LAURENT SCHWARTZ

Le théorème Φ^{-1}, et les semi-martingales à valeurs dans des espaces d'applications C^∞ entre variétés (II)

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 305(2) (1987), p. 49-53.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 49-53, 1987

Probabilités/*Probability Theory*

Le théorème Φ^{-1}, et les semi-martingales à valeurs dans des espaces d'applications C^∞ entre variétés (II)

Laurent Schwartz

Résumé — Dans une Note précédente (I), nous avons énoncé trois théorèmes, et nous n'avons démontré que les deux premiers. Nous démontrons ici le troisième, et nous étendons les trois au cas où les espaces vectoriels E, F, G, sont remplacés par des variétés U, V, W.

The Φ^{-1} theorem, and the semi-martingales with values in spaces of maps between manifolds

Abstract — *In a previous Note (I), we stated three theorems, and proved only the two first ones. We prove the third one here, and we extend the three theorems to the case where the vector spaces* E, F, G, *are replaced by manifolds* U, V, W.

I. Démonstration du théorème (I.6.3) de la Note (I). — Par le théorème des fonctions composées, $\Phi'(t, \omega)(x)$ est un élément inversible de $\mathscr{L}(E; F)$ pour $x \in E$, et la formule d'Ito montre que $\Phi'^{-1}(x) : (t, \omega) \mapsto (\Phi'(t, \omega)(x))^{-1}$ est une semi-martingale; le calcul des dérivées successives montre, par (I.4) de la Note (I), que Φ'^{-1} est une $C^\infty(E; \mathscr{L}(F; E))$-semi-martingale. Mais ce qui nous intéresse ici est le processus Φ^{-1} : $(t, \omega) \mapsto (\Phi(t, \omega))^{-1}$, à valeurs dans $C^\infty(F; E)$, continu par le théorème des fonctions implicites. Autrement dit, le symbole de puissance -1 n'a pas du tout la même signification dans Φ'^{-1} et dans Φ^{-1}. Soit $y \in F$, $X = \Phi^{-1}(y)$; nous allons d'abord montrer que c'est une E-semi-martingale.

Supposons que X soit une semi-martingale. Alors de $\Phi(X) = y$ on déduit, par (I.6.1.1) de la Note (I) :

$$0 = d(\Phi_t(X_t)) = d\Phi_t(X_t) + \Phi'_t(X_t)\, dX_t \quad \text{(Str)}.$$

En multipliant à gauche par $\Phi_t'^{-1}(X_t)$,

$$dX_t = -\Phi_t'^{-1}(X_t)\, d\Phi_t(X_t) \quad \text{(Str)}. \tag{I.1}$$

Inversement, soit X une semi-martingale vérifiant (I.1); alors, par (I.6.1.1) de la Note (I) :

$$d(\Phi_t(X_t)) = d\Phi_t(X_t) - \Phi'_t(X_t)\, \Phi_t'^{-1}(X_t)\, d\Phi_t(X_t) \quad \text{(Str)} = 0;$$

donc $\Phi_t(X_t)$ sera un processus constant, et, si $X_0 = \Phi_0^{-1}(y)$, $\Phi_t(X_t)$ sera égale à y.

Donc, dès lors que X est une semi-martingale vérifiant (I.1) et $X_0 = \Phi_0^{-1}(y)$, ce sera $\Phi^{-1}(y)$. Mais (I.1) est, pour X, une EDS de Stratonovitch, $dX_t = G_t(X_t)\, d\Phi_t$, où $G(x, t, \omega) = -\Phi'^{-1}(x, t, \omega)\langle \delta_{(x)}, . \rangle$; $\delta_{(x)} \in (C^\infty(E))'$ donc $\in \mathscr{L}(C^\infty(E) \hat{\otimes} F;\ F)$ donc $\in \mathscr{L}(H; F)$, $-\Phi'^{-1}(x, t, \omega) \in \mathscr{L}(F; E)$, donc $-\Phi'^{-1}\langle \delta_{(.)}, . \rangle$: $x \mapsto -\Phi'^{-1}(x)\langle \delta_{(x)}, . \rangle$ est une $C^\infty(E; \mathscr{L}(H; E))$-semi-martingale, et Φ une H-semi-martingale, on a bien une EDS de Stratonovitch. On peut passer de (I.1) à Ito par (II.5) de la Note (I) :

$$\begin{aligned} dX_t = {} & -\Phi_t'^{-1}(X_t)(d\Phi_t(X_t)) - \frac{1}{2}(d(\Phi_t'^{-1})(X_t))(d\Phi_t(X_t)) \\ & - \frac{1}{2}((\Phi_t'^{-1})'(X_t)\, dX_t)(d\Phi_t(X_t))\, \Phi_t'^{-1}(X_t)\, d\Phi'_t(X_t)\, dX_t \quad \text{(Ito)}. \end{aligned} \tag{I.2}$$

Note présentée par Laurent Schwartz.

0249-6291/87/03050049 $ 2.00

Nous n'aurons pas besoin d'utiliser la formule donnant la dérivée (en x) ou la différentielle (en t) d'un inverse. Si on sait que X est une semi-martingale vérifiant (I.1), elle vérifiera donc

$$
\begin{aligned}
\text{(I.3)}\quad dX_t = &-\Phi_t'^{-1}(X_t)\,d\Phi_t(X_t) - \frac{1}{2}d(\Phi_t'^{-1})(X_t)\,d\Phi_t(X_t)\\
&+\frac{1}{2}((\Phi_t'^{-1})'(X_t)(\Phi_t'^{-1}(X_t)\,d\Phi_t(X_t)))\,d\Phi_t(X_t)\\
&+\frac{1}{2}\Phi_t'^{-1}(X_t)\,d\Phi_t'(X_t)\,\Phi_t'^{-1}(X_t)\,d\Phi_t(X_t)\quad \text{(Ito)}.
\end{aligned}
$$

Inversement, supposons que X soit une E-semi-martingale vérifiant (I.3); alors, *modulo une différentielle à variation finie* (les crochets), $dX_t = -\Phi_t'^{-1}(X_t)\,d\Phi_t(X_t)$, donc elle vérifie aussi (I.2) donc (I.1). Donc (I.1) $\simeq$ (I.3), si X est une semi-martingale. Notons que (I.3) ne dépend pas de y. Mais (I.4) est, par rapport à l'inconnue dX_t, une équation différentielle stochastique (EDS) sur E dont les semi-martingales directrices (à valeurs hilbertiennes) sont successivement Φ, $[\![\Phi'^{-1}, \Phi]\!]$, $[\![\Phi, \Phi]\!]$, $[\![\Phi', \Phi]\!]$, où les doubles crochets sont à valeurs dans des produits tensoriels de Hilbert-Schmidt. Prenons par exemple le deuxième terme. Il s'écrit

$$
\text{(I.4)}\quad \text{(Ito)}\qquad -\frac{1}{2}\langle \delta_{(X_t)}, d\Phi_t'^{-1}\rangle \langle \delta_{(X_t)}, d\Phi_t\rangle = -\frac{1}{2}\langle \delta_{(X_t)}\otimes\delta_{(X_t)}\rangle\, d[\![\Phi'^{-1}, \Phi]\!]_t;
$$

Φ est une **H**-semi-martingale, **H** sous-espace hilbertien de $C^\infty(E; F)$, Φ'^{-1} une **K**-semi-martingale, **K** sous-espace hilbertien de $C^\infty(E; \mathscr{L}(F; E))$, donc $[\![\Phi'^{-1}, \Phi]\!]$ une $\mathbf{K}\hat{\otimes}_2\mathbf{H}$-semi-martingale (à variation finie), $\mathbf{K}\hat{\otimes}_2\mathbf{H}$ sous-espace hilbertien de $C^\infty(E; F)\hat{\otimes}C^\infty(E; \mathscr{L}(F; E))$; $\langle \delta_{(X)}, .\rangle \langle \delta_{(X)}, .\rangle$ est une semi-martingale à valeurs dans l'espace des applications linéaires continues de cet espace dans $F\otimes\mathscr{L}(F; E)$, dont il est sous-entendu qu'elle est contractée à valeurs dans E. En simplifiant l'écriture de (I.3), elle est de la forme

$$
\text{(I.5)}\qquad dX_t = F(X_t, t, .)\,dZ_t\quad \text{(Ito)},
$$

où F a toutes les propriétés voulues. Donc il y a une solution unique X, de valeur initiale $X_0 = \Phi_0^{-1}(y)$. Cette solution est $X = \Phi^{-1}(y)$, qui est donc bien une E-semi-martingale. Elle a $\underline{a\ priori}$ un temps de mort ζ; mais comme c'est $\Phi^{-1}(y)$, il n'y a pas de temps de mort, $\zeta = +\infty$. En outre, en étudiant les dérivées successives, on voit que, pour tout m, et tout compact K de F, les $(\Phi^{-1})^{(m)}(y)$ ont les mêmes propriétés, et sont uniformément localement H^∞ pour $y\in K$; donc, Φ^{-1} est bien une $C^\infty(F; E)$-semi-martingale, par la condition suffisante de (I.4) de la Note (I).

[Nous utilisons des temps d'arrêt (indépendants de m, mais) dépendant de K. En effet, pour K donné, on devra faire intervenir des temps d'arrêt $S_k = S_{k,K} \uparrow\uparrow +\infty$, dépendant de K, tels que $\Phi'^{S_k}(y)$, dans $\{S_k > 0\}$, reste dans un compact de l'ouvert des éléments inversibles de $\mathscr{L}(E; F)$, pour $y\in K$, et que $(\Phi^{-1})^{S_k}(y)$ reste dans un compact de E.]

On peut toujours se ramener au cas où $F = E$ et $\Phi_0 =$ identité (en remplaçant Φ par $\Phi_0^{-1}\Phi$). Dans ce cas, si Φ est une $C^\infty(E; E)$-semi-martingale partout inversible, Φ^{-1} est le flot d'une EDS, à semi-martingale directrice Z hilbertienne (de dimension infinie en général), à coefficient F *localement* borné et lipschitzien, ainsi que toutes ses dérivées $F^{(m)}$ en variable d'espace E. La réciproque n'est pas exacte, car si l'on part d'une EDS à coefficient *localement* borné et lipschitzien, il y a en général un temps de mort ζ; mais dans les conditions globales de (I.6.4) de la Note (I), la réciproque est vraie.

Remarquons enfin que si Φ est une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale de difféomorphismes, $\Phi_0 = I$, Φ^{-1} est flot d'une EDS, où la semi-martingale directrice dérive de Φ; donc Φ est aussi le flot d'une EDS, dont la semi-martingale directrice dérive de Φ^{-1}.

II. DÉFINITION DES $C^\infty(U; V)$-SEMI-MARTINGALES, U, V VARIÉTÉS. — Nous allons démontrer les mêmes théorèmes lorsque les espaces vectoreils E, F, G, sont remplacés par des variétés C^∞, U, V, W, de dimensions finies, paracompactes.

(II.1) $C^\infty(U; F)$. — Si F est un espace vectoriel de dimension finie, $C^\infty(U; F)$ est encore un espace de Fréchet nucléaire, et il n'y a rien à définir de nouveau pour la notion de $C^\infty(U; F)$-semi-martingale. Une remarque sera néanmoins utile, c'est qu'on peut localiser. Soit $(U_i)_{i \in N}$ un recouvrement dénombrable de U par des ouverts. Si Φ est un processus à valeurs dans $C^\infty(U; F)$, l'opération de restriction à U_i: $C^\infty(U; F) \to C^\infty(U_i; F)$ est linéaire continue, et Φ a une image $\Phi_i \in C^\infty(U_i; F)$. Si chaque U_i est isomorphe à un ouvert U_i' d'un espace vectoriel E, on se ramène aussitôt à la Note précédente, et, par exemple, les propositions (I.4) et (I.6.1) de la Note (I) sont les mêmes pour $C^\infty(E; F)$ ou pour $C^\infty(U_i'; F)$, en remplaçant partout les compacts de E par les compacts de U_i'. Or $\Phi \mapsto (\Phi_i)_{i \in N}$ est un isomorphisme de $C^\infty(U; F)$ sur un sous-espace vectoriel fermé de $\prod_{i \in N} C^\infty(U_i; F) \simeq \prod_{i \in N} C^\infty(U_i'; F)$, donc la localisation conduit aussitôt du cas de E vectoriel au cas de U variété; les démonstrations directes seraient d'ailleurs aussi simples.

Autrement dit, la proposition (I.4) de la Note (I) subsiste pour $C^\infty(U; F)$, à condition de remplacer des dérivées $\Phi^{(m)}$ à valeurs dans $C^\infty(E; \mathscr{L}_m(E^m; F))$, par les $D\Phi$ à valeurs dans $C^\infty(U; F)$, D opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sur U, les compacts K de E par les K compacts de U; de même (I.6.1) de la Note (I) subsiste avec la même modification.

Noter que, si $\mathscr{E}$ est un ensemble de $C^\infty(U; F)$-semi-martingales, uniformément localement $\overline{H^\infty}$, chacune de ses images $\mathscr{E}_i$ est uniformément localement $\overline{H^\infty}(C^\infty(U_i; F))$, mais la réciproque n'est pas vraie, parce qu'on doit pouvoir trouver des $T_n \uparrow\uparrow +\infty$ indépendants de *i*.

(II.2) $C^\infty(U; V)$. — Si maintenant F est remplacé par une variété V, on dira que Φ, processus à valeurs dans $C^\infty(U, V)$, est une semi-martingale, si, pour toute fonction réelle φ, C^∞ sur V, $\varphi(\Phi)$ est une $C^\infty(U; R)$-semi-martingale; et de même pour un ensemble uniformément localement $\overline{H^\infty}$. On peut plonger V comme sous-variété fermée d'un espace vectoriel F. Alors Φ est une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, si et seulement si elle est une $C^\infty(U; F)$-semi-martingale; et de même pour un ensemble uniformément localement $\overline{H^\infty}$.

Mais il y a mieux. On peut aussi plonger U dans un espace vectoriel E. Par un recouvrement de U par des ouverts de E, et en rajoutant $E \setminus U$, on a un recouvrement ouvert de E, et on peut y associer une partition de l'unité. Cela définit une application linéaire continue θ de prolongement : $C^\infty(U; F) \to C^\infty(E; F)$, tandis qu'il existe une restriction linéaire continue ρ : $C^\infty(E; F) \to C^\infty(U; F)$; $\rho \circ \theta$ est l'identité, mais bien entendu $\theta \circ \rho$ ne l'est pas. Alors Φ, $C^\infty(U; V)$-processus, est une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, si et seulement si $\theta(\Phi)$ est une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale, et de même pour des ensembles uniformément localement $\overline{H^\infty}$.

Les propriétés simples des semi-martingales à valeurs dans des variétés s'étendent aux $C^\infty(U; V)$-semi-martingales. Par exemple :

(II.3) Si Φ est une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, et si elle prend ses valeurs dans $C^\infty(U; V')$, où V' est une sous-variété (non nécessairement fermée) de V, Φ est une $C^\infty(U; V')$-semi-martingale [1].

III. Les théorèmes $\Phi(X)$ et $\Psi(\Phi)$. — Si U, V, W sont des variétés, qu'on peut plonger dans des espaces vectoriels E, F, G, X une U-semi-martingale donc une E-semi-martingale, Φ une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, donc $\theta(\Phi)=\bar{\Phi}$ une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale, Ψ une $C^\infty(V; W)$-semi-martingale, donc $\theta(\Psi)=\bar{\Psi}$ une $C^\infty(F; G)$-semi-martingale, alors $\Phi(X)=\bar{\Phi}(X)$ est une V-semi-martingale, et $\Psi(\Phi)=\rho(\bar{\Psi}(\bar{\Phi}))$ est une $C^\infty(U; W)$-semi-martingale; de même pour des ensembles uniformément localement $\overline{H^\infty}$. Donc le passage des espaces vectoriels aux variétés est trivial. Nous n'imposerons pas au lecteur ni à nous-même le calcul intrinsèque des formules différentielles.

IV. Le théorème Φ^{-1} pour $C^\infty(U; V)$. — Il s'agit de montrer que, si Φ est une $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, toujours inversible, Φ^{-1} est une $C^\infty(V; U)$-semi-martingale. Cela ne peut pas être aussi simple que ce qui précède, parce que $\theta(\Phi)=\bar{\Phi}$ est une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale, non inversible.

(IV.1) Soient E, F des espaces vectoriels euclidiens, Gr(E), Gr(F) leurs grassmanniennes des sous-espaces vectoriels de dimensions respectives p, q. Chaque grassmannienne a un fibré tautologique Taut Gr : Taut Gr(E) est l'ensemble des couples d'un sous-espace vectoriel $A \in \mathrm{Gr}\,E$ et d'un point de A; c'est un fibré C^∞ de base Gr E, de fibre-type $\mathbf{R}^p$; il est sous-fibré du fibré trivial $\mathrm{Gr}\,E \times E$. On en déduit un fibré vectoriel $\mathscr{L}$ (Taut Gr E; Taut Gr F) d'applications linéaires, fibré de base $\mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F$; la fibre au-dessus de $(A, B) \in \mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F$ est $\mathscr{L}(A; B)$, espace des applications linéaires de $A \subset E$ dans $B \subset F$.

(IV.2) Soit $(A, B, u) \in \mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F \times \mathscr{L}(E; F)$. Soit u' la restriction à A de $p_B \circ u$, où p_B est le projecteur orthogonal $F \to B$, $u' \in \mathscr{L}(A; B)$. Alors $P : (A, B, u) \mapsto (A, B, u')$ est un morphismes de fibrés $\mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F \times \mathscr{L}(E; F) \to \mathscr{L}$ (Taut Gr E; Taut Gr F). L'ensemble $\mathscr{U}$ des (A, B, u) pour lesquels $P(u)=(A, B, u')$, u' inversible, est ouvert dans $\mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F \times \mathscr{L}(E; F)$ (ici $p=q$, faute de quoi cet ouvert est vide).

Alors on voit sans peine que $J : (A, B, u) \mapsto (B, A, u'^{-1})$ est C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{L}$(Taut Gr F; Taut Gr E). Si maintenant, pour $(B, A, v) \in \mathscr{L}$(Taut Gr F; Taut Gr E), on pose $Q(B, A, v)=\bar{v}$, où $\bar{v}$ est le prolongé de $v \in \mathscr{L}(B, A)$ en $\bar{v} \in \mathscr{L}(F; E)$, $\bar{v}=v$ sur B, 0 sur l'orthogonal B^+ de B dans F, on voit aussi que Q est C^∞ de $\mathscr{L}$(Taut Gr F; Taut Gr E) dans $\mathscr{L}(F; E)$; alors $Q \circ J : (A, B, u) \mapsto (B, A, u'^{-1}) \mapsto \overline{u'^{-1}}$ est C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{L}(F; E)$ et $\overline{u'^{-1}} \in \mathscr{L}(F; A)$.

(IV.3) Soit Φ une $C^\infty(U, V)$ semi-martingale, U plongée dans E, V plongée dans F. On va en déduire une $C^\infty(U; \mathrm{Gr}\,E \times \mathrm{Gr}\,F \times \mathscr{L}(E; F))$-semi-martingale $\hat{\Phi}$. Sa première composante, $C^\infty(U; \mathrm{Gr}\,E)$-semi-martingale, est un processus constant, l'application C^∞ canonique $x \mapsto T(U; x)$ (espace tangent à U en x) de U dans Gr E. Sa deuxième composante, $C^\infty(U; \mathrm{Gr}\,F)$-semi-martingale, est la composée de Φ, $C^\infty(U; V)$-semi-martingale, et du processus constant, l'application C^∞ canonique $y \mapsto T(V, y)$ de V dans Gr F; la valeur en $x \in U$ de cette composée est $T(V; \Phi(x))$. Ensuite Φ admet un prolongement $\bar{\Phi}$, $C^\infty(E; F)$-semi-martingale, donc $\bar{\Phi}'$ est une $C^\infty(E; \mathscr{L}(E; F))$-semi-martingale, d'où par restriction une $C^\infty(U; \mathscr{L}(E; F))$-semi-martingale, qui sera la troisième composante de $\hat{\Phi}$. On peut écrire $\hat{\Phi}(x)=(T(U; x), T(V; \Phi(x)), \bar{\Phi}'(x))$, pour $x \in U$.

Si Φ est inversible, $\Phi'_t(x) \in \mathscr{L}(\mathrm{T}(\mathrm{U}; x); \mathrm{T}(\mathrm{V}; \Phi_t(x)))$ est inversible, donc l'image par P de $\hat{\Phi}(x)$ est le processus $t \mapsto (x \mapsto (\mathrm{T}(\mathrm{U}, x), \mathrm{T}(\mathrm{V}; \Phi_t(x)), \Phi'_t(x)))$, $\Phi'_t(x) \in \mathscr{L}(\mathrm{T}(\mathrm{U}; x);$ $\mathrm{T}(\mathrm{V}; \Phi_t\ (x))$ inversible, donc $\hat{\Phi}(x)$ est dans l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Gr}\,\mathrm{E} \times \mathrm{Gr}\,\mathrm{F} \times \mathscr{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$ signalé à (IV.2), donc $\hat{\Phi}$ est une $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}; \mathscr{U})$-semi-martingale par (II.3). Comme ensuite $\mathrm{Q} \circ \mathrm{J}$ de (IV.1) est C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{E})$, on en déduit $(\mathrm{Q} \circ \mathrm{J})(\hat{\Phi})$, $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}; \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{E}))$-semi-martingale, qui, avec les notations précédentes, s'écrit : $t \mapsto (x \mapsto \overline{\Phi_t'^{-1}(x)})$. Nous appellerons $\overline{\Phi'^{-1}}$ cette semi-martingale $(\mathrm{Q} \circ \mathrm{J})(\hat{\Phi})$. Notons que $\overline{\Phi'^{-1}}(t, x, \omega) \in \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U}; x))$, $\overline{\Phi'^{-1}}(x)$ est une $\mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U}; x))$-semi-martingale, et $\overline{\Phi'^{-1}}$ une semi-martingale à valeurs dans l'espace $\Gamma^\infty(\mathrm{U}; \mathscr{L}_{\mathrm{U}}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U})))$ des sections C^∞ du fibré $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U}))$ de base U dont la fibre au-dessus de $x \in \mathrm{U}$ est $\mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U}; x))$. *A fortiori* $\overline{\Phi'^{-1}}$ est une $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}; \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{E}))$-semi-martingale, et se prolonge en $\overline{\overline{\Phi'^{-1}}}$, $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}; \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{E}))$-semi-martingale.

(IV.4) Reprenons alors la démonstration du théorème (I.6.3) de la Note (I). Supposons que Φ soit inversible, et posons $\mathrm{X} = \Phi^{-1}(y)$, $y \in \mathrm{V}$. Supposons qu'elle soit une U-semi-martingale. Alors $\Phi(\mathrm{X}) = y$, donc $\bar{\Phi}(\mathrm{X}) = y$, donc, par (I.6.1.1) de la Note (I),

$$\text{(IV.4.1)} \qquad (\mathrm{Str}) \quad 0 = d(\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t)) = d\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t) + \bar{\Phi}'_t(\mathrm{X}_t)\, d\mathrm{X}_t.$$

Multiplions à gauche par $\overline{\Phi_t'^{-1}}(\mathrm{X}_t)$. Pour $x \in \mathrm{U} : \overline{\Phi_t'^{-1}}(x)\bar{\Phi}'_t(x)$ est un opérateur de E dans E, dont la restriction à $\mathrm{T}(\mathrm{U}; x)$ est l'identité, et $d\mathrm{X}$ est une section semi-martingale de $\mathrm{T}(\mathrm{U})$ (*voir* Schwartz [2]) le long de X, $d\mathrm{X}_t \in \mathrm{T}(\mathrm{U}; \mathrm{X}_t))$, donc

$$(\mathrm{Str}) \quad \overline{\Phi_t'^{-1}}(\mathrm{X}_t)\bar{\Phi}'_t(\mathrm{X}_t)\, d\mathrm{X}_t = d\mathrm{X}_t.$$

Donc (IV.4.1) s'écrit

$$\text{(IV.5)} \qquad (\mathrm{Str}) \quad d\mathrm{X}_t = -\overline{\Phi_t'^{-1}}(\mathrm{X}_t)(d\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t)).$$

C'est ce qui remplace la relation (I.1); X est un processus à valeurs dans U, donc dans E. On a encore $\bar{\Phi}'_t(\mathrm{X}_t)\overline{\Phi_t'^{-1}}(\mathrm{X}_t)\, d\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t) = d\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t)$, parce que $d\bar{\Phi}_t(\mathrm{X}_t) \in \mathrm{T}(\mathrm{V}; \Phi_t(\mathrm{X}_t))$, et que $\Phi_t(x)\overline{\Phi_t'^{-1}}(x)$ est l'identité sur $\mathrm{T}(\mathrm{V}; \bar{\Phi}'_t(x))$ pour $x \in \mathrm{U}$; donc une U-semi-martingale X vérifiant (IV.5) et $\mathrm{X}_0 = \Phi_0^{-1}(y)$ est nécessairement $\Phi^{-1}(y)$. Mais (IV.5) est, pour X, une EDS de Stratonovitch sur U, $d\mathrm{X}_t = \mathrm{G}_t(\mathrm{X}_t)\, d\bar{\Phi}_t$; $\mathrm{G}(x, t, \omega) = -\overline{\Phi'^{-1}}(x, t, \omega)\langle \delta_{(x)}, . \rangle$, $\delta_{(x)} \in \mathscr{L}(\mathrm{H}; \mathrm{F})$, $-\overline{\Phi'^{-1}}(x, t, \omega) \in \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{T}(\mathrm{U}; x))$, et $\overline{\Phi'^{-1}}\langle \delta_{(.)}, . \rangle$ est une $\Gamma^\infty(\mathrm{U}; \mathscr{L}_{\mathrm{U}}(\mathrm{H}; \mathrm{T}(\mathrm{U})))$-semi-martingale, Φ une H-semi-martingale. On peut prendre ensuite l'équivalent Ito de (IV.5), analogue à (I.2), puis l'analogue de (I.3), qui est une équation différentielle stochastique, sur E, à semi-martingales directrices hilbertiennes, $\bar{\Phi}$, $[\![\overline{\overline{\Phi'^{-1}}}, \bar{\Phi}]\!]$, $[\![\bar{\Phi}, \bar{\Phi}]\!]$, $[\![\bar{\Phi}', \bar{\Phi}]\!]$, et la démonstration du théorème Φ^{-1} s'achève comme dans le cas de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{E}; \mathrm{F})$.

Reçue le 16 mars 1987, acceptée le 2 avril 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. SCHWARTZ, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, n° 780, 1980, voir chapitres I et II.

[2] L. SCHWARTZ, Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités, in *Aspects of Mathematics and its Applications*, Elsevier Science Publishers, 1986, Proposition (3.4), p. 725.

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, U.A. du C.N.R.S. n° 169, 91128 *Palaiseau Cedex.*