

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

24698

n° 152



Méthodes hilbertiennes et interpolation
dans le spectre d'une algèbre de Banach

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

24698

n° 152



Méthodes hilbertiennes et interpolation
dans le spectre d'une algèbre de Banach

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

CHAPITRE I

REPRESENTATIONS D'UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE D'OPÉRATEURS SUR UN ESPACE DE HILBERT.

0. RESUME.

Soit H un espace de Hilbert et soit A une sous-algèbre commutative unitaire de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs sur H .

Dans ce chapitre, on montre l'existence de

1) un espace de Hilbert \mathcal{H}
2) une famille $\{H_I\}_{I \in \mathcal{J}}$ de sous-espaces de \mathcal{H} où \mathcal{J} est l'ensemble des idéaux fermés de A .

3) une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(H)$ isométriquement isomorphe à A
tels que

a) Pour tout $I \in \mathcal{J}$, H_I est invariant par les opérateurs de \mathcal{A} .
b) Le quotient de A par un idéal $I \in \mathcal{J}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}|_{H_I}$ des opérateurs de \mathcal{A} restreints à H_I .

c) \mathcal{A} est complètement réductible sur son spectre

i. e.

Si $\mathcal{M} = \text{Sp } A = \text{Sp } \mathcal{A}$, pour tout $m \in \mathcal{M}$, il existe un sous-espace H_m de \mathcal{H}

tel que :

$$\forall T \in \alpha \quad \forall h \in H_m \quad T(h) = \hat{T}(m)h$$

où $\hat{T}(m)$ désigne la transformée de Gelfand de T au point m .

C'est le résultat c) qui est essentiel dans les questions d'interpolation.

1. NOTATIONS.

a) B est une C^* algèbre unitaire (on peut éventuellement rajouter une unité)

i. e. une algèbre de Banach involutive telle que si $f \in B$, $\|f\|$ désigne la norme de f dans B , f^* l'élément adjoint de f , alors $\|ff^*\| = \|f\|^2$.

b) A désigne une sous-algèbre commutative unitaire et fermée de B .

c) \mathfrak{M} est le spectre de Gelfand de l'algèbre A , A étant unitaire, \mathfrak{M} est compact.

d) $\mathcal{E}(B)$ est l'ensemble des états de l'algèbre B , c'est-à-dire l'ensemble convexe des formes linéaires ℓ , continues sur B et vérifiant

$$\|\ell\| = \ell(1) = 1 \quad \text{où } 1 \text{ est l'élément unité de } B.$$

B étant une C^* -algèbre, $\mathcal{E}(B)$ s'identifie au convexe des formes linéaires positives sur B et de masse 1.

Remarque :

- tout état de B se restreint en un état de A
- tout état de A se prolonge, d'après le théorème de Hahn-Banach en un état de B , donc en une forme linéaire positive sur B .

2. ESPACE DE HILBERT ASSOCIE A UN ETAT.

a) Soit $\ell \in \mathcal{E}(B)$.

Considérons sur B la forme sesquilinéaire :

$$f \in B, \quad g \in B, \quad \langle f | g \rangle_\ell = \ell(g^*f).$$

(Il s'agit de la construction de Gelfand-Naimark-Segal [1]).

Soit $L^2(\ell)$ l'espace de Hilbert complété de B pour le produit scalaire associé.

A s'identifie à un sous-espace de $L^2(\ell)$.

Soit $H^2(\ell)$ l'adhérence de A dans $L^2(\ell)$.

R désigne la représentation régulière gauche de B associée à ℓ définie par :

$$\forall f \in B \quad \forall h \in L^2(\ell) \quad R(f)h = fh$$

$R(f)$ est un opérateur sur $L^2(\ell)$ et on a

$$\|R(f)\|_{\text{op}} \leq \|f\|_B$$

où $\|R(f)\|_{\text{op}}$ est la norme d'opérateur de $R(f)$.

b) On va considérer maintenant une représentation anti-linéaire de A dans $H^2(\ell)$

qui est l'analogie de la représentation de $H^\infty(D)$ par les opérateurs de Toeplitz

co-analytiques dans le cas de l'algèbre du disque $A(D)$. (voir [2]).

Soit P le projecteur orthogonal de $L^2(\ell)$ sur $H^2(\ell)$. On appelle encore R la représentation définie en a) restreinte à A et pour $f \in A$ soit $R^*(f)$ l'adjointe de $R(f)$ dans $\mathcal{L}(L^2(\ell))$.

Pour tout $f \in A$, posons

$$\pi(f) = P R^*(f).$$

On a immédiatement : $\pi(f) = P R^*(f) = P R(f^*)$. $\pi(f)$ est l'analogie d'un opérateur de

Toeplitz co-analytique ($[2]$).

LEMME. π est une représentation anti-linéaire contractante de A dans $\mathcal{L}(H^2(\ell))$.

Démonstration.

π est clairement anti-linéaire.

$$\|\pi(f)\|_{\text{op}} = \|\text{PR}(f^*)\|_{\text{op}} \leq \|\text{R}(f^*)\|_{\text{op}} \leq \|f^\infty\|_B = \|f\|_B.$$

π est multiplicative :

Soient $f \in A$, $g \in A$ et $h \in A$, $k \in A$

$$\begin{aligned} \langle \pi(fg) h | k \rangle_\ell &= \langle P(f^*g^*h) | k \rangle_\ell \\ &= \langle f^*g^*h | k \rangle_\ell \\ &= \ell[k^*g^*f^*h] \\ &= \langle f^*h | gk \rangle_\ell \\ &= \langle P(f^*h) | gk \rangle_\ell \\ &= \langle P(g^*) P f^*h | k \rangle_\ell \\ &= \langle \pi(g) \pi(f) h | k \rangle_\ell \end{aligned}$$

A étant commutative et dense dans $H^2(\ell)$ on a

$$\pi(fg) = \pi(f) \pi(g).$$

c) Soit I un idéal fermé de A . $H^\ell(I)$ désigne l'orthogonal de I dans $H^2(\ell)$.

PROPOSITION.

i. Pour toute $f \in A$, $H^\ell(I)$ est invariant par $\pi(f)$.

ii. La restriction de π à $H^\ell(I)$ est une représentation de l'algèbre quotient

A/I .

Cette proposition est inspirée d'un lemme dû à Cole [3], à la différence que π est l'adjointe de la représentation régulière utilisée par Cole.

Démonstration.

i. Soient $k \in I$, $h \in H^{\ell}(I)$, $f \in A$

$$\begin{aligned} \langle \pi(f)h | k \rangle_{\ell} &= \langle h | fk \rangle_{\ell} \\ &= 0 \text{ puisque } fk \in I \end{aligned}$$

donc : $\forall h \in H^{\ell}(I) \quad \pi(f)h \in H^{\ell}(I)$.

ii. Soient $f \in I$, $h \in H^{\ell}(I)$, $k \in A$

$$\begin{aligned} \langle \pi(f)h | k \rangle_{\ell} &= \langle h | fk \rangle_{\ell} \\ &= 0 \text{ puisque } fk \in I \end{aligned}$$

donc : $\forall h \in H^{\ell}(I) \quad \pi(f)h = 0$

et les restrictions de $\pi(f)$ à $H^{\ell}(I)$ s'annulent sur I et constituent une représentation de A/I dans $\mathcal{L}(H^{\ell}(I))$.

3. DECOMPOSITION POLAIRE DES FORMES LINEAIRES SUR B .

On va définir une décomposition polaire des formes linéaires sur B analogue à celle des mesures sur un espace mesurable.

Soient B' le dual de B et B'' son bidual.

B''_1 désigne la boule unité de B'' .

Soit $\ell \in B'$, $\|\ell\| = 1$; ℓ atteint sa norme en un point $a \in B''_1$ (B''_1 est compacte pour la topologie $\sigma(B'', B')$) tel que $\|a\|_{B''} = 1 = \|\ell\| = \ell(a)$.

On sait que la multiplication d'Arens fait de B'' une C^* -algèbre dans laquelle B se plonge isomorphiquement et isométriquement ([4]).

a^* étant l'adjoint de a dans B'' , a^*B'' est un idéal à droite de B'' .

Soit k la forme linéaire définie sur a^*B'' par :

$$k(a^*x) = \ell(x).$$

Clairement $\|k\| \leq 1$.

D'après Hahn-Banach, k possède une extension dans B'' qu'on note encore k , de norme $\|k\| \leq 1$.

On va montrer que k est un état de B'' .

D'après la définition de k et de a :

$$k(a^*a) = \ell(a) = 1 \quad \text{d'où} \quad \|k\| = 1.$$

B'' étant une C^* -algèbre, pour montrer que k est une forme positive, il suffit de vérifier que :

$$k(\mathbb{1}) = 1.$$

Cette démonstration est classique.

Soit $b = a^*a$; $b^* = b$, donc la C^* -algèbre $[b, \mathbb{1}]$ engendrée par b et $\mathbb{1}$ est commutative.

Si Ω est son spectre, on sait que

- 1) Ω est compact.
- 2) $[b, \mathbb{1}]$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω .

La restriction de k à $[b, \mathbb{1}]$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}(\Omega)$, donc une mesure μ sur Ω .

Si \hat{b} est la transformée de Gelfand de b , il vient :

$$1 = k(b) = k(a^*a) = \int_{\Omega} \hat{b}(\omega) d\mu(\omega) = \|\mu\|.$$

Or 1) $b = a^*a = \hat{b} \geq 0$

$$2) \|b\| = \|a\|^2 = 1 = \|\hat{b}\|_\infty = 1.$$

1) et 2) entraînent que l'on a

$$\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\hat{b}\| = 1 \quad \text{pp}(\mu)$$

$$\text{i. e.} \quad \hat{b} = 1 \quad \text{pp}(\mu)$$

par suite $\mu(1) = \|\mu\| = 1.$

donc $\mu(1) = k(\mathbb{1}) = 1.$

Donc k est bien un état de B'' . Sa restriction à B est également un état et on a :

PROPOSITION. Pour toute ℓ de B' de norme 1, pour tout $a \in B''$ de norme 1 tel que $\ell(a) = 1$, il existe un état $k \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\forall x \in B, \quad \ell(x) = k(a^*x).$$

4. REPRESENTATION ISOMETRIQUE DES QUOTIENTS DE A .

On va montrer la proposition suivante également inspirée par le travail de B. Cole [3].

On reprend les notations du § 2 et on notera π_I^ℓ la représentation de A/I dans $\mathcal{L}(H^\ell(I))$ restriction de π , associée à l'état ℓ de B .

PROPOSITION. Soit I un idéal fermé de A . Pour tout $f \in A$ tel que

$\|f\|_{A/I} = 1$, il existe un état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\|\pi_I^\ell(f)\| = \|f\|_{A/I} = 1.$$

Démonstration. Soit \dot{f} la classe de f dans A/I . f atteint sa norme sur un élément de la boule unité (faiblement compacte) du dual $(A/I)'$ de A/I .

$(A/I)'$ s'identifie à l'ensemble des éléments du dual A' de A qui s'annulent sur I , leur norme étant la norme induite par celle de A' .

Soit donc $\ell \in A'$, $\ell(I) = 0$, $\|\ell\|_{A'} = 1$ telle que $\ell(\dot{f}) = \ell(f) = 1$.

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que

$$\dot{f}_n = \dot{f} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

(cette suite existe puisque $\|f\|_{A/I} = 1$).

Soit a un point faiblement adhérent à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A'' pour la topologie $\sigma(A'', A')$.

Alors $\|a\|_{A''} \leq 1$.

Comme $A'' \subset B''$, on peut appliquer la décomposition polaire définie au § 3.

Il existe $k \in \mathcal{L}(B'')$ tel que :

$$\forall x \in B'' \quad , \quad \ell(x) = k(a^*x)$$

k définit un produit scalaire sur B'' .

Ici $L^2(k)$ sera la fermeture de B'' pour ce produit scalaire, π la représentation associée.

$H^2(k)$ est la fermeture de A dans $L^2(k)$, $H^k(I)$ l'orthogonal de I dans $H^2(k)$ et π_I la restriction de la représentation π à $H^k(I)$.

On vérifie que :

1) $a \in H^k(I)$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans A et admet un point adhérent b dans $H^2(k)$

pour la topologie faible de $L^2(k)$.

b est tel que $\|b\|_{L^2(k)} \leq 1$

et $\langle f_n | a \rangle_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle b | a \rangle_k$.

D'autre part, a étant $\sigma(A'', A')$ adhérent à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une sous-suite

$(f_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f_{n_p} | a \rangle_k = k(a^* f_{n_p}) = \ell(f_{n_p}) = 1 \\ \text{et } k(a^* f_{n_p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} k(a^* a) = \langle a | a \rangle_k. \end{array} \right.$$

$$\text{D'où } \left. \begin{array}{l} \|a\|_{L^2(k)} \leq 1 \\ \|b\|_{L^2(k)} \leq 1 \\ \langle a | b \rangle_k = 1 \end{array} \right\} a = b$$

donc $a \in H^2(k)$.

Si $x \in I$ $\langle x | a \rangle_k = k(a^* x) = \ell(x) = 0$

d'où a est orthogonal à I .

2) $\mathbb{1} \in H^k(I)$.

(*) $\langle \pi(f) a | \mathbb{1} \rangle_k = \langle a | f \rangle_k = k(f^* a) = \overline{k(a^* f)} = \overline{\ell(f)} = 1$

et $\pi(f)a \in H^k(I)$ puisque $H^k(I)$ est invariant par $\pi(f)$.

D'autre part,

$$\|\pi(f_n)\|_{op} \leq \|f_n\|_A \quad \text{et} \quad \|f_n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

d'où

(**) $\|\pi(f)a\|_{H^k(I)} \leq 1$.

De (*) et (**) on déduit que $\pi(f)a = \mathbb{1}$ donc $\mathbb{1} \in H^k(I)$.

De 1) et 2) on peut déduire

$$1 \geq \|\pi_I(f)\| \geq |\pi_I(f)a| \pi\rangle| = 1 \\ \Rightarrow \|\pi_I(f)\| = 1.$$

On en déduit la représentation isométrique :

Pour tout état $\ell \in \mathcal{E}(B)$, soit H^ℓ l'espace de Hilbert construit au § 2 et soit π^ℓ la représentation associée ($H^\ell = H^2(\ell)$).

Soit $H^\ell(I)$ le sous-espace orthogonal à l'idéal I dans H^ℓ .

Soit $\mathcal{H} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} H^\ell$ l'espace de Hilbert somme hilbertienne des espaces $(H^\ell)_{\ell \in \mathcal{E}(B)}$

$$\pi = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} \pi^\ell.$$

Pour tout idéal I fermé de A on définit de même

$$\mathcal{H}(I) = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} H^\ell(I) \\ \pi_I = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{E}(B)} \pi_I^\ell.$$

Alors on a

- 1) $\mathcal{H}(I)$ est un sous-espace de Hilbert de \mathcal{H} et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{0\})$
- 2) π_I est une représentation anti-linéaire isométrique de A/I .

En particulier, A est isométriquement isomorphe à $\mathcal{A} = \pi(A)$ (anti-linéairement).

Remarque 1. Pour obtenir des représentations linéaires, on considère l'algèbre

A^* adjointe de l'algèbre A .

Remarque 2. A. Bernard [5] a montré un résultat analogue. Si A est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(H)$, I un idéal bilatère de A , alors A/I est encore une algèbre d'opérateurs.

5. VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES DE $\pi(f)$.

Les résultats précédents sont essentiellement analogues à ceux obtenus par Cole et l'intérêt de considérer la représentation adjointe de celle de Cole ne va apparaître que maintenant.

Soit $\ell \in \mathcal{L}(B)$ et soit π^ℓ la représentation associée de A dans $\mathcal{L}(H^\ell)$ introduite au § 2.

Soit $\mathcal{M} = \text{Sp } A$.

Si $m \in \mathcal{M}$, et $\hat{f}(m)$ la transformée de Gelfand de f au point m , on définit

$$I_m = \{f \in A, \hat{f}(m) = 0\}.$$

I_m est un idéal fermé de A .

Appelons $H^\ell(m)$ l'orthogonal de I_m dans H^ℓ .

Alors, ou bien $H^\ell(m) = \{0\}$,

ou bien $H^\ell(m)$ est un sous-espace de dimension 1 de H^ℓ .

En effet, si $h \in H^\ell(m)$, pour tout $f \in A$,

$$\begin{aligned} \langle h | f - \hat{f}(m) \mathbb{1} \rangle_\ell &= 0 \\ \langle h | f \rangle_\ell &= \overline{\hat{f}(m)} \langle h | \mathbb{1} \rangle \end{aligned}$$

et A est dense dans H^ℓ .

Notation. Si $H^\ell(m)$ n'est pas nul, on pose e_m^ℓ le vecteur unitaire de $H^\ell(m)$ tel que $\langle \mathbb{1} | e_m^\ell \rangle$ est positif.

Si $H^\ell(m)$ est nul, on pose $e_m^\ell = 0$.

Remarque. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $H^\ell(m)$ est nul.

2) $\mathbb{1}$ appartient à la fermeture de I_m dans H^ℓ .

3) I_m est dense dans H^ℓ .

Soit $f \in A$; $f - \hat{f}(m)\mathbb{1} \in I_m$ donc $\langle f - \hat{f}(m)\mathbb{1} | e_m^\ell \rangle_\ell = 0$; d'où la formule

$$(*) \quad \forall m \in \mathcal{M}; \quad \langle f | e_m^\ell \rangle_\ell = \hat{f}(m) \langle \mathbb{1} | e_m^\ell \rangle_\ell.$$

Si $\langle \mathbb{1} | e_m^\ell \rangle_\ell$ est non nul, on pourra définir $\hat{f}(m)$ pour tout $f \in H^\ell$ par la formule (*).

L'état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ étant fixé, on omettra l'indice ℓ dans la suite du paragraphe.

PROPOSITION. Pour tout $f \in A$, e_m est vecteur propre de $\pi(f)$ pour la valeur propre $\overline{\hat{f}(m)}$.

Démonstration.

Si $e_m = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Si $e_m \neq 0$, $\langle \mathbb{1} | e_m \rangle$ est positif strictement.

Soient $k \in A$, $f \in A$,

$$\begin{aligned} \langle \pi(f) e_m | k \rangle &= \langle e_m | fk \rangle \\ &= \overline{\hat{fk}(m)} \langle e_m | \mathbb{1} \rangle \quad \text{par } (*) \\ &= \overline{\hat{f}(m)} \overline{\hat{k}(m)} \langle e_m | \mathbb{1} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \langle \pi(f) e_m | k \rangle = \overline{\hat{f}(m)} \langle e_m | k \rangle \quad \text{par } (*)$$

$$(**) \quad \forall m \in \mathcal{M}; \quad \pi(f) e_m = \overline{\hat{f}(m)} e_m.$$

On note $\rho_\ell(m) = \langle \mathbb{1} | e_m^\ell \rangle_\ell$.

DEFINITIONS. On appellera enveloppe spectrale de l'état $\ell \in \mathcal{E}(B)$ relativement à A l'ensemble

$$\mathcal{M}^\ell = \{m \in \mathcal{M}_b; \rho_\ell(m) > 0\}.$$

On appellera support spectral de l'état ℓ la fermeture $\overline{\mathcal{M}^\ell}$ de \mathcal{M}^ℓ pour la topologie de Gelfand du spectre \mathcal{M}_b .

PROPOSITION. Soit $D_\delta = \{m \in \mathcal{M}^\ell; \rho(m) \geq \delta\}$ où δ est un nombre strictement positif.

Si $f \in H^\ell$, f est continue sur D_δ .

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A convergeant vers f dans H^ℓ , c'est-à-dire $\|f_n - f\|_{H^\ell} \rightarrow 0$.

D'après (*), il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{m \in D_\delta} |\hat{f}(m) - \hat{f}_n(m)| &= \sup_{m \in D_\delta} \left| \frac{1}{\rho(m)} \langle f - f_n | e_m \rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \|f - f_n\|_{H^\ell}. \end{aligned}$$

Les f_n étant continues sur D_δ , f est continue.

Conclusion. Si A est une sous-algèbre commutative unitaire de l'algèbre des opérateurs continus d'un espace de Hilbert H , on a montré que A est isométriquement isomorphe à $\mathcal{A} = \pi(A)$ incluse dans l'algèbre d'opérateurs $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et complètement réduite, i. e. :

Pour tout $m \in \text{Sp } A$, il existe un sous-espace de Hilbert $H(m)$ de \mathcal{H} tel que :

$$\forall h \in H(m), \quad \forall T \in \mathcal{A}, \quad T(h) = \hat{T}(m) h$$

où $T(m)$ est la transformée de Gelfand de T au point m .

On appellera $\mathcal{A} = \pi(A)$ la représentation spectrale isométrique de A .

CHAPITRE II

ENSEMBLES D'INTERPOLATION.

1. ENSEMBLES D'INTERPOLATION.

Si \mathcal{M} est le spectre de l'algèbre A , on considère une partie finie σ de \mathcal{M} : $\sigma \in \mathcal{M}$; $\text{card } \sigma < +\infty$.

On dira que σ est un ensemble d'interpolation pour A si

$$\forall \omega \in \ell^\infty(\sigma), \exists f \in A, \forall m \in \sigma \quad \hat{f}(m) = \omega(m)$$

σ étant fini, il existe une constante positive C telle que

$$\forall \omega \in \ell^\infty(\sigma), \exists f \in A, \forall m \in \sigma \quad \hat{f}(m) = \omega(m) ; \|f\|_A \leq C \|\omega\|_\infty.$$

On considère maintenant un sous-ensemble σ de \mathcal{M} de cardinal quelconque.

DEFINITION. Soit $\sigma \subset \mathcal{M}$; on dira que σ est un ensemble d'interpolation de type $I(c)$ si pour toute partie finie $\tilde{\sigma}$ de σ , $\tilde{\sigma}$ est d'interpolation de constante c .

Remarque. Si $\text{Card } \sigma = +\infty$, on interpole un élément de $\ell^\infty(\sigma)$ en général dans le bidual A'' de A et non dans A .

Soit $\sigma \subset \mathcal{M}$, σ de type I(c) et soit $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$

$\forall \tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\text{card } \tilde{\sigma} < +\infty$, $\exists f_{\tilde{\sigma}} \in A$:

a) $\forall m \in \tilde{\sigma} \quad \hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$

b) $\|f_{\tilde{\sigma}}\| \leq C \|\omega\|_{\ell^\infty(\sigma)} \leq C \|\omega\|_{\ell^\infty(\sigma)}$.

Soit $\mathcal{P}_F(\sigma)$ l'ensemble des parties finies de σ ordonné par l'inclusion.

$\{f_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{P}_F(\sigma)}$ est une famille filtrante dans la boule de rayon $c \|\omega\|_\infty$ de A

donc de A'' (on plonge isométriquement A dans A'').

Cette boule est faiblement compacte et il existe un point $f \in A''$ faiblement

adhérent à $\{f_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma}}$. Si on considère l'élément φ_m , évaluation au point m du spectre, du dual A' de A on a :

a) $\varphi_m(f_{\tilde{\sigma}}) = \hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$

b) $\|f\|_{A''} \leq c \|\omega\|_\infty$

on en déduit $\varphi_m(f) = \hat{f}(m) = \omega(m)$.

2..CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'INTERPOLATION.

Soit $\sigma \subset \mathcal{M}$, on définit

$$I_\sigma = \{f \in A \quad \forall m \in \sigma, \quad \hat{f}(m) = 0\}.$$

I_σ est un idéal fermé de A .

Si $\ell \in \mathcal{E}(B)$ est un état de B , on note π_σ^ℓ la représentation spectrale $\pi_{I_\sigma}^\ell$ associée à ℓ et à I_σ (chapitre I, § 4).

Soit $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ l'ensemble des vecteurs propres associés.

\mathcal{A}_σ^ℓ désigne l'algèbre des opérateurs de $H^\ell(I_\sigma)$ qui "diagonalisent" dans le

système $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_\sigma^\ell = \left\{ T \in \mathcal{L}(H^\ell(I_\sigma)) ; \forall m \in \sigma ; \exists \hat{T}(m) \in \mathbb{C} ; T(e_m) = \hat{T}(m) e_m \right\}.$$

\mathcal{A}_σ^ℓ est une algèbre fermée pour la topologie faible des opérateurs.

Clairement, on a $\pi_\sigma^\ell(A) \subset \mathcal{A}_\sigma^\ell$.

On dira que \mathcal{A}_σ^ℓ est d'interpolation I(c) si $\forall \omega \in \ell^\infty(\sigma) ; \exists T \in \mathcal{A}_\sigma^\ell ;$

$$\|T\| \leq C \|\omega\|_\infty$$

$$\forall m \in \sigma \quad \hat{T}(m) = \omega(m).$$

LEMME 1. Si σ est un ensemble d'interpolation de type I(c), pour tout état $\ell \in \mathcal{E}(B)$, \mathcal{A}_σ^ℓ est d'interpolation I(c).

Démonstration. Soit $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$

$\forall \tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\text{card } \tilde{\sigma} < +\infty$, $\exists f_{\tilde{\sigma}} \in A$,

$$1) \quad \forall m \in \tilde{\sigma} \quad \hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$$

$$2) \quad \|f_{\tilde{\sigma}}\|_A \leq C \|\omega\|_\infty.$$

Posons $T_{\tilde{\sigma}} = \pi_{\tilde{\sigma}}^\ell(f_{\tilde{\sigma}})$.

Il vient : 1) $\forall m \in \tilde{\sigma} \quad T_{\tilde{\sigma}}(e_m) = \omega(m) e_m$

d'où $(\forall m \in \tilde{\sigma}) ; (e_m \neq 0) \Rightarrow \hat{T}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$

$$2) \quad \|T_{\tilde{\sigma}}\| \leq C \|\omega\|_\infty.$$

Soit E_σ^ℓ l'adhérence dans $H^\ell(I_\sigma)$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs $\{e_m\}_{m \in \sigma}$.

E_σ^ℓ est un sous-espace de Hilbert de $H^\ell(I_\sigma)$.

Montrons que $\{T_{\tilde{\sigma}}\}_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{P}_F(\sigma)}$ converge fortement sur E_σ^ℓ :

Soit P le projecteur orthogonal sur E_σ^ℓ on va montrer que $\{T_{\tilde{\sigma}}P\}_{\tilde{\sigma}}$ converge fortement. Soit donc $h \in E_\sigma^\ell$ et soit $h_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_{m_i}$ tel que $\|h - h_\varepsilon\| < \varepsilon$.

On a : $T_{\tilde{\sigma}}P(h_\varepsilon) = T_{\tilde{\sigma}}(h_\varepsilon) = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_{\tilde{\sigma}}(e_{m_i})$ d'où $\{T_{\tilde{\sigma}}P(h_\varepsilon)\}_{\tilde{\sigma}}$ converge puisque constant dès que $\tilde{\sigma}$ contient $\{m_1, \dots, m_k\}$.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \|T_{\tilde{\sigma}}P(h) - T_{\tilde{\sigma}}P(h_\varepsilon)\| &\leq \|T_{\tilde{\sigma}}\| \|h - h_\varepsilon\| \\ &\leq C \|\omega\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc le filtre $\{T_{\tilde{\sigma}}P\}_{\tilde{\sigma}}$ converge fortement sur $H^\ell(I_\sigma)$ vers un opérateur T .

Mais $P \in \alpha_\sigma^\ell$

en effet, $\forall m \in \sigma \quad P(e_m) = e_m$

$$T_{\tilde{\sigma}} \in \alpha_\sigma^\ell$$

donc le produit $T_{\tilde{\sigma}}P \in \alpha_\sigma^\ell$ et $T \in \alpha_\sigma^\ell$

de plus T interpole ω .

Remarque 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $H^\ell(I_\sigma) = E_\sigma^\ell$

(ii) $P = I$

(iii) $\langle h | e_m \rangle_\ell = 0$ si et seulement si h appartient à la fermeture de I_σ dans $H^\ell(I_\sigma)$.

Remarque 2. $H^\ell(I_\sigma)$ peut être différent de E_σ^ℓ comme on le montrera dans le cas particulier des algèbres uniformes.

LEMME 2. (réciproque). Soit $\sigma \subset \mathcal{M}$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{E}(B)$, α_σ^ℓ soit d'interpolation $I(c)$ (c indépendant de ℓ). Alors σ est un ensemble d'interpolation de type $I(c)$ dans A .

Démonstration. Soit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\text{card } \tilde{\sigma} < +\infty$. Soit $\omega \in \ell^\infty(\tilde{\sigma})$.

$\tilde{\sigma}$ étant fini, il existe $f_{\tilde{\sigma}} \in A$ tel que $\forall m \in \tilde{\sigma}, \hat{f}_{\tilde{\sigma}}(m) = \omega(m)$.

Pour tout $\ell \in \mathcal{E}(B)$, il existe $T \in \alpha_\sigma^\ell$ tel que si $e_m^\ell \neq 0$ $\hat{T}(m) = \overline{\omega(m)}$

$$\|T\| \leq C \|\omega\|_\infty$$

mais $T \Big|_{E_{\tilde{\sigma}}^\ell} = \pi_{\tilde{\sigma}}^\ell(f_{\tilde{\sigma}})$ d'où

$$\|\pi_{\tilde{\sigma}}^\ell(f_{\tilde{\sigma}})\| = \|T\|_{E_{\tilde{\sigma}}^\ell} \leq C \|\omega\|_\infty.$$

On sait qu'il existe $\ell \in \mathcal{E}(B)$ tel que

$$\|f_{\tilde{\sigma}}\|_{A/I_{\tilde{\sigma}}} = \|\pi_{\tilde{\sigma}}^\ell(f_{\tilde{\sigma}})\|.$$

Choisissant cet état particulier, il vient

$$\|f_{\tilde{\sigma}}\|_{A/I_{\tilde{\sigma}}} \leq C \|\omega\|_\infty.$$

La définition de la norme quotient permet de déduire le lemme 2.

On peut résumer les lemmes 1 et 2 dans la

PROPOSITION. Pour que $\sigma \subset \mathcal{M}$ soit d'interpolation $I(c)$ dans A , il faut et il suffit que pour tout $\ell \in \mathcal{E}(B)$, α_σ^ℓ soit d'interpolation $I(c)$.

Remarque. Dans la proposition on peut supprimer partout $I(c)$.

On va étudier les algèbres α_σ^ℓ .

3. INTERPOLATION DANS UN ESPACE DE HILBERT.

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ une famille de vecteurs unitaires de H .

DEFINITION. On dira que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ est un ensemble d'interpolation dans H si l'application R définie par

$$R \begin{cases} H \longrightarrow \ell^2(\sigma) \\ h \longrightarrow \{\langle h | e_m \rangle\}_{m \in \sigma} \end{cases}$$

est une surjection continue de H sur $\ell^2(\sigma)$, c'est-à-dire que

1) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h \in H \quad \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2.$$

2) $\forall \lambda \in \ell^2(\sigma)$; $\exists h \in H$; $\forall m \in \sigma \quad \langle h | e_m \rangle = \lambda_m$

on sait qu'alors il existe une constante K telle qu'il existe $h \in H$ vérifiant de plus

$$\|h\|^2 \leq K^2 \sum_{m \in \sigma} |\lambda_m|^2. \quad \text{Shapiro et Shields [7] appellent ces ensembles des ensembles$$

de Riesz-Fischer.

Sur ces questions, on peut voir aussi Nina Bari [8].

Soit E_σ l'adhérence dans H des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_m\}_{m \in \sigma}$.

PROPOSITION. Pour que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H ,
il faut et il suffit qu'il existe une base orthonormale $\{\epsilon_m\}_{m \in \sigma}$ de E_σ et un opérateur
bicontinu Q de $\mathcal{L}(E_\sigma)$ tels que

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad e_m = Q \epsilon_m.$$

Démonstration. Il est clair qu'on peut supposer $H = E_\sigma$.

a) Supposons l'existence de l'opérateur Q tel que :

$$Q \in \mathcal{L}(E_\sigma) \quad , \quad Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_\sigma) \quad , \quad e_m = Q \epsilon_m.$$

Si $h \in E_\sigma$

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad \langle h | e_m \rangle = \langle h | Q \epsilon_m \rangle = \langle Q^* h | \epsilon_m \rangle$$

$$\text{et } \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 = \|Q^* h\|^2$$

$$\text{d'où } \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq \|Q\|^2 \|h\|^2.$$

2) Soit $\lambda = \{\lambda_m\}_{m \in \sigma}$ un élément de $\ell^2(\sigma)$.

Si $k = \sum_{m \in \sigma} \lambda_m \varepsilon_m$, k est un élément de E_σ .

Soit $h = Q^{*-1} k$.

Alors $h \in E_\sigma$

$$\begin{aligned} \forall m \in \sigma, \quad \langle h | e_m \rangle &= \langle Q^{*-1} k | e_m \rangle \\ &= \langle k | Q^{-1} e_m \rangle \\ &= \langle k | \varepsilon_m \rangle = \lambda_m. \end{aligned}$$

$$\text{De plus } \|h\|^2 \leq \|Q^{-1}\|^2 \|k\|^2.$$

b) Réciproque. Supposons que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ soit d'interpolation dans H .

R est une bijection bicontinue de E_σ sur $\ell^2(\sigma)$.

Il suffit de vérifier que R est injective.

Soit $h \in E_\sigma$ tel que $Rh = 0$.

$$Rh = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \sigma \quad \langle h | e_m \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow h \text{ orthogonal à } E_\sigma$$

$$\Leftrightarrow h = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\forall h \in E_\sigma \quad \frac{1}{\|R^{-1}\|^2} \|h\|^2 \leq \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq \|R\|^2 \|h\|^2.$$

Soit $\{\varepsilon_m\}_{m \in \sigma}$ une base orthogonale de E_σ .

On définit Q sur le sous-espace engendré par $\{\varepsilon_m\}_{m \in \sigma}$ par :

$$\forall m \in \sigma \quad , \quad Q \varepsilon_m = e_m.$$

L'opérateur Q est, a priori, à domaine dense dans E_σ . Soit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\text{card } \tilde{\sigma} < +\infty$ et soit $h \in E_{\tilde{\sigma}}$, le sous-espace engendré par $\{e_m\}_{m \in \tilde{\sigma}}$.

Des inégalités

$$\frac{1}{\|R^{-1}\|^2} \|h\|^2 \leq \sum_{m \in \sigma} |\langle Q^*h | \varepsilon_m \rangle|^2 \leq \|R\|^2 \|h\|^2$$

on peut déduire

$$\frac{1}{\|R^{-1}\|^2} \|h\|^2 \leq \|Q^*h\|^2 \leq \|R\|^2 \|h\|^2.$$

Q^* est bicontinue sur $E_{\tilde{\sigma}}$ et donc Q également.

Pour expliciter les ensembles d'interpolation, on introduit une définition.

DEFINITION. On dira que $\{e_m\}$ et $\{\rho_m\}_{m \in \sigma}$ forment un système biorthonormal

dans H si

$$\langle \rho_m | e_{m'} \rangle = \delta_{mm'} \quad (\text{où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker}).$$

On dit que le système est complet si

$$\begin{aligned} \forall h \in H \quad h &= \sum_{m \in \sigma} \langle h | e_m \rangle \rho_m \\ &= \sum_{m \in \sigma} \langle h | \rho_m \rangle e_m \end{aligned}$$

les séries du second membre convergeant dans l'espace de Hilbert H .

cf. Nina Bari [8] ; Riesz-Nagy [9].

On pose toujours $E_{\tilde{\sigma}}$ l'espace engendré par $\{e_m\}_{m \in \tilde{\sigma}}$.

PROPOSITION. $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ est un ensemble d'interpolation dans H si et seule-

ment si :

1) il est topologiquement libre

2) il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute partie $\tilde{\sigma} \subset \sigma$ et pour tout
vecteur $h \in E_{\tilde{\sigma}}$ on ait

$$a) \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$$

$$b) \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | \rho_m^{\tilde{\sigma}} \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$$

où $\{\rho_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ désigne la famille associée à $\{\rho_m^{\sigma}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ pour former un système
biorthonormal dans $E_{\tilde{\sigma}}$.

Démonstration.

(i) Supposons que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H .

Alors il existe une base orthonormale $\{\epsilon_m\}_{m \in \sigma}$ et un opérateur $Q \in \mathcal{L}(E_{\sigma})$ tel que

$$Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_{\sigma})$$

$$\forall m \in \sigma, \quad Q \epsilon_m = e_m.$$

Posons $\rho_m = Q^{*-1} \epsilon_m$; il vient

$$\begin{aligned} \langle \rho_m | e_{m'} \rangle &= \langle Q^{*-1} \epsilon_m | Q \epsilon_{m'} \rangle \\ &= \langle \epsilon_m | \epsilon_{m'} \rangle \\ &= \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Donc $\{\rho_m\}_{m \in \sigma}$ et $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ forment un système biorthonormal dans E_{σ} .

Si $\rho_m^{\tilde{\sigma}}$ est la projection de ρ_m sur $E_{\tilde{\sigma}}$, il est clair que $\{\rho_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ et $\{e_m\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ forment un système biorthonormal de $E_{\tilde{\sigma}}$.

De plus pour tout $h \in E_{\tilde{\sigma}}$

$$\begin{aligned} a) \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | e_m \rangle|^2 &= \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | Q \epsilon_m \rangle|^2 \\ &\leq \|Q\|^2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sum_{m \in \sigma} |\langle h | \rho_m^{\tilde{\sigma}} \rangle|^2 &= \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | \rho_m \rangle|^2 \\
 &= \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle Q^{-1} h | \epsilon_m \rangle|^2 \\
 &\leq \|Q^{-1}\|^2 \|h\|^2.
 \end{aligned}$$

(ii) Réciproque. Soit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, $\text{card } \tilde{\sigma} < +\infty$. $\{e_m\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ étant une famille libre, on peut définir les vecteurs $\{\rho_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ de $E_{\tilde{\sigma}}$ par $\langle e_{m'}, | \rho_m^{\tilde{\sigma}} \rangle = \delta_{mm'}$.

Soit $\{\epsilon_m^{\tilde{\sigma}}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ une base orthonormale de $E_{\tilde{\sigma}}$ et $Q^{\tilde{\sigma}}$ l'opérateur de $\mathcal{L}(E_{\tilde{\sigma}})$ tel que : $\forall m \in \tilde{\sigma}$, $Q^{\tilde{\sigma}}(\epsilon_m^{\tilde{\sigma}}) = e_m$.

Alors par hypothèse, on a les relations (R) suivantes pour tout $h \in E_{\tilde{\sigma}}$.

$$\left(\begin{aligned}
 \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | e_m \rangle|^2 &= \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle Q^{\tilde{\sigma}*} h | \epsilon_m^{\tilde{\sigma}} \rangle|^2 \\
 &= \|Q^{\tilde{\sigma}*} h\|^2 \leq C^2 \|h\|^2. \\
 \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | \rho_m^{\tilde{\sigma}} \rangle|^2 &= \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle Q_{\tilde{\sigma}}^{-1} h | \epsilon_m^{\tilde{\sigma}} \rangle|^2 \\
 &= \|Q_{\tilde{\sigma}}^{-1} h\|^2 \leq C^2 \|h\|^2.
 \end{aligned} \right.$$

Les relations (R) entraînent

$$\begin{aligned}
 \|Q^{\tilde{\sigma}}\| &\leq C \\
 \|Q_{\tilde{\sigma}}^{-1}\| &\leq C.
 \end{aligned}$$

La famille $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ étant topologiquement libre et engendrant E_{σ} , il existe une base $\{\epsilon_m\}_{m \in \sigma}$ orthonormale dans E_{σ} .

Soit Q l'opérateur à domaine dense dans E_{σ} tel que :

$$\forall m \in \sigma, \quad Q \epsilon_m = e_m.$$

Les relations (R) permettent de montrer que

$$\begin{cases} Q \in \mathcal{L}(E_\sigma), & Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_\sigma) \\ \|Q\| \leq c \\ \|Q^{-1}\| \leq c. \end{cases}$$

En effet, pour toute partie $\tilde{\sigma}$ finie de σ , il existe un opérateur $U^{\tilde{\sigma}}$ unitaire tel que

$$\forall m \in \tilde{\sigma} \quad \varepsilon_m^{\tilde{\sigma}} = U^{\tilde{\sigma}}(\varepsilon_m).$$

On peut alors calculer la norme de Q et Q^{-1} sur le sous-ensemble dense des combinaisons linéaires de $\{\varepsilon_m\}_{m \in \sigma}$, $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ respectivement.

On prolonge alors Q par l'identité sur l'orthogonal de E_σ et on obtient la proposition.

COROLLAIRE 1. $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ est un ensemble d'interpolation dans H si et seulement s'il existe un ensemble $\{\rho_m\}_{m \in \sigma}$ formant avec $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ un système orthonormal complet dans E_σ .

Démonstration : par le théorème du graphe fermé.

Posons, pour tout $m \in \sigma$,

$$e'_m = \frac{\rho_m}{\|\rho_m\|}.$$

COROLLAIRE 2. Pour que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H il faut

1. les idempotents élémentaires (i. e. ρ_m , $m \in \sigma$) soient uniformément bornés dans E'_σ .
2. il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in E_\sigma$



$$a) \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$$

$$b') \sum_{m \in \sigma} |\langle h | e'_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2.$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition.

4. INTERPOLATION POUR LES ALGÈBRES DE TYPE \mathcal{A}_σ .

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ une famille de vecteurs unitaires de H , topologiquement indépendants.

On appelle \mathcal{A}_σ l'algèbre définie par :

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ T \in \mathcal{L}(H), \forall m \in \sigma \quad \exists \hat{T}(m) \in \mathbb{C}, T \cdot e_m = \hat{T}(m) e_m \right\}.$$

On va faire le lien entre l'interpolation dans un espace de Hilbert et une algèbre d'opérateurs et on montre la proposition

PROPOSITION. Pour que \mathcal{A}_σ soit une algèbre d'interpolation, il faut et il suffit que $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ soit un ensemble d'interpolation dans H .

Rappel. Dire que \mathcal{A}_σ est d'interpolation signifie :

$$\forall \omega \in \ell^\infty(\sigma) \quad \exists T \in \mathcal{A}_\sigma, \quad \forall m \in \sigma, \quad \hat{T}(m) = \omega(m).$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ tel qu'il existe $T \in \mathcal{A}_\sigma$ vérifiant :

$$\forall m \in \sigma \quad \hat{T}(m) = \omega(m)$$

$$\|T\| \leq C \|\omega\|_\infty.$$

Démonstration.

a) Supposons $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ d'interpolation dans H . Alors il existe $\{\epsilon_m\}_{m \in \sigma}$

une base orthonormale de l'espace E_σ engendré par $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ et un opérateur

$Q \in \mathcal{L}(E_\sigma)$ tels que :

$$1) Q^{-1} \in \mathcal{L}(E_\sigma)$$

$$2) \forall m \in \sigma, Q e_m = e_m.$$

Soit P_m le projecteur orthogonal sur e_m .

Si $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$, soit $S = \sum_{m \in \sigma} \omega(m) P_m$.

Alors : $S \in \mathcal{L}(E_\sigma)$

$$\|S\| \leq \|\omega\|_\infty.$$

Posons $T = Q \circ S \circ Q^{-1}$.

Alors : 1) $T \in \mathcal{L}(E_\sigma)$

$$2) \|T\| \leq \|Q\| \|Q^{-1}\| \|\omega\|_\infty$$

$$\begin{aligned} 3) T e_m &= Q \circ S e_m = \omega(m) Q e_m \\ &= \omega(m) e_m. \end{aligned}$$

Si P est le projecteur orthogonal de H sur E_σ alors $T \circ P \in \mathcal{A}_\sigma$ et $T \circ P$ interpole $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$.

b) réciproque ; supposons que \mathcal{A}_σ soit d'interpolation de type $I(C)$.

Soit σ une partie finie de σ ; \mathcal{A}_σ laisse E_σ invariant et on a

$\forall \omega \in \ell^\infty(\sigma), \exists T_\omega \in \mathcal{A}_\sigma ;$

$$1) \forall m \in \sigma, \hat{T}_\omega(m) = \omega(m)$$

$$2) \|T_\omega\| \leq C \|\omega\|_\infty.$$

Soit $h \in E_\sigma$, h peut s'écrire

$$h = \sum_{m \in \sigma} h_m e_m \quad h_m \in \mathbb{C}.$$

D'après l'hypothèse 2)

$$\begin{aligned} \|T_\omega h\|^2 &= \left\| \sum_{m \in \tilde{\sigma}} h_m \omega(m) e_m \right\|^2 \\ &\leq C^2 \|\omega\|_\infty^2 \|h\|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C^2 \left\| \sum_{m \in \tilde{\sigma}} h_m e_m \right\|^2 &\geq \sup_{\|\omega\|_\infty=1} \left\| \sum_{m \in \tilde{\sigma}} \omega(m) h_m e_m \right\|^2 \\ C^2 \|h\|^2 &\geq \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |h_m|^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité (*) se démontre par récurrence sur $\text{card } \tilde{\sigma}$.

Supposons la vérifiée pour $\text{card } \tilde{\sigma} \leq n$ et soit alors $\text{card } \tilde{\sigma} = n+1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \omega_k h_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k h_k e_k \right\|^2 + |\omega_{n+1} h_{n+1}|^2 + 2 \text{Re } \omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | \sum_{k=1}^n \omega_k h_k e_k \rangle$$

$$\text{Soit } u_\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k h_k e_k.$$

Par hypothèse on peut choisir $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ tels que $\|u_\omega\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |h_k|^2$.

On choisit ω_{n+1} tel que
$$\begin{cases} |\omega_{n+1}| = 1 \\ 2 \text{Re } \omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | u_\omega \rangle \geq 0 \end{cases}$$

d'où $\|u_\omega + \omega_{n+1} h_{n+1} e_{n+1}\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n+1} |h_k|^2$.

Si $\omega \in \ell^\infty(\sigma)$ est tel que, $\forall m \in \tilde{\sigma}, |\omega(m)| = 1$ il vient

$$\begin{aligned} \|T_\omega \cdot T_\omega h\|^2 &= \|h\|^2 \leq C^2 \|\omega\|_\infty^2 \|T_\omega h\|^2 \\ \|h\|^2 &\leq C^2 \inf_{|\omega(m)|=1} \left\| \sum_{m \in \tilde{\sigma}} \bar{\omega}(m) h_m e_m \right\|^2 \\ &\leq C^2 \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |h_m|^2 \quad (**). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité (**) se démontre de manière analogue à l'inégalité (*) par

récurrence, et en choisissant ω_{n+1} tel que $2 \text{Re } \omega_{n+1} h_{n+1} \langle e_{n+1} | u_\omega \rangle \leq 0$.

Les inégalités (*) et (**) montrent que si $h \in E_{\tilde{\sigma}}$

$$\frac{1}{C^2} \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |h_m|^2 \leq \|h\|^2 \leq C^2 \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |h_m|^2 \quad (***)$$

Soit alors $\{e_m\}_{m \in \sigma}$ une base orthonormale de E_σ et Q l'opérateur défini

par :

$$\forall m \in \sigma, Q e_m = e_m.$$

Les inégalités (***) impliquent que les opérateurs Q et Q^{-1} sont bornés et que

$\{e_m\}_{m \in \sigma}$ est un ensemble d'interpolation pour H .

5. ENSEMBLES D'INTERPOLATION POUR L'ALGÈBRE A .

On veut démontrer un théorème sur l'union de deux ensembles d'interpolation pour A .

Pour cela on a besoin de la proposition suivante qui se déduit aisément des deux derniers paragraphes :

PROPOSITION. $\sigma \subset \mathfrak{M}$ est d'interpolation pour A si et seulement si :

$\exists C > 0$; t.q. $\forall \ell \in \mathcal{E}(B)$ on ait :

i) $\{e_m^\ell\}_{m \in \sigma}$ vérifie la condition notée (C) :

$$(C) \quad \forall h \in H_\sigma^\ell : \sum |\langle h | e_m^\ell \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2$$

ii) les idempotents élémentaires existent et soient uniformément bornés i.e. :

$$\forall m \in \sigma ; \|e_m^\ell\| \leq C$$

iii) les idempotents élémentaires normalisés vérifient (C) :

$$\forall h \in H_\sigma^\ell ; \sum |\langle h | (e_m^\ell)^1 \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|^2.$$

On aura aussi besoin du lemme :

LEMME. Les idempotents élémentaires sont vecteurs propres de la représentation adjointe de π^ℓ dans $\mathcal{L}(H_\sigma^\ell)$.

Si R_σ^ℓ désigne cette représentation on a :

$$\forall f \in A ; \forall m \in \sigma ; R_{\sigma}^{\ell}(f) \cdot \rho_m^{\ell} = \hat{f}(m) \cdot \rho_m^{\ell} .$$

En effet, appelons P_{σ}^{ℓ} la projection orthogonale de H^{ℓ} sur H_{σ}^{ℓ} , et R^{ℓ} la représentation régulière associée à ℓ , alors : $R_{\sigma}^{\ell} = P_{\sigma}^{\ell} R^{\ell}$ et il ne reste plus qu'à faire la vérification.

Comme dans le cas des algèbres uniformes, appelons distance de Gleason de deux points m et m' du spectre de A le nombre :

$$d_G(m, m') = \sup \{ |\hat{T}(m)| ; T \in A ; \hat{T}(m') = 0 ; \|T\| = 1 \} .$$

On va alors établir le théorème suivant :

THEOREME. Soient σ_1 et σ_2 deux ensembles d'interpolation pour A tels que la distance de Gleason de 2 points distincts de $\sigma_1 \cup \sigma_2$ soit uniformément minorée. Alors $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est d'interpolation.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de N. Varopoulos [10] dans le cadre des algèbres uniformes.

Démonstration du théorème. Il faut vérifier les conditions de proposition pour l'ensemble : $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

En fait, il suffit de les vérifier pour $\tilde{\sigma} \subset \sigma$; $\text{Card } \tilde{\sigma} < +\infty$, et les constantes ne dépendant que de σ_1 et σ_2 ,

i) il faut que $\{e_m^{\ell}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ vérifient (C) or : $\forall h \in H^{\ell}$:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \tilde{\sigma}} |\langle h | e_m^{\ell} \rangle|^2 &\leq \sum_{m \in \sigma_1} |\langle h | e_m^{\ell} \rangle|^2 + \sum_{m \in \sigma_2} |\langle h | e_m^{\ell} \rangle|^2 \\ &\leq (C_1^2 + C_2^2) \|h\|^2 . \end{aligned}$$

iii) Si on note $\{e_m^{\ell'}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$ les idempotents élémentaires normalisés associés à

$\{e_m^{\ell}\}_{m \in \tilde{\sigma}}$, d'après le lemme ceux-ci sont vecteurs propres de $R_{\sigma}^{\ell}(f)$ donc :

posons : $E_{\tilde{\sigma}_i} = \{ \text{l'espace engendré par } \{ e_m^{\ell'} \}_{m \in \tilde{\sigma} \cap \sigma_i} \}$

et $\mathcal{A}_{\tilde{\sigma}_i} = \{ T \in \mathcal{L}(E_{\tilde{\sigma}_i}) ; T e_m^{\ell'} = \hat{T}(m) e_m^{\ell'} \text{ pour } m \in \tilde{\sigma} \cap \sigma_i = \tilde{\sigma}_i \}$

puisque σ_i est d'interpolation C_i , et que $R_{\tilde{\sigma}}^{\ell}(f) \quad \forall f \in A$, appartient manifestement à $\mathcal{A}_{\tilde{\sigma}_i}$, il est clair que $\mathcal{A}_{\tilde{\sigma}_i}$ est d'interpolation, donc les $\{ e_m^{\ell'} \}_{m \in \tilde{\sigma}_i}$ aussi et donc $\{ e_m^{\ell'} \}_{m \in \tilde{\sigma}}$ vérifient (C) comme en i).

ii) Reste à montrer que les idempotents élémentaires sont uniformément bornés.

Pour cela il suffit de considérer le cas où σ_2 est réduit à un point, en effet :

notons δ la borne inférieure des distances de Gleason ; $\delta > 0$ par hypothèse.

Soit : $m \in \sigma_2$ et notons χ_m l'idempotent associé i.e. :

$$\hat{\chi}_m(m) = 1$$

$$\hat{\chi}_m(p) = 0 \quad \forall p \in \sigma_1.$$

On a alors : $\|\chi_m\| \leq K(C_1, \delta)$.

σ_2 étant d'interpolation $I(C_2)$ soit

$$\varphi_m \text{ tq : } \hat{\varphi}_m(m) = 1$$

et $\hat{\varphi}_m(p) = 0 \quad \forall p \in \sigma_2 \setminus \{m\}$.

On a : $\|\varphi_m\| \leq C_2$.

Il reste alors à poser : $\psi_m = \chi_m \cdot \varphi_m$

pour avoir : $\hat{\psi}_m(m) = 1 ; \hat{\psi}_m(p) = 0 \quad \forall p \in \sigma_1 \cup \sigma_2 - \{m\}$

et $\|\psi_m\| \leq C_2 K(C_1, \delta)$.

Il reste donc à montrer le théorème dans le cas où σ_2 est réduit à un point et où σ_1

est fini. Soit donc : $\text{Card } \sigma_1 = n$, $\sigma_1 = \{m_1, \dots, m_n\}$, $\sigma_2 = \{m\}$

$$\lambda \in \mathcal{E}(A) \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

et π_{σ}^{ℓ} la représentation associée.

On notera e_i le vecteur $e_{m_i}^{\ell}$ $i = 1, \dots, n$

et e_{n+1} le vecteur e_m^{ℓ} .

Soit $\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{L}(E_{\sigma}) ; T e_i = \hat{T}(i) e_i \quad i = 1, \dots, n+1\}$

i.e. $= \pi_{\sigma}^{\ell}(A)$.

Puisque σ_1 est d'interpolation C_1 pour A , il est facile de voir que $\{1, \dots, n\}$ est d'interpolation C_1 pour \mathcal{A} .

Dans un premier temps on va supposer que :

(*) $\{e_1, \dots, e_n\}$ forment un système orthonormal dans E_{σ} .

Soit alors $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n+1}$ une base orthonormale de E_{σ} telle que :

$$\epsilon_i = e_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors : $e_{n+1} = \lambda \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \epsilon_i \right] + \sqrt{1-|\lambda|^2} \epsilon_{n+1}$

avec $0 \leq |\lambda| \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$.

Traduisons alors les deux hypothèses :

(1) $\{1, \dots, n\}$ est d'interpolation C_1 , i.e. :

$I_{n+1} = \{T \in \mathcal{A} ; \hat{T}(n+1) = 0\}$ alors \mathcal{A}/I_{n+1} est d'interpolation C_1 .

(2) $d_G(m ; m_i) \geq \delta > 0 \quad m_i \in \sigma_1 \implies d_G(n+1, i) \geq \delta > 0 \quad \forall i \in [1, 2, \dots, n]$.

(1) : Si P_i désigne l'opérateur de \mathcal{A} tel que :

$$P_i e_j = \delta_{ij} e_j \quad i = 1, 2, \dots, n+1 ; j = 1, 2, \dots, n+1.$$

On a : $\inf_{\omega \in \mathbb{C}} \|P_1 + \dots + P_k + \omega P_{n+1}\| \leq C_1 \quad \forall k \leq n$.

Posons : $T_k(\omega) = \sum_{i=1}^k P_i + \omega P_{n+1}$.

Il vient alors : $T_k(\omega) \cdot \epsilon_{n+1} = \frac{\omega}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \epsilon_{n+1} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \epsilon_i$.

Soit : $T_k(\omega) \cdot \epsilon_{n+1} = \sum_{i=1}^k (\omega-1) \frac{\lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \alpha_i \epsilon_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{\omega \lambda}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \alpha_i \epsilon_i + \omega \epsilon_{n+1}$.

Mais : $\|T_k(\omega)\| \geq \|T_k(\omega) \cdot \epsilon_{n+1}\|$ donc :

$$\|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \left[|\omega-1|^2 \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 + |\omega|^2 \sum_{i=k+1}^n |\alpha_i|^2 \right] + |\omega|^2.$$

On en déduit :

$$\inf_{\omega \in \mathbb{C}} \|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \inf_{\omega \in \mathbb{C}} \left[|\omega-1|^2 \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 + |\omega|^2 \sum_{i=k+1}^n |\alpha_i|^2 \right].$$

$$\text{Soit : } \inf_{\omega \in \mathbb{C}} \|T_k(\omega)\|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \left[\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \right] \cdot \left[\sum_{i=k+1}^n |\alpha_i|^2 \right].$$

Donc (1) implique finalement :

$$\forall k \leq n : \frac{|\lambda|^2}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \left[\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \right] \left[\sum_{i=k+1}^n |\alpha_i|^2 \right] \leq C_1^2 \quad [1'].$$

Voyons (2) :

Soit $R_i \in G$ tq :

$$R_i e_{n+1} = e_{n+1}$$

$$R_i e_j = c_{ij} e_j \quad \text{avec } c_{ii} = 0 ; c_{ij} \in \mathbb{C} \quad j \neq i$$

$$i = [1, 2, \dots, n]$$

$$j = [1, 2, \dots, n].$$

$$\text{Alors : } R_i \epsilon_{n+1} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \sum_{j=1}^n \alpha_j \epsilon_j (1 - c_{ij}) + \epsilon_{n+1}.$$

$$\text{Mais : } \|R_i\|^2 \geq \|R_i \epsilon_{n+1}\|^2 = \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \sum |\alpha_j|^2 |1 - c_{ij}|^2 + 1.$$

L'hypothèse (2) implique alors :

$$\inf_{\substack{c_{ij} \in \mathbb{C} \\ c_{ij} = 0}} \|R_i\|^2 \leq \delta^{-2}$$

$$\text{d'où : } \forall i \leq n : \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} |\alpha_i|^2 \leq \delta^{-2} \quad [2'].$$

De [1'] et [2'] on tire alors :

$$\text{- si } \sup_{i \leq n} |\alpha_i|^2 \geq \frac{1}{2} \implies \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \leq 2 \delta^{-2} \quad [2'']$$

$$\text{- si } \sup_{i \leq n} |\alpha_i|^2 < \frac{1}{2}, \text{ on choisit } k \text{ tel que :}$$

$$\frac{1}{4} \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \leq \frac{3}{4}, \quad [1'] \text{ implique alors : } \frac{|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2} \leq 16 C_1^2 \quad [1''].$$

D'où l'on déduit :

$$\|P_{n+1}\|^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2} \leq K(\delta, C_1).$$

Si on désigne par $P_i^{(n)}$ les projecteurs élémentaires de \mathcal{G}/I_{n+1} , on a :

$$P_i = P_i^{(n)} (1 - R_i); \quad 1 \leq i \leq n.$$

Mais \mathcal{G}/I_{n+1} est $I(C_1)$ donc : $\|P_i^{(n)}\| \leq C_1$ et $\|R_i\| \leq \delta^{-1}$ d'où :

$$\|P_i\| \leq C_1(1 + \delta^{-1}) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Tout est donc bien montré avec l'hypothèse (*).

Ne supposons plus (*).

On s'y ramène ainsi :

sur : $E_\sigma = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, l'espace engendré par les e_i . Considérons le nouveau

produit scalaire : $k, h \in E_\sigma$ s'écrivent :

$$h = h_1 + h_2 \quad \text{avec} \quad h_1 \in E_{\sigma_1} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$k = k_1 + k_2$$

et $h_2 \perp E_{\sigma_1}$ de même pour k_2 ($i = 1, 2$).

On pose alors :

$$\langle\langle h | k \rangle\rangle = \langle\langle h_1 | k_1 \rangle\rangle + \langle h_2 | k_2 \rangle$$

où $\langle\langle h_1 | k_1 \rangle\rangle$ est tel que les $\{e_i\}_{i=1}^n$ forment une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Puisque \mathcal{G}/I_{n+1} est d'interpolation C_1 , $\{e_1, \dots, e_n\}$ est aussi d'interpolation C_1 et l'on a, si on note par $\| \| h \| \|$ la nouvelle norme de h :

$$\frac{1}{C_1^2} \|h\|^2 \leq \| \| h \| \|^2 \leq C_1^2 \|h\|^2 \quad (**).$$

On peut alors appliquer ce qui précède avec ce produit scalaire car alors (*) est vrai.

A cause de (**) il suffit de multiplier les constantes par C_1^2 pour achever la démonstration du théorème.

CHAPITRE III

SPECTRE D'UNE ALGÈBRE UNIFORME.

UNE STRUCTURE PSEUDO-METRIQUE SUR LE SPECTRE.

Soit A une algèbre uniforme i.e.

1) A est une algèbre de Banach commutative unitaire

$$2) \forall f \in A \quad \|f^2\| = \|f\|^2.$$

C'est un cas particulier de la classe d'algèbres étudiées précédemment.

Soient \mathfrak{M} le spectre de A , λ une mesure de probabilité sur \mathfrak{M} .

Nous avons noté H^λ l'adhérence de A dans $L^2(\lambda)$ et montré l'existence

d'un sous-ensemble \mathfrak{M}^λ de \mathfrak{M} tel que :

$$1) \forall m \in \mathfrak{M}^\lambda, \exists e_m \in H^\lambda, \|e_m\|_{H^\lambda} = 1, \rho(m) = \langle 1 | e_m \rangle > 0.$$

$$2) \forall f \in A, \forall m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad \langle f | e_m \rangle = \rho(m) \hat{f}(m)$$

$$3) \forall f \in A, \forall m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad \pi(f)e_m = \overline{\hat{f}(m)} e_m$$

où π est la représentation spectrale associée à λ .

1. NOYAU DE POISSON ET STRUCTURE PSEUDO-METRIQUE ASSOCIEE.

Posons pour tout $m \in \mathfrak{M}^\lambda$ $P_m = |e_m|^2$.

On définit ainsi une famille de fonctions positives ayant les propriétés suivantes

- 1) $P_m \in L^1(\lambda)$ et $\|P_m\|_{L^1} = 1$
- 2) $\forall f \in A, \forall m \in \mathfrak{M}^\lambda \quad \hat{f}(m) = \int f P_m d\lambda$.

Ce noyau de Poisson va nous permettre de définir une ébauche de théorie du potentiel analytique. On prolonge de façon naturelle les fonctions de H^λ sur \mathfrak{M}^λ :

Si $h \in H^\lambda$ on pose :

$$\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda, \hat{h}(m) = \frac{1}{\rho(m)} \langle h | e_m \rangle.$$

Ce prolongement a un sens grâce au lemme suivant :

LEMME. Si $\mathfrak{M}^\lambda \cap \text{Supp } \lambda \neq \emptyset$ (λ p.s.), les 2 définitions des fonctions de H^λ coïncident p.p. λ sur cette intersection.

Preuve. On utilise le fait qu'il existe une suite (f_k) de A qui converge dans L^2 et p.p. λ vers e_m .

On prolonge aussi le noyau de Poisson :

$$\forall m \in \mathfrak{M}^\lambda, \forall m' \in \mathfrak{M}^\lambda, P_m(m') = |\hat{e}_m(m')|^2.$$

On donne alors, comme dans le cas classique les définitions suivantes :

DEFINITIONS. On appelle "cellule" de centre m et d'ouverture $t > 0$ l'ensemble $C_{m,t}$ défini par :

$$C_{m,t} = \{m' \in \mathfrak{M}^\lambda, \rho^2(m) P_m(m') > t^{-1}\}.$$

On appelle "boule" de centre m et d'ouverture t ;

$$B_{m,t} = C_{m,t} \cap \text{supp } \lambda.$$

On appelle pseudo-distance au bord ;

$$d(m) = \rho^2(m).$$

2. APPLICATION A L'INTERPOLATION.

Soit un ensemble $\sigma \subset \mathfrak{M}$ tel que $\sigma_\lambda = \sigma \cap \mathfrak{M}^\lambda$ soit d'interpolation hilbertienne

i.e. $\{e_m\}_{m \in \sigma_\lambda}$ forme une famille d'interpolation.

On sait qu'il existe une constante C telle que : [Chap. II § 3]

$$\forall h \in H^\lambda, \sum_{m \in \sigma_\lambda} |\langle h | e_m \rangle|^2 \leq C^2 \|h\|_{H^\lambda}^2$$

d'où : $\forall h \in H^\lambda, \sum_{m \in \sigma_\lambda} \rho^2(m) |\hat{h}(m)|^2 \leq C^2 \|h\|_{H^\lambda}^2$ (*)

Posons $\mu = \sum_{m \in \sigma_\lambda} \rho^2(m) \delta_m$

où δ_m est la masse de Dirac au point m .

(*) s'écrit : $\int |\hat{h}|^2 d\mu \leq C^2 \|h\|_{L^2(\lambda)}^2$.

Soit $m_0 \in \mathfrak{M}^\lambda$ et $C_{m_0, t}$ la cellule associée. En prenant $h = e_{m_0}$ il vient :

$$C^2 \geq \sum_{m \in \sigma_\lambda} \rho^2(m) |\hat{e}_{m_0}(m)|^2 \geq \sum_{m \in \sigma_\lambda \cap C_{m_0, t}} \rho^2(m) |\hat{e}_{m_0}(m)|^2$$

Si $m \in C_{m_0, t}$

$$|\hat{e}_{m_0}(m)|^2 \geq t^{-1} \rho^{-2}(m_0)$$

donc : $C^2 \geq \sum_{m \in \sigma_\lambda \cap C_{m_0, t}} \rho(m)^2 \rho^{-2}(m_0) t^{-1}$.

Soit $C^2 \geq t^{-1} \rho^{-2}(m_0) \mu[C_{m_0, t}]$

c'est-à-dire

(**) $\mu[C_{m_0, t}] \leq C^2 t \rho^2(m_0)$

Si l'on suppose de plus que $\{P_m, m \in \mathfrak{M}^\lambda\}$ est uniformément tronnable par la famille $\rho(m)^2$ [1] i.e.

$$\int_{B_{m, t}} P_m \geq 1 - \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ ne dépend que de t et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, alors :

$$\rho^2(m_0) \leq t \lambda[B_{m_0, t}]$$

c'est-à-dire

$$(***) \quad \underline{\mu[C_{m_0,t}] \leq C^2 t^{-2} \lambda [B_{m_0,t}]} .$$

On retrouve ainsi la condition classique de Carleson [11], [12], [13], ce qui justifie le choix des boules et cellules et $\rho^2(m)$ comme structure pseudo-métrique associée à A et λ .

On a ainsi montré le théorème suivant

THEOREME. Une condition nécessaire pour que σ soit d'interpolation est que, pour toute mesure de probabilité λ sur \mathfrak{M} , la mesure μ associée soit une mesure de Carleson par rapport à λ .

Si l'on note $H^\infty(\lambda)$ l'adhérence faible étoile de A dans $L^\infty(\lambda)$, il serait intéressant de savoir s'il existe un théorème de Fatou analytique i.e. : la base $\{B_{m,t}\}_{m \in \mathfrak{M}^\lambda}$; dérive-t-elle les fonctions de $H^\infty(\lambda)$ sous la seule hypothèse d'uniforme troncabilité ?

CHAPITRE IV

RESULTATS NOUVEAUX ET ANCIENS POUR L'ALGÈBRE DU DISQUE.

On construit une représentation du groupe conforme de la boule unité de \mathbb{C}^n ; dans le cas où $n = 1$, elle va nous permettre d'étudier les quotients semi-simples de l'algèbre du disque :

d'une part les quotients semi-simples de $A(D)$ sont isométriquement isomorphes à leur représentation spectrale. En utilisant les caractérisations des suites d'interpolation on retrouve alors le théorème de Carleson.

d'autre part on détermine la sphère unité des quotients.

1. NOTATIONS.

Soit $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n, |z|^2 = |z^{(1)}|^2 + \dots + |z^{(n)}|^2 < 1\}$, $A(B_n)$ est l'algèbre des fonctions continues sur B_n analytiques dans B_n .

λ est la mesure de Lebesgue normalisée sur S_n où

$$S_n = \delta B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| = 1\}.$$

Le spectre de $A(B_n)$ est $\overline{B_n}$.

Si $z_0 \in B_n$, e_{z_0} défini par :

$$\zeta \in S_n, \quad e_{z_0}(\zeta) = \frac{(1 - |z_0|^2)^{\frac{n}{2}}}{(1 - \langle \zeta, z_0 \rangle)^n}$$

est orthogonal dans $L^2(S_n, \lambda)$ à l'idéal des fonctions de $A(B_n)$ nulles en z_0 .

En effet e_{z_0} n'est autre que le noyau de Cauchy, Szegö normalisé.

On appelle, comme d'habitude, $H^2(B_n)$ la fermeture de $A(B_n)$ dans $L^2(S_n, \lambda)$.

2. UNE REPRESENTATION DU GROUPE CONFORME DE B_n

Soit G le groupe des transformations conformes de B_n . On sait qu'il est isomorphe à $U(n, 1)$ [14] où $U(n, 1)$ est le groupe des isométries pour la forme sesquilinéaire de \mathbb{C}^{n+1} :

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n} - z_{n+1} \overline{w_{n+1}}.$$

Soit $T \in U(n, 1)$; dans la base canonique de \mathbb{C}^{n+1} sa matrice $[T]$ s'écrit par blocs :

$$[T] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{array}{l} A \text{ est une matrice } (n, n) \\ B \quad \quad (n, 1) \\ C \quad \quad (1, n) \\ D \quad \quad (1, 1). \end{array}$$

La transformation conforme ϕ de B_n qui lui correspond est définie par

$$\phi(z) = \frac{AZ + B}{CZ + D} \quad \text{où } Z \text{ est la matrice } (n, 1) \text{ des } (z_i) \quad i = 1 \dots n.$$

On calcule le produit scalaire dans $H^2(B_n)$:

$$\langle e_{\phi(z)}, e_{\phi(w)} \rangle = \frac{(1 - |\phi(z)|^2)^{\frac{n}{2}} (1 - |\phi(w)|^2)^{\frac{n}{2}}}{(1 - \phi(z) \cdot \overline{\phi(w)})^n}$$

$[\phi(z) \cdot \overline{\phi(w)}]$ est le produit scalaire des vecteurs $\phi(z)$ et $\phi(w)$ dans \mathbb{C}^n

$$1 - \varphi(z) \overline{\varphi(w)} = 1 - \frac{AZ + B}{CZ + D} \cdot \frac{\overline{AW + B}}{\overline{CW + D}}$$

$$= \frac{1}{(CZ + D)(\overline{CW + D})} [(CZ + D)(\overline{CW + D}) - (AZ + B)(\overline{AW + B})].$$

T laisse invariante la forme sesquilinéaire $\ll \gg$ donc si (X, t) et (Y, v) sont deux éléments de \mathbb{C}^{n+1} ($X \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}, Y \in \mathbb{C}^n, v \in \mathbb{C}$) si :

$$\alpha = T(X, t) ; \quad \beta = T(Y, v)$$

$$\ll \alpha, \beta \gg = (AX + Bt) - \overline{(AY + Bv)} - (CX + Dt)(\overline{CY + Dv})$$

$$= X \cdot \bar{Y} - t \bar{v}.$$

D'où en coordonnées inhomogènes si $z = \frac{X}{t}, w = \frac{Y}{v}$:

$$(AZ + B) \cdot \overline{(AW + B)} - (CZ + D) \cdot \overline{(CW + D)} = Z \cdot \bar{W} - 1.$$

On en déduit

$$1 - \varphi(z) \cdot \overline{\varphi(w)} = \frac{1}{(CZ + D)(\overline{CW + D})} [1 - Z \cdot \bar{W}].$$

D'où

$$\langle e_{\varphi(z)}, e_{\varphi(w)} \rangle = \frac{(CZ + D)^n}{|CZ + D|^n} \cdot \frac{(\overline{CW + D})^n}{|\overline{CW + D}|^n} \langle e_z, e_w \rangle.$$

Les combinaisons linéaires des vecteurs e_z étant denses dans $H^2(B_n)$, on définit

sur $H^2(B_n)$ l'opérateur $U(\varphi)$ par :

$$U(\varphi)e_z = \eta(\varphi, z) e_{\varphi(z)}$$

avec

$$\eta(\varphi, z) = \frac{(\overline{CZ + D})^n}{|CZ + D|^n} = \overline{\alpha(\varphi, z)}^n \quad \text{où}$$

$$\alpha(\varphi, z) = \frac{CZ + D}{|CZ + D|}$$

$U(\varphi)$ est donc unitaire sur $H^2(B_n)$.

Montrons que c'est de plus une représentation de G . On montre que pour tout z :

$$\eta(\psi \circ \varphi, z) = \eta(\psi, \varphi(z)) \cdot \eta(\varphi, z)$$

où

$$\varphi(z) = \frac{AZ + B}{CZ + D} \quad \text{et} \quad \psi(w) = \frac{A'W + B'}{C'W + D'}.$$

Preuve :

$$\alpha(\varphi, z) = \frac{CZ + D}{|CZ + D|}$$

$$\alpha(\psi, w) = \frac{C'W + D'}{|C'W + D'|}$$

d'où :

$$\alpha(\psi, \varphi(z)) = \frac{C'(AZ + B) + D'(CZ + D)}{|C'(AZ + B) + D'(CZ + D)|}$$

$$\psi \circ \varphi(z) = \frac{A'(AZ + B) + B'(CZ + D)}{C'(AZ + B) + D'(CZ + D)}$$

d'où :

$$\alpha(\psi \circ \varphi, z) = \frac{C'(AZ + B) + D'(CZ + D)}{|C'(AZ + B) + D'(CZ + D)|}$$

d'où :

$$\alpha(\psi \circ \varphi, z) = \alpha(\psi, \varphi(z)) \alpha(\varphi, z).$$

On en déduit que :

$$\eta(\psi \circ \varphi, z) = \eta(\psi, \varphi(z)) \cdot \eta(\varphi, z)$$

et :

$$U(\psi \circ \varphi) = U(\psi) U(\varphi).$$

THEOREME. U est une représentation unitaire de G dans $H^2(B_n)$.

3. CAS DU DISQUE

On notera : $D = B_1$.

$\sigma = \{z_1, \dots, z_n\}$ n points distincts de D.

$$I_\sigma = \{f \in A(D), \forall z_i \in \sigma, f(z_i) = 0\}$$

π la représentation spectrale associée à la mesure λ

E_σ le sous-espace de Hilbert de $H^2(\lambda)$ engendré par $\{e_{z_i}, z_i \in \sigma\}$.

Pour $z_i \in \sigma$ on note $e_i = e_{z_i}$.

On va démontrer le théorème suivant :

THEOREME. π est une représentation antilinéaire isométrique de $A(D)/I_\sigma$
dans $\mathcal{L}(E_\sigma)$.

On sait que [Chap. I ; § 2] :

$$\forall f \in A(D)/I_\sigma \quad \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} \leq \|f\|_{A/I_\sigma}.$$

Il faut démontrer l'inégalité inverse.

LEMME. Si $n = \text{card } \sigma \geq 2$ alors $\|\pi(z)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = 1$.

Démonstration. Soit $h \in E_\sigma$; $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$

$$\|\pi(z)h\|^2 = \sum_{i,j} z_i \bar{z}_j h_i \bar{h}_j \langle e_i | e_j \rangle$$

$$\langle e_i | e_j \rangle = \frac{\sqrt{1-|z_i|^2} \sqrt{1-|z_j|^2}}{1-\bar{z}_i z_j}$$

$$\text{Donc} \quad \|\pi(z)h\|^2 = \sum_{i,j} h_i \bar{h}_j \frac{\sqrt{1-|z_i|^2} \sqrt{1-|z_j|^2}}{1-\bar{z}_i z_j} - \sum_{i,j} h_i \bar{h}_j \sqrt{1-|z_i|^2} \sqrt{1-|z_j|^2}.$$

$$\text{Posons} \quad \alpha_0(h) = \sum_i h_i \sqrt{1-|z_i|^2} = h(0).$$

$$\text{Il vient} \quad \|\pi(z)h\|^2 = \|h\|^2 - |\alpha_0(h)|^2.$$

On en déduit que $\pi(z)$ est isométrique sur le noyau de l'évaluation en 0,

d'où le lemme.

Démonstration du théorème. Elle se fait par récurrence sur $n = \text{card } \sigma$.

Pour $n = 1$ le théorème est évident.

Supposons le vrai pour $\text{card } \sigma' = n$.

Soit alors $\sigma = \{z_1 \dots z_n, z_{n+1}\}$ et $f \in A(D)$.

On fait deux hypothèses supplémentaires auxquelles on pourra se ramener

$$(*) \quad z_{n+1} = 0$$

$$(**) \quad f(0) = 0.$$

Soit $g \in A(D)$ telle que

$$\forall i = 1 \dots n, \quad g(z_i) = \frac{1}{z_i} f(z_i).$$

Clairement $\|f\|_{A/I_\sigma} \leq \|g\|_{A/I_{\sigma'}}$ où $\sigma' = \{z_1 \dots z_n\}$ car zg appartient à la classe de f dans A/I_σ .

On a $\pi(zg) = \pi(f) = \pi(z) \pi(g)$.

Calculons la norme de $\pi(f)$:

$$\begin{aligned} \|\pi_\sigma(f)\| &= \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi_\sigma(f)h\|}{\|h\|} \\ &= \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi(g) \pi(z)h\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

La borne supérieure n'étant pas atteinte sur un h tel que $\pi(z)h = 0$, on a

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \sup_{h \in E_\sigma} \frac{\|\pi(g) \pi(z)h\|}{\|\pi(z)h\|} \frac{\|\pi(z)h\|}{\|h\|}.$$

Mais on sait que $\pi(z)$ est une isométrie sur $\ker \alpha_0$ et à cause de (*) $\pi(z)$ envoie isométriquement $\ker \alpha_0$ sur $E_{\sigma'}$, d'où en posant $k = \pi(z)h$, $h \in \ker \alpha_0$

$$\|\pi_\sigma(f)\| = \sup_{k \in E_{\sigma'}} \frac{\|\pi(g)k\|_{E_{\sigma'}}}{\|k\|_{E_{\sigma'}}} = \|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})}.$$

La restriction de π à $E_{\sigma'}$ est la représentation spectrale de σ' . Donc en utilisant

l'hypothèse de récurrence

$$\|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}} \geq \|f\|_{A/I_\sigma} \quad \text{c.q.f.d.}$$

On se débarrasse alors des hypothèses (*) (**).

a) (**). Soit $f \in A(D)$ telle que $\|f\|_{A/I_\sigma} = 1$. Soit $a = f(0)$; $|a| < 1$ (à moins que f ne soit constante auquel cas il n'y a rien à démontrer).

Soit φ la représentation conforme du disque D telle que $\varphi(a) = 0$.

Si $\|f\|_A < \frac{1}{|a|}$, $\varphi \circ f \in A(D)$ et φ étant continue, $\|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} \leq 1$.

Montrons qu'on a exactement $\|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} = 1$.

Soit $g = \varphi \circ f$.

Si $\|g\|_{A/I_\sigma} < 1$, soit g tel que $\|g\|_A < 1$, alors $\|\varphi^{-1} \circ g\|_A < 1$ et

$\|f\|_{A/I_\sigma} = \|\varphi^{-1} \circ g\|_{A/I_\sigma} < 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

$\varphi \circ f$ vérifie les hypothèses (*) et (**), donc

$$\|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\| = \|\varphi \circ f\|_{A/I_\sigma} = 1.$$

On montre alors que $\|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|\pi_\sigma(f)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)}$: π_σ étant une représentation antilinéaire,

$$\begin{aligned} \pi_\sigma(\varphi \circ f) &= (\pi_\sigma(f) - \bar{a}) [1 - a \pi_\sigma(f)]^{-1} \\ &= \psi(\pi_\sigma(f)) \end{aligned}$$

où ψ est la transformation conforme : $\psi(z) = \frac{z - \bar{a}}{1 - az}$. $\pi_\sigma(f)$ est une contraction sur

l'espace de Hilbert E_σ d'où, d'après un théorème de Von Neuman [15] il vient

$$\begin{aligned} \|\psi(\pi_\sigma(f))\| &\leq \|\pi_\sigma(f)\| \\ \|\pi_\sigma(f)\| &= \|\psi^{-1} \circ \psi(\pi_\sigma(f))\| \leq \|\psi(\pi_\sigma(f))\| \leq \|\pi_\sigma(f)\| \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\|\pi_\sigma(f)\| = \|\pi_\sigma(\varphi \circ f)\|$.

b) (*) Supposons $z_{n+1} \neq 0$

$$\sigma = \{z_1, \dots, z_n, z_{n+1}\}.$$

Soient φ l'élément du groupe conforme tel que $\varphi(z_{n+1}) = 0$

$$\sigma' = \{\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_n), 0\}$$

$$f \in A(D).$$

On définit $g = f \circ \varphi^{-1}$, $g \in A(D)$. On a :

$$(i) \quad \|f\|_{A/I_\sigma} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}}$$

$$(ii) \quad f(z_i) = g(z'_i) \quad \text{où} \quad z'_i = \varphi(z_i).$$

Puisque σ' vérifie (*) il vient :

$$\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|g\|_{A/I_{\sigma'}}.$$

On doit montrer que: $\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|\pi_{\sigma}(f)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma})}$. Pour cela on applique

le théorème du § 2 ; en utilisant les mêmes notations, on a pour $i = 1 \dots n+1$

$$\begin{aligned} U(\varphi^{-1}) e_{z_i'} &= \eta(\varphi^{-1}, z_i') e_{\varphi^{-1}(z_i')} \\ &= \eta(\varphi^{-1}, z_i') e_{z_i} \\ \pi_{\sigma}(f) U(\varphi^{-1}) e_{z_i'} &= \eta(\varphi^{-1}, z_i') f(\overline{z_i'}) e_{z_i} \\ U(\varphi) \pi_{\sigma}(f) U(\varphi^{-1}) e_{z_i'} &= \eta(\varphi^{-1}, z_i') \eta(\varphi, z_i') f(\overline{z_i'}) e_{z_i'} \\ &= \pi_{\sigma'}(g) e_{z_i'} \end{aligned}$$

d'où
$$\pi_{\sigma'}(g) = U(\varphi) \pi_{\sigma}(f) U(\varphi^{-1}).$$

Comme U est unitaire :

$$\|\pi_{\sigma'}(g)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|\pi_{\sigma}(f)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma})} \quad \text{c.q.f.d.}$$

4. CARACTERISATION DE LA SPHERE UNITE DE $A(D)/I_{\sigma}$

Soit $\sigma = \{z_1, \dots, z_n\}$ et posons

$$S = \{f \in A(D)/I_{\sigma}, \|f\|_{A/I_{\sigma}} = 1\}.$$

On a alors

THEOREME. La sphère unité S de A/I_{σ} est constituée des classes des produits de Blaschke de $(n-1)$ zéros au plus (distincts ou confondus, multiplicités incluses).

Démonstration. Soit φ une transformation conforme.

$$\pi(\varphi) = U(\varphi^{-1}) \pi(z) U(\varphi).$$

$\pi(z)$ est une isométrie sur $\text{Ker } \alpha_0$ [lemme du § 3].

$\pi(\varphi)$ sera donc une isométrie sur $U(\varphi^{-1}) [\text{Ker } \alpha_0]$.

$(U(\varphi^{-1}) [\text{Ker } \alpha_0])$ est le noyau de l'évaluation au zéro de φ^{-1} .

On définit $\mathfrak{H}_\varphi = U(\varphi^{-1}) [\text{Ker } \alpha_0] \cap E_\sigma$. \mathfrak{H}_φ est un hyperplan de E_σ .

Soit B un produit de Blaschke de $(n-1)$ zéros au plus, $B = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$, $k \leq n$, où φ_1 est une transformation conforme.

$$\pi(B) = \pi(\varphi_1) \pi(\varphi_2) \dots \pi(\varphi_{k-1}) = \pi(\varphi_{k-1}) \dots \pi(\varphi_1).$$

Supposons d'abord que : $\forall i = 1 \dots k-1, \forall j = 1 \dots n$

$$\varphi_1(z_j) \neq 0$$

alors $\pi_\sigma(\varphi_1)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E_\sigma)$ pour tout i . Posons

$$E_1 = \mathfrak{H}_{\varphi_1}$$

$$E_2 = \pi_\sigma(\varphi_1)^{-1} \mathfrak{H}_{\varphi_2}$$

\vdots

$$E_{k-1} = \pi_\sigma(\varphi_1)^{-1} \dots \pi_\sigma(\varphi_{k-2})^{-1} \mathfrak{H}_{\varphi_{k-1}}.$$

Alors $E = E_1 \cap E_2 \dots \cap E_{k-1}$ est un sous-espace de E_σ de dimension au moins égale à $(n-k+1)$, donc au moins égale à 1. Clairement $\pi_\sigma(B)$ est isométrique sur E

donc : $\|\pi_\sigma(B)\| = 1$.

Si B à des points de σ comme zéros, on peut faire la remarque suivante :

dans la base $\{e_1 \dots e_n\}$ l'opérateur $\pi_\sigma(B)$ est représenté par la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \overline{B(z_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{B(z_n)} \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur et sa norme sont des fonctions continues de $B(z_1)$, donc des zéros de B .

On aura donc encore

$$\|B\|_{A/I_\sigma} = \|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = 1.$$

Réciproque.

On va montrer que si B a n zéros alors :

$$\|B\|_{A/I_\sigma} = \|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} < 1.$$

La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de σ ,

. c'est vrai pour $\text{card } \sigma = 1$.

. Supposons le vrai pour $\text{card } \sigma' = n$

et soit $\sigma = \{z_1 \dots z_n, z_{n+1}\}$.

Supposons de plus que :

$$(*) \quad z_{n+1} = 0$$

$$(**) \quad B(0) = 0.$$

D'après (**), $B(z) = zC(z)$ où C est un produit de Blaschke ayant n zéros.

Si $\sigma' = \{z_1 \dots z_n\}$ on a

$$\|B\|_{A/I_\sigma} \leq \|C\|_{A/I_{\sigma'}}$$

car zC est dans la classe de B modulo I_σ .

Le théorème d'isométrie des quotients § 3 et l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\|\pi_\sigma(B)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma)} = \|B\|_{A/I_\sigma} \leq \|\pi_{\sigma'}(C)\|_{\mathcal{L}(E_{\sigma'})} = \|C\|_{A/I_{\sigma'}} < 1.$$

On se débarrasse des hypothèses (*) et (**) comme dans la preuve du théorème

1 § 3, en utilisant: 1. la représentation du groupe conforme (§ 2).

2. en remarquant que la composition à droite et à gauche d'un produit

de Blaschke ayant p zéros par des transformations conformes est encore un produit

de Blaschke à p zéros.

COROLLAIRE. Soit $\omega \in l^\infty(\sigma)$ où $\text{card } \sigma = n$. Il existe une fonction unique qui interpole ω sur σ et de norme minimum : c'est le produit d'une constante par un produit de Blaschke ayant au plus $(n-1)$ zéros.

5. CARACTERISATION DES SUITES D'INTERPOLATION POUR $H^\infty(D)$.

Soit σ une suite dans D .

Une conséquence du théorème 1 d'isomorphisme est que σ est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$ si et seulement si σ est d'interpolation pour $H^2(D)$ i.e. la famille des vecteurs $\{e_{z_i}\}_{z_i \in \sigma}$ est d'interpolation hilbertienne dans $H^2(D)$.

En utilisant ces techniques on va donner une autre démonstration du théorème de Carleson [16].

THEOREME 3 (Carleson). σ est d'interpolation si et seulement si le produit des distances de Gleason est uniformément minoré.

Preuve. On étudie d'abord un sous-ensemble fini $\tilde{\sigma}$ de σ ,

$$\tilde{\sigma} = \{z_1 \dots z_n\}.$$

Une condition nécessaire pour que σ soit d'interpolation est que les vecteurs conjugués à la famille $\{e_{z_i} \quad i = 1 \dots n\}$ soient uniformément bornés dans $H^2(D)$.

LEMME. Les conjugués $\{\rho_i \quad i = 1 \dots n\}$ de la famille $\{e_{z_i} \quad i = 1 \dots n\}$ sont définis par $\rho_i(z) = \frac{B_i(z)}{B_i(z_i)} e_{z_i}(z)$ où B_i est le produit de Blaschke s'annulant sur

$\tilde{\sigma} - \{z_i\}$.

En effet :

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle \rho_i | e_{z_k} \rangle &= \frac{1}{B_i(z_i)} \langle B_i e_{z_i} | e_{z_k} \rangle \\ &= \frac{1}{B_i(z_i)} B_i(z_k) \langle e_{z_i} | e_{z_k} \rangle \\ &= \delta_i^k \end{aligned}$$

2) $\rho_i \in E_\sigma$

$$\text{en effet : } \rho_i(z) = \frac{\sqrt{1-|z_i|^2} (z-z_1) \dots (z-z_{i-1}) (z-z_{i+1}) \dots (z-z_n)}{B_i(z_i)(1-\bar{z}_i z)(1-\bar{z}_1 z) \dots (1-\bar{z}_{i-1} z)(1-\bar{z}_{i+1} z) \dots (1-\bar{z}_n z)} .$$

Par décomposition en éléments simples on obtient :

$$\rho_i(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1-\bar{z}_k z} \quad \text{donc } \rho_i \in E_{\tilde{\sigma}} .$$

Calculons la norme de ρ_i dans $H^2(B_n)$:

$$\begin{aligned} \|\rho_i\|^2 &= \langle \rho_i | \rho_i \rangle = \frac{1}{|B_i(z_i)|^2} \int_T B_i \bar{B}_i |e_i|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{|B_i(z_i)|^2} \end{aligned}$$

donc : $\|\rho_i\|^2 \leq K^2$ se traduit par :

$$\prod_{k \neq i} \left| \frac{z_i - z_k}{1 - \bar{z}_i z_k} \right| \geq \frac{1}{K} .$$

La condition de Carleson est bien nécessaire. Réciproquement, on suppose que

$$\inf_i \prod_{k \neq i} \left| \frac{z_i - z_k}{1 - \bar{z}_i z_k} \right| > \delta .$$

Introduisons les vecteurs conjugués normalisés :

$$e_i' = \frac{\rho_i}{\|\rho_i\|} = B_i e_{z_i} .$$

LEMME 2. L'opérateur A défini sur $E_{\tilde{\sigma}}$ par $A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum x_i e_i'$ est

anti-unitaire.

En effet, on calcule :

$$\langle e_i' | e_j' \rangle = \int_{\pi} B_i \bar{B}_j e_i \bar{e}_j \frac{d\theta}{2\pi} .$$

En intégrant par la méthode des résidus on obtient :

$$\langle e_i' | e_j' \rangle = \overline{\langle e_i | e_j \rangle}$$

d'où : $(\forall h \in E_\sigma, \forall k \in E_{\tilde{\sigma}}) \langle Ah | Ak \rangle = \overline{\langle h, k \rangle}$ c.q.f.d.

Pour démontrer le théorème 3 il faut prouver :

$$(1) \quad \forall i = 1 \dots n \quad \|\rho_i\| \leq K .$$

$$(2) \quad \forall h \in E_\sigma \quad \sum_1 | \langle h(e_i) \rangle |^2 \leq K \|h\|^2$$

$$(3) \quad \forall h \in E_\sigma \quad \sum | \langle h(e_i) \rangle |^2 \leq K \|h\|^2,$$

où la constante K ne dépend que de σ (et pas de σ) [chapitre II, § 3].

(1) est prouvé puisque le produit des distances de Gleason est uniformément minoré.

(2) On utilise le théorème de Carleson suivant [17] :

THEOREME. Si μ est une mesure positive dans D telle que, avec les notations du chapitre III

$$\forall z \in D, \quad \mu(C_{z,t}) < a \lambda(B_{z,t}) \quad (*)$$

alors il existe une constante b_p telle que :

$$\forall h \in A(D) \quad \int |h(z)|^p d\mu(z) \leq b_p \int_\pi |h|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si le produit des distances de Gleason est uniformément minoré la condition (*) est satisfaite quand μ est la mesure associée à λ et σ [chapitre III] ; [18].

Donc (*) implique (2) en prenant $p = 2$ dans le théorème de Carleson.

(3) le lemme 2 prouve que (2) implique (3).

Remarque. Cette démonstration est proche dans l'esprit de celle de Shapiro et Shields [7] même si, ici, on considère la meilleure interpolation dans $H^2(D)$.

BIBLIOGRAPHIE



- [1] J. DIXMIER : Les C^* -algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars. Paris 1964. Paris 1964.
- [2] R. DOUGLAS : Banach algebra techniques in operators Theory. Academic Press 1972. 1972.
- [3] J. WERMER et B. COLE : Quotient algebras of Uniform algebras. Symposium on Uniform algebras and Rational approximation ; University of Michigan, (1969).
- [4] F. BONSALL et J. DUNCAN : Numerical Ranges. London Math. Society. Lecture note series 1971.
- [5] A. BERNARD : Seminar on Uniform Algebras. University of Aberdeen (March 1973)
- [7] H.S. SHAPIRO and A.L. SHIELDS : On some interpolation problems for Analytic functions. Amer. Jour. Math. (83), 1961.
- [8] N. BARI : A treatise on trigonometric series. Pergamon Press, 1964.
- [9] F. RIESZ and B. NAGY : Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [10] N. Th. VAROPOULOS : C.R.A.S. Série A, t. 272, 1971, p. 950.
- [11] N. Th. VAROPOULOS : C.R.A.S. Série A, t. 274, 1972, p. 1539.
- [12] L. CARLESON : An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).
- [13] L. CARLESON and J. GARNETT : Interpolating sequences and separation properties. Preprint.
- [14] E.M. STEIN : Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Math. Notes. Princeton University Press 1972.
- [15] B. NAGY et C. FOIAS : Analyse harmonique des opérateurs dans l'espace de Hilbert. Masson et C^{ie} 1967.
- [16] K. HOFFMAN : Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall Series, 1965.
- [17] L. CARLESON : Interpolation by bounded analytic functions and the Corona problem. Ann. Math. 76 (1962).
- [17] L. HÖRMANDER : L^p estimates for pluri-subharmonique functions. Math. Scand. 20 (1967).
- [18] W. DURREN : Theory of H^p -spaces. Academic Press, 1970.

