Laurent Schwartz

Semi-martingales à valeurs dans des espaces d'applications C^∞ entre espaces vectoriels (I)

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 305(1) (1987), p. 31-35.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 31-35, 1987

Probabilités/*Probability Theory*

Semi-martingales à valeurs dans des espaces d'applications C^∞ entre espaces vectoriels (I)

Laurent SCHWARTZ

Résumé — Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimensions finies, Φ une semi-martingale à valeurs dans $C^\infty(E; F)$, Ψ une semi-martingale à valeurs dans $C^\infty(F; G)$, X une semi-martingale à valeurs dans E. On démontrera les 3 théorèmes suivants:

1. $\Phi(X)$ est une semi-martingale à valeurs dans F;
2. $\Psi \circ \Phi$ est une semi-martingale à valeurs dans $C^\infty(E; G)$;
3. Si Φ est inversible, Φ^{-1} est une semi-martingale à valeurs dans $C^\infty(F; E)$.

Ce théorème 3 ne sera démontré que dans une Note ultérieure (II).

Semi-martingales with values in spaces of C^∞-maps between vector spaces

Abstract — *Let* E, F, G *be finite dimensional vector spaces,* Φ *a semi-martingale with values in* $C^\infty(E; F)$, Ψ *a semi-martingale with values in* $C^\infty(F; G)$, X *a semi-martingale with values in* E. *We prove the following three theorems:*

1. $\Phi(X)$ *is a semi-martingale with values in* F;
2. $\Psi \circ \Phi$ *is a semi-martingale with values in* $C^\infty(E; G)$;
3. *If* Φ *is inversible,* Φ^{-1} *is a semi-martingale with values in* $C^\infty(F; E)$.

This theorem 3 *will be proved only in a further Note* (*II*).

I. DÉFINITIONS. — (I.1) $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P})$ sera un espace probabilisé vérifiant les conditions habituelles ($\bar{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$). Soit G un espace vectoriel topologique (sous-entendu: sur **R**, localement convexe, et séparé). Un processus $X : \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega \to G$ sera dit G-semi-martingale, s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $\overline{+\infty}$ [i.e. $\forall \omega$, $\exists n$ tel que $T_n(\omega) = \overline{+\infty}$; $\overline{+\infty}$ est un temps isolé $> +\infty$; nous écrirons $T_n \uparrow\uparrow \overline{+\infty}$], et une suite croissante $(\mathbf{H}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces hilbertiens séparables de G [i.e. $\mathbf{H}_n$ est un sous-espace vectoriel, muni d'une structure hilbertienne séparable rendant l'injection $\mathbf{H}_n \to G$ continue], telles que $1_{\{T_n > 0\}} X^{T_n}$ soit une $\mathbf{H}_n$-semi-martingale continue [i.e. somme d'un processus à variation finie continu et d'une martingale locale continue, nulle au temps 0, à valeurs dans $\mathbf{H}_n$. Dans la suite, martingale voudra dire martingale locale continue]. On prend des espaces hilbertiens, parce que, dans des Banach, il n'y a pas d'intégrale stochastique.

D'après un théorème d'Ustunel [1], si G est un Fréchet nucléaire, X un G-processus qui est scalairement semi-martingale [i.e. $\forall \xi \in G'$, $\langle \xi, X \rangle_{G', G}$ est une semi-martingale réelle], alors X est G-semi-martingale, et il existe même un sous-espace hilbertien séparable **H** de G tel que X soit une **H**-semi-martingale. Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies; l'espace $C^\infty(E, F)$ des applications C^∞ de E dans F, pour sa topologie usuelle, est de Fréchet nucléaire. Au lieu de considérer le dual, on pourra prendre $\xi \in (C^\infty(E))'$ (espace des distributions réelles à support compact), et considérer $\langle \xi, X \rangle_{(C^\infty(E))', C^\infty(E; F)} \in F$.

(I.2) Plutôt que d'introduire les espaces H^p de semi-martingales, nous introduirons $\overline{H^\infty}$. Une **H**-semi-martingale X (**H** hilbertien séparable) sera dite $\in \overline{H^\infty}\,\mathbf{H}$ si *d'une part elle est bornée*, et d'autre part $X = V + M$, V à variation bornée, M martingale, [M, M] borné [il s'agit du crochet scalaire, composante croissante de $\|M\|_{\mathbf{H}}^2$]; on peut supposer M bornée au lieu de X bornée. Avec une norme évidente, $\overline{H^\infty}(\mathbf{H})$ est un Banach. Si X est G-semi-martingale, il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $T_n \uparrow\uparrow +\infty$, et une suite $(\mathbf{H}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles

Note présentée par Laurent SCHWARTZ.

0249-6291/87/03050031 \$ 2.00

que $1_{\{T_n>0\}}X^{T_n}$ soit $\overline{H^\infty}(H_n)$. Un ensemble $\mathscr{X}$ de G-semi-martingales est dit uniformément localement $\overline{H^\infty}$ s'il existe des suites (T_n), (H_n), telles que, pour tout n, l'ensemble des $1_{\{T_n>0\}}X^{T_n}$, $X\in\mathscr{X}$, soit borné dans $\overline{H^\infty}\,H_n$.

(I.3) Si X est une G-semi-martingale, Y un G'-processus, $*$-scalairement optionnel, prélocalement $*$-scalairement borné, on peut définir une intégrale stochastique $\langle Y.X\rangle=\langle Y.X\rangle_{G',G}:t\mapsto\int_0^t\langle Y, dX\rangle_{G',G}$ à valeurs réelles. Si X et Y varient, Y en restant uniformément prélocalement bornée, X uniformément localement $\overline{H^\infty}$, et si on sait d'avance que $\langle Y.X\rangle$ reste uniformément localement bornée, elle reste uniformément localement $\overline{H^\infty}$. Si Y est aussi une G'-semi-martingale, il y a un crochet réel [X, Y] et un produit scalaire $\langle X, Y\rangle_{G,G'}$, semi-martingales réelles; elles sont uniformément localement $\overline{H^\infty}$ si X et Y le sont.

Proposition (I.4). — *Soit Φ un processus à valeurs dans $C^\infty(E;F)$. Pour qu'il soit une semi-martingale, il est nécessaire qu'il existe une suite $(T_n)_{n\in N}$, $T_n\uparrow\uparrow\overline{+\infty}$, telle que, pour tout n, pour tout entier $m\geqq 0$, et tout compact K de E, l'ensemble des dérivées arrêtées $1_{\{T_n>0\}}(\Phi^{(m)})^{T_n}(x)$, $x\in K$, soit borné dans $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}_m(E^m;F))$ (où $\mathscr{L}_m$ est l'ensemble des applications m-linéaires), et il est suffisant que, pour tout $m\geqq 0$, tout compact K, il existe une suite $(T_{n,m,K})_{n\in N}$, abrégée par $(T_n)_{n\in N}$ bien qu'elle puisse dépendre de m et K, $T_n\uparrow\uparrow\overline{+\infty}$, telle que, pour tout n, l'ensemble des $1_{\{T_n>0\}}(\Phi^{(m)})^{T_n}(x)$, $x\in K$, soit borné dans $\overline{H^\infty}\,\mathscr{L}_m(E^m;F)$.*

Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de $C^\infty(E;F)$-semi-martingales. Pour qu'il soit uniformément localement $\overline{H^\infty}(C^\infty(E;F))$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une suite $T_n\uparrow\uparrow\overline{+\infty}$, telle que, pour tout n, pour tout m, pour tout K, l'ensemble des $1_{\{T_n>0\}}(\Phi^{(m)})^{T_n}(x)$, $\Phi\in\mathscr{E}$, $x\in K$, soit borné dans $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}_m(E^m;F))$.

On remarquera que, pour un ensemble $\mathscr{E}$, la condition nécessaire et la condition suffisante sont identiques.

Démonstration. — 1. *Condition nécessaire.* — Soit Φ une $C^\infty(E;F)$-semi-martingale, donc, d'après Ustunel, une **H**-semi-martingale pour un sous-espace hilbertien **H** de $C^\infty(E;F)$; soit (T_n), $T_n\uparrow\uparrow\overline{+\infty}$, telle que $1_{\{T_n>0\}}\Phi^{T_n}$ soit $\overline{H^\infty}(\mathbf{H})$. Soit $x\in E$; la mesure de Dirac $\delta_{(x)}$ est élément de $(C^\infty(E))'$, bornée pour $x\in K$, donc bornée dans $\mathscr{L}(\mathbf{H};F)$, pour $x\in K$, donc $1_{\{T_n>0\}}\Phi^{T_n}(x)=\langle\delta_{(x)}, 1_{\{T_n>0\}}\Phi^{T_n}\rangle$ reste bornée dans $\overline{H^\infty}(F)$. La même propriété est vraie pour $\Phi^{(m)}$, en remplaçant **H** par son image par dérivation d'ordre m, $\mathbf{H}^{(m)}$, et F par $\mathscr{L}_m(E^m;F)$.

2. *Condition suffisante.* — On abrègera $T_{n,m,K}$ par T_n. En utilisant $m+1$ au lieu de m, on voit que $x\mapsto 1_{\{T_n>0\}}(\Phi^m)^{T_n}(x)$ est lipschitzienne, donc continue de K dans $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}_m(E^m;F))$. Soient f une fonction réelle continue sur E, à support compact, p un indice de dérivation partielle d'ordre $|p|=m$; l'intégrale

$$\int 1_{\{T_n>0\}}\Phi^{(T_n)}(x)\,D^p f(x)\,dx=(-1)^m\int 1_{\{T_n>0\}}D^p\Phi^{T_n}(x)f(x)\,dx$$

est alors un élément de $\overline{H^\infty}(F)$, donc une F-semi-martingale. Si alors S est une distribution sur E à support compact, elle est une somme finie $S=\sum_p D^p f_p$, donc $\langle S,\Phi\rangle$ est une F-semi-martingale; Φ est donc scalairement une $C^\infty(E;F)$-semi-martingale, donc, d'après Ustunel, elle est une $C^\infty(E;F)$-semi-martingale.

Pour l'uniformité relative à un ensemble $\mathscr{E}$, la nécessité est évidente; pour la suffisance, on utilise le théorème de Banach-Steinhaus [$(C^\infty(E))'$ est tonnelé], et la nucléarité de $(C^\infty(E))'$, mais ici, comme dans la nécessité, les T_n doivent être indépendants de m et K.

(I.5) Si X et Y sont deux semi-martingales, il sera commode de noter la différentielle $d[X, Y]_t$ par $dX_t dY_t$ (à cause de l'expression du crochet comme variation quadratique). Cela possède en outre l'avantage d'une notation simple dans le cas de produits non commutatifs. Soit UVW un produit non commutatif (ni même associatif), représentant une application trilinéaire $\beta : \beta(U, V, W) = UVW$ sur un produit $E \times F \times G$ de 3 espaces vectoriels de dimensions finies. La formule d'Ito s'écrit

$$d(UVW) = dU\,VW + U\,dVW + UV\,dW + dU\,dVW + dU\,V\,dW + U\,dV\,dW.$$

Pour interpréter le terme $dU\ V\,dW$ (évident comme variation quadratique), on appellera $\bar{\beta}$ l'application bilinéaire définie par β sur $(E \otimes G) \times F$; or il existe un crochet tensoriel de U, W à valeurs dans $E \otimes G$, donc un $\bar{\beta}(dU \otimes dW, V)$; alors $dU\ V\,dW$ ou $\beta(dU, V, dW)$ est $\bar{\beta}(dU \otimes dW, V)$.

On utilisera le plus souvent des intégrales stochastiques de Stratonovitch, mais aussi des intégrales d'Ito. Les différentielles de Stratonovitch (Str) dX [resp. (Ito) dX] d'une semi-martingale X sont celles qui interviennent quand on considère X comme intégrateur sur les fonctions optionnelles, resp. sur les fonctions de Stratonovitch. On écrira (Str) $dX \simeq$ (Ito) dX; en d'autres termes (Str) $dX \simeq$ (Ito) dY voudra dire que $X - Y$ est un processus constant. Si f est une fonction de Stratonovitch, on aura alors

$$\text{(I.5.1)} \qquad (\mathrm{Str})\, f\,dX \simeq (\mathrm{Ito}) \left(f dX + \frac{1}{2} df\,dX \right).$$

(I.6) *Les trois théorèmes.* — Le but de cette Note est de démontrer les 3 théorèmes suivants, où E, F, G, sont des espaces vectoriels de dimensions finies.

THÉORÈME (I.6.1). — *Si Φ est une $C^\infty(E: F)$-semi-martingale, X une E-semi-martingale, $\Phi(X)$ est une F-semi-martingale, et sa différentielle de Stratonovitch est*

$$\text{(I.6.1.1)} \qquad d(\Phi_t(X_t)) = d\Phi_t(X_t) + \Phi'_t(X_t)\, dX_t \quad (\mathrm{Str}) \quad (^1).$$

Si X et Φ varient en restant uniformément localement $\overline{H^\infty}$, $\Phi(X)$ aussi.

THÉORÈME (I.6.2). — *Si Φ et Ψ sont respectivement une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale et une $C^\infty(F; G)$-semi-martingale, la composée $\Psi \circ \Phi$, que nous écrirons $\Psi(\Phi)$, est une $C^\infty(E; G)$-semi-martingale. Sa différentielle de Stratonovitch est*

$$\text{(I.6.2.1)} \qquad d(\Psi_t(\Phi_t)) = d\Psi_t(\Phi_t) + \Psi'_t(\Phi_t)\, d\Phi_t \quad (\mathrm{Str}).$$

Si Φ et Ψ varient en restant uniformément localement $\overline{H^\infty}$, $\Psi(\Phi)$ aussi.

THÉORÈME (I.6.3). — *Si Φ est une $C^\infty(E; F)$-semi-martingale, et si, pour presque tout ω, pour tout t, $\Phi(t, \omega)$ est un difféomorphisme d'inverse $\Phi(t, \omega)^{-1}$ ou $\Phi^{-1}(t, \omega)$, Φ^{-1} est une $C^\infty(F; E)$-semi-martingale. Sa différentielle de Stratonovitch est*

$$\text{(I.6.3.1)} \qquad d(\Phi_t^{-1}) = -\Phi_t'^{-1}(\Phi_t^{-1})\, d\Phi_t(\Phi_t^{-1}) \quad (\mathrm{Str}).$$

COROLLAIRE (I.6.4). — *Soit une équation différentielle stochastique* (EDS) *sur* E:

$$dX_t = F(X_t, t, .)\, dZ_t \quad (\mathrm{Ito}),$$

Z semi-martingale à valeurs dans un Hilbert H; $F(x, ., .)$ *optionnelle pour $x \in E$ à valeurs dans $\mathscr{L}(H; E)$; $|F(x_0, t, \omega)| \leqq k(\omega)$, k variable aléatoire, pour au moins un $x_0 \in E$; $|F(x', t, \omega) - F(x'', t, \omega| \leqq K(\omega)$, pour x', $x'' \in E$, K variable aléatoire; $F(., t, \omega)$ C^∞, et toutes les dérivées $F^{(m)}$ ont les mêmes propriétés (avec d'autres constantes $k^{(m)}$, $K^{(m)}$). On* *sait qu'il existe un flot* Φ, $\Phi(x)$ *est la solution de l'équation avec valeur initiale* x, Φ *est borélienne, et, pour presque tout* $\omega, \Phi(.,.,\omega)$ *est* C^∞ *en* x *à dérivées continues en* t, x. *En outre, pour presque tout* ω, *pour tout* t, $\Phi(.,t,\omega)$ *est un difféomorphisme de* E *sur* E, *d'inverse* $\Phi^{-1}(.,t,\omega)$.

Alors Φ *et* Φ^{-1} *sont des* $C^\infty(E; E)$*-semi-martingales, et on a* $d\Phi_t = F(\Phi_t, t, .)\, dZ_t$.

Le résultat est le même pour une EDS *de Stratonovitch, si* F *est une* $C^\infty(E; \mathscr{L}(H; E))$*-semi-martingale.*

Pour Φ, cela résulte des majorations usuelles et de (I.4); pour Φ^{-1} cela résulte alors de (I.6.3), mais aussi de (I.4) à l'aide de majorations données par Bismut [2].

II. Démonstration du théorème (I.6.1). — La partie de ce théorème relative à Φ, X, fixées, est due à Ustunel [3]. Nous devrons la redémontrer pour la suite, et par la démonstration d'Ustunel.

Soit X une E-semi-martingale; Ustunel a montré [4] que $\delta_{(X)}$ est une $(C^\infty(E))'$-semi-martingale, alors $\langle \delta_{(X)}, \Phi \rangle_{(C^\infty(E))', C^\infty(E; F)} = \Phi(X)$ est une F-semi-martingale par (I.3). Plus précisément, $\delta_{(X)}$ s'écrit comme intégrale stochastique. Si on utilise une base (e_k) de $E = \mathbf{R}^N$, c'est

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} \text{(Str)} \quad \delta_{(X_t)} = -\sum_k \partial_k \delta_{(X_t)} dX_t^k \\ \text{(Ito)} \quad \delta_{(X_t)} = -\sum_k \partial_k \delta_{(X_t)} dX_t^k + \dfrac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j \delta_{(X_t)} dX_t^i dX_t^j. \end{cases}$$

Si x reste dans un compact K de $\mathbf{R}^N$, $\delta_{(x)}$, $\partial_k \delta_{(x)}$, $\partial_i \partial_j \delta_{(x)}$ restent bornées dans les espaces de Sobolev $H^{-(N/2)-1}$, $H^{-(N/2)-2}$, $H^{-(N/2)-3}$; donc, d'après (I.3),. si X varie en restant uniformément localement $\overline{H^\infty}(E)$, $\delta_{(X)}$ reste uniformément localement $\overline{H^\infty}((C^\infty(E))')$; si alors Φ varie en restant uniformément localement $\overline{H^\infty}(C^\infty(E; F))$, $\Phi(X)$ reste uniformément localement $\overline{H^\infty}(F)$. La relation (II.1) peut s'écrire en dérivées totales:

$$\text{(II.2)} \quad \begin{cases} \text{(Str)} \quad \delta_{(X_t)} = -\delta'_{(X_t)} dX_t \\ \text{(Ito)} \quad \delta_{(X_t)} = -\delta'_{(X_t)} dX_t + \dfrac{1}{2} \delta''_{(X_t)} dX_t\, dX_t. \end{cases}$$

La différentielle $d(\Phi_t(X_t))$ n'est autre que $d\langle \delta_{(X_t)}, \Phi_t \rangle$, et s'obtient donc par la formule de dérivation (Str) ou (Ito) d'un produit:

$$\text{(II.3)} \quad \begin{aligned} d(\Phi_t(X_t)) &= \langle d\delta_{(X_t)}, \Phi_t \rangle + \langle \delta_{(X_t)}, d\Phi_t \rangle \quad \text{(Str)} \\ &= -\langle \delta'_{(X_t)} dX_t, \Phi_t \rangle + \langle \delta_{(X_t)}, d\Phi_t \rangle \quad \text{(Str)} \\ &= \Phi'_t(X_t)\, dX_t + \langle \delta_{(X_t)}, d\Phi_t \rangle \quad \text{(Str)}. \end{aligned}$$

C'est le deuxième terme qu'il y a lieu d'écrire $d\Phi_t(X_t)$ (Str), « valeur de $d\Phi_t$ au point X_t ». On distingue facilement les écritures de $d(\Phi_t(X_t))$ et de $d\Phi_t(X_t)$), parce que, dans la première, $\Phi_t(X_t)$ est entre parenthèses.

En différentielles d'Ito:

$$\text{(II.4)} \quad d(\Phi_t(X_t)) = d\Phi_t(X_t) + \Phi'_t(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \Phi''_t(X_t)\, dX_t\, dX_t + d\Phi'_t(X_t)\, dX_t \quad \text{(Ito)}.$$

Comme ci-dessus, $d\Phi'_t(X_t)\, dX_t$ [où $\Phi'_t(X_t)$ n'est pas entre parenthèses] est $\langle \delta_{(X_t)}, d\Phi'_t \rangle$ (Ito); et d'ailleurs, au sens de l'équivalence Str-Ito définie à (I.5.1):

$$\text{(II.5)} \quad d\Phi_t(X_t) \quad \text{(Str)} \simeq d\Phi_t(X_t) + \frac{1}{2} d\Phi'_t(X_t)\, dX_t \quad \text{(Ito)}.$$

[Noter que X_t,

$$dX_t \in E, \qquad d\Phi_t \in C^\infty(E; F), \qquad d\Phi_t(X_t) \in F,$$
$$d\Phi'_t \in C^\infty(E; \mathscr{L}(E; F)), \qquad d\Phi'_t(X_t) \in \mathscr{L}(E; F),$$

donc les 2 membres sont des éléments de F.]

Remarque. — En utilisant les résultats de Métivier [5], on voit que (I.6.1) subsiste sans modification si F est hilbertien de dimension infinie : la nucléarité de $C^\infty(E; F)$ n'est pas intervenue.

III. Démonstration du théorème (I.6.2). — Lorsque x varie dans un compact K de E, $\Phi(x)$ reste uniformément localement $\overline{H^\infty}(F)$ par la condition nécessaire de (I.4), donc $\Psi(\Phi(x))$ uniformément localement $\overline{H^\infty}(G)$, par (I.6.1). On devra démontrer des propriétés analogues avec les dérivées successives; bornons-nous à la dérivée première :

(III.1) $$(\Psi(\Phi))'(x) = \Psi'(\Phi(x))(\Phi'(x)).$$

Quand x reste dans un compact de E, $\Phi'(x)$ reste uniformément localement $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}(E; F))$, par la nécessité de (I.4), et $\Phi(x)$ uniformément localement $\overline{H^\infty}(F)$; $\Psi'(\Phi(x))$ uniformément localement $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}(F; G))$ par le théorème (I.6.1); donc le deuxième membre de (III.1) est uniformément localement $\overline{H^\infty}(\mathscr{L}(E; G))$, par Ito (c'est un produit). On fera de même avec les dérivées suivantes. Alors la condition suffisante de (I.4) montre bien que $\Psi(\Phi)$ est une $C^\infty(E; G)$-semi-martingale. Les conditions d'uniformité résultent de même de celles de (I.4) et (I.6.1.1). La différentielle s'obtient en calculant $d(\Psi_t(\Phi_t(x)))$ pour $x \in E$.

([1]) Si φ est une application de E dans F, $\varphi(x) \in F$ pour tout $x \in E$, $\varphi'(x)$ est sa dérivée en x, $\varphi'(x) \in \mathscr{L}(E; F)$.

Reçue le 16 mars 1987, acceptée le 2 avril 1987.

Références bibliographiques

[1] A. Ustunel, Some applications of stochastic integration in infinite dimension, *Stochastics*, 7, 1982, p. 225.

[2] J. Bismut, Mécanique aléatoire, *Lecture Notes in Math.*, n° 866, Springer-Verlag, Berlin-Heilberg-New York, 1981, chapitre 2.

[3] A. Ustunel, Analytic semi-martingales, their boundary values, *J. Funct. Anal.*, 51, 1980, p. 142.

[4] A. Ustunel, Charaterizations of semi-martingales on nuclear spaces, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits Rechnung*, 60, 1982, p. 21.

[5] M. Metivier, *Semi-martingales*, de Gruyter, Studies in Mathematics, ch. 4.

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, U.A. du C.N.R.S. n° 169, 91128 *Palaiseau Cedex.*