Laurent Schwartz

Les différentielles de semi-martingales vraies, sections de fibrés vectoriels

J. Geom. Phys., 5(1) (1988), p. 137-148.

JGP - Vol. 5, n. 1, 1988

Les differentielles de semi-martingales vraies, sections de fibrés vectoriels

LAURENT SCHWARTZ
37, Rue Pierre Nicole – 75005 Paris – France

J'ai plaisir à publier cet article en l'honneur de I. M. Gelfand, qui est pour moi un ami, et dont l'influence sur les mathématiques de son temps a été considérable

Abstract. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\bar{\mathbf{R}}_+}, P)$ *has the usual meaning in probabilities. If* G_A *is an optional vector bundle above* A *(optional subset of* $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ *), one knowns the notion of a differential of formal semi-martingale* dX, *cross section of* G_A *(symbolically* $dX(t,\omega) \in G_{t,\omega}$, *fiber above* $(t,\omega) \in A$). *We study here the differentials of true semi-martingales, sections of* G_A. *It is necessary to work with particular vector bundles, the* $\mathcal{OB}$*-vector bundles. Applications are given: differential of a* V*-valued semi-martingale,* V *manifold, and covarinat derivative with respect to* $\underline{dX}$ *of a section* S *of a vector bundle* G_V *above a manifold* V *with a linear connection:* $\nabla_{\underline{dX}_t}(S) \in G_{X_t}$.

Résumé. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\bar{\mathbf{R}}_+}, P)$ *a la signification usuelle en probabilités. Si* G_A *est un espace fibré vectoriel au-dessus de* A *(ensemble optionnel de* $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ *), on connait la notion de différentielle de semi-martingale formelle,* dX, *section de* G_A *(symboliquement* $dX(t,\omega) \in G_{t,\omega}$, *fibre au-dessus de* $(t,\omega) \in A$ *). Nous étudierons ici les différentielles de semi-martingales vraies sections de* G_A; *cela nécessite de travailler sur des fibrés particuliers, les* $\mathcal{OB}$*-fibrés. On donne quelques applications: différentielles d'une semi-martingale* X *à valeurs dans une variété* V, *et dérivée covariante suivant* $\underline{dX}$ *d'une section* S *d'un fibré vectoriel* G_V *au-dessus de* V, *muni d'une connexion linéaire:* $\nabla_{\underline{dX}_t}(S) \in G_{X_t}$.

Key-Words: differential of a semi-martingale, optional vector bundle, linear connection on a vector bundle over a manifold.

1980 MSC: 60 G A8, 53 C 05.

0. RAPPELS

(0.1) Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur $\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\bar{\mathbf{R}}_+} (\bar{\mathbf{R}}_+ = [0,+\infty])$ une famille de tribus $\subset \mathcal{F}$, croissante et continue à droite; A sera un ensemble optionnel $\subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. Avant le paragraphe 2, il n'y aura pas de probabilité sur Ω. Un fibré optionnel (ou $\mathcal{O}$-fibré) G_A sur A, à fibres vectorielles (sur **R** ou **C**) de même dimension finie N, de fibre-type G, est la donnée d'un espace avec projection $G_A \to A$, de structures vectorielles de dimension N sur les fibres $G_{t,\omega}, (t,\omega) \in A$, et d'une famille de trivialisations $G_{A_i} \to A_i \times G, A_i$ optionnel $\subset A$ (dites trivialisations optionnelles ou $\mathcal{O}$-trivialisations de G_A), telles que la formule de transition d'indices i, j, soit une application $(A_i \cap A_j) \times G \to (A_i \cap A_j) \times G$, de la forme $(t,\omega,g) \mapsto (t,\omega,\alpha(t,\omega)g), \alpha$ optionelle sur $A_i \cap A_j$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G;G)$. On exigera que l'atlas soit complet. Mais surtout on exige que A soit réunion d'une suite $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ de domaines de trivialisations.

Tout ceci est classique et a été étudié en détail dans L. SCHWARTZ [1], paragraphe 1, (1.3) et paragraphe 2. L'originalité de ces fibrés est qu'ils ont des $\mathcal{O}$-trivialisations globales $G_A \to A \times G$. Un autre moyen de se donner un fibré optionnel est de se donner l'ensemble $\mathcal{O}(G_A)$ des sections dites optionnelles ; il est astreint à l'unique condition qu'il existe un isomorphisme d'espaces avec projection $G_A \to A \times G$, à fibres vectorielles qui transforme $\mathcal{O}(G_A)$ en l'ensemble usuel des sections optionnelles de $A \times G$, ou l'ensemble des applications optionnelles de A dans $G, \mathcal{O}(A;G)$. Une section au-dessus de A' optionnel $\subset A$ est alors optionnelle si et seulement si son prolongement par 0 sur $A \backslash A'$ est optionnel sur A. Les $\mathcal{O}$-trivialisations de $G_{A'}$ sont alors exactement celles qui transforment $\mathcal{O}(G_{A'})$ en $\mathcal{O}(A';G)$.

(0.2) Soit G_A un fibré vectoriel de dimension finie, optionnel, au dessus d'un ensemble optionnel A de $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, de fibre type G. Nous avons défini et étudié dans SCHWARTZ [1] la notion de différentielle de semi-martingale (continue) formelle dX, section de G_A, avec la notation (abusive mais intuitive) $dX(t,\omega) \in G_{t,\omega}$. Nous voulons voir ici quand on pourra dire que dX est différentielle de semi-martingale (continue) *vraie*, pas seulement formelle, ce qui a un sens évident si G_A est donné comme trivial, $G_A = A \times G$, et dans ce cas on peut l'intégrer si $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega, X_t(\omega) = \int_0^t dX_s(\omega), X$ semi-martingale (continue) vraie sur $\bar{R}_+ \times \Omega$, à valeurs dans G. Ce ne sera pas possible avec la seule donnée de G_A et de dX dans les cas général, il faudra introduire pour G_A une donnée supplémentaire, une $\mathcal{OB}$-structure et, si G_A n'est pas trivial, même si dX est une différentielle de semi-martingale vraie, $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega, X_t = \int_0^t dX_s$ n'aura pas de sens si G_A n'est pas *donné comme trivial* $= A \times G$, parce que les $dX_s \in G_{s,\omega}$ sont dans des fibres différentes.

1. LES $\mathcal{OB}$-STRUCTURES

On pose $A(\omega) = \{t \in \bar{\mathbf{R}}_+; (t,\omega) \in A\} \subset \bar{\mathbf{R}}_+$. Si f est une foncuon sur A, sa trajectoire relative à ω est $f(\omega) : t \mapsto f(t,\omega)$. Nous disons que f est trajectoires bornées si chaque $f(\omega)$ est bornée.

Les seuls A qui semblent devoir être intéressants pour l'étude des différentielles de semi-martingales vraies sont ceux qui sont optionnelles et de la forme $A = [S,T|$, S et T temps d'arrêt, $[S(\omega),T(\omega)| = [S(\omega),T(\omega)[$ ou $[S(\omega),T(\omega)]$, pas forcément le même pour tous les ω.

DÉFINITION (1.1). *Une $\mathcal{OB}$ structure sur G_A ($\mathcal{O}$ initiale de optionnel, $\mathcal{B}$ de borné) au dessus de $A = [S,T|$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{B}(G_A)$ de sections de G_A, dit l'ensemble des sections à trajectoires localement bornées, astreint à la condition suivante:*

(1.1.1) *Il existe une trivialisation optionnelle globale $\rho : G_A \to A \times G$, qui transforme $\mathcal{B}(G_A)$ en l'ensemble $\mathcal{B}(A;G)$ des applications de A dans G, à trajectoires localement bornées (i.e. bornées sur tout compact de tout $[S(\omega),T(\omega)|$). Une telle trivialisation est dite une $\mathcal{OB}$-trivialisation de la $\mathcal{OB}$-structure. On obtiendra toutes les autres comme $\rho' : G_A \to A \times G, \rho'\rho^{-1} : (t,\omega,g) \mapsto (t,g,\alpha(t,\omega)g), \alpha$ application de A dans $\mathcal{L}(G;G)$, optionnelle, à la trajectoires localement bornées ainsi que son inverse; $\mathcal{OB}(G_A)$ désignera l'espace des sections optionnelles à trajectoires localement bornées.*

PROPOSITION (1.2). *1) Soit τ un temps d'arrêt, $S \leq \tau \leq T$, et $A' = [A,\tau|$ optionnel. Une $\mathcal{OB}$-structure sur A en induit une sur A', en convenant que toute $\mathcal{OB}$-trivialisation de A en est une pour A'. Si c'est vrai pour une $\mathcal{OB}$-trivialisation de A, c'est vrai pour toutes les autres.*

2) Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{OB}$) l'ensemble des fonctions réelles sur A, à trajectoires localement bornées (resp. et optionnelles); $\mathcal{B}(G_A)$ est un $\mathcal{B}$-module pour la multiplication, $\mathcal{OB}(G_A)$ un $\mathcal{OB}$-module.

PROPOSITION (1.3). *Soient G_A, H_A, deux $\mathcal{OB}$-fibrés. Le fibré optionnel $\mathcal{L}(G_A; H_A)$ (de définition triviale; la fibre au-dessus de (t,ω) est $\mathcal{L}(G_{(t,\omega)}; H_{(t,\omega)})$, où $\mathcal{L}$ est l'espace des applications linéaires) admet une structures canonique de $\mathcal{OB}$-fibré, où $\mathcal{B}(\mathcal{L}(G_A; H_A))$ est l'ensemble des sections de $\mathcal{L}(G_A; H_A)$ qui envoient toute section $\in \mathcal{B}(G_A)$ sur une section $\in \mathcal{B}(H_A)$.*

Si ρ, σ, sont des $\mathcal{OB}$-trivialisations de G_A, H_A, sur $A\times G, A\times H$, une $\mathcal{OB}$-trivialisation $\mathcal{L}(G_A; H_A) \to \mathcal{L}(A \times G; A \times H) = A \times \mathcal{L}(G; H)$ est $u \mapsto 6 u\rho^{-1}$.

La notion de sous-fibré optionnel est bien connue, voir par exemple L. SCHWARTZ [1], (2.1) page 704. On peut dire que le sous-espace avec projection H_A de G_A est sous-fibré optionnel si les sections optionnelles de H_A sont exactement celles qui, considérées comme sections de G_A, sont optionnelles; ou bien si, pour toute $\mathcal{O}$-trivialisation $G_A \simeq A \times G$ de $H_A, (t,\omega) \mapsto H_{(t,\omega)}$ est une fonction optionnelle sur A à valeurs dans la grassmannienne $Gr(G;n)$ des n-plans de $G, n =$ dimension des fibres de H_A; ou bien s'il existe des $\mathcal{O}$-trivialisations «simultanées», $G_A \simeq A \times G$ où H_A vient sur un $A \times H, H$ sous-espace vectoriel fixe de G. Nous utiliserons tout cela à la fois ici.

PROPOSITION (1.4). *Si G_A est muni d'une $\mathcal{OB}$-structure, et si $H_A \subset G_A$ est un sous fibré optionnell de G_A, H_A et canoniquement muni d'une $\mathcal{OB}$-structure dite induite, en disant qu'une section de H_A est $\in \mathcal{B}(H_A)$ si et seulement si, considérée comme section de G_A, elle est $\in \mathcal{B}(G_A)$. Il existe des $\mathcal{OB}$-trivialisation communes: $G_A \to A \times G$, où H_A vient sur un $A \times H, H$ sous-espace vectoriel de G.*

DÉMONSTRATION. On peut toujours supposer G_A $\mathcal{OB}$-trivialisé, $G_A = A \times G$. Mais H_A ne l'est pas; il s'agit de trouver une nouvelle $\mathcal{OB}$-trivialisation de G_A qui trivialise en même temps H_A.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ une base de G, et soit n la dimension des fibres de H_A.

Soit P l'ensemble des parties à n éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$; pours $p \in P$, soit G_p le sous-espace vectoriel de base $(e_k)_{k \in p}$ dans G. Soit π la projection de $\mathbf{R}^N$ sur G_p parallèlement à $G_{P \setminus p}$. Si F est un sous-espace de G, de dimension n, supplémentaire de $G_{P\setminus p}$, ce que nous écrirons $F \in Gr(G; n, p)$ (où $Gr(G; n)$ est la grassmannienne des n-plans de G), la projection $\pi|_F$, restriction de π à F, est une bijection linéaire de F sur G_p, de bijection réciproque σ_F; $\pi\sigma_F = I_{G_p}$, et $\sigma_F\pi$ est la projection de G sur F, parallèlement à $G_{P\setminus p}$. On peut considérer π comme $\in \mathcal{L}(G; G_p)$ et σ_F comme $\in \mathcal{L}(G_p; G)$ et, si on munit la grassmannienne de sa structure C^∞ bien connue, $F \mapsto \sigma_F$ est C^∞ de $Gr(G; n; p)$ dans $\mathcal{L}(G_p; G)$. L'application linéaire u_F de G dans lui-même, égale à π sur F et à l'identité sur $G_{P\setminus p}$ est une bijection linéaire, qui s'écrit $\pi + (1 - \sigma_F\pi)$; elle dépend C^∞ de $F \in Gr(G; n; p)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$, et envoie bijectivement F sur G_p. Son inverse u_F^{-1} est donc aussi une fonction C^∞ de $Gr(G; n; p)$ dans $\mathcal{L}(G; G)$; elle est une bijection de G_p sur F. Ensuite $(t, \omega) \mapsto H_{(t,\omega)}$ est une application optionnelle de A dans $Gr(G; n)$; soit A_p l'image réciproque de $Gr(G; n; p)$, c'est une partie optionnelle de A, et $A = \bigcup_{p \in P} A_p$. Sur A_p, on peut réaliser une trivialisation simultanée u_p de $G_{A_p} = A_p \times G$ et de H_{A_p}, en posant $u_p(t, \omega, g) = (t, \omega, u_{H_{(t,\omega)}} g)$; elle est un morphisme de fibrés optionnels de $G_{A_p} = A_p \times G$ sur lui-même, envoyant H_{A_p} sur $A_p \times G_p$, et inversible, c'est un isomorphisme de fibrés optionnelles, réalisant une trivialisation simultanée de (G_A, H_A) par $(A_p \times G, A_p \times G_p)$. C'est ainsi qu'on passe de la 2ème définition à la 3ème après (1.3). Mais ce n'est pas un morphisme borné de $A_p \times G$ sur lui-même, car une fonction C^∞ sur l'ouvert $Gr(G; n; p)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$ n'est pas forcément bornée. Mais si K est un compact de $Gr(G; n; p)$, u_F est bornée pour $F \in K$, et son inverse u_F^{-1} aussi, puisqu'elle dépendent C^∞ donc continuement de $F \in K$. Si alors A_K est l'image réciproque de K par $(t, \omega) \mapsto H_{(t,\omega)}$, u_p restreinte à A_K est une $\mathcal{O}$-trivialisation simultanée $G_{A_K} \mapsto A_K \times G, H_{A_K} \to A_K \times G_p$, et u_p est bornée de A_K à la valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$, ainsi que son inverse.

Les $Gr(G; n; p), p \in P$, forment un recouvrement ouvert de la grassmannienne $Gr(G; n)$, donc il admet un recouvrement subordonné $(K_p)_{p \in P}$, K_p compact; donc les A_{K_p} recouvrent A. On trouvera comme suit une trivialisation commune. On ordonne $P : p_1, p_2, \ldots, p_\nu$. On appellera α_{p_k} un automorphisme de G qui envoie G_{p_k} sur un sous-espace vectoriel fixe H. Si alors α est l'application de A dans l'ensemble des automorphismes de G qui vaut α_{p_0} sur $A_{k_{p_0}}, \ldots, \alpha_{p_k}$ sur $A_{K_p} \backslash A_{K_0} \backslash A_{K_{p_{k-1}}}, \ldots, \alpha$ est bornée à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$ ainsi que α^{-1}; $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega) u_{H_{(t,\omega)}} g)$ définit une nouvelle $\mathcal{OB}$-trivialisation de $G_A = A \times G$, mais qui envoie H_A sur $A \times H$, d'où le résultat. ∎

REMARQUE (1.4.1). Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de rechercher une $\mathcal{OB}$-trivialisation de H_A, dés qu'il est sous fibré optionnel d'un G_A dont on a une $\mathcal{OB}$-trivialisation $A \times G$: $\mathcal{B}(H_A)$ est l'ensemble des sections de H_A, qui sont des applications de A dans G à trajectoires localement bornées.

(1.5) Supposons que G_A soit non seulement un fibré optionnel, mais un fibré *continu* optionnel. On se donne une famille de trivialisation, dites continues (ou topologiques) optionnelles, $\rho_i : G_A \to A_i \times G, A_i$ *ouverts* optionnelles (parce que c'est une fibration topologique) telles que $\rho_i \rho_j^{-1} : (A_i \cap A_j) \times G \to (A_i \cap A_j) \times G$ soit de la forme $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega))g$, où α est *continue* optionnelle sur $A_i \cap A_j$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$. On exige toujours en plus qu'il existe une suite de domaines de trivialisations optionnelles, $(A_n)_{n \in N}$, de réunion A. En général, il n'existe pas de trivialisation *continue* optionnelle globale $G_A \to A \times G$. On a une notion de sous-fibré H_A continu optionnel de G_A; il y a beaucoup de définitions équivalentes, l'une d'elles étant que, sur toute carte $G_{A_i} = A_i \times G, (t, \omega) \mapsto H_{t,\omega}$ soit continue optionnelle de A_i dans la grassmannnienne $Gr(G; n)$, n dimension des fibres de H_A. Cela rejoint (1.3).

(1.5.1) Si G_A est continu optionnel, il existe a priori une notion naturelle de l'ensemble $\mathcal{B}(G_A)$ des sections de G_A à trajectories localement bornées. On peut en effet mettre sur G_A un champ continu de structures euclidiennes (de formes quadratiques > 0) sur les fibres; on le fait au voisinage de chaque point de $A(\omega)$, et on recolle par partition de l'unité du localement compact $A(\omega)$. Deux de ces structures euclidiennes sont équivalentes au dessus de chaque compact de $A(\omega)$. Il sera alors naturel d'appeler

$\mathcal{B}(G_A)$ l'ensemble des sections qui sont bornées (pour la norme euclidienne) au-dessus de tout compact de tout $A(\omega)$. Mais il n'y a aucune raison d'affimer qu'on ait là une $\mathcal{OB}$-structure, c'est à dire qu'il existe des $\mathcal{OB}$-trivialisation correspondantes (elles ne peuvent être qu'optionnelles, il n'y a pas de trivialisations continues globales). Et s'il n'en existe pas, il semble qu'on ne puisse pas s'en servir.

PROPOSITION (1.5.2). *Supposons G_A projectif, c'est à dire sous-fibré continu optionnel d'un fibré trivial $A \times E$. Alors la structure définie à (1.5.1) est une $\mathcal{OB}$-structure, induite par celle de $A \times E$; elle est indépendante du plongement dans un fibré trivial.*

DÉMONSTRATION. La structure est évidemment celle qui est induite par $A \times E$ et on applique (1.4). L'indépendance du plongement résulte de ce que la définition (1.5.1) est intrinsèque. Elle est aussi évidente directement: si $G_A \subset A \times E$ et $A \times F$, l'application identique de G_A se prolonge en une fonction u sur A à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$ continue donc à trajectoires localement bornées: u sera l'identité sur G_A, et 0 sur l'orthogonal de G_A dans E. ∎

REMARQUE (1.5.3). Voir remarque (1.4.1):

$\mathcal{B}(G_A)$ est l'ensemble des sections de G_A, applications de A dans E à trajectoires localement bornées. C'est plus simple que de trivialiser H_A.

(1.6) Voici un cas fréquent dans la pratique probabiliste.

Soit Y une application optionnelle continue de A dans un espace topologique V, et $\mathcal{G}_V$ un fibré topologique sur V, à fibres vectorielles de dimension finie. On peut prendre le fibré image réciproque $G_A = \mathcal{G}_V \circ Y$, de fibres $G_{(t,\omega)} = G_{Y(t,\omega)}$. C'est un fibré optionnel continu. Dans des cas très généraux (par exemple si V est compact ou est une variété topologique), $\mathcal{G}_V$ est sous fibré topologique d'un fibré trivial $V \times E$ (voir L. SCHWARTZ [1], remarque (1.7) page 699); alors G_A sera sous-fibré optionnel continu du fibré trivial $A \times E, G_{t,\omega} = G_{Y(t,\omega)} \subset E$. Il aura donc une $\mathcal{OB}$-structure naturelle définie à (1.5.2): une section s de G_A est dans $\mathcal{B}(G_A)$ si et seulement si, pour tout ω, $(t,\omega) \mapsto s(t,\omega) \in G_{Y(t,\omega)} \subset E$ est localement bornée sur $A(\omega)$. On dira volontiers section de $\mathcal{G}_V$ le long de X ou au-dessus de X, au lieu de section de G_A.

2. DIFFÉRENTIELLES DE SEMI-MARTINGALES (SOUS-ENTENDU: CONTINUES) FORMELLES ET VRAIES

Rappelons une définition (ici il y a une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\Omega, \mathcal{F}$).

DÉFINITION (2.1). *Soit A optionnel $\subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega, G_A$ un fibré optionnel sur A. On* *appelle différentielle de semi-martingale formelle (en abrégé d.s.m.f.) section de* G_A, *la donnée, pour toute trivialisation* $G_A \simeq A \times G$, *d'une différentielle de s.m.f. à valeurs dans* G, *de manière que, si* $(t,\omega,g) \mapsto (t,\omega,\alpha(t,\omega)g)$ *est la formule de transition* $A \times G \to A \times G$ *des deux trivialisations, la formule de transition pour des d.s.m.f. correspondantes soit* $dX \mapsto \alpha dX$ (α *est une application optionnelle de* A *dans* $\mathcal{L}(G;G)$) (voir L. SCHWARTZ [3])

DÉFINITION (2.2). *On dit qu'un processus* X *sur un ouvert relatif optionnel* A *de* $[S,T]$ *à valeurs dans* G *est une semi-martingale vraie, s.m.v., s'il existe une suite* $(A_n)_{n\in N}$ *d'ouverts optionnels de* A, *de réunion* A, *et de semi-martingales* X_n *sur* $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *telles que* $X \underset{A_n}{\sim} X_n$.

Définition dûe à P. A. MAYER [1], et ces semi-martingales sont étudiées systématiquement dans L. SCHWARTZ [2].

On va utiliser une définition meilleure spéciale au cas $A = [S,T|$. Soit $T_n = \operatorname{Inf}\{t \in [S,T]; t \notin A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$, c'est un temps d'arrêt ; $[S,T_n[\subset A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$, et X est équivalent dans $A \cap [S,T_n[$ à $Y_n = 1_{A_0}.X_0 + 1_{A_1\setminus A_0}.X_1 + \ldots + 1_{A_n\setminus A_0 \setminus A_1 \ldots \setminus A_{n-1}}.X_n$, s.m. sur $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. L'équivalence subsiste dans $A \cap [S,T_n]$ par continuité. Enfin $T_n \uparrow\uparrow T$, c'est à dire T_n tend vers T pour n infini, stationnairement sur $\{T| = T]\}$. Les $A \cap [S,T_n[$ sont des ouverts optionnels de A, mais leur réunion n'est peut être pas A. Nous pouvons remplacer $[S,T_n[$ par $[S,T_n]$ aux points ω où $T_n(\omega) = T(\omega) \in A(\omega)$, l'equivalence subsiste par continuité, mais pour les $[S,T_n|$ ainsi obtenus, $\bigcup_n (A \cap [S,T_n|) = A$ et $A \cap [S,T_n| = [S,T_n| = A \cap [S,T_n]$ est ouvert dans A; nous retrouvons donc une propriété de la forme (2.1). Donc:

DÉFINITION (2.3). *Un processus* X *sur* $A = [S,T|$ *à valeurs dans* G *est une s.m.v. si et seulement si il existe une suite de temps d'arrêt* $T_n \uparrow\uparrow T$ *et une suite de s.m.v.* Y_n *sur* $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ *tels que* $X \underset{A\cap[S,T_n]}{\sim} Y_n$. *P. A. MEYER – C. STRICKER [1].*

DÉFINITION (2.4). *Une d.s.m.f. section de* G_A, $\mathcal{OB}$*-fibré optionnel, est dite d.s.m.v. si elle devient la différentielle d'une s.m.v. sur* A *à valeurs dans* G, *pour toute* $\mathcal{OB}$*-trivialisation* ρ *de la* $\mathcal{OB}$*-structure.*

PROPOSITION (2.4.1). *Si elle le devient pour une* $\mathcal{OB}$*-trivialisation* ρ, *elle le devient pour toute autre* $\mathcal{OB}$*-trivialisation* ρ'.

En effet, $\rho'\rho^{-1}$ est de la forme $(t,\omega,g) \mapsto (t,\omega,\alpha(t,\omega)g)$ où α est une fonction sur A à valeurs dans $\mathcal{L}(G;G)$, à trajectoire bornées sur tout compact de tout $A(\omega)$. Posons $\tau_n = \inf\{t \in [S,T]; \|\alpha_t\|_{\mathcal{L}(G;G)} > n\}; \tau_n \uparrow\uparrow T; \alpha$ est bornée par n sur

$A \cap [S, \tau_n[$, donc aussi à trajectoires bornées sur $A \cap [S, \tau_n]$ (on ajoute au plus un point par trajectoire). Si dX est l'expression de la d.s.m.f. pour ρ, différentielle d'une s.m.v. sur A à valeurs dans G, donc $dX \underset{A\cap[S,T_n]}{\sim} dY_n$, alors son expression pour ρ' sera $dX' = \alpha dX \underset{A\cap[S,T_n\wedge\tau_n]}{\sim} \alpha 1_{A\cap[S,\tau_n]} dY_n$, d.s.m.v. sur $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, parce que $\alpha 1_{A\cap[S,\tau_n]}$ est à trajectoires bornées; donc αdX est une d.s.m.v. ∎

DÉFINITION (2.5). *Mêmes définition pour des d.v.f.v. (différentielles de processus à variation localement finie vrais), d.m.v. (différentielles de martingales vraies, martingale voulant dire martingale locale continue), différentielles de martingales conformes vraies si G_A est complexe (G complexe, $\mathcal{L}(G; G) = \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(G; G)$).*

Si une d.s.m.v. est une d.m.f. elle est une d.m.v., etc... Pour toute d.s.m.v. dX section de G_A, on aura une décomposition $dX = d\tilde{X} + dX^c$, et un crochet $\frac{1}{2} dX\, dX$, d.v.f.v. section de $G_A \odot G_A$.

PROPOSITION (2.6). *Soit G_A un $\mathcal{OB}$-fibré optionnel, H_A un sous-fibré optionnel, donc $\mathcal{OB}$-fibré (1.4). Une d.s.m.f. section de H_A, qui devient section de G_A, l'est déjà comme section de H_A.*

DÉMONSTRATION. Il y a des $\mathcal{OB}$-trivialisation communes $G_A \simeq A \times G, H_A \simeq A \times H$ par (1.4). ∎

PROPOSITION (2.6.1). *Soient dX une d.s.m.v. section de G_A, u une section $\in \mathcal{OB}(\mathcal{L}(G_A; H_A))$, alors $u dX$ est une d.s.m.v. section de H_A. En particulier, l'espace des d.s.m.v. sections de G_A est un $\mathcal{OB}$-module pour la multiplication.*

DÉMONSTRATION. Evident par des $\mathcal{OB}$-trivialisations de G_A et H_A, voir (1.3), et une modification évidente de la démonstration de (2.4.1). ∎

PROPOSITION (2.7). *Soient $\mathcal{OB}$ l'anneau des fonctions réelles optionnelles à trajectoires localement bornées, d.s.m.v. le $\mathcal{OB}$-module des d.s.m.v. réelles, $\mathcal{OB}(G_A)$ le $\mathcal{OB}$-module de sections optionnelles à trajectoires localement bornées de G_A, d.s.m.v. (G_A) le $\mathcal{OB}$-module des d.s.m.v. sections de G_A. Alors*

$$\text{d.s.m.v.}\,(G_A) = \mathcal{OB}(G_A) \bigotimes_{\mathcal{OB}} \text{d.s.m.v.} \tag{2.7.1}$$

$$\text{d.s.m.v.}\,(G_A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{OB}}(\mathcal{OB}(G_A^*);\ \text{d.s.m.v.}) \tag{2.7.2}$$

DÉMONSTRATION. On $\mathcal{OB}$-trivialise G_A, donc G_A^*. Ensuite on utilise des formules un peu «bourbachiques» sur les produits tensoriels:

$$\begin{aligned}\text{d.s.m.v.}(G_A) &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathbf{R}} G = (\text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} \mathcal{OB}) \bigotimes_{\mathbf{R}} G = \\ &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} (\mathcal{OB} \bigotimes_{\mathbf{R}} G) = \\ &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} \mathcal{OB}(G_A).\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

$$\begin{aligned}\text{d.s.m.v.}(G_A) &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathbf{R}} G = \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(G^*; \text{d.s.m.v.}) = \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{OB}}(\mathcal{OB} \bigotimes_{\mathbf{R}} G^*; \text{d.s.m.v.}) = \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{OB}}(\mathcal{OB}(G_A^*); \text{d.s.m.v.}).\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Plus simplement, pour éviter Bourbaki, on prend une base de G et tout devient évident. Nous avions déjà démontré ces formules pour les d.m.s.f., proposition (1.3) page 677 de SCHWARTZ [2]. ∎

2.8. Encore une fois, pourquoi dX et pas X ?

Sur une variété C^∞, on distingue les formes différentielles de divers degrés, sans jamais les identifier; et de même les courants. Prenons le cas de $\mathbf{R}_+$ (plus simple pour y voir clair, que $\bar{\mathbf{R}}_+$). On distinguera bien les fonctions sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans un espace vectoriel G de dimension finie (qui sont des courants de degré 0), et les mesures (qui sont des courants de degré 1). Si f est un courant de degré 0, il a une différentielle $df = \mu$, courant de degré 1; en particuler, si f est une fonction à variation localement finie, μ est une mesure. Inversement, si μ est un courant de degré 1, il a une primitive, produit de convolution $Y * \mu = f$ (Y fonction d'Heaviside), courant de degré 0; en particulier, si μ est une mesure, f est la fonction à variation localement finie $t \mapsto \int_{[0,t]} \mu(ds) = \mu[0,t]$. On a bien toujours $\mu = df$, parce que $dY = \delta$. Si maintenant $G_{\mathbf{R}_+}$ est un fibré vectoriel C^∞ sur $\mathbf{R}_+$, on a aussi des courants de degré 0 et 1 sur $\mathbf{R}_+$, sections de $G_{\mathbf{R}_+}$; ils sont plus difficiles à définir, mais bien connus (voir L. SCHWARTZ, [1]). On continuera à écrire $f(t) \in G_t$, bien que cela n'ait pas de sens pour un courant, et $\mu(dt) \in G_t$, bien que cela n'ait pas non plus de sens (G_t fibre au-dessus de $t \in \mathbf{R}_+$). Mais il n'y a plus ni différentielle ni primitive, car $\mu(ds) \in G_s$ pour $s \geq t$, et les G_s sont toutes différentes; si f existe, df n'existe plus; et si on note (imprudemment!) df

une mesure, df existe, f n'existe pas (on ne peut pas écrire $f_t = \int_{[0,t]} df_s$ parce que les df_s sont dans des fibres G_s différentes, et n'ont même qu'un sens symbolique!). C'est la même chose pour des semi-martingales sur $A = [S,T| \subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. On peut parler d'une semi-martingale X section de G_A, et on a vraiment $X(t,\omega) \in G_{(t,\omega)}$ [cela nécessite que G_A soit non seulement optionnel mais «espace fibré semi-martingale»; la formule de transition entre deux cartes est $(t,\omega,g) \mapsto (t,\omega,\alpha(t,\omega)g), \alpha$ semi-martingale; pour les sections, ce sera $X \mapsto \alpha X$]; alors dX n'existe pas. On étudie dans cet article une section différentielle de semi-martingale pour G_A optionnel, $dX, dX_{(t,\omega)} \in G_{(t,\omega)}$ symboliquement; dans la formule de transition, α est optionnelle, et, pour les sections, c'est $dX \mapsto \alpha dX$; dX existe, X n'existe pas, donc $dX, dX_{(t,\omega)} \in G_{(t,\omega)}$ est doublement symbolique ou abusive parce qu'on ne devrait pas l'appeler dX et qu'elle n'a pas de valeur en (t,ω).

PROPOSITION (2.9). *Soit X une s.m. sur $A = [S,T|$ à valeurs dans une variété V de classe C^2. Alors $\underline{dX}$ est une d.s.m.v. section de $T^2(V)$ au dessus de X, $\widetilde{\underline{dX}}$ une d.v.f.v. section du même fibré, dX^c une d.m.v. section de $T^1(V)$ au dessus de X, $\frac{1}{2}dX\,dX$ une d.v.f.v. section de $T^1(V) \odot T^1(V)$ au dessus de X; toutes pour la $\mathcal{B}$-structure naturelle définie à (1.5.2).*

DÉMONSTRATION. Occupons nous seulement de la premiére, $\underline{dX}$. Plongeons V comme sous-variété fermée d'un vectoriel E (Whitney); X devient une s.m. à valeurs dans E; G_A devient sous fibré continu optionnel de l'image réciproque par X du fibré trivial $E \times (E \oplus (E \odot E))$, c'est à dire de $A \times (E \oplus (E \odot E))$, $\mathcal{OB}$-fibré trivial (1.5.1) à (1.6). Alors $\underline{dX}$ devient une d.s.m.f. sur A à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$, $\underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \frac{1}{2}dX\,dX \end{pmatrix}$, et (2.6) nous dit qu'on doit simplement voir que c'est une d.s.m.v.; c'est la différentielle de $\begin{pmatrix} X \\ \frac{1}{2}[X,X] \end{pmatrix}$, s.m.v. sur A à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$. On pourra consulter SCHWARTZ [1], proposition (2.7) page 710. ∎

REMARQUE. Nous avons dit à (2.8): $\underline{dX_t}$ existe $\in T^2(V;X_t)$, mais $\underline{X_t}$ n'existe pas; inversement X_t existe $\in V, dX_t$ n'existe pas. Dans E tout existe, mais $dX_t \in E, \notin T^1(V;X_t)$, et $\underline{dX_t} \in E \oplus (E \odot E)$ ou $T^2(V;X_t), \underline{X_t}$ existe dans $E \oplus (E \odot E)$, non dans $T^2(V;X_t)$.

Exemple 2.10

Cet exemple est abondamment traité dans SCHWARTZ [1] et [2], mais pas toujours avec la distinction nécessaire entre d.s.m.f. et d.s.m.v. EMERY [1] l'explique très clairement. Considérons $\frac{1}{2}dX\,dX$ comme d.v.f.v. section de $T^1(V) \odot T^1(V)$ au dessus de X.

Soit β un champ sur V, borélien, borné sur tout compact de V, de formes bilinéaires sur $T^1(V) \times T^1(V)$ donc de formes linéaires sur $T^1(V) \otimes T^1(V)$, donc une section, borélienne bornée sur tout compact de V, de $(T^1(V) \otimes T^1(V))^*$, donc section optionnelle le long de X, à trajectoires localement bornées. Alors, d'après (2.7.2), $\beta \frac{1}{2} dX\, dX$ est une d.v.f.v. *réelle*, on peut prendre la primitive $t \mapsto \frac{1}{2} \int_S^t \beta_s dX_s dX_s$, processus à variation localement finie réel vrai sur [S,T|.

Exemple 2.11 Sur les connexions linéaires de fibrés vectoriels sur une variété

Soit V une variété $C^1, \mathcal{G}_V$ un fibré vectoriel (de dimension finie) C^1 sur V, muni d'une connexion linéaire continue. Si S est une section C^1 de $\mathcal{G}_V, \xi$ un vecteur tangent $\in T^1(V; v)$, on peut définir la dérivée covariante $\nabla_\xi S \in G_v$. Ce qui est moins connu, c'est que si L est un vecteur m-tangent, pour V de classe $C^m, L \in T^m(V; v)$, et si la connexion est C^{m-1} et la section S C^m, on peut définir la dérivée covariante suivant $L, \nabla_L S \in \mathcal{G}_v$ (R. S. PALAIS [1], section IV, théorème 7, page 90). Un des cas les plus connus est celui où V est une variété C^2, riemannienne de classe C^1, donc ayant un laplacian Δ, Δ section continue de $T^2(V)$ au dessus de V, et si S est C^2 et la connexion de $\mathcal{G}_V$ C^1, on peut calculer le «laplacien horizontal» ΔS, section continue de $\mathcal{G}_V$; c'est exactement $\nabla_\Delta S$. On voit aussiôt que $(L, S) \mapsto \nabla_L S$ est bilinéaire. Mais bien entendu la structure d'algèbre des opérateurs différentiels sur V n'est pas conservée; si par exemple ξ, η, sont deux champs de vecteurs C^1 pour $m \geq 2$, des opérateurs différentiels C^1 d'ordre 1, le composé $\xi\eta$ est un opérateur différentiel continu d'ordre 2, $\nabla_{\xi\eta} \neq \nabla_\xi \nabla_\eta$, sans quoi on aurait $\nabla_{[\xi,\eta]} = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi$, alors que la différence entre les deux est la courbure de la connexion de $\mathcal{G}_V$.

Soit maintenant, avec $m = 2, X$ une V-semi-martingale sur $A = [S, T|$. On sait que, symboliquement, $\underline{dX_t}$ est un petit vecteur 2-tangent au point $X_t, \underline{dX_t} \in T^2(V; X_t)$. On doit donc pouvoir définir $\nabla_{\underline{dX_t}} S \in g_{x_t} = G_t$, petit vecteur de $\mathcal{G}_{X_t}$ ou G_t, G_A image réciproque de $\mathcal{G}_V$ par $X, G_A = \mathcal{G}_V \circ X, G_{t,\omega} = \mathcal{G}_{X(t,\omega)}$. Ceci va évidemment se régler en termes de d.s.m.f. section de $\mathcal{G}_V$ au dessus de X ou de $G_A = \mathcal{G}_V \circ X$. En effef, $\underline{dX}$ est une d.s.m.f. section de $T^2(V; X)$, et $\alpha : L \mapsto \nabla_L S$ (pour S fixé) est une section continue du fibré $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ sur V, donc $\alpha \circ X$ une section continue optionnelle du fibré continu optionnel $\mathcal{L}(T^2(V; X); \mathcal{G}_V \circ X)$, ou du fibré $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ le long de X. Donc $\nabla_{\underline{dX}} S = (\alpha \circ X)\underline{dX}$ est une d.s.m.f. section de $\mathcal{G}_V$ le long de X ou une d.s.m.f. section de $\mathcal{G}_V \circ X = G_A$. Mais $\underline{dX}$ est une d.s.m.v., et α, continue, est une section de $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ bornée sur tout compact de V, donc $\alpha \circ X \in \mathcal{OB}(\mathcal{L}(T^2(V; X); \mathcal{G}_V \circ X)$ (le fibré vectoriel $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V))$ sur V est projectif, voir (1.5.2)), et $(\alpha \circ X)\underline{dX} = \nabla_{\underline{dX}} S$ est une d.s.m.v. section de V le long de X. Ceci donne un cas très général: *les d.s.m.f. usuelles des probabilités deviennent des d.s.m.v. , si* $A = [S, T|$. Si Σ est une section de $\mathcal{G}_V^*$, borélienne bornée sur tout compact de V, donc $\Sigma \circ X$ une section $\in \mathcal{OB}(\mathcal{G}_V^* \circ X)$, on peut, par (2.7.2), calculer $(\Sigma \circ X)(\nabla_{\underline{dX}} S)$, différentielle d'une semi-martingale vraie, réelle, qu'on pourra écrire sous forme intégrée, en s.m.v. réelle: $t \mapsto \int_S^t \sum_{X_\bullet}(\nabla_{\underline{dX}_\bullet} S)$. (Excuses: les deux S de cette formule n'ont pas le même signification.) Sa composante martingale, par exemple, sera $t \mapsto \int_S^t \sum_{X_\bullet}(\nabla_{dX_\bullet^c}(S))$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] M. EMERY, [1] : *Géometrie différentielle stochastique, à paraître*; chapitre III, théorème (3.8).

[2] P. A. MEYER, [1]: *Sur un résultat de L. SCHWARTZ*, Séminaire de probabilités XIV, 1978-1979, Lecture Notes in Mathematics, 784, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, page 102-103.

[3] P. A. MEYER – C. STRICKER, [1] *Sur les martingales au sens de L. SCHWARTZ*, Mathematical Analysis and Applications, vol. B, Academic Press 1981, 577-601.

[4] R. S. PALAIS, [1]: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of Mathematics Studies, 57 (1965), Princeton University Press.

[5] L. SCHWARTZ, [1]: *Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités*, volume en l'honneur de Léopoldo Nachbin, Aspects of Mathematics ans its applications, Elsevier Science Publishers, 1986.

[6] L. SCHWARTZ, [2]: *Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et equations différentielle stocastique su une variètè!* Sèminaire de Probabilitės XVI, 1980-1981. Suppl. Géométrie différentielle stochastique, Lecture Notes in Math. 921, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1982, pages 1-150.

[7] L. SCHWARTZ, [3]: *Les semi-martingales formelles*, Séminaire de Probabilités XV, 1979-80, Lecture Notes in Math. 850, Springer Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1981, pages 44-117.

Manuscript received: September 9, 1989