Laurent Schwartz

Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités

Aspects of mathematics and its applications, North-Holland Math. Library, vol. 34, Amsterdam: North-Holland, 1986, p. 689-725.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

J.A. BARROSO editor, Aspects of Mathematics and its Applications

LES GROS PRODUITS TENSORIELS EN ANALYSE ET EN PROBABILITES

Laurent SCHWARTZ

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, 'Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S. 169', France

Je suis heureux de publier cet article dans le volume en l'honneur des 60 ans de Leopoldo Nachbin, qui est mon ami depuis plus de 30 ans.

0. Introduction

Les produits tensoriels d'espaces vectoriels (éventuellement topologiques) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont d'un usage courant en analyse. Les produits tensoriels de *modules sur l'anneau* $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions indéfiniment dérivables sur une variété sont couramment utilisés par les géomètres et les topologues, peu par les analystes; or ils s'appliquent parfaitement à l'étude des sections distributions de fibrés vectoriels de dimension finie, mais il n'y a là rien de vraiment nouveau. Cependant cet exemple nous montrera comment utiliser les produits tensoriels de modules sur l'anneau *Opt* des fonctions optionnelles sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ [1] en probabilités, pour trouver des êtres probabilistes nouveaux, les sections-(différentielles de semi-martingales continues formelles), et simplifier notablement le calcul différentiel stochastique sur les variétés (pourvu qu'on ne soit pas effrayé par le symbole $\otimes_{Opt}$). Ce que le titre appelle 'gros' produits tensoriels veut dire simplement $\otimes_{\mathscr{C}^\infty}$ ou $\otimes_{Opt}$. Le cas *Opt* est en fait plus simple que le cas $\mathscr{C}^\infty$, mais donne des résultats plus nouveaux ou moins connus. Nous regarderons ensuite les produits tensoriels $\otimes_{Str}$ sur l'anneau *Str* des processus de Stratonovitch, d'une nature certainement plus compliquée. Dans [6], j'ai dû utiliser des méthodes nettement trop compliquées, d'une part à cause des problèmes d'intégrabilité, d'autre part par manque d'audace en géométrie différentielle du 2^e^ ordre. Ensuite [7] m'a permis de me débarrasser complètement des problèmes de localisation et d'intégrabilité. Dans [8] j'ai repris ce qui m'avait manqué dans [6], le calcul géométrique du 2^e^ ordre, comme aussi P.A. Meyer dans [4], donnant ainsi l'interprétation géométrique de la formule d'Itô. L'utilisation, ici, des

[1] $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ veut dire $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ voudra alors dire $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega = (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}) \times \Omega$.

producits tensoriels $\otimes_{Opt}$, me paraît apporter là-dessus le point final; les êtres sur lesquels on raisonne sont des sections-(différentielles de semi-martingales continues formelles) de fibrés vectoriels de dimension finie G_A au-dessus d'un ouvert ou d'un optionnel A de $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \times \Omega$; $\mathrm{d}X_t \in G_t$, fibre au-dessus de t (ω étant toujours omis). Une fois comprise la notion, tout le calcul est remarquablement simple, et [8] est considérablement simplifié et amélioré. Ce n'est pas dommage!

1. Sections-Distributions d'un Fibre Vectoriel sur une Variete $\mathscr{C}^\infty$; $\mathscr{A}$-Sections d'un Faisceau de $\mathscr{A}$-Modules

Soit V une variété $\mathscr{C}^\infty$ réelle de dimension N, avec ou sans bord. Soit G_V un fibré vectoriel $\mathscr{C}^\infty$ sur V, de fibre-type $G_.$, de dimension finie; G_v sera la fibre au-dessus de $v \in V$. Une section de G_U au-dessus d'un ouvert U de V est dite $\mathscr{C}^\infty$ si elle l'est pour toute trivialisation au-dessus d'un sous-ouvert U' de U, $G_{U'} \to U' \times G_.$; on notera $\mathscr{C}^\infty(U; G_U)$ l'espace vectoriel de ces sections; c'est un module (pour la multiplication) sur l'algèbre $\mathscr{C}^\infty(U)$ des fonctions réelles $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Si même on appelle $\mathscr{L}(G_V)$ le fibré évident sur V, dont la fibre en chaque point v de V est $\mathscr{L}(G_v) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(G_v; G_v)$, donc de fibre-type $\mathscr{L}(G_.) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(G_.; G_.)$, $\mathscr{C}^\infty(U; G_U)$ est un $\mathscr{C}^\infty(U; \mathscr{L}(G_U))$-module à gauche pour la multiplication. (Si U est un ouvert de V, et $G_U \to U \times G_.$ une trivialisation de G_U au-dessus de U, $\mathscr{C}^\infty(U; G_U) = \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} G_.$; si, pour deux trivialisations au-dessus du même ouvert U, la formule de transition $U \times G_. \to U \times G_.$ est $(v, g) \to (v, \alpha(v)g)$, $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(U; \mathscr{L}(G_U)) = \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(G_.)$, la formule de transition pour $\mathscr{C}^\infty(U; G_U)$ est $\varphi \to \alpha\varphi$, $(\alpha\varphi)(v) = \alpha(v)\varphi(v)$, $\alpha(v) \in \mathscr{L}(G_.)$, $\varphi(v) \in G_.$, $\alpha(v)\varphi(v) \in G_.$; $G_.$ étant un $\mathscr{L}(G_.)$-module à gauche, $\mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} G_.$ est un $(\mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(G_.))$-module à gauche.) En outre, $(\mathscr{C}^\infty(U; G_U))_{U \in \mathscr{U}}$, où $\mathscr{U}$ est l'ensemble des ouverts de U, est un faisceau: si $(U_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ouverts de réunion U, si f est une section de G_U au-dessus de U dont la restriction à chaque U_ι est $\mathscr{C}^\infty$, elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

On notera que les cartes interviennent seulement pour G_V, pas pour V. On pourra donc remplacer la variété V par n'importe quel espace topologique séparé. On remplacera $\mathscr{C}^\infty$ par un faisceau d'algèbres commutatives $\mathscr{A}$ de fonctions réelles continues sur V; pour tout ouvert U de V, $\mathscr{A}(U)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative. On supposera en outre que, si $f \in \mathscr{A}(U)$, $f \neq 0$ partout, $1/f \in \mathscr{A}(U)$; si $f \in \mathscr{A}(U)$, si $U' \subset U$ est un ouvert, la restriction $f|U'$ de f à U' devra être élément de $\mathscr{A}(U')$, $\mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(U')$ est un morphisme d'algèbres, et $(\mathscr{A}(U))_{U \in \mathscr{U}}$, où $\mathscr{U}$ est l'ensemble des ouverts de U, devra être un faisceau; autrement dit, si $(U_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ouverts de V de réunion U, si f est une fonction réelle sur U, telle que, pour tout $i \in I$, la restriction $f|U_\iota$ à U_ι soit dans $\mathscr{A}(U_\iota)$, alors $f \in \mathscr{A}(U)$. On définit alors aussitôt les fonctions de $\mathscr{A}$ sur U_ι à valeurs dans un vectoriel $G_.$ de dimension finie sur $\mathbb{R}$, par coordonnées. Elles formeront un espace vectoriel $\mathscr{A}(U; G_.)$, $\mathscr{A}(U)$-module, $\mathscr{A}(U; G_.) = \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbb{R}} G_.$; c'est même un $(\mathscr{A}(U; \mathscr{L}(G_.)) = \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(G_.))$-module à gauche.

On appellera alors *$\mathscr{A}$-fibré vectoriel G_V sur V, de fibre-type $G_.$*, la donnée d'un espace avec projections G_V sur V, de structures vectorielles de même dimension finie $d = \dim G_.$ sur les fibres G_v, $v \in V$, et d'une famille de $\mathscr{A}$-trivialisations, $G_{U_\iota} \to U_\iota \times G_.$, U_ι ouverts de V, $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = V$, telle que la formule de transition des trivialisations d'indices $i, j \in I$, soit une application $(U_\iota \cap U_j) \times G_. \to (U_\iota \cap U_j) \times G_.$, de la forme $(v, g) \to (v, \alpha(v)g)$, $\alpha \in \mathscr{A}((U_\iota \cap U_j); \mathscr{L}_{G_.}) = \mathscr{A}(U_\iota \cap U_j) \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(G_.)$; on exigera aussi que l'atlas soit complet, ou bien on dira que deux atlas équivalents définissent la même structure $\mathscr{A}$-fibrée. Une section de G_U au-dessus d'un ouvert U sur lequel G_U admet une $\mathscr{A}$-trivialisation $G_U \to U \times G_.$ se traduira alors par une fonction f sur U à valeurs dans $G_.$; ce sera une $\mathscr{A}$-section si $f \in \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbb{R}} G_.$; la formule de transition des cartes assure alors que si l'on a deux $\mathscr{A}$-trivialisations sur le même ouvert U, une $\mathscr{A}$-section pour l'une est une $\mathscr{A}$-section pour l'autre; une section sur un ouvert U quelconque sera dite *$\mathscr{A}$-section* si elle l'est en restriction sur tous les ouverts $U' \subset U$ sur lesquels $G_{U'}$ admet une $\mathscr{A}$-trivialisation. Si alors f est une section de G_U, si $(U_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ouverts quelconque de réunion U, si la restriction de f à chaque U_ι est une $\mathscr{A}$-section sur U_ι, elle l'est sur U. Si donc on appelle $\mathscr{A}(U; G_U)$ l'espace vectoriel des $\mathscr{A}$-sections de G_U au-dessus de U, c'est un $\mathscr{A}(U)$-module, et même un $\mathscr{A}(U; \mathscr{L}(G_U))$-module à gauche, où $\mathscr{L}(G_U)$ est le $\mathscr{A}$-fibré évident de fibre $\mathscr{L}(G_v)$ en $v \in V$, et $(\mathscr{A}(U; G_U))_{U \in \mathscr{U}}$ est un faisceau de $(\mathscr{A}(U))_{U \in \mathscr{U}}$ modules.

Remarquons que G_V a canoniquement une topologie séparée. Si en outre $\mathscr{A}$ est, par exemple, le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^m$ sur une variété V de classe $\mathscr{C}^m$, alors G_V a canoniquement une structure de variéé $\mathscr{C}^m$, la projection $G_V \to V$ est $\mathscr{C}^m$, et les sections de G_V sont simplement les sections qui sont $\mathscr{C}^m$ de V dans G_V.

Soit maintenant $\mathscr{D}'(V)$ l'espace vectoriel des distributions sur une variété V de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ce pourra être l'espace des fonctions généralisées ou courants de degré 0, des mesures généralisées ou courants de degré N tordus, ou d'autres. Si G_V est un fibré vectoriel $\mathscr{C}^\infty$ de dimension finie au-dessus de V, on définit aisément l'espace $\mathscr{D}'(V; G_V)$ des sections distributions de G_V. Il n'est plus question de dire que $T \in \mathscr{D}'(V; G_V)$ est une distribution telle que, pour tout $v \in V$, $T(v) \in G_v$! (*On se permettra quand même de l'écrire souvent*; c'est un abus de langage, qui aujourd'hui ne l'est plus tant il est bien contrôlé!).

Prenons par exemple pour $\mathscr{D}'(V)$ l'espace des fonctions généralisées; une section-fonction f de G_V, localement Lebesgue-intégrable, sera en particulier une section généralisée. Il y a deux définitions classiques de $\mathscr{D}'(V; G_V)$ que nous rappellerons.

La première par dualité. On considère l'espace $\mathscr{D}(V; G_V^* \otimes \Omega_V^N)$ des sections $\mathscr{C}^\infty$ à support compact du fibré $G_V^* \otimes \Omega_V^N$ sur V, dont la fibre en $v \in V$ est $G_v^* \otimes_{\mathbf{R}} \Omega_v^N$, G_v^* dual de G_v, Ω_v^N espace vectoriel de dimension 1 des N-covecteurs tordus; on le munit d'une topologie limite inductive, et $\mathscr{D}'(V; G_V)$ est son dual. Il est alors évident que c'est, pour la multiplication, un $\mathscr{C}^\infty(V)$-module, et même un $\mathscr{C}^\infty(V; \mathscr{L}(G_V))$-module à gauche, et qu'il satisfait au théorème de recollement des morceaux par partition de l'unité: il y a un morphisme de restriction à un ouvert, et $(\mathscr{D}'(U; G_U))_{U \in \mathscr{U}}$ est un faisceau. La possibilité de définition par dualité est un bonheur, qui, comme on le verra plus loin, ne réussit pas toujours!

L'autre définition usuelle est par les cartes. Si G_U est trivial au-dessus de U, $G_U \cong U \times G_.$, $\mathscr{D}'(U; G_U) \cong \mathscr{D}'(U; G_.)$, espace des distributions sur U à valeurs dans $G_.$, qui n'est autre que $\mathscr{D}'(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$; puisque $\mathscr{D}'(U)$ est un $\mathscr{C}^\infty(U)$-module, et $G_.$ un $\mathscr{L}(G_.)$-module à gauche, il est un $\mathscr{C}^\infty(U; \mathscr{L}(G_U)) \cong \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{L}(G_.)$-module à gauche. Si on passe d'une première carte à une deuxième au-dessus du même ouvert U, et si le changement de cartes est défini par $\alpha : U \times G_. \to U \times G_.$, $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{L}(G_.)$, on considérera aussi, par définition, que le changement de cartes pour $\mathscr{D}'(U; G_U)$ est la même multiplication par α, opérant de $\mathscr{D}'(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$ dans $\mathscr{D}'(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$. On a ainsi défini les espaces $\mathscr{D}'(U; G_U)$ pour tous les ouverts U sur lesquels G_U est trivialisable, et de façon cohérente: si $(T_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de sections, T_ι sur U_ι, G_{U_ι} trivialisable, si $U = \bigcup_\iota U_\iota$, G_U encore trivialisable, si $T_\iota = T_j$ sur $U_\iota \cap U_j$, il existe $T \in \mathscr{D}'(U; G_U)$ unique qui induise T_ι sur chaque U_ι. On définit alors $\mathscr{D}'(U; G_U)$, pour U ouvert quelconque, comme l'espace des sections du faisceau ainsi défini: un élément T de $\mathscr{D}'(U; G_U)$ est, *par définition*, une famille *cohérente* $(T_\iota)_{\iota \in I}$, $T_\iota \in \mathscr{D}'(U_\iota; G_{U_\iota})$, où $(U_\iota)_{\iota \in I}$ est la famille de tous les ouverts de trivialisation de G_U (on peut se contenter d'une sous-famille recouvrant U). Alors, *d'après la définition même*, $(\mathscr{D}'(U; G_U))_{U \in \mathscr{U}}$, où $\mathscr{U}$ est la famille de tous les ouverts de V, est un faisceau de $\mathscr{C}^\infty(U)$-modules, de $\mathscr{C}^\infty(U; \mathscr{L}(G_U))$-modules à gauche. On met facilement sur $\mathscr{D}'(V; G_V)$ une topologie de caractère local sur V, en la mettant sur les $\mathscr{D}'(U_i; G_{U_i})$, G_{U_i} trivial sur U_i. Cette fois-ci c'est la dualité entre $\mathscr{D}'(V; G_V)$ et $\mathscr{D}(V; G^*_V \otimes \Omega^N_V)$ qui devient un théorème. Tout cela est bien connu, et les propriétés se déduisent tantôt mieux par une définition, tantôt mieux par l'autre. On peut ici encore généraliser, en supposant seulement V espace topologique séparé, $\mathscr{A}$ faisceau d'algèbres de fonctions réelles. On remplacera $\mathscr{D}'(V)$ par un *faisceau* quelconque $(\mathscr{N}(U))_{U\in\mathscr{U}}$ de $(\mathscr{A}(U))_{U\in\mathscr{U}}$-modules, et on définira les $\mathscr{N}(U; G_U)$ pour un $\mathscr{A}$-fibré vectoriel G_U de dimension finie. Si $G_U \to U \times G_.$ est une $\mathscr{A}$-trivialisation, $\mathscr{N}(U; G_U)$ se représentera comme $\mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$; pour un morphisme de changement de cartes $U \times G_. \to U \times G_.$, $(v, g) \to (v, \alpha(v)g)$, $\alpha \in \mathscr{A}(U; \mathscr{L}(G_.)) = \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{L}(G_.)$, le morphisme de transition $\mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_. \to \mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$ sera aussi la multiplication par α; $\mathscr{N}(U)$ est un $\mathscr{A}(U)$-module, donc $\mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$ est un $(\mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{L}(G_.))$-module à gauche, et $\alpha \in \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{L}(G_.)$. On connait donc $\mathscr{N}(U; G_U)$ *pour tout* U *pour lequel* G_U *est trivialisable*, avec la propriété de faisceau pour $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. On appellera alors $T \in \mathscr{N}(U; G_U)$, pour U quelconque, une famille $(T_i)_{i\in I}$, $T_i \in \mathscr{N}(U_i; G_{U_i})$, cohérente ($T_i = T_j$ sur $U_i \cap U_j$), pour tous les ouverts U_i au-dessus desquels G_{U_i} est $\mathscr{A}$-trivialisable. Par définition même, $(\mathscr{N}(U; G_U))_{U\in\mathscr{U}}$ est un faisceau de $(\mathscr{A}(U))_{U\in\mathscr{U}}$-modules, et de $(\mathscr{A}(U; \mathscr{L}(G_U)))_{U\in\mathscr{U}}$-modules à gauche.

Tout cela est élémentaire et d'un usage courant en topologie et géométrie; les propriétés suivantes, quoiqu'implicitement connues, le sont moins, et, comme nous le verrons au Section 2, gagneraient à l'être, au moins en probabilités[1].

[1] Par exemple, la Proposition (1.3) figure explicitement dans [1, Chap. II, Section 2, exemple (2.8.1), p. 138], comme un exemple simple sans démonstration, dans le cas où $\mathscr{A} = \mathscr{C}^\infty(V)$ et $\mathscr{N} = \mathscr{D}'(V)$, V variété $\mathscr{C}^\infty$. Et en effet tout ce qui est écrit ici est plus simple que les grands théorèmes de la cohomologie des faisceaux! Cependant notre Proposition (1.3) repose sur le fait que le $\mathscr{A}$-fibré G_V est facteur direct d'un $\mathscr{A}$-fibré trivial, ce qui, en fait, *n'est pas évident* pour V non compacte, et qui, dans les cas que nous traiterons à la Section 3, n'est sans doute pas vrai. Des résultats de ce genre, constamment utilisés en géométrie algébrique, analytique on différentielle, semblent être en dehors des idées courantes en analyse; il est probable que l'isomorphisme $\mathscr{D}'(V; G_V) \cong \mathscr{C}^\infty(V; G_V) \otimes_{\mathscr{C}^\infty(V)} \mathscr{D}'(V)$ n'apporte pas grand chose aux analystes pour la connaissance de $\mathscr{D}'(V; G_V)$. Mais $\mathscr{D}'(V)$ est un dual, et l'espace $\mathscr{SM}(A)$ des semi-martingales, de la Section 2, ne l'est pas; la manipulation de l'espace $\mathscr{SM}(A)$ des différentielles sur A de semi-martingales continues formelles n'est pas encore passée dans l'usage en probabilités, encore moins celle de $\mathscr{SM}(A; G_A)$, où '$dX \in \mathscr{SM}(A; G_A)$' représente l'idée intuitive $dX_t \in G_t$, fibre au temps t. D'où l'intérêt de la Proposition (1.3) ici. Le livre de R. Godement [1] pourra être une bonne référence pour tout ce qui concernera les faisceaux.

1.1. Morphismes de Modules

Soient $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$, où G_V^*, dit fibré dual, est le $\mathscr{A}$-fibré évident de fibre G_v^* en $v \in V$, et $T \in \mathscr{N}(V; G_V)$. On fabrique avec elles un produit scalaire $\psi^* T \in \mathscr{N}(V)$. Soit en effet $G_U \to U \times G_.$ une trivialisation de G_U; $\psi_U^* \in \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.^*$, $T_U \in \mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G$; alors $\psi_U^* T_U$ est évident: si $(g_k)_{k=1,2,\ldots,d}$ est une base de $G_.$, $(g^{*k})_{k=1,2,\ldots,d}$ la base duale de $G_.^*$, ψ_U^* et T_U ont des écritures uniques $\psi_U^* = \sum_k \psi_k g^{*k}$, $\psi_k \in \mathscr{A}(U)$, $T_U = \sum_k T^k g_k$, $T^k \in \mathscr{N}(U)$, et $\psi^* T = \sum_k \psi_k T^k \in \mathscr{N}(U)$; c'est indépendant de la base, et, pour un même ouvert U de trivialisation de G_U, indépendant de la trivialisation. Alors les $(\psi^* T)_U$ définies pour tous les ouverts U de trivialisation de G sont cohérents, donc, $\mathscr{N}$ étant un faisceau, elles défissent un même élément $\psi^* T$ de $\mathscr{N}(V)$; $(\psi^*, T) \to \psi^* T$ est $\mathscr{A}(V)$-bilinéaire. Il en résulte donc que $T \in \mathscr{N}(V; G_V)$ définit un élément u_T de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathscr{N}(V))$, c. à d. une application $\mathscr{A}(V)$-linéaire u_T de $\mathscr{A}(V; G_V^*)$ dans $\mathscr{N}(V)$. Et enfin $T \to u_T$ est une application $\mathscr{A}$-linéaire de $\mathscr{N}(V; G_V)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathscr{N}(V))$.

Proposition (1.1). *Supposons V $\mathscr{A}$-normal (i.e. si F est un ensemble fermé de V, U un voisinage de F, il existe une fonction de $\mathscr{A}(V)$, égale à 1 sur F, à support dans U). Alors l'application $T \to u_T$ ci-dessus est bijective, et c'est un isomorphisme de $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-modules à gauche:* $\mathscr{N}(V; G_V) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathscr{N}(V))$.

Démonstration. (1). Montrons d'abord l'unicité, c. à d. que, si $T \in \mathscr{N}(V; G_V)$ est telle que, pour tout $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$, $\psi^* T = 0$, alors $T = 0$. Nous allons montrer plus; soit U un ouvert de trivialisation de G_U; si $T \in \mathscr{N}(U; G_U)$ est telle que pour toute $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$, $\psi^* T = 0$ sur U, alors $T = 0$. Cela entraînera bien le résultat; si en effet $T \in \mathscr{N}(V; G_V)$, et si, pour toute $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$, $\psi^* T = 0$ sur V, donc sur tout U de trivialisation, T sera nulle sur tous ces U, donc sur V. Reprenons les notations précédant l'énoncé du théorème: (g_k) et (g^{*k}) sont des bases duales de $G_.$, $G_.^*$, $T = \sum_k T^k g_k$ sur U; si $\beta \in \mathscr{A}(V)$ *a son support F dans U*, βg^{*k} prolongée par 0 sur U^c définit une fonction sur V, qui est dans $\mathscr{A}(U; G_U^*)$, et dans $\mathscr{A}(F^c, G_{F^c}^*)$ (elle y est nulle); donc dans $\mathscr{A}(V; G_V^*)$, donc $\beta g^{*k} T = \beta T^k = 0$ sur U. Soit U' un ouvert de V, $\overline{U'} \subset U$; par la $\mathscr{A}$-normalité, il existe $\beta \in \mathscr{A}(V)$, à support dans U, égale à 1 sur U': donc $T^k = 0$ sur U', et $T = 0$ sur U'. Mais, V étant normale, les U' d'adhérence dans U ont pour réunion U (tout point a un système fondamental de voisinages fermés), donc $T = 0$ dans U.

(2). Montrons la surjectivité; soit $u : \mathscr{A}(V; G_V^*) \to \mathcal{N}(V)$, nous devons montrer qu'il existe $T \in \mathcal{N}(V; G_V)$ telle que $u(\psi^*) = \psi^* T$. Reprenons les notations qui précèdent pour U ouvert de trivialisation de G_U. Soient $\beta \in \mathscr{A}(V)$, égale à 1 sur U', à support dans U, et soit $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$. Dans U, $\psi^* = \sum_k \psi_k g^{*k}$; posons $u(\beta g^{*k}) = T^k_{(U')} \in \mathcal{N}(V)$, alors, dans U', $u(\psi^*) = u(\beta^2 \psi^*) = \sum_k u(\beta^2 \psi_k g^{*k}) = \sum_k (\beta \psi_k) \quad u(\beta g^{*k}) = \sum_k \beta \psi_k T^k = \sum_k \psi_k T^k_{(U')} = \psi^* T_{(U')}$, si $T_{(U')} = \sum_k T^k_{(U')} g_k$ dans U. Donc $T_{(U')} \in \mathcal{N}(U; G_U)$, et $u(\psi^*) = \psi^* T_{(U')}$ sur U'; il résulte de (1) qu'une telle $T_{(U')}$ est unique. Si donc U'' a les mêmes propriétés que U', $T_{(U')} = T_{(U'')}$ sur $U' \cap U''$; donc, la réunion de ces U' étant U, il existe $T_U \in \mathcal{N}(U; G_U)$ unique telle que, $\forall \psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V)$, $u(\psi^*) = \psi^* T$ sur tout U' d'adhérence dans U, donc dans U. Si alors T est l'unique élément de $\mathcal{N}(V; G_V)$ tel que $T = T_U$ sur U, pour tout ouvert U de trivialisation de G_U, $u(\psi^*) = \psi^* T$ sur tous ces U, donc sur V.

(3). Nous avons vu que $\mathscr{A}(V; G_V)$ est un $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-module à gauche. Alors $\mathscr{A}(V; G_V^*)$ est un $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-module à droite, par la multiplication transposée: si $\psi^* \in \mathscr{A}(V; G_V^*)$, $\alpha \in \mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$, $\psi^* \alpha = \alpha^{\mathrm{T}} \psi^*$; et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathcal{N}(V))$ redevient un $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-module à gauche par $u \to \alpha u$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathcal{N}(V))$, où $\alpha u(\psi^*) = u(\psi^* \alpha)$. Alors $(\alpha u_T)(\psi^*) = u_T(\psi^* \alpha) = (\psi^* \alpha) T = \psi^*(\alpha T) = u_{\alpha T}(\psi^*)$, comme des cartes le montrent, d'où le résultat: $T \to u_T$ est $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-linéaire. □

Corollaire (1.2). *Soit V $\mathscr{A}$-normal; l'homomorphisme naturel de $\mathscr{A}(V)$-modules: $\mathscr{A}(V; G_V^*) \to (\mathscr{A}(V; G_V))^*$ ($\mathscr{A}(V)$-dual de $\mathscr{A}(V; G_V)$) est un isomorphisme: $(\mathscr{A}(V; G_V))^* = \mathscr{A}(V; G_V^*)$.*

Démonstration. Un élément ψ^* de $\mathscr{A}(V; G_V^*)$ définit évidemment une forme $\mathscr{A}(V)$-linéaire u_{ψ^*} sur $\mathscr{A}(V; G_V)$ par la multiplication ponctuelle $\varphi \to u_{\psi^*}(\varphi) = \psi^* \varphi$, $(\psi^* \varphi)(v) = (\psi^*(v) \mid \varphi(v))_{G_v^*, G_v}$; il s'agit de voir que $\psi^* \to u_{\psi^*}$ est bijective.

Il suffit d'appliquer la Proposition (1.1) avec $\mathcal{N} = \mathscr{A}$ lui-même, en échangeant les rôles de G et G^*. □

1.2. *Produits Tensoriels de Modules*

Soient G_V, H_V, deux fibrés sur V; on construit immédiatement un fibré $G_V \otimes H_V$, dont la fibre en $v \in V$ est $G_v \otimes_{\mathbf{R}} H_v$. Il existe une application $\mathscr{A}(V)$ bilinéaire évidente de $(\mathscr{A}(V; G_V) \times \mathscr{A}(V; H_V))$ dans $\mathscr{A}(V; G_V \otimes H_V)$, par $(\varphi, \psi) \to \varphi \otimes \psi$, $(\varphi \otimes \psi)(v) = \varphi(v) \otimes \psi(v) \in$

$G_v \otimes_{\mathbf{R}} H_v$; d'où une application $\mathscr{A}(V)$-linéaire de $\mathscr{A}(V; G_V) \otimes_{\mathscr{A}(V)} \mathscr{A}(V; H_V)$ dans $\mathscr{A}(V; G_V \otimes H_V)$. Elle n'est pas en générale bijective; des $(\mathscr{A}(U; G_U \otimes H_U))_{U \in \mathfrak{U}}$ forment en effet un faisceau, alors qu'il n'en est tristement pas de même en général des produits tensoriels, $(\mathscr{A}(U; G_U) \otimes_{\mathscr{A}(U)} \mathscr{A}(U; H_U))_{U \in \mathfrak{U}}$, qui ne forment qu'un préfaisceau. De même, la multiplication $(\varphi, T) \to \varphi T$ définit une application $\mathscr{A}(V)$-bilinéaire de $\mathscr{A}(V; G_V) \times \mathscr{N}(V)$ dans $\mathscr{N}(V; G_V)$, donc une application $\mathscr{A}(V)$-linéaire de $\mathscr{A}(V; G_V) \otimes_{\mathscr{A}(V)} \mathscr{N}(V)$ dans $\mathscr{N}(V; G_V)$, $\varphi \otimes T \to \varphi T$; elle est même $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-linéaire, car, si $\alpha \in \mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$, $\alpha(\varphi T) = (\alpha\varphi)T$. Mais elle n'est pas en général bijective, puisque $(\mathscr{N}(U; G_U))_{U \in \mathfrak{U}}$ est un faisceau, alors qu'en général $(\mathscr{A}(U; G_U) \otimes_{\mathscr{A}(U)} \mathscr{N}(U))_{U \in \mathfrak{U}}$ n'est qu'un préfaisceau. Il faudra des hypothèses supplémentaires.

1.2.1. Modules Projectifs

Un A-module M, A commutatif, est dit *projectif de type fini* s'il est sous-module facteur direct d'un module libre de dimension finie. Nous dirons qu'un $\mathscr{A}$-fibre G_V sur V est *projectif* s'il est facteur direct d'un fibré trivialisable: il existe des fibrés K_V, E_V, tells que $G_V \oplus K_V$ (de fibre $G_v \oplus K_v$ en tout point v de $V) = E_V \cong V \times E_.$. Alors $\mathscr{A}(V; G_V) \oplus \mathscr{A}(V; K_V) = \mathscr{A}(V; E_V) \cong \mathscr{A}(V) \otimes_{\mathbf{R}} E_.$, $\mathscr{A}(V)$-module libre de dimension finie $\dim E_.$; donc, si G_V est projectif, $\mathscr{A}(V; G_V)$ est un $\mathscr{A}(V)$-module projectif de type fini. Par contre, $\mathscr{N}(V)$ n'est pas en général projectif ni de type fini; si V est une variété $\mathscr{C}^\infty$, $\mathscr{N} = \mathscr{D}'$, $\mathscr{D}'(V)$ n'est sûrement pas de type fini sur l'algèbre $\mathscr{C}^\infty(V)$, et n'est très vraisemblablement pas projectif.

Notons en passant ce qu'est un sous-$\mathscr{A}$-fibré d'un $\mathscr{A}$-fibré vectoriel G_V, de fibre-type $G_.$ de dimension d. Un sous-fibré H_V de G_V, de dimension d', est dit *sous $\mathscr{A}$-fibré*, s'il vérifie l'une des relations équivalentes suivantes:

(1). Tout $v \in V$ admet un voisinage U dans V, sur lequel il existe d'' $\mathscr{A}$-sections de G_U, s_i, $i = 1, 2, \ldots, d''$, telles que, $\forall v' \in U$, les $s_i(v')$ engendrent $H_{v'}$ $(d'' \geqslant d')$.

(1bis). Même définition, mais $d'' = d'$, et les $s_i(v')$ forment une base de $H_{v'}$.

(2). Il existe un atlas de $\mathscr{A}$-trivialisations simultanées, c. à d. de $\mathscr{A}$-trivialisations, $G_{U_i} \to U_i \times G_.$, où H_{U_i} vient sur $U_i \times H_.$.

Alors bien évidemment un sous-$\mathscr{A}$-fibré a une structure naturelle de $\mathscr{A}$-fibré (définition (2)). Inversement, si G_V, H_V, sont deux $\mathscr{A}$-fibrés, $H_V \subset G_V$, et si l'injection $H_V \to G_V$ est une $\mathscr{A}$-section de $\mathscr{L}(H_V; G_V)$, où

$\mathscr{L}(H_V; G_V)$ est le fibré évident de fibre $\mathscr{L}(H_v; G_v)$ en $v \in V$, alors H_V est sous-$\mathscr{A}$-fibré de G_V (définition (1bis)). Il est inutile de savoir cela pour définir une somme directe $G_V \oplus K_V = E_V$, mais pas inutile de savoir que G_V et K_V sont alors des sous-fibrés de E_V!

Si $H_V^\perp$ est l'orthogonal de H_V dans G_V (de fibre $H_v^\perp$ en $v \in V$), H_V est sous-$\mathscr{A}$-fibré de G_V ssi $H_V^\perp$ est sous-$\mathscr{A}$-fibré de G_V^* (définition (2)). On a donc de nouvelles définitions:

(3). Tout v de V admet un voisinage U, sur lequel il existe d''' $\mathscr{A}$-sections de G_U^*, s_i^*, $i = 1, 2, \ldots, d'''$, telles que $H_V = \bigcap_{i=1}^{d'''} \{s_i^* = 0\}$.

(3bis). Même définition avec $d''' = d - d'$, les $s_i^*(v)$ étant indépendantes en tout $v \in U$.

Si H_V est un sous-$\mathscr{A}$-fibré de G_V, les morphismes $\mathscr{A}(V; H_V) \to \mathscr{A}(V; G_V)$, $\mathscr{N}(V; H_v) \to \mathscr{N}(V; G_V)$ sont injectifs, et font du premier module un sous-module du deuxième; c'est évident pour $\mathscr{A}$, mais aussi pour $\mathscr{N}$, car, si $G_U \to U \times G_.$, $H_U \to U \times H_.$, est une trivialisation simultanée, (définition (2)), $\mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} H_.$ est un sous-module de $\mathscr{N}(U) \otimes_{\mathbf{R}} G_.$, et pour U quelconque ou V cela résulte de la propriété de faisceau. Si $\mathscr{A}$ est le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^m$ sur une variété V de classe $\mathscr{C}^m$, on sait ce qu'est une application $\mathscr{C}^m$ de V dans une grassmannienne; il existe alors encore une définition équivalente aux précédentes:

(4). L'application $v \to H_v$ de V dans l'espace fibré $Gr\, G_V$ des grassmanniennes, $Gr\, G_v$ = grassmannienne de G_v (fibré sur V à fibres non vectorielles)[1], est une section $\mathscr{C}^m$ de $Gr\, G_V$ sur V.

Proposition (1.3). *Soient G_V, H_V, des fibrés projectifs sur V (facteurs directs de fibrés trivialisables). Alors les applications naturelles*

$$\mathscr{A}(V; G_V) \otimes_{\mathscr{A}(V)} \mathscr{A}(V; H_V) \to \mathscr{A}(V; G_V \otimes H_V)$$

$$\mathscr{A}(V; G_V) \otimes_{\mathscr{A}(V)} \mathscr{N}(V) \to \mathscr{N}(V; G_V)$$

sont bijectives (le dernier est un isomorphisme de $\mathscr{A}(V; \mathscr{L}(G_V))$-modules à gauche).

Démonstration. Soient d'abord G_V, H_V, trivialisables, $\cong V \times G_.$, $V \times H_.$. Alors tout est évident, car

[1] Ces propriétés ne sont pas difficiles à démontrer, encore faut-il le faire. On les trouvera plus ou moins dans [6, démonstr. prop. (6.4)], dans [7, (2.8), (2.9)], dans [8, (3.17), (4.22), (4.23) à (4.23 quinto)]; et sans doute dans tous les ouvrages de géométrie traitant de la grassmannienne.

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(V; G_V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{A}(V; H_V) = (\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathbf{R}} G_.)\otimes_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathbf{R}} H_.)\\ &= (\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{A}(V))\otimes_{\mathbf{R}} (G_.\otimes_{\mathbf{R}} H_.) = \mathscr{A}(V)\otimes_{\mathbf{R}} (G_.\otimes_{\mathbf{R}} H_.)\\ &= \mathscr{A}(V; G_V\otimes H_V),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(V; G_V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{N}(V) = (\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathbf{R}} G_.)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{N}(V)\\ &= (\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{N}(V))\otimes_{\mathbf{R}} G_. = \mathscr{N}(V)\otimes_{\mathbf{R}} G_. = \mathscr{N}(V; G_V).\end{aligned}$$

Si maintenant les fibrés sont seulement facteurs directs de fibrés triviaux, $G_V\oplus K_V = E_V \cong V\times E_.$, $H_V\oplus L_V = F_V \cong V\times F_.$, alors les deux membres $\mathscr{A}(V; E_V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{A}(V; F_V)$, $\mathscr{A}(V; E_V\otimes E_V)$, sont sommes directes de 4 espaces, le morphisme est somme directe de 4 morphismes, il ne peut être bijectif que si les 4 le sont; de même, $\mathscr{A}(V; E_V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{N}(V)$ et $\mathscr{N}(V; E_V)$ sont sommes directes de 2 espaces, le morphisme est somme directe de 2 morphismes, il ne peut être bijectif que si les 2 le sont. □

Remarque (1.4). Si G_V est projectif, le Proposition (1.1) et la Corollaire (1.2) sont vraies sans supposer V $\mathscr{A}$-normale. En effet, si $G_V \cong V\times G_.$ est trivial:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G^*); \mathscr{N}(V)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V)\otimes_{\mathbf{R}} G^*_.; \mathscr{N}(V))\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(G^*_.; \mathscr{N}(V)) = \mathscr{N}(V)\otimes_{\mathbf{R}} G_. = \mathscr{N}(V; G_V).\end{aligned}$$

Si G est seulement facteur direct d'un fibré trivial, on refera le même raisonnement de somme directe de 2 applications que pour la Proposition (1.3).

Remarque (1.5). On a donc, si l'on veut, deux nouvelles définitions de $\mathscr{N}(V; G_V)$ quand G_V est projectif:

$$\mathscr{N}(V; G_V) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathscr{N}(V)) = \mathscr{A}(V; G_V)\otimes_{\mathscr{A}(V)}\mathscr{N}(V).$$

Dans ce cas, tout élément de $\mathscr{N}(V; G_V)$ admet des écritures $\sum \alpha_k T_k$, $\alpha_k \in \mathscr{A}(V; G_V)$, $T_k \in \mathscr{N}(V)$ (puisqu'il s'agit d'un produit tensoriel); en outre, $\sum_k \alpha_k T_k = 0$ ssi l'élément $\sum_k \alpha_k \otimes T_k$ du produit tensoriel est nul[1].

Remarque (1.6). La Proposition (1.3) montre donc que, si G_V et H_V sont projectifs, $(\mathscr{A}(U; G_U) \otimes_{\mathscr{A}(U)} \mathscr{A}(U; H_U))_{U \in \mathscr{U}}$ et $(\mathscr{A}(U; G_U) \otimes_{\mathscr{A}(U)} \mathscr{N}(U))_{U \in \mathscr{U}}$ sont des faisceaux.

Remarque (1.7). Il est donc important de savoir quand G_V est facteur direct d'un fibré trivial. Il est connu que c'est vrai, par exemple, pour V $\mathscr{A}$-normale:

(a). si V est compacte,

(b). si G_V est une variété topologique.

Dans chacun de ces cas, en effet, on prouve qu'il existe un $\mathscr{A}$-atlas fini de G_V (c'est évident dans le cas (a), c'est moins facile dans le cas (b))[2], soit $G_{U_\iota} \cong U_\iota \times G_.$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Au-dessus de U_ι, il y a donc un nombre fini $d = \dim G_.$ de sections qui, en chaque point $v \in V$, engendrent G_v, soit $(s_{\iota,k})_{k=1}^d$. Soit $(\alpha_\iota)_{\iota=1}^m$ une $\mathscr{A}$-partition de l'unité subordonnée (V est $\mathscr{A}$-normale!). Alors $\alpha_\iota s_{\iota,k} \in \mathscr{A}(V; G_V)$ est une section globale; comme $\sum_\iota \alpha_\iota = 1$, en tout point $v \in V$ l'une des α_ι n'est pas nulle, et les $\alpha_\iota(v) s_{\iota,k}(v)$, $k = 1, 2, \ldots, d$, engendrent G_v.

Alors $(v, (x_{\iota,k})_{\iota,k}) \to (v, \sum_{\iota,k} \alpha_\iota(v) s_{\iota,k}(v) x_{\iota,k})$ est un morphisme de $\mathscr{A}$-fibrés du fibré trivial $V \times \mathbb{R}^{md}$ sur G_V, donc G_V est quotient d'un fibré trivial; si, en chaque $v \in V$, on appelle N_v le noyau de cette application, N_V est un sous-fibré de $V \times \mathbb{R}^{md}$; $N_v = \{(x_{\iota,k})_{\iota,k} \mid \sum_{\iota,k} \alpha_j(v) s_{\iota,k}(v) x_{\iota,k} = 0\}$; d'après la définition (3) de la Subsection 1.2.1, N_V est un sous-$\mathscr{A}$-fibré de $V \times \mathbb{R}^{md}$. Si P_V est le fibré dont la fibre P_v en $v \in V$ est l'orthogonal de N_v

[1] Ces écritures $\sum_k \alpha_k T_k$ sont ce que j'ai appelé dans [8] des représentations tangentielles (voir par exemple (3.1), (3.2), (3.2bis) de [8]). J'y attachais alors une grade importance. En effet, ma seule définition de $\mathscr{N}(V; G_V)$ alors était duale, par $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(V)}(\mathscr{A}(V; G_V^*); \mathscr{N}(V))$, dans le cas probabiliste qui sera traité ici à la Section 2, avec $V = A$, G_A, $\mathscr{N}(A) = \mathscr{SM}(A)$. Les représentations tangentielles étaient ce qui rattachait à G_V lui-même, au lieu de G_V^*, et elles interviennent dans la façon d'écrire une équation différentielle stochastique. Ici tout est fait à partir de G_V, ces représentations sont exactement la Proposition (1.3), $\mathscr{N}(V; G_V) = \mathscr{A}(V; G_V) \otimes_{\mathscr{A}(V)} \mathscr{N}(V)$.

[2] Si V est une variété topologique de dimension N, tout recouvrement ouvert admet un recouvrement plus fin pour lequel tout point est recouvert au plus $N+1$ fois. On en déduit [2, Chap. III, Th. (2.6)], qu'il existe un autre atlas plus fin $(W_j)_{j \in J}$ et une partition $J = \bigcup_{k=1}^{N+1} J_k$ de J, tels que tous les W_j pour lesquels j est dans un même J_k soient deux à deux disjoints, de sorte que $\bigcup_{j \in J_k} W_j$ est encore une carte, et donc $(\bigcup_{j \in J_k} W_j)_{k=1}^{N+1}$ est un atlas fini. C'est une propriété purement topologique, où $\mathscr{A}$ n'intervient pas. Au lieu d'une variété de dimension N, on peut prendre un CW-complexe de dimension N.

dans $\mathbb{R}^{md}$ pour sa structure euclidienne canonique, P_V est un sous-$\mathscr{A}$-fibré de $V \times \mathbb{R}^{md}$ (P_V est le transporté de l'orthogonal $P_V^{\perp}$ par l'isomorphisme $(\mathbb{R}^{md})^* \to \mathbb{R}^{md}$), $V \times \mathbb{R}^{md} = N_V \oplus G_V$, donc G_V est sous-$\mathscr{A}$-fibré facteur direct d'un fibré trivial.

Par des méthodes complètement différentes, en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, en prenant pour $\mathscr{A}$ le faisceau des fonctions holomorphes, on peut montrer que, si G_V est de Stein, il est sous-$\mathscr{A}$-fibré facteur direct d'un fibré trivialisable[1].

1.3. Fibrés Boréliens

Voici maintenant une situation un peu différente, qui va nous servir à la Section 2. V ne sera pas un espace topologique, mais un ensemble muni d'une tribu, *Bor*, appelée borélienne; $\mathscr{A}(V)$ sera l'algèbre $Bor(V)$ des fonctions réelles boréliennes sur V. Tous les ouverts U, U', U_i, des numéros précédents seront remplacés par des parties boréliennes de V. Mais la propriété de faisceau exigera toujours des réunions dénombrables: si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite* de parties boréliennes, si f est une fonction réelle sur $U = \bigcup_n U_n$, dont la restriction à chaque U_n est borélienne, elle est borélienne sur U. Un fibré borélien G_V, de fibre-type $G_.$, sera défini de la même manière, un morphisme de transition sur U étant $(v, g) \to (v, \alpha(v)g)$, α borélienne à valeurs dans $\mathscr{L}(G_.)$; *mais on exigera toujours que tout atlas ait un sous-atlas dénombrable.* On en déduira des espaces $\mathscr{A}(V; G_V)$; une section de $G(V)$ sera borélienne si elle l'est sur chaque carte. Ensuite $\mathscr{N}$ sera un 'faisceau' de $\mathscr{A}$-modules, $(\mathscr{N}(U))_{U \in Bor}$, mais *n'ayant la propriété de faisceau que pour les réunions dénombrables*: si $(T_i)_{i \in I}$ est une famille, $T_i \in \mathscr{N}(U_i)$, cohérente ($T_i = T_j$ sur $U_i \cap U_j$), $\bigcup_{i \in I} U_i = U$, *et s'il existe un* $J \subset I$ *dénombrable* tel que $\bigcup_{i \in J} U_i = U$, il existe une $T \in \mathscr{N}(U)$ unique qui induise T_i sur

[1] Si G_V est un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein, donc lui-même de Stein, dont la base est de dimension N et la fibre de dimension d, il est de dimension $N + d$, donc plongeable dans $\mathbb{C}^{2(N+d)+1}$. Il n'est pas plongé comme fibré vectoriel, mais l'ensemble des plans tangents aux fibres le long de la base (identifiée à la section nulle) définit un fibré vectoriel isomorphe, dont toutes les fibres sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{2(N+d)+1}$; G_V est donc sous-fibré vectoriel holomorphe du fibré trivial $V \times \mathbb{C}^{2(N+d)+1}$. Ensuite tout sous-fibré vectoriel d'un fibré vectoriel sur cette base est supplémenté, donc G_V est facteur direct de $V \times \mathbb{C}^{2(N+d)+1}$.

chaque U_i. On en déduira $(\mathcal{N}(U; G_U))_{U\in Bor}$, qui se définit sur les cartes, et ensuite comme faisceau pour les réunions dénombrables.

Mais il existe ici un fait qui va tout faciliter: G_V *est toujours trivialisable, globalement, et peut donc être défini par une seule carte,* $G_V \to V \times G_{.}$. En effet, soit $(G_{U_n} \to U_n \times G_{.})_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas dénombrable; alors U_0, $U_1 \setminus U_0, \ldots, U_n \setminus U_0 \setminus U_1 \ldots \setminus U_{n-1}$ sont des boréliens disjoints au-dessus desquels G_V est trivialisable, donc il l'est aussi sur V, en définissant $G_V \to V \times G_{.}$ par $G_{U_n\setminus U_0\setminus\ldots\setminus U_{n-1}} \to (U_n \setminus U_0 \setminus \ldots \setminus U_{n-1}) \times G_{.}$ induit par $G_{U_n} \to U_n \times G_{.}$. *Donc les Propositions* (1.1), (1.3) *et le Corollaire* (1.2), *sont évidents.* Comme la Section 2 sera le cas borélien traité ici, on peut se demander pourquoi nous avons mis la Section 1. C'est parce que l'analyse existe aussi, pas seulement les probabilités, et que la Section 3, probabiliste, relatif aux fibrés de Stratonovitch, reviendra à la situation de la Section 1. D'autre part, G_V est trivialisable, mais ses trivialisations *ne sont pas 'naturelles'*, aucune ne s'impose plus qu'une autre; il est trivialisable, non trivial, et on ne doit pas se le représenter géométriquement comme trivial!

De même que dans le cas $\mathcal{A} = \mathscr{C}^m$, où G_V était un fibré $\mathscr{C}^m$, et la projection $G_V \to V$ était $\mathscr{C}^m$, ici G_V est canoniquement muni d'une tribu, que nous appellerons borélienne et pour laquelle la projection $G_V \to V$ est borélienne: pour une trivialisation $G_U \to U \times G_{.}$, c'est le produit tensoriel des tribus boréliennes de U et de $G_{.}$; et il est équivalent de dire, pour une transition entre deux cartes $G_U \to G \times U_{.}$, $G_U \to G \times U_{.}$, qu'elle est $(v, g) \to (v, \alpha(v)g)$, $\alpha \in Bor(U; \mathscr{L}(G_{.}))$, où qu'elle est de cette forme et borélienne de $U \times G_{.}$ dans lui-même; et les Bor-sections de G_U sont simplement ses sections boréliennes, pour les tribus boréliennes de U et de G_U.

Il va falloir encore généraliser légèrement, en cessant de supposer la fibre de dimension constante, mais en la supposant de dimension finie $\leqslant d < +\infty$ fixe. Alors V sera supposé réunion disjointe de boréliens V_k, $k = 0, 1, \ldots, d$, et sur V_k la fibre sera de dimension k (on aurait aussi pu le faire dans le cas topologique, les V_k étant alors des ouverts (et fermés) disjoints de V). Cela n'introduit évidemment aucune difficulté nouvelle, on peut toujours raisonner sur V en sachant simplement que les raisonnements peuvent obliger à se ramener à chaque V_k séparément; les trivialisations, $G_U \to U \times G_{k.}$ supposeront toujours U dans un V_k. Remarquons d'ailleurs qu'on peut trouver un fibré H_V tel que $G_V \oplus H_V = E_V$, trivialisable de dimension fixe d, et les modules resteront projectifs de type fini.

2. Sections-Differentielles de Semi-Martingales d'un Fibre Vectoriel sur un Ouvert ou un Optionnel A de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$

Soient $(\Omega, \mathscr{O}, \mathbb{P}, (\mathscr{T}_t)_{t\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}})$ $(\mathbb{R}_+ = [0, +\infty))$, ayant les propriétés habituelles en probabilités. Soit $A \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$; il remplacera le V de la Subsection 1.3. Il sera optionnel ou ouvert. Sa tribu fondamentale (*Bor* V de la Subsection 1.3) sera sa tribu optionnelle, intersection de A et de la tribu optionnelle de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$. Une fonction φ réelle optionnelle sur A est alors la restriction à A d'une fonction optionnelle $\bar{\varphi}$ sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$. On aura alors des fibrés optionnels G_A sur A (la tribu optionnelle de $A' \times G_.$, A' (relativement) optionnel dans A, $G_.$ espace vectoriel de dimension finie, est, par définition le produit tensoriel des tribus optionnelles de A et borélienne de $G_.$), et des espaces de sections $Opt(A; G_A)$, remplaçant les $Bor(V; G_V)$ ou $\mathscr{A}(V; G_V)$ de la Section 1; $Opt(A; G_A)$ est un $Opt(A)$-module, un $Opt(A; \mathscr{L}(G_A))$-module à gauche. Si la fibre de G_A est de dimension constante, il est trivialisable; sinon, il a un atlas fini.

Soient ξ, ξ', deux semi-martingales continues formelles; on sait ce que veut dire $\xi \overset{A}{\sim} \xi'$ si A est ouvert; s'il est optionnel, cela veut dire $1_A \cdot \xi = 1_A \cdot \xi'$; cela passe aux réunions dénombrables $A = \bigcup_n A_n$, tous ouverts ou tous optionnels. On appellera X, ou plutôt $\mathrm{d}X$, une *classe d'équivalence sur* A de semi-martingales continues formelles sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$. On abrégera en disant que $\mathrm{d}X$ est une *différentielle de semi-martingale* sur A, et on appellera $\mathscr{SM}(A)$ l'espace de ces différentielles (noté, dans [8], [7, Section 6], $Opt\,\mathscr{SM}^c(A)$). Si A est $\mathbb{P}$-négligeable, $\mathscr{SM}(A) = \{0\}$. Soit $\varphi \in Opt(A)$, restriction de $\bar{\varphi} \in Opt(\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega)$, et $\xi \in \mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A)$; à une équivalence près sur A, $\bar{\varphi}\,\mathrm{d}\xi$ est indépendante du choix de $\bar{\varphi}$, et du choix de $\xi \in \mathrm{d}X$, elle ne dépend que de φ et $\mathrm{d}X$. (voir [7, 6.8]), sa classe se notera $\varphi\,\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A)$; $\mathscr{SM}(A)$ est un $Opt(A)$-module, pour l'intégration stochastique. Si maintenant A' est un *optionnel* de A (donc pas nécessairement optionnel dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, si A ne l'est pas), on peut encore dire que deux semi-martingales continues formelles ξ, ξ', sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, sont *équivalentes sur* A', si $1_{A'}\,\mathrm{d}\xi = 1_{A'}\,\mathrm{d}\xi'$ *dans* A; une classe d'équivalence se notera $\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A')$. Si $\varphi \in Opt(A')$, $\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A')$, on a une intégrale stochastique $\varphi\,\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A')$; $\mathscr{SM}(A')$ est un $Opt(A')$-module. On pourra raisonner ainsi sur les diverses parties optionnelles A' de A (non nécessairement optionnelles dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$), comme sur les ouverts de V à la Section 1, ou les boréliens de V à la Subsection 1.3. Un

$A' \subset A$, optionnel, est $\mathrm{d}X$-*négligeable*, si $1_{A'}\,\mathrm{d}X = 0$; un A' $\mathbb{P}$-négligeable est $\mathrm{d}X$-négligeable, et alors $\mathcal{SM}(A') = 0$. Pour $\alpha \in Opt(A)$, $\alpha\,\mathrm{d}X = 0$ ssi α est $\mathrm{d}X$ pp.nulle, car $\alpha\,\mathrm{d}X = \alpha 1_{\{\alpha \neq 0\}}\,\mathrm{d}X$, et $1_{\{\alpha \neq 0\}}\,\mathrm{d}X = ((1/\alpha)1_{\{\alpha \neq 0\}})\,\alpha\,\mathrm{d}X$.

Pour G_A (appelé G_V à la Subsection 1.3), *Opt*-fibré sur A, on définira alors $\mathcal{SM}(A; G_A)$, espace des sections-différentielles de semi-martingales du fibré G_A au-dessus de A; mais il faut bien comprendre ce qu'il veut dire. Si $X \in \mathcal{SM}(A; G_.)$, $G_.$ vectoriel fixe, écrire $X_t \in G_.$ ou $\mathrm{d}X_t \in G_.$, c'est la même chose. Mais ici, pour $X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$, ce n'est pas X_t qui est dans la fibre G_t, cela n'aurait même pas de sens puisque X n'est qu'une classe, c'est, symboliquement, $\mathrm{d}X_t$ *qui est dans* G_t, dans le même sens qu'à la Section 1 on se permettait d'écrire $T(v) \in G_v$ pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(V; G_V)$; c'est faux, mais c'est un langage abusif qu'on sait contrôler; comme alors X_t est l'intégrale des X_s, $s \leq t$, qui sont dans des G_s variables, X_t (*qui n'existe même pas*) *n'est plus nulle part.* Le fait qu'il s'agisse bien de $\mathrm{d}X_t$ traduit le fait que la propriété d'$Opt(A)$-module de $\mathcal{SM}(A; G_A)$ est relative à l'intégration stochastique, $\mathrm{d}(\alpha \cdot X)$ ou $\alpha\,\mathrm{d}X$. On a des opérations évidentes: si $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$, $\alpha \in Opt(A)$, $\alpha\,\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$; si $\alpha \in Opt(A; \mathcal{L}(G_A; H_A))$, $\alpha\,\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; H_A)$; si $\alpha \in Opt(A; G_A^*)$, $\alpha\,\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A)$; etc. . . .

On a des propriétés de faisceau *pour les réunions dénombrables*: si $(\mathrm{d}X_i)_{i \in I}$ est une famille, $\mathrm{d}X_i \in \mathcal{SM}(A_i; G_{A_i})$, A_i optionnels, $\bigcup_{i \in I} A_i = A'$, s'il existe un $J \subset I$, dénombrable, tel que $\bigcup_{i \in J} A_i = A'$, et si $\mathrm{d}X_i = \mathrm{d}X_j$ sur $A_i \cap A_j$, il existe $\mathrm{d}X$ unique sur A' qui, pour tout i, induise $\mathrm{d}X_i$ sur A_i. ([7, (6.3ter)] était relatif à des A_i *ouverts* optionnels, c'est valable, avec la même démonstration, avec des optionnels A_i quelconques.) On peut mettre sur $\mathcal{SM}(A; G_A)$ une notion de convergence. Elle est 'locale' (par restriction sur des optionnels de A), donc on peut se ramener au cas trivialisé, et finalement à $\mathcal{SM}(A)$. On dira que des $X_n \in \mathcal{SM}(A)$ *convergent vers* 0, s'il existe $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semi-martingales continues formelles sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, $\xi_n \in \mathrm{d}X_n$, qui convergent vers 0 dans l'espace des semi-martingales continues formelles (c. à d., rappelons-le, s'il existe γ optionnelle >0 sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, telle que les γ soient $\mathrm{d}X_n$-intégrables et que les $\gamma\,\mathrm{d}X_n$ convergent vers 0 pour la topologie d'Emery des semi-martingales). Si alors α_n tend vers α dans $Opt(A)$, $\mathrm{d}X_n$ vers $\mathrm{d}X$ dans $\mathcal{SM}(A; G_A)$, $\alpha_n\,\mathrm{d}X_n$ tend vers $\alpha\,\mathrm{d}X$ dans $\mathcal{SM}(A; G_A)$. On se ramène en effet au cas $G_A = \mathbb{R}$. Soient alors $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\alpha}$ prolongeant α_n, α en fonctions optionnelles sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$; soit $\bar{A}$ l'ensemble des (t, ω) pour lesquels $\tilde{\alpha}_n(t, \omega)$ tends vers $\tilde{\alpha}(t, \omega)$, il est optionnel; alors $\alpha_n\,\mathrm{d}X_n -$

$\alpha \, dX \overset{A}{\sim} 1_{\bar{A}}\bar{\alpha}_n \, d\xi_n - 1_{\bar{A}}\bar{\alpha} \, d\xi$; or $1_{\bar{A}}\bar{\alpha}_n$ converge partout vers $1_{\bar{A}}\bar{\alpha}$, ξ_n vers ξ donc le 2[e] membre converge vers 0 dans $\mathcal{SM}(\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega)$, donc le 1[er] dans $\mathcal{SM}(A)$ ([7, (2.5)]).

Enonçons alors les Propositions (1.1), (1.3) et la Corollaire (1.2), dont ici la démonstration est évidente puisque $\mathcal{SM}(A; G_A)$ se ramène à $\mathcal{SM}(A) \otimes_{\mathbb{R}} G_.$:

Proposition (2.1). (1). *Le dual* $(Opt(A; G_A))^*$ *du* $Opt(A)$*-module* $Opt(A; G_A)$ *est* $Opt(A; G_A^*)$.

(2). $\mathcal{SM}(A; G_A) \cong \mathrm{Hom}_{Opt(A)}(Opt(A; G_A^*); \mathcal{SM}(A)) \cong Opt(A; G_A) \otimes_{Opt(A)} \mathcal{SM}(A)$, *isomorphismes entre* $Opt(A; \mathcal{L}(G_A))$*-modules à gauche.*

Remarque (2.2). Cela donne 2 définitions supplémentaires de $\mathcal{SM}(A; G_A)$. De la dernière il résulte que tout élément de $\mathcal{SM}(A; G_A)$ admet des écritures $\sum_k \alpha_k \, dX^k$, $\alpha_k \in Opt(A; G_A)$, $dX^k \in \mathcal{SM}(A)$, comme produits pour l'intégration stochastique, $d \sum_k (\alpha_k \cdot X^k) = \sum_k \alpha_k \, dX^k$; c'est ce que nous avons appelé dans [8] des représentations tangentielles[1]. En outre $\sum_k \alpha_k \, dX_k = 0$ ssi $\sum_k \alpha_k \otimes dX_k = 0$ dans le produit tensoriel. Si les fibres G_t ont toutes la même dimension et si on prend pour les α_k une $Opt(A)$-base de $Opt(A; G_A)$, l'écriture est unique, i.e. $\sum_k \alpha_k \, dX_k = 0$ ssi toutes les dX_k sont nulles.

2.1. Sous-Fibrés Optionnels

Les sous-fibrés optionnels H_A d'un fibré optionnel G_A se définissent comme à la Subsection 1.2.1, par des définitions légèrement modifiées:

(1). H_A est $Opt(A)$-engendré par un nombre fini de sections optionnelles de G_A;

(1bis). Sur $\{(t, \omega) \in A \mid \dim H_{t,\omega} = k\}$, H_A est engendré par k sections optionnelles indépendantes de G_A;

(2). Il existe un atlas dénombrable, ou fini, ou composé d'une seule carte, sur chaque $\{(t, \omega) \in A \mid \dim G_{t,\omega} = k, \ \dim H_{t,\omega} = l\}$, et des trivialisations simultanées sur cet atlas: $G'_A \to A' \times G_.$, où $H_{A'} \to A' \times H_.$; H_A est un sous-fibré de G_A ssi son orthogonal $H_A^\perp$ est un sous-fibré de G_A^*. D'où de nouvelles définitions analogues à (3) et (3bis).

(4). L'application $(t, \omega) \to H_{t,\omega}$ est une section optionnelle du fibré $Gr \, G_A$ des grassmanniennes $Gr \, G_{(t,\omega)}$.

[1] Voir note 1 page 699.

Ces propriétés de H_A en font un fibré optionnel, et l'injection $H_A \to G_A$ est optionnelle; H_A est un sous-ensemble optionnel de G_A (d'après la définition (3)). Inversement, si H_A, G_A sont fibrés optionnels, $H_A \subset G_A$, et si l'injection est optionnelle, H_A est sous-fibré optionnel; mais le fait que H_A soit sous-ensemble optionnel de G_A ne me paraît pas suffire pour qu'il soit sous-fibré optionnel.

Mais il y a en plus des propriétés toutes nouvelles ici, valables aussi pour la situation de la Subsection 1.3. La somme $H_A + K_A$ de deux sous-fibrés optionnels de G_A est sous-fibrée optionnelle, par la définition (1); donc aussi l'intersection $H_A \cap K_A = (H_A^\perp + K_A^\perp)^\perp$. (Cela n'est vrai pour les cas antérieurs à la Subsection 1.3 que si l'on sait que les 'fibres' de $H_A + K_A$, $H_A \cap K_A$ sont de dimension constante.) Si H_A est sous-fibré optionnel de G_A, il admet un supplémentaire optionnel K_A, $H_A \oplus K_A = G_A$. Les propriétés de somme et d'intersection sont encore vraies pour une somme $+_{n\in\mathbb{N}} H_{A_n}$ et une intersection $\bigcap_n H_{A_n}$ dénombrables, car A est réunion finie de parties optionnelles, sur chacune desquelles la réunion ou l'intersection est finie. Enfin, si $L_A \in Opt(A; \mathscr{L}(G_A; H_A))$, $\operatorname{Ker} L_A$ et $\operatorname{Im} L_A$ sont des sous-fibrés optionnels de G_A et H_A respectivement (ce n'est vrai à la Section 1 pour les cas antérieurs à la Subsection 1.3 que si les dimensions des fibres de $\operatorname{Ker} L_A$ et $\operatorname{Im} L_A$ sont constantes)[1].

Si H_A est un sous-fibré optionnel de G_A, $\mathscr{SM}(A; H_A)$ est un sous $Opt(A; \mathscr{L}(G_A; H_A))$, $\operatorname{Ker} L_A$ et $\operatorname{Im} L_A$ sont des sous-fibrés optionnels est injective, voir Subsection 1.2.1, en outre, si K_A est un supplémentaire optionnel de H_A dans G_A, $\mathscr{SM}(A; G_A) = \mathscr{SM}(A; H_A) \oplus \mathscr{SM}(A; K_A)$ (évident par trivialisation). Si $\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A; G_A)$, on dit qu'elle est tangente à H_A, ou provient de H_A, ou que $\mathrm{d}X_t \in H_t$, si elle est dans $\mathscr{SM}(A; H_A)$, i.e. si sa composante (dans la somme directe) sur $\mathscr{SM}(A; K_A)$ est nulle.

Proposition (2.3). *Soit* $\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A; G_A)$. *Il existe un sous-fibré tangent essentiellement minimum d'une semi-martingale* $\mathrm{d}X \in \mathscr{SM}(A; G_A)$; *c'est un sous-fibré* $\tau_A(X) = \tau_A(\mathrm{d}X)$ *optionnel de* G_A, *auquel* $\mathrm{d}X$ *est tangente, et tel que, si* $\mathrm{d}X$ *est tangente à* $H_A \subset G_A$, H_A *contienne* $\tau_A(X)$ $\mathrm{d}X$*-ps. Il est évidemment unique, à un ensemble optionnel* $\mathrm{d}X$*-négligeable de* A *près. Le fibré* $\tau_A(\mathrm{d}X)$ *(défini seulement* $\mathrm{d}X$*-pp.) s'appelle le fibré tangent à* X *ou à* $\mathrm{d}X$.

[1] Voir note 1 page 697.

Démonstration[1]. (1). Si $\mathrm{d}X$ est tangente à H_A et K_A, elle l'est aussi à $H_A \cap K_A$. En effet, on peut écrire (évident par trivialisations simultanées) $H_A = (H_A \cap K_A) \oplus L_A$, $K_A = (H_A \cap K_A) \oplus M_A$, et on a des sommes directes correspondantes pour tous les anneaux et modules considérés; en outre, $H_A + K_A = (H_A \cap K_A) \oplus L_A \oplus M_A$. Alors $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; H_A + K_A)$ a sa composante sur $\mathcal{SM}(A; M_A)$ nulle puisqu'elle est tangente à $H_A = (H_A \cap K_A) \oplus L_A$, mais aussi sa composante sur $\mathcal{SM}(A; L_A)$ nulle puisqu'elle est tangente à $K_A = (H_A \cap K_A) \oplus M_A$, donc $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; H_A \cap K_A)$.

(2). Le même résultat est valable pour une intersection dénombrable $\bigcap_n K_{A_n} = K_A$. Il existe en effet une suite de parties optionnelles A_n de réunion A, sur chacune desquelles c'est une intersection finie; alors sur chaque A_n, $\mathrm{d}X$ est tangente à K_A, donc aussi sur A (posons $G_A = K_A \oplus L_A$; si $\mathrm{d}X_{L_A}$ est la composante de $\mathrm{d}X$ sur L_A, chaque A_n est $\mathrm{d}X_{L_A}$-négligeable, donc aussi A, donc $\mathrm{d}X_{L_A} = 0$).

(3). Il existe une classe d'équivalence ν° de mesures finies $\geqslant 0$ sur A, muni de sa tribu optionnelle, qui domine $\mathrm{d}X$: toute partie optionnelle dans A, ν°-négligeable, est $\mathrm{d}X$-négligeable. En effet, $\mathrm{d}X = \sum_k \alpha_k \, \mathrm{d}Z^k$, $\alpha_k \in Opt(A; G_A)$, $\mathrm{d}Z^k \in \mathcal{SM}(A)$ réelle, et c'est connu pour des semi-martingales formelles réelles. La borne inférieure ν de ces classes $\geqslant 0$ domine encore $\mathrm{d}X$; elle est alors équivalente à $\mathrm{d}X$, les parties de A ν-négligeables ou $\mathrm{d}X$-négligeables sont les mêmes. On appellera alors $\tau_A(X)$ une borne inférieure ν-essentielle des $H_A \subset G_A$ auxquelles $\mathrm{d}X$ est tangente; elle répond à la question, d'après (1) et (2), puisqu'elle est une intersection dénombrable de ces H_A. On pourrait d'ailleurs garder une ν° dominant ν, et trouver un $\tau_A^\circ(X)$ borne inférieure ν°-essentielle (voir [7, (2.8) à (2.9)]); il suffit de poser $A = A_1 + A_2$, ν° et ν équivalentes sur A_1, A_2 ν-négligeable, et de poser $\tau_A^\circ(X) = \tau_A(X)$ sur A_1, $= 0$ sur A_2. $\square$

Pour l'énoncé suivant, il est pratique de supprimer certains des indices A en bas:

Proposition (2.4). *Soient G_A, H_A des fibrés optionnels sur A, $L : G_A \to H_A$ un morphisme optionnel, $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$; soient $\tau(\mathrm{d}X)$ et $\tau(L\,\mathrm{d}X)$ les fibrés tangents à $\mathrm{d}X$ et $L\,\mathrm{d}X$.*

(1). $$\tau(L\,\mathrm{d}X) = L\tau(\mathrm{d}X)\,, \quad L\,\mathrm{d}X\text{-}ps.\,.$$

[1] [7, (2.8) à (2.9)]. La démonstration donnée ici est considérablement plus simple, et plus générale.

Plus précisément, comme $\mathrm{d}X$ *domine* $L\,\mathrm{d}X$, *mais ne lui est pas équivalente*:

(1bis). $\quad \tau(L\,\mathrm{d}X)\subset L\tau(\mathrm{d}X)\,, \qquad L\,\mathrm{d}X$-*ps.*,

(1ter). $\quad \tau(L\,\mathrm{d}X)\supset L\tau(\mathrm{d}X)\,, \qquad \mathrm{d}X$-*ps.*.

(2). $L\,\mathrm{d}X=0$ *ssi* $\tau(\mathrm{d}X)\subset \mathrm{Ker}\, L$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, *ou* $L\tau(\mathrm{d}X)=0$ $\mathrm{d}X$-*ps.*

Démonstration. (1). $\mathrm{d}X$ domine $L\,\mathrm{d}X$; car, si A' optionnel est $\mathrm{d}X$-négligeable, $1_{A'}\,\mathrm{d}X=0$, donc $1_{A'}(L\,\mathrm{d}X)=L(1_{A'}\,\mathrm{d}X)=0$. Elles ne sont pas en général équivalentes, par exemple si $\mathrm{d}X\neq 0$ et $L=0$.

(2). $\mathrm{d}X\in \mathscr{SM}(A;\tau(\mathrm{d}X))$, donc $L\,\mathrm{d}X\in \mathscr{SM}(A;L\tau(\mathrm{d}X))$, $L\,\mathrm{d}X$ est tangente à $L\tau(\mathrm{d}X)$, donc $\tau(L\,\mathrm{d}X)\subset L\tau(\mathrm{d}X)$, $L\,\mathrm{d}X$-*ps.*. On ne peut pas ici remplacer par $\mathrm{d}X$-*ps.*; par exemple, si $L=0$, $L\tau(\mathrm{d}X)=0$, mais, $L\,\mathrm{d}X$ étant nul, $\tau(L\,\mathrm{d}X)$, défini seulement à un ensemble $L\,\mathrm{d}X$-négligeable près, est arbitraire. Ceci démontre (1bis).

(3). Partons de $\mathrm{d}X\in \mathscr{SM}(A;\tau(\mathrm{d}X))$, et posons $\tau(\mathrm{d}X)=(\tau(\mathrm{d}X)\cap \mathrm{Ker}\,L)\oplus\sigma$, somme directe de sous-fibrès optionnels supplémentaires. Alors $L=0$ sur le premier, mais est inversible de σ dans son image $L\sigma=L\tau(\mathrm{d}X)$; appelons L^{-1} son inverse, de $L\sigma$ dans $\tau(\mathrm{d}X)$. Alors $L^{-1}L$ vaut l'identité sur σ, 0 sur $\tau(\mathrm{d}X)\cap\mathrm{Ker}\,L$. X se décompose suivant la somme directe, $\mathrm{d}X=\mathrm{d}X_{\mathrm{Ker}\,L\cap\tau(\mathrm{d}X)}+\mathrm{d}X_\sigma$, $L\,\mathrm{d}X=L\,\mathrm{d}X_\sigma$, et $\mathrm{d}X_\sigma=L^{-1}L\,\mathrm{d}X_\sigma$. Alors

$$L\,\mathrm{d}X=0\Leftrightarrow L\,\mathrm{d}X_\sigma=0\Leftrightarrow \mathrm{d}X_\sigma=0\Leftrightarrow \mathrm{d}X \text{ est tangente à } \mathrm{Ker}\,L\cap\tau(\mathrm{d}X)\,,$$

donc, d'après la minimalité de $\tau(\mathrm{d}X)$, $\tau(\mathrm{d}X)\subset\mathrm{Ker}\,L\cap\tau(\mathrm{d}X)$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, c. à d. $\tau(\mathrm{d}X)\subset\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{d}X$-*ps.*. Ceci démontre (2).

(4). On a encore une décomposition en somme directe de deux sous-fibrés supplémentaires:

$$L\tau(\mathrm{d}X)=(L\tau(\mathrm{d}X)\cap\tau(L\,\mathrm{d}X))\oplus\rho\,.$$

Appelons π la projection sur le $2^{\text{ème}}$ facteur. On sait déjà que $L\,\mathrm{d}X$ est tangente à $L\tau(\mathrm{d}X)$, par (1bis), mais aussi à $\tau(L\,\mathrm{d}X)$ par définition, donc à leur intersection:

$$L\,\mathrm{d}X\in\mathscr{SM}(A;L\tau(\mathrm{d}X)\cap\tau(L\,\mathrm{d}X))\,.$$

Donc $\pi(L(\mathrm{d}X)) = 0$, ou $(\pi L)(\mathrm{d}X) = 0$. Par (2), cela entraîne que $\tau(\mathrm{d}X) \subset \operatorname{Ker} L$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, donc $L\tau(\mathrm{d}X) \subset \operatorname{Ker} \pi$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, ou $L\tau(\mathrm{d}X) \subset L\tau(\mathrm{d}X) \cap \tau(L\,\mathrm{d}X)$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, ou $L\tau(\mathrm{d}X) \subset \tau(L\,\mathrm{d}X)$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, ce qui est (1ter). □

Remarque (2.5). Le résultat (1ter) peut paraître étrange avec ce $\mathrm{d}X$-*ps.*, alors que $\tau(L\,\mathrm{d}X)$ n'est déterminé qu'à un ensemble $(L\,\mathrm{d}X)$-négligeable près. Cela s'explique aisément. Puisque $\mathrm{d}X$ domine $L\,\mathrm{d}X$, A est réunion disjointe $A = A_1 \cup A_2$, où $\mathrm{d}X$ et $L\,\mathrm{d}X$ sont équivalentes sur A_1, et A_2 est $(L\,\mathrm{d}X)$-négligeable. Alors $L\,\mathrm{d}X$ est nulle sur A_2, donc $\tau(\mathrm{d}X) \subset \operatorname{Ker} L$ sur A_2, $\mathrm{d}X$-*ps.*, par (2); ou $L\tau(\mathrm{d}X) = \{0\}$, $\mathrm{d}X$-*ps.* sur A_2. Sur A_2, on peut modifier arbitrairement $\tau(L\,\mathrm{d}X)$, puisque A_2 est $(L\,\mathrm{d}X)$-négligeable, mais il contiendra toujours $L\tau(\mathrm{d}X) = \{0\}$, $\mathrm{d}X$-*ps.*.

Corollaire (2.6). *En reprenant l'identification de la Proposition* (2.1), *si* $J \in \mathit{Opt}(A; G_A^*)$, $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$, $J\,\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A)$, *alors* $J\,\mathrm{d}X = 0$ *ssi* $\tau(\mathrm{d}X) \subset \operatorname{Ker} J$, $\mathrm{d}X$-*ps.*, *i.e. J est orthogonal à* $\tau(\mathrm{d}X)$, $\mathrm{d}X$-*ps.*.

C'est le résultat de [8, Prop. (2.9)], mais à l'envers; dans [8], ceci servait de définition à $\tau(\mathrm{d}X)$.

2.2. Applications aux Semi-Martingales à Valeurs dans des Variétés Différentielles de Classe $\mathscr{C}^2$

Soit un fibré borélien $\mathscr{G}_v$ sur un ensemble V muni d'une tribu, Subsection 1.3, et soit Y un processus sur $A \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, à valeurs dans V, optionnel, c. à d. mesurable pour la tribu optionnelle de A et la tribu borélienne de V. Alors Y définit un 'fibré image réciproque' (pull-back en anglais), $G_A = Y^*(\mathscr{G}_v)$. La fibre $G_{t,\omega}$ est, par définition, $G_{t,\omega} = \mathscr{G}_{Y(t,\omega)}$; et Y définit un morphisme Y° d'espaces fibrés $G_A \xrightarrow{Y^\circ} \mathscr{G}_v$, $(t, \omega, g) \to Y^\circ(t, \omega, g) = (Y(t, \omega), g)$. A l'isomorphisme de transition Φ entre deux cartes: $V' \times \mathscr{G}_{\cdot} \xrightarrow{\Phi} V' \times \mathscr{G}_{\cdot}$, défini par $(v, g) \xrightarrow{\Phi} (v, \alpha(v)g)$, α fonction borélienne à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{G}_{\cdot})$, correspondra un isomorphisme de transition $A' \times G_{\cdot} \xrightarrow{\psi} A' \times G_{\cdot}$, $A' = Y^{-1}(V')$ (A' optionnel), $G_{\cdot} = \mathscr{G}_{\cdot}$, $\Phi \circ Y^\circ = Y^\circ \circ \psi$, ψ défini par $(t, \omega, g) \xrightarrow{\psi} (t, \omega, \alpha(Y(t, \omega))g) = (t, \omega, \beta(t, \omega)g)$, où $\beta = \alpha \circ Y$ est optionnelle sur A' à valeurs dans $\mathscr{L}(G_{\cdot}) = \mathscr{L}(\mathscr{G}_{\cdot})$. On a fait l'hypothèse que $\mathscr{G}_V$ admet un atlas dénombrable, alors G_A aussi, et les cartes précédentes font de G_A un fibré vectoriel optionnel sur A. En fait, si les fibres de $\mathscr{G}_V$ sont toutes de même dimension, il est globalement trivialisable, et G_A aussi;

sinon, comme les dimensions sont bornées, $\mathscr{G}_V$ et G_A admettent un atlas fini. Il y a alors bijection entre les sections optionnelles g de G_A (g optionnelle de A dans G_A, $g(t,\omega)\in G_{t,\omega}=\mathscr{G}_{Y(t,\omega)}$), et les processus optionnels γ sur A à valeurs dans $\mathscr{G}_V$, *le long de* Y, $\gamma(t,\omega)\in\mathscr{G}_{Y(t,\omega)}$, que nous avons considérés dans [6] et [8], $g=\gamma\circ Y$, $g(t,\omega)=\gamma(Y(t,\omega))$. L'$Opt(A)$-algèbre $Opt(A;G_A)$ pourra se noter ici $Opt(A;\mathscr{G}_V;Y)$, Y indiquant qu'il s'agit de processus *le long de* Y. Apparemment la situation $(\mathscr{G}_V;Y)$ est plus compliquée que la situation G_A, mais elle est plus proce de la vérité géométrique; tout le monde se repésente l'espace tangent à V en un point v de V comme ayant pour 0 le point v, on identifie V à la section nulle d'un fibré vectoriel $\mathscr{G}_V$, et ici aussi on voit γ le long de Y plus facilement que g; mais de toute façon *la théorie générale est plus aisée* sur les fibrés optionnels G_A sur A que sur les processus optionnels à valeurs dans $\mathscr{G}_V$ le long de Y, c'est ce qui fait que les pages précédentes sont bien plus faciles que celles de [8]. Alors une différentielle de semi-martingale sur A, à valeurs dans G_A, c. à d. un élément $\mathrm{d}X$ de $\mathscr{SM}(A;G_A)$, sera aussi une différentielle de semi-martingale continue formelle sur A à valeurs dans $\mathscr{G}_V$ le long de Y, et on écrira $\mathrm{d}X\in\mathscr{SM}(A;\mathscr{G}_V;Y)$; on imagine $\mathrm{d}X_t\in\mathscr{G}_{Y_t}=G_t$, et c'est un abus de langage qu'on se permettra. La Proposition (2.1) s'écrira ici:

$$(2.1)\qquad (Opt(A;\mathscr{G}_V;Y))^*=Opt(A;\mathscr{G}_V^*;Y),$$

$$\mathscr{SM}(A;\mathscr{G}_V;Y)=Opt(A;\mathscr{G}_V;Y)\otimes_{Opt(A)}\mathscr{SM}(A)$$

$$=\mathrm{Hom}_{Opt(A)}(Opt(A;\mathscr{G}_V^*;Y);\mathscr{SM}(A)),$$

comme $Opt(A;\mathscr{L}(\mathscr{G}_V);Y)$-modules à gauche.

Dans [8], c'est $\mathrm{Hom}_{Opt(A)}(Opt(A;\mathscr{G}_V^*;Y);\ \mathscr{SM}(A))$ qui nous avait servi de définition: $\mathrm{d}X$ définit l'application $Opt(A)$-linéaire $J\to J\,\mathrm{d}X=\mathrm{d}(J\cdot X)$, de l'$Opt(A)$-module $Opt(A;\mathscr{G}_V^*;Y)$ des processus optionnels à valeurs dans $\mathscr{G}_V^*$ le long de Y, dans l'$Opt(A)$-module $\mathscr{SM}(A)$ des classes d'équivalence sur A de semi-martingales continues formelles, module pour l'intégration stochastique. J'espère qu'on verra sans peine que tout ici est plus simple et naturel que dans [8]. Ce qui s'appelle ici Y et $\mathrm{d}X$, s'appelait, dans [8], X et $\mathrm{d}u$. La notation $\mathrm{d}u$ ou u venait de ce que u était un 'opérator', $\mathrm{d}u\in\mathrm{Hom}_{Opt(A)},\ldots$, alors que les méthodes employées ici montrent qu'en fait il s'agit bien d'une différentielle $\mathrm{d}X$ de semi-martingale continue formelle, qui, au lieu d'être à valeurs dans un vectoriel $G_.$, est section d'un fibré G_A.

Nous allons maintenant donner *la signification géométrique de la for-*

mule d'Itô, ou du 'principe fondamental' de [8, (2.1)], qui dit que, si Y est une semi-martingale continue à valeurs dans une variété V de classe $\mathscr{C}^2$, $\mathrm{d}\underline{Y}_t$ est 'petit vecteur 2-tangent' à V en Y_t:

Proposition (2.7). *Si Y est une vraie semi-martingale continue sur l'ouvert A de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ à valeurs dans V, variété de classe $\mathscr{C}^2$, il existe une $\mathrm{d}X = \mathrm{d}\underline{Y} \in \mathscr{SM}(A;\, T^2(V);\, Y)$ unique, telle que, pour toute carte vectorielle $\mathscr{C}^2$ de V, $V' \to U'$, Y' image de Y, V' ouvert de V, U' ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E, donc $T^2(V') \to U' \times (E \oplus (E \odot E)) = U' \times \mathscr{E}_.$, l'expression de $\mathrm{d}X = \mathrm{d}\underline{Y}$ soit ce que nous avons défini antérieurement comme $\mathrm{d}\underline{Y}'$, soit ($A' = Y^{-1}(V')$)*

$$\mathrm{d}\underline{Y}' = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Y' \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}[Y', Y'] \end{pmatrix} \in \mathscr{SM}(A';\, E \oplus (E \odot E)) = \mathscr{SM}(A';\, \mathscr{E}_.)\,.$$

Démonstration. Notons que $T^2(V)$ aurait dû écrit $(T^2(V))_V$, il est compris comme fibré sur V; personne n'objectera! Notons aussi qu'ici Y est une *vraie* semi-martingale continue $A \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ (A ouvert)$\to V$, d'après la définition de Stricker–Meyer[1]; c'est un vrai processus, non une classe. Comme $U' \in E$, on sait qu' Y' définit alors une classe d'équivalence sur A de semi-martingales continues *formelles* (formelles ne peut pas ici être supprimé) sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, notée $\mathrm{d}Y'$. On sait aussi que la formule d'Itô reste vraie pour de telles semi-martingales continues Y', [7], en termes de classes de semi-martingales continues formelles; d'ailleurs $\mathrm{d}[Y', Y']$ n'existe qu'en terme de classe de processus à variation finie continus formels. Notons qu'on prend ici non seulement une carte de $T^2(V)$, mais de V elle-même, sur $U' \subset E$. Si, au-dessus du même ouvert V' de V, on a une autre carte, $V' \to W' \subset F$, $T^2(V') \to W' \times (F \oplus (F \odot F)) = W' \times \mathscr{F}_.$, la formule de transition est

$$u \to w = \Phi(u)\,, \qquad (u, (\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix})) \to (w, (\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}))\,, \qquad (\begin{smallmatrix}\gamma\\ \delta\end{smallmatrix}) = \theta(u)(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix})\,,$$

$$\theta(u) = \begin{pmatrix} \Phi'(u) & \Phi''(u) \\ 0 & \Phi'(u) \circledcirc \Phi'(u) \end{pmatrix},$$

[1] Voir [8, (2.20)], et [7, Prop. (6.5 quinto)]: Y est une semi-martingale continue sur A ouvert à valeurs dans V, s'il existe une suite d'ouverts A_n optionnels dans A, de réunion A, telle que, dans chaque, A_n, Y soit restriction d'une semi-martingale Y_n sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ (non nécessairement continue), et si Y est continue sur A; Y est alors optionnelle dans A. Si $V \subset E$, Y est alors équivalente, sur A, à une semi-martingale *continue formelle* sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, [7, (6.4ter)]. Pour la formule d'Itô dans ce cas, voir [7, (6.8)].

et $Z' = \Phi(Y')$. Reportons cette formule sur G_A; si $A' = Y^{-1}(V')$, $G_{A'} \to A' \times \mathscr{E}_., G_{A'} \to A' \times \mathscr{F}_.$, cette formule s'écrit

$$(t, \omega, \binom{\alpha}{\beta}) \to (t, \omega, \binom{\gamma}{\delta}),$$

avec

$$\binom{\gamma}{\delta} = \theta(Y'(t, \omega))\binom{\alpha}{\beta},$$

ou

$$\binom{\gamma}{\delta} = \begin{pmatrix} \Phi'(Y'(t, \omega)) & \Phi''(Y'(t, \omega)) \\ 0 & \Phi'(Y'(t, \omega)) \circledcirc \Phi'(Y'(t, \omega)) \end{pmatrix} \binom{\alpha}{\beta}.$$

Pour avoir un système cohérent de différentielles de semi-martingales, il faudra qu'on ait les mêmes formules, avec multiplication de la différentielle par $\theta \circ Y'$, ou intégration stochastique. Si donc $\mathrm{d}X$ a pour images

$$\mathrm{d}\eta \in \mathscr{SM}(A'; \mathscr{E}_.), \qquad \mathrm{d}\zeta \in \mathscr{SM}(A'; \mathscr{F}_.),$$

on devra avoir $\mathrm{d}\zeta = \theta(Y')\,\mathrm{d}\eta$, ou

$$\mathrm{d}\zeta = \begin{pmatrix} \Phi'(Y') & \Phi''(Y') \\ 0 & \Phi'(Y') \circledcirc \Phi'(Y') \end{pmatrix} \mathrm{d}\eta.$$

En prenant

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\underline{Y}' = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Y' \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Y', Y'] \end{pmatrix},$$

on trouve bien

$$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\underline{Z}' = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Z' \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Z', Z'] \end{pmatrix},$$

car la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}Z' = \Phi'(Y') + \Phi''(Y')\tfrac{1}{2}\mathrm{d}[Y', Y'], \\ &\tfrac{1}{2}\mathrm{d}[Z', Z'] = \Phi'(Y') \circledcirc \Phi'(Y')\tfrac{1}{2}\mathrm{d}[Y', Y']. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Cela prouve bien, en vertu même de la définition par cartes de $\mathcal{SM}(A; G_A) = \mathcal{SM}(A; V; Y)$, que les $\mathrm{d}\underline{Y}'$ des cartes $T^2(V) \to U' \times (E \oplus (E \odot E))$ définissent une section différentielle $\mathrm{d}X$; on l'appellera encore $\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathcal{SM}(A; V; Y)$, avec l'écriture intuitive $\mathrm{d}\underline{Y}_t \in T^2(V; Y_t)$. □

Remarque (2.8). Cet énoncé, permis par les notations directes avec produits tensoriels, ne pouvait pas figurer dans [8], où n'existaient que des opérateurs $\mathrm{d}u : Opt(A; T^{*2}(V); Y) \to \mathcal{SM}(A)$. D'autre part nous avons signalé, au début de la Section 2, que, même si G_A était en fait trivialisable (puisque ici la dimension des fibres était constante), *il n'était jamais donné comme trivialisé*: $T^2(V)$ n'est pas trivialisable en tant que fibré $\mathscr{C}^0$, il le devient, mais très peu intuitivement, comme fibré borélien! Remarquons aussi qu'on processus continu optionnel Y (ou optionnel même pas continu!) définit un espace fibré optionnel $G_A = Y^*(T^2(V))$, donc un espace $\mathcal{SM}(A; G_A) = \mathcal{SM}(A; T^2(V); Y)$, mais que, si Y est une semi-martingale continue sur A (une vraie, pas une classe!), elle définit en outre un élément particulier de cet espace, $\mathrm{d}\underline{Y}$. Nous avons donné le maximum de détails honnêtement 'écrivable' de la démonstration, mais on voit bien qu'elle est triviale! (Une fois faite une telle démonstration une fois pour toutes, on peut se contenter de dire ensuite; évident par des cartes de V.) Les concepts introduits ici simplifient énormément les choses!

Remarque (2.9). On peut prendre une application ψ de classe $\mathscr{C}^2$ de V dans W. Elle définit une application de $T^2(V)$ dans $T^2(W)$, et bien évidemment, si $Z = \psi(Y)$, on a un morphisme optionnel des fibrés images réciproques: $Y^*(T^2(V)) \to Z^*(T^2(W))$, qu'on peut écrire $(T^2(V); Y) \to (T^2(W); Z)$ (fibrés 2-tangents le long de Y, Z).

Dans la démonstration ci-dessus, en prenant sur V et W des ouverts domaines de cartes tels que ψ envoie le premier dans le deuxième, on a les mêmes formules avec Φ, θ, U', $E \otimes (E \odot E)$, W', $F \oplus (F \odot F)$, mais Φ n'est plus inversible, θ non plus, ce dont on n'avait nul besoin dans la démonstration. Cela veut dire que ψ définit des morphismes $V \to W$, $Y \to Z$, $T^2(V) \to T^2(W)$, $(T^2(V); Y) \to (T^2(W); Z)$, $\mathcal{SM}(A; T^2(Y); Y) \to \mathcal{SM}(A; T^2(W); Z)$, et $\mathrm{d}\underline{Y} \to \mathrm{d}\underline{Z}$.

Proposition (2.10). *La différentielle* $\mathrm{d}\underline{Y}$ *de la Proposition* (2.7), *considérée comme opérateur Opt-linéaire de* $Opt(A; T^{*2}(V); Y)$ *dans* $\mathcal{SM}(A)$, *est la seule qui, à* $J = D^2\varphi(Y) \in Opt(A; T^{*2}(V); Y)$, φ *fonction réelle* $\mathscr{C}^2$ *sur* V, *associe*

$$J\,\mathrm{d}\underline{Y} = \mathrm{d}(\varphi(Y)),$$

différentielle de la vraie semi-martingale continue $\varphi(Y)$. En termes intégrés,

$$D^2\varphi(Y)\cdot \underline{Y} \overset{A}{\sim} \varphi(Y);$$

le second membre est un vrai processus, une semi-martingale continue sur A, le premier une classe d'équivalence sur A de semi-martingales continues formelles sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$; au lieu de $\overset{A}{\sim}$, on pourrait mettre $\ni$, le $2^{\text{ème}}$ membre est l'élément de la classe définie par le 1^{er}.

Démonstration. C'est dans [8, (2.7)]. Mais c'est devenu plus simple. D'abord $\mathrm{d}\underline{Y}$ a cette propriété. En effet, il suffit de le montrer dans une carte; pour simplifier, identifions donc V à un ouvert de E. Alors $D^2\varphi = (\varphi' \quad \varphi'')$, $D^2_\varphi(Y) = (\varphi'(Y) \quad \varphi''(Y))$, son image par

$$\mathrm{d}\underline{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Y, Y] \end{pmatrix}$$

est donc

$$(\varphi'(Y) \quad \varphi''(Y))\begin{pmatrix} \mathrm{d}Y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Y, Y] \end{pmatrix} = \varphi'(Y)\,\mathrm{d}Y + \tfrac{1}{2}\varphi''(Y)\,\mathrm{d}[Y, Y] = \mathrm{d}(\varphi(Y)),$$

par Itô.

Inversement, soit $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; T^2(V); Y)$ ayant cette propriété. Alors $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}\underline{Y}$ prennent la même valeur sur les $D^2\varphi(Y)$, $\varphi \in \mathscr{C}^2(V; \mathbb{R})$. Mais toutes les deux ont un caractère local; soit V' ouvert de V, V'' ouvert, $\overline{V''} \subset V'$; si $\varphi \in \mathscr{C}^2(V'; \mathbb{R})$, il existe $\bar{\varphi} \in \mathscr{C}^2(V; \mathbb{R})$, égale à φ sur V''. Donc $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}\underline{Y}$ ont même valeur sur $D^2\bar{\varphi}(Y)$, donc même valeur sur $D^2\varphi(Y)$ dans $Y^{-1}(V'')$; V'' étant quelconque, aussi dans $Y^{-1}(V')$. Mais les $D^2\varphi(Y)$, $\varphi \in \mathscr{C}^2(V'; \mathbb{R})$, engendrent l'*Opt*$(A')$-module *Opt*$(A'; T^{*2}(V'); Y)$, $A' = Y^{-1}(V')$, si V' est une domaine d'une carte de V (on prend pour φ les fonctions coordonnées et les produits de deux fonctions coordonnées dans cette carte), donc $\mathrm{d}X = \mathrm{d}\underline{Y}$ dans $A' = Y^{-1}(V')$; par un atlas dénombrable, $\mathrm{d}X = \mathrm{d}\underline{Y}$ dans A. □

On peut remplacer $\mathcal{SM}(A)$ par $\mathscr{V}(A)$, espace des différentielles de processus à variation finie formels, $\mathcal{M}(A)$, espace des différentielles de martingales continues formelles; $\mathcal{SM}(A) = \mathcal{V}(A) \oplus \mathcal{M}(A)$, tous $Opt(A)$-modules. D'où, si G_A est fibré optionnel sur A, $\mathcal{SM}(A; G_A) = \mathcal{V}(A; G_A) \oplus \mathcal{M}(A; G_A)$; pour $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; G_A)$, on écrira $\mathrm{d}X = \mathrm{d}X^{\mathrm{c}} + \mathrm{d}\tilde{X}$. Si Y est optionnel sur A à valeurs dans une variété borélienne V, on aura des processus le long de Y, et $\mathcal{SM}(A; \mathcal{G}_V; Y) = \mathcal{V}(A; \mathcal{G}_V; Y) \oplus \mathcal{M}(A; \mathcal{G}_V; Y)$. Si Y est une semi-martingale vraie à valeur dans V, variété de classe $\mathscr{C}^2$, on aura une décomposition $\mathrm{d}\underline{Y} = \mathrm{d}Y^{\mathrm{c}} \oplus \mathrm{d}\tilde{\underline{Y}}$; on voit, par la formule d'Itô, que $\mathrm{d}Y^{\mathrm{c}}$ est tangente à $T^1(V)$ le long de Y, $\mathrm{d}Y^{\mathrm{c}} \in \mathcal{SM}(A; T^1(V); Y)$, $\mathrm{d}Y^{\mathrm{c}}_t \in T^1(V; Y_t)$ selon les expressions de la Proposition (2.3), c'est pourquoi nous avons écrit $\mathrm{d}Y^{\mathrm{c}}$, non $\mathrm{d}\underline{Y}^{\mathrm{c}}$. Mais, bien sûr, pour $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; T^2(V); Y)$ arbitraire, $\mathrm{d}X^{\mathrm{c}}$ *n'est pas en général tangente à* T^1.

Si maintenant $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}X'$ sont dans $\mathcal{SM}(A; G_A)$, on peut définir un crochet $\frac{1}{2}\mathrm{d}[X^{\mathrm{c}}, X'^{\mathrm{c}}] = \frac{1}{2}\mathrm{d}[X, X'] \in \mathcal{V}(A; G_A \odot G_A)$ (par trivialisation). Si Y est optionnelle sur A à valeurs dans V borélienne, et X, $X' \in \mathcal{SM}(A; \mathcal{G}_V; Y)$, $\frac{1}{2}\mathrm{d}[X, X'] \in \mathcal{V}(A; \mathcal{G}_V \odot \mathcal{G}_V; Y)$. Supposons que $\mathcal{G}_V = T^2(V)$; on sait seulement que $\frac{1}{2}\mathrm{d}[X, X'] \in \mathcal{V}(A; T^2(V) \odot T^2(V); Y)$. Mais en même temps, si π est la projection canonique de $T^2(V)$ sur

$$T^2(V)/T^1(V) \subset T^1(V) \odot T^1(V),$$

$$\pi\, \mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; T^1(V) \odot T^1(V); Y) \subset \mathcal{SM}(A; T^2(V) \odot T^2(V); Y).$$

On dit que $\mathrm{d}X \in \mathcal{SM}(A; T^2(V); Y)$ est *crochet-stable*, si $\pi\, \mathrm{d}X = \frac{1}{2}\mathrm{d}[X, X]$, qui est alors dans $\mathcal{V}(A; T^1(V) \odot T^1(V); Y)$. On vérifiera que c'est équivalent à la définition (3.3) de [8], mais elle est plus élégante, sans dualité. Cela entraîne que $\mathrm{d}X^{\mathrm{c}} \in \mathcal{M}(A; T^1(V); Y)$. Mais c'est bien plus précis: $\mathrm{d}X$ est crochet-stable ssi, dans toute carte de V, identifiée à un ouvert d'un espace vectoriel E, $\mathrm{d}X$ a la forme

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}Z \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Z, Z] \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}Z \in \mathcal{SM}(A; T^1(E); Y) \cong \mathcal{SM}(A, E).$$

(C'est bien invariant par changement de carte, car, si $E \xrightarrow{\Phi} F$ est un tel changement, $\mathrm{d}Z$ devient

$$\begin{pmatrix} \Phi'(Y) & \Phi''(Y) \\ 0 & \Phi'(Y) \circledcirc \Phi'(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}Z \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Z, Z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi'(Y)\,\mathrm{d}Z + \frac{1}{2}\Phi''(Y)\,\mathrm{d}[Z, Z] \\ \frac{1}{2}\Phi'(Y) \circledcirc \Phi'(Y)\,\mathrm{d}[Z, Z] \end{pmatrix},$$

où la deuxième composante est bien le demi-crochet de la première)[1].

Si alors Y est une semi-martingale *vraie* sur A à valeurs dans V, on a exactement, dans toute carte,

$$\mathrm{d}\underline{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Y \\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}[Y, Y] \end{pmatrix},$$

$\mathrm{d}\underline{Y}$ est crochet-stable.

2.3. *L'Expression: 'Si Y est une (vraie) semi-martingale continue sur A à valeurs dans V, $\mathrm{d}\underline{Y}_t$ est un petit vecteur 2-tangent à V en Y_t'*

On a écrit cette formule comme un principe intuitif; on l'a aussi écrite $\mathrm{d}\underline{Y}_t \in T^2(V;\, Y_t)$. On aurait pu souhaiter avoir une formule meilleure, avec des *vrais* vecteurs, *pas petits*. Il faut bien se convaincre que c'est impossible (à part le fait qu'une chose impossible devient parfois possible dans l'avenir!).

Considérons déjà le cas déterministe, Ω réduit à un point, et Y une courbe $[0, +\infty) \to V$, de classe $\mathscr{C}^1$ ($[0, +\infty)$ au lieu de $[0, +\infty]$, pour parler de dérivée). En chaque t, existe une dérivée, un vrai (*pas petit*) vecteur tangent $Y'(t) \in T^1(V;\, Y_t)$. C'est cette image qui nous fascine; remarquons que $\mathrm{d}Y = Y'(t)\,\mathrm{d}t$ est déjà en partie un *petit* vecteur tangent, mais on peut faire qu'il ne le soit pas, si on décide que $\mathrm{d}t$ est le vecteur tangent 1 à $\mathbb{R}$, au point t. Mais supposons maintenant Y seulement localement à variation finie, et là on peut reprendre $[0, +\infty]$ si l'on veut, ou un ouvert A de $[0, +\infty]$. Alors $Y'(t)\,\mathrm{d}t$ ne représente plus rien d'intéressant, même si on définit $Y'(t)$ seulement Lebesgue-presque partout, car, pour $V = \mathbb{R}$, Y n'en est pas la primitive. Il existe des fonctions Z° réelles à variation finie (et même croissantes $\geqslant 0$) telles que $\mathrm{d}Z^\circ$ domine $\mathrm{d}Y$ (par exemple domine les coordonnées de $\mathrm{d}Y$ dans un plongement de V dans $\mathbb{R}^{2N}$); on peut aussi en trouver une qui soit équivalente à $\mathrm{d}Y$, soit $\mathrm{d}Z$. Alors on pourra prendre des dérivées par rapport à $\mathrm{d}Z$ ou $\mathrm{d}Z^\circ$, et écrire $\mathrm{d}Y = H\,\mathrm{d}Z = H^\circ\,\mathrm{d}Z^\circ$. On trouve bien un vrai vecteur (pas petit) H_t, $H_t^\circ \in T^1(V;\, Y_t)$. Mais il est défini seulement $\mathrm{d}Z$-*pp.* ou $\mathrm{d}Z^\circ$-*pp.*,

[1] Comme on le voit, c'est avec une certaine prudence qu'on écrire $\mathcal{SM}(A;\, T^1(E);\, Y) \cong \mathcal{SM}(A;\, E)$. Avec $\mathcal{SM}(A;\, E)$, on perd de vue que c'est *le long de* Y; la formule de changement de carte utilise $\Phi'(Y)$, $\Phi''(Y)$, et non $\Phi'(Z)$, $\Phi''(Z)$!

pas partout. En outre, le choix de H_t, H_t° dépend complètement du choix de Z, Z°; Z n'est pas unique, $\mathrm{d}Z$ est unique *à une équivalence près.* La seule chose réelle est $H_t\,\mathrm{d}Z_t$, ou $H_t^\circ\,\mathrm{d}Z_t^\circ \in T^1(V;\,Y_t)$, *petit* vecteur, défini seulement $\mathrm{d}Z$ ou $\mathrm{d}Z^\circ$-*pp*.. C'est très symbolique! Si $\mathrm{d}Z_t = \alpha_t\,\mathrm{d}Z_t^\circ$, α fonction borélienne sur $[0,+\infty]$, défini seulement $\mathrm{d}Z^\circ$-*pp*., alors $H_t^\circ = H_t\alpha_t$, $\mathrm{d}Z^\circ$-*pp*.. On peut se désespérer si l'on est pessimiste, mais il n'y a rien d'autre. Par contre, si l'on prend la chose globalement, pas en un point t, mais sur $[0,+\infty]$, $\mathrm{d}Y$ (ou $\mathrm{d}\underline{Y}$, mais c'est à valeurs dans $T^1(V)$) existera comme élément de $\mathscr{V}([0,+\infty];\,T^1(V);\,Y) = \mathscr{V}([0,+\infty];\,G_{[0,+\infty]})$, $G_{[0,+\infty]} = Y^*(T^1(V))$, $\mathrm{d}Y$ différentielle de fonction continue localement a variation finie, à valeurs dans $T^1(V)$, le long de Y. (Elle est même bien, si l'on veut, la 'différentielle de Y', qui est à valeurs dans V.) Et nous nous sommes permis d'écrire $\mathrm{d}Y_t \in T^1(V;\,Y_t)$. Rien de ponctuel (valeur en t) n'existe ici vraiment, pas plus qu'une distribution n'a de valeur en un point, ou qu'une fonction de L^p n'est une fonction, ou qu'une intégrale stochastique $H\cdot Z$ n'a de valeur en un point (t,ω). Si en plus Y est une semi-martingale continue (vraie) sur A à valeurs dans V, il n'y a pas une semi-martingale scalaire Z qui la domine, mais seulement un système fini, et on a seulement des représentations tangentielles $\mathrm{d}\underline{Y}_t = \sum_k H_{k,t}\,\mathrm{d}Z_t^k$, Z^k semi-martingales continues réelles, $H_{k,t} \in T^2(V;\,Y_t)$, H_k optionnels à valeurs dans $T^2\hat{(}V)$. Encore faut-il voir quand deux représentations tangentielles définissent le même objet; c'est exactment quand $\sum_k H_k \otimes \mathrm{d}Z^k$ est nul dans le produit tensoriel, ce qui revient à la Proposition (2.1): $\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathscr{SM}(A;\,T^2(V);\,Y) = Opt(A;\,T^2(V);\,Y)\otimes_{Opt(A)}\mathscr{SM}(A)$. Dans le cas déterministe où Y est à variation finie, on se permettra bien de dire que $\mathrm{d}Y \in \mathscr{V}(A;\,T^1(V);\,Y)$ est la différentielle de Y; on pourra donc aussi, si Y est une semi-martingale continue vraie sur A à valeurs dans V, dire que $\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathscr{SM}(A;\,T^2(V);\,Y)$ *est la différentielle de* Y. Il n'y a pourtant pas vraiment de petit vecteur $\mathrm{d}\underline{Y}_t \in T^2(V;\,Y_t)$, mais il y a une différentielle de semi-martingale continue formelle à valeurs dans $T^2(V)$ le long de Y. L'ouvrage [8, (3.17) à (3.17 quarto)] donne un grand nombre de propriétés de ces différentielles de semi-martingales à valeurs dans des fibrés $\mathscr{G}_V$ le long de Y. En particulier, l'écriture d'une équation différentielle stochastique sur une variété $\mathscr{C}^2$-lipschitzienne *exige* l'utilisation des $\mathrm{d}\underline{Y}$, qu'on appelle de nouveau $\mathrm{d}\underline{X}$. Rappelons que, si L est l'opérateur différentiel d'une diffusion sur V, $L_v \in T^2(V;\,v)$, elliptique, dépendant ou non du temps mais non aléatoire, dire qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace Ω des trajectoires sur V tuées par un temps de mort ζ satisfait au problème des martingales: '$\forall\varphi \in \mathscr{C}^2(V;\mathbb{R})$, $t \to \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t L\varphi(X_s)\,\mathrm{d}s$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale continue', équivaut à dire que, pour $\mathbb{P}$, X est une semi-martingale, et que $\mathrm{d}\underline{X}_t^\circ = L(X_t)\,\mathrm{d}t$ dans $\mathscr{V}([0,\zeta); T^2(V); X)$ [8, (3.16 bis)]. C'est *une sorte* d'équation différentielle stochastique, mais où c'est la trajectoire X qui est connue (c'est la trajectoire canonique, $X_t = \omega_t$), et c'est la probabilité $\mathbb{P}$ qui est inconnue. Je montrerai dans un article ultérieur, par une méthode nouvelle, comment, lorsque L est strictement elliptique lipschitzienne, une telle équation a une solution unique $\mathbb{P}^x$, pour laquelle $X_0 = x$ $\mathbb{P}^x$-*ps.*; la méthode n'utilise aucune des méthodes antérieurs de cartes, ni l'enroulement du brownien usuel de $\mathbb{R}^N$ comme dans Eels-Elworthy[1], mais on se ramène directement à la solution d'une équation différentielle stochastique sous la forme normale, où l'existence et l'unicité sont connues, en utilisant les écritures globales ci-dessus.

2.4. Martingales par Rapport à une Connexion

Cette notion a été introduite par J.M. Bismut, mais a été aussi, presque simultanément, ou un peu après, étudiée par Eells et Elworthy, Darling, Ikeda, P.A. Meyer[2].

Tout d'abord, [8], j'ai introduit des notations pour la connexion qui ne sont pas celles de tout le monde; j'ai écrit $\Gamma^k_{i,j}$ ce que l'on écrit habituellement $-\Gamma^k_{j,i}$. *Je fais ici la rectification,* $\Gamma^k_{i,j}$ *sera celui de tout le monde*; en particulier, pour la connexion (symétrique ou sans torsion) de Levi-Civita sur une variété riemannienne, $\Gamma^k_{i,j} = \{{k \atop i,j}\}$, symboles de Riemann–Christoffel.

Soit V une variété de classe $\mathscr{C}^2$, σ ou Γ une connexion linéaire sans torsion sur le fibré tangent, de classe $\mathscr{C}^0$. On sait que Γ n'est pas intrinsèque, seul σ l'est. Dans chaque carte de la variété sur un ouvert d'un espace vectoriel E de base $(e_k)_{k=1}^N$, pour $x \in E$, $\Gamma(x)$ est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans E, qui, à $\xi = \sum_{k=1}^N \xi^k \partial_k$, $\eta = \sum_{k=1}^N \eta^k \partial_k$, fait correspondre

[1] Pour les méthodes utilisant les cartes, voir par exemple [1], [5, Chap. VI]. Pour la méthode d'enroulement du mouvement brownien usuel, voir [3, chap. V Section 4].

[2] On pourra par exemple consulter [4, page 54], ou l'article de R.W.R. Darling, qui donne une bibliographie; Darling démontre une réciproque de la Proposition (2.11) (plus délicate que la proposition directe), qu'il prend comme définition d'une Γ-martingale. La définition de géométrie différentielle $\theta\,\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} = 0$, (2.14), me semble plus satisfaisante; c'est aussi celle de Paul-André Meyer [1], écrite ici en termes de sections-(différentielles de semi-martingales) de fibrés vectoriels.

(2.3) $$\Gamma(x)(\xi,\eta)=\sum_{k,i,j=1}^{N}\Gamma_{i,j}^{k}\xi^{i}\eta^{j}\partial_{k}\,.$$

Donc $\Gamma(x)$ est aussi une application linéaire de $E\odot E$ dans E.

La liaison de Γ, non intrinsèque, avec σ, intrinsèque, est la suivante: pour tout $\xi\in T^1(V;x)$, ou $(x,\xi)\in T^1(V)$, $\sigma(x,\xi)$ est une application linéaire de $T^1(V;x)$ dans $T^1(T^1(V);(x,\xi))$, donc, pour les cartes E et $(E\times E)$ de $T^1(V;x)$ et $T^1(T^1(V);x,\xi)$, s'écrit:

(2.4) $$\sigma(x,\xi)\eta=(\eta,-\Gamma(x)(\xi,\eta))\,.$$

Donc $\Gamma(x)(\xi,\eta)\in E$ n'a pas de sens intrinsèque, mais $(\eta,-\Gamma(x)(\xi,\eta))\in E\times E\cong T^1(T^1(V);(x,\xi))$ est intrinsèque.

Mais il existe une application linéaire canonique $\tau(x,\xi)$ de $T^1(T^1(V);(x,\xi))$ dans $T^2(V;x)$, définie comme suit: si $\varphi\in\mathscr{C}^2(V;\mathbb{R})$, φ' est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $T^1(V)$, et, pour $\Lambda\in T^1(T^1(V);(x,\xi))$:

(2.5) $$((D^2\varphi)(x)\mid\tau(x,\xi)\Lambda)_{T^{*2}(V;x),\,T^2(V;x)}$$
$$=((D^1\varphi')(x,\xi)\mid\Lambda)_{T^{*1}(T^1(V);(x,\xi)),\,T^1(T^1(V);(x,\xi))}\,.$$

En reprenant les cartes précédentes, $(X,\Xi)\in E\times E$:

(2.6) $$\tau(x,\xi)(X,\Xi)=\Xi+(\xi\odot X)\in E\oplus(E\odot E)\,.$$

Alors $\tau(x,\xi)(\sigma(x,\xi)\eta)$ a un sens intrinsèque, et s'écrira $\rho(x)(\xi,\eta)$: pour $\xi,\eta\in E$,

(2.7) $$\rho(x)(\xi,\eta)=-\Gamma(x)(\xi,\eta)\oplus(\xi\odot\eta)\in E\oplus(E\odot E)\,.$$

On voit que $\rho(x)$ est une application bilinéaire symétrique de $E\times E$ dans $E\oplus(E\odot E)$, donc linéaire de $E\odot E$ dans $E\oplus(E\odot E)$, et, comme elle est intrinsèque, de $T^1(V;x)\odot T^1(V;x)=T^2(V;x)/T^1(V;x)$ dans $T^2(V;x)$; si π est la projection canonique de $T^2(V;x)$ sur son quotient, on voit que $\pi\rho=\mathrm{Id}$, donc $\rho(x)$ est un relèvement de $T^1(V;x)\odot T^1(V;x)$ dans $T^2(V;x)$, ρ de $T^1(V)\odot T^1(V)$ dans $T^2(V)$.

Alors $\mathrm{Im}(\rho)$ est un supplémentaire $S(V)$ de $T^1(V)$ dans $T^2(V)$, $S(V)$ est un fibré $\mathscr{C}^0$ de dimension $\frac{1}{2}N(N+1)$, on a la décomposition en somme directe

(2.8) $$T^2(V) = T^1(V) \oplus S(V)\,.$$

Le projecteur de $T^2(V)$ d'image $S(V)$ est $\rho\pi$, le projecteur d'image $T^1(V)$ est $\mathrm{Id} - \rho\pi$, et définit $\theta : T^2(V) \to T^1(V)$, égale à l'identité sur $T^1(V)$. La formule donnant ρ (2.7) permet aisément d'obtenir les composantes dans une carte vectorielle de V ($T^1(V) \cong E \times E$, $T^2(V) = E \times (E \oplus (E \odot E))$, $T^2(V)/T^1(V) = E \times (E \odot E)$):

(2.9) $$\binom{u}{v} = \binom{u}{v}_{T^1} \oplus \binom{u}{v}_S = \begin{pmatrix} u + \Gamma(x)v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Gamma(x)v \\ v \end{pmatrix}.$$

et

$$\theta(x)\binom{u}{v} = u + \Gamma(x)v^1\,.$$

Passons aux duals, on aura des formules transposées. Le sous-espace $P^*(V)$ est l'orthogonal de $T^1(V)$, $P^* = T^{1\perp}$; (voir [[8], Section 1] pour les notations, notamment P^* [8, (1.1)]) c'est donc le dual de T^2/T^1, ou espace des formes bilinéaires symétriques sur $T^2 \times T^1$ ou des formes linéaires sur $T^1 \odot T^1$; et le quotient T^{*2}/P^* est T^{*1}. Sur une carte vectorielle, $T^{*2}(V; x) = E^* \oplus (E \odot E)^*$, $P^* = (E \odot E)^*$. La transposée $\Gamma^*(x)$ (non intrinsèque), sur une carte vectorielle, est une application linéaire de E^* dans $(E \odot E)^* = E^* \odot E^*$; elle a naturellement, relativement à une base, les mêmes coordonnées $\Gamma^k_{i,j}$. On a alors une décomposition en somme directe:

(2.10) $$T^{*2} = S^\perp \oplus T^{1\perp}\,,$$

donc

(2.11) $$(\alpha \quad \beta) = (\alpha \quad \beta)_{S^\perp} + (\alpha \quad \beta)_{T^{1\perp}} = (\alpha \quad \Gamma^*(x)\alpha) + (0 \quad -\Gamma^*(x)\alpha + \beta)\,,$$

où $\Gamma^*(x)\,\alpha$ est aussi $\alpha \circ \Gamma(x)$.

A partir de là, on peut définir les objets liés à cette connexion:

(1). Soit φ une fonction réelle $\mathscr{C}^2$ sur V (ou un ouvert de V); on dit qu'elle est *σ-convexe* ou *Γ-convexe*, si $\rho^* D^2\varphi \geq 0$; $D^2\varphi(x) \in T^{*2}(V; x)$,

[1] Dans [8], j'ai noté les éléments de $E \oplus (E \odot E)$ par des matrices verticales à 2 lignes et 1 colonne, $\binom{u}{v}$, et les éléments de $E^* \oplus (E \odot E)^*$ par des matrices horizontales, à 1 ligne et 2 colonnes, $(\alpha \quad \beta)$.

$\rho^*(x)D^2\varphi(x) = (D^2\varphi(x))_{T^{11}} \in P^*(V; x)$, est une forme bilinéaire symétrique sur $T^1(V; x) \times T^1(V; x)$, il est donc possible de dire qu'elle est $\geqslant 0$. Dans une carte sur E, par (2.11), cela s'écrira, puisque $D^2\varphi(x) = (\varphi'(x) \quad \varphi''(x))$,

$$\rho^*(x)D^2\varphi(x) = -\varphi'(x) \circ \Gamma(x) + \varphi''(x) \geqslant 0\,, \quad \text{ou} -\varphi' \circ \Gamma + \varphi'' \geqslant 0\,. \tag{2.12}$$

(2). Soit Y une semi-martingale continue (vraie, pas une différentielle) à valeurs dans V, définie sur A ouvert optionnel de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$. Elle définit $\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathcal{SM}(A; T^2(V); Y)$. Alors elle a une image par $\theta : T^2(V) \to T^1(V)$, $\theta\,\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathcal{SM}(A; T^1(V); Y)$, qui s'écrit, dans une carte, par (2.9):

$$\theta\,\mathrm{d}\underline{Y} = \theta\begin{pmatrix} \mathrm{d}Y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Y, Y] \end{pmatrix} = \mathrm{d}Y + \tfrac{1}{2}\Gamma(Y)\,\mathrm{d}[Y, Y] \quad \in \mathcal{SM}(A; E)\,, \tag{2.13}$$

en coordonnées,

$$(\theta\,\mathrm{d}\underline{Y})^k = \mathrm{d}Y^k + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \Gamma^k_{i,j}(Y)\,\mathrm{d}[Y^i, Y^j]\,.$$

On dit alors que Y est une σ-martingale, ou *Γ-martingale*, si $\theta\,\mathrm{d}\underline{Y}$ est une différentielle de martingale, $\theta\,\mathrm{d}\underline{Y} \in \mathcal{M}(A; T^1(V); Y)$, donc, dans une carte, $\in \mathcal{M}(A; E)$. En utilisant la décomposition $\mathcal{SM} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$, $\mathrm{d}\underline{Y} = \mathrm{d}Y^c + \mathrm{d}\underline{\tilde{Y}}$, et sachant que $\mathrm{d}Y^c \in \mathcal{M}(A; T^1(V); Y)$, donc $= \theta\,\mathrm{d}Y^c$, cela revient à $\theta\,\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} = 0$, ou $\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} \in \mathcal{V}(A; S(V); Y)$ ou, dans une carte:

$$\theta\,\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} = \theta\begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{Y} \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}[Y, Y] \end{pmatrix} = \mathrm{d}\tilde{Y} + \tfrac{1}{2}\Gamma(Y)\,\mathrm{d}[Y, Y] = 0\,. \tag{2.14}$$

Notons que la notation différentielle cache une intégration stochastique; en termes intégrés:

$$\theta \cdot \underline{\tilde{Y}} = \tilde{Y} + \tfrac{1}{2}\Gamma(Y) \cdot [Y, Y]\,.$$

Bien entendu, cette propriété peut s'exprimer par dualité: Y est une Γ-martingale ssi, $\forall J \in \mathit{Opt}(A; T^{*1}(V); Y)$, $(\theta^*J)\,\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} = J\theta\,\mathrm{d}\underline{\tilde{Y}} = 0$; $\theta^* : T^{*1} \to T^{*2}$ est un relèvement.

On a toujours les deux décompositions: $\mathcal{SM} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{V}$, $\mathrm{d}\underline{Y} = \mathrm{d}Y^c \oplus \mathrm{d}\underline{\tilde{Y}}$, et $T^2(V) = T^1(V) \oplus S(V)$, (2.8), $\mathrm{d}\underline{Y} = \mathrm{d}\underline{Y}_{T^1} \oplus \mathrm{d}\underline{Y}_S$. Alors Y est une Γ-martingale ssi ces deux décompositions coincident.

La relation fondamentale entre fonctions convexes et Γ-martingales est la suivante. La formule d'Itô,

$$\mathrm{d}(\widetilde{\varphi(Y)}) = D^2\varphi(Y)\,\mathrm{d}\underset{=}{\tilde{Y}} = \varphi'(Y)\,\mathrm{d}\tilde{Y} + \tfrac{1}{2}\Phi''(Y)\,\mathrm{d}[Y, Y],$$

peut s'écrire, par un regroupement qui correspond aux deux décompositions duales intrinsèques (2.8) et (2.10), appliquées à $D^2\varphi(Y)$ et à $\mathrm{d}\underset{=}{\tilde{Y}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widetilde{\varphi(Y)} &= \varphi'(Y)(\mathrm{d}\tilde{Y} + \tfrac{1}{2}\Gamma(Y)\,\mathrm{d}[Y, Y]) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(-\varphi'(Y)\Gamma(Y) + \varphi''(Y))\,\mathrm{d}[Y, Y].\end{aligned} \tag{2.15}$$

Alors:

Proposition (2.11). *Si φ est une fonction $\mathscr{C}^2$ réelle Γ-convexe sur V, si Y est une Γ-martingale sur A, $\mathrm{d}\varphi(Y)$ est une différentielle de sous-martingale (classe d'équivalence sur A de sous-martingales continues formelles); si $A = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, $\varphi(Y)$ est une sous-martingale locale continue.*

Démonstration. Dans (2.15), le premier terme est nul, puisque Y est une Γ-martingale, et le second est $\geqslant 0$, puisque $-\varphi'\Gamma + \varphi''$ est une forme bilinéaire $\geqslant 0$ sur $E \odot E$ et $\mathrm{d}[Y, Y] \geqslant 0$. Donc $\mathrm{d}\widetilde{\varphi(Y)} \geqslant 0$, qui est le résultat cherché[1]. □

La décomposition (2.8) permet de décomposer un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 2$, section de $T^2(V)$, en somme d'un opérateur d'ordre 1, section de $T^1(V)$, et d'un opérateur purement d'ordre 2, section de $S(V)$.

Supposons que Γ soit la connexion de Levi-Civita d'une structure riemannienne sur V. Il est bien connu que le laplacien Δ est alors un opérateur *purement d'ordre* 2, c. à d. $\Delta \in S(V)$. Cela résulte de la formule qui donne le laplacien sur une carte:

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{N} g^{i,j}\partial_i\partial_j - \sum_{i,j,k=1}^{N} g^{i,j}\Gamma^k_{i,j}\partial_k = (\ulcorner^{\Gamma g}_{g}),$$

où $g^{i,j}\partial_i\partial_j \in E \odot E$, donc $\Delta \in S$ par (2.9) (Peu importe pour cela ce qu'est g;

[1] Le fait que '$\mathrm{d}\underset{=}{Y}$ est une différentielle de sous-martingale continue formelle' équivaut à $\mathrm{d}\underset{=}{\tilde{Y}} \leqslant 0$ se voit essentiellement à [6, Prop. (3.10)].

en fait c'est l'image $\pi\Delta$ de Δ dans $T^1(V) \odot T^1(V)$, c'est la forme quadratique fondamentale sur $T^*(V)$, et $\Delta = \rho\pi\Delta \in S(V)$). Comme alors le brownien Y associé à $\frac{1}{2}\Delta$ vérifie (Subsection 2.3) $\mathrm{d}\underset{=}{\tilde{Y}} = \frac{1}{2}\Delta\ \mathrm{d}t$ (Voir [8, (3.16)]), on a $\theta\ \mathrm{d}\underset{=}{\tilde{Y}} = 0$, donc Y est une Γ-martingale. On sait aussi que, si φ est une fonction $\mathscr{C}^2$ sous-harmonique, $\Delta\varphi \geq 0$, $\varphi(Y)$ est une sous-martingale, par Itô; c'est une propriété différente de la Proposition (2.11), car Y est une Γ-martingale *particulière*, le brownien relatif à $\frac{1}{2}\Delta$, mais φ est plus générale qu'une fonction Γ-convexe (une fonction Γ-convexe est sous-harmonique, car

$$\Delta\varphi = (D^2\varphi \mid \Delta)_{T^{*2}, T^2} = (\varphi' \quad \varphi'')\binom{-\Gamma g}{g} = (-\varphi'\Gamma + \varphi'')(g)\,,$$

et $g = \sum_{i,j=1}^{N} g^{i,j}\partial_i\partial_j \geq 0$ dans $E \odot E$).

Les diverses formules précédentes montrent bien que le formalisme des sections-*différentielles* de semi-martingales de fibrés optionnels G_A se prête très bien à la géométrie *différentielle* stochastique.

3. Fibrés de Stratonovitch sur un Ouvert A de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$

Nous introduisons ici une notion intermédiaire entre celle de la Subsection 1.3 et celles des numéros antérieur de la Section 1.

Une fonction réelle sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ (voir Section 2) est dite *globalement de Stratonovitch*, si elle est fonction $\mathscr{C}^1$ d'un nombre fini de semi-martingales continues; elle est alors continue, et optionnelle. Une fonction réelle sur A ouvert de $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \times \Omega$ est de *Stratonovitch* (sous-entendu localement), si $A = \bigcup_n A_n$, A_n *ouvert relativement optionnels de* A, tels que, sur chaque A_n, elle soit restriction d'une fonction globalement Stratonovitch sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$; elle est encore continue et optionnelle sur A[1].

On définit aisément les fonctions de Stratonovitch sur A à valeurs dans une variété $\mathscr{C}^1$, et toute image $\mathscr{C}^1$ d'une fonction de Stratonovitch est de Stratonovitch. On appellera *Str*(A) l'algèbre des fonctions de Stratonovitch sur A; si $f \in$ *Str*(A) et $f \neq 0$ partout, $1/f \in$ *Str*(A); on a la propriété de faisceau pour les réunions dénombrables d'ouverts optionnels: si $A = \bigcup_n A_n$, A_n ouverts optionnels, si f est Stratonovitch sur chaque A_n,

[1] Dans [8, (4.0)], j'ai donné une définition équivalente: les A_n n'étaient pas nécessairement optionnels, mais la fonction l'était. On trouvera a [8, Section 4] tout ce dont je me sers ici.

elle l'est sur A. On définit alors aisément les *Str*-fibrés G_A au-dessus de A, à fibres toutes de même dimension finie; les cartes seront $G_{A'} \to A' \times G_.$, la transition pour deux cartes au-dessus de A' étant $(t, \omega, g) \to (t, \omega, \alpha(t, \omega)g)$, $\alpha \in Str(A'; \mathscr{L}(G_.)) = Str\, A \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{L}(G_.)$; *et on exige que l'atlas ait un sous-atlas dénombrable.* D'où le *Str*(A)-*module* *Str*(A; G_A) des sections Stratonovitch de G_A, qui est même un *Str*(A; $\mathscr{L}(G_A)$)-module à gauche. Soit alors $\mathscr{N}$ un faisceau de *Str*-modules, *faisceau seulement pour les réunions dénombrables* d'ouverts optionnels (relativement à A) (si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts relativement optionnels de A, de réunion A', et s'il existe $J \subset I$ dénombrable tel que $\bigcup_{i\in J} A_i = A'$, si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille, $T_i \in \mathscr{N}(A_i)$, cohérente ($T_i = T_j$ sur $A_i \cap A_j$), il existe $T \in \mathscr{N}(A')$, unique, induisant T_i sur A_i pour tout $i \in I$). On construira le *Str*(A)-module $\mathscr{N}(A; G_A)$ comme d'habitude; pour $A' \times G_.$, $\mathscr{N}(A'; A' \times G_.) = \mathscr{N}(A') \otimes_{\mathbb{R}} G_.$, la cohérence de deux cartes sur le même A' est la multiplication par la fonction $\alpha \in Str(A'; \mathscr{L}(G_.))$, qui assure la transition, et, par définition, un élément de $\mathscr{N}(A'; G_{A'})$, A' ouvert optionnel quelconque de A, est une famille cohérente d'éléments des $\mathscr{N}(A_i, G_{A_i})$ pour les A_i qui trivialisent G_{A_i}; $\mathscr{N}(A; G_A)$ est un *Str*(A)-module, et un *Str*(A; $\mathscr{L}(G_A)$)-module à gauche.

On prendra pour $\mathscr{N}$ le faisceau $\mathscr{SM}$ de la Section 2, *mais considéré comme Str-module pour l'intégration de Stratonovitch*: $(\alpha, \mathrm{d}X) \to \alpha \circ \mathrm{d}X$, ou $(\alpha, X) \to \alpha \overset{(S)}{\circ} X$. On remarque que $\mathscr{SM}(A)$ est, de deux manières différentes, un *Str*(A)-module: *Str*(A) $\subset$ *Opt*(A), donc il l'est pour l'intégrale d'Itô; et il l'est aussi pour l'intégrale de Stratonovitch. C'est ce second cas qui nous intéresse, on le notera $S\mathscr{SM}(A)$; c'est le même $\mathbb{R}$-espace vectoriel, par le même module. D'où les $S\mathscr{SM}(A; G_A)$, qui sont des *Str*(A)-modules, et des *Str*(A; $\mathscr{L}(G_A)$)-modules à gauche, pour l'intégrale de Stratonovitch, avec la propriété de faisceau pour les réunions dénombrables d'ouverts optionnels de A. Si G_A est *trivial*, $G_A = A \times G_.$, $\mathscr{SM}(A; G_A)$ et $S\mathscr{SM}(A; G_A)$ sont le même $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas le même module; si G_A est seulement *Str*-trivialisable, mais non trivialisé, $\mathscr{SM}(A; G_A)$ et $S\mathscr{SM}(A; G_A)$ sont encore des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels isomorphes (par trivialisation), mais il n'y a entre les deux aucun isomorphisme naturel, *car l'isomorphisme change avec la trivialisation.*

Mais il n'y a maintenant plus aucune raison de croire que tout *Str*-fibré G_A soit sous-*Str*-fibré facteur direct d'un fibré trivial.

Définition (3.1). Un *Str*-fibré G_A sera dit *projectif* s'il est facteur direct d'un *Str*-fibré trivialisable: $G_A \oplus H_A = E_A$, $E_A \cong A \times E_.$.

Alors:

Proposition (3.2). *Soit G_A un Str-fibré projectif. Alors $Str(A; G_A)$ est un $Str(A)$-module projectif de type fini. Le $Str(A)$-dual $(Str(A; G_A))^*$ de $Str(A; G_A)$ est $Str(A; G_A^*)$. On a les isomorphismes de $Str(A; \mathscr{L}(G_A))$-modules à gauche*:

$$S\mathscr{S}\mathscr{M}(A; G_A) = \mathrm{Hom}_{Str(A)}(Str(A; G_A^*); S\mathscr{S}\mathscr{M}(A))$$
$$= Str(A; G_A) \otimes_{Str(A)} S\mathscr{S}\mathscr{M}(A).$$

Démonstration comme aux Sections 1 et 2.

En dehors du cas que nous allons voir maintenant, je ne vois aucun critère simple de projectivité.

Si Y est un processus de Stratonovitch sur A à valeurs dans une variété V de classe $\mathscr{C}^1$, et si $\mathscr{G}_V$ est un fibré vectoriel $\mathscr{C}^1$ sur V, l'image réciproque $Y^*(\mathscr{G}_V) = G_A$ est un fibré de Stratonovitch sur A. Les changements de carte, comme indiqué au début de la Subsection 2.2 se font en effet par des $\beta = \alpha \circ Y$, Y Stratonovitch, α de classe $\mathscr{C}^1$, donc sont de Stratonovitch. On peut alors répéter l'énoncé (2.1), en remplaçant *Opt* par *Str*, et $\mathscr{S}\mathscr{M}$ par $S\mathscr{S}\mathscr{M}$; en effet, *$\mathscr{G}_V$ étant sous-fibré facteur direct d'un fibré trivial, G_A l'est aussi.*

Proposition (3.3). *Soit Y un processus de Stratonovitch sur A ouvert de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \times \Omega$, à valeurs dans une variété V de classe $\mathscr{C}^1$. Il existe une différentielle de martingale continue formelle à valeurs dans $T^1(V)$ le long de Y, $\mathrm{d}Y^c \in \mathscr{M}(A; \mathscr{G}_V; Y)$ ($Opt(A)$-module), unique, telle que, quelle que soit la carte vectorielle de $V : V' \to U'$, V' ouvert de V, U' ouvert de E, $T^1(V') \to U' \times E$, où Y a pour image Y', $\mathrm{d}Y^c$ ait pour image $\mathrm{d}Y'^c$, la compensée $\in \mathscr{M}(A; E)$ du processus de Stratonovitch $Y' \in Str(A; E)$. C'est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{Opt(A)}(Opt(A; T^{*1}(V); Y); \mathscr{M}(A))$ tel que, si $J = D\varphi(Y) \in Opt(A; T^{*1}(V); Y)$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(V; \mathbb{R})$, on ait $J\,\mathrm{d}Y^c = D\varphi(Y)\,\mathrm{d}Y^c = \mathrm{d}(\varphi(Y))^c \in \mathscr{M}(A)$, compensée du processus de Stratonovitch $\varphi(Y) \in Str(A)$. En termes intégrés*:

$$D\varphi(Y) \cdot Y^c = (\varphi(Y))^c,$$

en se rappelant que $\varphi(Y)$ est un Stratonovitch, mais que les 2 membres sont seulement des classes d'équivalence sur A de martingales continues formelles.

Démonstration. Nous ne la donnerons pas, elle est semblable à celle de la Proposition (2.10). Juste une petite explication. Si f est réelle de Stratonovitch sur A, on peut définir sa compensée $f^c \in \mathcal{M}(A)$; ici $\mathcal{M}(A)$ est un $Opt(A)$-module, pour l'intégration d'Itô. Puisque $\mathrm{d}Y^c \in \mathcal{M}(A; T^1(V); Y)$, elle est un élément de $\mathrm{Hom}_{Opt(A)}(Opt(A; T^{*1}(V); Y); \mathcal{M}(A))$, d'où la possibilité d'écrire $D^1\varphi(Y) \cdot Y^c = \varphi(Y)^c \in \mathcal{M}(A)$. □

Proposition (3.4). *Soit Y une semi-martingale continue (vraie) sur A à valeurs dans V, variété $\mathscr{C}^2$. Il existe une différentielle unique $\mathrm{d}Y$ de Stratonovitch, à valeurs dans $T^1(V)$ le long de Y, $\mathrm{d}Y \in S\mathscr{S}\mathcal{M}(A; T^1(V); Y)$, telle que, pour les cartes comme à la Proposition* (3.3), *l'image de $\mathrm{d}Y$ soit $\mathrm{d}Y' \in S\mathscr{S}\mathcal{M}(A; E)$ associée à $Y' \in \mathscr{S}\mathcal{M}(A; E)$. C'est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{Str(A)}(Str(A; T^{1*}(V); Y); S\mathscr{S}\mathcal{M}(A))$ tel que, si $J = D^1\varphi(Y) \in Str(A; T^{*1}(V); Y)$, $\varphi \in \mathscr{C}^2(V; \mathbb{R})$, on ait $J \circ \mathrm{d}Y = \mathrm{d}(J \overset{(S)}{\circ} Y) = \mathrm{d}(\varphi(Y)) \in S\mathscr{S}\mathcal{M}(A)$, différentielle de Stratonovitch de la semi-martingale vraie $\varphi(Y)$ sur A à valeurs dans E. En termes intégrés:*

$$D^1\varphi(Y) \overset{(S)}{\circ} Y \overset{A}{\sim} \varphi(Y),$$

le $2^{\text{é}}$ membre est une vraie semi-martingale réelle continue sur A, le 1^{er} une classe de semi-martingales continues formelles; $\overset{A}{\sim}$ pourrait se remplacer par $\ni$, le second membre est élément de la classe que définit le premier.

Même démonstration que Proposition (2.10).

Bibliographie

[1] Roger Godement, Théorie des faisceaux, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg (Hermann, Paris, 1958).

[2] Dale Husemoller, Fibre Bundles (McGraw-Hill, New York, 1966).

[3] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe, Stochastic Differential equations and Diffusion processes (North-Holland, Amsterdam, 1981).

[4] Paul-André Meyer, Géométrie Stochastique sans larmes, In: Sém. Probab. XV, 1979/80, Lecture Notes in Math. 850 (Springer, Berlin, 1981) 44–117.

[5] P. Priouert, Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, In: Ecole d'été de Probab. Saint-Flour III–1973, Lecture Notes in Math. 390 (Springer, Berlin, 1974) 37–113.

[6] Laurent Schwartz, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes, Lecture Notes in Math. 780 (Springer, Berlin, 1980).

[7] Laurent Schwartz, Les semi-martingales formelles, In: Sém. Probab. XV, 1979/80, Lecture Notes in Math. 850 (Springer, Berlin, 1981) 413–489.

[8] Laurent Schwartz, Géométrie différentielle du 2$^{\text{e}}$ ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété. Sém. Probab. XVI, 1980/81, Suppl.: Géométrie Différentielle Stochastique, Lecture Notes in Math. 921 (Springer, Berlin, 1982) 1–150.