\lim}\ \phi(t,\tilde{x}_n) \leqslant \underline{\lim}\ \phi(t_n,x_n)$ et la fonction $\phi(t,.)$ étant convexe, sci, on a

$$\phi(t,x) \leqslant \underline{\lim}\ \phi\ (t_n,x_n) \quad (*) .$$

Montrons alors que la fonction $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est borélienne de $K_\varepsilon \times H$ dans $]-\infty,+\infty]$; cette propriété étant vraie quel que soit $\varepsilon>0$, il s'en suivra que $(t,x) \longrightarrow \phi(t,x)$ est une intégrande normale sur $T \times H$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E = \{(t,x) \in K_\varepsilon \times H \ /\ \phi(t,x) > \lambda\}$; il s'agit de montrer que E est un borélien. L'espace H étant séparable est à base dénombrable d'ouverts : soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base.

D'après la propriété $(*)$

$$\forall (t_o,x_o) \in E ,\ \exists\ \varepsilon(t_o,x_o) > 0 : \quad E \supset (]t_o-\varepsilon,t_o] \cap K_\varepsilon) \times B(x_o,\varepsilon)$$

et donc $\forall (t_o,x_o) \in E$, $\exists\ \varepsilon(t_o,x_o) > 0$, $\exists\, n(t_o,x_o) \in \mathbb{N}$:

$$E \supset (]t_o-\varepsilon,t_o] \cap K_\varepsilon) \times B_n \ni (t_o,x_o)$$

On a donc
$$E = \bigcup_{(t_o,x_o)\in E} (]t_o-\varepsilon(t_o,x_o),t_o] \cap K_\varepsilon) \times B_{n(t_o,x_o)}$$
$$= (\bigcup_{(t_o,x_o)\in E}]t_o-\varepsilon(t_o,x_o),t_o] \times B_{n(t_o,x_o)}) \cap (K_\varepsilon \times H)$$
$$= (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{\{n(t_o,x_o)=n\}}]t_o-\varepsilon(t_o,x_o),t_o]) \times B_n) \cap (K_\varepsilon \times H)$$

On conclut à l'aide du lemme suivant :

<u>LEMME 3.1.</u> *Dans $\mathbb{R}$, une réunion quelconque d'intervalles non réduits à un point, est un borélien.*

<u>Démonstration</u> : Soit $I = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, I_λ intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive. Chacune des composantes connexes de I est d'intérieur non vide, puisque contient un I_λ ; or $\mathbb{R}$ étant séparable, les composantes connexes de I , étant d'intérieur non vide, vont former une partition dénombrable de I ; les composantes connexes de I sont des connexes de $\mathbb{R}$, I est une réunion dénombrable d'intervalles et I est donc un borélien.

Nous allons à présent montrer quelques résultats généraux concernant les problèmes d'évolution.

<u>PROPOSITION 3.2.</u> *Soit $(T , \mathcal{C} , \mu)$ un espace mesuré, $\mu\geq 0$, σ-finie et $\mathcal{C}$ μ-complète ; soit $(A(t))_{t\in T}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones dans H Hilbert ; il y a équivalence*

(i) La famille $(A(t))_{t\in T}$ est mesurable, et il existe un couple $(x_o(.),y_o(.))$ dans $(L^2(T;\mu;H))^2$ tel que : μ p.p. $t\in T$ $y_o(t)\in A(t)\, x_o(t)$.

(ii) L'opérateur $\mathcal{A} = \{(x(.),y(.))\in(L^2(T;\mu;H))^2;$ p.p. $t\in T$, $y(t)\in A(t)\, x(t)\}$ est maximal monotone dans $\mathcal{H} = L^2(T;\mu;H)$.

On a alors $\forall\, u\in\mathcal{H}$ $(\mathcal{A}_\lambda u)(t) = A_\lambda(t)\, u(t)$ p.p. $t\in T$.

<u>Démonstration</u> : i) $\Longrightarrow$ ii) Soit $\lambda>0$ et $y\in\mathcal{H}$ donné. L'opérateur $A(t)$ étant maximal monotone il existe pour tout $t\in T$, un élément $x(t)$ dans H tel que

$$x(t) + \lambda A(t)\, x(t) \ni y(t) .$$

On a $x(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}\, y(t)$ et d'après l'hypothèse de mesurabilité sur la famille $(A(t))_{t\in T}$ l'application $t \longrightarrow x(t)$ est mesurable (remarquer que l'on n'a pas besoin de H séparable) ; d'autre part $x_o(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}(x_o(t)+\lambda\, y_o(t))$ et donc

$$|x(t) - x_o(t)| \leq |y(t) - (x_o(t) + \lambda\, y_o(t))|$$

On en déduit que $x(.)$ appartient à $\mathcal{H}$, et donc $x(.) + \lambda\mathcal{A}x(.) \ni y(.)$ dans $\mathcal{H}$

L'opérateur $(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}$ est partout défini et $(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}\, x(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}\, x(t)$ p.p.$t \in T$; par conséquent $(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}$ est une contraction partout définie, pour tout $\lambda>0$, et $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $\mathcal{H}$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Prenons $x(.) \equiv x$, x fixé dans H ; on a alors

$$(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}\, x(.)(t) = (I+\lambda A(t))^{-1}x$$

et donc les résolvantes des opérateurs $A(t)$, dépendent mesurablement de T ; la famille $(A(t))_{t\in T}$ est donc mesurable ; d'autre part il suffit de prendre pour (x_o,y_o) un élément quelconque de $\mathcal{A}$, qui est non vide, puisque maximal.

. Nous allons préciser ce résultat dans le cas important où $A(t) = \partial\phi(t)$;

<u>PROPOSITION 3.3</u>. *Soit* $(T, \mathcal{C}, \mu)$ *un espace mesuré,* μ *positive* σ*-finie,* $\mathcal{C}$ μ*-complète,* H *un espace de Hilbert séparable et* ϕ *une intégrande convexe normale sur* $T\times H$ *; on note* Φ *la fonctionnelle convexe sur* $\mathcal{H} = L^2(T;d\mu;H)$ *définie par*

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_T \phi(t,u(t))\, d\mu(t) & \text{si } \phi(.,u(.)) \in L^1(T,d\mu) \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il y a équivalence

(i) Φ *est convexe, sci, propre sur* $\mathcal{H}$.

(ii) $\forall\ \lambda>0$ *(resp.* $\exists\lambda_o$*),* $\forall\, u \in L^2(T,d\mu;H)$, $t \longrightarrow J_\lambda(t,u(t)) \in L^2(T,d\mu;H)$ *et* $t \longrightarrow \phi(t,J_\lambda^t\, u(t)) \in L^1(T,d\mu)$.

(iii)
- $\exists\ \alpha>0$, $\beta\in L^1(T,d\mu)$: p.p.$t\in T$ $\phi(t,x) + \alpha|x|^2 + \beta(t) \geq 0$, $\forall\, x\in H$.
- $\exists\, b \in L^2(T,d\mu;H)$ *tel que* $t \longrightarrow \phi(t,b(t)) \in L^1(T,d\mu)$.

iv) $\left[\begin{array}{l} \exists\, \lambda_o > 0\ ,\ \exists\, \alpha_o > 0\ ,\ \beta_{\lambda_o} \in L^1(T,d\mu)\ :\ p.p.\, t \in T \\ \phi_{\lambda_o}(t,x) + \alpha_o |x|^2 + \beta_{\lambda_o}(t) \geq 0 \quad \forall x \in H \text{ et} \\ \quad \forall x \in H \qquad t \longrightarrow \phi_{\lambda_o}(t,x) \in L^1(T,d\mu). \end{array}\right.$

On a alors en outre :

a) $\forall f \in L^2(T,d\mu;H) \quad \Phi^*(f) = \int_T \phi^*(t,f(t))\, d\mu(t)$

b) $\partial\Phi = \{(u,f) \in (L^2(T,d\mu;H))^2 ;\ p.p.t \quad f(t) \in \partial\phi(t,u(t))\}$ *($\partial\Phi$ est maximal monotone)*

c) $\forall \lambda > 0 \qquad \Phi_\lambda(u) = \int_T \phi_\lambda(t,u(t))\, d\mu(t)$.

<u>Démonstration de la Proposition</u> : i) $\Longrightarrow$ ii) Nous sommes dans les conditions d'application du Théorème de dualité de Rockafellar ([25], Th.2) ; on a donc, pour tout f dans $L^2(T,d\mu;H)$, $\Phi^*(f) = \int_T \phi^*(t,f(t))\, d\mu(t)$. D'autre part, le sous-différentiel de la fonction Φ est maximal monotone (donc non vide) et

$$f \in \partial\phi(u) \iff \Phi(u) + \Phi^*(f) = \langle f,u\rangle$$

$$\iff \int_T \{\phi(t,u(t)) + \phi^*(t,f(t)) - \langle f(t),u(t)\rangle\}\, d\mu(t) = 0 .$$

La mesure μ étant positive et l'intégrande étant positive

$$f \in \partial\Phi(u) \text{ dans } \mathcal{H} \iff \phi(t,u(t)) + \phi^*(t,f(t)) - \langle f(t),u(t)\rangle = 0 \quad \mu \text{ p.p.t}$$

et donc $f \in \partial\Phi(u) \iff f(t) \in \partial\phi(t,u(t))$ μ p.p.t .

D'autre part l'opérateur $(I+\lambda\partial\Phi)^{-1}$ est partout défini sur $\mathcal{H}$ et

$$f = (I+\lambda\partial\Phi)^{-1}u \iff f + \lambda\partial\Phi(f) \ni u$$

$$\iff \text{p.p.t} \quad f(t) + \lambda\partial\phi(t,f(t)) \ni u(t)$$

$$\iff \text{p.p.t} \quad f(t) = (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}\, u(t)$$

Donc pour tout u dans $L^2(T,d\mu;H)$, $t \longrightarrow J_\lambda^t\, u(t)$ appartient à $L^2(T,d\mu;H)$; cet élément de $\mathcal{H}$, appartenant d'autre part au domaine de $\partial\Phi$, appartient au domaine de Φ et, $t \longrightarrow \phi(t,J_\lambda^t\, u(t))$ appartient à $L^1(T,d\mu)$.

D'autre part $\phi_\lambda = \phi \,\nabla\, \frac{1}{2\lambda} |.|^2 \Longrightarrow \Phi_\lambda^* = \Phi^* + \frac{\lambda}{2} |.|^2$ et donc

$$\Phi_\lambda^*(f) = \int_T \phi^*(t,f(t)) + \frac{\lambda}{2}|f(t)|^2 \, d\mu(t)$$

$$= \int_T \phi_\lambda^*(t,f(t)) \, d\mu(t)$$

et appliquant à nouveau le théorème de dualité $\Phi_\lambda(f) = \int_T \phi_\lambda(t,f(t)) \, d\mu(t)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Il y a seulement à montrer la première partie de iii) ; soit $x_o \in H$ fixé,

Ecrivant que $A_{\lambda_o}(t,x_o) \in A(t,J_{\lambda_o}(t,x_o))$

$$\phi(t,x) \geq \phi(t,J^t_{\lambda_o} x_o) + \langle x - J_{\lambda_o}(t,x_o), A_{\lambda_o}(t,x_o)\rangle \quad \text{d'où}$$

$$\phi(t,x) + |x|^2 + |A_{\lambda_o}(t,x_o)|^2 + \langle A_{\lambda_o}(t,x_o), J_{\lambda_o}(t,x_o)\rangle - \phi(t,J^t_{\lambda_o} x_o) \geq 0$$

et l'on conclut en prenant $\alpha = 1$ et

$$\beta(t) = |A_{\lambda_o}(t,x_o)|^2 + \langle A_{\lambda_o}(t,x_o), J_{\lambda_o}(t,x_o)\rangle - \phi(t,J^t_{\lambda_o} x_o) .$$

iii) $\Longrightarrow$ i) La première condition entraîne que Φ est sci sur $\mathcal{H}$ par application du lemme de Fatou, et la seconde condition exprime que Φ est propre.

ii) $\Longrightarrow$ iv)

$$\phi_{\lambda_o}(t,x) = \phi(t,J^t_{\lambda_o} x) + \frac{1}{2\lambda_o}|x - J^t_{\lambda_o} x|^2 \quad \text{et donc} \quad \forall x \in H , \ t \longrightarrow \phi_{\lambda_o}(t,x) \in L^1(T;d\mu).$$

D'autre part $\phi_{\lambda_o}(t,x) \geq \phi(t,J^t_{\lambda_o} x)$ et tenant compte de iii) $\Longleftrightarrow$ ii)

$$\geq -\alpha |J^t_{\lambda_o} x|^2 - \beta(t) .$$

Or $|J^t_{\lambda_o} x| \leq |J^t_{\lambda_o} x_o| + |x-x_o|$ et par conséquent

$$\phi_{\lambda_o}(t,x) + 2\alpha|x-x_o|^2 + 2\alpha|J^t_{\lambda_o} x_o|^2 + \beta(t) \geq 0 \quad \text{et}$$

$$\phi_{\lambda_o}(t,x) + 4\alpha|x|^2 + (4\alpha|x_o|^2 + 2\alpha|J^t_{\lambda_o} x_o|^2 + \beta(t)) \geq 0 .$$

iv) $\Longrightarrow$ i) Considérons la fonctionnelle

$$\psi(u) = \int_T \phi_{\lambda_o}(t,u(t)) \, d\mu(t) \quad \text{sur } \mathcal{H} .$$

Elle est convexe, sci, propre sur $\mathcal{H}$; d'après l'implication i) $\Longrightarrow$ ii) pour tout u dans $\mathcal{H}$ et tout $\lambda>0$, l'application $t \longrightarrow (I+\lambda A_{\lambda_o}(t,.))^{-1} u(t)$ appartient à $L^2(T;d\mu;H)$ et l'application $t \longrightarrow \phi_{\lambda_o}(t,(I+\lambda A_{\lambda_o}(t,.))^{-1} u(t))$ appartient à $L^1(T;d\mu)$. Or $(I+\lambda A_{\lambda_o}(t,.))^{-1}x = J_{\lambda_o+\lambda}(x)$ et utilisant l'implication ii) $\Longrightarrow$ i) on conclut.

Remarque 3.1. a) Les résultats de cette proposition se généralisent au cas où $A(t) = \partial\phi^t$ est le sous-différentiel de ϕ^t pour un produit scalaire $\langle \cdot, \rangle_t$, sous la seule hypothèse supplémentaire que les normes $|.|_t$ sont uniformément équivalentes et que pour tout x dans H , l'application $t \longrightarrow |x|_t$ est mesurable ; cf. H. Attouch [1] (Remarque 1).

b) Indépendamment des hypothèses faites par ailleurs sur la famille $(\phi(t))_{t\in T}$, on remarque par application directe du Théorème 2.3 que la condition ii) ou la condition iv) entraînent que ϕ est une intégrande normale ; ii) et iv) sont donc équivalents à iii) bis, où iii) bis est la condition iii) où l'on exige en plus la normalité de l'intégrande ϕ ; on peut d'autre part se demander si la condition i) n'entraîne pas la normalité de ϕ .

Nous allons à présent étudier le lien entre la convergence des $(\phi^n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ dans H et la convergence des $\Phi^n = \int \phi^n(t,\cdot)\, d\mu(t)$ dans $\mathcal{H} = L^2(T;H,d\mu)$; c'est l'objet des deux propositions suivantes où $(T,\mathcal{C},\mu)$ est un espace mesuré, $\mu\geq 0$ σ-finie, $\mathcal{C}$ μ-complète et $\mathcal{H}$ désigne l'espace $L^2(T;H,d\mu)$.

PROPOSITION 3.4. *Soit $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ϕ une suite d'intégrandes convexes normales telles que*

1) μ p.p.t $\phi^n(t,.) \longrightarrow \phi(t,.)$ au sens de Mosco.

2) Il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(T,H;d\mu)$ $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(T,H;d\mu)$ et μ p.p.t $f_n(t)\in \partial\phi^n(t,u_n(t))$, $f(t)\in \partial\phi(t,u(t))$ et $\int_T \phi^n(t,u_n(t))\, d\mu(t) \longrightarrow \int_T \phi(t,u(t))\, d\mu(t)$.

Alors $\Phi^n = \int \phi^n\, d\mu \longrightarrow \Phi = \int \phi\, d\mu$ au sens de Mosco dans l'espace $L^2(T,H;d\mu)$

Démonstration : On remarque tout d'abord que l'hypothèse 2) entraîne que les fonctionnelles Φ_n , Φ sont convexes, sci, propres sur $\mathcal{H} = L^2(T,H;d\mu)$; on peut donc appliquer les résultats de la Proposition 3.3. L'hypothèse (1) entraîne d'autre part que μ - p.p.t $\partial\phi^n(t) \longrightarrow \partial\phi(t)$ soit de façon équivalente $\forall\ \lambda>0$, $\forall\ x \in H$ $(I+\lambda\partial\phi^n(t))^{-1}x \longrightarrow (I+\lambda\partial\phi(t))^{-1}x$.

Montrons que $\partial\Phi^n \longrightarrow \partial\Phi$; le résultat s'en suivra immédiatement par application du Théorème 1.1 puisque, d'après (2) $f_n \in \partial\Phi^n(u_n)$, $f \in \partial\Phi(u)$ et $u_n \longrightarrow u$, $f_n \longrightarrow f$ et $\Phi^n(u_n) \longrightarrow \Phi(u)$. Soit donc $u \in \mathcal{H}$ et considérons la suite $v_n = (I+\partial\Phi^n)^{-1}u$ et $v = (I+\partial\Phi)^{-1}u$; on a μ-p.p.t $v_n(t) = (I+\partial\phi^n(t,.))^{-1}\ u(t)$ et $v(t) = (I+\lambda\partial\phi(t,.))^{-1}\ u(t)$; d'après ce qui précède on a donc $v_n(t) \longrightarrow v(t)$ μ-p.p.t ; d'autre part, posant $w_n = f_n + u_n$ on a μ-p.p.t $u_n(t) = (I+\partial\phi^n(t,.))^{-1}(w_n(t))$ et donc $|v_n(t)-u_n(t)| \leqslant |u(t)-w_n(t)|$ soit μ-p.p.t $|v_n(t)| \leqslant 2|u_n(t)| + |u(t)| + |f_n(t)|$.

D'après le Théorème de Vitali, on conclut que $v_n \longrightarrow v$ dans $\mathcal{H} = L^2(T;H,d\mu)$ ce qui termine donc cette démonstration.

Dans la proposition suivante, nous allons montrer que l'ensemble des fonctionnelles sur $L^2(T,H;d\mu)$ qui s'écrivent sous la forme $\int\phi(t,.)\,d\mu$ est fermé pour la convergence au sens de Mosco sur $L^2(T,H;d\mu)$; ceci exprime la conservation d'un certain caractère local de ces fonctionnelles pour cette convergence.

<u>PROPOSITION 3.5</u>. *Soit $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intégrandes convexes normales sur $T \times H$; on suppose que les fonctionnelles $\Phi^n = \int\phi^n(t,.)\,d\mu$ sont sci, propres sur $L^2(T;H,d\mu)$ et que Φ^n converge au sens de Mosco vers une fonctionnelle Φ convexe, sci, propre sur $L^2(T;H,d\mu)$;*

Il existe alors une intégrande convexe normale ϕ sur $T \times H$ telle que :

$$\Phi = \int\phi(t,.)\,d\mu(t) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $x_o \in H$ fixé ; notons

$$x_n(t) = (I+\partial\phi^n(t,.))^{-1}x_o \qquad y_n(t) = x_o - x_n(t)$$

$$x_o(t) = ((I+\partial\Phi)^{-1}x_o)(t) \qquad y_o(t) = x_o - x_o(t) .$$

Alors puisque $\Phi^n \longrightarrow \Phi$, on a (Théorème 1.1) $\partial\Phi^n \longrightarrow \partial\Phi$ et donc tenant compte de la Proposition 3.3 $x_n(.) \longrightarrow x_o(.)$ dans $\mathcal{H}$, $y_n(.) \longrightarrow y(.)$ dans $\mathcal{H}$, et $\Phi^n(x_n(.)) \longrightarrow \Phi(x(.))$ (puisque $\Phi^n_\lambda(x_o) \longrightarrow \Phi_\lambda(x_o)$) ; posant

$$\Psi^n(u) = \int_T \{\phi^n(t,u(t)+x_n(t)) - \phi^n(t,x_n(t)) - <u(t),y_n(t)>\} d\mu(t) = \int_T \psi^n(t,u(t))\, d\mu(t)$$

$$\Psi(u) = \Phi(u+x_o(.)) - \Phi(x_o(.)) - <u,y_o(.)>$$

on a $\Psi^n \longrightarrow \Psi$ au sens de Mosco et $\forall\, t \in T \quad \psi^n(t,.) \geqslant 0$, $\psi^n(t,0) = 0$ et donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Psi^n \geqslant 0$, $\Psi^n(0) = 0$; de même $\Psi \geqslant 0$ et $\Psi(0) = 0$.

On a donc $\partial\Psi^n \longrightarrow \partial\Psi$ soit

$$\forall\, u \in \mathcal{H} \qquad (I+\partial\Psi^n)^{-1}u \longrightarrow (I+\partial\Psi)^{-1}u \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

et d'après la proposition 3.3

$$(I+\partial\psi^n(t,.))^{-1}\, u(.) \longrightarrow (I+\partial\Psi)^{-1}u \quad \text{dans } \mathcal{H} .$$

Prenant $u(.) \equiv x$, x élément de H on pourra extraire une sous-suite (dépendant de x) convergeant μ-p.p.t ; considérant une suite dense $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans H , on va pouvoir par un argument classique trouver une suite $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mu\text{-p.p.t} \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad (I+\partial\psi^{n(k)}(t,.))^{-1}\, x_p \longrightarrow (I+\partial\Psi)^{-1}\, x_p \quad (\text{et dans } \mathcal{H})$$

et donc μ-p.p.t $\forall\, x \in H \quad (I+\partial\psi^{n(k)}(t,.))^{-1}x \longrightarrow (I+\partial\Psi)^{-1}x$.

Or on sait que $\mathfrak{M}_{\phi_o}$ est fermé dans $\mathfrak{M}$ et il existe donc une famille unique $(\psi(t,.))_{t\in T}$ de fonctionnelles convexes sci propres de H dans $[0,+\infty]$, $\forall\, t \in T \quad \psi(t,0) = 0$ telles que

μ-p.p.t $\quad (I+\partial\Psi)^{-1}x = (I+\partial\Psi^t)^{-1}x$; d'autre part d'après le Théorème 2.3, $(t,x) \longrightarrow \psi(t,x)$ est une intégrande normale ; on a donc

$$\mu\text{-p.p.t} \quad (I+\partial\psi^{n(k)}(t,.))^{-1}x \longrightarrow (I+\partial\psi(t,.))^{-1}x \quad \forall\, x \in H$$

et tenant compte du fait que, μ-p.p.t $\forall\, k \quad \psi^{n(k)}(t,0) = 0 \quad \psi^{n(k)}(t,.) \geqslant 0$ $\psi(t,.) \geqslant 0 \quad \psi(t,0) = 0$ on conclut d'après le Théorème 1.1 que μ-p.p.t $\psi^{n(k)}(t,.) \longrightarrow \psi(t,0)$ au sens de Mosco.

Appliquant alors la Proposition 3.4 avec $u^n \equiv f^n \equiv 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ on conclut que

$$\Psi^{n(k)} \longrightarrow \tilde{\Psi} \text{ au sens de Mosco où } \tilde{\Psi}(u) = \int_T \psi(t,u(t))\, d\mu(t)$$

On conclut donc que $\Psi^{n(k)} \longrightarrow \Psi$ au sens de Mosco avec $\Psi = \tilde{\Psi}$; on a donc

$$\Psi(u) = \Phi(u+x_o(.)) - \Phi(x_o(.)) - \langle u, y_o(.)\rangle = \int \psi(t,u(t))\, d\mu(t) \quad \text{soit}$$

$$\Phi(u) = \int_T \{\psi(t,u(t)-x_o(t)) + \langle u(t)-x_o(t), y_o(t)\rangle + \Phi(x_o(.))\alpha(t)\}\, d\mu = \int_T \phi(t,u(t))\, d\mu(t)$$

en posant $\phi(t,x) = \psi(t,x-x_o(t)) + \langle x-x_o(t), y_o(t)\rangle + \Phi(x_o(.))\alpha(t)$ (où $\alpha(.)$ est telle que $\int \alpha(t)\, d\mu(t) = 1$) ; remarquant que ϕ est une intégrande normale convexe cela termine la première partie.

Remarque 3.2. Supposons un peu plus à savoir :

$$\begin{cases} \cdot\ \partial\Phi_n \longrightarrow \partial\Phi \\ \cdot\ \exists (u^n,f^n) \in \partial\Phi_n\ ,\ (u_o,f_o) \in \partial\Phi\ ,\ u^n \longrightarrow u_o\ ,\ f^n \longrightarrow f_o \text{ et} \\ \quad \phi^n(.,u_n(.)) \longrightarrow f \text{ dans } L^1(T,d\mu) \text{ avec } \int f = \Phi(u_o)\ . \end{cases}$$

C'est le cas en partiuclier si les $\phi^n(t,.) \geqslant 0$ et $\phi^n(t,0) = 0$; on déduit alors aisément de la démonstration précédente qu'il existe une intégrande normale ϕ telle que $\Phi = \int \phi(t,.)\, d\mu$ et une sous-suite $(\phi^{n(k)}_{(t)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $(\phi(t))$ au sens de Mosco, μ-p.p.t.

2. Théorèmes de perturbation.

Définition 3.1. Soit $(A(t))_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones ; on dira que u est solution forte de $\frac{du}{dt} + A(t)u \ni f$; $u(0) = u_o$ où $f \in L^1(0,T;H)$ et $u_o \in H$ si $u \in \mathscr{C}([0,T];H) \cap W^{1,1}_{loc}(]0,T[;H)$, $u(0) = u_o$ et p.p.$t \in]0,T[$

$\frac{du}{dt}(t) + A(t)\, u(t) \ni f(t)$. Le graphe de l'opérateur solution faible est défini comme étant la fermeture du graphe de l'opérateur solution forte dans $\mathscr{C}([0,T];H) \times L^1([0,T];H)$.

Nous utiliserons l'estimation suivante (cf. Brezis [8] Lemme 3.1).

Soient u et v solutions faibles de $\frac{du}{dt} + A(t)u \ni f$, $\frac{dv}{dt} + A(t)v \ni g$; on a

$$|u(t)-v(t)| \leq |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(\tau)-g(\tau)|\, d\tau \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T .$$

On établit cette estimation pour des solutions fortes, et ensuite on passe trivialement à la limite. Nous allons tout d'abord énoncer un résultat concernant les perturbations lipschitziennes, qui sera utile pour la suite.

PROPOSITION 3.6. *Soit* $(A(t))_{t \in [0,T]}$ *une famille d'opérateurs maximaux monotones dans* H *, espace de Hilbert réel et* u_0 *donné dans* H *tels que*

$H_1)$ $\forall f \in L^1([0,T];H)$ *, il existe* u *unique solution forte (resp. faible) de*

$$\frac{du}{dt} + A(t)u \ni f \; ; \; u(0) = u_0 .$$

Soit d'autre part $(B(t))_{t \in [0,T]}$ *une famille d'applications de* H *dans* H *telles que*

$H_2)$ *Pour presque tout* $t \in [0,T]$ *,* $D(B(t)) = \overline{D(A(t))}$ *, et il existe* $k \in L^1(0,T)$ *telle que* $|B(t)x - B(t)y| \leq k(t)|x-y|$ $p.p. t \in]0,T[$ *,* $\forall x,y \in \overline{D(A(t))}$.

$H_3)$ *L'application* $t \longrightarrow B(t)$ *est mesurable.*

$H_4)$ $\exists \omega \in L^\infty(0,T;H)$ *,* $\omega(t) \in \overline{D(A(t))}$ *p.p.t , et* $t \longrightarrow B(t,\omega(t)) \in L^1(0,T;H)$.

Alors $\forall f \in L^1(0,T;H)$ *, il existe* u *unique solution forte (resp. faible) de*

$$(I) \qquad \frac{du}{dt} + A(t)u + B(t)u \ni f \quad ; \quad u(0) = u_0 .$$

Remarque 3.3. On a supposé $D(B(t)) = \overline{D(A(t))}$ et $t \longrightarrow B(t)$ mesurable ; on aurait pu supposer, ce qui paraît plus naturel : $H_2')$ $B(t)$ est lipschitzien de rapport $k(t)$ sur un domaine $D(B(t))$ contenant $D(A(t))$ et l'application $t \longrightarrow B(t)$ est mesurable ; mais cette hypothèse se ramène en général à l'hypothèse $H_2)$ puisque (I) est équivalent à

$$\frac{du}{dt} + A(t)u + B(t)/_{\overline{D(A^t)}}\, u \ni f \quad \text{et que le graphe dans } [0,T] \times (H \times H)$$

de $B(t)/_{\overline{D(A^t)}}$ est la trace du graphe de $B(t)$ sur le graphe de $t \longrightarrow \overline{D(A^t)} \times H$ dans $[0,T] \times H \times H$.

Donc lorsque $t \longrightarrow \overline{D(A^t)}$ est mesurable (ce qui est le cas lorsque $t \longrightarrow A(t)$ est mesurable) l'hypothèse H_2'), H_3) se ramène à l'hypothèse H_2), H_3).

Remarquons enfin, compte tenu du Lemme 2.7, que H_3) équivaut à :

$\forall x : [0,T] \longrightarrow H$ mesurable univoque, telle que p.p. $t \in]0,T[$ $x(t) \in \overline{D(A(t))}$, l'application $t \longrightarrow B(t,x(t))$ est mesurable.

Dans le cas où $\overline{D(A(t))} = \overline{D}$ est fixe, H_3) est équivalent à :

$\forall x \in \overline{D}$ $t \longrightarrow B(t,x)$ est mesurable, et donc la Proposition 3.6 apparaît comme une généralisation partielle de la Proposition 1.12 P. Bénilan [5], et du Théorème 1.20 A. Damlamian [15].

<u>Démonstration de la Proposition 3.6.</u> On utilise une méthode de point fixe dans l'espace $E = \{u \in \mathcal{C}([0,T];H) / \text{p.p. } t \in [0,T],\ u(t) \in \overline{D(A(t))}\}$ muni de la métrique de la convergence uniforme ; soit S l'application de E dans E qui à u associe la solution forte (resp. faible) de

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v \ni - B(t)\ u(t) \quad ; \quad u(0) = u_o$$

(on remarque que l'on peut se ramener au cas $f = 0$) ; cette équation a bien une solution puisque $t \longrightarrow B(t)\ u(t)$ est mesurable (d'après H_3 et le Lemme 2.7) et est majoré par :

$$|B(t)\ u(t)| \leqslant |B(t,\omega(t))| + k(t)|u(t)-\omega(t)| \ .$$

Il s'agit de montrer que l'application S admet un point fixe unique :

Soient $u_1, u_2 \in E$, on a

$$|S\ u_1(t) - S\ u_2(t)| \leqslant \int_o^t |B(\tau,u_1(\tau)) - B(\tau,u_2(\tau))|$$

$$\leqslant \int_o^t k(\tau)\,|u_1(\tau) - u_2(\tau)|\ d\tau$$ et donc par un argument classique $|S^n\ u_1(t) - S^n\ u_2(t)| \leqslant \frac{\|k\|_{L^1}^n}{n!}\ \|u_1-u_2\|_{L^\infty}\ \forall\ t \in [0,T]$.

Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que S^n soit lipschitzienne de rapport strictement inférieur à un, de l'espace métrique complet E dans lui-même ; d'où la conclusion.

<u>THEOREME 3.1</u>. *Soit* H *un espace de Hilbert réel et* $(A(t))_{t\in[0,T]}$ *une famille d'opérateurs maximaux monotones dans* H *, tels que :*

H_1) *Il existe une mesure* $dm = p\,dt$ *,* p *majorée et minorée par des constantes strictement positives, et* ω *continue telles que :*

$$\forall g \in L^2([0,T];H)\ ,\ \forall u_0 \in D(A(0))\ ,\ \textit{il existe } v \textit{ unique, solution forte de}$$

$$\frac{dv}{dt} + A(t,v(t)) \ni g(t)\ ;\quad v(0) = u_0 \quad \textit{avec en outre}$$

$$\left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2(dm;H)} \leqslant |g|_{L^2(dm;H)} + \omega(|u_0|,|A(0)u_0|)\ .$$

On se donne d'autre part une famille $(B(t))_{t\in[0,T]}$ *d'opérateurs vérifiant :*

H_2) *Pour presque tout* t *de* $[0,T]$, $B(t)$ *est un opérateur hémicontinu, de domaine convexe et il existe* $k \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ *telle que :*

$$p.p.\,t \in [0,T]\ ,\ \forall x,y \in D(B^t)\quad \langle B(t)x - B(t)y, x-y\rangle + k(t)|x-y|^2 \geqslant 0\ .$$

H_3) *L'application* $t \longrightarrow \overline{B(t)}$ *est mesurable.*

H_4) *On suppose enfin* $B(t)$ *dominé par* $A(t)$ *:*

Il existe $\alpha < \frac{1}{2}$, $c \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ *et* d *numérique croissante telles que*

$$p.p.\,t \in [0,T]\ ,\ \forall x \in D(A^t)\quad |B(t)x| \leqslant \alpha|A(t)^0 x| + c(t)\ d(|x|)$$

<u>Conclusion</u> : 1°) Pour tout $f \in L^2(0,T;H)$ et $u_0 \in D(A(0))$, il existe u unique, solution de

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)\ u(t) + B(t)\ u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

2°) Supposons en outre que pour le problème non perturbé, il y a effet régularisant i.e. :

H_1')
Il existe une mesure $dm_1 = p_1\,dt$, avec p_1 positive bornée, minorée sur tout $[\delta,T]$, $\delta>0$ telle que :

$$\forall g \in L^2(0,T;H)\ ,\ \forall v_0 \in \overline{D(A(0))}\ ,\ \exists\ v \in \mathscr{C}([0,T];H)$$

telle que $v(0) = v_0$, $\left(\frac{dv}{dt} \in L^1_{loc}(]0,T[;H)\right)$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{dv}{dt}(t) + A(t)\ v(t) \ni g(t) \quad \text{p.p.}t \in [0,T] \quad \text{et} \\ \left|\frac{dv}{dt}\right|_{L^2([0,T]\ ;\ dm_1\ ;\ H)} \leq |g|_{L^2([0,T]\ ;\ dm_1\ ;\ H)} + \omega_1(|v_o|) \quad (\omega_1 \text{ continue} \\ \text{fixée}). \end{array}\right.$$

Alors pour tout $f \in L^2(0,T;H)$ et $u_o \in \overline{D(A(0))}$ il existe u unique solution de (I) avec $\frac{du}{dt} \in L^2(dm_1)$.

Démonstration : . On se ramène tout d'abord au cas $B(t)$ monotone : on écrit (I) sous la forme

$$\frac{du}{dt} + A(t)\ u(t) + B(t)\ u(t) + k(t)\ u(t) \ni f(t) + k(t)\ u(t)$$

et notant $B_1(t)x = B(t)x + k(t)x$, appliquant la Proposition 3.6, on se ramène à étudier

$$\frac{du}{dt} + A(t)\ u(t) + B_1(t,u(t)) \ni f(t)\ .$$

La famille d'opérateur $(B_1(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille d'opérateurs monotones vérifiant encore $H_2)$, $H_4)$; montrons que $H_3)$ est encore satisfaite : on note tout d'abord que $\overline{B_1(t)} = \overline{B(t)} + k(t)I$.

En effet $(x,y) \in \overline{B_1(t)} \iff \exists\,(x_n,y_n) \in B_1(t)$ $x_n \to x$, $y_n \to y \iff \exists\,(x_n,z_n) \in B(t)$ $x_n \to x$, $z_n \to y - k(t)x$, $\iff (x,y-k(t)x) \in \overline{B(t)} \iff (x,y) \in \overline{B(t)} + k(t)I$.

D'autre part l'application $t \to \overline{B(t)} + k(t)I$ est mesurable (puisque si $(x_n(.),\ y_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \overline{B(t)}$, la famille $(x_n(.),\ y_n(.) + k(.)\ x_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ forme encore une famille dénombrable dense de sections mesurables de l'application $t \to \overline{B(t)} + k(t)I)$.

. On suppose donc $B(t)$ monotone ; l'application $t \to \overline{B(t)}$ étant mesurable, on peut d'après le Théorème 2.5 la prolonger en une famille mesurable $\tilde{B}(t)$, d'opérateurs maximaux monotones.

. On va étudier le problème $(\tilde{I})$

$$(\tilde{I}) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dt} + A(t)\ u(t) + \tilde{B}(t)\ u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_o \end{array}\right.$$

et montrer l'existence et l'unicité d'une solution u à $(\tilde{I})$; on vérifiera ensuite que u est bien solution de (I) ; nous allons tout d'abord montrer la partie (1) de la conclusion. (On a $dm = p\,dt$ avec $0 < c_1 \leqslant p(t) \leqslant c_2$ $\forall t \in [0,T]$) u_o est fixé dans $D(A(0))$. A cet effet nous allons nous placer dans l'espace $\mathcal{H} = L^2([0,T];H)$; le problème $(\tilde{I})$ s'écrit

$\mathcal{A}u + \mathcal{B}u \ni f$ où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ sont définis par

a) $(u,g) \in \mathcal{A} \iff u \in W^{1,2}(0,T;H)$ $\left|\begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) + A(t)\,u(t) \ni g(t) \quad \text{p.p.t} ; \\ u(0) = u_o \end{array}\right.$

b) $(u,g) \in \mathcal{B} \iff$ p.p.t $\in [0,T]$ $\quad g(t) \in \tilde{B}(t)\,u(t)$.

L'unicité est évidente d'après la monotonie des opérateurs $A(t)$, $B(t)$; il s'agit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est surjectif dans $\mathcal{H}$; à cet effet,nous allons montrer que cet opérateur est maximal monotone, d'inverse localement borné ; d'après H. Brezis ([8], Théorème 2.3) on concluera à la surjectivité de cet opérateur.

1°) $\mathcal{A}$ est maximal monotone : soient $(u_i,f_i) \in \mathcal{A}$ $\quad (i = 1,2)$

$$\int_0^T \langle f_2-f_1,\, u_2-u_1\rangle\, dt \geqslant \int_0^T \langle \frac{d}{dt}(u_2-u_1),\, u_2-u_1\rangle\, dt \quad \text{d'après la monotonie de } A(t)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|u_2(T) - u_1(T)|^2$$

et $\mathcal{A}$ est monotone.

Soit $f \in \mathcal{H}$; on cherche $u \in \mathcal{H}$, $u + \mathcal{A}u = f$, soit $u + \frac{du}{dt} + A(t)u \ni f$; $u(0) = u_o$.

On écrit $\frac{du}{dt} + A(t)u \ni f(t) - u$ que l'on résoud par point fixe toujours d'après la Proposition 3.6.

2°) $\mathcal{B}$ est maximal monotone.

. $\mathcal{B}$ est évidemment monotone ; soit $f \in \mathcal{H}$, on cherche $u \in \mathcal{H}$, $u + \mathcal{B}u = f$ soit

$$\text{p.p.t} \in [0,T] \quad u(t) + \tilde{B}(t,u(t)) \ni f(t) .$$

Nécessairement $u(t) = (I + \tilde{B}(t,.))^{-1} f(t)$ et $u(t)$ est mesurable ; pour vérifier que $u \in \mathcal{H}$ il suffit en fait de montrer que $\mathcal{B}$ est non vide; puisque

si $g_o \in \mathcal{B} v_o$, $v_o + \mathcal{B} v_o \ni g_o + v_o$ i.e. $(I+\mathcal{B})^{-1}(g_o+v_o) = v_o$, l'on aura p.p.t $\in [0,T]$ $|u(t)-v_o(t)| \leqslant |f(t) - (g_o(t)+v_o(t))|$ et donc u sera dans $\mathcal{H}$.
Or d'après H_1) il existe $b \in W^{1,2}(0,T;H)$ et $h \in L^2(0,T;H)$ tels que p.p.t $\in [0,T]$ $h(t) \in A(t)\ b(t)$. Il suffit de prendre $h = -\frac{db}{dt}$ où $\frac{db}{dt} + A(t)b \ni 0$; d'après H_4) on aura

$$\begin{aligned}|\widetilde{B}^{o}(t,b(t))| &\leqslant |B(t,b(t))|\\ &\leqslant \alpha\ |A(t)^{o}b(t)| + c(t)\ d(|b|_{\infty})\\ &\leqslant \alpha\ |h(t)| + c(t)\ d(|b|_{\infty})\ .\end{aligned}$$

Or $t \longrightarrow \widetilde{B}^{o}(t,b(t))$ est mesurable (comme limite lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ de $t \longrightarrow \widetilde{B}_{\lambda}(t,b(t)))$.

3°) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est maximal monotone ($\mathcal{B}$ est dominé par $\mathcal{A}$).
On ne peut pas montrer directement que $\mathcal{B}$ est dominé par $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, ceci à cause de la généralité des hypothèses H_1 et H_4) : si l'on suppose $dm = dt$ et d lipschitzienne, étant donné $f \in \mathcal{A}u$, on aura :

Tout d'abord on note que $(\mathcal{B}^{o}u)(t) = \widetilde{\mathcal{B}}^{o}(t)\ u(t)$ p.p.t $\in [0,T]$ et donc

p.p.t $\in [0,T]$, $|\mathcal{B}^{o}u(t)| = |\widetilde{B}^{o}(t)\ u(t)| \leqslant |B(t)\ u(t)|$ puisque $u(t) \in D(A(t)) \subset D(B(t))$

$$\begin{aligned}&\leqslant \alpha|A^{o}(t)\ u(t)| + c(t)\ d(|u(t)|) \quad \text{d'après } H_4)\\ &\leqslant \alpha|f(t) - \frac{du}{dt}| + c(t)\ d(|u(t)|)\ .\end{aligned}$$

On obtient alors en intégrant et tenant compte de H_1) :

$$|\mathcal{B}^{o}u|_{\mathcal{H}} \leqslant 2\alpha|f|_{\mathcal{H}} + d_1(|u|)_{\mathcal{H}} \quad \forall f \in Au \quad \text{et donc}$$

$$|\mathcal{B}^{o}u|_{\mathcal{H}} \leqslant 2\alpha|A^{o}u|_{\mathcal{H}} + d_1(|u|)_{\mathcal{H}}\ .$$

Sinon, dans le cas général on montre que $(\mathcal{B}_{\lambda}\ u_{\lambda})_{\lambda>o}$ reste borné dans $\mathcal{H}$ où

$$u_{\lambda} + \mathcal{A}u_{\lambda} + \mathcal{B}_{\lambda}\ u_{\lambda} \ni f\ .$$

$$\text{p.p.}t \in]0,T[,\ |\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))| \leq |\widetilde{B}^o(t,u_\lambda(t))|$$

$$\leq |B(t,u_\lambda(t))| \quad (\text{puisque } u_\lambda(t)\in D(A(t))\subset D(B(t)) \text{ p.p.}t)$$

$$\leq \alpha\ |A^o(t,u_\lambda(t)| + c(t)\ d(|u_\lambda(t)|)$$

$$\leq \alpha\ |f(t)-\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))-\frac{du_\lambda}{dt}(t)-u_\lambda(t)| + c(t)\ d(|u_\lambda(t)|)$$

$$|\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[|f(t)| + |u_\lambda(t)| + |\frac{du_\lambda}{dt}|\right] + \frac{1}{1-\alpha}\, c(t)\ d(|u_\lambda(t)|)\ .$$

Or $\frac{du_\lambda}{dt} + A(t,u_\lambda(t)) \ni f(t) - u_\lambda(t) - \widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))$ et d'après H_1), (ω_o réel fixé) :

$$|\frac{du_\lambda}{dt}|_{L^2(dm)} \leq |f - u_\lambda - \widetilde{B}_\lambda(.,u_\lambda(.))|_{L^2(dm)} + \omega_o$$

$$|\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))|_{L^2(dm)} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[2|f|_{L^2(dm)} + 2|u_\lambda|_{L^2(dm)} + |\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))|_{L^2(dm)} + \omega_o\right]$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha}\,|c(.)\ d(|u_\lambda(.)|)|_{L^2(dm)}$$

Soit $c_1\ |\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\alpha}{1-2\alpha}\left[2|f|_{L^2(dm)} + 2|u_\lambda|_{L^2(dm)} + \omega_o\right]$

$$+ \frac{1}{1-2\alpha}\,|c(.)\ d(|u_\lambda(.)|)|_{L^2(dm)}\ .$$

Reste à montrer que $\{u_\lambda(t)\}_{\substack{t\in[0,T]\\ \lambda>0}}$ reste borné : notant toujours, $b \in W^{1,2}$,

$$\left|\begin{array}{l}\frac{db}{dt} + A(t)\ b \ni 0\\ b(0) = u_o\end{array}\right.\ ,\ \text{on a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-b(t)|^2 + \langle A(t,u_\lambda(t))-A(t,b(t)),u_\lambda(t)-b(t)\rangle + \langle\widetilde{B}_\lambda(t,u_\lambda(t))+u_\lambda(t),u_\lambda(t)-b(t)\rangle$$

$$\leq |f(t)|\,|u_\lambda(t)-b(t)|$$

d'où utilisant la monotonie de $A(t)$ et $\widetilde{B}_\lambda(t)$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-b(t)|^2 \leq |u_\lambda(t)-b(t)|\left[|f(t)| + |\widetilde{B}_\lambda(t,b(t)| + |b(t)|\right]$ et l'on conclut en

notant

$$|\tilde{B}_\lambda(t,b(t))| \leqslant |\tilde{B}^o(t,b(t))|$$

$$\leqslant \alpha \left|\frac{db}{dt}\right| + c(t)\ d(|b|_\infty) .$$

4°) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{-1}$ est localement borné.

Soit donc $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u \ni f$; il s'agit d'obtenir une estimation sur $|u|_{\mathcal{H}}$ ne faisant intervenir que $|f|_{\mathcal{H}}$: il suffit de reprendre le calcul précédent

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,u(t)) + \tilde{B}(t,u(t)) \ni f(t) & u(0) = u_o \\[2ex] \dfrac{db}{dt} + A(t,b(t)) \ni 0 & b(0) = u_o \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |u(t)-b(t)|^2 + \langle A(t,u(t))-A(t,b(t)),u(t)-b(t)\rangle + \langle\tilde{B}(t,u(t))-B(t,b(t)),u(t)-b(t)\rangle$$

$$\leqslant |u(t) - b(t)|\ [|f(t)|+|B(t,b(t))|] .$$

Soit $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt} |u(t)-b(t)|^2 \leqslant |u(t)-b(t)|\ [|f(t)| + \alpha\left|\dfrac{db}{dt}\right| + c(t)\ d(|b|_\infty)]$.

D'où $|u|_\infty \leqslant |b|_\infty + |f|_1 + \alpha\left|\dfrac{db}{dt}\right|_1 + d(|b|_\infty)\ |c|_1$.

On conclut donc que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est surjectif dans $\mathcal{H} = L^2([0,T];H)$ et pour tout f dans $L^2([0,T];H)$, on trouve donc $u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = u_o$, unique solution de

$$\frac{du}{dt} + A(t,u(t)) + \tilde{B}(t,u(t)) \ni f(t) .$$

5°) On revient au problème initial et l'on conclut à l'aide du lemme suivant :

<u>LEMME 3.2.</u> *Soit A maximal monotone et B monotone hémicontinu de domaine convexe, $D(B) \supset D(A)$. Alors pour tout prolongement monotone $\tilde{B}$ de B on a $A + \tilde{B} = A + B$.*

<u>Démonstration</u> : On a $A + \tilde{B} \supset A + B$; montrons l'inclusion inverse ; soit $x \in D(A)$ et $y \in Ax + \tilde{B}x$; alors $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Ax$, $y_2 \in \tilde{B}x$.

D'après la monotonie de $\tilde{B}$ $\quad \langle y_2-B\xi,x-\xi\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \xi \in D(B)$.

Posons $\xi = x + t(\xi_1-x)$ où $\xi_1 \in D(B)$; remplaçant ξ par sa valeur et divisant par $t>0$,

$\langle y_2 - B(x+t(\xi_1-x)), x-\xi_1\rangle \geq 0 \quad \forall \xi_1 \in D(B)$ et faisant tendre t vers zéro

$\langle y_2 - Bx, x - \xi_1\rangle \geq 0 \quad \forall \xi_1 \in D(B)$; d'autre part, d'après la monotonie de A

$\langle y_1 - \eta_1, x-\xi_1\rangle \geq 0 \quad \forall (\xi_1,\eta_1) \in D(A)$; ajoutant ces deux inégalités,

d'après la maximalité de A, $\quad y \in Ax + Bx$.

Remarques 3.4. a) On trouve $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ telle que p.p.t $\in [0,T]$ $\frac{du}{dt} + A(t,u(t)) + B(t,u(t)) \ni f(t)$. Mais a priori on ne sait rien sur l'application $t \longrightarrow B(t,u(t))$; il y a cependant un cas où l'on peut affirmer que cette application est dans $L^2(0,T;H)$: si l'on suppose que presque pour tout t, $B(t)$ est de domaine dense dans H alors p.p.t $B(t,u(t)) = \tilde{B}(t,u(t))$.
En effet soit $x \in D(B(t))$ et $y \in \tilde{B}(t)x$: d'après le calcul précédent $\langle y-B(t)x,x-\xi\rangle \geq 0$ pour tout $\xi \in D(B(t))$, si $D(B(t))$ est dense cela entraîne $y = B(t)x$.

Sinon dans le cas général si l'on veut que l'application $t \longrightarrow B(t,u(t))$ soit dans $L^2(0,T;H)$ il faut faire l'hypothèse supplémentaire :

H_3') $\forall u \in W^{1,2}(0,T;H)$, telle que presque pour tout t de $[0,T]$ $u(t) \in D(A(t))$, l'application $t \longrightarrow B(t,u(t))$ est mesurable.

En effet, on a en plus l'estimation $|B(t,u(t))| \leq \alpha|A^o(t,u(t))| + c(t)\, d(|u|_\infty)$

$$\leq \alpha\left[|f(t)| + |B(t,u(t))| + \left|\frac{du}{dt}\right|\right]$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[|f(t)| + \left|\frac{du}{dt}\right|\right].$$

b) L'hypothèse H_4) est assez facile à vérifier dans la pratique : il suffit de montrer l'existence d'une famille dénombrable dense de sections mesurables à l'application $t \longrightarrow B(t)$; dans la pratique (cf. [3], Attouch-Damlamian ; problème de la chaleur non linéaire) on prendra souvent $H = L^2(\Omega)$ et des applications constantes à valeurs dans $D(\Omega)$.

6°) On fait donc en plus l'hypothèse H_1')

Soit $u_o \in \overline{D(A(0))}$ et $u_{on} \in D(A(0))$, $u_{on} \longrightarrow u_o$ dans H ; soit u_n la solution de

$$\left|\begin{array}{l} \frac{du_n}{dt} + A(t)\, u_n(t) + B(t)\, u_n(t) \ni f(t) \\ \\ u_n(0) = u_{on} \end{array}\right.$$

Utilisant la monotonie des opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ on obtient

$$|u_n - u_m|_\infty \leqslant |u_{on} - u_{om}|$$

et donc $\quad u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}([0,T];H)$.

D'autre part
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{du_n}{dt} + A(t)\, u_n(t) \ni f(t) - \tilde{B}(t)\, u_n(t) \\ \\ u_n(0) = u_{on} \end{array}\right.$$

Reprenant le calcul du 3°), notant $d = \sup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ t\in[0,T]}} d(|u_n(t)|)$ et $\omega_1 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_1(|u_{on}|)$

on obtient

$$\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{L^2(dm_1)} \leqslant |f(t) - \tilde{B}(t)\, u_n(t)|_{L^2(dm_1)} + \omega_1 \quad \text{et}$$

$$|\tilde{B}(t)\, u_n(t)|_{L^2(dm_1)} \leqslant \frac{\alpha}{1-2\alpha}\,[2|f|+\omega_1] + \frac{d}{1-2\alpha}\,|c|_{L^2(dm_1)}$$

d'où $\quad \left|\dfrac{du_n}{dt}\right|_{L^2(dm_1)} \leqslant C$ et donc $\left|\dfrac{du_n}{dt}\right|_{L^2([\delta,T];H)} \leqslant C$.

On termine alors de façon classique en utilisant la demi-fermeture de l'opérateur prolongement à $L^2([\delta,T];H)$ de la famille de maximaux monotones $(A(t)+B(t))_{t\in[0,T]}$

Remarque 3.5. Comme dans la Proposition 3.6, on aurait pu faire l'hypothèse

$H_3')$ $t \longrightarrow \overline{B(t)/_{\overline{D(A^t)}}}$ mesurable ; la démonstration aurait été en tout point identique ; on remarque encore que $H_3')$ est conséquence de $H_3)$ lorsque $t \longrightarrow \overline{D(A^t)}$ est mesurable.

3. Application à la convergence des solutions de certaines inéquations variationnelles.

THEOREME 3.2. *Soient $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes d'opérateurs maximaux monotones $A^n \longrightarrow A$ et $B^n \longrightarrow B$.*
On suppose qu'il existe $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, telle que u_λ^n désignant l'élément

$$u_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n \ni f$$

on ait $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall f \in H \quad |B_\lambda^n u_\lambda^n| \leqslant \omega(|f|)$.

Alors $A^n + B^n$ *est maximal monotone pour tout* n *,* $A + B$ *est maximal monotone et*

$$A^n + B^n \longrightarrow A + B .$$

<u>Remarque 3.6</u>. La condition $|B_\lambda^n u_\lambda^n| \leqslant \omega_n(|f|)$ est nécessaire d'après Brézis-Crandall-Pazy [8] pour que $A^n + B^n$ soit maximal monotone ; on suppose donc dans ce résultat, cette condition vérifiée uniformément en $n \in \mathbb{N}$.

<u>Démonstration du Théorème 3.2</u>.

a) Soit f fixé dans H et
$$u_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n \ni f$$
$$u_\lambda + A u_\lambda + B_\lambda u_\lambda \ni f .$$

D'après le Lemme 2.4, $A^n + B_\lambda^n \longrightarrow A + B_\lambda$ et donc $u_\lambda^n \longrightarrow u_\lambda$; d'autre part

$$|B_\lambda^n u_\lambda^n - B_\lambda u_\lambda| \leqslant |B_\lambda^n u_\lambda^n - B_\lambda^n u_\lambda| + |B_\lambda^n u_\lambda - B_\lambda u_\lambda|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} |u_\lambda^n - u_\lambda| + |B_\lambda^n u_\lambda - B_\lambda u_\lambda|$$

et donc $B_\lambda^n u_\lambda^n \longrightarrow B_\lambda u_\lambda$; or $|B_\lambda^n u_\lambda^n| \leqslant \omega(|f|)$ ce qui entraîne $|B_\lambda u_\lambda| \leqslant \omega(|f|)$ et donc, d'après B.-C.-P. cités ci-dessus, $A + B$ est maximal monotone.

b) Soit
$$\left| \begin{array}{l} u + Au + Bu \ni f \\ u^n + A^n u^n + B^n u^n \ni f . \end{array} \right.$$
Montrons que $u_n \longrightarrow u$.

$$|u^n - u| \leqslant |u^n - u_\lambda^n| + |u_\lambda^n - u_\lambda| + |u_\lambda - u| .$$

Estimons $|u_\lambda^n - u_\lambda|$: soit $\lambda, \mu > 0$ et
$$\left| \begin{array}{l} u_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n \ni f \\ u_\mu^n + A^n u_\mu^n + B_\mu^n u_\mu^n \ni f . \end{array} \right.$$

D'après la monotonie de A^n

$$<(f - u_\lambda^n - B_\lambda^n u_\lambda^n) - (f - u_\mu^n - B_\mu^n u_\mu^n), u_\lambda^n - u_\mu^n> \geqslant 0 \text{ d'où}$$

$$|u_\lambda^n - u_\mu^n|^2 \leqslant <u_\lambda^n - u_\mu^n, B_\mu^n u_\mu^n - B_\lambda^n u_\lambda^n>$$ et d'après la monotonie de B^n

$$\leqslant <\lambda B_\lambda^n u_\lambda^n - \mu B_\mu^n u_\mu^n, B_\mu^n u_\mu^n - B_\lambda^n u_\lambda^n>$$

$$|u_\lambda^n - u_\mu^n|^2 \leqslant 2(\lambda+\mu)\ \omega(|f|)^2 .$$

Or quand $\mu \longrightarrow 0$, $u_\mu^n \longrightarrow u^n$ et donc

$$|u_\lambda^n - u^n| \leqslant \sqrt{2\lambda}\ \omega(|f|) .$$

On a donc $|u^n-u| \leqslant \sqrt{2\lambda}\ \omega(|f|) + |u_\lambda^n-u_\lambda| + |u_\lambda-u|$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |u^n-u| \leqslant \sqrt{2\lambda}\ \omega(|f|) + |u_\lambda-u|$$

le second membre pouvant être rendu arbitrairement petit avec λ ; donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$.

. Nous allons à présent donner quelques exemples d'applications de ce résultat :

<u>Remarque 3.7.</u> Soient $A^n = \partial\phi^n$, $\phi^n \longrightarrow \phi$ Mosco, et B^n maximal monotone $B^n \longrightarrow B$.

On suppose qu'il existe une constante $c\geqslant 0$ telle que

$$\forall\, x \in H \quad \forall\, \lambda>0 \quad \phi^n((I+\lambda B^n)^{-1}x) \leqslant \phi^n(x) + c\lambda .$$

Alors $\partial\phi^n + B^n \longrightarrow \partial\phi + B$ dans $\mathcal{M}$.

<u>Démonstration de la Proposition 3.7.</u> Soit $f \in H$ et $u_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n \ni f$; par définition de $A^n = \partial\phi^n$

$$\forall\, \xi \in H \qquad \phi^n(\xi) \geqslant \phi^n(u_\lambda^n) + \langle \xi - u_\lambda^n,\ f - B_\lambda^n u_\lambda^n - u_\lambda^n\rangle$$

Posons $\xi = (I+\lambda B^n)^{-1}\ u_\lambda^n$

$$\phi^n(u_\lambda^n) + c\lambda \geqslant \phi^n((I+\lambda B^n)^{-1}\ u_\lambda^n) \geqslant \phi^n(u_\lambda^n) + \langle (I+\lambda B^n)^{-1}\ u_\lambda^n-u_\lambda^n,\ f-u_\lambda^n-B_\lambda^n\ u_\lambda^n\rangle$$

$$c\lambda \geqslant \langle -\lambda\ B_\lambda^n\ u_\lambda^n,\ f - u_\lambda^n - B_\lambda^n\ u_\lambda^n\rangle \quad \text{soit}$$

$$|B_\lambda^n\ u_\lambda^n| \leqslant |f-u_\lambda^n| + \sqrt{c} .$$

Montrons que $(u_\lambda^n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \lambda>0}}$ reste bornée :

Soit $z \in D(\phi)$, $z^n \in D(\phi^n)$, $z^n \longrightarrow z$, $\phi^n(z^n) \longrightarrow \phi(z)$; posons $\xi^n = (I+B^n)^{-1}z_n$.

$$\begin{cases} |B_\lambda^n \xi^n| \leqslant |B^{n^o} \xi^n| \leqslant |B_1^n z_n| \leqslant |B_1^n z| + |z_n - z| \leqslant c' \\ \phi^n(\xi^n) = \phi^n((I+B^n)^{-1} z_n) \leqslant \phi^n(z_n) + c \leqslant c' \quad \text{et} \quad \xi^n \longrightarrow (I+B)^{-1} z . \end{cases}$$

Or $\phi^n(\xi^n) \geqslant \phi^n(u_\lambda^n) + <f-u_\lambda^n - B_\lambda^n u_\lambda^n, \xi^n - u_\lambda^n>$

et puisque $\phi^n \longrightarrow \phi$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$\phi^n(.) + \alpha|.| + \beta \geqslant 0$;

$$\phi^n(\xi^n) + \alpha|u_\lambda^n| + \beta \geqslant <f,\xi^n - u_\lambda^n> - <u_\lambda^n,\xi^n> + |u_\lambda^n|^2 + <B_\lambda^n \xi^n, u_\lambda^n - \xi^n>$$

en utilisant la monotonie de B_λ^n ; on en déduit l'estimation cherchée sur $|u_\lambda^n|$

<u>Remarque 3.7</u>. On vérifie que $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in H$ $\phi((I+\lambda B)^{-1} x) \leqslant \phi(x) + c\lambda$:

Soit $x \in H$, il existe $x^n \longrightarrow x$ $\phi^n(x^n) \longrightarrow \phi(x)$.
Or $(I+\lambda B^n)^{-1} x_n \longrightarrow (I+\lambda B)^{-1} x$ et donc

$$\phi((I+\lambda B)^{-1} x) \leqslant \underline{\lim}\ \phi^n((I+\lambda B^n)^{-1} x_n) \leqslant \underline{\lim}\ \phi^n(x^n) + c\lambda = \phi(x) + c\lambda \quad .$$

<u>PROPOSITION 3.8</u>. *Soient A^n, B^n maximaux monotones ; $A^n \longrightarrow A$ et $B^n \longrightarrow B$. On suppose qu'il existe k, $0 < k < 1$ et $\omega(.)$ croissante tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad \forall x \in D(A^n) \qquad |B^{n^o} x| \leqslant k|A^{n^o} x| + \omega(|x|) \text{ .}$$

Alors $A^n + B^n \longrightarrow A + B$ dans $\mathcal{M}$

<u>Démonstration</u> : .Soit $f \in H$ et $u_\lambda^n + A^n u_\lambda^n + B_\lambda^n u_\lambda^n \ni f$.

Montrons tout d'abord que $(u_\lambda^n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \lambda > o}}$ reste bornée ; soit $\xi^n \longrightarrow \xi$,
$A^{n^o} \xi^n \longrightarrow A^o \xi$ et notons

$$y_\lambda^n = \xi^n + A^{n^o} \xi^n + B_\lambda^n \xi^n \text{ ;}$$

on a donc $|\xi^n - u_\lambda^n| \leqslant |f - y_\lambda^n|$.

Or

$$|y_\lambda^n| \leqslant |\xi^n| + |A^{n^o} \xi^n| + |B^{n^o} \xi^n| \leqslant |\xi^n| + |A^{n^o} \xi^n| + k|A^{n^o} \xi^n| + \omega(|\xi^n|) \leqslant c'$$

et donc

$$|u_\lambda^n| \leqslant |\xi^n| + |y_\lambda^n - f| \leqslant c''(|f|) \text{ .}$$

Estimons $|B_\lambda^n u_\lambda^n|$: $f - u_\lambda^n - B_\lambda^n u_\lambda^n \in A^n u_\lambda^n$ et donc

$$|A^{n^o} u_\lambda^n| \leqslant |f| + |u_\lambda^n| + |B_\lambda^n u_\lambda^n| \leqslant |f| + |u_\lambda^n| + |B^{n^o} u_\lambda^n|$$

$$\leqslant |f| + |u_\lambda^n| + k|A^{n^o} u_\lambda^n| + \omega(|u_\lambda^n|)$$

d'où $\quad (1-k)\,|A^{n^o} u_\lambda^n| \leqslant |f| + |u_\lambda^n| + \omega(|u_\lambda^n|)$

et $\quad |B_\lambda^n u_\lambda^n| \leqslant |B^{n^o} u_\lambda^n| \leqslant k|A^{n^o} u_\lambda^n| + \omega(|u_\lambda^n|) \leqslant c'''(|f|)$.

Remarque 3.8. Soit $x \in D(A)$; il existe $x^n \in D(A^n)$ $\quad x^n \to x, A^{n^o} x_n \to A^o x$.

$$\forall \lambda > 0 \qquad |B_\lambda^n x_n| \leqslant |B^{n^o} x_n| \leqslant k|A^{n^o} x_n| + \omega(|x_n|)$$

$$\forall \lambda > 0 \qquad |B_\lambda x| \leqslant k|A^o x| + \omega(|x|)$$

et donc $\qquad |B^o x| \leqslant k|A^o x| + \omega(|x|)$.

L'hypothèse de domination de la Proposition 3.8 est donc conservée par passage à la limite.

COROLLAIRE 3.1. *Soit* $\left|\begin{array}{l} A^n \text{ *maximal monotone*}, A^n \to A . \\ B \text{ *monotone hémicontinu de domaine convexe*}, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

$D(B) \supset D(A^n)$; on suppose :

Il existe $0 < k < 1$ et ω croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in D(A^n)$

$|Bx| \leqslant k|A^{n^o} x| + \omega(|x|)$.

Alors $A + B$ est maximal monotone et $A^n + B \to A + B$.

Démonstration : Soit $\widetilde{B}$ un prolongement maximal monotone de B .

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in D(A^n) \qquad |\widetilde{B}^o x| \leqslant |Bx| \leqslant k|A^{n^o} x| + \omega(|x|) .$$

D'après la Proposition 3.8, $A^n + \widetilde{B} \to A + \widetilde{B}$; or $A^n + \widetilde{B}$ et $A + \widetilde{B}$ sont égaux respectivement à $A^n + B$ et $A + B$ d'après le Lemme 3.2.

PROPOSITION 3.9. *Soit A maximal monotone et $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maximaux monotones, $B^n \to B$.*

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_o$, telle que :

$$x_o \in \operatorname{Int} D(A) \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |B^{n^o} x_n| < +\infty .$$

Alors $A + B^n \to A + B$ dans $\mathcal{M}$.

Démonstration : Il existe $\rho>0$ et $M>0$ tels que $D(A) \supset B(x_o,\rho)$ et $|\eta| \leqslant M$, $\forall (\xi,\eta) \in A$ avec $|\xi - x_o| \leqslant \rho$.

Soit $(u,v) \in A$, $[\xi,\eta] \in A$ avec $|\xi - x_o| \leqslant \rho$. On a $\langle v-\eta, u-\xi\rangle \geqslant 0$ soit $\langle v-\eta, u-x_o+x_o-\xi\rangle \geqslant 0$ et donc $\rho|v| \leqslant \langle v, u-x_o\rangle + M(|u-x_o|+\rho)$.

Prenant $u = u_\lambda^n$ où $u_\lambda^n + A\,u_\lambda^n + B_\lambda^n\,u_\lambda^n \ni f$ et $v = f - B_\lambda^n\,u_\lambda^n - u_\lambda^n$ on a

$$\begin{aligned}
\rho|f - B_\lambda^n\,u_\lambda^n - u_\lambda^n| &\leqslant \langle f - B_\lambda^n\,u_\lambda^n - u_\lambda^n, u_\lambda^n - x_o\rangle + M(|u_\lambda^n - x_o| + \rho)\\
&\leqslant \langle f - B_\lambda^n\,u_\lambda^n - u_\lambda^n, u_\lambda^n - x_n + x_n - x_o\rangle + M(|u_\lambda^n - x_o| + \rho)
\end{aligned}$$

et par monotonie de B_λ^n

$$\begin{aligned}
&\leqslant \langle f - B_\lambda^n\,u_\lambda^n - u_\lambda^n, x_n - x_o\rangle + \langle f - B_\lambda^n\,x_n - u_\lambda^n, u_\lambda^n - x_n\rangle\\
&\quad + M(|u_\lambda^n - x_o| + \rho)
\end{aligned}$$

d'où prenant n suffisamment grand de telle sorte que $|x_n - x_o| \leqslant \rho/2$

$$\begin{aligned}
\rho/2\,|B_\lambda^n\,u_\lambda^n| \leqslant \quad & \rho/2(|f|+|u_\lambda^n|) + (|u_\lambda^n|+|x_n|)(|f|+|B^{n^o}x_n|+|u_\lambda^n|)\\
&+ M(|u_\lambda^n - x_o|+\rho)\,.
\end{aligned}$$

Reste à estimer $(u_\lambda^n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \lambda>0}}$; notons $y_\lambda^n = x_n + A^o\,x_n + B_\lambda^n\,x_n$.

On a $|x_n - x_o| \leqslant \rho/2$ et donc $|A^o x_n| \leqslant M$, d'où $|y_\lambda^n| \leqslant |x_n| + M + |B^{n^o} x_n|$.

D'autre part $\qquad f \in u_\lambda^n + Au_\lambda^n + B_\lambda^n\,u_\lambda^n$

et utilisant la monotonie de A et B_λ^n :

$$|x_n - u_\lambda^n|^2 \leqslant \langle y_\lambda^n - f, x_n - u_\lambda^n\rangle \quad \text{soit}$$

$$|x_n - u_\lambda^n| \leqslant |y_\lambda^n - f| \quad \text{et} \quad |u_\lambda^n| \leqslant 2|x_n| + M + |B^{n^o} x_n| + |f|\,.$$

On a donc finalement : il existe N_o tel que $\forall n \geqslant N_o$ $\forall \lambda>0$ $|B_\lambda^n\,u_\lambda^n| \leqslant \omega(|f|)$.

<u>COROLLAIRE</u> <u>3.2.</u> | *A maximal monotone, $D(A) = H$.*
| *$B^n \longrightarrow B$ dans $\mathcal{M}$; alors $A + B^n \longrightarrow A + B$.*

La démonstration est évidente : il suffit de prendre $x_o \in D(B)$; il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x_o$ et $B^n x_n \longrightarrow B^o x_o$.

PROPOSITION 3.10. *Soit* $A^n \longrightarrow A$ *dans* $\mathcal{M}$ *et* $B^n \longrightarrow B$ *dans* $\mathcal{M}$ *où* B^n, B *sont des opérateurs monotones lipschitziens de constante* $\alpha>0$ *indépendante de* $n\in\mathbb{N}$ *; alors* $A^n + B^n \longrightarrow A + B$ *dans* $\mathcal{M}$.

Démonstration : Soit $y \in (A+B)x$; alors $y - Bx \in Ax$ et puisque $A^n \longrightarrow A$ il existe $(x^n,z^n) \in A^n$ tels que :

$$x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{et} \quad z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y - Bx .$$

Posons $y^n = z^n + B^n x^n$ alors $y^n \in (A^n+B^n)x_n$ et

$$|y^n-y| = |z^n+B^nx^n-y| \leqslant |z^n-(y-Bx)| + |Bx-B^nx^n| \leqslant |z^n-(y-Bx)| + |Bx-B^nx| + \alpha|x-x^n|$$

et donc $y^n \longrightarrow y$.

Remarque 3.9. Ce résultat contient le Lemme 2.5, puisque $B^n \longrightarrow B$ entraîne $B^n_\lambda \longrightarrow B_\lambda$ et les B^n_λ sont lipschitziens de rapport $\frac{1}{\lambda}$ indépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Une question qui se pose naturellement est la suivante : soit $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs monotones lipschitziens convergeant vers B monotone lipschitzien ; la convergence a-t-elle lieu uniformément sur les bornés ?

Nous allons à présent, grâce aux résultats précédents, donner quelques exemples de suites convergentes d'opérateurs maximaux monotones et en déduire la convergence des solutions des inéquations variationnelles associées à ces opérateurs.

Exemple 1. $H = L^2(\Omega)$.

On se donne une suite $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de graphes maximaux monotones, $\beta^n \longrightarrow \beta$, $\beta^n(0) \ni 0$.

Soit
$$\left| \begin{array}{l} A^n = -\Delta + \beta^n \\ D(A^n) = \{u \in H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega) \ ; \ \exists v \in L^2(\Omega) \quad v(x) \in \beta^n(u(x)) \quad \text{p.p.}x \in \Omega\} . \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} A = -\Delta + \beta \\ D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega) \ ; \ \exists v \in L^2(\Omega) \quad v(x) \in \beta(u(x)) \quad \text{p.p.}x \quad \Omega\} . \end{array} \right.$$

Alors $A^n \to A$ dans $\mathcal{M}$.

<u>Démonstration</u> : On a $A^n = B + C^n$ où B , $B = -\Delta$ $(D(B) = H^2 \cap H^1_o)$, est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$ et $C^n = \partial\Phi^n$, $\Phi^n(u) = \int_\Omega j^n(u(x))\,dx$ et $\partial j^n = \beta^n$.

Prenant j_n telle que $j_n(0) = 0$, j telle que $j(0) = 0$, $j^n \to j$ au sens de Mosco, d'après la Proposition 3.4, $\Phi^n \to \Phi$ au sens de Mosco (où $\Phi(u) = \int j(u(x))\,dx$) et donc $C^n = \partial\Phi^n \to C = \partial\Phi$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u^n_\lambda + Bu^n_\lambda + C^n_\lambda u^n_\lambda \ni f$ dans $L^2(\Omega)$ soit

$$u^n_\lambda - \Delta u^n_\lambda + \beta^n_\lambda u^n_\lambda \ni f \quad \text{p.p. } x \in \Omega \ .$$

Multipliant par $\beta^n_\lambda u^n_\lambda$ et intégrant sur Ω :

$$\int_\Omega u^n_\lambda . \beta^n_\lambda u^n_\lambda \,dx - \int_\Omega \Delta u^n_\lambda . \beta^n_\lambda u^n_\lambda \,dx + \int_\Omega |\beta^n_\lambda u^n_\lambda|^2 \,dx = \int_\Omega f.\beta^n_\lambda u^n_\lambda \,dx \ .$$

Or H. Brezis [10], on a $-\int \Delta u^n_\lambda . \beta^n_\lambda u^n_\lambda \,dx \geq 0$ (formellement égal à $\int |\text{grad } u^n_\lambda|^2 \, \beta^{n\,'}_\lambda (u^n_\lambda) dx \geq 0$) et donc

$$\|\beta^n_\lambda u^n_\lambda\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après le Théorème 3.2, on a donc $A^n \to A$.

<u>COROLLAIRE 3.3.</u> *Avec les mêmes notations, f^n convergeant vers f dans $L^2(\Omega)$ on désigne par u_n et u les solutions respectives de*

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u^n + \beta^n(u^n) \ni f^n \quad \Omega \\ u^n/_\Gamma = 0 \end{array}\right. \qquad\qquad \left|\begin{array}{l} -\Delta u + \beta(u) \ni f \\ u/_\Gamma = 0 \end{array}\right.$$

Alors $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ (et dans ω-$H^2(\Omega)$) .

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord notons d'après H. Brezis [10] , les solutions u_n et u existent et sont uniques ; on a donc $f \in Au$ et puisque $A^n \to A$ il existe $(v^n, g^n) \in A^n$ tels que $v^n \to u$ et $g^n \to f$.

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u^n + \beta^n u^n \ni f^n \\ -\Delta v^n + \beta^n v^n \ni g^n \end{array}\right.$$

d'où tenant compte de la monotonie de β^n

$$-\int \Delta(u^n-v^n).u^n-v^n\,dx \leqslant \int f^n-g^n.u^n-v^n\,dx$$

$$\alpha|u^n-v^n|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \int|\mathrm{grad}(u^n-v^n)|^2\,dx \leqslant |f^n-g^n|_{L^2}\cdot|u^n-v^n|_{L^2}\,.$$

Donc $\quad |u^n-v^n|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\alpha}|f^n-g^n|_{L^2(\Omega)}$ et $u_n \longrightarrow u$ dans $H = L^2(\Omega)$.

Or toujours d'après [10] on a $|\Delta u^n|_{L^2(\Omega)} \leqslant |f^n|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$.

Donc $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$ et donc $u^n \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarquons qu'on aurait pu directement montrer ce résultat, en écrivant que

$$\int_\Omega j^n(v)\,dx \geqslant \int_\Omega j^n(v^n)\,dx + \int_\Omega f + \Delta u^n.v-u^n\,dx\,,$$

en vérifiant comme précédemment que $(\Delta u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée dans $L^2(\Omega)$, et utilisant le fait que $\phi^n \longrightarrow \phi$ au sens de Mosco dans $L^2(\Omega)$, passer à la limite sur cette inégalité.

<u>Exemple 2</u>. $H = H^{-1}(\Omega)$.

On se donne toujours une suite $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de graphes maximaux monotones, $\beta^n \longrightarrow \beta$ avec en outre $R(\beta^n) = R(\beta) = \mathbb{R}$.

Soit
$$\left|\begin{array}{l} A^n = -\Delta\beta^n \\ D(A^n) = \{u\in H^{-1}\cap L^1 \;;\; \exists\, w\in H^1_0(\Omega) \quad w(x)\in\beta^n(u(x)) \quad \text{p.p. } x\in\Omega\} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} A = -\Delta\beta \\ D(A) = \{u\in H^{-1}\cap L^1 \;;\; \exists\, w\in H^1_0(\Omega) \quad w(x)\in\beta(u(x)) \quad \text{p.p. } x\in\Omega\} \end{array}\right.$$

Alors $A^n \longrightarrow A$ dans $\mathcal{M}$.

<u>Démonstration</u> : Pour montrer que $A^n \longrightarrow A$ il suffit de montrer que $(I+A^n)^{-1}f \longrightarrow (I+A)^{-1}f$ pour tout f dans un sous-ensemble dense de H ; on va prendre ici f dans $L^2(\Omega)$ qui est bien dense dans $H^{-1}(\Omega)$; soit donc f fixé dans $L^2(\Omega)$ et
$$\left|\begin{array}{l} u^n - \Delta\beta^n u_n \ni f \\ u - \Delta\beta u \ni f \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire qu'il existe $v^n \in H_o^1(\Omega)$ $v^n \in \beta^n(u^n)$ p.p.x , il existe $v \in H_o^1(\Omega)$ $v \in \beta(u)$ p.p.x tels que :

$$u^n - \Delta v^n = f \ , \quad u - \Delta v = f$$ où sous une forme équivalente en posant

$$\gamma^n = (\beta^n)^{-1} \ , \gamma = (\beta)^{-1} \quad \gamma^n(v^n) - \Delta v^n \ni f \ , \quad \gamma(v) - \Delta v \ni f \ ;$$

Or puisque f est dans $L^2(\Omega)$, on a en fait $v_n \in H^2 \cap H_o^1(\Omega)$ et l'on est ramené à l'exemple précédent ; puisque $\beta^n \longrightarrow \beta$ on a $\gamma^n \longrightarrow \gamma$ et donc $v_n \longrightarrow v$ dans $H_o^1(\Omega)$ et dans $\omega - H^2(\Omega)$; or $u^n = f + \Delta v^n$ $u = f + \Delta v$ et donc $u^n \longrightarrow u$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

<u>COROLLAIRE 3.4.</u> *Soit* $\phi^n \longrightarrow \phi$ *au sens de Mosco ; on suppose* $D(\phi^n) = D(\phi) = \mathbb{R}$ *Soit* $v \in H_o^1(\Omega)$ *tel que* $\int_\Omega \phi(v(x))\,dx < +\infty$ *; il existe alors une suite* $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ $v^n \in H_o^1(\Omega)$, $\int \phi^n(v^n(x))\,dx < \infty$, $v_n \longrightarrow v$ *dans* $H_o^1(\Omega)$ *et* $\int_\Omega \phi^n(v^n(x))\,dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(v(x))\,dx$.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord on se ramène par un argument classique au cas où ϕ^n , $\phi \geq 0$; $\phi^n(0) = \phi(0) = 0$. Posons $j_n = \phi^{n*}$, $\beta_n = \partial j_n$; avec les notations précédentes on a

$$A^n = - \Delta\beta^n = \partial\Phi^n \qquad \text{où } \Phi^n(u) = \begin{cases} \int_\Omega j^n(u(x))\,dx & u \in H^{-1} \cap L^1 \ , \ j^n(u(.)) \in L^1 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$A = - \Delta\beta = \partial\Phi$$

Puisque $\phi^n \longrightarrow \phi$, on a $j^n = \phi^{n*} \longrightarrow j = \phi^*$ et donc $\beta^n \longrightarrow \beta$; d'après ce qui précède, on a donc $A^n \longrightarrow A$ et remarquant que $A^n 0 = A0 = \Phi^n 0 = \Phi 0 = 0$ on conclut que $\Phi^n \longrightarrow \Phi$ (Théorème 1.1). Or d'après [2] la fonctionnelle Φ^{n*} est définie sur $H_o^1(\Omega)$ par

$$\Phi^{n*}(v) = \begin{cases} \int_\Omega j^{n*}(v)\,dx = \int_\Omega \phi^n(v)\,dx & v \in H_o^1(\Omega) \ , \ \phi^n(v) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Et d'après le Corollaire 1.3, $\Phi^{n*} \longrightarrow \Phi^*$ au sens de Mosco ; remarquant que la seule condition imposée sur $\phi_n = j^{n*}$ est d'être partout définie on conclut en exprimant la convergence s-scs de Φ^{n*} vers Φ^* dans $H_o^1(\Omega)$.

Exemple 3. $H = L^2(\Omega)$ (Ω ouvert régulier borné).

Soit $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de graphes maximaux monotones, $\beta^n \longrightarrow \beta$ et

$$\left| \begin{array}{l} A^n u = -\Delta u \\ \\ D(A^n) = \{u \in H^2(\Omega) \ ; \ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta^n(u)\} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} Au = -\Delta u \\ \\ D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \ ; \ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u)\}. \end{array} \right.$$

Alors $A^n \longrightarrow A$ dans $\mathcal{M}$.

Démonstration : D'après H. Brezis [9] , on sait que A^n, A sont maximaux monotones dans $L^2(\Omega)$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ fixé et

$$(I)_n \left| \begin{array}{ll} u_n - \Delta u_n = f & \Omega \\ \\ -\frac{\partial u_n}{\partial n} \in \beta^n(u_n) & \Gamma \end{array} \right. \qquad (I) \left| \begin{array}{ll} u - \Delta u = f & \Omega \\ \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \Gamma \end{array} \right.$$

Il s'agit de montrer que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$.

On transforme le problème : soit u_o tel que $\left| \begin{array}{ll} u_o - \Delta u_o = f & \Omega \\ u_{o/\Gamma} = 0 \ . & \end{array} \right.$

Posons $\tilde{u}_n = u_n - u_o$ et $\tilde{u} = u - u_o$

$$(II)_n \left| \begin{array}{ll} \tilde{u}_n - \Delta\tilde{u}_n = 0 & \Omega \\ \\ \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial n} + \beta^n(\tilde{u}_n) \ni g & \Gamma \end{array} \right. \qquad (II) \left| \begin{array}{ll} \tilde{u} - \Delta\tilde{u} = 0 & \Omega \\ \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \beta(\tilde{u}) \ni g & \Gamma \end{array} \right.$$

où l'on a posé $g = -\frac{\partial u_o}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma)$; la convergence de u_n vers u dans $L^2(\Omega)$ est évidemment équivalente à la convergence de $\tilde{u}_n$ vers $\tilde{u}$ dans ce même espace.

On va alors se ramener à un problème dans $H_1 = L^2(\Gamma)$:

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur $D(\mathcal{A}) = \left\{v_o \in H^{1/2}(\Gamma) \ ; \ \frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\Gamma) \text{ où } \begin{array}{ll} v - \Delta v = 0 & \Omega \\ v/_\Gamma = v_o & \end{array} \right\}$

$$\mathcal{A} v_o = \frac{\partial v}{\partial n} .$$

Alors $\tilde{u}_n$ solution de $(II)_n$ (resp. $\tilde{u}$ solution de (II)) est équivalent à $\tilde{u}_{n/\Gamma}$ (resp. $\tilde{u}/_\Gamma$) solution de

$$(III)_n \quad \mathcal{A}(v_o) + \beta^n(v_o) \ni g \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma)$$

$$\text{(resp.)} \quad (III) \quad \mathcal{A}(v_o) + \beta(v_o) \ni g \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma) .$$

Il s'agit donc de montrer que la solution de $(III)_n$ converge vers la solution de (III) dans $L^2(\Gamma)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$; nous allons à cet effet appliquer le Théorème 3.2; puisque $\beta^n \longrightarrow \beta$, son prolongement à $L^2(\Gamma)$ est aussi convergent; montrons à présent que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $L^2(\Gamma)$:

a) $\mathcal{A}$ monotone

Puisque $\mathcal{A}$ est linéaire soit à montrer que $\forall\, v_o \in D(\mathcal{A})$ $<\mathcal{A}v_o, v_o> \geqslant 0$.

Soit $\left|\begin{array}{l} -\Delta v + v = 0 \text{ ; multipliant par } v \text{ ,} \\ v/_\Gamma = v_o \end{array}\right.$ $\displaystyle\int_\Omega -\Delta v.v + \int_\Omega |v|^2 = 0$ et puisque

v est dans $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\text{grad } v|^2\, dx + \int_\Omega |v|^2\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} \cdot v\, dx = \int_\Gamma \mathcal{A}v_o . v_o\, dx .$$

D'où $<\mathcal{A}v_o, v_o> = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \geqslant \alpha |v_o|^2_{L^2(\Gamma)}$

b) $\mathcal{A}$ est maximal.

Soit $g \in L^2(\Gamma)$, on cherche $v \in L^2(\Gamma)$ $v + \mathcal{A}v = g$; à cet effet on introduit la fonctionnelle suivante sur $H^1(\Omega)$:

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\text{grad } u|^2 + |u|^2\, dx + \int_\Gamma \frac{1}{2}|u|^2 - gu\, d\sigma(x) .$$

Cette fonctionnelle est strictement convexe, sci, coercive sur $H^1(\Omega)$ et atteint donc son minimum en un unique point u qui comme on le vérifie de façon immédiate est solution de

$$-\Delta u + u = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \quad \text{au sens des distributions}$$

et $$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v-u + \int_\Gamma v-u . u-g\, d\sigma \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

où $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v-u$ est pris au sens de la dualité $\langle H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\rangle$.

On en déduit $\int_\Gamma (u - g + \frac{\partial u}{\partial n}).\ \omega\, d\sigma(x) = 0 \quad \forall\, \omega \in H^{1/2}(\Gamma)$ et donc

$$u - g + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ , ce qui entraîne } \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$$

On a donc
$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u + u = 0 \\ u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \\ u \in H^{1/2}(\Gamma),\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma). \end{array}\right.$$
ce qui signifie $u/_\Gamma$ solution de $v + \mathcal{A}v = g$

c) Soit $v_\lambda^n + \mathcal{A}(v_\lambda^n) + \beta_\lambda^n(v_\lambda^n) = g$ où g est donnée dans $L^2(\Gamma)$; multipliant cette égalité par $\beta_\lambda^n(v_\lambda^n)$ il vient (on suppose pour simplifier $\beta^n(0) \ni 0$) .

$$\int_\Gamma v_\lambda^n.\beta_\lambda^n(v_\lambda^n)\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial w_\lambda^n}{\partial n} .\ \beta_\lambda^n(v_\lambda^n)\, dx + \int_\Gamma |\beta_\lambda^n\ v_\lambda^n|^2\, dx = \int_\Gamma g.\beta_\lambda^n\ v_\lambda^n\, dx$$

où $\left|\begin{array}{l} w_\lambda^n - \Delta w_\lambda^n = 0 \\ w_{\lambda/_\Gamma}^n = v_\lambda^n \end{array}\right.$ ce qui entraîne $\int_\Omega -\Delta w_\lambda^n.\beta_\lambda^n\ w_\lambda^n\, dx \leqslant 0$ soit en intégrant par parties

$$0 \leqslant \int_\Omega \beta_\lambda^{n'}(w_\lambda^n)|\operatorname{grad} w_\lambda^n|^2\, dx \leqslant \int_\Gamma \frac{\partial w_\lambda^n}{\partial n} .\ \beta_\lambda^n(v_\lambda^n)\, dx$$

(on opère d'abord pour β_λ^n régulier, puis on passe à la limite facilement) ; on en déduit finalement

$$|\beta_\lambda^n\ v_\lambda^n|_{L^2(\Gamma)} \leqslant |g|_{L^2(\Gamma)} .$$

d) D'après le Théorème 3.2, on a donc $\mathcal{A} + \beta^n \longrightarrow \mathcal{A} + \beta$.

Or $\mathcal{A}(\tilde{u}_{n/_\Gamma}) + \beta^n(\tilde{u}_{n/_\Gamma}) \ni g \qquad \mathcal{A}(\tilde{u}/_\Gamma) + \beta(\tilde{u}/_\Gamma) \ni g$.

Il existe donc $v_n \longrightarrow \tilde{u}/_\Gamma$ dans $L^2(\Gamma)$, $g_n \longrightarrow g$ dans $L^2(\Gamma)$ tels que

$$\mathcal{A}(v_n) + \beta^n(v_n) \ni g_n .$$

D'où $\langle \mathcal{A}(\tilde{u}_{n/_\Gamma} - v_n), \tilde{u}_{n/_\Gamma} - v_n\rangle \leqslant \langle g - g_n, \tilde{u}_{n/_\Gamma} - v_n\rangle$

$$\alpha|\tilde{u}_{n/\Gamma} - v_n|_{L^2(\Gamma)} \leqslant |g - g_n|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{et donc} \quad \tilde{u}_{n/\Gamma} \to \tilde{u}/_\Gamma \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma)\,.$$

D'autre part $|\mathcal{A}(\tilde{u}_{n/\Gamma})|^2 + \langle \mathcal{A}(\tilde{u}_{n/\Gamma}), \beta^n(\tilde{u}_{n/\Gamma})\rangle = \langle \mathcal{A}(\tilde{u}_{n/\Gamma}), g\rangle$

et tenant compte de $\langle \mathcal{A}(\tilde{u}_{n/\Gamma}), \beta^n(\tilde{u}_{n/\Gamma})\rangle \geqslant 0$ (que l'on montre en régularisant β^n et en passant à la limite) on obtient $|\mathcal{A}(\tilde{u}_{n/\Gamma})| = |\frac{\partial u_n}{\partial n}|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C$

On a alors revenant à $\tilde{u}_n$ et $\tilde{u}$, en multipliant $-\Delta(\tilde{u}_n-\tilde{u}) + \tilde{u}_n - \tilde{u} = 0$ par $-\Delta(\tilde{u}_n-\tilde{u})$

$$|\Delta\tilde{u}_n - \Delta\tilde{u}|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} - \frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial n} \cdot \tilde{u}/_\Gamma - \tilde{u}_{n/\Gamma} \leqslant C|\tilde{u}_{n/\Gamma} - \tilde{u}/_\Gamma|_{L^2(\Gamma)} \to 0.$$

Donc $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H^1(\Omega)$ et $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$; on peut énoncer ce résultat un peu plus précis :

COROLLAIRE 3.5. *Soit $\beta^n \to \beta$ dans l'ensemble des graphes maximaux monotones de $\mathbb{R}$ et soient u_n, u les solutions respectives de*

$$\left|\begin{array}{ll} u_n - \Delta u_n = 0 & \Omega \\ -\dfrac{\partial u_n}{\partial n} \in \beta^n(u_n) & \Gamma \end{array}\right. \qquad\qquad \left|\begin{array}{ll} u - \Delta u = 0 & \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \Gamma \end{array}\right.$$

Alors $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ (et $\Delta u_n \to \Delta u$ dans $L^2(\Omega)$)

Exemple 4. $H = L^2(\Omega)$ Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, possédant la propriété du segment.

$$\text{Soit} \quad \Phi_J(u) = \left|\begin{array}{ll} \displaystyle\int_\Omega J(\text{grad } u)\,dx & u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)\,,\ J(\text{grad } u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{array}\right.$$

où J est convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $[0,+\infty[$, $J(0) = 0$ et coercive ; d'après H. Attouch et A. Damlamian [2], Φ est convexe, sci, propre sur $H = L^2(\Omega)$ et son sous-différentiel est défini par

$A_J = \partial\Phi_J = \{(u,f)$; $u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ tels qu'il existe $w \in (L^1(\Omega))^N$

$w \in \partial J(\text{grad } u)$ p.p. Ω

$$f = - \operatorname{div} w \quad \text{et} \quad \int_\Omega \{u.f + w.\operatorname{grad} u\}\, dx \leqslant 0\} .$$

D'autre part étant donné $v \in L^2(\Omega)$

$$\phi^*(v) = \underset{\begin{cases} y \in (L^1(\Omega))^N \\ - \operatorname{div} y = v \end{cases}}{\operatorname{Min}} \int_\Omega J^*(y)\, dx .$$

On se propose d'étudier la continuité de l'application $J \longrightarrow A_J$.
Nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 3.11. *Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*
Soit ϕ^n , ϕ convexes, sci, propres de $\mathbb{R}^N$ dans $]-\infty,+\infty]$, telles que $\phi^n \longrightarrow \phi$. Alors les fonctionnelles

$$\Phi^n(u) = \begin{cases} \int_\Omega \phi^n(u)\, dx & u \in (L^1(\Omega))^N ,\ \phi^n(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega \phi(u)\, dx & u \in (L^1(\Omega))^N ,\ \phi(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

vérifient également : $\Phi^n \longrightarrow \Phi$ dans $(L^1(\Omega))^N$.

Démonstration : Les fonctionnelles Φ^n , Φ sont convexes, sci, propres sur $(L^1(\Omega))^N$; on vérifie d'autre part que l'on peut se ramener au cas $\phi^n \geqslant 0$, $\phi^n(0) = 0$; enfin, d'après la Proposition 3.4 $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ dans $(L^2(\Omega))^N$;

a) Condition (ω-SCS)

Soit $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $f_{n(k)} \rightharpoonup f$ dans $(L^1(\Omega))^N$; il s'agit de montrer que

$$\int_\Omega \Phi(f)\, dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^{n(k)}(f_{n(k)})\, dx .$$

Posons $f_{n(k)} = f_k$ et $\phi^{n(k)} = \phi^k$;

soit $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, une famille de fonctions dans $D(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha_\varepsilon \leqslant 1$, et $\alpha_\varepsilon \longrightarrow 1$ partout quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Soit $(\rho_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ une suite régularisante de noyaux de convolution ; (i.e. $\rho_{\varepsilon'} \geqslant 0$,

$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{\varepsilon'}(x)\, dx = 1$, et Supp $\rho_{\varepsilon'} \subset B(0,\varepsilon'))$.

Posons $f_{k,\varepsilon,\varepsilon'} = (f_k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'}$; on a évidemment $f_{k,\varepsilon,\varepsilon'} \in (D(\Omega))^N$ et $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall g \in (L^\infty(\Omega))^N$,

$$\int_\Omega f_k.\alpha_\varepsilon.g\, dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega f.\alpha_\varepsilon.g\, dx \quad \text{puisque} \quad g.\alpha_\varepsilon \in (L^\infty(\Omega))^N ;$$

d'autre part

$\forall\ \varepsilon>0$, $\forall\ \varepsilon'>0$ $\quad (f_k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'} \rightharpoonup (f.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'}$ et

$\forall x \in \Omega \quad (f_k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'}(x) \to (f.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'}(x)$ d'après le lemme suivant :

<u>LEMME 3.3.</u> *Soit* $h_n \rightharpoonup h$ *dans* ω-$L^1(\mathbb{R}^N)$ *et soit* ρ *un noyau de convolution dans* $\mathbb{R}^N$.

Alors $h_n * \rho \rightharpoonup h * \rho$ *dans* ω-$L^1(\mathbb{R}^N)$ *et* $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ $h_n * \rho(x) \to h * \rho(x)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ donné,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (h_n * \rho)(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} h_n(y)\, \rho(x-y)\, dy\right) dx .$$

On vérifie que l'on est dans les conditions d'application du Théorème de Fubini et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (h_n * \rho)(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_n(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x).\rho(x-y)\, dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} h_n(y)\, G(y)\, dy$$

où $G(y) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x+y)\, \rho(x)\, dx$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ puisque $|G(y)| \leq \|g\|_\infty$ $\forall\, y \in \mathbb{R}^N$.

Donc puisque $h_n \rightharpoonup h$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int h_n(y)\, G(y)\, dy \to \int h(y)\, G(y)\, dy$, ce qui exprime la convergence de $h_n * \rho$ vers $h * \rho$ dans ω-$L^1(\mathbb{R}^N)$.

D'autre part $h_n * \rho(x) = \int_{\mathbb{R}^N} h_n(y).\rho(x-y)\, dy \to \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\, \rho(x-y)\, dy$ puisque l'application $y \to \rho(x-y)$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

<u>Suite de la démonstration de la Proposition</u> : Plaçons-nous à ε et ε' fixés ; notons $f_k = f_{k,\varepsilon,\varepsilon'}$ et $f = f_{\varepsilon,\varepsilon'}$; on a

$f_k \rightharpoonup f$ dans $\omega\text{-}(L^1(\Omega))^N$ et $\forall x \in \Omega$ $f_k(x) \to f(x)$.

Notons tout d'abord $\int_\Omega \phi^k(f_k)\,dx \geqslant \int \phi^k_\lambda(f_k)\,dx$ $\forall \lambda>0$, où ϕ^k_λ est la régularisée Yosida de ϕ^k ; on sait, corollaire 1.3, que pour tout x de $\mathbb{R}^N$ $\phi^k_\lambda x \xrightarrow[k]{} \phi_\lambda x$, et donc $\phi^k_\lambda x \xrightarrow[k\to+\infty]{} \phi_\lambda x$ uniformément pour x borné; soit $x\in\Omega$ tel que $f^k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$.

On a $|\phi^k_\lambda(f_k(x)) - \phi_\lambda(f(x))| \leqslant |\phi^k_\lambda(f_k(x)) - \phi_\lambda(f_k(x))| + |\phi_\lambda(f_k(x)) - \phi_\lambda(f(x))|$

$$\leqslant \sup_{\{|\xi|\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|f_k(x)|\}} |\phi^k_\lambda(\xi) - \phi_\lambda(\xi)| + |\phi_\lambda(f_k(x)) - \phi_\lambda(f(x))|$$

et donc $\phi^k_\lambda(f_k(x)) \to \phi_\lambda(f(x))$ p.p. $x\in\Omega$.

D'après le lemme de Fatou, $\int_\Omega \phi_\lambda(f(x))\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k_\lambda(f_k(x))dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k(f_k(x))dx$

et puisque $\phi_\lambda \uparrow \phi$ lorsque $\lambda \to 0$, d'après Beppo-Lévy

$$\int_\Omega \phi(f(x))\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k(f_k(x))\,dx .$$

Donc $\forall \varepsilon,\varepsilon' > 0$ $\int_\Omega \phi((f.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'})dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k((f^k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'})dx$.

Or $$\int_\Omega \phi^k((f^k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'})dx \leqslant \int_\Omega \phi^k(f^k.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'}\,dx$$
$$\leqslant \int_\Omega \phi^k(f^k.\alpha_\varepsilon)\,dx$$

et puisque $\phi^k(0) = 0$, $\phi^k \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha_\varepsilon \leqslant 1$, $\phi^k(f^k.\alpha_\varepsilon) \leqslant \phi^k(f^k)$;

par conséquent $\forall \varepsilon,\varepsilon' > 0$ $\int_\Omega \phi((f.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'})dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k(f^k)\,dx$.

Faisant tendre ε' vers zéro, $(f.\alpha_\varepsilon) * \rho_{\varepsilon'} \to f.\alpha_\varepsilon$ dans $(L^1(\Omega))^N$ et toujours d'après Fatou

$$\int_\Omega \phi(f.\alpha_\varepsilon)dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi^k(f^k)dx .$$

Faisant tendre $\varepsilon \to 0$, notant que $f.\alpha_\varepsilon \to f$ dans $(L^1(\Omega))^N$, on conclut d'après le même argument :

b) Condition s-SCI.

Soit $u \in D(\Phi)$; on cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in D(\Phi^n)$, $u_n \longrightarrow u$ dans $(L^1(\Omega))^N$ et $\Phi(u_n) \longrightarrow \Phi(u)$; avec les notations précédentes, $u_\varepsilon = (u\circ\alpha_\varepsilon) * \rho_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $(L^1(\Omega))^N$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$; or $u_\varepsilon \in (D(\Omega))^N \subset (L^2(\Omega))^N$ et sachant (Proposition 3.4) que $\Phi^n \longrightarrow \Phi$ dans $(L^2(\Omega))^N$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(u_\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(L^2(\Omega))^N$ telle que $u_{n,\varepsilon} \longrightarrow u_\varepsilon$ dans $(L^2(\Omega))^N$ et

$$\int_\Omega \phi^n(u_n,\varepsilon)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \phi(u_\varepsilon)dx$$

Or $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $(L^1(\Omega))^N$ et $\int_\Omega \phi(u_\varepsilon)dx = \int_\Omega \phi((u\circ\alpha_\varepsilon) * \rho_\varepsilon)dx$ d'où

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega \phi(u_\varepsilon)dx \leqslant \int_\Omega \phi(u)dx \,.$$

D'autre part, d'après le Lemme de Fatou, puisque $u_\varepsilon \longrightarrow u$

$$\int_\Omega \phi(u)\, dx \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega \phi(u_\varepsilon)dx \,.$$

Donc $\int_\Omega \phi(u_\varepsilon)dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(u)\, dx$.

Appliquant alors le Lemme 1.4, on en déduit l'existence d'une suite $u_{n,\varepsilon(n)}$ telle que

$$\begin{cases} u_{n,\varepsilon(n)} \longrightarrow u \text{ dans } (L^1(\Omega))^N \text{ et} \\ \int_\Omega \phi^n(u_{n,\varepsilon(n)})dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(u)dx \,. \end{cases}$$

<u>PROPOSITION 3.12.</u> *Soient $J^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty[$ convexes, continues, $J^n(0) = 0$; on suppose que les familles $(J^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J^{n*})_{n\in\mathbb{N}}$ sont coercives, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$; alors $A_{J^n} \longrightarrow A_J$*

$$(\textit{i.e.} \quad \forall f \in L^2(\Omega) \quad (I+A_{J^n})^{-1}f \longrightarrow (I+A_J)^{-1}f \text{ dans } L^2(\Omega)).$$

<u>Démonstration</u> : Posons $u_n = (I+A_{J^n})^{-1}f$, f fixé dans $L^\infty(\Omega)$ ($(L^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega))$. On a alors $u_n + A_{J^n} u_n \ni f$, soit

$$\Phi^n(u_n) + \Phi^{n*}(f-u_n) = \langle u_n, f-u_n\rangle$$

$$\Phi^n(u_n) + \Phi^{n*}(f-u_n) + |u_n|^2 = \langle f,u_n\rangle \quad (*) .$$

D'où l'on tire $|u_n|^2 \leq C$, $\Phi^n(u_n) \leq C$, $\Phi^{n*}(f-u_n) \leq C$, avec C constante positive indépendante de $n \in \mathbb{N}$.

$$\Phi^n(u_n) = \int_\Omega J^n(\text{grad } u^n)dx \quad \text{et} \quad \Phi^{n*}(f-u_n) = \int_\Omega J^{n*}(w_n)dx \quad \text{avec}$$

$-\operatorname{div} w_n = f - u_n$; tenant compte de la coercivité uniforme des J^n et J^{n*} , les suites $(\text{grad } u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont relativement compactes dans $(L^1(\Omega))^N$ (cf. [2]) ; tenant compte d'autre part de l'injection compacte de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} u_{n_k} \longrightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ et dans } \omega\text{-}L^2(\Omega) \\[2ex] \text{grad } u_{n_k} \rightharpoonup \text{grad } u \text{ dans } \omega\text{-}L^1(\Omega) \\[2ex] w_{n_k} \rightharpoonup w \text{ dans } \omega\text{-}L^1(\Omega) . \end{array} \right.$$

D'après la Proposition précédente, utilisant la condition scs, on aura passant à la limite sur (*)

$$\int_\Omega J(\text{grad } u)dx + \int_\Omega J^*(w)\, dx + \int_\Omega |u|^2\, dx \leq \int_\Omega f.u\, dx$$

et puisque $-\operatorname{div} w_{n_k} = f - u_{n_k}$, à la limite $-\operatorname{div} w = f - u$; tenant compte du fait que $\Phi^*(f-u) \leq \int_\Omega J^*(w)\, dx$ on conclut

$$\Phi(u) + \Phi^*(f-u) = \langle u,f-u\rangle \quad \text{soit} \quad u = (I+A_J)^{-1}f .$$

Donc toute la suite converge, et $(I+A_{J^n})^{-1}f \longrightarrow (I+A_J)^{-1}f$ dans $L^1(\Omega)$ et dans $\omega\text{-}L^2(\Omega)$.

D'autre part tenant compte de l'estimation $\|(I+A_{J^n})^{-1}f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty}$, on conclut à la convergence des résolvantes dans $L^2(\Omega)$, puisque $u_{n_k} \longrightarrow u$ p.p. $x \in \Omega$ et les u_{n_k} restent dominées par une constante (intégrable puisque Ω est borné) ; cette estimation supplémentaire résulte du résultat suivant :

<u>LEMME</u> (P. Bénilan). *L'opérateur* $A_J = \partial\Phi_J$ *vérifie un principe du maximum : soit* $u + \partial\Phi_J u \ni v$; *alors,* $v \leqslant k$ *p.p.*$x \in \Omega \Longrightarrow u \leqslant k$ *p.p.*$x \in \Omega$.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord (en posant $\phi_1(r) = \phi(-r)$ et changeant k en $-k$) que ce principe du maximum entraîne :

$$\begin{cases} |v| \leqslant k \quad \text{p.p.} x \in \Omega \Longrightarrow |u| \leqslant k \quad \text{p.p.} x \in \Omega \\ \text{et donc } |u|_\infty \leqslant |v|_\infty \ . \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{u>k} (u-k)(v-u)\,dx \geqslant 0$; or

$$\int_{u>k} (u-k)(v-u)dx = \int_\Omega (u-T_k u)(v-u)\,dx \qquad \text{où} \qquad T_k r = \begin{vmatrix} r & r\leqslant k \\ k & r\geqslant k \end{vmatrix}$$

$$= \int_\Omega (u-T_k u)\,\partial\Phi_J(u)\,dx$$

$$\geqslant \Phi_J(u) - \Phi_J(T_k u) \qquad , \text{ quantité qui est bien positive.}$$

Nous allons terminer ce paragraphe par quelques résultats concernant la convergence des solutions d'inéquations variationnelles paraboliques :

<u>PROPOSITION 3.13</u>. *Soient* ϕ, $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctionnelles convexes, sci, propres de* H *dans* $]-\infty,+\infty]$ *où* H *est un Hilbert ; on suppose*

(i) $\phi^n \longrightarrow \phi$

(ii) $f_n \longrightarrow f$ *dans* $L^2(0,T;H)$

(iii) $u_{o_n} \longrightarrow u_o$ *avec* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \phi^n(u_{o_n}) < +\infty$.

On désigne par u_n *(resp.* u*) la solution de*

$$\frac{du_n}{dt} + \partial\phi^n(u_n) \ni f_n \ ; \quad u_n(0) = u_{o_n}$$

$$(\text{resp.}) \quad \frac{du}{dt} + \partial\phi(u) \ni f \quad ; \quad u(0) = u_o \ .$$

Alors $u_n \longrightarrow u$ *dans* $\mathscr{C}([0,T];H)$ *et* $\dfrac{du_n}{dt} \rightharpoonup \dfrac{du}{dt}$ *dans* $\omega\text{-}L^2(0,T;H)$.

De plus $A^n = \dfrac{d}{dt} + \partial\phi^n \longrightarrow A = \dfrac{d}{dt} + \partial\phi$ *dans l'ensemble des maximaux monotones sur* $\mathscr{H} = L^2(0,T;H)$.

Démonstration : On se place dans $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ et l'on pose

$$B^n = \frac{d}{dt} \quad \text{avec} \quad D(B^n) = \{u \in W^{1,2}(0,T;H); u(0) = u_{o_n}\} \quad (\text{resp. } B = \dots)$$

$$\Phi^n(u) = \int_o^T \phi^n(u(t))\,dt \,, \quad C^n = \partial\Phi^n \qquad (\text{resp. } \Phi = \dots)$$

Montrons que l'on est dans les conditions d'application de la Proposition 3.7 . L'opérateur B^n est maximal monotone et $B^n \longrightarrow B$: cela découle directement du calcul explicite de ses résolvantes ; soit $v \in \mathcal{H}$

$$v_\lambda^n(t) = (I+\lambda B^n)^{-1} v(t) = e^{-t/\lambda}\, u_{o_n} + 1/\lambda \int_o^t e^{1/\lambda(s-t)} v(s)\,ds \,.$$

D'autre part Φ^n est convexe, sci, propre sur $\mathcal{H}$ et l'on obtient la majoration (cf. H. Brezis [8])

$$\Phi^n((I+\lambda B^n)^{-1} v) \leq \lambda\, \phi^n(u_{o_n}) + \Phi^n(v) \,.$$

Puisque Φ^n converge vers Φ au sens de Mosco (d'après la Proposition 3.4) on déduit (Proposition 3.7) que

$$A^n = B^n + \partial\Phi^n \longrightarrow A = B + \partial\Phi \quad (\text{soit formellement } \frac{d}{dt} + \partial\phi^n \longrightarrow \frac{d}{dt} + \partial\phi).$$

On a $f \in (\frac{d}{dt} + \partial\phi)u$ i.e. $f \in Au$; il existe donc $(A^n \longrightarrow A)$ une suite $v^n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{H}$, $g^n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{H}$ avec $g^n \in A^n u_n$;

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dv^n}{dt} + \partial\phi^n(v^n) \ni g_n \\[2ex] \dfrac{du^n}{dt} + \partial\phi^n(u^n) \ni f_n \end{array}\right.$$

ce qui entraîne $|u^n - v^n|_\infty \leq |f_n - g_n|_1$; donc $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(0,T;H)$.

D'autre part $\frac{du^n}{dt} + \partial\phi^n(u_n) \ni f^n \quad u^n(0) = u_{o_n}$ entraîne

$$\left|\frac{du^n}{dt}\right|_{L^2} \leq |f^n| + \sqrt{\phi^n(u_o^n)} \leq C \,.$$

Enfin $\frac{1}{2}\,|u_n(t)-u(t)|^2 = \frac{1}{2}|u_{o_n} - u_o|^2 + \int_o^t \langle u_n(\tau)-u(\tau), \frac{du_n}{dt}(\tau) - \frac{du}{dt}(\tau)\rangle\,d\tau$.

$$\frac{1}{2}|u_n(t)-u(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u_{n_o}-u_o|^2 + 2C|u_n-u|_{L^2}$$

ce qui entraîne $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}(0,T;H)$ et $\frac{du^n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ dans ω-$L^2(0,T;H)$.

Exemples : Il suffit de reprendre les exemples traités :

1°) Soient $\beta^n \longrightarrow \beta$, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $u_{o_n} \longrightarrow u_o$ dans $L^2(\Omega)$ avec $\phi^n(u_{o_n}) \leqslant C$ (où $\phi^n(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\text{grad } u|^2\, dx + \int_\Omega j^n(u)\, dx$) , et soient u_n, u le solutions respectives de

$$\left|\begin{array}{l} \frac{du^n}{dt} - \Delta u^n + \beta^n(u^n) \ni f^n \\ \\ u^n/_{[0,T]\times\Gamma} = 0 \\ \\ u^n(0,.) = u_{o_n} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \frac{du}{dt} - \Delta u + \beta(u) \ni f \\ \\ u/_{[0,T]\times\Gamma} = 0 \\ \\ u(0,.) = u_o\ . \end{array}\right.$$

Alors $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$ et $\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ dans ω-$L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

2°) Soient $\beta^n \longrightarrow \beta$ $(R(\beta^n) = R(\beta) = \mathbb{R})$, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et $u_{o_n} \longrightarrow u_o$ dans $H^{-1}(\Omega)$ avec $\int_\Omega j^n(u_{o_n})dx \leqslant C$ et soient u_n, u les solutions respectives de

$$\left|\begin{array}{l} \frac{du^n}{dt} - \Delta\beta^n u_n = f_n \\ \\ u^n(0,.) = u_{o_n} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \frac{du}{dt} - \Delta\beta u = f \\ \\ u(0,.) = u_o\ . \end{array}\right.$$

Alors $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}([0,T];H^{-1}(\Omega))$ et $\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ dans ω-$L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

3°) Soient $\beta^n \longrightarrow \beta$, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_{o_n} \longrightarrow u_o$ dans $L^2(\Omega)$ avec $\phi^n(u_{o_n}) \leqslant C$ (où $\phi^n(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\text{grad } u|^2\, dx + \int_\Gamma j^n(u)\, dx$) et soient u_n, u les solutions respectives de

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{du^n}{dt} - \Delta u^n = f^n & \Omega \times [0,T] \\ -\dfrac{\partial u^n}{\partial \nu} \in \beta^n(u^n) & \Gamma \times [0,T] \\ u^n(0,.) = u_{o_n} & \Omega \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f & \Omega \times [0,T] \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) & \Gamma \times [0,T] \\ u(0,.) = u_o & \Omega \end{array}\right.$$

Alors $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}(0,T;L^2(\Omega))$ et $\dfrac{du_n}{dt} \rightharpoonup \dfrac{du}{dt}$ dans $\omega\text{-}L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Remarque 3.10. On pourrait dans les résultats précédents supprimer la condition $\phi^n(u_{o_n}) \leqslant C$; mais la convergence de u_n vers u ne serait pas aussi forte.

Nous allons à présent montrer le résultat suivant, qui comme corollaire donnera (en particulier) des renseignements sur la convergence des solutions fortes d'inéquations variationnelles paraboliques du type

$$\frac{du_n}{dt} + \partial\phi^n(t,u_n(t)) \ni f_n(t) \ .$$

THEOREME 3.3. *Soit A monotone de graphe faiblement fermé et $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'opérateurs maximaux monotones, $B^n \longrightarrow B$ dans $\mathfrak{M}$; soit $f_n \longrightarrow f$ dans H ; on suppose qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n solution de*

$$Au_n + B^n u_n \ni f_n \quad \text{et tels que}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |Au_n| < +\infty \ .$$

Alors, toute valeur d'adhérence faible u de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$Au + Bu \ni f \ .$$

Démonstration : Notons $u_n \rightharpoonup u$ dans w-H et $\eta_n \in Au_n$, $f_n - \eta_n \in B^n u_n$ avec en outre $\eta_n \longrightarrow \eta$ dans w-H ; puisque A est de graphe faiblement fermé, on a $\eta \in Au$.

Soit $(\xi,\gamma) \in B$ et $(\xi_n,\gamma_n) \in B^n$, $\xi_n \longrightarrow \xi$ et $\gamma_n \longrightarrow \gamma$; écrivant la monotonie de B^n aux points u_n et ξ_n

$$\langle f_n - \eta_n - \gamma_n \ , \ u_n - \xi_n \rangle \geqslant 0 \quad \text{d'où}$$

$<f - \gamma, u - \xi> + <\eta, \xi> \geq \overline{\lim} <\eta_n, u_n>$.

Or $<\eta_n - \eta, u_n - u> \geq 0$ d'après la monotonie de A ; par conséquent $\underline{\lim}<\eta_n, u_n> \geq <\eta, u>$ et reportant dans l'inégalité précédente, on obtient $\forall\ (\xi,\gamma) \in B \qquad <(f-\eta) - \gamma, u - \xi> \geq 0$ et tenant compte de la maximale monotonie de B , $f - \eta \in Bu$; u est donc solution de $Au + Bu \ni f$.

Si on a en outre unicité pour cette dernière équation, on obtient que toute la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans w-H , la limite étant solution de cette équation.

COROLLAIRE 3.1. *Soient* $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ϕ *une suite d'intégrandes convexes normales sur* H , *et* $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, Φ *les fonctionnelles associées sur* $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$; *(i.e.* $\Phi^n(u) = \int_0^T \phi^n(t,u(t))dt$, $\Phi(u) = \int_0^T \phi(t,u(t))dt)$; *on suppose*

a) Φ^n , Φ *sont sci propres sur* $\mathcal{H}$ *et* $\partial\Phi^n \longrightarrow \partial\Phi$ *dans* $\mathcal{H}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe* u_n *solution de*

$$\frac{du_n}{dt}(t) + \partial\phi^n(t,u_n(t)) \ni f_n(t) \ ; \quad u_n(0) = u_0$$

(où f_n *et* u_0 *sont donnés,* $f_n \longrightarrow f$ *dans* $\mathcal{H}$ *) avec en outre*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_{\mathcal{H}} < +\infty;$$

alors u_n *converge faiblement dans* $W^{1,2}(0,T;H)$ *et sa limite* u *est solution forte de* $\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$; $u(0) = u_0$.

Démonstration : On applique le Théorème 3.3 en se plaçant dans l'espace $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$. On prend d'autre part $A = \frac{d}{dt}$ avec $D(A) = \{u \in W^{1,2}(0,T;H)$; $u(0) = u_0\}$ et $B^n = \partial\Phi^n$, $B = \partial\Phi$; compte tenu de la Proposition 3.3 l'équation $\frac{du_n}{dt} + \partial\phi^n(t,u(t) \ni f_n(t)$; $u_n(0) = u_0$ s'écrit

$$Au_n + B^n u_n \ni f_n \quad \text{dans } \mathcal{H} .$$

Notant que $\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq |u_0| + \sqrt{T}\ \left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_{\mathcal{H}}$ et que l'équation

$\frac{du(t)}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$; $u(0) = u_o$ admet au plus une solution, on conclut à la convergence de u_n vers la solution u de cette équation (et donc à l'existence de la solution du problème limite!).

Exemples : 1°) La condition $\partial\Phi^n \to \partial\Phi$ est vérifiée si (cf. Proposition 3.4)

a) p.p.t $\phi^n(t,.) \to \phi(t,.)$ (au sens de Mosco dans H) .

b) il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow{\mathcal{H}} u$, $v_n \xrightarrow{\mathcal{H}} v$,

$v_n(t) \in \partial\phi^n(t,u_n(t))$ p.p.t , $v(t) \in \partial\phi(t,u(t))$ p.p.t.

2°) Cette même condition est vérifiée si Φ_n et Φ sont propres et

a) p.p.t $\phi^n(t,.)$ converge en croissant vers $\phi(t,.)$.

b) $\exists\, \alpha > 0$, $\exists\, \beta \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\phi^n(t,x) + \alpha|x|^2 + \beta(t) \geq 0$ p.p.t $\in]0,T[$.

Il suffit de remarquer que sous l'hypothèse b) les fonctionnelles Φ^n et Φ sont sci sur $\mathcal{H}$ (Proposition 3.3) ; d'après Beppo-Lévi, on obtient que $\Phi^n(u)$ croît vers $\Phi(u)$ pour tout u dans $\mathcal{H}$, et donc, que Φ_n converge vers Φ au sens de Mosco dans $\mathcal{H}$ (ce qui entraîne que $\partial\Phi_n \to \partial\Phi$ d'après le Théorème 1.1).

ADDITIF CH.III

Opérateurs maximaux monotones, locaux, dans $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$.

(H désigne un espace de Hilbert réel séparable).

Définition. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone de $\mathcal{H}$; on dira que $\mathcal{A}$ est local si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $]0,T[$, pour tout u_1 et u_2 de $\mathcal{H}$, on a

$$(u_1 = u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O}) \Longrightarrow ((I+\mathcal{A})^{-1}u_1 = (I+\mathcal{A})^{-1}u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O}) .$$

PROPOSITION. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ est local si et seulement si il existe une famille $(A(t))_{t\in[0,T]}$ d'opérateurs maximaux monotones dans H tels que :*

$$\mathcal{A} = \{(u,v)\in\mathcal{H} \,/\, \text{p.p.} t \in]0,T[\quad v(t) \in A(t,u(t))\} .$$

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H ; posons $u_n(.) = (I+\mathcal{A})^{-1}x_n$.

Tenant compte du caractère local de $\mathcal{A}$, pour tout intervalle I de $]0,T]$, on aura

$$\int_I \langle u_n(.) - u_m(.), x_n - x_m\rangle \, dt \geq \int_I |u_n(.) - u_m(.)|^2 \, dt$$

et donc

$$\langle u_n(t) - u_m(t), x_n - x_m\rangle \geq |u_n(t) - u_m(t)|^2 \quad \text{p.p.} t \in]0,T[\ .$$

Il existe donc $E \subset [0,T]$ négligeable tel que :

$$\forall t \in [0,T] \setminus E \ , \ \forall m,n \in \mathbb{N} \quad \langle u_n(t) - u_m(t), x_n - x_m\rangle \geq |u_n(t) - u_m(t)|^2 \ .$$

Pour $t \in [0,T] \setminus E$, t fixé, l'application $x_n \longmapsto u_n(t)$ est une contraction définie sur un sous-ensemble dense de H : elle se prolonge en une contraction $J(t)$ de H dans H , vérifiant en outre

$$\forall t \in [0,T] \setminus E \ , \quad \forall x,y \in H \quad \langle J(t)x - J(t)y, x - y\rangle \geq |J(t)x - J(t)y|^2 \ .$$

La contraction $J(t)$ $(t \in [0,T] \setminus E)$ est donc ferme (cf. [10]) et l'opérateur $A(t) = (J(t))^{-1} - I$ est maximal monotone.

Posons alors $\mathcal{B} = \{(u,v) \in \mathcal{H} \ / \ \text{p.p.} t \in]0,T[\quad v(t) \in A(t,u(t))\}$. Si l'on montre l'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, tenant compte de la monotonie de l'opérateur $\mathcal{B}$ et de la maximale monotonie de l'opérateur $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, on en déduira l'égalité $\mathcal{A} = \mathcal{B}$; posons

$$\Delta = \{u \in \mathcal{H} \ / \ u \text{ à valeurs dans } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \ .$$

Tenant compte du caractère local de $\mathcal{A}$ et de la définition des $(A(t))_{t \in [0,T]}$

$$\forall u \in \Delta \qquad (I+\mathcal{A})^{-1} u = (I+\mathcal{B})^{-1} u \ .$$

Soit $(u,f) \in \mathcal{A}$ et $v = u + f$; tenant compte de la densité de Δ dans $\mathcal{H}$, il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n \in \Delta \ \text{ et } \ v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} v \ \text{ dans } \mathcal{H} \ .$$

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad (I+\mathcal{A})^{-1} v_n = (I+\mathcal{B})^{-1} v_n = \tilde{u}_n$

avec $\tilde{u}_n + \mathcal{B}\tilde{u}_n \ni v_n$ et $\tilde{u}_n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} (I+\mathcal{A})^{-1}v = u$ dans $\mathcal{H}$; par conséquent, p.p.$t \in]0,T[$ $A(t,\tilde{u}_n(t)) \ni v_n(t) - \tilde{u}_n(t)$ et par passage à la limite, tenant compte de la fermeture de l'opérateur $A(t)$,

p.p.$t \in]0,T[$ $A(t,u(t)) \ni v(t) - u(t) = f(t)$, c'est-à-dire que $(u,f) \in \mathcal{B}$

L'autre implication est immédiate : soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone défini à partir d'une famille $(A(t))_{t\in[0,T]}$ d'opérateurs maximaux monotones dans H , on a

$$(I+\mathcal{A})^{-1}u = (I+A(.))^{-1}u(.)$$

et $\mathcal{A}$ est donc local.

<u>COROLLAIRE</u>. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur local (maximal monotone) dans $\mathcal{H}$; étant donné $\mathcal{O}$ ouvert de $]0,T[$ et u_1, u_2 dans $\mathcal{H}$*

a) $(u_1 = u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O}) \Longrightarrow (\forall \lambda>0 \quad \mathcal{A}_\lambda u_1 = \mathcal{A}_\lambda u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O})$

b) $(u_1 \text{ et } u_2 \in D(\mathcal{A}) \text{ et } u_1 = u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O}) \Longrightarrow (\mathcal{A}^o u_1 = \mathcal{A}^o u_2 \text{ p.p. } \mathcal{O})$.

On remarque en outre qu'un opérateur est local si et seulement si son inverse l'est aussi.

<u>PROPOSITION</u>. *Soit $\mathcal{A}$ un sous-différentiel dans $\mathcal{H}$;*
$\mathcal{A}$ est local si et seulement si il existe une intégrande convexe normale ϕ sur $[0,T] \times H$, telle que, désignant par $\Phi(u) = \int_0^T \phi(t,u(t))dt$ la fonctionnelle associée sur $\mathcal{H}$, on ait $\mathcal{A} = \partial\Phi$ dans $\mathcal{H}$; on a de plus

$$\mathcal{A} = \{(u,v)\in \mathcal{H} \ / \ \text{p.p.}t \quad v(t) \in \partial\phi(t,u(t))\} \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{A}$ un maximal monotone local dans $\mathcal{H}$:

$\mathcal{A} = \{(u,v)\in \mathcal{H} \ / \ \text{p.p.}t \quad v(t) \in A(t,u(t))\}$; on se ramène à montrer que si $\mathcal{A}$ est en outre un sous-différentiel dans $\mathcal{H}$, il en est de même pour les $(A(t,.))_{t\in[0,T]}$ dans H , presque pour tout t.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H ; étant donnés $\xi_o, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}, \xi_p = \xi_o$ un cycle d'éléments pris dans cette suite, et tenant compte de la cyclique monotonie de $\mathcal{A}_1$ (si $\mathcal{A} = \partial\Phi$, $\mathcal{A}_1 = \partial\Phi_1$ où $\Phi_1 = \Phi \nabla \frac{1}{2}|.|^2$)

$$\forall I \subset]0,T[\quad \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{i=1}^{p} <\xi_i - \xi_{i-1}, A_1(t,\xi_i)> dt \geqslant 0$$

et donc p.p. $t \in]0,T[\quad \sum_{i=1}^{p} <\xi_i - \xi_{i-1}, A_1(t,\xi_i)> \geqslant 0$.

Prenant t point de Lebesgue commun aux fonctions $t \to A_1(t,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, on en déduit l'existence d'un ensemble E négligeable tel que :

$$\forall t \in [0,T] \setminus E \quad \forall (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_p = \xi_0) \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\sum_{i=1}^{p} <\xi_i - \xi_{i-1}, A_1(t,\xi_i)> \geqslant 0 .$$

Par densité, on obtient la même propriété pour toute suite cyclique dans H , et pour tout t dans $[0,T] \setminus E$; l'opérateur $A_1(t,.)$ est maximal monotone et cycliquement monotone ; c'est donc un sous différentiel.

On termine en remarquant qu'un opérateur maximal monotone A tel que A_1 est un sous-differentiel, est lui-même un sous-différentiel :

$$\text{si} \quad A_1 = \partial\phi \quad \text{alors} \quad A = \partial(\phi^* - \tfrac{1}{2}|.|^2)^* \quad .$$

COROLLAIRE. *L'ensemble des opérateurs maximaux locaux est fermé dans l'ensemble des maximaux monotones de $\mathcal{H}$ pour la topologie de la convergence des résolvantes. La famille des sous-différentiels locaux est fermée pour la même topologie.*

Démonstration : La propriété d'être local pour un maximal monotone est évidemment stable pour la R-convergence ; la famille des sous-différentiels locaux apparaît alors comme l'intersection de deux fermés, et est donc fermée ; (on retrouve ainsi le résultat de la Proposition 3.5).

BIBLIOGRAPHIE.

H. ATTOUCH

[0] *Convergence d'opérateurs maximaux monotones et inéquations variationnelles.* Séminaire Lions-Brézis, Paris VI, 1975-76.

[1] *Méthode du Produit Scalaire Variable.* Séminaire sur les semi-groupes et les équations d'évolution (1972-74). Publications Mathématiques d'Orsay.

H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN

[2] *Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires.* (A paraître).

[3] *Problèmes d'Evolution dans les Hilberts et Applications.* Journal de Mathématiques pures et appliquées 54, 1975, p.53 à 74.

H. ATTOUCH, P. BENILAN, A. DAMLAMIAN, C. PICARD

[4] *Equations d'Evolution avec Condition Unilatérale.* C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 279, p.607-609 (1974).

P. BENILAN

[5] *Equations d'Evolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications.* (Thèse). Publications Mathématiques d'Orsay n°25 (1972).

[6] Cours de 3ème cycle ; Paris VI 1973-74 et 1974-75.

H. BERLIOCCHI et J.M. LASRY

[7] *Intégrandes Normales et Mesures Paramétrées en Calcul des Variations.* Bull. Soc. Math. France 101, 1973, p.129-184.

H. BREZIS

[8] *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Lecture Notes 5 North-Holland (1972).

[9] *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations. Contributions to Nonlinear Analysis.* E. Zarantonello ed., Academic Press (1971), p.101-156.

[10] Cours de 3ème cycle ; Paris VI 1974-75 et 1971-72.

C. CASTAING

[11] *Sur les multi-applications mesurables.*
Revue Inf. Rech. Op.1 (1967) p.91-126.

[12] *Intégrandes convexes duales.*
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1973 ; Exposé N°6.

[13] *Problèmes de mesurabilité liés aux opérateurs monotones.*
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1975 ; Exposé N°1.

C. CASTAING et M. VALADIER

[14] *Livre de synthèse sur les multiapplications mesurables et leurs applications.*
(A paraître).

A. DAMLAMIAN

[15] *Non linear evolution equations with variable norm .* Thesis Harvard.

J.L. JOLY

[16] *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes.*
Thèse Grenoble 1970.

N. KENMOCHI

[17] *The semi-discretisation method and nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities.*
Proc. jap. Acad. 50(1974) p.714-717.

G. MINTY

[18] *On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder continuous and monotone functions.*
Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) p.334-339.

J.J. MOREAU

[19] *Fonctionnelles convexes.*
Séminaire sur les équations aux dérivées partielles II, Collège de France 1966-67.

[20] *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien.*
Bull. Soc. Math. France 93 , 1965, p.273-299.

U. MOSCO

[21] *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.*
Advances Math. 3 (1969) p.510-585.

[22] *On the continuity of the Young-Fenchel Transformation.*
Journal of Math. Analysis and App. 35, p.518-535 (1971).

[23] Cours au C.I.M.E.

R. ROBERT

[24] *Généralisation aux opérateurs monotones des théorèmes de différentiabilité d'Asplund et application à la dépendance continue des solutions de certaines équations non linéaires.*
(A paraître).

R.T. ROCKAFELLAR

[25] *Integrals which are convex functionals.*
Pacific J. Math. 24 (1968) p.525-539.

[26] *Mesurable dependance of convex sets and functions on parameters.*
J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) p.4-25.

[27] *Convex Integral- Functionals and Duality ; Contributions to Nonlinear functional Analysis.*
Acad. Press. 1971 p.215-236.

M.F. SAINTE-BEUVE

[28] *Sur la généralisation d'un théorème de section mesurable de Von Neumann-Aumann.*
C.R.A.S. 276 (1973) p.1297-1300.

L. WILLIAMS, J.H. WELLS, T.L. HAYDEN

[29] *On the existence of Lipschitz-Hölder maps on* L^p *spaces.*
Studia Mathematica T.39 (1971).