Laurent Schwartz

Charles Goulaouic

Gazette des mathématiciens, 1984, p. 5–14

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

1

N° ISSN 0224-8999

Goulaouic

GAZETTE

DES

MATHÉMATICIENS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

N° 24 - AVRIL 1984

Charles GOULAOUIC (1938-1983)

par Laurent SCHWARTZ

.

GOULAOUIC est né en 1938, à Rosnoen (Bretagne, il aimait à répéter qu'il était breton), il a donc été atteint par ce cancer brutal et implacable à l'âge de 45 ans (comme André Martineau l'avait été à l'âge de 42 ans en 1972). Et il laisse non seulement sa famille, mais nous tous sous le choc. Ancien élève de l'E.N.S., il a soutenu sa thèse en 1967, sous la direction de Jacques Louis Lions (j'étais dans son Jury), il devint ensuite Maître de Conférences, puis Professeur à Rennes (retour à la Bretagne ! Il était encore habituel à cette époque de ne pas être nommé à Paris aussitôt après y avoir préparé et soutenu sa thèse, une bonne habitude de mobilité qui s'est perdue), il a quitté Rennes pour Orsay (Paris XI) en 1970, mais a toujours gardé des attaches avec l'Université de Rennes, où il a formé des élèves, il se fit détacher à plein temps à l'Ecole Polytechnique en 1976. Il a enseigné dans tous les cycles, et pour la préparation de l'Agrégation, il a toujours attaché une grande importance à son enseignement, excellent et d'une parfaite clarté.

Sa thèse et ses premiers travaux ont porté sur l'Interpolation des espaces vectoriels topologiques. On appelle espace de Gevrey $G_s(V)$, $1 \leq s < +\infty$, sur une variété analytique de dimension d, l'espace des fonctions f qui, localement sur une carte, vérifient des inégalités.

(1) $|D^\alpha f| \leq (\text{constante})^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Goulaouic montra qu'il existe un interpolé (par un foncteur d'interpolation explicité) entre l'espace $C^\infty(V)$ et l'espace $\mathcal{A}(V)$ des fonctions analytiques, si V est compacte, qui est l'espace $G_s(V)$ $(G_1=\mathcal{A})$. Il utilisait les inégalités de Kotake-Narasimhan si A est un opérateur elliptique à coefficients analytiques d'ordre 2 sur V , l'analyticité de f se prouve par une majoration, non de toutes les $D^\alpha f$, mais des seules $A^k f$, $k \in \mathbb{N}$, utilisant les itérés de A , plus généralement, $f \in G_s$ si et seulement si on a des inégalités (locales en général, globales si V est compacte) .

(2) $|A^k f| \leq (\text{constante})^{2k+1}((2k)!)^s$.

En même temps, l'ellipticité donne une hypoellipticité-Gevrey :

(3) $Af \in G_s$ si et seulement si $f \in G_s$.

Dans le cas où $V = \mathbb{R}^N$, la propriété de Gevrey se traduit aussi (il n'étudia cela que plus tard) par l'approximation polynomiale si $d_k(f)$ est la distance de f au sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq k$ (sur un compact de $\mathbb{R}^N$), $f \in G_s$ si et seulement si, localement, on a des inégalités du type Bernstein

(4) $d_k(f) \leq (\text{constante} < 1)^{k^{1/s}}$.

Ce sont là de beaux résultats , la possibilité d'une bonne interpolation vectorielle topologique, non banachique, aboutissant à un bon espace tel que G_s , et à une série cohérente de résultats (1), (2), (3), (4), était élégante , mais le plus intéressant est l'ensemble des conséquences, inattendues, qui en sortirent, sur les opérateurs différentiels elliptiques dégénérés, qui, eux, sont tout-à-fait spectaculaires.

La résolution des équations différentielles elliptiques bien posées avec données aux limites, pour une variété compacte $\bar{\Omega}$, d'intérieur Ω de bord $\partial\Omega$, avait déjà mené à étudier la régularité des solutions jusqu'au bord, en particulier l'analyticité jusqu'au bord si la variété, les coefficients, les seconds membres, les données au bord, sont analytiques (Morrey-Nirenberg). Il était normal d'essayer de remplacer analytique par Gevrey, là, il y avait un os, l'extension s'avérait introuvable, pas seulement introuvable, mais fausse, $G_s(\bar{\Omega})$ ne peut pas être d'interpolation entre $C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$! Goulaouic y réfléchit longuement. Là se produisit une coïncidence, sa rencontre avec Baouendi. Ils étaient tous les deux à Paris, travaillant dans le groupe d'analyse fonctionnelle, qui avait organisé un "Séminaire clandestin" de jeunes, très actifs, travaillant ensemble toutes les semaines dans une salle du sous-sol de l'Institut Poincaré (la "clandestinité" ayant pour but, en dehors de toute publicité, de réfléchir de manière complètement informelle dans un petit groupe). M S Baouendi avait étudié dans sa thèse des régularités d'opérateurs elliptiques dégénérés au bord c'est-à-dire de la forme (locale) $\sum_{i,j} D_i a_{i,j} \varphi D_j + \ldots$, D_i dérivées d'ordre 1, φ fonction ≥ 0 sur $\bar{\Omega}$, >0 dans Ω, nulle sur $\partial\Omega$ mais de différentielle non nulle, par exemple $\varphi\Delta + \ldots$. Aucun des deux n'imaginait qu'une connexion entre les deux théories existât. Et brusquement, un jour du printemps 1967, la lumière vint d'un seul coup les deux thèses étaient intimement liées ! Et ils élaborèrent aussitôt le programme de ce qu'il fallait démontrer, ils crurent que ce n'était plus qu'une question technique, alors que les réflexions et la rédaction durèrent jusqu'en 1972 environ. Ils ne cessèrent plus de collaborer jusqu'à aujourd'hui, Baouendi est à Purdue (USA), Goulaouic a vécu à Paris, ils s'écrivaient, se téléphonaient, se voyaient près d'une fois par an, et c'était chaque fois un bond mathématique en avant, ce fut une durable et profonde amitié, un constant travail en commun. Baouendi était Tunisien ; la Tunisie n'a pas su faire ce qu'il fallait pour le retenir, mais la France non plus, ce n'est ni la première ni la dernière fois.

Il faut, pour $\overline{\Omega}$ analytique, définir d'autres espaces que les Gevrey $G_s(\overline{\Omega})$ (et ce sont, au fond, ces autres espaces, $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$, qu'il faudrait appeler Gevrey), $f \in \mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ si d'une part $f \in \mathcal{A}_s(\Omega)$, et si, d'autre part, au voisinage de chaque point du bord, où on prend une carte dans $\mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ = \{x=(x',y), y \geq 0\}$, on a des inégalités où les dérivées normales sont prises avec un facteur de dégénérescence

$$\text{(1bis)} \quad |(D_y y D_y)^k D^\alpha_{x'} f| \leq (\text{constante})^{|\alpha|+k+1}((|\alpha|+2k)!)^s \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{d-1}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Alors $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ (qui est toujours $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ pour $s=1$) est d'interpolation entre $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$, et on a l'équivalence avec (2), (3) et (4) si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à bord analytique.

Mais ici, le rôle fondamental est joué par des A elliptiques dégénérés (c'est visible sur (1bis)), avec des termes d'ordre < 2 vérifiant des conditions convenables, pour lesquels il n'y a pas de condition aux limites. A est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$ sur lui-même, et de $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ (espace des distributions sur $(\overline{\Omega})$) sur lui-même. Ils établirent ensemble, pour ces opérateurs elliptiques dégénérés, toutes les mêmes propriétés qu'on connaît pour les opérateurs vraiment elliptiques, mais sans conditions aux limites, notamment la répartition des valeurs propres dans le cas auto-adjoint (à l'aide d'un théorème taubérien), par le développement de Fourier suivant les fonctions propres, $C^\infty(\overline{\Omega})$ devient isomorphe à l'espace des suites à décroissance rapide, $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ à l'espace s' des suites à croissance lente, $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ à l'espace des suites à décroissance exponentielle, $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ à l'espace des suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une majoration $|C_n| \leq (\text{constante})\exp(-\varepsilon n^{1/sd})$, pour un $\varepsilon > 0$ convenable, $d = \dim(\overline{\Omega})$. En particulier, les espaces $C^\infty(\overline{\Omega})$ sont tous isomorphes, indépendamment de la forme d' $\overline{\Omega}$ et de sa dimension, les $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ ne dépendent que de la dimension Un article avec Shimakura (1983) traite de la régularité höldérienne.

Ces résultats sont splendides, et firent immédiatement connaître Baouendi et Goulaouic dans le milieu international des équations aux dérivées partielles, un milieu extrêmement actif, dynamique, compétitif, où les nouvelles se propagent vite. En particulier, ils jouèrent le rôle du diable dans un problème soulevé par Hormander, si les X_i sont des champs de vecteurs C^∞ sur une variété C^∞, et si l'algèbre de Lie C^∞ engendrée par eux est celle de tous les champs de vecteurs C^∞, Hörmander avait démontré, dans un très bel article, que l'opérateur différentiel $\sum_i X_i^2$ est hypoelliptique, et s'était naturellement demandé si, dans le cas analytique, il est analytique hypoelliptique. Kohn et Nirenberg avaient cru le démontrer ; mais Goulaouic et Baouendi s'aperçurent, après des mois de réflexion frustrante sans résultat, qu'ils connaissaient depuis longtemps un contre-exemple (de telles mésaventures arrivent à tous les mathématiciens). C'est d'ailleurs subtil ; par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $D_x^2 + x^2 D_y^2$ est analytique, hypoelliptique, mais, dans $\mathbb{R}^3$, $D_x^2 + D_z^2 + x^2 D_y^2$ ne l'est pas ! Ce fut le début de plusieurs études ultérieures.

De là, ils se dirigèrent, en 1972-73, vers les problèmes de Cauchy singuliers, c'est-à-dire à donnée initiale sur une hypersurface caractéristique, par exemple, dans $\mathbb{R}^{d+1}$:

(5) $$t\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad u(0,.) = u_0,$$

où t est la variable de temps, $x \in \mathbb{R}^d$ la variable d'espace, F analytique, u_0 analytique.

La méthode moderne de résolution des problèmes de Cauchy est l'utilisation des chaînes d'Ovciannikov (étudiées et perfectionnées aussi par de nombreux auteurs), une telle chaîne est une famille de Banach $(X_s)_{0<s\leq 1}$, X_s contenu dans $X_{s'}$ avec une injection de norme ≤ 1 pour $s > s'$, X est la réunion (limite inductive) des X_s. On joue subtilement sur les applications höldériennes G à valeurs dans X au sens suivant .

(6) $$\|G(u) - G(v)\|_{X_{s'}} \leq (\text{constante})\|u-v\|_{X_s} / (s-s') \quad \text{pour} \quad s > s' .$$

Par exemple, X_s est l'espace des fonctions holomorphes bornées dans le disque de rayon s dans $\mathbb{C}$, muni de la convergence uniforme, G est linéaire, c'est la dérivation $\frac{\partial}{\partial z}$, (6) résulte de la formule intégrale de Cauchy. On résout le problème de Cauchy-Kowalewski ordinaire par un théorème général abstrait sur les chaînes d'Ovciannikov, resultant du théorème du point fixe (contraction dans un espace métrique complet).
Il se trouve qu'on peut, en généralisant le théorème abstrait, résoudre aussi (5), moyennant évidemment des conditions sur les racines caractéristiques de l'équation fuchsienne , il y a de nombreuses difficultés techniques à résoudre. Ils étendirent aussi le problème de Cauchy au cas des opérateurs pseudo-différentiels (avec G. Métivier), par exemple .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, P_x u) \ , \quad u(0,.) = u_0 \ ,$$

où P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre ≤ 1 pour les variables d'espace Comme dans tous les théoremes de Cauchy-Kowalewski, P doit être analytique, u_0 aussi. Il fallait donc pouvoir maîtriser les opérateurs pseudo-différentiels analytiques. Boutet de Monvel les avait définis et utilisés dans sa thèse, par leurs symboles, Krée aussi , il fallait ici, pour obtenir des majorations fines, les définir par leurs noyaux. En outre, il convenait de supposer u et F , pas nécessairement analytiques en toutes les variables, mais continues ou différentiables par rapport au temps, à valeurs dans l'espace des fonctions analytiques des autres variables.

Ce sont là de difficiles et importants travaux Comme toujours, dans le cas linéaire, on obtient par dualité un théorème d'unicité de Holmgren , Cauchy-Kowalewski donne, pour F continue en t à valeurs dans l'espace des fonctions analytiques des autres variables, l'existence et l'unicité d'une solution de même nature , Holmgren donne, avec les mêmes hypothèses d'analyticité, l'unicité (mais non l'existence !)

d'une solution continue en (t,x), ou même distribution en (t,x) si les données sont aussi C^∞ en (t,x).

Les publications correspondantes vont de 1974 à 1983. Tous ces problèmes, ces dernières années, vont progressivement du linéaire au non linéaire (le problème de Cauchy est non linéaire).

Goulaouic se rendait compte qu'en restant indéfiniment dans le linéaire, on montre des résultats de plus en plus perfectionnés et techniques, mais qu'il est souhaitable de trouver des voies plus franchement nouvelles. Il s'était donc, depuis plusieurs années, "investi" dans le non linéaire, il n'aura pas eu le temps d'en profiter complètement. Mais son dernier article (à paraître), avec Baouendi et Trèves, sur le théorème d'unicité de Holmgren non linéaire, est une excellente contribution, c'est le premier vrai théorème de Holmgren démontré dans le cas non linéaire. Goulaouic y a réfléchi plusieurs années. Il s'agit toujours d'une équation $\frac{\partial u}{\partial t} = F(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x})$, $u(0,.) = u_0$ donnée, où F est analytique, y a-t-il unicité de la solution ? C'est vrai au moins dans les trois cas suivants F est quasi-linéaire (linéaire en $\frac{\partial u}{\partial x}$), il y a alors unicité pour u_0, u de classe C^1, la dimension d des variables d'espace x est 1, il y a alors unicité pour u_0, $u \in C^2$, u_0 est analytique, $u \in C^2$ (auquel cas u est analytique par Cauchy-Kowalewski). Il n'y a pas de contre-exemple prouvant que les conditions imposées, notamment l'analyticité de u_0 dans le cas général, soient nécessaires. Les techniques sont fines, d'ailleurs l'article est long.

On utilise de très récents et très beaux travaux de Baouendi et Trèves sur les fonctions annihilées par un système complètement intégrable de champs de vecteurs <u>complexes</u>, $\mathbb{R}$-analytiques sur une variété $\mathbb{R}$-analytique, article où ils montrent que toute solution est limite de fonctions analytiques annihilées, explicitement exprimées.

La dernière main a été mise à cet article en juillet 1984, alors que Coulaouic était déjà tres atteint par le mal.

Tels sont les aspects fondamentaux de l'oeuvre de Charles Goulaouic, une oeuvre mondialement appréciée et qui restera , on en saisit très bien les grandes lignes et les tendances. Mais son apport mathématiques ne saurait être limité à ses publications Il avait eu de nombreux élèves , il a par exemple dirigé les thèses de P. Bolley (1972), J. Camus (1972), B. Hanouzet (1972), C. Zuily (1974), S. Alinhac (1975), B Helffer (1976), K. Taira (1978), A. Grigis (1981). Le groupe des équations aux dérivées partielles linéaires en France est très soudé, très vivant, très actif , il est réparti dans plusieurs universités, avec une dominante à Orsay , Goulaouic était l'un des principaux animateurs du groupe d'Orsay, la cheville ouvrière, mais un "modérateur non linéaire" comme dit Alinhac. Le séminaire d'Orsay se réunit tous les mardis, favorisant à la fois l'unité et la diversité. Il s est prolonge, depuis 1976, par le séminaire, d'abord hebdomadaire puis mensuel, de l'Ecole Polytechnique, créé par lui, appelé séminaire Goulaouic-Schwartz, puis Goulaouic-Meyer-Schwartz (bien malgré moi ; ma seule contribution a été d'y être auditeur) et les Ecoles d'été de Saint-Jean de Monts, organisées conjointement par Goulaouic, Pham The Lai de Nantes, Camus de Rennes. Le séminaire paraissait à la fin de l'année scolaire, c'est-à-dire aussitôt après les derniers exposés (le Centre de Mathématiques de l'X a un Secrétariat dont l'efficacité est connue , la dactylographie de ce séminaire était assurée par Michelle Lavallette) , et les spécialistes du monde entier étaient heureux de pouvoir l'étudier pendant l'été , ils s'accordent à dire qu'un tel séminaire avec ce niveau et cette parution régulière, n'a pas d'équivalent sur ce sujet. Le dernier séminaire portant le nom de Goulaouic a eu lieu, à titre posthume, le 28 février 1984 , les suivants porteront le nom de Bony - Yves Meyer - Sjostrand. On ne peut pas ne pas mentionner le rôle de Goulaouic à l'Ecole Polytechnique, au Centre de Mathématiques comme au Département d'Enseignement. Je suis entré à l'X en 1959, et je m'y suis fait détacher à plein temps en 1969. L'Ecole Polytechnique absorbe 300 des meilleurs jeunes scientifiques français chaque annee, mais le profit qu'en retire le pays est faible par rapport aux potentialités, cela constitue donc un regrettable "gaspillage de cerveaux". J'y suis entré avec le but explicite (et soutenu par les autorités de l'Ecole) de redresser cette situation, et de redonner à l'X le rôle, qu'elle peut et doit avoir, d'un des meilleurs établissements d'enseignement supérieur, scientifique et technologique Un large succès a été obtenu par une bonne collaboration d'enseignants, de chercheurs, des autorités, d'éleves, mais très incomplet, malgré d'excellents enseignants et de merveilleux laboratoires, les élèves restent coupés de la Recherche ! Ils s'investissent généralement trop peu dans l'Ecole, et surtout ils sont mal utilisés à leur sortie. En outre, il y a quelques années, il y a eu des moments très pénibles, je me suis souvent senti très isolé, parfois découragé ! J'ai compris qu'aucun vrai changement ne serait profitable si d'autres mathématiciens ne venaient pas se faire détacher à plein temps à l'Ecole. J'ai donc essayé de persuader Goulaouic de le faire, alors qu'il etait Maître de Conférences à mi-temps, cumulant. J'ai eu beaucoup de mal à le persuader, car il savait que la tâche serait lourde, qu'il risquait de s'y epuiser nerveusement. Il s'est toujours senti profondément responsable dans toutes ses activités, au Département de Mathematiques de Rennes ou d'Orsay, il savait et je savais qu'il le serait aussi à l'X. Après bien des tergiversations, il accepta, pensant que c'était un sacrifice pour la collectivité, et je lui en ai toujours su gré ! Aussitôt après qu'il fut décidé, Michel Demazure et Alain Guichardet se décidèrent aussi, et tous les trois entrèrent en même temps au Département de Mathématiques de l'X (et au Centre de Mathématiques) en octobre 1976, à Palaiseau. Maintenant, je suis à la retraite, Goulaouic m'a succédé comme Président du Département, (Guichardet vient de lui succéder), Demazure m'a succédé comme Directeur du Centre, Yves Meyer comme Professeur D'autres enseignants et chercheurs de grande qualité sont venus, dans tous les Départements et Laboratoires , il fait bon vivre à l'X pour des scientifiques aimant le travail et leur métier, et je sais donc que Goulaouic n'a jamais regretté d'être venu au contraire Mais le problème des rapports entre l'Ecole, les élèves et leur avenir, reste encore entier , on peut toutefois dire que les conditions sont maintenant favorables pour le résoudre sans traumatisme. Au cours de ces dix annees, s'est scellée entre Goulaouic et moi une grande amitié, c'est aussi une partie de sa vie et de la mienne.

Il était prêt à remplir bien d'autres tâches, et à continuer sa vie intellectuelle intense, soutenu par une vie familiale riche et heureuse, avec sa femme, ses deux filles et de tres nombreux amis.

L Schwartz

Laurent SCHWARTZ

P S Je remercie S. Alinhac et M.S. Baouendi des informations complémentaires qu'ils m'ont données, tant scientifiques que personnelles.