

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

27.356



n° 224

Suites d'interpolation pour les classes de  
Bergman de la boule et du polydisque de  $\mathbb{C}^n$

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay  
1977

27.356



n° 224

Suites d'interpolation pour les classes de  
Bergman de la boule et du polydisque de  $\mathbb{C}^n$

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay  
1977

## INTRODUCTION

Soit  $\mathbb{D}^n = \{\underline{z} = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n, |z^i| < 1\}$

le polydisque de  $\mathbb{C}^n$  et  $\lambda_n$  la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{C}^n$  normalisée sur  $\mathbb{D}^n$ .

Pour  $p > 0$ , on définit les espaces de Bergman  $A^p(\lambda_n)$  de la manière suivante :

$A^p(\lambda_n)$  est l'espace des fonctions analytiques dans  $\mathbb{D}^n$  telles que :

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}^n} |f|^p d\lambda_n < \infty ;$$

si  $\sigma = \{\underline{z}_k, k \in \mathbb{N}\}$  est une suite de points de  $\mathbb{D}^n$ , on définit l'opérateur  $T_p$  de  $A^p(\lambda_n)$  dans l'espace des suites par :

$$\forall f \in A^p(\lambda_n), T_p f = \{((1 - |\underline{z}_k|^2))^{\frac{2}{p}} f(\underline{z}_k), k \in \mathbb{N}\}, \text{ où } ((1 - |\underline{z}_k|^2)) = \prod_{i=1}^n (1 - |z_k^i|^2).$$

On dit que  $\sigma$  est d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  si  $T_p(A^p(\lambda_n))$  contient  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

On dit que  $\sigma$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  si, de plus,  $T_p$  est borné de  $A^p(\lambda_n)$  dans  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

On dit que  $\sigma$  possède la propriété d'extension linéaire bornée s'il existe un opérateur linéaire borné de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_n)$  tel que  $T_p U_p$  soit l'identité de  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

Enfin on dit que la suite  $\sigma$  est séparée s'il existe un réel positif  $\delta$  tel que la distance de Gleason [8] de 2 points distincts de  $\sigma$  soit minorée par  $\delta$ .

L. Carleson [5] a caractérisé les suites d'interpolation  $A^\infty(\lambda_1)$  ; le premier résultat sur les suites d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ , où  $p$  est fini est un

contre-exemple dû à D. Amar. Sarroste [1] et montrant qu'il existe une suite fortement d'interpolation  $A^2(\lambda_1)$  et qui n'est pas d'interpolation  $A^\infty(\lambda_1)$  ; ce qui souligne la différence avec le cas des suites d'interpolation pour les espaces de Hardy du disque [14].

L'essentiel des idées du présent travail se trouve dans [2].

Le but qu'on se propose est de montrer les résultats suivants, qui sont à rapprocher de ceux de [4] :

THEOREME 1. Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}^n$  ; alors pour tout  $p$  positif,  $\sigma$  est une réunion finie de suites  $\sigma_i$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  ; de plus si  $p \geq 1$ ,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_n)$ .

Ce résultat est le meilleur possible à cause du théorème suivant établi grâce aux travaux de C. Horowitz [3] sur les zéros des fonctions des classes de Bergman.

THEOREME 2. Pour tout  $p > 0$ , il existe deux suites  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  telles que  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  soit séparée mais ne soit pas d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

On obtient encore un raffinement du théorème de D. Amar. Sarroste.

THEOREME 3. Pour tout  $p$  positif, il existe  $q > p$  et une suite  $\sigma$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  et qui n'est pas d'interpolation  $A^q(\lambda_1)$ .

Grâce à la méthode déjà utilisée dans [1] on démontre des théorèmes analogues aux théorèmes 2 et 3 pour les classes de Hardy du polydisque et de la boule unité  $B_n$  de  $\mathbb{C}^n$  si  $n \geq 2$ .

On a aussi les mêmes résultats pour les classes de Bergman de la boule unité  $B_n$  de  $\mathbb{C}^n$ .

THEOREME 4. Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $B_n$  ; alors pour tout  $p$  positif,  $\sigma$  est une réunion finie de suites  $\sigma_i$  fortement d'interpolation  $A^p(B_n)$  ;

de plus si  $p \geq 1$ ,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\mathbb{B}_n)$ .

Utilisant exactement la même méthode que dans [3] on obtient aussi

THEOREME 5. Soit  $\sigma$  une suite d'interpolation  $A^\infty(\mathbb{B}_n)$  (resp.  $A^\infty(\mathbb{D}^n)$ ) alors  
 $\forall p > 0$ ,  $\sigma$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\mathbb{B}_n)$   
 (resp.  $A^p(\mathbb{D}^n)$ ).

Le même théorème, avec les mêmes preuves est valable pour les classes de Hardy de la boule et du polydisque [3] de  $\mathbb{T}^n$  généralisant ainsi des théorèmes de H. Shapiro et A.L. Shields [14] et Kabaila [11] obtenu pour  $n=1$ .

La preuve du théorème 1 donnée ici, plus simple que la preuve originelle, m'a été suggérée par A. Bonami qui m'a indiqué le lemme 2.1.2 de [7].



## CHAPITRE I

### 1.1. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

Soient  $\mathbb{B}_n$  la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ ,

$$\mathbb{B}_n = \{ \underline{z} = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad \sum_{i=1}^n |z^i|^2 < 1 \},$$

$$S_n \text{ le bord de } \mathbb{B}_n, \quad S_n = \{ \underline{z} = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad \sum_{i=1}^n |z^i|^2 = 1 \},$$

$\lambda_n$  la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{2n}$  normalisée sur  $\mathbb{B}_n$ .

$\sigma_n$  la mesure de Lebesgue normalisée sur  $S_n$ .

Soit  $p > 0$  ; on définit l'espace de Hardy :

$H^p(\sigma_n)$  est l'espace des fonctions  $f$  analytiques dans  $\mathbb{B}_n$  et telles que

$$\sup_{r < 1} \int_{S_n} |f(r\underline{z})|^p d\sigma_n(\underline{z}) = \|f\|_p^p < \infty$$

et  $H^\infty(\sigma_n)$  est l'espace des fonctions analytiques et bornées dans  $\mathbb{B}_n$ .

On définit de même les espaces de Bergman :

$A^p(\lambda_n)$  est l'espace des fonctions analytiques dans  $\mathbb{B}_n$  telles que

$$\int_{\mathbb{B}_n} |f(\underline{z})|^p d\lambda_n(\underline{z}) = \|f\|_p^p < \infty$$

et  $H^\infty(\sigma_n) = A^\infty(\lambda_n)$ .

Soit  $\sigma$  une suite,  $\sigma = \{ \underline{z}_i, i \in \mathbb{N} \}$  dans  $\mathbb{B}_n$  et soit  $p$  un réel positif

ou  $p = +\infty$ .

On définit deux opérateurs  $T_p^A$  et  $T_p^H$  à valeurs dans l'espace des suites.

$$\forall f \in A^p(\lambda_n), \quad T_p^A f = \{ (1 - |\underline{z}_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} f(\underline{z}_i), i \in \mathbb{N} \}$$

$$\forall f \in H^p(\sigma_n), T_p^H f = \{(1 - |z_i|^2)^{\frac{n}{p}} f(z_i), i \in \mathbb{N}\}.$$

On peut alors donner les définitions suivantes :

On dit que  $\sigma$  est d'interpolation  $A^p$  si  $T_p^A(A^p)$  contient  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

On dit que  $\sigma$  est fortement d'interpolation  $A^p$  si de plus  $T_p^A$  est borné de  $A^p$  dans  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

On dit que  $\sigma$  a la propriété d'extension linéaire bornée s'il existe un opérateur  $U_p^A$ , borné de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_n)$  tel que  $T_p^A U_p^A$  soit l'identité de  $\ell^p(\mathbb{N})$ .

On donne les définitions analogues dans le cas des classes de Hardy avec l'opérateur  $T_p^H$ .

Soit  $z$  un point de  $B_n$  et soit  $p > 1$  ;

$e_z^{(p)}$  est le noyau de Cauchy Bergman de  $z$  normalisé dans  $A^p(\lambda_n)$ .

$$e_z^{(p)}(\zeta) = c(z, p, n) \frac{(1 - |z|^2)^{\frac{n+1}{q}}}{(1 - \bar{z} \cdot \zeta)^{n+1}} \quad \text{où}$$

$q$  est le conjugué de  $p$

$$\bar{z} \cdot \zeta = \sum_{i=1}^n \bar{z}^i \zeta^i.$$

$c(z, p, n)$  est un réel tel qu'il existe 2 réels positifs indépendants de  $z$  vérifiant :

$$(1.1) \quad 0 < \alpha(p, n) \leq c(z, p, n) \leq \beta(p, n).$$

On note  $\Sigma^{(p)}$  la suite  $\Sigma^{(p)} = \{e_z^{(p)}, z \in \sigma\}$  et  $E_\sigma^{(p)}$  le sous-espace fermé de  $A^p(\lambda_n)$  engendré par  $\Sigma^{(p)}$ .

On rappelle que  $\Sigma^{(p)}$  est une base de  $E_\sigma^{(p)}$  équivalente à la base canonique de  $\ell^p(\mathbb{N})$  si on a la relation :

$$(1.2) \quad \exists D > 0, \forall a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N}),$$

$$\frac{1}{D} \|a\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{z_i}^{(p)} \right\|_p \leq D \|a\|_p.$$

On peut énoncer le lemme de dualité suivant  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$  :



LEMME 1.1.1. La suite  $\sigma$  de  $B_n$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  si et seulement si  $\Sigma^{(q)}$  est une base de  $E_\sigma^{(q)}$  équivalente à la base canonique de  $\ell^q(\mathbb{N})$ .

Preuve. Supposons que  $\sigma$  soit fortement d'interpolation  $A^p$ ; on considère

$$a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\} \in \ell^q(\mathbb{N}) \text{ et la fonction } f \text{ définie par } f(\underline{z}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\underline{z}_i}^{(q)}(\underline{z});$$

on va calculer la norme de  $f$  dans  $A^q(\lambda_n)$  en utilisant le fait que le dual de  $A^q(\lambda_n)$  est  $A^p(\lambda_n)$ , propriété qui sera démontrée au paragraphe suivant.

On a donc  $\|f\|_q \leq B_q \sup_{g \in A^p, \|g\|_p=1} \left| \int_{B_n} g \bar{f} d\lambda_n \right|$  où  $B_q$  est une constante.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_n} g \bar{f} d\lambda_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \int_{B_n} g \bar{e}_{\underline{z}_i}^{(q)} d\lambda_n \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i c(\underline{z}_i) (1 - |z_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(\underline{z}_i) \right| \end{aligned}$$

par Hölder il vient :

$$\left| \int_{B_n} g \bar{f} d\lambda_n \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\bar{a}_i c(\underline{z}_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 - |z_i|^2)^{n+1} |g(\underline{z}_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilisant (1.1) et l'hypothèse que  $T_p^A$  est borné par  $c > 0$  ( $\sigma$  étant fortement d'interpolation  $A^p$ ) on a :

$$\|f\|_q \leq B_q c \beta(q) \|a\|_q.$$

Réciproquement si  $T_p^A$  est continu et surjectif, il existe  $g \in A^p(\lambda_n)$

tel que

$$(1 - |z_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(\underline{z}_i) = \bar{a}_i |a_i|^{q-2}$$

$$\|g\|_p \leq D_1 \|a\|_q^{q-1} \text{ où } D_1 \text{ est une constante indépendante de } a \text{ (d'après}$$

le théorème de l'application ouverte).

On a donc :

$$\left| \int g \bar{f} d\lambda_n \right| \leq \|f\|_q \|g\|_p \leq D_1 \|a\|_q^{q-1} \|f\|_q$$

$$\text{d'où } \|f\|_q \geq \frac{1}{D_1 \|a\|_q^{q-1}} \sum_{i=1}^{\infty} |c(\underline{z}_i)| |a_i|^q$$



d'où d'après (1.1)  $\|f\|_q \geq \frac{\alpha}{D_1} \|a\|_q$ .

Supposons maintenant que  $\Sigma^{(q)}$  soit une base de  $E_\sigma^{(q)}$  équivalente à la

base canonique de  $\ell^q(\mathbb{N})$  et soit  $g \in A^p$ ; on a

$$\begin{aligned} \|T_p^A g\|_p &= \sup_{a \in \ell^q(\mathbb{N}), \|a\|_q=1} \left| \sum a_i (1 - |z_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} g(z_i) \right| \\ &= \sup_{a \in \ell^q(\mathbb{N}), \|a\|_q=1} \left| \int_{\mathbb{B}_n} \bar{f} g d\lambda_n \right| \end{aligned}$$

où l'on a posé  $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c(\underline{z}_i)^{-1} e_{\underline{z}_i}^{(q)}$ .

D'après l'hypothèse  $\|f\|_q \leq \frac{D}{\alpha} \|a\|_q$ , d'où :

$$\|T_p^A g\|_p \leq \frac{D}{\alpha} \|g\|_p.$$

Pour obtenir l'autre inégalité, il suffit de montrer que l'adjoint  $T_p^{A*}$

de  $T_p^A$  vérifie  $\|T_p^{A*} a\|_q \geq \frac{1}{D\beta} \|a\|_q$ ; mais pour  $a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\} \in \ell^q(\mathbb{N})$  on a :

$$T_p^{A*} a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c^{-1}(\underline{z}_i) e_{\underline{z}_i}^{(q)} \quad \text{d'où}$$

$$\|T_p^{A*} a\| \geq \frac{1}{D\beta} \|a\|_q \quad \text{grâce à (1.1)}$$

et l'hypothèse que  $\Sigma^{(q)}$  est une base de  $E_\sigma^{(q)}$  équivalente à la base canonique de  $\ell^q(\mathbb{N})$ .

Nous aurons aussi besoin de la notion suivante :

Soient  $\sigma$  une suite dans  $\mathbb{B}_n$ ,  $\sigma = \{z_i, i \in \mathbb{N}\}$ ,

$p$  un réel plus grand que 1 et  $q$  le conjugué de  $p$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ); on dit que

$\sigma$  est strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  si  $\sigma$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  et si de plus le dual de  $E_\sigma^{(q)}$  est isomorphe à  $E_\sigma^{(p)}$ .

On a le lemme

LEMME 1.1.2. Si  $\sigma$  est une suite strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  dans  $\mathbb{B}_n$ , elle possède la propriété d'extension linéaire bornée.



Preuve. Puisque  $\Sigma^{(q)}$  est une base de  $E_{\sigma}^{(q)}$  équivalente à la base canonique de  $\ell^q(\mathbb{N})$ , il existe un opérateur bicontinu  $Q$  de  $\ell^q(\mathbb{N})$  sur  $E_{\sigma}^{(q)}$  tel que, si on appelle  $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}\}$  la base canonique de  $\ell^q(\mathbb{N})$ , on a

$$\forall \underline{z}_i \in \sigma, Q\varepsilon_i = e_{\underline{z}_i}.$$

Par dualité on en déduit un opérateur  $Q^{-1*}$  borné de  $\ell^p(\mathbb{N})$  sur le dual de  $E_{\sigma}^{(q)}$ , c'est-à-dire par hypothèse sur  $E_{\sigma}^{(p)}$ ; notons  $\{\tilde{\varepsilon}_i, i \in \mathbb{N}\}$  la base canonique de  $\ell^p(\mathbb{N})$ ; pour  $i \in \mathbb{N}$  on pose  $\varphi_i = Q^{-1*}\tilde{\varepsilon}_i$ .

La suite  $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$  est une base de  $E_{\sigma}^{(p)}$  équivalente à la base  $\{\tilde{\varepsilon}_i, i \in \mathbb{N}\}$  et on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \langle \varphi_i, e_{\underline{z}_j}^{(q)} \rangle &= \langle Q^{-1*}\tilde{\varepsilon}_i, Q\varepsilon_j \rangle \\ &= \langle \tilde{\varepsilon}_i, \varepsilon_j \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$  une suite de  $\ell^p(\mathbb{N})$ ; on pose

$$U_p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} c(\underline{z}_i, q)\omega_i\varphi_i; \text{ on a alors}$$

$$T_p U_p(\omega) = \omega \quad \text{car :}$$

$$\forall f \in A^p(\lambda_n), \langle f, e_{\underline{z}_i}^{(q)} \rangle = f(\underline{z}_i)(1 - |\underline{z}_i|^2)^{\frac{n+1}{p}} c(\underline{z}_i, q)$$

$$\text{et } \|U_p(\omega)\|_p = \left\| Q^{-1*} \sum_{i=1}^{\infty} c(\underline{z}_i, q)\omega_i\tilde{\varepsilon}_i \right\|_p$$

$$\leq \|Q^{-1*}\| \beta(q) \|\omega\|_p.$$

L'opérateur  $U_p$  répond à la question. Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe pour les espaces de Bergman restent valables, avec des preuves analogues, pour les espaces de Hardy, et s'étendent au cas du polydisque de  $\mathbb{C}^n$ .

2. UN LEMME DE SUBORDINATION.

Soit  $(\underline{\zeta}, \xi)$  un point de  $\mathbb{B}_{n+1}$  où  $\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_n$ .

Soit alors  $f \in H^p(\mathbb{B}_{n+1})$ ,  $p > 0$  et considérons la projection  $P$  ainsi

définie

$Pf(\underline{\zeta}, \xi) = f(\underline{\zeta}, 0)$  ; on a alors le lemme de "subordination".

LEMME 1.2.1. Soit  $p > 0$  et  $f \in H^p(\mathbb{B}_{n+1})$ . Alors la projection  $P$  est une contraction de  $H^p(\mathbb{B}_{n+1})$  sur  $A^p(\lambda_n)$ .

Preuve. Si  $f \in L^1(\sigma_{n+1})$  ne dépend que de  $\underline{\zeta}$ , en appliquant le théorème de Fubini on a :

$$(2.1) \quad \int_{S_{n+1}} f(\underline{\zeta}, \xi) d\sigma_{n+1}(\underline{\zeta}, \xi) = \int_{\mathbb{B}_n} f(\underline{\zeta}, 0) d\lambda_n(\underline{\zeta}).$$

On a utilisé au paragraphe 1 la propriété que le dual de  $A^p(\lambda_n)$  est  $A^q(\lambda_n)$  ; on va maintenant le démontrer.

LEMME 1.2.3. Pour  $1 < p < \infty$ , le dual de  $A^p(\lambda_n)$  est  $A^q(\lambda_n)$ .

Preuve. On sait que le dual de  $H^p(\sigma_{n+1})$  est  $H^q(\sigma_{n+1})$  [12]. Il faut montrer qu'il existe  $B_p > 0$  telle que :

$$\forall f \in A^p(\lambda_n) \quad \|f\|_p \leq B_p \sup_{g \in A^q(\lambda_n), \|g\|_q=1} |\langle f, g \rangle|.$$

Pour cela considérons  $f$  comme élément de  $H^p(\sigma_{n+1})$  ; on sait qu'il existe  $B_p > 0$  telle que pour tout  $f \in H^p(\sigma_{n+1})$ , il existe  $g \in H^q(\sigma_{n+1})$  vérifiant :

$$\|f\|_p \leq B_p \langle f, g \rangle \quad \text{et} \quad \|g\|_{H^q(\sigma_{n+1})} = 1.$$

Mais  $f = Pf$  d'où :

$$\langle f, g \rangle = \langle Pf, g \rangle = \langle Pf, P^*g \rangle.$$

On a clairement  $P^*g(\underline{\zeta}) = g(\underline{\zeta}, 0) = Pg(\underline{\zeta})$

et d'après le lemme de subordination

$$\|Pg\|_{A^q(\lambda_n)} \leq \|g\|_{H^q(\sigma_{n+1})} \leq 1.$$

$$\text{d'où} \quad \|f\|_p \leq B_p \langle f, g_1 \rangle \quad \text{avec} \quad g_1 = Pg \quad \text{et} \quad \|g_1\|_{A^q(\lambda_n)} \leq 1$$

ce qui prouve le lemme 2.3.

Remarque 1.2.1.

Soit  $k \leq n-1$  ; considérons la mesure  $\lambda_k^{(n)}$  sur  $\mathbb{B}_k$  définie par

$$\lambda_k^{(n)} = (1 - |z|^2)^{n-k-1} \lambda_k.$$

Si  $(\underline{\zeta}, \underline{\xi}) \in S_n$  avec  $\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_k$ ,  $\underline{\xi} \in \mathbb{B}_{n-k}$  on définit le projecteur  $P_{n,k}$  par :

$$\forall f \in H^P(\sigma_n) \quad P_{n,k} f = f(\underline{\zeta}, 0) \quad \text{alors}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_k} |P_{n,k} f|^P d\lambda_k^{(n)} &= \int_{S_n} |P_{n,k} f|^P d\sigma_n \\ &\leq \int_{S_n} |f|^P d\sigma_n. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. Il y a des résultats plus fins (l'existence d'une projection bornée de  $L^1$  sur  $A^1$ ) pour les classes de Bergman dans [13].

CHAPITRE II

1. LE THEOREME PRINCIPAL POUR LES CLASSES  $A^p(\lambda_1)$ .

On dit qu'une suite  $\sigma$  de  $\mathbb{D}$  est séparée s'il existe  $\delta > 0$ , tel que pour tout  $z \in \sigma$ , et tout  $w \in \sigma$ ,  $w \neq z$  alors  $d(z,w) > \delta$ , où  $d$  est la distance de Gleason, c'est-à-dire dans le cas de  $\mathbb{D}$

$$d(z,w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|.$$

THEOREME 2.1.1. Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}$  ; alors pour  $0 < p < +\infty$ ,  $\sigma$  est une réunion finie de suites  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  ; de plus si  $p \geq 1$  chaque  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_1)$ .

On suppose d'abord  $p > 1$ .

- Réduction du problème -

Soit  $\nu$  un entier positif ; et soit  $A = 2^\nu$ . Considérons la partition de  $\mathbb{D}$  en "cellules" allongées  $D_{n,k}$  pour  $n \geq \nu$  et  $0 \leq k < 2^{n-\nu}$  définies par :

$$D_{n,k} = \{z = re^{i\theta}, 1 - 2^{-n} \leq r < 1 - 2^{-n-1}, 2\pi k A 2^{-n} \leq \theta < 2\pi(k+1)A 2^{-n}\}.$$

$\sigma$  étant séparée, chaque cellule  $D_{n,k}$  contient un nombre de points de  $\sigma$  uniformément majoré par rapport à  $n$  et  $k$  par un entier  $M$  ; on peut donc écrire  $\sigma = \bigcup_{i=1}^M \sigma_i$  avec  $\text{card}(\sigma_i \cap D_{n,k}) \leq 1$ .

Considérons alors les quatre familles d'indices suivantes :

$$\Lambda_1 = \{(n,k), \quad n \equiv 0(\text{mod } 2), \quad k \equiv 0(\text{mod } 2)\}$$

$$\Lambda_2 = \{(n,k) \quad n \equiv 1(\text{mod } 2), \quad k \equiv 0(\text{mod } 2)\}$$

$$\Lambda_3 = \{(n,k) \quad n \equiv 0(\text{mod } 2), \quad k \equiv 1(\text{mod } 2)\}$$

$$\Lambda_4 = \{(n,k) \quad n \equiv 1(\text{mod } 2), \quad k \equiv 1(\text{mod } 2)\}.$$

On peut alors considérer les  $4M$  sous-suites de  $\sigma$  :

$$\sigma_{i,j} = \bigcup_{(m,k) \in \Lambda_j} \{\sigma_i \cap D_{\eta,k}\}$$

pour  $1 \leq i \leq M$ ,  $i \leq j \leq 4$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq \nu$ , notons  $C_m$  la couronne  $C_m = \bigcup_{\ell=0}^{2^{m-\nu}-1} D_{m,\ell}$ .

On pose encore  $\sigma_{i,j,k} = \bigcup_{m \equiv k \pmod{\nu}} (\sigma_{i,j} \cap C_m)$

pour  $1 \leq i \leq M$ ,  $1 \leq j \leq 4$ ,  $1 \leq k \leq \nu$ .

Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir  $\nu$  pour que chaque  $\sigma_{i,j,k}$  soit d'interpolation forte  $A^p(\lambda_1)$ .

Cette réduction étant faite, pour  $(i,j,k)$  fixé on pose  $s = \sigma_{i,j,k}$  et  $s_m = s \cap C_m$ .

Grâce à la réduction, on note  $z_{m,p}$  l'unique point, s'il existe, de  $D_{m,\ell} \cap s_m$ ; si  $z_{m,\ell} \in s_m$  et  $z_{m,h} \in s_m$  on a  $\ell = h \pmod{2}$ .

On notera  $\Lambda = \{(m,\ell), \text{ t.q. } z_{m,\ell} \text{ existe dans } s\}$  et

$$\Lambda_m = \{\ell \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \exists z_{m,\ell} \text{ dans } s \cap D_{m,\ell}\}.$$

Preuve du théorème. Soit  $p > 1$ .

Soit donc  $s$  la suite obtenue après réduction ; on va montrer que  $s$  est strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

1ERE PARTIE. Soit  $a = \{a_{n,\ell}, (n,\ell) \in \Lambda\} \in \ell^q(\mathbb{N})$

et posons  $f = \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} a_{n,\ell} e_{z_{n,\ell}}^{(q)}$  ; on va montrer que  $f$  est borné dans  $A^q(\lambda_1)$ .

On a :  $\|f\|_q \leq B_p \sup_{g \in A^p, \|g\|_p=1} |\langle f, g \rangle|$  grâce au lemme 1.2.2.

$$\|f\|_q \leq B_p \sup_g \left| \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} \bar{a}_{n,\ell} \langle g, e_{z_{n,\ell}}^{(q)} \rangle \right| \text{ par Hölder il vient}$$

$$(1.1) \quad \|f\|_q \leq \beta(q) B_p \|a\|_q \sup_g \left\{ \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} |g(z_{n,\ell})|^{p(1-|z_{n,\ell}|^2)} \right\}^{2 \frac{1}{p}}$$

Montrons alors le lemme.

LEMME 2.1.1. Soit  $s$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}$  ; il existe alors une

constante C positive telle que ; pour  $0 < p \leq +\infty$ ,

$$(1.2) \quad \forall g \in A^p(\lambda_1), \quad \sum_{z \in s} |g(z)|^p (1 - |z|^2)^2 \leq C \|g\|_p^p.$$

Preuve du lemme. a)  $p \geq 1$  : Puisque  $s$  est séparée il existe  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , tel que les disques  $D_z$  de centre  $z$  et de rayon  $\delta(1 - |z|^2)$  sont disjoints lorsque  $z$  est dans  $s$ .

Notons  $|D_z| = \lambda_1(D_z)$ , on a, grâce à la propriété de la moyenne :

$$I = \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} |D_z| \left| \left\{ \frac{1}{|D_z|} \int_{D_z} f(\varphi) d\lambda_1(\varphi) \right\} \right|^p = \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} |D_z|^{1-p} \left| \int_{D_z} f \right|^p$$

utilisant alors Hölder dans l'intégrale :

$$I \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} \int_{D_z} |f|^p d\lambda = \frac{1}{\delta^2} \int_{D_z} |f|^p \leq \frac{1}{\delta^2} \|f\|_p^p.$$

b)  $0 < p < 1$ . Soit  $f \in A^p(\lambda_1)$  ; alors  $g = |f|^p$  est sous-harmonique dans  $\mathbb{D}$  et est dans  $L^1(\mathbb{D})$  ; on a donc :

$$I = \sum_{z \in s} (1 - |z|^2)^2 |f(z)|^p = \sum_{z \in s} (1 - |z|^2)^2 g(z) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{z \in s} \int_{D_z} g d\lambda \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{D}} g d\lambda$$

$$\text{donc } I \leq \frac{1}{\delta^2} \|g\|_1 = \frac{1}{\delta^2} \|f\|_p^p.$$

Appliquant le lemme 2.1.1 à (1.1) il vient :

$$(1.3) \quad \|f\|_q \leq \beta(q) B_q C \|a\|_q.$$

2EME PARTIE. Pour montrer que  $s$  est strictement d'interpolation  $A^p$  il suffit alors de montrer que, avec  $f$  comme dans la première partie, il existe  $\gamma > 0$  avec :

$$(1.4) \quad \sup_{g \in E_s^p, \|g\|_p=1} |\langle f, g \rangle| \geq \gamma \|a\|_q$$

écrivaint  $g = \sum_{(m,k) \in \Lambda} b_{m,k} e_{z_{m,k}}^{(p)}$ , avec  $b = \{ b_{m,k}, (m,k) \in \Lambda \} \in \ell^p(\Lambda)$

cela revient à montrer que l'opérateur matriciel

$$\tilde{Q}_p(n, \ell ; m, k) = \frac{(1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}}}{|1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2}$$

est d'inverse borné de  $\ell^q(\Lambda)$  dans  $\ell^q(\Lambda)$ .





Posons  $Q_p = \tilde{Q}_p - I$ , où  $I$  est l'identité de  $\ell^q(\Lambda)$  dans  $\ell^q(\Lambda)$ ; il suffit de montrer que  $\|Q_p\|$  est strictement inférieure à un; pour cela on va utiliser le lemme suivant [7] issu d'un théorème de Shur.

LEMME [7] 2.1.2. Soit  $\mu$  une mesure positive sur un espace  $X$  et  $Q$  une application de  $X \times X$  dans  $[0, +\infty]$ ; soit  $g$  une fonction positive sur  $X$  telle qu'il existe deux nombre  $a$  et  $b$  positifs tels que :

$$\int_X Q(x,y)g(y)^q d\mu(y) \leq a^q [g(x)]^q \quad \text{et} \quad \int_X Q(x,y)g^p(x) d\mu(x) \leq b^p [g(y)]^p, \quad \text{alors}$$

l'opérateur  $Tf(x) = \int_X Q(x,y)f(y)d\mu(y)$  est borné de  $L^p$  dans  $L^p$  et on a  $\|T\| \leq ab$ .

On va prendre  $X = \Lambda$ , muni de la mesure de dénombrement,  $Q$  la fonction définie ci-dessus.

On va montrer, avec le  $v$  de la réduction.

PROPOSITION 2.1.1. Pour tout  $\theta$ ,  $\frac{2}{q} - 1 < \theta < \frac{2}{q}$  il existe une constante positive  $K_{\theta,v}^p$  telle que

$$(1.5) \quad \sum_{n,l} Q_p(n,l; m,k) (1 - |z_{n,l}|^2)^\theta \leq K_{\theta,v}^\theta (1 - |z_{m,k}|^2)^\theta, \quad \text{et} \quad K_{\theta,v}$$

tend vers zéro quand  $v$  tend vers l'infini.

Preuve de la proposition 2.1.1.

$$I = \sum_{(n,l) \in \Lambda} Q_p(n,l; m,k) (1 - |z_{n,l}|^2)^\theta = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\text{avec} \quad I_1 = \sum_{n < m} \sum_{\ell \in \Lambda_n} Q_p(n,\ell; m,k) (1 - |z_{n,\ell}|^2)^\theta$$

$$I_2 = \sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ \ell \neq k}} Q_p(n,\ell; m,k) (1 - |z_{n,\ell}|^2)^\theta$$

$$I_3 = \sum_{n > m} \sum_{\ell \in \Lambda_n} Q_p(n,\ell; m,k) (1 - |z_{n,\ell}|^2)^\theta.$$

Voyons  $I_1$ . On a : (1.6)  $\forall (n,\ell) \in \Lambda, 2^{-n-1} \leq (1 - |z_{n,\ell}|^2) \leq 2^{-n+1}$

à cause de la réduction, de plus,

$$|1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2 \geq \delta \left( (2^{-(n+1)} + 2^{-(m+1)})^2 + (\varphi_{m,\ell} - \varphi_{m,k})^2 \right)$$

où  $\delta$  est une constante absolue et  $\varphi_{n,\ell}$  est l'argument de  $z_{n,\ell}$ ; cette

relation vaut dès que  $|z_{n,\ell}| \geq \frac{1}{2}$  et  $|z_{m,k}| \geq \frac{1}{2}$  par exemple; à cause de la réduction, on peut réindiquer les points pour écrire :

$$|\varphi_{n,\ell} - \varphi_{m,k}| \geq \ell 2\pi 2^{-n+v-1}; \text{ il vient alors}$$

$$(1.7) \quad |1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2 \geq \pi^2 \delta^2 2^{-2n} 2^{2v} \left\{ \ell^2 + \frac{2^{-2v}}{4\pi^2} (1 + 2^{-(m-n)})^2 \right\}$$

on en déduit

$$\sum_{\ell} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2} \leq \frac{2^{2n}}{\pi^2 \delta^2 2^{2v}} \sum_{\ell > 0} \frac{1}{\ell^2 + \frac{2^{-2v}}{4\pi^2} (1 + 2^{-(m-n)})^2}$$

que l'on peut majorer par :

$$\sum_{\ell} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2} \leq \frac{2^{2n}}{\pi \delta 2^{v-1} (1 + 2^{-(m-n)})} + \frac{2^{2n}}{\pi^2 \delta^2 2^{2v}} \frac{2^{2v} 4\pi^2}{(1 + 2^{-(m-n)})^2}$$

que l'on majore encore par

$$(1.8) \quad \sum_{\ell} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k}|^2} \leq \frac{2 \cdot 2^m}{\delta (1 + 2^{-(m-n)})}$$

On en déduit, puisque grâce à la réduction  $m \equiv n \pmod{v}$

$$I_1 \leq \frac{2}{\delta} 2^{-m \frac{2}{q}} \sum_{\substack{n < m \\ n \equiv m \pmod{v}}} \frac{2^{-n(\frac{2}{p} + \theta)} 2^{2n}}{1 + 2^{-(m-n)}} \leq \frac{2}{\delta} 2^{-\frac{2m}{q}} \sum_{\substack{n < m \\ n \equiv m \pmod{v}}} 2^{n(\frac{2}{q} - \theta)}$$

Soit  $I_1 \leq \frac{2}{\delta} \frac{1}{2^{\frac{2}{q} - \theta} - 1} 2^{-m\theta}$  et, grâce à (1.6) il vient

$$(1.9) \quad I_1 \leq \frac{4}{\delta (2^{\frac{2}{q} - \theta} - 1)} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\theta}$$

Voyons  $I_2 = \sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ \ell \neq k}} \frac{(1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}} (1 - |z_{m,\ell}|^2)^{\theta}}{|1 - \bar{z}_{m,k} z_{n,\ell}|^2}$

grâce à (1.6) et (1.7) avec  $n=m$  il vient :

$$I_2 \leq 2^{-2m} \frac{2^{-\theta m} 2^{2m}}{\pi \delta 2^{2\nu}} \sum_{\ell > 1} \frac{1}{\ell^2 \frac{2^{-2\nu}}{2\pi^2}}, \text{ où on a}$$

$\ell \geq 1$  grâce au fait que  $z_{m,\ell} \neq z_{m,k}$  ; soit :

$$I_2 \leq \frac{2^{-m\theta}}{\pi \delta 2^{2\nu}} \sum_{\ell > 1} \frac{1}{\ell^2} = \frac{2^{-m\theta}}{6\delta 2^{2\nu}} ; \text{ par (2.6) on a}$$

$$(1.10) \quad I_2 \leq \frac{1}{3\delta 2^{2\nu}} (1 - |z_{m,k}|^2)^\theta.$$

Voyons  $I_3$ . 
$$I_3 = \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} \sum_{\ell \in \Lambda_n} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}} (1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p} + \theta}$$

grâce à (1.6) et (1.8) il vient

$$I_3 \leq 2^{-\frac{m}{q}} \frac{2}{\delta} \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} \frac{2^{-n(\frac{2}{p} + \theta)} 2^{2n}}{1 + 2^{-(m-n)}} \leq \frac{2}{\delta} 2^{-\frac{2m}{q}} \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} 2^{-n(\frac{2}{p} + \theta - 1)} 2^m$$

$$I_3 \leq \frac{2}{\delta} 2^{\frac{2m}{q}} 2^m \sum_{\substack{n > m \\ n \equiv m(\nu)}} 2^{-n(1 - \frac{2}{q} + \theta)} = \frac{2}{\delta} 2^{m(1 - \frac{2}{q})} \frac{2^{-m(1 - \frac{2}{q} + \theta)} 2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-\frac{2}{q} + \theta}}$$

d'où (1.11) 
$$I_3 \leq \frac{4}{\delta} \frac{2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-\frac{2}{q} + \theta}} (1 - |z_{m,k}|^2)^\theta.$$

Posons alors : 
$$K_{\theta,\nu}^p = \frac{4}{\delta} \left[ \frac{1}{2^{\frac{2}{q} - \theta} \nu} + \frac{1}{12 \cdot 2^{2\nu}} + \frac{2^{-\nu(1 - \frac{2}{q} + \theta)}}{1 - 2^{-\frac{2}{q} + \theta}} \right]$$

on a bien la proposition 2.1.1.

Soit alors  $p > 1$  et posons  $t_{n,\ell} = (1 - |z_{n,\ell}|^2)^a$ ,  $a > 0$  ;  
grâce à la proposition 2.1.1 si (\*)  $\frac{2}{q} - 1 < ap < \frac{2}{q}$  alors on a

$$(1.12) \quad \sum_{n,\ell} Q_p(n,\ell; m,k) t_{n,\ell}^p \leq K_{ap,\nu}^p t_{m,k}^p$$

échangeant dans la proposition 2.1.1 les rôles de  $p$  et  $q$  il vient,

si (\*\*)  $\frac{2}{p} - 1 < aq < \frac{2}{p}$ ,

$$(1.13) \quad \sum_{m,k} Q_p(n, \ell; m, k) t_{m,k}^q \leq K_{a,q,v}^q t_{m,k}^q$$

mais  $p > 1$  donné on voit que (\*\*) implique  $\frac{2}{q} - \frac{p}{q} < ap < \frac{2}{q}$  et donc, en prenant

$$a = \frac{1}{2p} \left[ \frac{2}{q} + \max \left\{ \left( \frac{2}{q} - 1 \right), \left( \frac{2}{q} - \frac{p}{q} \right) \right\} \right],$$

on a que (\*) et (\*\*) sont vérifiés donc aussi (1.12) et (1.13) ;

appliquant alors le lemme 2.1.2 à  $Q_p$  on a

$$(1.14) \quad \left\| \left\{ \sum_{n,\ell} Q_p(n, \ell; m, k) a_{n,\ell}, (m, k) \in \Lambda \right\} \right\|_q \leq (K_{ap,v}^p)^{\frac{1}{p}} (K_{aq,v}^q)^{\frac{1}{q}} \|a\|_q.$$

Preuve du théorème pour  $p > 1$ .

Soit  $a = \{a_{n,\ell}, (n, \ell) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$  et  $b = \{b_{n,\ell}, (n, \ell) \in \Lambda\} \in \ell^p(\Lambda)$  ;

$$\text{posons } f = \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} a_{n,\ell} e_{z_{n,\ell}}^{(q)} \quad \text{et } g = \sum_{(n,\ell) \in \Lambda} b_{n,\ell} e_{z_{n,\ell}}^{(p)}.$$

Par (1.3) on a  $\|f\|_q \leq \beta(q) B_q^c \|a\|_q$  et  $\|g\|_p \leq \beta(p) B_p^c \|b\|_p$ ,

$$\text{et } \langle f, g \rangle = \sum_{\substack{(n,\ell) \in \Lambda \\ (m,k) \in \Lambda}} a_{n,\ell} \bar{b}_{m,k} \langle e_{z_{n,\ell}}^{(q)}, e_{z_{m,k}}^{(p)} \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \sum a_{n,\ell} c(z_{n,\ell}; q) \bar{b}_{m,k} c(z_{m,k}; p) \frac{(1 - |z_{n,\ell}|^2)^{\frac{2}{p}} (1 - |z_{m,k}|^2)^{\frac{2}{q}}}{(1 - \bar{z}_{n,\ell} z_{m,k})^2},$$

d'où avec la définition naturelle de  $\tilde{R}_p(n, \ell; m, k)$  :

$$\langle f, g \rangle = \sum a_{n,\ell} c(z_{n,\ell}; q) \bar{b}_{m,k} c(z_{m,k}; p) \tilde{R}_p(n, \ell; m, k)$$

mais  $\tilde{R}_p(n, \ell; m, k) = I + R_p(n, \ell; m, k)$  et grâce à (1.14)

$$\| \{R_p(n, \ell; m, k)\} \| \leq \| Q_p(n, \ell; m, k) \| \leq (K_{ap,v}^p)^{1/p} (K_{aq,v}^q)^{1/q};$$

choisissons donc  $v$  assez grand pour que la norme de  $R_p(n, \ell; m, k)$  soit

strictement inférieure à un ; on en déduit que  $\tilde{R}_p$  est inversible et donc qu'il

existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $a = \{a_{n,\ell}, (n, \ell) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$  il existe

$$b = \{b_{n,\ell}, (n, \ell) \in \Lambda\} \in \ell^p(\Lambda) \quad \text{avec} \quad |\langle f, g \rangle| \geq \alpha(p) \alpha(q) \gamma \|a\|_q \|b\|_p.$$

On en déduit que  $\|f\|_q \geq \sup_{\substack{g \in E_p \\ \|g\|_p < 1}} |\langle f, g \rangle| \geq \frac{\alpha(p) \alpha(q) \gamma \|a\|_q}{\beta(p) B_p}$

donc que  $\Sigma^q$  est une base de  $E_\sigma^q$  équivalente à la base canonique de  $\ell^q(\Lambda)$  d'une part, ce qui grâce au lemme 1.1.1 prouve que  $s$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ , et d'autre part cela prouve que le dual de  $E_\sigma^q$  est isomorphe à  $E_\sigma^p$  ce qui achève la preuve du théorème dans le cas  $p > 1$ , à cause du lemme 1.1.2.

Remarque 2.1.1. On a que l'opérateur  $\tilde{R}_p$  n'est autre que  $\tilde{R}_p = T_q T_p^*$  et on vient de montrer que  $\tilde{R}_p$  est l'inverse borné ; il en va de même de  $\tilde{R}_q = \tilde{R}_q^* = T_p T_q^*$  ; posons alors  $U_p = T_q^* \tilde{R}_p^{-1}$  ;  $U_p$  est borné de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $E_s^p \subset A^p(\lambda_1)$  et on a  $T_p U_p = T_p T_q^* (T_p T_q^*)^{-1} =$  identité de  $\ell^p$  ; on a donc directement l'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_1)$ .

Cette remarque vaut également pour les chapitres suivants.

## 2.2. Cas $p < 1$ .

Soit  $\sigma = \{z_i, i \in \mathbb{N}\}$  une suite dans  $\mathbb{D}$ .

On dit que  $\Sigma = \{e_z^{(2)}, z \in \sigma\}$  possède une suite de conjugués bornés s'il existe une suite  $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$  d'éléments de  $A^2(\lambda_1)$  vérifiant :

$$(2.1) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N} \quad \langle \varphi_i, e_{z_j}^{(2)} \rangle = \delta_{ij} = \varphi_i(z_j) c(z_j, 2) (1 - |z_j|^2)$$

$$(2.2) \quad \exists K > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_i\|_2 \leq K.$$

On a alors

PROPOSITION 2.2.1. Si  $\sigma$  est une suite telle que  $\Sigma = \{e_z^{(2)}, z \in \sigma\}$  possède une suite de conjugués bornés alors  $\sigma$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_1)$  pour tout  $p$  de la forme  $p = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Preuve. Soit  $\omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\} \in \ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$ . On pose :

$$U_{\frac{1}{k}}(\omega) = \sum_i \omega_i c(z_i, 2)^{-2k} \varphi_i^{2k} ;$$

on a :

$$\begin{aligned}
 \|U_{\frac{1}{k}}(\omega)\|_{\frac{1}{k}} &= \int \left| \sum_i \omega_i c(z_i, 2)^{-2k} \varphi_i \right|_{\frac{1}{k}} d\lambda_1 \\
 &\leq \int \alpha(2)^{-2} \left( \sum_i |\omega_i|_{\frac{1}{k}} |\varphi_i|^2 \right) d\lambda_1 \\
 &\leq \alpha(2)^{-2} \sum_i |\omega_i|_{\frac{1}{k}} \int |\varphi_i|^2 d\lambda_1 \\
 &\leq \alpha(2)^{-2} K^2 \|\omega\|_{\frac{1}{k}} \quad \text{d'après (4.2)}
 \end{aligned}$$

d'où  $U_{\frac{1}{k}}$  applique  $\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$  dans  $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$  ; d'après (2.1) on a clairement

$$T_{\frac{1}{k}} U_{\frac{1}{k}}(\omega) = \omega.$$

COROLLAIRE 2.2.1. Si  $\sigma$  est une suite séparée dans  $\mathbb{D}$ , alors  $\sigma$  est une réunion finie de suites  $\sigma_i$  telles que pour  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$  dans  $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$ .

Preuve. Grâce au §1 on peut écrire  $\sigma$  comme réunion de suites  $\sigma_i, i=1, \dots, M$ , telles que  $\sigma_i$  soit fortement d'interpolation  $A^2(\lambda_1)$ . Mais  $E_{\sigma_i}^{(2)}$  étant un espace de Hilbert, son dual est isomorphe à  $E_{\sigma_i}^{(2)}$  et donc  $\sigma_i$  est strictement d'interpolation  $A^2(\lambda_1)$ .

Il existe donc une suite  $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\}$  dans  $E_{\sigma_i}^{(2)}$  telle que  $\langle \varphi_k, e_{z_\ell}^{(2)} \rangle = \delta_{k,\ell}$  et  $\|\varphi_k\|_2 \leq K$  où  $K$  est une constante. D'après la

proposition 2.2.1,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de

$\ell^{\frac{1}{k}}(\mathbb{N})$  dans  $A^{\frac{1}{k}}(\lambda_1)$ , d'où le corollaire.

La proposition suivante achèvera la preuve du théorème principal dans le cas de  $\mathbb{D}$ .

PROPOSITION 2.2.2. Soit  $\sigma$  une suite fortement d'interpolation  $A^{p'}(\lambda_1)$  pour  $p' > 1$ . Alors  $\sigma$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  pour  $p = \frac{p'}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Preuve. Puisque  $\sigma$  est fortement d'interpolation  $A^{p'}(\lambda_1)$ ,  $\sigma$  est séparée (c'est facile à voir) et donc grâce au lemme 2.1.1 on obtient que pour tout  $r > 0$ ,  $T_r$  est continu de  $A^r(\lambda_1)$  dans  $\ell^r(\mathbb{N})$ .

Soit alors  $\omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$  un élément de  $\ell^{\frac{p'}{k}}(\mathbb{N})$  et considérons une suite  $a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$   $a_i^k = \omega_i$ ;  $a$  appartient à  $\ell^{p'}(\mathbb{N})$  et il existe donc  $f \in A^{p'}(\lambda_1)$  vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (1 - |z_i|^2)^{\frac{2}{p'}} f(z_i) = a_i ; \text{ d'où en élevant à la puissance } k$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, (1 - |z_i|^2)^{\frac{2k}{p'}} f^k(z_i) = \omega_i ; \text{ et posant } g = f^k \text{ on a bien :}$$

$$g \in A^{\frac{p'}{k}}(\lambda_1) \text{ et } T_{\frac{p'}{k}} g = \omega.$$

Fin de la preuve du théorème principal.

Soit  $0 < p < 1$ ; il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $mp = p' > 1$ ; soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}$ ; dans le §3 on a montré que  $\sigma$  est une réunion finie de suites fortement d'interpolation  $A^{p'}(\lambda_1)$ ; et grâce à la proposition 4.2, on peut en déduire que chacune de ces suites est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

Remarque 2.2.2. Dans le cas  $0 < p < 1$  on ne sait pas prouver qu'il y a toujours extension linéaire bornée mais on a une extension non linéaire bornée ainsi :



soit  $m \in \mathbb{N}$  t.q.  $mp = p' > 1$ ,  $m$  fixé et considérons  $\omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$ ; à  $\omega$  associons  $\tilde{\omega}$  une des suites de  $\ell^{p'}(\mathbb{N})$  telles que  $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_k, k \in \mathbb{N}\}$  avec

$\forall k \in \mathbb{N}, \tilde{\omega}_k^m = \omega_k$ , appelons  $R$  cet opérateur; soit alors  $U_p$ , l'extension

linéaire bornée de  $\ell^{p'}$  dans  $A^{p'}(\lambda_1)$  et  $R'$  l'opérateur de  $A^{p'}$  dans  $A^p$  ainsi définit:  $\forall f \in A^{p'}, R'f = f^m \in A^p$ ; posons enfin

$$\tilde{U}_p = R'U_p, R; \text{ on voit que } \tilde{U}_p \text{ est une extension non linéaire}$$

mais bornée sur les boules de centre 0 de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_1)$ .

Cette remarque vaut aussi pour les chapitres III et IV.

### 2.3. COMPARAISON AVEC LES SUITES DE ZEROS DE FONCTIONS DE $A^p(\lambda_1)$ .

On va montrer que les résultats obtenus sont les meilleurs possibles dans le sens suivant: pour  $p > 0$  donné, il existe une suite séparée dans  $\mathbb{D}$  qui n'est même pas un zéro pour la classe  $A^p(\lambda_1)$ , donc qui ne peut être d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ ; nécessairement une telle suite est une réunion d'au moins deux suites d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

On va utiliser le théorème suivant dû à C. Horowitz [9].

THEOREME 2.3.1. [9]. Soit  $f$  dans  $A^p(\lambda_1)$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $f(0) \neq 0$  et soit  $\{z_k, k \in \mathbb{N}\}$  la suite des zéros ordonnés par modules croissants de  $f$  alors:

$$(3.1) \quad \prod_{k=1}^N \frac{1}{|z_k|} = O(N^{\frac{1}{p}}).$$

On va montrer les théorèmes suivants:

THEOREME 2.3.2. Pour tout  $p > 0$ , il existe deux suites  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  et telles que la réunion  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  est séparée et n'est pas une suite d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

THEOREME 2.3.3. Pour tout  $p > 0$ , il existe  $q > p$  et une suite  $\sigma$  qui est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$  mais qui n'est pas d'interpolation  $A^q(\lambda_1)$ .

Ces deux théorèmes soulignent la différence avec le cas des classes  $H^P(\sigma_1)$ .

Preuve du théorème 2.3.2.

Soit  $\gamma > 1$  et soit  $\nu \in \mathbb{N}$ ; considérons la suite  $\sigma(\gamma, \nu)$  suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq \nu + 1, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \ell \leq E[\gamma^{m-\nu}],$$

$$z_{m, \ell} = (1 - \gamma^{-m}) e^{i2\pi \gamma^{-m} \ell \gamma^{-\nu}}$$

où  $E[x]$  est la partie entière de  $x$ .

Appliquons le critère de Horowitz à cette suite :

si  $N = \sum_{k=\nu+1}^m E[\gamma^{k-\nu}]$ ,  $N$  est équivalent, quand  $m \rightarrow \infty$  à  $\gamma \frac{1-\gamma^{m-\nu}}{1-\gamma}$  d'où :

$$(3.2) \quad \log N \sim m \log \gamma \quad \text{quand } m \text{ tend vers } +\infty.$$

$$I = \prod_{k=\nu+1}^m \prod_{\ell=1}^{E[\gamma^{k-\nu}]} \frac{1}{1 - \gamma^{-k}} = \prod_{k=\nu+1}^m \frac{1}{[1 - \gamma^{-k}]^{E[\gamma^{k-\nu}]}}; \text{ d'où}$$

$$\log I = - \sum_{k=\nu+1}^m E[\gamma^{k-\nu}] \log(1 - \gamma^{-k}) \quad \text{et}$$

$$(3.3) \quad \log I \sim m \gamma^{-\nu} \quad \text{quand } m \rightarrow \infty.$$

On déduit des relations (3.2) et (3.3) et du théorème 2.3.1 de C. Horowitz que, pour que  $\{z_{m, \ell}; m, \ell\}$  soit contenu dans un ensemble de zéros d'une fonction de  $A^P(\lambda_1)$  nécessairement on a :

$$\frac{1}{p} \log N \geq \log I \quad \text{soit :}$$

$$(3.4) \quad p \leq \frac{m \log \gamma}{m \gamma^{-\nu}} = \gamma^{\nu} \log \gamma.$$

Soit alors  $p_0 > 0$  donné et  $1 < \gamma < e^{\frac{p_0}{\log \gamma}}$ .

La suite  $\sigma(\gamma, 0)$  construite ci-dessus ne peut être une suite d'interpolation

$A^{p_0}(\lambda_1)$ ; en effet toute suite d'interpolation  $A^{p_0}(\lambda_1)$  est incluse dans un

ensemble de zéros d'une fonction de  $A^{p_0}(\lambda_1)$ , à savoir une fonction  $f$  inter-

polant l'élément  $(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$  de  $\ell^{p_0}(\mathbb{N})$ . A cause de (3.4) et du choix

de  $\gamma$ ,  $\sigma(\gamma, 0)$  ne vérifie pas (3.1) et donc ne peut être incluse dans un ensemble de zéros d'une fonction de  $A^p(\lambda_1)$  et n'est pas d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ .

Toutefois la suite  $\sigma(\gamma, 0)$  est séparée et donc d'après le théorème principal,  $\sigma(\gamma, 0) = \bigcup_{i=1}^M \sigma_i$  où  $\sigma_i$  est fortement d'interpolation  $A^{p_0}(\lambda_1)$  et  $M$  un entier, on en déduit le théorème 2.3.2.

Preuve du théorème 2.3.3. Soit  $p > 0$  donné, dans la preuve du théorème principal, on a montré que pour  $\gamma$  et  $v$  assez grands  $\sigma(\gamma, v)$  est fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_1)$ ; il suffit alors de considérer  $q > \gamma^v \log \gamma$  pour que  $\sigma(\gamma, v)$  ne soit pas d'interpolation  $A^q(\lambda_1)$  à cause de (3.4) et du raisonnement ci-dessus.

#### 2.4. APPLICATIONS AUX ESPACES DE HARDY.

Comme corollaire du 2.3 on va montrer les théorèmes suivants

THEOREME 2.4.1. a) Pour tout  $p > 0$ , il existe deux suites  $s_1$  et  $s_2$  fortement d'interpolation  $H^p(\sigma_2)$  et telles que la réunion  $s_1 \cup s_2$  est séparée mais n'est pas une suite d'interpolation  $H^p(\sigma_2)$ .

b) Pour tout  $p > 0$ , il existe  $q > p$  et une suite  $s$  qui est fortement d'interpolation  $H^p(\sigma_2)$  mais qui n'est pas d'interpolation  $H^q(\sigma_2)$ .

Preuve. a) On considère les suites  $s_1$  et  $s_2$  du théorème comme étant dans le plan  $w=0$  de la boule  $\{|z|^2 + |w|^2 < 1\}$  de  $\mathbb{C}^2$ , on utilise alors le lemme 2.2 de subordination pour conclure; pour montrer le b) on procède de la même façon.

Soit  $m_2$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^2$ , on définit les classes de Hardy de la manière usuelle :

$p > 0$ ,  $H^p(m_2) = \{f \text{ analytique dans } \mathbb{D}^2 \text{ tq. } \sup_{\gamma > 0} \int_{\varphi \in \mathbb{T}^2} |f(r\varphi)|^p dm_2 = \|f\|_p^p < H\}$

et  $H^\infty(\mathbb{D}^2) = \{f \text{ analytique et bornée dans } \mathbb{D}^2\}$ .

On a alors

THEOREME 2.4.2. a) Pour tout  $p \geq 1$ , il existe deux suites  $s_1$  et  $s_2$  fortement d'interpolation  $H^p(m_2)$  et telles que la réunion  $s_1 \cup s_2$  est séparée mais n'est pas d'interpolation  $H^p(m_2)$ .

b) Pour tout  $p \geq 1$ , il existe  $q > p$  et une suite  $s$  qui est fortement d'interpolation  $H^p(m_2)$  mais qui n'est pas d'interpolation  $H^q(m_2)$ .

Preuve. a) Soit  $s'_1 = \{z_k, k \in \mathbb{N}\}$  et  $s'_2 = \{w_k, k \in \mathbb{N}\}$  les suites du théorème 2.3.2, on considère dans  $\mathbb{D}^2$  les suites suivantes :

$s_1 = \{(z_k, z_k), k \in \mathbb{N}\}$  et  $s_2 = \{(w_k, w_k), k \in \mathbb{N}\}$  ; C. Horowitz et D.M. Oberlin [10] ont montré que pour  $p \geq 1$ , l'opérateur  $T$  définit sur  $H^p(\mathbb{D}^2)$  ainsi :  $\forall f \in H^p(\mathbb{D}^2)$ ,

$Tf(z) = f(z, z)$  est continu et surjectif sur  $A^p(\mathbb{D})$  ; il est alors clair que les suites  $s_1$  et  $s_2$ , portée par la diagonale de  $\mathbb{D}^2$ , vérifient le a) du théorème.

b) On procède de la même façon pour b) en plaçant sur la diagonale de  $\mathbb{D}^2$  la suite  $s$  du théorème 2.3.3 et en utilisant le théorème de C. Horowitz et D. Oberlin.

### CHAPITRE III

#### CLASSES DE BERGMAN DU POLYDISQUE DE $\mathbb{C}^n$ .

On fera les démonstrations dans le cas de  $\mathbb{D}^2$ , le cas général s'en déduisant aisément.

On note  $\underline{z} = (z, w)$ ,  $\underline{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $\underline{z}_{\underline{n}} = (z_{n_1}, w_{n_2})$ , la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{C}^2$  restreinte et normalisée à  $\mathbb{D}^2$  sera encore notée  $\lambda_2$ .

On note  $A^p(\lambda_2)$  les classes de Bergman.

$$\forall p > 0, A^p(\lambda_2) = \left\{ f \text{ analytique dans } \mathbb{D}^2 \text{ t.q. } \int_{\mathbb{D}^2} |f|^p d\lambda_2 = \|f\|_p^p < +\infty \right\}$$

$$A^\infty(\lambda_2) = \left\{ f \text{ analytique et bornée dans } \mathbb{D}^2, \|f\|_\infty = \sup_{\underline{z} \in \mathbb{D}^2} |f(\underline{z})| \right\}.$$

Si  $\underline{z} = (z, w) \in \mathbb{D}^2$  et si  $\alpha \in \mathbb{R}$  on note  $((1 - |\underline{z}|^2))^\alpha = (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\alpha$ .

1. On va généraliser les lemmes 1.2.3 et 2.1.1 au cas du polydisque.

LEMME 3.1.1. Pour  $p$  supérieur à un, le dual de  $A^p(\lambda_2)$  est isomorphe à  $A^q(\lambda_2)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Preuve. Comme dans  $\mathbb{D}$ , il suffit de montrer que l'on a une projection bornée de  $L^p(\lambda_2)$  sur  $A^p(\lambda_2)$ ,  $p > 1$ .

La mesure  $\lambda_2$  étant le produit de la mesure  $\lambda_1$  sur  $\mathbb{D}$  par elle-même, on vérifie directement par itération que l'intégrale avec le noyau de Cauchy Bergman réalise bien une projection bornée de  $L^p(\lambda_2)$  sur  $A^p(\lambda_2)$ , la constante étant  $B_p^2$ .

LEMME 3.1.2. Soit  $\sigma = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}^2$  ; il existe  
une constante  $C$  positive telle que

$$(1.1) \quad \forall p > 0, \forall f \in A^p(\lambda_2), \sum_n ((1 - |z_n|^2))^2 |f(z_n)|^p \leq C \|f\|_p^p.$$

Puisque la suite est séparée il existe  $\delta > 0$  tel que les polydisques  
 $D_{z_n} = \{(\varphi, \eta) \in \mathbb{D}^2, \text{ t.q. } |\varphi - z_n| < \delta(1 - |z_n|^2), |\eta - w_n| < \delta(1 - |w_n|^2)\}$  sont  
disjoints. On recopie alors la preuve du lemme 2.1.1.

Le but de ce chapitre est de montrer le

THEOREME 3.1.1. Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}^n$ , pour  $p > 1$ ,  $\sigma$  est  
une union finie de suites strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_2)$  ; pour  $p > 0$ ,  
 $\sigma$  est une union finie de suites  $\sigma_i$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$ , et  
de plus, si  $p = \frac{1}{k}$  avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire  
bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_n)$ .

## 2. REDUCTION DU PROBLEME.

Soit encore  $v$  dans  $\mathbb{N}$  et posons, comme au chapitre II,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k < 2^{n-v}, \quad D_{n,k} = \{z = re^{i\varphi}, \quad 1 - 2^{-n} \leq r < 1 - 2^{-n-1} \text{ et}$$

$$k2^{-n+v}2\pi \leq \varphi < (k+1)2\pi2^{-n+v}\} \text{ si } \underline{n} = (n_1, n_2) \text{ et } \underline{k} = (k_1, k_2) \text{ on pose}$$

$$D_{\underline{n}, \underline{k}} = D_{n_1, k_1} \times D_{n_2, k_2}.$$

Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{D}^2$  ; dans chaque cellule  $D_{\underline{n}, \underline{k}}$  il existe  
un nombre de points de  $\sigma$  uniformément majoré par un entier  $M$  ; on peut donc

écrire  $\sigma = \bigcup_{i=0}^M \sigma_i$  avec pour  $i \geq 1$   $\text{Card}(\sigma_i \cap D_{\underline{n}, \underline{k}}) \leq 1$  et  $\sigma_0$  constituée

des points  $(z, w)$  de  $\sigma$  tels que  $|z| \leq 1 - 2^{-v}$  et  $|w| \leq 1 - 2^{-v}$  ;  $\sigma_0$  n'ayant  
qu'un nombre fini de points est strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_2)$  pour  $p \geq 1$   
et fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_2)$  avec la propriété d'extension linéaire

pour  $0 < p < 1$ .

On procède alors comme au chapitre II et on a  $\sigma_i = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,4 \\ k=1,\dots,v}} \sigma_{i,j,k}$  ;

on pose, pour  $i,j,k$  fixés,  $s = \sigma_{i,j,k} = \{z_{\underline{m},\underline{\ell}}, \underline{m} = (m_1, m_2), \underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2)\}$  où  $z_{\underline{m},\underline{\ell}}$  est l'unique point, s'il existe, de  $s$  dans  $D_{\underline{m},\underline{\ell}}$ .

On a les propriétés suivantes :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} z_{\underline{m},\underline{\ell}} \text{ et } z_{\underline{m},\underline{k}} \text{ dans } s &\implies \ell_1 \equiv k_1 \pmod{2} & \ell_2 \equiv k_2 \pmod{2} \\ z_{\underline{m},\underline{\ell}} \text{ et } z_{\underline{n},\underline{\ell}} \text{ dans } s &\implies m_1 \equiv n_1 \pmod{v} & m_2 \equiv n_2 \pmod{v}. \end{aligned}$$

On pose encore :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, \text{ t.q. } \} z_{\underline{m},\underline{\ell}} \in s \} \\ \underline{\Lambda} &= \{\underline{\ell} \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } \} z_{\underline{m},\underline{\ell}} \in s \}. \end{aligned}$$

### 3. PREUVE DU THEOREME.

Soit  $p > 1$ . Soit  $a = \{a_{\underline{m},\underline{\ell}}, (\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda\} \in \ell^q(\Lambda)$

et posons  $e_{\underline{z}}^{(q)}(\underline{\varphi}) = e_z^{(q)}(\varphi) e_w^{(q)}(\eta)$  où  $\underline{z} = (z,w) \in \mathbb{D}^2$  et  $\underline{\varphi} = (\varphi, \eta) \in \overline{\mathbb{D}}^2$  ; posons

encore  $f(\underline{\varphi}) = \sum_{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda} a_{\underline{m},\underline{\ell}} e_{z_{\underline{m},\underline{\ell}}}^{(q)}(\underline{\varphi})$  ; comme au chapitre II et grâce au

lemme 3.1.2 on a

$$(3.1) \quad \|f\|_q^q \leq B_q^2 \beta^2(q) C \|a\|_q^q.$$

De même si on pose  $b = \{b_{\underline{m},\underline{\ell}}, (\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda\} \in \ell^p(\Lambda)$  on a  $g = \sum_{(\underline{m},\underline{\ell}) \in \Lambda} b_{\underline{m},\underline{\ell}} e_{z_{\underline{m},\underline{\ell}}}^{(p)}$  et

$$(3.2) \quad \|g\|_p^p \leq B_p^2 \beta^2(p) C \|b\|_p^p.$$

Reprenant exactement les arguments du chapitre II, il nous faut alors montrer que l'opérateur matriciel

$$Q_p'(\underline{n},\underline{\ell} ; \underline{m},\underline{k}) = \frac{((1 - |z_{\underline{n},\underline{\ell}}|^2))^{\frac{2}{p}} ((1 - |z_{\underline{m},\underline{\ell}}|^2))^{\frac{2}{q}}}{|(1 - \bar{z}_{\underline{n},\underline{\ell}} z_{\underline{m},\underline{\ell}})|^2} \quad (\underline{n},\underline{\ell}) \neq (\underline{m},\underline{k})$$

et  $Q_p'(\underline{m},\underline{k} ; \underline{m},\underline{k}) = 0$ , avec  $((1 - \bar{z}_{\underline{z}} z'))^2 = (1 - \bar{z}z')^2 (1 - \bar{w}w')^2$  où  $\underline{z} = (z,w)$  et



$\underline{z}' = (z', w')$ , peut-être rendu de norme inférieure à un par un choix convenable de  $v$ . Cela sera conséquence de la

PROPOSITION 3.3.1. Pour tout  $\theta$ ,  $\frac{2}{q} - 1 < \theta < \frac{2}{q}$ , il existe une constante positive  $K_{\theta, v}^p$  telle que

$$(3.3) \quad \sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}, \underline{l}) \neq (\underline{m}, \underline{k})}} Q_p'(\underline{n}, \underline{l}; \underline{m}, \underline{k}) ((1 - |z_{\underline{n}, \underline{l}}|^2))^\theta \leq \tilde{K}_{\theta, v}^p ((1 - |z_{\underline{m}, \underline{k}}|^2))^\theta,$$

et  $\tilde{K}_{\theta, v}$  tend vers zéros quand  $v$  tend vers l'infini.

Preuve de la proposition.

$$\text{On a : } \sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}, \underline{l}) \neq (\underline{m}, \underline{k})}} Q_p'(\underline{n}, \underline{l}; \underline{m}, \underline{k}) ((1 - |z_{\underline{n}, \underline{l}}|^2))^\theta = \sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_1, \underline{l}_1) \neq (\underline{m}_2, \underline{k}_2)}} + \sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_2, \underline{l}_2) \neq (\underline{m}_2, \underline{k}_2)}}$$

Voyons le premier terme :

$$\sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_1, \underline{l}_1) \neq (\underline{m}_1, \underline{k}_1)}} Q_p'((1 - |z_{\underline{n}, \underline{l}}|^2))^\theta =$$

$$\sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_1, \underline{l}_1) \neq (\underline{m}_1, \underline{k}_1)}} Q_p(n_1, l_1; m_1, k_1) (1 - |z_{n_1, l_1}|^2)^\theta \tilde{Q}_p(n_2, l_2; m_2, k_2) (1 - |z_{n_2, l_2}|^2)^\theta$$

où  $Q_p$  et  $\tilde{Q}_p$  sont les opérateurs définis au chapitre II, le 2e membre s'écrit comme un produit, et, utilisant la proposition 2.1.1 il vient

$$\sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_1, \underline{l}_1) \neq (\underline{m}_1, \underline{k}_1)}} Q_p'((1 - |z_{\underline{n}, \underline{l}}|^2))^\theta \leq (1 + K_{\theta, v}^p) K_{\theta, v}^p ((1 - |z_{\underline{m}, \underline{k}}|^2))^\theta.$$

Exactement de la même manière on a :

$$\sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{l}) \in \Lambda \\ (\underline{n}_2, \underline{l}_2) \neq (\underline{m}_2, \underline{k}_2)}} Q_p'((1 - |z_{\underline{n}, \underline{l}}|^2))^\theta \leq (1 + K_{\theta, v}^p) K_{\theta, v}^p ((1 - |z_{\underline{m}, \underline{k}}|^2))^\theta$$

d'où la proposition 3.3.1 en posant  $\tilde{K}_{\theta, v}^p = 2(1 + K_{\theta, v}^p) K_{\theta, v}^p$ .

On achève alors la preuve du théorème 3.1.1 à partir de cette proposition comme au chapitre II ; le cas  $p < 1$  se traite exactement comme au chapitre II également.

CHAPITRE IV

ESPACES DE BERGMAN DE LA BOULE  $B_n$  DE  $\mathbb{C}^n$ .

4.1. PSEUDO METRIQUE SUR  $S_n = \partial B_n$ .

Introduisons la pseudo-distance  $d$  définie par :

$$\underline{\zeta} \in S_n, \underline{\eta} \in S_n, d(\underline{\zeta}, \underline{\eta}) = |1 - \bar{\zeta} \cdot \eta| ; d \text{ est invariante sous l'action de } SU(n) ;$$

étudions quelques unes de ses propriétés :

$$(1.1) \quad \exists K_1 > 0, \forall (\underline{\zeta}, \underline{\eta}, \underline{\xi}) \in S_n^3, d(\underline{\zeta}, \underline{\eta}) \leq K_1 [d(\underline{\xi}, \underline{\zeta}) + d(\underline{\xi}, \underline{\eta})].$$

Pour  $h > 0$ , posons  $R(\underline{\zeta}, h) = \{\underline{\eta} \in S_n, d(\mathbb{1}, \underline{\zeta}) < h\}$  où  $\mathbb{1} = (1, 0, \dots, 0)$  ;

on a alors

$$(1.2) \quad \exists K_2 > 0 \quad \exists K_3 > 0, \forall h > 0, K_2 h^n \leq \sigma_n(R(\underline{\zeta}, h)) \leq K_3 h^n.$$

Soit  $t \in \mathbb{N}$ , considérons la couronne

$$C_{th}(\mathbb{1}) = \{\underline{\zeta} \in S_n, th \leq d(\mathbb{1}, \underline{\zeta}) < (t+1)h\} ; \text{ on a alors}$$

$$(1.3) \quad \exists K_4 > 0 \quad \exists K_5 > 0, ((t+1)h < 1) \implies \\ (K_4 t^{n-1} h^n \leq \sigma_n(C_{th}(\mathbb{1})) \leq K_5 t^{n-1} h^n).$$

Les relations (1.1) et (1.2) peuvent se trouver dans [6]. La relation (1.3) se démontre ainsi :

si  $\underline{\zeta} = (\zeta^1, \dots, \zeta^n)$ ,  $d(\mathbb{1}, \underline{\zeta}) = |1 - \zeta_1|$  ; on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{D}, th \leq |1 - z| < (t+1)h\} ;$$

il vient grâce au lemme (1.2.1) de subordination :

$$\sigma_n(C_{th}(\mathbb{1})) = \alpha_n \int_{\Delta} (1 - |z|^2)^{n-2} d\lambda_1(z), \text{ où}$$

$\alpha_n$  est une constante absolue ; on remarque alors que  $\Delta$  est l'intersection du disque  $\mathbb{D}$  et de la couronne centrée en 1 de rayons  $(th ; (t+1)h)$ .

On en déduit aisément (1.3).

Il existe une constante  $K_6 > 0$ , telle que pour tout  $h > 0$ , il existe un réseau  $\mathfrak{R}_h = \{\underline{\zeta}_k, k \in \mathbb{N}\}$  de points de  $S_n$  vérifiant :

$$(1.4) \quad R(\underline{\zeta}_k, h) \cap R(\underline{\zeta}_\ell, h) = \emptyset \quad \text{si } k \neq \ell.$$

$$(1.5) \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R(\underline{\zeta}_k, K_6 h) = S_n. \quad \text{Voir [6].}$$

Enfin de (1.1) on tire aisément la relation :

$$(1.6) \quad \forall (\underline{\zeta}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}', \underline{\eta}') \in S_n^4, \quad d(\underline{\zeta}, \underline{\eta}) \geq \frac{1}{K_1^2} d(\underline{\zeta}', \underline{\eta}') - \frac{d(\underline{\eta}, \underline{\eta}')}{K_1} - d(\underline{\zeta}, \underline{\zeta}').$$

On a alors

LEMME 4.1.1. Il existe un entier  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $h > 0$ , il existe  $\gamma$  réseaux  $\mathfrak{R}_h^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, \gamma$ , vérifiant que  $S_n$  est l'union des

$$R(\underline{\zeta}, \frac{h}{4K_1^2}) \quad \text{quand } \underline{\zeta} \text{ parcourt } \bigcup_{i=1, \dots, \gamma} \mathfrak{R}_h^{(i)}.$$

Preuve. Soit  $\mathfrak{R}_h^{(0)}$  un réseau vérifiant les relations (1.4) et (1.5) ; soit  $\underline{\zeta}_0$  un point de  $\mathfrak{R}_h^{(0)}$  et soit  $R(\underline{\zeta}_0, K_6 h)$  la boule de centre  $\underline{\zeta}_0$  et de rayon  $K_6 h$  ; utilisant le théorème de [6], il existe une suite

$\{\underline{\zeta}_{0,i}, i = 1, \dots, M\}$  de points de  $R(\underline{\zeta}_0, K_6 h)$  telle que, si on pose

$$h' = \frac{h}{4K_1^2} \quad \text{on ait :}$$

$$a) \quad R(\underline{\zeta}_{0,i}, \frac{h'}{K_6}) \cap R(\underline{\zeta}_{0,j}, \frac{h'}{K_6}) = \emptyset$$

$$b) \quad \bigcup_{i=1}^M R(\underline{\zeta}_{0,i}, h') \supset R(\underline{\zeta}_0, K_6 h).$$

Soit alors  $\underline{\zeta}$  un point de  $\bigcup_{i=1}^M R(\underline{\zeta}_{0,i}, \frac{h'}{K_6})$  ; soit  $i$  l'indice tel que

$\underline{\zeta} \in R(\underline{\zeta}_{0,i}, \frac{h'}{K_6})$  ; on a d'après (1.1) :

$$d(\underline{\zeta}_0, \underline{\zeta}) \leq K_1 [d(\underline{\zeta}_0, \underline{\zeta}_{0,i}) + d(\underline{\zeta}_{0,i}, \underline{\zeta})] \quad \text{d'où :}$$

$$d(\underline{\zeta}_0, \underline{\zeta}) \leq K_1 \left[ K_6 h + \frac{h'}{K_6} \right] \quad \text{donc}$$

$$\bigcup_{i=1}^M R(\underline{\zeta}_{0,i}, \frac{h'}{K_6}) \subseteq R(\underline{\zeta}_0, K_1 (K_6 h + \frac{h'}{K_6}))$$

et d'après (1.2) et la propriété a)

$$K_2 \sum_{i=1}^M \frac{1}{K_6^n} h'^n \leq K_3 K_1^n (K_6 h + \frac{h'}{K_6})^n ; \text{ d'où}$$

$$M \leq \frac{K_3}{K_2} K_1^{3n} K_4^n K_6^n (K_6 + \frac{1}{4K_1^2 K_6})^n ; \text{ et en notant } \gamma \text{ la partie entière}$$

de  $[\frac{K_3}{K_2} K_1^{3n} K_4^n K_6^n (K_6 + \frac{1}{4K_1^2 K_6})^n]$ , on a  $M \leq \gamma$  et  $\gamma$  ne dépend pas de  $h$ .

Clairement si  $\mathfrak{F}_h$  est un réseau jouissant des propriétés (1.4) et (1.5) et si  $u \in \text{SU}(n)$ , alors  $u \mathfrak{F}_h = \{u \underline{\zeta}_k, k \in \mathbb{N}\}$  est encore un réseau possédant les propriétés (1.4) et (1.5) puisque la pseudo métrique est invariante par  $\text{SU}(n)$ ; soit alors  $u_i, i=1, \dots, M$  l'élément de  $\text{SU}(n)$  vérifiant  $u_i \underline{\zeta}_0 = \underline{\zeta}_{0,i}, i=1, \dots, M$  et posons  $\mathfrak{F}_h^{(i)} = u_i \mathfrak{F}_h^{(0)}$ ; alors la suite  $\mathfrak{F}_h^{(i)}, i=1, \dots, M$  répond à la question parce que chaque  $u_i$  transforme une pseudo boule en pseudo boule de même rayon.

#### 4.2 ETUDE D'UNE CONVOLUTION SUR $\text{SU}(n)$ .

On identifie  $\text{SU}(n)$  à  $S_n$  de la manière suivante

$$u \in \text{SU}(n) \longleftrightarrow \underline{\varphi} = u \cdot \mathbb{1} \in S_n.$$

Soit alors pour  $t_0 \in \mathbb{N}, h > 0$  et  $a \geq 0$  la fonction suivante

$$K_{h, t_0, a}(\underline{\zeta}) = \frac{h \chi_{t_0 h}(\underline{\zeta})}{[|1 - \mathbb{1} \cdot \underline{\varphi}|^2 + a^2 h^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

où  $\chi_{t_0 h}(\underline{\zeta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\zeta} \in R(\mathbb{1}, 1) \setminus R(\mathbb{1}, t_0 h) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Posons  $\varphi(t_0, a) = \frac{K_5}{a} \int_{\frac{t_0}{a}}^{+\infty} \frac{y^{n-1} dy}{[y^2 + 1]^{\frac{n+1}{2}}}$  si  $a > 0$

et  $\varphi(t_0, 0) = K_5 \sum_{t \geq t_0} \frac{1}{t^2}$  si  $a = 0$ , on a alors :

LEMME 4.2.1. La fonction  $K_{h, t_0, a}$  appartient à  $L^1(\sigma_n)$  et vérifie  
 $\|K_{h, t_0, a}\| \leq \varphi(t_0, a)$  ; la convolution avec  $K_{h, t_0, a}$  est donc un opérateur  
borné de  $L^p(\sigma_n)$  dans  $L^p(\sigma_n)$  de norme inférieure à  $\varphi(t_0, a)$ .

Preuve. On a  $\int_{\mathbb{S}_n} K_{h, t_0, a}(\varphi) d\sigma_n(\zeta) = \alpha_n \int_{\mathbb{D} \cap \{|1-z| \geq t_0 h\}} \frac{h(1-|z|^2)^{n-2} d\lambda_1(z)}{[|1-z|^2 + a^2 h^2]^{\frac{n+1}{2}}}$

grâce au lemme de subordination, d'où

$$\|K_{h, t_0, a}\|_1 \leq \alpha_n h \sum_{t \geq t_0} \int_{\mathbb{D} \cap \{th \leq |1-z| < (t+1)h\}} \frac{(1-|z|^2)^{n-2}}{|1-z|^{n+1}} d\lambda_1(z)$$

$$\|K_{h, t_0, a}\|_1 \leq h \sum_{t \geq t_0} \frac{1}{[t^2 + a^2]^{\frac{n+1}{2}} h^{n+1}} \sigma_n(C_{th}(1))$$

$$\|K_{h, t_0, a}\|_1 \leq K_5 \sum_{t \geq t_0} \frac{t^{n-1}}{[t^2 + a^2]^{\frac{n+1}{2}}} \text{ grâce à (1.3)}$$

d'où en comparant la série et l'intégrale

$$\|K_{h, t_0, a}\|_1 \leq \varphi(t_0, a) ; \text{ on remarque bien que } \varphi(t_0, a) \text{ ne dépend pas de } h.$$

Puisque  $\sigma_n$  est une mesure invariante par  $SU(n)$ , la convolution avec  $K_{h, t_0, a}$  est bien bornée de  $L^p$  dans  $L^p$  avec comme norme  $\varphi(t_0, a)$ .

On aura aussi besoin du lemme suivant.

LEMME 4.2.2. Soit  $\sigma = \{z_k, k \in \mathbb{N}\}$  une suite séparée dans  $\mathbb{B}_n$  ; alors il

existe une constante positive C telle que :

$$\forall p > 0, \forall f \in A^p(\lambda_n), \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(\underline{z}_k)|^p (1 - |\underline{z}_k|^2)^{n+1} \leq C \|f\|_p^p.$$

Preuve. A  $\underline{z}$  dans  $\mathbb{B}_n$ ,  $\underline{z} \neq \underline{0}$ , on associe la droite complexe  $R_{\underline{z}}$  déterminée par  $\underline{0}$  et  $\underline{z}$ , et l'espace  $T_{\underline{z}}$  orthogonal à  $R_{\underline{z}}$  en  $\underline{z}$  dans  $\mathbb{C}^n$ ;  $T_{\underline{z}}$  est de dimension complexe  $n-1$ ; pour  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , on associe à  $\underline{z}$  le

polydisque  $D_{\underline{z}} = D_{\underline{z}}^1 \times D_{\underline{z}}^2$  où  $D_{\underline{z}}^1 = \{\underline{\varphi} \in R_{\underline{z}}, |\underline{z} - \underline{\varphi}| < \delta(1 - |\underline{z}|^2)\}$  et

$$D_{\underline{z}}^2 = \{\underline{\varphi} \in T_{\underline{z}}, |\underline{z} - \underline{\varphi}| < \delta \sqrt{1 - |\underline{z}|^2}\}; \text{ on a } \lambda_n(D_{\underline{z}}) = \delta^{2n} (1 - |\underline{z}|^2)^{n+1}.$$

Soit maintenant  $\sigma = \{\underline{z}_k, k \in \mathbb{N}\}$ ; il existe  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ; tel que les polydisques  $D_{\underline{z}_k}$  soient disjoints; reprenant alors exactement la preuve du lemme 2.1.1 on montre le lemme 4.2.2.

#### 4.3. REDUCTION DU PROBLEME.

On considère  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq \nu$  et le système de réseaux  $\mathcal{F}_i^{(i)}$   
 $2^{\nu-m}$

$i = 1, \dots, M$ , introduit au paragraphe 1; on définit alors les cellules de la manière suivante :

$$D_{m, \underline{\zeta}_k}^{(i)} = \{\underline{\zeta} \in \mathbb{B}_n, \underline{\zeta} = r\underline{\eta}, 1 - 2^{-m} \leq r < 1 - 2^{-m-1}, \underline{\eta} \in R(\underline{\zeta}_k^{(i)}, \frac{2^{\nu-m}}{4K_1^2})\}.$$

Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{B}_n$ ; il existe donc un entier  $N$  tel que :

$$\forall i = 1, \dots, M, \forall m \geq \nu, \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{card}(\sigma \cap D_{m, \underline{\zeta}_k}^{(i)}) \leq N.$$

Soit  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , définie par :

$$\sigma_i = \bigcup_{m, k} (\sigma \cap D_{m, \underline{\zeta}_k}^{(i)}); \text{ alors } \sigma = \bigcup_{i=1}^M \sigma_i \text{ et il existe } \sigma_{i, j}, j = 1, \dots, N, \text{ telle}$$

$$\text{que } \text{card}(\sigma_{i, j} \cap D_{m, \underline{\zeta}_k}^{(i)}) \leq 1 \text{ et } \bigcup_{j=1}^N \sigma_{i, j} = \sigma_i.$$

Si  $C_m^{(i)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{m, \underline{z}_k^{(i)}}$  posons pour  $k=1, \dots, v$

$$\sigma_{i,j,k} = \bigcup_{m \equiv k \pmod{v}} (\sigma_{i,j} \cap C_m^{(i)}). \text{ On a alors } \sigma = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, M \\ j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, v}} \sigma_{i,j,k}$$

On étudiera  $s = \sigma_{i,j,k}$  pour  $i, j, k$  fixés. Il existe au plus un point de  $s$  dans  $D_{m, \underline{z}_\ell^{(i)}} = D_{m, \ell}$ , on notera  $\underline{z}_{m, \ell}$  ce point et on pose

$$\Lambda_m = \{ \ell \in \mathbb{N}, s \cap D_{m, \ell} \neq \emptyset \} \text{ et}$$

$$s_m = \{ \underline{z}_{m, k}, k \in \Lambda_m \}.$$

L'indice  $i$  étant fixé dans cette étude, soit  $\underline{z}_{m, \ell}$  l'élément  $\zeta_\ell^{(i)}$  du réseau  $\mathcal{R}_{2^{v-m}}^{(i)}$  et soit  $\underline{z}_{m, \ell} = r_{m, \ell} \underline{\eta}_{m, \ell}$ . On a alors :

$$(3.1) \quad \forall m \geq v, \quad \forall \ell \in \Lambda_m, \quad 1 - 2^{-m} \leq r_{m, \ell} < 1 - 2^{-m-1}$$

$$(3.2) \quad (\underline{z}_{m, \ell} \in s, \underline{z}_{m, \ell'} \in s) \implies m \equiv m' \pmod{v}$$

$$(3.3) \quad d(\underline{z}_{m, \ell}, \underline{z}_{m, \ell'}) \leq \frac{2^{-v-m}}{4K_1^2}$$

$$(3.4) \quad \ell \neq k \implies d(\underline{\eta}_{m, \ell}, \underline{\eta}_{m, k}) \geq \frac{2^{-v-m}}{2K_1^2}$$

d'après la relation (1.6).

LEMME 4.3.1. On a : (3.5) 
$$\sum_{\ell \in \Lambda_m} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{m, \ell} \cdot \underline{z}_{m, \ell}|^{n+1}} \leq K_7 \frac{2^{m(n+1)}}{[1 - 2^{-(m'-m)}]}$$

si  $m \neq m'$  et (3.6) 
$$\sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ \ell \neq k}} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{m, \ell} \cdot \underline{z}_{m, k}|^{n+1}} \leq K_8 \psi(v) 2^{m(n+1)}$$
 où  $\psi(v)$  tend

vers 0 quand  $v$  tend vers l'infini.

Preuve. avec les notations ci-dessus on a,  $\exists K_9 > 0$  et  $K_{10} > 0$  t.q. :

$$(3.7) \quad |1 - \bar{z}_{m, \ell} \cdot \underline{z}_{m, k}|^2 \geq K_9 [(2^{-m} + 2^{-m'})^2 + |1 - \bar{\eta}_{m, \ell} \cdot \underline{\eta}_{m, k}|^2]$$



dès que  $d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) < 1$  et

$$(3.8) \quad |1 - \bar{z}_{m,\ell} \cdot z_{m',k}|^2 \geq K_{10} \quad \text{dès que} \quad d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) \geq 1.$$

La somme (3.5) peut donc s'écrire :

$$\sum_{\ell \in \Lambda_m} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{m,\ell} \cdot z_{m',k}|^{n+1}} = I_1 + I_2 \quad \text{avec} \quad I_1 = \sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) < 1}} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{m,\ell} \cdot z_{m',k}|^{n+1}}$$

$$\text{et} \quad I_2 = \sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) \geq 1}} \frac{1}{|1 - \bar{z}_{m,\ell} \cdot z_{m',k}|^{n+1}}.$$

Voyons  $I_1$ . On a grâce à (3.7)

$$I_1 \leq \frac{1}{K_9} \sum_{\ell \in \Lambda_m, d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) < 1} \frac{1}{[(2^{-m} + 2^{-m'})^2 + |1 - \bar{\eta}_{m,\ell} \eta_{m',k}|^2]}.$$

$$\text{Posons} \quad f(\underline{\zeta}) = \sum_{\substack{\ell \in \Lambda_m \\ d(\eta_{m,\ell}, \eta_{m',k}) < 1}} \chi_{B_{m,\ell}}(\underline{\zeta}) \quad \text{et} \quad g(\underline{\eta}) = \chi_{B_{m',k}}(\underline{\eta})$$

avec  $B_{m,\ell} = R(\zeta_{m,\ell}, \frac{2^{-m}}{4K_1})$   $B_{m',k} = R(\zeta_{m',k}, \frac{2^{-m'}}{4K_1})$  et  $\chi_E$  la fonction indicatrice

de  $E$  ; on a  $\|f\|_\infty = 1$  et  $\|g\|_1 \leq K_3 2^{-m'(n+1)}$  ; posons encore  $h = 2^{-m}$ ,

$t_0 = 0$ , et  $a = 1 + 2^{-(m'-m)}$  et appliquons le lemme 4.2.1 ; on a

$$|\langle K_{h,0,a} * f, g \rangle| \leq \varphi(0,a) \|f\|_\infty \|g\|_1$$

ce qui donne aisément, grâce aux relations (3.1) (3.2) (3.3) (3.4).

$$(3.9) \quad I_1 \leq K_{11} \frac{2^{m(n+1)}}{[1 + 2^{-(m'-m)}]} \quad \text{si} \quad m \neq m'.$$

Si  $m = m'$ , on choisit  $t_0 =$  partie entière de  $\frac{2^\nu}{2K_1}$  et  $a = 0$  et il vient :

$$(3.10) \quad I_1 \leq K_{12} \varphi(t_0) 2^{m(n+1)} = K_{12} \psi(\nu) 2^{m(n+1)}$$

avec  $\psi(\nu) = \varphi(t_0) \rightarrow 0$  qd  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Voyons  $I_2$  : On a  $I_2 \leq |\Lambda_m| \leq 2^{(m-\nu)n}$  grâce à (3.8) donc

$$\text{si } m \neq m' \quad I \leq K_7 \frac{2^{m(n+1)}}{[1 + 2^{-(m'-m)}]}$$

$$\text{si } m = m' \quad I \leq K_8 \psi(\nu) 2^{m(n+1)}.$$

Reprenant alors exactement les arguments utilisés dans le cas du disque on montre la

PROPOSITION 4.3.1. Pour  $p > 1$ , pour tout  $\theta$ ,  $\frac{n+1}{q} - 1 < \theta < \frac{n+1}{q}$ , il existe une constante positive  $K_{\theta, \nu}^p$  telle que :

$\Sigma Q_p(m, \ell ; m', k) (1 - |z_{m, \ell}|^2)^\theta \leq K_{\theta, \nu}^p (1 - |z_{m', k}|^2)^\theta$  et  $K_{\nu, \theta}^p$  tend vers 0 quand  $\nu$  tend vers l'infini.

où l'on a posé  $Q_p(m, \ell ; m', k) = \frac{(1 - |z_{m, \ell}|^2)^{\frac{n+1}{p}} (1 - |z_{m', k}|^2)^{\frac{n+1}{q}}}{|1 - \bar{z}_{m, \ell} \cdot z_{m', k}|^{n+1}}$  avec

$(m, \ell) \neq (m', k)$  et 0 sinon.

De cette proposition et utilisant le lemme puis des arguments identiques à ceux du chapitre II on tire le

THEOREME 4.3.1. Soit  $\sigma$  une suite séparée dans  $\mathbb{B}_n$  ; pour  $p > 1$ ,  $\sigma$  est une union finie de suites strictement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  ; pour  $p > 0$   $\sigma$  est une union finie de suites  $\sigma_i$  fortement d'interpolation  $A^p(\lambda_n)$  ; de plus, si  $p$  est inverse d'entiers,  $\sigma_i$  possède la propriété d'extension linéaire bornée de  $\ell^p(\mathbb{N})$  dans  $A^p(\lambda_n)$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. et E. AMAR : Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans  $\mathbb{C}^n$ .  
Preprint n° 167. Analyse Harmonique, Orsay (1975).
- [2] E. AMAR : Méthodes hilbertiennes et interpolation.  
Preprint n° 152. Analyse Harmonique, Orsay (1975).
- [3] E. AMAR : Interpolation dans le polydisque de  $\mathbb{C}^n$ .  
Preprint n° 207. Analyse Harmonique, Orsay (1976).
- [4] E. AMAR : Suites d'interpolation harmonique.  
Preprint n° 217. Analyse Harmonique, Orsay (1976).
- [5] L. CARLESON : An interpolation problem for bounded analytic functions.  
Amer. J. Math. 80 (1958).
- [6] R. COIFMAN et G. WEISS :  
Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces  
homogènes.  
Lect. Notes in Math. n° 242. Springer Verlag (1971).
- [7] F. FORELLI et W. RUDIN :  
Projections on spaces of holomorphic functions in balls.  
Indiana Univ. Math. J. Vol 24 n° 6 (1974).
- [8] T.W. GAMELIN : Uniform Algebras.  
Prentice Hall Series in Modern Math. (1969).
- [9] C. HOROWITZ : Zeros of functions in the Bergman Spaces.  
Bull. Amer. Math. Soc 80 (1974).
- [10] C. HOROWITZ et D. OBERLIN :  
Restriction of  $H^p$  functions to the Diagonal of  $U^n$ .  
Indiana Univ. Math. J. Vol 24 n° 8 (1975).
- [11] V. KABAILA : Interpolation Sequences for the  $H^p$  classes in the case  
 $p < 1$ .  
Litovsk. Mat. Sb. 3 (1963) n° 1.
- [12] A. KORANYI et S. VAGI :  
Intégrales singulières sur certains espaces homogènes.  
C.R.A.S. 268 (1969).
- [13] A.L. SHIELDS et D.L. WILLIAMS :  
Bounded Projections, duality and multipliers in spaces of  
analytic functions.  
T.A.M.S. (162) (1971).
- [14] H. SHAPIRO et A.L. SHIELDS :  
On some interpolations problems for analytic functions.  
Amer. J. Math. 83 (1961).



