L. SCHWARTZ

Calcul infinitésimal stochastique

Analyse mathématique et applications, Montrouge: Gauthier-Villars, 1988, p. 445-463.

Reprinted from Analyse Mathématique et Applications, 1988

CALCUL INFINITESIMAL STOCHASTIQUE

by

L. SCHWARTZ

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique
Palaiseau, France

Dédié à Jacques-Louis Lions pour son soixantième anniversaire

Cet article ne contient presque pas de résultats nouveaux, mais donne, à partir de rien, et sans démonstrations, de nombreux résultats personnels du calcul infinitésimal stochastique. Je suis très heureux de le dédier à Jacques-Louis Lions.

1. Processus[1]

La donnée initiale est toujours un ensemble Ω (ensemble des échantillons), une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω, une probabilité $\mathcal{P}$ (mesure ≥ 0 de masse 1) sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On se donne en outre une "filtration", $(\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$, de sous tribus de la tribu $\mathcal{P}$-mesurable, $\mathcal{P}$-complète, croissante, continue à droite ($\mathcal{F}_t = \cap_{t'>t} \mathcal{F}_{t'}$, pour $t < +\infty$). On prend ici pour ensemble des temps t l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, compact; d'autres préfèrent prendre $\mathbb{R}_+$; c'est sans importance, puisque nous prendrons plus loin (chapitre 8) des sous-ensembles A de $\overline{\mathbb{R}}_+$ comme ensembles des temps. Nous ajouterons souvent un élément $\overline{+\infty} > +\infty$, isolé, $\mathcal{F}_{\overline{+\infty}} = \mathcal{F}_{+\infty}$.

Une variable aléatoire, par exemple à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie N, est une application $\mathcal{P}$-mesurable $\Omega \to E$. Un processus X à valeurs dans E est une application $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to E$; $X_t : \omega \mapsto X(t, \omega)$, l'etat du processus à l'instant t, sera supposé $\mathcal{F}_t$-mesurable; $X(\omega) : t \mapsto X(t, \omega)$ est la trajectoire du processus correspondant à l'échantillon $\omega \in \Omega$. Un processus est donc une trajectoire aléatoire. Puisque X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_t$ apparaît comme la tribu du passé (présent inclus !) de l'instant t. Le processus est dit continu, continu à droite, à variation finie, ..., si, pour $\mathcal{P}$-presque tout ω (expression que nous ne répèterons plus), la trajectoire $X(\omega)$ est continue, continue à droite, à variation finie, ...

2. Processus à variation finie et martingales

Un processus V sera dit ` *a variation finie* s'il est *continu* à variation finie. Une *martingale* M (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre V) est un processus continu intégrable (pour tout t, M_t est intégrable), tel que, si $s \leq t$ et $A \in \mathcal{F}_s$:

[1] Il est impossible de donner ici une liste des livres d'initiation aux probabilités. Nous renverrons souvent à Dellacherie–Meyer [1], mais on pourrait aussi souvent renvoyer à Ikeda–Watanabe [1]

$$\int_A M_s d\mathcal{P} = \int_A M_t d\mathcal{P} . \tag{2.1}$$

En probabilités, les intégrales s'écrivent en général E (espérance); (2.1) s'écrit **alors**

$$E(1_A M_s) = E(1_A M_t) . \tag{2.2}$$

On écrit cela aussi en utilisant la notion très féconde d'espérance conditionnelle, mais le lecteur pourra s'en passer pour la suite. L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire intégrable Y, par rapport à une tribu $\mathcal{T}$, P-mesurable, notée $Y^{\mathcal{T}}$ ou $E(Y|\mathcal{T})$, est une variable aléatoire $\mathcal{T}$-mesurable, ayant mêmes intégrales que Y sur les ensembles de la tribu $\mathcal{T}$; elle n'est définie qu'à un ensemble $\mathcal{T}$-mesurable $\mathcal{P}$-négligeable près. Si $\mathcal{T}$ est toute la tribu $\mathcal{P}$-mesurable, $Y^{\mathcal{T}} = Y$; si $\mathcal{T}$ est la tribu triviale, $\mathcal{T} = \{\phi, \Omega\}$, $Y^{\mathcal{T}}$ est la constante égale à l'intégrale $\int_\Omega Y d\mathcal{P} = E(Y)$. Alors M est une martingale si elle est intégrable et si, pour $s \leq t$:

$$M_s = E(M_t|\mathcal{F}_s) . \tag{2.3}$$

2'. Martingales locales et temps d'arrêt[2]

On a besoin en pratique de processus un peu plus généraux, les *martingales locales*; local n'a pas ici le sens topologique habituel. Le processus M est une martingale locale s'il est continu, et s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de temps aléatoires (T_n est une variable aléatoire $\Omega \to [0, \overline{+\infty}]$) tendant *stationnairement* vers $\overline{+\infty}$ (pour presque tout ω, il existe $N(\omega)$ tel que, pour $n \geq N(\omega)$, $T_n(\omega) = \overline{+\infty}$; on écrira $T_n \upuparrows \overline{+\infty}$) et une suite de martingales $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$, tels que, dans $[0, T_n[= \{(t,\omega); t < T_n(\omega)\}$, $M = M_n$; on ne met pas $[0, T_n]$, car cela imposerait que M_o soit intégrable, ce que l'on ne souhaite pas; M_t n'est peut-être intégrable pour aucun t. Mais, par continuité, $M = M_n$ dans $[0, T_n] \cap (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) \cap \{T_n > 0\} = \{(t,\omega); T_n(\omega) > 0,\ 0 \leq t \leq T_n(\omega) \leq +\infty\}$.

Cela s'écrit aussi en utilisant les temps d'arrêt (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 1, chapitre IV, 49, page 184). Les temps d'arrêt ont été introduits par Doob. Nous ne les développerons pas ici, malgré leur rôle fondamental, parce que nous ne les utiliserons pas plus loin. Bornons-nous à dire qu'un temps d'arrêt est une variable aléatorie $T : \Omega \to [0, \overline{+\infty}]$, telle que, pour tout $t \leq +\infty$, l'ensemble $\{T \leq t\} = \{\omega; T(\omega) \leq t\}$ soit $\mathcal{F}_t$-mesurable. Un temps d'arrêt sert à arrêter des processus; si X est un processus, le processus arrêté au temps T, noté X^T, est le processus pour lequel la trajectoire $X^T(\omega)$ coïncide avec $X(\omega)$ aux temps $\leq T(\omega)$, mais reste fixée à $X(T(\omega), \omega)$ aux temps $\geq T(\omega)$; on peut écrire $X_t^T = X_{T\wedge t}$ (voulant dire, avec l'habitude des probabilités de ne jamais écrire ω : $X_t^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$). Un théorème de Doob dit qu'un processus arrêté d'une martingale est encore une martingale (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VI, théorème 10). Alors M

(2) Le lecteur pressé pourra passer ce chapitre

est une martingale locale s'il existe $(T_n) \uparrow\uparrow \overline{+\infty}$ tels que, pour tout n, $1_{\{T_n>0\}}M^{T_n}$ soit une martingale. ***Dans la suite, nous abrègerons martingale locale par martingale.***

3. Semi-martingales

Une semi-martingale (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VII, 2) est un processus continu qui peut s'écrire

$$X = V + M\,, \tag{3.1}$$

V à variation finie, M martingale (sous-entendu locale). On normalise part M_o (valeur initiale) $= 0$, alors la décomposition est unique, à un ensemble $\mathcal{P}$-négligeable près (ce qui signifie qu'une martingale à variation finie est un processus constant, $M = M_o$). L'unicité de la décomposition est le théorème de Doob–Meyer (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII, 45). On écrit habituellement

$$X = \widetilde{X} + X^c\,; \tag{3.2}$$

$\widetilde{X}$ s'appelle la caractéristique locale de X, X^c sa compensée.

4. Calcul intégral stochastique d'Ito

La tribu optionnelle Opt sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est (voir Dellacheric–Meyer [1], volume 1, chapitre IV, 61) la tribu engendrée par les processus réels continus à droite et les parties $\mathcal{P}$-négligeables (c.-à-d. dont la projection sur Ω est $\mathcal{P}$-négligeable). (Elle est aussi engendrée par les intervalles stochastiques $[S,T[= \{(t,\omega); S(\omega) \le t < T(\omega)\}, S, T$ temps d'arrêt, ou simplement les $[S,+\infty] = [S,\overline{+\infty}[$, et les parties $\mathcal{P}$-négligeables).

Si H est une fonction réelle optionnelle bornée sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on peut définir une intégrale $H.V$,

$$(H.V)_t = \int_{]0,t]} H_s\, dV_s\,, \quad (H.V)_o = 0\,, \tag{4.1}$$

où, comme toujours, ω n'est pas marqué; cela veut dire

$$(H.V)(t,\omega) = \int_{]0,t]} H(s,\omega) dV(s,\omega) \quad (d = d_s)\,. \tag{4.2}$$

Elle se calcule individuellement pour tout ω (intégrale de Stieltjes); $H.V$ est encore un processus à variation finie.

Mais Ito a montré que, si H est optionnelle bornée, et si M est une martingale, on peut encore définir une intégrale stochastique $H.M$ (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII); mais elle ne se calcule plus individuellement pour tout ω, elle n'a qu'un sens global, comme $\mathcal{P}$-classe de processus (modulo les processus $\mathcal{P}$-presque partout nuls, c.-à-d. nuls pour $\mathcal{P}$-presque tout ω, pour tout t) un peu comme l'intégrale de Fourier d'une fonction de L^2 est seulement une classe de Lebesgue de fonctions de carré intégrable, sans valeur précise en chaque point; la méthode de définition est d'ailleurs la même, c'est un prolongement par continuité; c'est encore une martingale (voulant dire, comme indiqué à la fin du chapitre 2', une martingale locale; même si M est une martingale vraie, et si H est optionnelle bornée, $H.M$ n'est en général qu'une martingale locale).

Si alors X est une semi-martingale, et si H est optionnelle bornée, il y aura encore une intégrale stochastique $H.X$, nulle au temps 0; et $(H.X)^\sim = H.\widetilde{X}, (H.X)^c = H.X^c$. Inversement un théorème de Dellacherie (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII, 4) dit que les semi-martingales sont les seuls processus donnant lieu, dans un sens à préciser, à des intégrales stochastiques. De là, on passe facilement à des H optionnelles non seulement bornées, mais X-intégrables. On peut même passer à des H optionnelles qui ne sont plus intégrables, et définir des $H.X$ qui sont seulement des semi-martingales formelles (voir Schwartz [1]), au sens où la dérivée d'une fonction sans dérivée est une distribution, ou fonction formelle; d'ailleurs une semi-martingale formelle peut se définir comme une $H.X$, X semi-martingale, H optionnelle, non nécessairement X-intégrable. On pourra désormais écrire $H.X$, pour H optionnelle arbitraire, X semi-martingale formelle et ce sera encore une semi-martingale formelle. Mais on ne pourra plus parler de sa valeur $X(t,\omega)$, comme une distribution n'a pas de valeur en un point. On a aussi des processus à variation finie formels, et des martingales formelles, et on a toujours:

$$(H.X)^\sim = X.\widetilde{X}, (H.X)^c = H.X^c, H.(K.X) = HK.X\,. \tag{4.3}$$

Bien entendu, si X est à valeurs dans l'espace vectoriel E, H n'a pas besoin d'être réelle; si H est à valeurs dans $\mathcal{L}(E;F)$, alors $H.X$ est à valeurs dans F. Notons que, si S et T sont des temps d'arrêt, $1_{[S,T[}.X = X^T - X^S$. Nous ne nous occuperons pas des processus formels, mais nous négligerons les problémes d'intégrabilité.

5. Le crochet[3]

Si, dans (2.1), (2.2), (2.3), on remplace $=$ par $\leq$, on a la notion de sous-martingale; de là on passe aux sous-martingales locales, qu'on abrège encore par sous-martingales.

Si M est une martingale réelle, son carré M^2 est une sous-martingale ≥ 0; elle est alors une semi-martingale et sa composante à variation finie se note $[M,M]$, qui est un processus croissant. Si X est une semi-martingale quelconque, on pose

$$[X,X] = [X^c,X^c] + X_o^2\,. \tag{5.1}$$

On peut l'interpréter facilement. En effet, la trajectoire $X(\omega)$ n'est pas en général à variation finie (à cause de la composante martingale X^c), mais elle a une

[3] Voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VII, 42

variation quadratique finie, et justement $[X,X]_t(\omega)$ est la variation quadratique de $X(\omega)$ de 0 à t (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII, théorème 20):

$$(5.2) \qquad [X,X]_t(\omega) = \lim\,(X_o^2(\omega) + \sum_i (X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t})^2(\omega))\,,$$

lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 (le pas est mesuré par rapport à une distance sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ compatible avec sa topologie compacte); lim. est une limite en probabilité, uniformément en t. Par polarisation, si X, Y sont deux semi-martingales, on définit leur crochet, à variation finie $[X,Y]$. Si X, Y sont à valeurs dans des espaces vectoriels $E, F, [X,Y]$ est à valeurs dans $E \otimes F$; pour $F = E$, on prend en général $[X,Y]$ à valeurs dans le produit tensoriel symétrique $E \odot E$, quotient de $E \otimes E$. On a toujours

$$(5.3) \qquad [H.X, K.Y] = HK.[X,Y]\,.$$

Un théorème, dû à Girsanov (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VII, 45), dit que, si Q est une probabilité équivalente à $\mathcal{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, un processus X est une Q-semi-martingale si et seulement s'il est une $\mathcal{P}$-semi-martingale. Les processus $\widetilde{X}, X^c$, ne sont pas les mêmes pour $\mathcal{P}$ et Q, mais $[X,X]$ est le même d'après (5.2).

$[X,Y]$ est l'unique processus à variation finie tel que $XY - [X,Y]$ soit une martingale nulle au temps 0.

6. Le mouvement brownien

La plus connue des martingales (vraie, pas seulement locale, mais sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$) est le mouvement brownien. Dans un espace euclidien E de dimension N, on appelle mouvement brownien normal une martingale B vérifiant:

a) $B_o = 0$ $\mathcal{P}$-presque sûrement;
b) Pour $t > s$, $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$, et sa loi dans E (la mesure image $(B_t - B_s)(\mathcal{P})$) est la loi de Gauss centrée de paramètre $\sqrt{t-s}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\right)^N \exp(-|x|^2/2(t-s))dx$$

L'existence d'une telle martingale a été démontrée par N. Wiener; elle n'est évidemment pas unique $(\Omega, \mathcal{P}, \ldots$ peuvent varier), mais elle est unique "en loi". Les plus importants résultats sur le brownien ont été donnés par P. Lévy.

On montre qu'on peut aussi caractériser le brownien par le fait que c'est une martingale dont le crochet $[B,B]$, à valeur dans $E \odot E$. est

$$[B,B]_t = \sum_{k=1}^N (e_k \odot e_k)t\,, \quad \text{ou}\, [B^i, B^j]_t = \delta^{ij} t\,,$$

si (e_k) est une base orthonormée quelconque, δ le symbole de Kronecker; ou encore, en omettant toujours ω:

$$t \mapsto B_t \odot B_t - \sum_{k=1}^{N}(e_k \odot e_k)t \text{ est une martingale}.$$

(Voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII, théorème 5.9). Ce théorème est dû à Paul Lévy.

7. Le calcul différentiel stochastique vectoriel; la formule de changement de variables d'Ito

Soient E, F des espaces vectoriels, U un ouvert de E, Φ une application C^2 : $U \to F, X : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to E$ une semi-martingale, à valeurs dans U. Alors $\Phi(X)$ est une semi-martingale à valeurs dans F, qui s'écrit (voir Dellacherie–Meyer [1], volume 2, chapitre VIII, théorème 27):

$$\Phi(X) = \Phi(X_o) + \Phi'(X).X + \frac{1}{2}\Phi''(X).[X,X] \tag{7.1}$$

Comme X n'est pas à variation finie, mais a une variation quadratique $[X,X]$, il n'est pas étonnant qu'apparaisse le deuxième terme de la formule de Taylor, avec Φ''. L'interprétation est immédiate: X est à valeurs dans $E, \Phi'(X)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E;F)$, donc $\Phi'(X).X$ à valeurs dans F; $[X,X]$ est à valeurs dans $E \odot E$, $\Phi''(X)$ à valeurs dans l'espace des applications bilinéaires symétriques de $E \times E$ dans F, donc linéaires de $E \odot E$ dans F, et $\Phi''(X).[X,X]$ est bien encore à valeurs dans F. On en déduit:

$$\widetilde{\Phi(X)} = \Phi(X_o) + \Phi'(X).\widetilde{X} + \frac{1}{2}\Phi''(X).[X,X] \tag{7.2}$$

$$(\Phi(X))^c = \Phi'(X).X^c \tag{7.3}$$

$$\frac{1}{2}[\Phi(X), \Phi(X)] = \frac{1}{2}\Phi(X_o) \odot \Phi(X_o) + \frac{1}{2}(\Phi'(X) \odot \Phi'(X)).[X,X]\,. \tag{7.4}$$

Dans la dernière formule, $\Phi'(X)$ est une application linéaire de E dans F, son carré tensoriel symétrique $\Phi'(X) \odot \Phi'(X)$ est linéaire de $E \odot E$ dans $F \odot F, [X,X]$ est à valeurs dans $E \odot E$, donc $(\Phi'(X) \odot \Phi'(X))[X,X]$ est bien à valeurs dans $F \odot F$.

8. Première extension: formules locales[4]

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, optionnel. On dira que A est ouvert si, pour tout ω, la section $A(\omega) = \{t; (t,\omega) \in A\}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

On dira qu'un processus X est équivalent à 0 sur A, $X \underset{A}{\sim} 0$, si pour $\mathcal{P}$-presque tout ω, $X(\omega)$ est localement constant sur $A(\omega)$ (localement, cette fois, au sens

(4) Voir Schwartz [2], chapitres 2 et 3, et Schwartz [1]

topologique habituel: $X(\omega)$ est constant sur tout intervalle de $A(\omega)$). On dira que $X \underset{A}{\sim} Y$ si $X - Y \underset{A}{\sim} 0$.

On montre que, pour X, Y, semi-martingales:

(8.1) $$X \underset{A}{\sim} 0 \Longleftrightarrow \widetilde{X} \underset{A}{\sim} 0\,, \quad X^c \underset{A}{\sim} 0\,,$$

(8.2) $$X \underset{A}{\sim} \Rightarrow [X,Y] \underset{A}{\sim} 0\,,$$

(8.3) Si H est optionnel borné, *nul* sur A, ou si $X \underset{A}{\sim} 0$, alors $H.X \underset{A}{\sim} 0$.

Alors

(8.4) $$X \underset{A}{\sim} X'\,, \quad Y \underset{A}{\sim} Y' \Rightarrow [X,Y] \underset{A}{\sim} [X',Y']$$

(Noter que ce n'est pas vrai pour le produit multiplicatif ordinaire: les équivalences de gauche n'entraînent pas $XY \underset{A}{\sim} X'Y'$).

(8.5) $$H \underset{A}{=} H'\,, \quad X \underset{A}{\sim} X' \Rightarrow H.X \underset{A}{\sim} H'.X'\,.$$

On peut alors définir des semi-martingales sur des ouverts A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Un processus $X : A \to E$ est une semi-martingale s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de réunion A, et de semi-martingales $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ tel que $X \underset{A_n}{\sim} X_n$; de même pour les processus à variation finie et martingales. Si $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on retrouve les objets définis antérieurement sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (à condition d'avoir introduit les martingales locales du chapitre 2'). Si X est une semi-martingale formelle sur A, on peut définir $\widetilde{X}, X^c, [X,X]$, et $H.X$ pour H processus optionnel vrai sur A (restriction à A d'un processus optionnel sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$); mais ce ne sont que des processus formels sur A, même si X est une semi-martingale vraie sur A (une égalité $X = \widetilde{X} + X^c$, où X est vraie et $\widetilde{X}, X^c$ seulement formelles, est à comparer à une solution u de l'equation des ondes, où $\frac{\partial u}{\partial t}$ et Δu sont seulement des distributions, pour $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ fonction) et ils ne sont définis qu'à une équivalence près sur A; autrement dit ce sont des classes d'équivalence sur A de semi-martingales formelles; et toutes les formules antérieures subsistent dans ce cadre.

La formule (7.1) d'Ito subsiste: si X est une semi-martingale sur A, et si Φ est C^2, $\Phi(X)$ est une semi-martingale sur A, mais les termes du deuxième membre ne sont que des classes d'équivalence sur A de semi-martingales formelles, et (7.2), (7.3), (7.4) subsistent aussi, où même les premiers membres sont des classes d'équivalence sur A de semi-martingales formelles. On conviendra d'appeler *différentielle semi-martingale* une telle classe d'équivalence; si X est une semi-martingale, sa classe se notera dX. Alors $d(H.X) = H\, dX$; on a $H(K\, dX) = H(d(K.X)) = d(H.(K.X))$, et $(H\,K)dX = d(HK.X)$, donc l'égalité (4.3) donne $H(K\, dX) = (H\,K)dX$, ce qui est une notation cohérente; les différentielles semi-martingales sur A (mais aussi les différentielles à variation finie et les différentielles martingales) forment un module sur l'anneau des fonctions optionnelles sur A, pour l'intégration stochastique.

Par ailleurs il est aussi commode de remplacer $d[X,X]$ par $dX \odot dX$ ou même $dX\ dX$, puisque c'est une variation quadratique (chapitre 5), et alors les formules d'Ito (chapitre 7) si X est une semi-martingale sur A, s'écrivent sous forme différentielle:

$$d(\Phi(X)) = \Phi'(X)dX + \frac{1}{2}\Phi''(X)dX\ dX \tag{8.6}$$

$$d(\widetilde{\Phi(X)}) = \Phi'(X)\widetilde{dX} + \frac{1}{2}\Phi''(X)dX\ dX \tag{8.7}$$

$$d(\Phi(X)^c) = \Phi'(X)dX^c \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{2}d(\Phi(X))d(\Phi(X)) = \frac{1}{2}(\Phi'(X) \odot \Phi'(X))dX\ dX\,. \tag{8.9}$$

9. Deuxième extension: semi-martingales sur des variétés[(5)] de classe C^2

Soit V une telle variété, $X : A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to V$ un processus. On dira que c'est une V-semi-martingales si, pour toute fonction φ réelle C^2 sur V, $\varphi(X)$ est une semi-martingale réelle. Par Ito, si $V = E$ espace vectoriel, on retrouve la notion antérieure. Si $\Phi : V \to V'$ est une application C^2, $\Phi(X)$ est ene V'-semi-martingale. Si maintement W est une sous-variété (non nécessairement fermée) de V et X une V-semi-martingale prenant ses valeurs dans W, c'est une W-semi-martingale. Bien entendu, on peut parler de V-processus à variation finie, mais pas de V-martingale; $X^c, \widetilde{X}, [X,X]$ n'ont aucun sens, ni la notion d'équivalence sur A, car il n'y a pas d'addition sur V. Mais nous allons donner un sens aux différentielles, en utilisant les espaces vectoriels tangents à V.

D'après ce qui est dit ci-dessus, comme V peut (Whitney) être plongée dans un espace vectoriel E, un V-processus est une V-semi-martingale si et seulement si c'est une E-semi-martingale.

10. Différentielles semi-martingales sections d'un fibré vectoriel optionnel[(6)]

Soient $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ ouvert, et G_A un espace fibré optionnel au dessus de A, à fibres vectorielles de dimension finie, de fibre-type G; $G_{(t,\omega)}$ est la fibre au dessus de $(t,\omega) \in A$. Il y a des cartes produits, $G_{A'} \to A' \times G$; la formule de transition d'une carte à une autre est optionnelle, $((t,\omega),g) \mapsto ((t,\omega),\alpha(t,\omega)g)$, où α est optionnelle sur A' à valeurs dans $\mathcal{L}(G;G)$. Alors on appellera *diffèrentielle semi-martingale section de G_A* la donnée, pour chaque carte $G_{A'} \to A' \times G$, d'une G-différentielle semi-martingale dX' sur A', avec la formule de transition $dX' \mapsto \alpha dX'$, pour la structure de module par intégration stochastique définie au chapitre 8.

(5) Voir Schwartz [2], [3]
(6) Voir Schwartz [4]

Seule existe ici la différentielle semi-martingale section de G_A, dX, par le système cohérent des dX'; X elle-même n'existe pas; d'abord les différentielles sont des classes d'équivalence de semi-martingales formelles; ensuite, si on peut écrire symboliquement $dX(t,\omega) \in G_{(t,\omega)}, dX(t,\omega)$ est un petit vecteur semi-martingale $\in G_{(t,\omega)}$ (exactement par le même abus de langage par lequel, si T est une section-distribution d'un fibré vectoriel G_V au-dessus d'une variété V, on se permend d'écrire, en l'absence d'étudiants, pour $v \in V$, $T(v) \in G_v$, alors que T n'a de valeur en aucun point), les fibres $G_{(t,\omega)}$ varient avec t, ω, et "l'intégrale" $X_t(\omega) = \int_{]o,t]} dX_s(\omega)$ n'est nulle part!

Mais la structure de module est très riche. Si dX est une G_A-différentielle semi-martingale au dessus de A, β une section optionnelle d'un fibré $\mathcal{L}(G_A; H_A)$ (de fibre $\mathcal{L}(G(t,\omega); H(t,\omega))$ au-dessus de (t,ω)), le produit βdX (intégration stochastique) est une H_A-différentielle semi-martingale. On a de même des différentielles à variation finie et martingales. Toute G_A-différentielle de semi-martingale dX a une décomposition unique $dX = d\widetilde{X} + dX^c, d\widetilde{X}$ G_A-différentielle à variation finie, dX^c G_A-différentielle martingale; et $d[X,X]$ ou $dX\ dX$ est une différentielle à variation finie section de $G_A \odot G_A$.

11. Différents espaces tangents à une variété C^2[7]

L'espace m-tangent $T^m(V;v)$ à une variété V de classe C^m, en un point v, est l'espace vectoriel des formes linéaires sur $C^m(V;\mathbb{R})$ (C^m = espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^m) qui s'annulent sur les fonctions m-plates en v (une fonction est m-plate en v si ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, m$, sont nulles en v; ceci a un sens par des cartes). Un élément de $T^m(V;v)$ est la trace au point v d'un opérateur différentiel d'ordre $\leq m$ sur V, sans terme d'ordre 0; et un tel opérateur différentiel d'ordre $\leq m$ n'est autre qu'un champ de vecteurs m-tangents, ou une section du fibré $T^m(V)$ m-tangent. Nous aurons besoin de $m = 1, 2$; $T^1(V;v) \subset T^2(V;v)$. Le quotient $T^2(V;v)/T^1(V;v)$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel symétrique $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$. Soient $\xi, \eta \in T^1(V;v)$. Ils se prolongent en $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, opérateurs différentiels d'ordre 1 sur V; le composé $\bar{\xi}\bar{\eta}$ est un opérateur différentiel d'ordre 2; sa trace $(\bar{\xi}, \bar{\eta})_v$ en v est un élément de $T^2(V;v)$. Il dépend, bien entendu, des prolongements choisis; mais, modulo $T^1(V;v)$, il n'en dépend pas. On définit ainsi une application bilinéaire de $T^1(V;v) \times T^1(V;v)$ dans $T^2(V;v)/T^1(V;v)$. Elle est symétrique, car $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]$ (crochet de Lie) est un opérateur différentiel d'ordre 1. Donc elle définit une application linéaire de $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$ dans $T^2(V;v)/T^1(V;v)$, qu'une carte montre être bijective. Si D est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 sans terme d'ordre 0, c.-à-d. une section du fibré $T^2(V)$, son symbole principal, en théorie des équations aux dérivées partielles, au point v, est son image dans $T^2(V;v)/T^1(V;v)$, donc un élément de $T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$, ou un polynôme homogène de degré 2 sur le fibré cotangent $T^{*1}(V;v)$.

[7] Voir Schwartz [3], chapitres 1,2

Dans une carte de V sur un ouvert d'un vectoriel $E, T^1(V;v) \simeq E, T^2(V;v) \simeq E \oplus (E \odot E)$, le quotient devient facteur direct. On peut d'aileurs identifier $T^m(V;v)$ à l'espace des opérateurs différentiels *à coefficients constants* d'ordre $\leq m$, sans terme d'ordre 0. Si (e_k), $k = 1, 2, \ldots, N$, est une base de E, on peut identifier e_k à la dérivée partielle ∂_k, un élément de $T^1(V;v) \simeq E$ est $\sum_{k=1}^N b^k \partial_k$, et un élément de $T^2(V;v) \simeq E \oplus (E \odot E)$ est

$$\sum_{k=1}^N b^k \partial_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a^{i,j} \partial_i \partial_j \,, \qquad a^{i,j} = a^{j,i} \,;$$

$T^1(V;v)$ est de dimension $N, T^2(V;v)$ de dimension $N + N(N+1)/2$.

Si on passe d'une carte à une autre, par une application Φ de classe C^2 d'un ouvert de E dans F, et si on représente les vecteure 2-tangents par la différentielle d'ordre 2 de Φ,

$$\text{(11.1)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi'(v)\alpha + \Phi''(v)\beta \\ \Phi'(v) \odot \Phi'(v)\beta \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} F \\ \oplus \\ F \odot F \end{pmatrix} ,$$

ou

$$\begin{pmatrix} \Phi'(v) & \Phi''(v) \\ 0 & \Phi'(v) \odot \Phi'(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

12. Formule d'Ito et espaces tangents

Soit X une V-semi-martingale. Dans une carte sur un ouvert U d'un vectoriel E, où nous l'écrirons encore X, introduisons la semi-martingale complète associée, $\underline{X}$, $(E \oplus (E \odot E))$-semi-martingale qui n'a de sens que dans cette carte:

$$\text{(12.1)} \qquad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{1}{2}[X, X] \end{pmatrix} , \qquad \underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \frac{1}{2} dX\, dX \end{pmatrix} .$$

Dans le changement de cartes $E \to F$, les formules d'Ito (8.6), (8.7), (8.8), (8.9) s'écrivent, si $Y = \Phi(X)$:

$$\text{(12.2)} \qquad \underline{dY} = \begin{pmatrix} \Phi'(v) & \Phi''(v) \\ 0 & \Phi'(v) \odot \Phi'(v) \end{pmatrix} \underline{dX} ,$$

$$\text{(12.3)} \qquad \underline{\widetilde{dY}} = \begin{pmatrix} \Phi'(v) & \Phi''(v) \\ & \Phi(v) \odot \Phi'(v) \end{pmatrix} \underline{\widetilde{dX}} ,$$

$$\text{(12.4)} \qquad \underline{dY}^c \text{ qu'on écrit } dY^c = \Phi'(X) dX^c ,$$

$$\text{(12.5)} \qquad \frac{1}{2} dY dY = \Phi'(X) \odot \Phi'(X) \frac{1}{2} dX dX .$$

En comparant (12.2) et (11.1), on voit que l'on peut considérer $\underline{dX_t}$ comme un petit vecteur semi-martingale $\in T^2(V;X_t)$, $\underline{dX}(t,\omega) \in T^2(V;X(t,\omega))$. Les définitions du chapitre 10 montrent que, si X est une V-semi-martingale sur $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on peut considérer sa différentielle $\underline{dX}$ (voir Schwartz [4], proposition (2.7), p. 710) comme une différentielle semi-martingale section du fibré $T^2(V)$ au dessus de V, le long de X, c.-à-d. une différentielle semi-martingale section du fibré G_A, où G_A est le fibré image réciproque du fibré $T^2(V)$ par l'application $X : A \mapsto V$; la fibre $G_{(t,\omega)}$ est $T^2(V;X(t,\omega))$. De même sa composante à variation finie, $\widetilde{\underline{dX}}$, est une différentielle section du même fibré. Mais la composante martingale dX^c, par la formule (12.4), est une différentielle martingale section du sous-fibré $T^1(V)$ le long de X, tandis que l'image de $\underline{dX}$ dans le quotient $T^2(V)/T^1(V)$ est une différentielle à variation finie section du quotient $T^1(V)\odot T^1(V)$; c'est $\frac{1}{2}dX\ dX$. Ainsi il n'y a pas de décomposition $X = \widetilde{X} + X^c$, ni de crochet $[X,X]$, mais il y a une décomposition $\underline{dX} = \widetilde{\underline{dX}} + dX^c$, $\underline{dX}(t,\omega) \in T^2(V;X(t,\omega))$, $\widetilde{\underline{dX}}(t,\omega) \in T^2(V;X(t,\omega))$, $dX^c(t,\omega) \in T^1(V;X(t,\omega))$, et un produit $\frac{1}{2}dX\ dX(t,\omega) \in T^1(V;X(t,\omega)) \odot T^1(V;X(t,\omega))$, $\frac{1}{2}dX\ dX$ image de $\underline{dX}$ et de $\widetilde{\underline{dX}}$ dans $T^2(V)/T^1(V)$.

13. Equations différentielles stochastiques (EDS)

Ici $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Une EDS sur un ouvert d'un espace vectoriel E de dimension finie N est une équation de la forme

$$dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X)dZ^k\,, \tag{13.1}$$

où H_k est un champ de vecteurs, Z^k une semi-martingale réelle. Il y a existence et unicité de la solution, pour des H_k localement lipschitziens (avec explosion ou temps de mort), si on se donne la valeur initiale X_o, variable aléatoire $\mathcal{F}_o$-mesurable. Si on fait un changement de cartes, la formule d'Ito montre que les crochets $[Z^\imath, Z^\jmath]$ interviendront; autant vaut les mettre tout de suite. Nous considérerons donc plutôt une EDS de la forme:

$$dX_t = \sum_{k=1}^{m} H_k(X_t)dZ_t^k + \frac{1}{2}\sum_{\imath,\jmath=1}^{m} H_{\imath,\jmath}(X_t)d[Z^\imath, Z^\jmath]_t\,, \tag{13.2}$$

où les H_k et les $H_{\imath,\jmath}$ sont des champs de vecteurs, $H_{\jmath,\imath} = H_{\imath,\jmath}$.

Si, dans une carte, les $H_{\imath,\jmath}$ sont nuls, c'est un accident, ils ne le seront pas dans une autre. En passant à la semi-martingale complète associée, on trouve:

$$\frac{1}{2}dX_t dX_t = \frac{1}{2}\sum_{\imath,\jmath=1}^{m} H_\imath(X_t) \odot H_\jmath(X_t) d[Z^\imath, Z^\jmath]_t \tag{13.3}$$

d'où

$$\underline{dX}_t = \sum_{k=1}^{m} H_k(X_t)dZ_t^k + \frac{1}{2}\sum_{\imath,\jmath=1}^{m} \underline{H_{\imath,\jmath}(X_t)}d[Z^\imath, Z^\jmath]_t\,, \tag{13.4}$$

où les H_k sont des champs de E-vecteurs, les $H_{i,j}$ des champs de $(E \oplus (E \odot E))$-vecteurs, $\underline{H_{j,i}} = \underline{H_{i,j}}$; la composante de $\underline{H_{i,j}}$ dans $E \odot E$ étant $H_i \odot H_j$.

Mais alors ceci devient indépendant de toute carte. Une EDS sur une variété V (voir Schwartz [3], chapitre 8) sera une équation de la forme (13.4); les Z^k sont des champs de vecteurs 1-tangents donnés; les $\underline{H_{i,j}}$, avec $\underline{H_{j,i}} = \underline{H_{i,j}}$, sont des champs de vecteurs 2-tangents donnés; ces champs doivent être localement lipschitziens, donc V doit être C^2-lipschitz; et on a la condition de compatibilité suivante: la projection de $\underline{H_{i,j}}$ dans le quotient $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$ doit être $H_i \odot H_j$ qui exprime que l'image du deuxième membre dans le quotient $T^2(V; X_t)/T^1(V; X_t) = T^1(V; X_t) \odot T^1(V; X_t)$ est $\frac{1}{2} dX_t dX_t$. Une solution est une V-semi-martingale X, dont la différentielle $\underline{dX}$ au sens du chapitre 12 doit être égale au deuxième membre, différentielle semi-martingale section de $T^2(V)$ le long de X.

On peut donc écrire globalement une EDS sur une variété. Et, pas plus difficilement sur une variété que sur un espace vectoriel, on montre l'existence et l'unicité de la solution pour une condition initiable donnée X_o, $\mathcal{F}_o$-mesurable, avec explosion ou temps de mort.

14. Diffusion brownienne sur une variété

Ici on est sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Le mouvement brownien sur un espace euclidien E vérifie l'EDS $dX = dB$, donc, compte tenu du chapitre 6:

$$\underline{dX_t} = \begin{pmatrix} dB_t \\ \frac{1}{2}\Sigma_{k=1}^N e_k \odot e_k dt \end{pmatrix};$$

on en déduit

$$\widetilde{\underline{dX}}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\Sigma_{k=1}^N e_k \odot e_k \end{pmatrix} dt. \tag{14.1}$$

L'opérateur différentiel du second ordre correspondant au champ de vecteurs constant $\frac{1}{2}\Sigma_{k=1}^N e_k \odot e_k$ est $\frac{1}{2}\Delta$, qu'on peut écrire comme champ 2-tangent: $v \mapsto \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\Delta(v)$. C'est cela qui traduit que son semi-groupe, de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta$, est le semi-groupe de la chaleur, et que la loi de $X_t = B_t$ est la gaussienne de paramètre $\sqrt{t}$.

Si alors L est un opérateur différentiel du second ordre semi-elliptique ≥ 0 sans terme d'ordre 0, sur une variété V, on appellera *diffusion L-brownienne* une solution de l'EDS (voir Schwartz [5]):

$$\widetilde{\underline{dX}}_t = L(X_t)dt. \tag{14.2}$$

On voit bien que L est un champ de vecteurs 2-tangents, sa valeur en X_t est $L(X_t) \in T^2(V; X_t)$, et $\widetilde{\underline{dX}}_t$ est un petit vecteur à variation finie $\in T^2(V; X_t)$, au sens du chapitre 12, donc (14.2) est bien cohérent. Cette EDS n'est pas mise sous la forme canonique (13.4), assurant l'existence et l'unicité de la solution, pour une condition initiale donnée; on ne donne ici que $\widetilde{\underline{dX}}_t$, il manque la composante martingale dX_t^c, et la condition de compatibilité requise n'est donc pas là non plus. Mais, si L est de range constant (cas strictement elliptique par exemple), la connaissance d'un $\widetilde{\underline{dX}}_t$ proportionnel à dt permet (moyennant un élargissement de $\Omega, \mathcal{P}$), de trouver le terme dX_t^c; ou démontre qu il est nécessairement de la forme

$$dX_t^c = \sum_{l=1}^{m} \sigma_l(X_t) dB_t^l \,, \tag{14.3}$$

où $(B^l)_{l=1,2,\ldots,m}$ est un brownien normal d'un espace $\mathbb{R}^m$, et où, pour $v \in V$, $\sigma_l(v) \in T^1(V;v)$, et

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} \sigma_l(v) \odot \sigma_l(v) = \text{image de } L(v) \text{ dans } T^2(V;v)/T^1(V;v) = T^1(V;v) \odot T^1(V;v)\,.$$

Alors

$$\underline{dX}_t = \sum_{l=1}^{m} \sigma_l(X_t) dB_t^l + L(X_t)dt\,, \tag{14.4}$$

donc $\widetilde{\underline{dX}}_t = L(X_t)dt$; c'est une EDS sous la forme canonique (13.4), $\sigma_l(v) \in T^1(V;v)$, $L(v) \in T^2(V;v)$. La condition de compatibilité est vérifiée; l'image dans le quotient $T^2(V;v)/T^1(V;v)$ de $L(v)$ est $\frac{1}{2}\Sigma_{l=1}^{m} \sigma_l(v) \odot \sigma_l(v)$, et il y a bien une solution unique, pour une condition initiale donnée. Si V est riemannienne, son brownien associé est son L-brownien, $L = \frac{1}{2}\Delta$. Par des méthodes difficiles, on peut montrer, pour L strictement elliptique ≥ 0, l'existence et l'unicité lorsque L a ses coefficients d'ordre 2 continus, et d'ordre 1 boréliens localement bornés: c'est le théorème de Stroock et Varadhan, voir Meyer–Priour–Spitzer [1], article de Priouret, chapitre VI.

15. Mouvement brownien et problème de Dirichlet

Montrons succinctement le rôle que joue le L-brownien pour la résolution d'un problème de Dirichlet pour L. Soit U un ouvert relativement compact de V, de frontière ∂U. Soit X le L-brownien issu de $a \in U$, $X_o = a$. La formule $\widetilde{\underline{dX}}_t = L(X_t)dt$ est une égalité entre petits vecteurs 2-tangents à V (en réalité entre différentielles semi-martingales sections du fibré $T^2(V)$ le long de X). Si φ est une fonction réelle C^2 à support compact sur V, on peut calculer les valeurs de ces petits vecteurs 2-tangents sur φ; la valeur du premier est $d\widetilde{\varphi(X)}_t$, la valeur du deuxième est $L\varphi(X_t)dt$. Donc:

$$d\widetilde{\varphi(X)}_t = L\varphi(X_t)dt\,. \tag{15.1}$$

Désignons part T le temps d'entrée dans le complémentaire de U (ou dans ∂U):

$$T = \inf\{t \geq 0; X_t \notin U\}\,;$$

c'est un temps d'arrêt (voir chapitre 2'); si on suppose V connexe non compacte, on voit que $T < +\infty$ et que les intégrales qui vont suivre ont un sens. Calculons le $E\int_o^T$ des deux membres de (14.1), en se souvenant que $X_o = a$:

$$E(\varphi(X))_{T}^{\sim} - \varphi(a) = E\int_o^T (L\varphi)(X_t)dt. \tag{15.2}$$

(si $Y = (\varphi(X))^{\sim}$ est un processus, Y_T est sa valeur en T, $Y_T(\omega) = Y(T(\omega), \omega)$, c'est une variable aléatoire, à ne pas confondre avec le processus arrêté Y^T).

Mais $\varphi(X)$ et $(L\varphi)(X)$ sont bornés, donc $(\varphi(X))^{\sim}$ aussi aux temps bornés, donc $(\varphi(X))^c$ aussi, donc c'est une vraie martingale pas seulement locale, et nulle au temps 0; $E(\varphi(X))_T^c = 0$, et $E(\varphi(X))_t^{\sim} = E(\varphi(X))_T = E\varphi(X_T)$. Donc

$$\varphi(a) = E(\varphi(X_T)) - E\int_o^T (L\varphi)(X_t)dt. \tag{15.3}$$

On définit ainsi deux mesures ≥ 0:

$$\mu_a, \mu_a(\varphi) = E(\varphi(X_T)), \quad \text{de masse } + 1, \text{portée par } \partial U;$$

$$\Gamma_a, \Gamma_a(\psi) = E\int_o^T \psi(X_t)dt, \quad \text{portée par } U.$$

La deuxième est absolument continue par rapport aux mesures de Lebesgue de V. Si en effet A est un ensemble Lebesgue-négligeable,

$$E\int_o^T 1_A(X_t)dt \leq E\int_o^{+\infty} 1_A(X_t)dt = \int_o^{+\infty} \mathcal{P}\{X_t \in A\}dt;$$

mais on démontre que la loi de X_t, loi image $X_t(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ par X_t, est toujours absolument continue par rapport aux mesures de Lebesgue, donc $\mathcal{P}\{x_t \in A\} = 0$. Donc A Lebesgue-négligeable est Γ_a-négligeable. Donc $\Gamma_a = G(a,x)dx$, si dx est une mesure de Lebesgue sur V. Alors:

$$\varphi(a) = \mu_a(\varphi) - \int_U G(a,x)L\varphi(x)dx: \tag{15.4}$$

μ_a est la mesure L-harmonique sur ∂U relative à a $\in U$, et $G(a,x)dx$ est le L-noyau de Green. (La formule (15.4) n'est démontrée que si la fonction φ sur $\bar{U}$ est restriction d'une fonction C^2 sur V; il faut que ∂U soit assez régulier pour qu'on puisse l'etendre à des données de Dirichlet plus générales).

16. Le flot d'une EDS (13.4)

Si les coefficients d'une EDS sont C^∞ et en nous bornant au cas où il n'y a pas à considére de temps de mort (cas dit complètement conservatif), on peut appeler $\Phi_t(\omega; x)$ la valeur en (t, ω) de la solution correspondant à la valeur initiale x. Alors un théorème très remarquable dit que l'on peut choisir Φ tel que, pour $\mathcal{P}$-presque tout $\omega, \Phi(\omega; .)$ soit C^∞ en x, à dérivées continues en t, x; Φ est le flot. (Ce qui est remarquable, c'est qu'on n'ait pas seulement: pour tout x, pour presque tout $\omega, \Phi(\omega; x)$ est continue en t, mais: pour presque tout $\omega, \ldots$). Pour une donnée initiale X_o $\mathcal{F}_o$-mesurable, la solution est $\Phi(., X_o)$. Alors $\Phi_t(\omega; .)$ est un C^∞-difféomorphisme de V sur un ouvert de V, et sur V elle-même moyennant des hypothèses plus restrictives, par exemple si V est compacte, ou si $V = \mathbb{R}^N$ et si les champs H_k de (13.1) sont globalement lipschitziens.

On peut aller plus loin, et résoudre l'équation sans probabilité (voir Schwartz [6], chapitre 4). L'ensemble $(Z^1(\omega), Z^2(\omega), \ldots, Z^m(\omega))$ est une trajectoire $uu \in C([0, +\infty]; \mathbb{R}^m])$; $(H_1(v), H_2(v), \ldots, H_m(v))$ est une application linéaire $H(v)$ de $\mathbb{R}^m$ dans $T^1(V; v), \underline{(H_{i,j}(v))}_{i,j=1,2,\ldots,m}$ une application linéaire de $\mathbb{R}^m \odot \mathbb{R}^m$ dans $T^2(V; v)$. On peut écrire l'équation avec des notations à une variable:

$$\underline{dX}_t = H(X_t)dZ_t + \frac{1}{2}\underline{H}(X_t)d[Z, Z]_t\,, \tag{16.1}$$

l'image de $\underline{H}(v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \odot \mathbb{R}^m; T^2(V; v))$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \odot \mathbb{R}^m;\ T^2(V; v)/T^1(V; v))$ étant $H(v) \odot H(v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \odot \mathbb{R}^m; T^1(V; v) \odot T^1(V; v))$.

Ecrivon l'EDS en termes de trajectoires:

$$\begin{aligned} &\underline{d\xi}_t = H(\xi_t)dw_t + \frac{1}{2}\underline{H}(\xi_t)d[w, w]_t\,, \\ &w \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^m) \text{ donnée}, \xi \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; V) \text{ inconnue}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Cette équation a un sens si w est à variation finie, avec $d[w, w] = dwdw = 0$; sinon, pour un w donné, elle n'a pas de sens (pas seulement parce que $[w, w]$ n'a pas de sens, il peut en avoir si w a une variation quadratique, mais parce que $H(\xi_t)dw_t$ n'en a pas). Mais il existe, indépendamment de toute probabilité, une application de $C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^m) \times V$ dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+; V)$, appelée flot Φ, ayant la propriété suivante: si Z est une $\mathbb{R}^m$-semi-martingale sur un $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathcal{P}), X_o$ une condition initiale $\mathcal{F}_o$-mesurable, la solution de (15.1) avec la condition initiale X_o est donnée par $X_t(\omega) = \Phi_t(Z(\omega), X_o(\omega))$. L'application unique Φ résout toutes les EDS pour les champs $H, \underline{H}$ donnés, sans probabilité. En particulier, pour $\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Z, X_o$ donnés, la solution est la même pour toutes les probabilités $\mathcal{P}$ qui font de Z une semi-martingale. En outre, l'ensemble $\mathcal{W}$ des $w \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^m)$ pour lesquels $\Phi(w, .)$ est une fonction C^∞ en x, à dérivées continues en t, x, et pour lesquels $\Phi_t(w, .)$ est, pour tout t, un C^∞-difféomorphisme de V sur un ouvert de V, est "universellement presque sûr": pour tout $\mathcal{P}$ qui fait de Z une semi-martingale, $Z(\omega) \in \mathcal{W}$ $\mathcal{P}$-presque sûrement.

17. Relèvement d'une semi-martingale par une connexion(8)

Soit G_V un fibré sur une variété V, de fibre G_v en $v \in V$. Soit σ une connexion; si $\hat{v} \in G_v, \sigma(\hat{v}) \in \mathcal{L}(T(V; v); T(G_V; \hat{v})), \pi\sigma =$ identité, si π est la projection de G_V

(8) Pour ce chapitre 17, voir Schwartz [3], chapitre 13

sur V. On démontre que cette connexion définit automatiquement des connexions d'ordre supérieur, $\sigma^m, \sigma^m(\hat{v}) \in \mathcal{L}(T^m(V;v); T^m(G_V;\hat{v}))$; σ^2 respecte les structures de sous-espace et quotient du chapitre 11, c.-à-d. σ^2 induit $\sigma^1 = \sigma$ sur $T^1(V;v)$, et définit $\sigma^1 \odot \sigma^1$ sur $T^2(V;v)/T^1(V;v) = T^1(V;v) \odot T^1(V;v)$.

On sait que les connexions définissent des transports parallèles le long de courbes C^1 de V, ou relèvements horizontaux de ces courbes. On peut prolonger ces relèvements aux semi-martingales. Soit X une V-semi-martingale; ses relevées $\hat{X}$ sont des G_V-semi-martingales horizontales, vérifiant la relation différentielle

$$(17.1)\qquad \begin{aligned} &\underline{d\hat{X}}_t = \sigma^2(\hat{X}_t)\underline{dX}_t\,, \quad dX_t = \pi(\hat{X}_t)\,; \\ &\underline{d\hat{X}}_t \in T^2(V;\hat{X}_t)\,, \quad \sigma^2(\hat{X}_t) \in \mathcal{L}(T^2(V;X_t);\, T^2(G_V;\hat{X}_t))\,. \end{aligned}$$

Le relèvement s'obtient comme dans le cas d'une courbe C^1. On montre d'abord que toute semi-martingale X sur V est solution globale d'une EDS (13.4) sur V. Mais le relèvement d'une EDS est évident; on posera $\hat{H}(\hat{v}) = \sigma(\hat{v})H(v)$, $\underline{\hat{H}}(\hat{v}) = \sigma^2(\hat{v})\underline{H}(v)$; l'EDS relevée est

$$(17.2)\qquad \underline{d\hat{X}}_t = \hat{H}(\hat{X}_t)dZ_t + \frac{1}{2}\underline{\hat{H}}(\hat{X}_t)d[Z,Z]_t\,.$$

Si l'EDS de X satisfait à la condition de compatibilité, celle de $\hat{X}$ aussi; elle a donc une solution unique (avec temps de mort), pour un rèvement initial donné $\hat{X}_o$, au dessus de X_o, $\mathcal{F}_o$-mesurable, et c'est le relèvement de X.

Il y a même un flot, comme au chapitre 16, indépendant de toute probabilité. Ceci, à ma connaissance, n'est démontré nulle part, mais c'est une conséquence facile du chapitre 16. Il existe une application $(w,\hat{x}) \mapsto \hat{w} = \Phi(w,\hat{x})$, de $C(\overline{\mathbb{R}}_+;V) \times G_V$ dans $C(\overline{\mathbb{R}}_+;G_V)$, définie seulement pour $\pi\hat{x} = w_o$, telle que, si X est une $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathcal{P})$-$V$-semi-martingale, son relèvement, de valeur initiale $\hat{X}_o$ au-dessus de X_o, soit la semi-martingale $\hat{X} = \Phi(X,\hat{X}_o)$, $\hat{X}_t(\omega) = \Phi_t(X(\omega),\hat{X}_o(\omega))$. En particulier, si X est un V-processus sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_t)$, et si $\hat{X}_o$ est un relèvement $\mathcal{F}_o$-mesurable de $X_o, \hat{X} = \Phi(X,\hat{X}_o)$ est son relèvement correspondant pour toutes les probabilités $\mathcal{P}$ sur Ω qui font de X une semi-martingale.

Supposons que X soit une L-diffusion sur V, suivant le chapitre 14; L est un opérateur différentiel du second ordre ou champ de vecteurs 2-tangents, donc il a un relèvement $\sigma^2 L = \hat{L}$, champe de vecteurs 2-tangents sur G_V ou opérateur différentiel du second ordre, $\hat{L}(\hat{v}) = \sigma^2(\hat{v})L(v)$. Ensuite X a un relèvement horizontal $\hat{X}$ (pour une condition initiale donnée $\hat{X}_o$). De (16.1) on déduit:

$$(17.3)\qquad \widetilde{\underline{d\hat{X}}_t} = \sigma^2(\hat{X}_t)\widetilde{\underline{dX}_t} = \sigma^2(\hat{X}_t)L(X_t)dt = \hat{L}(\hat{X}_t)dt\ :$$

$\hat{X}$ est une $\hat{L}$-diffusion sur G_V. On peut donc construire $\hat{X}$ comme relèvement de X ou comme $\hat{L}$-diffusion, ou encore construire les $\hat{L}$-diffusions directement ou en relevant les L-diffusions. On peut aussi construire une L-diffusion sur V en projetant sur V une $\hat{L}$-diffusion sur G_V.

Il se trouve que, si V est riemannienne, si $L = \frac{1}{2}\Delta$, et si G_V est le fibré des repères orthonormés (fibré principal), muni de la connexion de Levi–Civita, $\hat{L} = \frac{1}{2}\hat{\Delta}$ est facile à construire, parce que le fibré tangent de G_V est trivial! Si $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$, un point $\hat{v}$ de G_v au-dessus de v est un repère $\mathbb{R}^m \to T(V;v); \hat{v}(e_k) \in T(V;v)$ a un relèvement horizontal $\sigma(\hat{v})(\hat{v}(e_k)) \in T(G_V;\hat{v})$, soit $\eta_k(\hat{v})$. Alors chaque η_k est un champ de vecteur 1-tangent ou opérateur différentiel d'ordre 1 sur G_V, appelé champ basique associé à e_k. On peut construire les opérateurs différentiels du deuxième ordre $\eta_k^2 = \eta_k \circ \eta_k$ sur G_V, ou champ de vecteurs 2-tangents. Alors le relèvement $\hat{\Delta}$ de Δ est $\Sigma_{k=1}^N \eta_k^2$. On peut résoudre su G_V l'EDS.

$$d\hat{X}_t = \sum_{k=1}^{m} \eta_k(\hat{X}_t) dB_t^k + \frac{1}{2}\hat{\Delta}(\hat{X}_t)dt\,, \tag{17.4}$$

qui admet une solution unique pour $\hat{X}_o$ donné; c'est une $\frac{1}{2}\hat{\Delta}$-diffusion; si $X_o = \pi\hat{X}_o$, alors $X = \pi\hat{X}$ sera la $\frac{1}{2}\Delta$-diffusion ou mouvement brownien de valeur initiale X_o d'où une construction du mouvement brownien sur V à partir de son relevé sur le fibré des repères. Avec des notations différentes, et même une conception assez différente, c'est la méthode de Eels–Elworthy (voir Ikeda-Watanabe [1], chapitre V, paragraphe 4). Ce sont ces jeux de relévements par connexion de mouvements browniens qui ont permis à J.M. Bismut de donner une nouvelle démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah–Singer pour l'opérateur de Dirac.

18. Semi-martingales à valeurs dans des espaces de dimension infinie[(9)]

Soit $\mathcal{H}$ un Banach. On pourrait appeler $\mathcal{H}$ semi-martingale un processus somme d'un processus à variation finie et d'une martingale. Il y a cependant deux difficultés. L'une est qu'il y a d'autres processus que les semi-martingales qui donnent lieu à des intégrales stochastiques suivant le chapitre 4, et cela quel que soit $\mathcal{H}$ de dimension infinie. Ce n'est pas trop gênant, mais ce qui l'est plus c'est qu'en général, une semi-martingale ne donne pas lieu à des intégrales stochastiques. C'est toutefois vrai si $\mathcal{H}$ est hilbertien séparable. C'est pourquoi, si G est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, on dira que X, processus à valeurs dans G, est une G-semi-martingale, s'il existe une suite de temps d'arrêt (voir chapitre 2') $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow\uparrow \overline{+\infty}$, et une suite de sous-espaces hilbertiens séparables $\mathcal{H}_n$ de G, tels que $1_{\{T_n>0\}}X^{T_n}$ soit une $\mathcal{H}_n$-semi-martingale. Un cas particulièrement intéressant est celui des espace G de Fréchet nucléaires (Ustunel, voir Schwartz [7]); si X est un G-processus, et si, pour tout $\xi \in G', < \xi, X >$ est une semi-martingale, X est une G-semi-martingale; et même il existe un même $\mathcal{H}$, sous-espace hilbertien séparable de G, tel que X soit une $\mathcal{H}$-semi-martingale. Un cas intéressant est celui de $G = C^\infty(E;F)$, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie,

(9) Voir Schwartz [7]

ou plus généralement $C^\infty(U; F)$, où U est une variété de dimension finie; c'est un Fréchet nucléaire. Si maintenant V est une autre variété, $C^\infty(U; V)$ n'est plus un espace vectoriel, ni même une variété. On peut cependant dire que Φ, $C^\infty(U; V)$-processus, est une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, si, pour toute fonction φ réelle C^∞ sur V, $\varphi \circ \Phi$ est une $C^\infty(U; \mathbb{R})$-semi-martingale. On a alors les trois théorèmes suivants, si U, V, W sont des variétés de dimension finie, Φ une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, Ψ une $C^\infty(V; W)$-semi-martingale, X une U-semi-martingale:

(1) $\Phi(X)$ est une V-semi-martingale;
(2) $\Psi \circ \Phi$ est une $C^\infty(U; W)$-semi-martingale;
(3) si, pour presque tout ω, pour tout t, $\Phi(t, \omega)$ est un difféomorphisme de U sur V, d'inverse $\Phi^{-1}(t, \omega), \Phi^{-1}$ est une $C^\infty(V; U)$-semi-martingale.

Par exemple, si Φ est le flot d'une EDS sur une variété V (chapitre 16), dans le cas complètement conservatif (par exemple V compacte), Φ est une $C^\infty(V; V)$-semi-martingale.

References

C. Dellacherie, P. A. Meyer

[1] *Probabilités et Potentiels*, Hermann, volume 1 1975, volume 2 1980, volume 3 1983.

N. Ikeda, S. Watanabe

[1] *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland-Kodansha, 1981.

P. A. Meyer

[1] *Flot d'une équation différentielle stochastique*, in *Séminaire de Probabilités, XV, 1979–80*, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer-Verlag, 1981, pp. 103–117.

P. A. Meyer, P. Priouret, F. L. Spitzer

[1] *Ecole d'Eté de Probabilités, St Flour, 1973*, Lecture Notes in Mathematics 390, Springer-Verlag, 1974.

L. Schwartz

[1] *Les semi-martingales formelles*, in *Séminaire de Probabilités, XV, 1979–80*, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer-Verlag, 1981, pp. 413–489.

[2] *Semi-martingales sur des Variétés et Martingales Conformes sur des Variétés Analytiques Complexes*, Lecture Notes in Mathematics 780, Springer-Verlag, 1980.

[3] *Géométri Différentielle Stochastique*, in *Séminaire de Probabilités, XVI, 1980–81*, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer-Verlag, 1982, Supplément, pp. 1–148.

[4] *Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités*, in *Aspects of Mathematics and its Applications, in honour of L. Nachbin*, Elsevier, 1986.

[5] *Construction Directe du Brownien sur une variété*, in *Séminaire de Probabilités, XIX, 1983-84*, Lecture Notes in Mathematics 1123, Springer-Verlag, 1985, pp. 91–112.

[6] *Calculs Stochastiques Directs sur les Trajectoires et Propriétés de Boréliens Porteurs*, in *Séminaire de Probabilités, XVIII, 1982-83,* Lecture Notes in Mathematics 1059, Springer-Verlag, 1984, pp. 271–326.

[7] *(I) Semi-martingales à valeurs dans des espaces d'applications C^∞ entre espaces vectoriels*, et *(II) Le théorème Φ^{-1}, et les semi-martingales à valeurs dans des espace d'applications C^∞ entre variétés*, C.R. Acad. Sc. Paris 305, série I, 1987, I: pp. 31–35, II: pp. 49–53.