Laurent Schwartz

Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz

Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 7, New York: Academic Press, 1981, p. 1–25

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

Laurent Schwartz

Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz

Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud. vol. 7 (1981), p. 1-25

MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS PART A
ADVANCES IN MATHEMATICS SUPPLEMENTARY STUDIES VOL 7A

Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz†

LAURENT SCHWARTZ

Centre de Mathematiques
Ecole Polytechnique
Paris, France

Contents

A CURRICULUM VITAE

Laurent SCHWARTZ
Ne le 5 Mars 1915 a Paris
Domicilie 37, rue Pierre Nicole, 75005 Paris

1934–1937	Ecole Normale Superieure
1937	Agrege de Mathematiques
1937–1940	Service militaire et guerre
1940–1942	Attache de recherche au C N R S
1943	Docteur-es-Sciences (Universite de Strasbourg refugiee a Clermont-Ferrand)
1943–1944	Boursier de l'Aide a la Recherche Scientifique
1944–1945	Charge d'enseignement a Grenoble
1945–1952	Maître de Conferences, puis Professeur a la Faculté des Sciences de Nancy
1946	Charge du Cours Peccot
1953–1959	Maître de Conferences, puis Professeur a la Faculte des Sciences de Paris
1959–1969	Professeur a la Faculte des Sciences, puis a l'Universite Paris VII Professeur a l'Ecole Polytechnique

† Notice imprimee a l'occasion de la candidature a l'Academie des Sciences de Paris et mise a jour en Octobre 1980

ISBN 0 12 512801 0

1969–1980 Professeur a l'Ecole Polytechnique (detache de l'Enseignement Superieur)
1980– Professeur a l Universite Paris VII, Directeur du Centre Mathematique de l'Ecole Polytechnique

Prix

1950 Medaille FIELDS, Congres International des Mathematiciens, Cambridge, Massachusetts, U S A
1955 Prix Carriere de l'Academie des Sciences, Paris, France
1964 Grand Prix de Mathematiques et de Physique, Academie des Sciences, Paris, France
1972 Prix Cognac-Jay, Academie des Sciences, Paris, France, (avec J L Lions et B Malgrange)

Distinctions diverses

1956 Professeur Honoraire de l'Universite d'Amerique, Bogota, Colombie et Professeur Honoraire de l'Universite de Buenos-Aires, Argentine
1957 Membre correspondant de la Societe Royale des Sciences de Liege, Belgique
1958 Membre Honoraire de l Union Mathematique Argentine Academicien Honoraire, Academie des Sciences Exactes Physiques et Naturelles, Buenos-Aires, Argentine
1960 Docteur Honoris Causa de l'Universite de Humboldt, Berlin, R D A
1962 Docteur Honoris Causa de l'Universite Libre de Bruxelles, Belgique
1964 Membre Correspondant de l'Academie des Sciences du Bresil
1965 Professeur Honoraire de l'Universite Nationale des Ingenieurs du Perou, Lima, Perou
1971 Membre Honoraire du Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Inde
1972 Membre Correspondant, Academie des Sciences, Paris, France
1975 Membre de l Academie des Sciences
1977 Membre Etranger de l'Academie Indienne des Sciences

B EXPOSE GENERAL DES TRAVAUX

Pendant mes annees de lycee, je me suis intéressé d'abord au latin et au grec, puis a la geometrie et a l'analyse, mais aussi a la physique, la chimie, la biologie Je cherchais deja a me faire de tout ce que je connaissais en mathematiques des theories coherentes ou des exposes coherents de theories existantes, a la fois pour des raisons d'esthetique mathematique et en vue de creer des outils maniables dans les applications

A l'Ecole Normale, j'ai étudié l'intégrale de Lebesgue, les probabilités, les fonctions d'une variable complexe, les équations aux dérivees partielles elliptiques, la geometrie infinitesimale, mais aussi l'analyse fonctionnelle (cours de J LERAY au Collège de France) P LEVY a eu des lors une grande influence sur moi, tant pour les probabilités que pour l'analyse classique. J'ai réfléchi dès cette époque sur la fameuse fonction de Dirac, mais sans aboutissement. On retrouve dans tous mes travaux ultérieurs les marques de cette formation initiale.

Mes premières années de chercheur (1940–1942) se sont passées à Clermont-Ferrand où était réfugiée la Faculté des Sciences de Strasbourg. Là, il y avait grande concentration de mathématiciens: J. DIEUDONNÉ, H. CARTAN, J. DE POSSEL, CH. EHRESMANN, J. DELSARTE, A. WEIL, S. MANDELBROJT, A. LICHNEROWICZ. La rencontre de N. BOURBAKI m'a initié à des idées toute nouvelles après ma formation d'analyste classique et m'a orienté vers l'algèbre et la topologie, pas tellement pour elles-mêmes que pour leurs applications à l'analyse. Le cours d'analyse fonctionnelle de J. DIEUDONNÉ a été à l'origine de ma thèse; celle-ci, consacrée á l'étude des sommes d'exponentielles, utilise des méthodes d'analyse fonctionnelle d'une manière nouvelle pour résoudre des problèmes d'approximation de type classique.

A la fin de la guerre, travaillant tout seul, je me suis fait une théorie complète de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques généraux, théorie qui m'a paru alors sans application et que j'ai gardée pour moi; elle devait être la clef de la théorie des distributions. C'est cette formation antérieure qui fait que la "découverte" des distributions fut en fait presque instantanée au début de 1945. Trouver une *théorie* qui rendait toutes les fonctions indéfiniment dérivables et permettait la dérivation terme à terme des séries convergentes, c'était exactement le genre de recherche qui me convenait: théorie cohérente, mais restant près des réalités et des applications. J'ignorais alors les travaux de S. BOCHNER, S. L. SOBOLEV, de tous ceux qui avaient travaillé sur des objets analogues; par contre, je savais déjà que les solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique pouvaient se définir sans mettre de dérivées dans la definition et qu'elles étaient automatiquement indéfiniment dérivables, et qu'au contraire, pour les équations hyperboliques, il devait y avoir une définition n'utilisant pas de dérivées et donnant des solutions effectivement non dérivables.

Mes travaux sur les distributions ont été ensuite constamment accompagnés de travaux d'analyse fonctionnelle, chacun motivant l'autre. Dans les dernières années, l'analyse fonctionnelle, l'intégration et mes souvenirs de probabilités, en même temps que la difficulté de concilier les points de vue hostiles des divers groupes de mathématiciens sur la théorie de la mesure, m'ont naturellement conduit á une synthèse, qui est donc elle aussi une théorie, celle des mesures de Radon sur les espaces topologiques arbitraires. Il en est découlé très naturellement des recherches sur les probabilités cylindriques, les applications radonifiantes, la désintégration des mesures et ses applications aux processus stochastiques, qui sont le sujet de mes recherches actuelles, aujourd'hui complètement orientées vers les probabilités.

C. EXPOSE DETAILLE DES TRAVAUX

I. *Polynomes, sommes d'exponentielles, fonctions moyenne-periodiques, analyse et synthese harmoniques*

(1) *Polynomes et sommes d'exponentielles reelles* Ch. H. MUNTZ avait généralisé le théorème d'approximation de WEIERSTRASS comme suit. Soit Λ: $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n; \ldots$ une suite donnée de nombres réels ≥ 0. Alors toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes généralisés (sommes finies $\sum a_n x^{\lambda_n}$, $\lambda_n \in \Lambda$) si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\lambda_n$ diverge. Si alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\lambda_n$ converge, quelles sont les fonctions continues qui peuvent être approchées par les polynômes précédents? La réponse à cette question fut l'objet de ma thèse. Les fonctions approchables sont exactement les fonctions continues sur $[0,1]$, qui sont analytiques et développables en série de Taylor (lacunaires) généralisées $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\lambda_n}$, convergentes par groupement de termes pour $|x| < 1$.

Le changement de variables $x = \exp(-X)$ ramène à un problème plus maniable sur des sommes d'exponentielles réelles $\sum a_n \exp(-\lambda_n X)$ sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. On trouve alors des théorèmes sur les séries de Dirichlet lacunaires.

(2) *Sommes d'exponentielles imaginaires* Ce travail [5] fait suite aux précédents et la substitution des sommes d'exponentielles aux polynômes lui donne tout son intérêt, car il va concerner des séries de Fourier généralisées $\sum a_n \exp(i\lambda_n X)$, où les λ_n ne sont pas tous des multiples de l'un d'entre eux. On se donne encore une suite Λ de nombres réels (de signe quelconque) et un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle. Ou bien les polynômes trigonométriques généralisés, c'est-à-dire les sommes finies $\sum a_n \exp(i\lambda_n X)$, permettent d'approcher toute fonction continue, ou bien on peut caractériser les fonctions continues qui peuvent être approchées; ce sont exactement celles qui ont un développement en série de Fourier généralisée, convergeant par groupement de termes et facteurs exponentiels d'Abel: $F(X) = \lim_{t\to 0} \sum a_n \exp(i\lambda_n X - |\lambda_n| t)$. Ainsi un procédé de sommation classique des séries de Fourier, celui d'Abel, est valable, moyennant en plus des groupements de termes, pour toutes les séries d'exponentielles imaginaires. Les groupements de termes sont ici inévitables, dans le cas où il y a des groupements de λ_n très voisins les uns des autres [par exemple si l'on prend la suite de couples n, $n + 1/n!$, on sera obligé de faire des groupements de deux termes pour qu'il y ait convergence].

Ces articles ont donné naissance à plusieurs travaux ultérieurs, d'autres mathématiciens et de moi-même, sur les fonctions moyenne-périodiques et l'analyse ou synthese harmonique Ils donnent une convergence de developpements suivant des harmoniques dont les frequences sont distribuees un peu n'importe comment, ce qui est le cas de tous les systemes vibratoires non periodiques, donc ils pourraient être susceptibles d'applications physiques

(3) *Theorie des fonctions moyenne periodiques* [9] Ces fonctions ont ete introduites par J DELSARTE (qui a d'ailleurs eu une tres grande influence sur moi, ainsi que J DIEUDONNE pendant mes 7 annees a Nancy (1945–1952)) Il avait pose le probleme en termes d'equations integrales, dont il avait trouve les solutions par des sommes d'exponentielles Il avait eu des difficultes de convergence, d'ou la necessite d'hypotheses simplificatrices, je me suis aperçu qu'en fait la convergence avait lieu dans le cas le plus general, pourvu qu'on utilise a la fois les groupements de termes et les facteurs exponentiels d'Abel du travail precedent Mais en même temps, j'ai trouve une autre definition des fonctions moyenne-periodiques, inspiree des idees nouvelles sur la theorie des groupes (theoremes tauberiens de WIENER, livre d'A WEIL sur les groupes topologiques, paru en 1940) Il faut faire jouer un rôle fondamental au groupe des translations sur la droite Une fonction continue F sera dite moyenne-periodique si l'ensemble des combinaisons lineaires finies de ses translatees ne permet pas l'approximation, uniformement sur tout compact, de toute fonction continue On definit alors un spectre de F c'est l'ensemble des λ (ici nombres complexes quelconques) tels que $\exp(\lambda X)$ soit approchable par des combinaisons lineaires de translatees de F On est oblige d'introduire des elements multiples dans le spectre, et pour cela de considerer non seulement des exponentielles $\exp(\lambda X)$, mais des exponentielles-polynômes $\exp(\lambda X)P(X)$, P polynôme La recherche du spectre sera l'analyse spectrale ou analyse harmonique, on montrera qu'il n'est jamais vide si $F \neq 0$ Ensuite on cherchera la synthese spectrale ou synthese harmonique F est-elle approchable par les combinaisons lineaires finies d'exponentielles-polynômes de son spectre, est-elle une serie $\sum a_n \exp(\lambda_n X)$ $P_n(X)$ formee des exponentielles polynômes de son spectre, avec un mode de convergence convenable? Il se trouve que c'est vrai, et la convergence cherchee est toujours par groupements de termes avec facteurs exponentiels d'Abel

J'ai aussi donne une autre demonstration, independante de ce mode de convergence, pour l'analyse et la synthese spectrales J P KAHANE en a donne ulterieurement une plus simple En termes physiques, on peut donner de l'analyse et de la synthese spectrales l'enonce simplifie suivant le spectre d'une onde est l'ensemble des frequences des ondes monochromatiques qui peuvent être obtenues par combinaison de l'onde et de ses dephasees, l'onde est une serie des ondes monochromatiques correspondant a son spectre de fréquences. Mais cette image cache évidement les principales difficultés mathématiques du problème.

Il n'est pas nécessaire de partir *d'une* fonction et on peut, plus généralement, faire l'analyse et la synthèse harmonique d'un sous-espace fermé, invariant par les translations, de l'espace des fonctions continues sur la droite.

B. MALGRANGE, dans sa thèse (1955), a donné une généralisation partielle du théorème précédent au cas de fonctions de plusieurs variables. Malgré de nombreuses recherches depuis, la possibilité de généraliser à plusieurs variables est longtemps restée un problème ouvert; Gurewitch a montré récemment que le résultat était faux, il y a pour les dimensions $\geqslant 2$ des sous espaces fermés invariants par translation, qui ne contiennent aucune exponentielle.

(4) *Analyse et synthese harmoniques dans divers espaces.* La théorie précédente est relative à l'espace des fonctions continues, pour la convergence uniforme sur tout compact. En faisant varier l'espace fonctionnel et toujours intervenir les translations, on obtient des problèmes très variés. L'un d'eux a longtemps retenu l'attention: il est relatif aux espaces L^1 et L^∞; l'analyse harmonique, consistant simplement à dire que le spectre n'est pas vide, est le célèbre théorème taubérien de N. WIENER ou son équivalent dual, le théorème de BEURLING. On a longtemps cherché si la synthèse harmonique était possible aussi dans L^1 et L^∞. J'ai donné le premier exemple montrant qu'elle n'était pas possible dans $\mathbb{R}_n$, pour $n \geq 3$, dans [13]. Ce résultat était inattendu. Le cas de $\mathbb{R}^1$ et de $\mathbb{R}^2$, beaucoup plus difficile, est resté longtemps non résolu. C'est P. MALLIAVIN qui l'a résolu et généralisé.

J'ai étudié ensuite l'analyse et la synthèse harmoniques dans l'espace $\mathscr{S}'$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. La transformation de Fourier des distributions tempérées, dont je parlerai plus loin, me permettait de ramener ce problème à un problème d'algèbre différentielle: dans l'algèbre des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$, un idéal fermé est-il déterminé par ses idéaux ponctuels? Je n'ai pas pu répondre à cette question et me suis adressé à H. WHITNEY qui avait beaucoup étudié les fonctions différentiables. Il a pu résoudre le problème, avec une réponse affirmative, ce qui m'a permis de résoudre les problèmes harmoniques dans l'espace $\mathscr{S}'$. Le théorème de WITHNEY, ainsi né d'un problème d'analyse harmonique, a donné liue à de nombreux travaux ultérieurs sur les fonctions différentiables, notamment de B. MALGRANGE et J. C. TOUGERON.

II. *Theorie des distributions*

J'ai trouvé les principaux résultats sur les distributions vers 1945–1946, mais mes deux livres [19] ne sont parus qu'en 1950 et 1951. C'est cette théorie qui m'a valu la Médaille Fields du Congrès International des Mathématiciens en 1950. Beaucoup de mathématiciens ont pressenti les distributions; le calcul symbolique d'Heaviside, dès la fin du siècle dernier, était, sous forme particulièrement incorrecte et qui fut très incomprise, un calcul de distributions. N. WIENER, dès 1926, a "régularisé" par des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, pour définir des images de Fourier qui n'existaient pas au sens usuel. J. LERAY, K. FRIEDRICHS, tous les mathématiciens de l'école de R. COURANT ont utilisé des dérivées faibles, qui sont en fait des dérivées au sens des distributions, lorsqu'elles sont elles-mêmes des fonctions. Je crois qu'on peut particulièrement citer les travaux de S. BOCHNER, T. CARLEMAN et S. L. SOBOLEV (dont en fait je n'avais pas connaissance en 1945).

S. BOCHNER a introduit, dans son livre sur l'intégrale de Fourier en 1932, sur la droite réelle, des "dérivées formelles de produits de polynômes par des fonctions de L^2"; ce sont mes futures distributions tempérées. Il en fait la transformation de Fourier. C'est un appendice de quelques pages à son livre; il ne semble pas lui-même y attacher beaucoup d'importance. Le support n'y est pas, ni aucune topologie, ni les conditions de transformation du produit multiplicatif en produit de convolution, et finalement la distribution de Dirac δ n'y est pas nommée. L'effort de T. CARLEMAN va dans le même sens que celui de S. BOCHNER: trouver un formalisme pour la transformation de Fourier. Il prend des "différences formelles de fonctions holomorphes à croissance lente dans le demi-plan complexe supérieur et dans le demi-plan inférieur"; ce sont encore mes futures distributions tempérées et T. CARLEMAN en fait la transformation de Fourier. En fait, ce travail prépare plutôt les hyperfonctions de M. SATO, sous la forme exposée par A. MARTINEAU, que les distributions. S. L. SOBOLEV a introduit ses fonctionnelles de façon très conséquente, dans un long article en 1936, en vue d'étudier les équations aux dérivées partielles. Les fonctions plusieurs fois différentiables à support compact sont les fonctions tests nécessaires à la définition: il y a une dérivée généralisée, donc on peut appliquer à ces fonctionnelles des opérateurs différentiels; et les problèmes aux limites sont modifiés, en ramenant les conditions aux limites dans le second membre, par l'intervention de couches portées par la surface limite. Il a introduit aussi les espaces fonctionnels H^s qui portent son nom, encore pour étudier les équations aux dérivées partielles. Mais δ n'y figure pas, ni la convolution ni la transformation de Fourier, ni aucune des questions vectorielles topologiques soulevées par les distributions. Le calcul des distributions le plus audacieux a été incontestablement fait par les physiciens théoriciens. La "fonction de Dirac" date de 1926; mais les physiciens ont été considérablement plus loin, bien avant que les mathématiciens n'aient commencé à entrevoir une approche du problème. Par exemple, ni S. BOCHNER, ni

T. CARLEMAN, ni S. L. SOBOLEV n'ont abordé les rapports avec la physique. En 1950, quand mon livre sur les distributions est paru, les physiciens avaient déjà introduit toutes les fameuses fonctions singulières de la physique théorique relativiste; or ce sont-là des distributions malaisées á définir mathématiquement de facon convenable et qui n'ont été approfondies complètement qu'à partir de la thèse de P. D. METHEE en 1954.

Il a donc fallu construire une théorie complète, cohérente, avec tous les outils d'analyse fonctionnelle nécessaires: définir correctement les distributions, leurs dérivées, le produit tensoriel, la convolution, la transformation de Fourier, et surtout en fait donner *le bon point de vue* susceptible d'être utilisé dans les domaines d'applications les plus divers, et qui a été universellement adopté immédiatement.

Je ne résumerai que très rapidement la théorie des distributions.

- Le chapitre I définit les distributions comme formes linéaires continues sur l'espace $\mathscr{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Il apparaît ainsi aussitôt que, d'une part les distributions généralisent les fonctions un peu comme les nombres réels généralisent les nombres rationnels ou comme les nombres complexes généralisent les nombres réels, mais aussi qu'elles donnent une définition mathématiquement correcte des "distributions" de charges électriques ou de masses de la physique ou de la mécanique, d'où leur nom.

- Le chapitre II définit les dérivées des distributions: toute distribution est indéfiniment dérivable, et la dérivation est une opération continue, donc on pourra désormais dériver terme à terme des séries convergentes, au sens des distributions naturellement. Ce chapitre donne en outre de nombreux exemples et on retrouve aussi les "parties finies" de J. HADAMARD. On trouve aussi l'exemple qui servira de fondement aux formules de l'électrostatique: $\Delta(1/r) = -4\pi\delta$, dans $\mathbb{R}^3$ (formule de Poisson pour les potentiels).

- Le chapitre III étudie les structures topologiques de l'espace $\mathscr{D}$ et de l'espace $\mathscr{D}'$ des distributions. C'est là qu'il y avait à résoudre les plus grandes difficultés, la théorie de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes n'ayant pas encore à ce momentlà tous les outils nécessaires.

- Le chapitre IV étudie la multiplication; elle n'est pas toujours possible et c'est là que se trouvent certaines des plus grandes difficultés des calculs de la théorie quantique des champs.

- Le chapitre V étudie le produit tensoriel.

- Le chapitre VI traite de la convolution, où de remarquables résultats peuvent être obtenus. Les principales applications aux équations aux dérivées partielles proviennent de la convolution; c'était visible pour les équations à coefficients constants, et j'ai donné au chapitre VI un grand nombre d'applications (par exemple problème de Cauchy pour des équations hyperboliques). Mais la découverte des opérateurs pseudo-différentiels en 1964 (A. UNTERBERGER et J. BOKOBZA–UNTERBERGER, L. NIRENBERG, L. HÖRMANDER) a même montré qu'en fait la convolution intervenait aussi fondamentalement dans les équations à coefficients variables.

- Le chapitre VII traite de la transformation de Fourier des distributions tempérées, avec l'introduction des espaces $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$, leurs propriétés topologiques, la transformation de la multiplication en convolution et vice-versa, avec les espaces $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{O}'_C$, les théorèmes de BOCHNER et de PALEY–WIENER généralisés.

Dans l'édition de 1966 de mon livre, ont été ajoutés deux chapitres:

- le chapitre VIII sur la transformation de Laplace
- le chapitre IX sur les courants, ou formes différentielles-distributions sur les variétés, étendant ainsi les distributions aux champs de tenseurs, aux courants électriques, de ligne, surface ou volume tels qu'ils interviennent dans les équations de Maxwell, etc . . . L'idée des courants avait été pressentie par de RHAM qui, aussitôt paru mon article de 1945 sur les distributions, en fit indépendamment de moi la théorie qu'il a ensuite remarquablement appliquée à la théorie des formes harmoniques sur les variétés riemanniennes et à la topologie algébrique sur les variétés.

J'ai publié quelques autres articles sur les distributions:

- [17], qui les applique aux équations d'évolution avec problème de Cauchy (chaleur, ondes, etc. . .);
- [22], sur les multiplicateurs de $\mathscr{F}L^p$ (étude qui a été poursuivie par de nombreux auteurs);
- [24], qui résout les problèmes de Cousin sur une variété analytique complexe par des méthodes explicites que ne fournit pas la théorie des faisceaux et va dans le sens des premiers travaux de K. KODAIRA;
- [34], qui résout, dans un cas très particulier, le problème de la division des distributions, problème que j'avais posé dans mon livre en vue des équations de convolution tempérées et qui n'a été résolu que bien plus tard par des méthodes très difficiles par L. HÖRMANDER et surtout par S. ŁOJASIEWICZ. (Ce dernier a d'ailleurs poursuivi très loin les méthodes qu'il avait introduites pour résoudre le problème de la division);
- [37], qui introduit les distributions régulières et intégralement régulières dans les changements de coordonnées;
- enfin [48] et [59] qui traitent de problèmes particuliers.

Les distributions, et les méthodes introduites dans la théorie, ont eu des applications dans les domaines les plus variés des mathématiques. En analyse surtout: analyse de Fourier, groupes de Lie (avec F. BRUHAT et HARISH–CHANDRA), fonctions analytiques mises en dualité avec les fonctionnelles analytiques et hyperfonctions, théorie du potentiel (M. BRELOT et J. DENY), théorie des semi-groupes distributions (J. L. LIONS et J. CHAZARAIN), mais avant tout dans la théorie des équations aux dérivées partielles (et équations de convolution ou pseudo-différentielles). Cette théorie, qui fait la liaison des mathématiques avec la physique et la mécanique, eut depuis toujours la faveur des plus grands mathématiciens. En France, H. POINCARÉ et J. HADAMARD y consacrèrent une grande part de leur vie. Il serait trop long, et d'ailleurs déplacé, d'en faire ici l'historique. Beaucoup d'articles sur les équations aux dérivées partielles ont directement influencé ma rédaction des distributions entre 1945 et 1950 (I. FREDHOLM, J. HADAMARD, S. L. SOBOLEV, Marcel RIESZ, N. ZEILON et L. GARDING, J. LERAY, R. COURANT, K. FRIEDRICHS, B. LEVI, etc. . .). Et je crois que ce sont en bonne partie les distributions qui ont permis, ou pour le moins largement favorisé, des travaux comme ceux de J. L. LIONS et B. MALGRANGE, L. NIRENBERG, L. HÖRMANDER, G. STAMPACCHIA, E. MAGENES, etc. . . , et le très grand développement mondial actuel des équations aux dérivées partielles qui occupent une place essentielle dans les séminaires, colloques et publications d'analyse.

Les distributions ont continué à être utilisées partout en physique théorique; continué, puisque les physiciens, fort justement, n'avaient pas attendu que les mathématiciens créent l'outil rigoureux dont ils avaient besoin et s'en étaient heureusement déjà servi avant! De très difficiles problèmes sur les distributions sont posés par la théorie quantique des champs et beaucoup sont sans doute encore loin d'être résolus. Mais on utilise aussi les distributions en électricité, ondes hertziennes (filtrage), en diffraction, etc. . . Le fait que les distributions soient enseignées dans les cours de 2ème cycle des universités pour les mathématiciens, et souvent pour les physiciens, mérite d'être mentionné. Mon livre de "Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques", [46], est destiné à un cours de licence pour mathématiciens et physiciens et a été traduit en anglais, espagnol, russe et japonais.

Enfin, il faut signaler que bien d'autres êtres mathématiques nouveaux sont nés à la suite des distributions: fonctionnelles analytiques et hyperfonctions (M. SATO–A. MARTINEAU), duals d'espaces de GEVREY et d'espaces d'autres classes de MANDELBROJT (J. LERAY–Y. OHYA, CH. ROUMIEU, E. MAGENES, J. L. LIONS, CH. GOULAOUIC, M. S. BAOUENDI), fonctions généralisées (I. M. GELFAND et G. E. CHILOV), distributions généralisées de N. ARONSZAJN et M. S. BAOUENDI.

III. *Analyse fonctionelle, distributions a valeurs vectorielles et theoreme des noyaux*

(1) *Espaces vectoriels topologiques localement convexes.* Les outils d'analyse fonctionelle nécessaires à la théorie des distributions étaient insuffisants et il a ete nécessaire de les créer. Les remarquables travaux de S. BANACH, à part le théorème de HAHN–BANACH, ne sortaient guère des espaces de BANACH et de FRECHET. Or le dual d'un espace de FRECHET n'est pas un espace de FRECHET. J. DIEUDONNE avait étendu bien des résultats aux espaces localement convexes arbitraires (et j'avais été fortement influencé par lui); G. W. MACKEY avait fait de remarquables travaux, mais restés assez ignorés. Or il était indispensable de développer correctement les parties topologiques de la théorie des distributions. J'ai toujours été intéressé par les applications de l'analyse fonctionnelle à l'analyse. Ma thèse [4] utilisait déjà largement des méthodes d'analyse fonctionnelle. Que j'aie fait de l'analyse fonctionnelle "pour elle-même" et qu'ensuite j'en utilise les résultats, il n'y a rien là que de très naturel.

Il fallait étendre les espaces de FRECHET et définir leurs limites inductives. La notion de limite inductive, en algèbre ou en théorie des catégories, est aujourd'hui universellement connue et considérée comme élémentaire, mais elle était ignorée en 1945 (alors que les limites projectives avaient été introduites dans le livre d' A. WEIL sur les groupes topologiques). C'est J. DIEUDONNE qui en a eu l'idée, à la suite de ma description topologique de l'espace $\mathscr{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et nous avons dégagé dans [14] less principales propriétés des espaces de FRECHET et de leurs limites inductives, que j'avais utilisées et démontrées directement dans le cas particulier des espaces de distributions. C'est à partir de notre travail que N. BOURBAKI a introduit les notions d'espace bornologique, espace tonnelé, etc. . . A partir de ces années 50, et pendant une dizaine ou une quinzaine d'années, les espaces vectoriels localement convexes généraux ont remplacé partout les espaces de BANACH, et ont donné lieu à de nombreux travaux, dont les plus importants furent ceux d'A. GROTHENDIECK sur les produits tensoriels topologiques ε et π et les espaces nucléaires, qui ont d'ailleurs été l'objet de mon séminaire 1953–1954. On doit même signaler que beaucoup de maîtrises de mathématiques de nos Universités contiennent un certificat sur les espaces vectoriels topologiques. A l'heure actuelle, on abandonne un peu, à juste titre je pense, les espaces vectoriels topologiques pour revenir aux espaces de Banach dont on étudie les propriétés géométriques fines.

(2) *Le theoreme des noyaux et les distributions a valeurs vectorielles.* La physicien P. A. M.DIRAC avait senti intuitivement le théorème des noyaux, disant

que toute application linéaire continue de $\mathscr{D}_y$ dans $\mathscr{D}'_x$ peut s'exprimer, d'une manière unique, par un noyau-distribution, $K_{x,y}$, sous la forme: $T_x = \int K_{x,y}\varphi(y)\,dy$. Il ne pouvait l'exprimer qu'en termes extrêmement vagues, c'est néanmoins lui qui m'en a donné l'idée et ma démonstration dans [18], assez compliquée du point de vue de l'analyse fonctionnelle telle qu'elle existait alors, fit l'object de mon exposé au Congrès International des Mathématiciens de 1950. J'ai ensuite très longuement développé la théorie des fonctions différentiables et des distributions à valeurs vectorielles dans [30, 39, 42], généralisant ainsi considérablement le théoréme des noyaux et utilisant massivement les travaux précités de A. GROTHENDIECK.

(3) *Perturbations d'homomorphismes par des operateurs compacts dans les espaces de Frechet.* Il s'agit là d'une Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [23], qui étend aux espaces de FRECHET les théorèmes classiques de Frédéric RIESZ sur les opérateurs compacts dans les espaces de BANACH. Le but de cette note était de permettre à H. CARTAN et J. P. SERRE de montrer que la cohomologie d'une variété analytique compacte, par rapport à un faisceau analytique cohérent, est de dimension finie. L'extension aux espaces analytiques et plusieurs autres théorèmes utilisent toujours [23].

(4) *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux reproduisants* [51] étend des résultats de S. BERGMAN et N. ARONSZAJN. Les meilleures applications qu'il peut avoir sont relatives aux probabilités gaussiennes dans les espaces vectoriels topologiques. Je n'ai vu ces applications que plus tard et ne les ai jamais rédigées, mais elles se voient sans peine et sont implicitement connues, et utilisées par tous les probabilistes. D'autre part, [52] développe à partir de là une théorie des "points distributions" d' une représentation unitaire d'un groupe de Lie et montre, par exemple, que toute distribution de type positif d'un groupe de Lie semi-simple est intégrale de distributions de type positif élémentaires (théorème de BOCHNER généralisé).

(5) *Le Theoreme du graphe ferme* BANACH, avait énoncé un théorème du graphe fermé pour les espaces de FRECHET. A. GROTHENDIECK l'avait considérablement étendu, mais il restait inapplicable à certains espaces comme l'espace $\mathscr{D}'$ des distributions. Cependant A. GROTHENDIECK avait émis comme conjecture la validité du théorème du graphe fermé pour cet espace. La conjecture est restée ouverte plus de 10 ans. D. RAIKOV, mathématicien soviétique, a prouvé cette conjecture en 1966 et j'en ai trouvé une démonstration beaucoup plus simple relative même à un graphe borélien, utilisant la théorie de la mesure, quelques semains après lui. J'utilisais le fait que $\mathscr{D}'$ est souslinien. Ma démonstration a encore été simplifiée par A. MARTINEAU

qui l'a rendus indépendante de la théorie de l'intégration, et c'est M. de WILDE qui a, semble-t-il, trouvé la forme définitive du théorème en introduisant les espaces à réseau absorbant, qu'on appelle d'ailleurs espaces de WILDE.

IV. *Physique theorique*.

Je m'étais intéressé depuis longtemps à la physique théorique. A la suite d'un séminaire commun entre mathématiciens et physiciens, tenu par Maurice LEVY et moi-même en 1956–57, j'ai essayé d'utiliser les distributions et les noyaux reproduisants [51] pour étudier les particules élémentaires en mécanique quantique relativiste. Je me suis borné aux particules sans interaction. C'est là un problème physique d'un intérêt évidemment très limité, mais je pense que la compréhension complète de ce cas est indispensable à toute étude du cas général avec interaction. On peut dire, si on veut, que des travaux comme ceux de A. WIGHTMAN sur la théorie quantique des champs doivent d'abord partir du cas sans interaction. Cela revient encore à se demander quelles sont exactement les particules élémentaires et on sait que ce problème devient de plus en plus compliqué! Il est lié à l'étude des représentations unitaires irréductibles de groupes de Lie, ayant comme quotient le groupe de Lorentz inhomogène ou groupe de Poincaré. Il se trouve que les noyaux reproduisants des sous-espaces hilbertiens [51] permettent une étude très complète et trouvent les "fonctions singulières" de la mécanique quantique (qui sont des distributions et non des fonctions) précisément comme des noyaux reproduisants; on les définit en fait par leur transformée de Fourier. On trouve aussi, de cette manière, une "densité de probabilité de présence", déjà trouvée par E. WIGNER, et une "probabilité de spin". Le livre que j'ai écrit à ce sujet est un "Lecture Notes" de séminaires tenus, l'un à Buenos-Aires [43], l'autre à Berkeley [44]. Il a d'abord été publié en U.R.S.S., avec une préface de N. N. BOGOLIUBOV, puis en français et en anglais [70].

J'ai aussi publié un petit article [49], à la suite d'une conférence à un séminaire de Physique à Rio de Janeiro. Les physiciens ont besoin, dans le cas d'une dimension, d'utiliser les propriétés d'analyticité dans le demi-plan supérieur de l'image de Fourier d'une distribution à support dans la demi-droite positive, pour déduire des relations entre sa partie réelle et sa partie imaginaire, dites relations de causalité. Ces relations utilisent la convolution avec $vp.\ (1/x)$ et exigent des conditions très strictes pour pouvoir être appliquées; c'est ce que fournit cet article. Les cas importants pour la physique sont pluridimensionnels, la demi-droite positive est remplacée par le cône de Lorentz d'avenir, ce qui donne idée des difficultés de l'application correcte des formules cherchées.

V *Théorie de l'intégration, probabilités, probabilités cylindriques et applications radonifiantes*

(1) *Mesures de radon sur des espaces topologiques arbitraires* J'ai été formé, pendant mes années d'Ecole Normale Supérieure, à l'étude de l'intégration et du calcul des probabilités par P Levy a qui je dois énormément (voir mes publications [1, 2, 3]) J'ai travaille ensuite dans d'autres directions, mais je suis revenu à l'integration et aux probabilités à partir de 1964 En realite, les distributions, l'analyse fonctionnelles, l'intégration, devaient m'y conduire normalement.

La théorie de l'intégration a toujours été l'objet d'un conflit assez aigu entre deux tendances D'une part, on peut faire une théorie abstraite de la mesure, partant d'un ensemble muni d'une tribu sur lequel une mesure est une fonction dénombrablement additive D'autre part, notamment à la suite des travaux de H Cartan et A Weil, N Bourbaki a defini une mesure de Radon comme une forme lineaire continue sur l'espace $C(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, et l'espace X doit alors être un espace topologique localement compact J'ai introduit en 1964, [55], une notion de mesure de Radon sur des espaces topologiques séparés arbitraires, qui peut servir d'unification entre les deux conceptions Si l'espace est localement compact, on retrouve les mesures de Radon de Bourbaki. Les mesures abstraites restent plus genérales, mais toutes les tendances actuelles des probabilistes vont vers la recherche d'un espace probabilisé des épreuves (Ω, μ) *particulier*, qui est en fait equivalent à un espace topologique souslinien muni d'une mesure de Radon au sens que j'ai défini Cette théorie des mesures de Radon sur les espaces arbitraires est parue au "Tata Institute of Fundamental Research" de Bombay [80], redigée en collaboration avec J. Choksi, K. N. Gowrisankaran et J Horvath Entre temps, les mêmes idées étaient aussi adoptees par N. Bourbaki et publiées en 1969. J'ai bénéficié pour cette recherche d'idées de P. A. Meyer et de P. Cartier.

(2) *Probabilites cylindriques et applications radonifiantes* Ces nouvelles mesures de Radon que j'ai définie permettent d'avoir une bonne theorie des probabilités cylindriques, introduites par I Segal, L Gross et l'école soviétique, J V Prohorov, V V Sazonov, I M Gelfand, R A Minlos On peut ainsi démontrer dans toute sa géneralité le théorème de Minlos [80], mais surtout faire une théorie complètement nouvelle, celle des applications p-radonifiantes

Une probabilite cylindrique sur un espace vectoriel topologique localement covexe E, est un système projectif de probabilites de Radon relatif aux projections de E sur ses quotients de dimension finie. Ainsi, sur un espace hilbertien E, il existe une probabibilite cylindrique fondamentale, dite de Gauss, qui se projette orthogonalement sur tout sous-espace de dimension finie F de E, suivant la probabilité canonique de Gauss de F. Une probabilité cylindrique sur E définit aussi, non pas une variable aléatoire á valeurs dans E, mais un système projectif de variables aléatoires ou encore une application linéaire de E' dans un espace $L^\circ(\Omega, \mathcal{O}, \pi)$ de variables aléatoires réelles. Ainsi beaucoup de lois de probabilités classiques s'expriment en termes de probabilités cylindriques; le système projectif de variables aléatoires, associé á la probabilité cylindrique de Gauss de l'espace hilbertien L^2 sur $\mathbb{R}$, s'appelle aussi le bruit blanc, qui est en quelque sorte un bruit aléatoire aux fréquences également distribuées sur toute la droite.

Si λ est une probabilité de Radon sur un espace de BANACH E, son p-ordre ($0 < p < +\infty$; en fait, on doit aussi considérer des valeurs de p nulles et même négatives) est $(\int \|x\|^p \, d\lambda(x))^{1/p} = \|\lambda\|_p$. Si maintenant λ est une probabilité cylindrique sur E, son p-type est

$$\operatorname*{Sup}_{\xi \in E',\, \|\xi\| \leq 1} \left(\int t^p \, d(\xi\lambda)(t) \right)^{1/p} = \|\lambda\|_p^*.$$

On dit alors qu'une application linéaire continue u d'un BANACH E dans un BANACH F est p-radonifiante si, pour toute probabilite *cylindrique* λ de *type* p sur E, $u(\lambda)$ est de *Radon d'ordre* p sur F.

On voit que cette notion est une généralisation de celle des applications p-sommantes, introduite par S. KWAPIEN et étudiée par A. PIETSCH, A. PELCZINSKY, A. PERSSON, à partir de 1963. Il est évident qu'une application p-radonifiante est p-sommante, mais rien n'était connu sur la réciproque. J'ai montré que u est p-sommante si et seulement si elle est approximativement p-radonifiante de E dans le bidual de F. Pour $1 < p < +\infty$, u est p-sommante si et seulement si elle est p-radonifiante. Plusieurs de ces résultats ont été obtenus avec la collaboration de S. KWAPIEN.

Après avoir trouvé toutes les applications 0-randonifiantes dans les espaces de suite [75], j'ai systématiquement étudié les applications p-radonifiantes dans mon séminaire de l'Ecole Polytechnique 1969–1970 [79], puis dans un long article [31]. Un des principaux théorèmes de cet article est le théorème de dualité, permettant de montrer que certaines applications sont radonifiantes, et donnant en fait la plupart des exemples connus dans la pratique. Il fait jouer un rôle fondamental aux probabilités de P. LEVY, généralisant celle de Gauss, et dites lois stables. On peut, par le théorème de dualité, trouver plusieurs des théorèmes sur les séries de Fourier aléatoires connues antérieurement (énumérées par J. P. KAHANE dans son livre sur ce sujet), mais aussi le théorème de MENCHOV sur les séries orthogonales et en donner des généralisations (par exemple par A. NAHOUM et B. MAUREY).

Le fait que la fonction aléatoire du mouvement brownien, primitive du bruit blanc, soit presque sûrement continue et même holdérienne de tout ordre $<\frac{1}{2}$, peut s'exprimer comme suit: l'injection canonique de l'espace H^1 de SOBOLEV dans l'espace C^β des fonctions holdériennes d'ordre β est, localement sur $\mathbb{R}$, p-radonifiantes pour $\beta < \frac{1}{2} - 1/p$. La théorie des applications radonifiantes a été appliquée par T. BENSOUSSAN au filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, et par Paul KREE et Bernard LASCAR à l'étude des équations aux dérivées partielles et opérateurs pseudo-différentiels en dimension infinie. Mais ce sont surtout les applications p-sommantes qui ont en fait connu un grand développement relativement indépendant de celui des applications radonifiantes, dans les dernières années, par les notions de type et de cotype des espaces de Banach, introduites par Bernard MAUREY, et les travaux remarquables de nombreux chercheurs français et étrangers, parmi lesquels je me bornerai à citer, au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, MAUREY, puis Gilles PISIER et Bernard BEAUZAMY.

(3) *Desintegrations regulieres.* Il y a longtemps que les probabilistes, voyant que les probabilités conditionnelles n'existent pas toujours, ont introduit les espérances conditionnelles, avec une utilisation systématique des temps d'arrêt. Cependant M. JIRINA a montré que les probabilités conditionnelles (désintégration d'une mesure) existent dans des conditions très générales. J'ai étendu le théoréme de JIRINA, en introduisant l'espérance conditionnelle d'une fonction à valeurs mesures; la désintégration d'une probabilité λ sur une sous-tribu $\mathscr{T}$ est alors l'espérance conditionnelle relative à $\mathscr{T}$ et λ de la fonction à valeurs mesures $\omega \mapsto \delta(\omega)$. Mais on peut aller beaucoup plus loin et démontrer, pour les surmartingales à valeurs mesures, des propriétés analogues à celles des surmartingales scalaires; ce qui permet de définir la désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus dépendant du paramètre temps, croissante et continue à droite comme on en rencontre dans l'étude des processus stochastiques. Ces désintégrations régulières ont des propriétés très remarquables, que j'ai dégagées dans [84], avec un complément court mais intéressant dans [86]. Voici par exemple un des théorèmes les plus difficiles de [84]: si $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une désintégration régulière de λ pour la famille de tribus $(\mathscr{T}^t)_{t\in\mathbb{R}}$ et si X est un processus optionnel à valeurs dans un espace souslinien, alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, λ_ω^t est porté par l'ensemble des ω' dont la trajectoire coincide avec celle de ω jusqu'à l'instant t. Cet article introduit aussi la notion nouvelle de tribus fortes. Si les $\mathscr{T}^t$ sont des tribus fortes, ce qui est toujours le cas dans les processus, alors, pour λ-presque tout ω, pour tout t, λ_ω^t admet comme désintégration régulière, pour les temps $\geq t$, la même que λ elle-même. Cela permet de caractériser toutes les mesures qui ont une désintégration ou une désintégration régulière donnée, comme intégrales des mesures extremales

ayant cette propriété, quoiqu'on ne soit absolument pas dans les conditions d'applications du théorème de CHOQUET sur les points extrémaux.

Les désintégrations régulières me paraissent susceptibles d'avoir de nombreuses et fécondes applications. On peut les appliquer aux martingales et surmartingales régulières à valeurs scalaires ou mesures. Par exemple, si les tribus sont fortes, on peut changer la probabilité de base d'une surmartingale régulière en la remplaçant par une intégrale arbitraire de ses désintégrantes, sans cesser d'avoir une surmartingale régulière; la même propriété est valable pour un processus fortement markovien à la place d'une surmartingale régulière. Les projections optionnelle, accessible, prévisible d'un processus réel mesurable s'écrivent remarquablement bien à partir d'une désintégration régulière (par exemple la projection optionnelle de X est $(t,\omega)\mapsto\lambda^t_\omega(X^t)$). La désintégration de λ par rapport à la tribu du passé d'un temps d'arrêt T s'exprime aussi très bien: c'est $\omega\mapsto\lambda^{T(\omega)}_\omega$.

(4) *Applications des désintégrations régulières aux processus de Markov.* Il est bien connu que, si l'espace des états E est localement compact polonais, et si $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur l'espace $C_0(E)$ des fonctions continues sur E tendant vers 0 à l'infini, positif ($P_t f\geq 0$ pour $f\geq 0$), de norme ≤ 1, il définit un processus de Markov, homogène dans le temps, d'espace d'états E; l'espace Ω est l'espace canonique des trajectoires, et $\mathbb{P}^x$ est la loi sur Ω pour laquelle le processus part à l'instant 0 de $x\in E$. J'ai montré dans [100] qu'on pouvait, sans plus de difficulté, supposer E souslinien complètement régulier quelconque, remplacer le semi groupe des P_t par un pseudo-groupe de $P_{s,t}$ (avec $P_{r,s}\circ P_{s,t}=P_{r,t}$), et remplacer la démonstration habituelle par une autre utilisant les désintégrations régulières, $(t,\omega)\mapsto\lambda^t_\omega$; par ailleurs $\mathbb{P}^x$ est remplacé par $\mathbb{P}^{\sigma,x}$, loi sur Ω lorsque le processus part de $x\in E$ à l'instant $\sigma\in\mathbb{R}$. On exprime explicitement $\mathbb{P}^{\sigma,x}$ et λ^t_ω à partir des $P_{s,t}$; pour les temps $\geq s$, λ^s_ω coïncide avec $\mathbb{P}^{s,X_s(\omega)}$, ou encore $\theta^s\lambda^s_\omega=\mathbb{P}^{s,X_s(\omega)}$; c'est cette formule (vraie pour tout s et tout ω) qui remplace la propriété de Markov forte.

(5) *Semi-martingales à valeurs dans une variété différentielle et martingales conformes à valeurs dans une variété analytique complexe* [105]. La formule d'Itô sur l'intégrale stochastique montre qu'une fonction C^2 d'une semi-martingale est une semi-martingale; il est donc raisonnable de penser qu'on peut étudier les semi-martingales à valeurs dans les variétés différentielles de classe C^2. On dira simplement que X est une semi-martingale à valeurs dans V si, pour toute fonction réelle φ de classe C^2 sur V, $\varphi(X)$ est une semi-martingale réelle. On a les propriétés qu'on peut en attendre: par exemple la stabilité par les applications C^2; et, si $\tilde{V}$ est un revêtement de V, X continue et qu'on

relève X en $\tilde{X}$ de manière que X_0 soit $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\tilde{X}$ est une semi-martingale à valeurs dans $\tilde{V}$ On peut alors définir des intégrales stochastiques remarquables. si X est continue, si J est un processus optionnel cotangent ($J(s, \omega)$ cotangent à V au point $X(s, \omega)$), on peut essayer de définir $\int_{]0,t]}(J_s|dX_s)$ (J_s est cotangent, dX_s "à peu près" tangent) Cette integrale n'est pas définie, parce que dX_s n'est pas vraiment tangent, mais sa partie martingale locale continue est bien définie, on la note $J.X^c$. Par exemple, si $\bar{\omega}$ est une forme différentielle borélienne sur V, de degré 1, on pourra définir son integrale $\omega(X)$ X^c sur les trajectoires On en donne diverses propriétés intéressantes, par exemple l'ensemble des J X^c, où J est "intégrable", est exactement l'espace stable $\mathcal{M}(X)$ de martingales locales continues engendre par les $(\varphi(X))^c$, φ réelle C^2 sur V; donc celui-ci admet un système de génerateurs formé de $N = \dim V$ martingales réelles orthogonales, ce qui est un peu inattendu car V n'est plongeable que dans $\mathbb{R}^{2N}$, non dans $\mathbb{R}^N$ Je traite l'exemple particulièrement interessant où X est une diffusion definie par un opérateur différentiel

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

d'ordre 2, elliptique sur V On retrouve diverses formules liées á l'équation différentielle stochastique définissant X, on trouve en particulier qu'il y a correspondance bijective entre les systemes de N mouvements browniens independants $(B_k)_{k=1,\ldots,N}$ appartenant à l'espace canonique des trajectoires, et les champs optionnels de N vecteurs cotangents $(J_k)_{k=1,\ldots,N}$ orthonormés (pour la forme quadratique des $a^{i,j}$), precisement par $B_k = J_k X^c$.(C'est ce qui explique que la méthode des equations differentielles stochastiques (qui exige des coefficients lipschitziens) soit impuissante à traiter globalement le problème de la diffusion, parce qu'une variéte riemannienne n'admet pas de champ lipschitzien de vecteurs orthonormes!)

Les martingales conformes (complexes) sont celles dont le carre est encore une martingale, elles sont stables par les applications holomorphes Il est donc naturel de penser qu'on peut définir des martingales conformes sur des variétés analytiques complexes Mais il y a ici une difficulté considérable qui ne se presentait pas dans le cas réel: si V n'est pas de Stein, elle a trop peu de fonctions holomorphes. Il faut localiser le problème, en gros, X est une martingale conforme à valeurs dans V analytique si, pour toute fonction complexe C^2 sur V (C^2 au sens réel), $\varphi(X)$ est une martingale conforme "pendant sa vie" dans tout ouvert de V où φ est holomorphe On étend alors à ce cas complexe les résultats precedents, notamment les intégrales stochastiques J X^c Si L est le laplacien Δ d'une structure kahlerienne sur V, le processus markovien associe est une martingale conforme.

Je termine en ce moment deux articles. Le premier [112] est relatif aux semi-martingales formelles. On sait que, si X est une semi-martingale réelle, elle définit une mesure sur la tribu prévisible, à valeurs dans l'espace des classes de fonctions mesurables, par l'intégrale stochastique,

$$H \mapsto \int_{[0,+\infty]} H_s \, dX_s;$$

DELLACHERIE a donné une caractérisation des semi-martingales par les propriétés de ces mesures. Ces mesures sont l'équivalent d'une mesure ≥ 0 finie, comme la mesure de Lebesgue sur le segment $[0,1]$. Mais on peut introduire des semi-martingales formelles, qui sont l'analogue des mesures ≥ 0 non finies, comme la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si alors X est une semi-martingale formelle, H un processus prévisible non borné arbitraire, on peut toujours définir son intégrale stochastique $H.X$, sans condition d'intégrabilité, et c'est encore une semi-martingale formelle. On développe ainsi un calcul intégral sur les semi-martingales formelles, qui est un peu au calcul intégral sur les semi-martingales vraies ce qu'est le calcul des distributions par rapport au calcul des fonctions: tout existe toujours, pas comme semi-martingale vraie, mais comme semi-martingale formelle. Il est alors possible [113] de combiner les résultats indiqués à (5) et l'intégration stochastique formelle pour faire une belle théorie des semi-martingales sur les variétés et de l'intégrale stochastique des processus cotangents d'ordre 2. La formule d'Ito montre en effet que les éléments du second ordre interviennent inévitablement. Dans (5) a été défini $J.\, X^c$, mais pas $J.\, X$, pour J processus optionnel cotangent; mais $J.X$ est bien définie si J est un processus optionnel cotangent d'ordre 2. On déduit de là des représentations tangentielles d'ordre 2 des semi-martingales, la notion de sous-espace vectoriel tangent d'ordre 2 en chaque point à une semi-martingale sur la variété, et finalement une expression intrinsèque (sans cartes) des équations différentielles stochastiques et des propriétés de leurs solutions, basées sur la géométrie différentielle du second ordre sur une variété différentielle. Ce travail rejoint des travaux de Paul-André MEYER, Jean-Michel BISMUT et Paul MALLIAVIN. On démontre ainsi qu'on peut relever toute semi-martingale continue, par une connexion d'un espace fibré.

D. PUBLICATIONS

1936

1. Sur une question de calcul des probabilités, *Bull. Sci. Math.* (2) **60** (1936), 1.

1941

2. Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **212** (3 Mars 1941), 331–333.
3. Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités, *C. R. Acad. Sci. Paris* **212** (17 Mars 1941), 418–421.

L = Livre, S = Séminaire

1942

4 Etude des sommes d'exponentielles reelles, these de doctorat, Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1943, deuxieme edition, Hermann, Paris, 1959

5 Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires, *Ann Fac Sci Univ Toulouse* **VI** (1942, paru en 1943), 111–176

1944

6 Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues, *Bull Soc Math France* **72** (1944), 141–145

1945

7 Generalisation de la notion de fonction de derivation, de transformation de Fourier, et applications mathematiques et physiques, *Ann Univ Grenoble, Sect Sci Math Phys* (*N S*), **21** (1945, paru en 1946), 57–74

1946

8 Sur les fonctions moyenne-periodiques, *C R Acad Sci Paris* **223** (8 Juillet 1946), 68 70

1947

9 Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques, *Ann of Math* **48** (1947), 857–929

10 Theorie des distributions et transformation de Fourier, *Ann Univ Grenoble, Sect Sci Math Phys* (*N S*) **23** (1947–1948), 7–24

11 Theorie des distributions et transformation de Fourier, "Analyse Harmonique," *Colloque C N R S, N° 15, Nancy, 15–22 Juin 1947*, pp 1–8, Gauthier-Villars, Paris, 1949

1948

12 Generalisation de la notion de fonction et derivation theorie des distributions, *Ann Telecommunications* **3** (1948), 135–140

13 Sur une propriete de synthese spectrale dans les groupes non compacts, *C R Acad Sci Paris* **227** (1er Juillet 1948), 424–426

1949

14 En collaboration avec J Dieudonne, La dualite dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{L}\mathscr{F}$), *Ann Inst Fourier* (*Grenoble*) **I** (1949, paru en 1950), 61–101

15 Les mathematiques en France pendant et apres la guerre, *Proc Canadian Mathematical Congress*, 2nd, *Vancouver, 16 Août-10 Sept 1949*, p 49–67, Univ of Toronto Press, Toronto, 1951

1950

16 "Theorie des distributions," t 1, Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1950

17 Un lemme sur la derivation des fonctions vectorielles d'une variable reelle Les equations d'evolution liees au produit de composition *Ann Inst Fourier* (*Grenoble*) **II** (1950, paru en 1951), 18–49

18 Theorie des noyaux, *Proc Internat Congr Mathematicians, 1950, Cambridge* (*U S A*) Vol I, p 220 230

1951

19 "Theorie des distributions," t 2, Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1951, troisieme edition, 1966 (t 1 et 2 en un seul volume)

20 Analyse et synthese harmoniques dans les espaces de distributions, *Canad J Math* Vol **III** (4) (1951), 503–512

1952

21 "Transformation de Laplace des distributions," Seminaire Mathematique de l'Université de Lund, tome dedie a Marcel Riesz, pp 196–206, Lund, 1952

22 Sur les multiplicateurs de $\mathscr{F}L^{p}$, Kungl Fysiografiska Sallskapets I Lund Forhandlingar, **22** (21) (1952), pp 1–5

1953

23 Homomorphismes et applications completement continues, *C R Acad Sci Paris* **236** (29 Juin 1953), 2472–2473

24 Courant associe a une forme differentielle meromorphe sur une variete analytique complexe, "Geometrie Differentielle," *Colloque C N R S , N° 52, Strasbourg, 26 Mai–1 er Juin 1953*, p 185–195, C N R S , Paris, 1953

1954

25 Problemes aux limites dans les equations aux derivees partielles elliptiques, *Colloque sur les equations aux derivees partielles, (CBRM), 2nd, Bruxelles, 24–26 Mai 1954*, p 13–24, Masson, Paris, 1955

26 L'oeuvre de Poincare equations differentielles de la physique, Journee Internationale Henri Poincare a La Haye, 11 Sept 1954, Le Livre du Centenaire de la Naissance de Henri Poincare, 1854–1954, p 219–225, Gauthier-Villars, Paris, 1955

27 Sur l'impossibilite de la multiplication des distributions, *C R Acad Sci Paris* **239** (11 Octobre 1954), 847–848

28 Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques Espaces vectoriels topologiques nucleaires Applications Seminaire Schwartz, Institut Henri Poincare, Paris, 1953–1954

1955

29 En collaboration avec J L Lions, Problemes aux limites sur les espaces fibres, *Acta Math* **94** (1955), 155–159

30 Espaces de fonctions differentiables a valeurs vectorielles, *J Analyse Math* **4** (1954–1955), 88–148

31 Equations aux derivees partielles, Seminaire Schwartz, Institut Henri Poincare, Paris, 1954–1955

32 L'enumeration transfinie et l'oeuvre de M Denjoy, *Bull Sci Math* (2), **t.** 79 (1955), 1–18

33 "Lectures on complex analytic manifold," Tata Institute for Fundamental Research, Bombay, 1955

34 Division par une fonction holomorphe sur une variete analytique complexe, *Summa Brasiliensis Math* **3** (9) (1955), 181–209

1956

35 Problemes mixtes pour l'equation des ondes, Seminaire Schwartz, Institut Henri Poincare, Paris, 1955–1956

36 Variedades analiticas complejas, Ecuaciones diferenciales parciales elipticas Universite Nationale de Colombie, Bogota, 1956

1957

37 Distributions semi-regulieres et changements de coordonnees, *J Math Pures Appl* **36** (1957), 109–127

38 "Mixed problems on partial differential equations Representations of semi-groups," Tata Institute for Fundamental Research, Bombay, 1958

39 Theorie des distributions a valeurs vectorielles, chap I, *Ann Inst Fourier*, (*Grenoble*) **VII** (1957), 1–141

1958

40 Su alcuni problemi della teoria delle equazione differenziali lineari di tipo ellittico, *Rend Sem Mat Fis Milano* **27** (1958), 1–41

41 Generalisation des espaces L^p, *in* "Tome jubilaire dedie a M Paul Levy," pp 241–250

42 Theorie des distributions a valeurs vectorielles, chap II, *Ann Inst Fourier*, (*Grenoble*) **VIII** (1958, paru en 1959), 1–209

1959

S 43 "Matematica y Fisica Cuantica," Fac des Sc de Buenos-Aires, p 1–266, 1959

1960

S 44 "Applications of Distributions to the Study of Elementary Particles in Relativistic Quantum Mechanics" pp 1–207, Univ de California Press Berkeley, 1960

45 Density of Probability of Presence of Elementary Particles, *Proc Berkeley Symp on Mathematics, Statistics, and Probability, 4th, June 20–July 30, 1960*, Vol III, p 307–314, Univ of California Press

1961

L 46 "Methodes mathématiques pour les sciences physiques," deuxieme edition, Hermann, Paris, 1965

47 Transformata di Fourier delle Distribuzioni, spazi di Hilbert e nuclei associati, pp 1–80, Institut Mathematique de l'Universite de Rome—Centro Internazionale Matematico Estivo (C I M E), 1961

1962

48 Convergence de distributions dont les derivees convergent, En hommage a G Polya Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, pp 364–372, Stanford Univ Press, Stanford, California 1962

49 Causalite et Analyticite, *An Acad Brasil Cienc* , Rio de Janeiro, Vol **34**, (1) 1–21, (1962)

1963

50 Some applications of the theory of distributions, Lectures on Modern Mathematics, No 1, pp 23–58, Wiley, New York, 1963

1964

51 Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associes (noyaux reproduisants), *J Analyse Math* **XIII** (1964), 115–256

52 Sous-espaces hilbertiens et noyaux associes, applications aux representations des groupes de Lie, *Deuxieme colloque d'Analyse Fonctionnelle*, (*CBRM*), *Liege 4–6 Mai 1964*, p 153–163, Gauthier-Villars, Paris, 1964

53 "Functional Analysis," pp 1–212, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1964

S 54 Theoreme d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un operateur differentiel elliptique, Seminaire Cartan-Schwartz, Fasc 1 et 2, Institut Henri Poincare, Paris, 1963–1964

55 Mesures de Radon sur des espaces non localement compacts, *Proc Internat Summer Institute on Theory of Distributions, Lisbon, Sept 1964*, p 1–21, Centro de Calculo Cientifico, 1964

1965

56 En collaboration avec S Mandelbrojt, Jacques Hadamard (1865–1963), *Bull Amer Math Soc* **71** (1965), 107–129

S 57 Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires, Cours de 3eme cycle, Inst Henri Poincare, Paris, 1965–1966

1966

58 Sur le theorème du graphe ferme, *C R Acad Sci Paris* **263** (2 Novembre 1966), 602–605

59 Un nouveau theoreme sur les distributions, *C R Acad Sci Paris* **263** (19 Decembre 1966), 899–901

1967

60 Radon Measures on Souslin Spaces, *Symp Analysis*, Kingston Ontario, June 1967

61 Le modele d une theorie des ensembles, *Conference Institut Henri Poincare, Paris 26 Octobre 1967*

62 Extension du theoreme de Sazonov-Minlos a des cas non hilbertiens, *C R Acad Sc Paris* **265** (18 Decembre 1967), 832–834

L 63 "Cours d'Analyse " tomes 1 et 2, Hermann, Paris, 1967

1968

64 Reciproque du theoreme de Sazonov-Minlos dans des cas non hilbertiens, *C R Acad Sci Paris* **266** (3 Janvier 1968), 7–9

65 Demonstration de deux lemmes sur les probabilites cylindriques, *C R Acad Sci Paris* **266** (8 Janvier 1968), 50–52

66 Desintegration reguliere d'une mesure par rapport a une famille de tribus, *C R Acad Sci Paris* **266** (12 Fevrier 1968), 424–425

67 Applications des desintegrations regulieres, *C R Acad Sci Paris* **266** (19 Fevrier 1968), 467–469

68 Un theoreme sur les suites de variables aleatoires, Symposia Mathematica, Vol II, p 204–209, Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1968

69 "Application of Distributions to the Theory of Elementary Particles in Quantum Mechanics," Gordon and Breach, New York, 1968

1969

L 70 "Application des distributions a l'etude des particules elementaires en mecanique quantique relativiste," Gordon and Breach, Paris, 1969

71 Probabilites cylindriques et applications radonifiantes, *C R Acad Sci Paris* **268** (24 Mars 1969), 646–648

72 Un theoreme de convergence dans les L^p, $0 \leq p < \infty$, *C R Acad Sci Paris* **268** (31 Mars 1959), 704–706

73 Un theoreme de dualite pour les applications radonifiantes, *C R Acad Sci Paris* **268** (9 Juin 1969), 1410–1413

74 Applications du theoreme de dualite sur les applications p-radonifiantes, *C R Acad Sci Paris* **268** (30 Juin 1969), 1612–1615

75 Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites, *Proc Internat Conf on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, April 1969*, pp 1–59

76 Un theoreme de dualite pour les applications p-radonifiantes Applications de ce theoreme, Colloque C N R S N° 186 "Les probabilites sur les structures algebriques", Clermont-Ferrand, 30 Juin–5 Juillet 1969, pp 319–326, C N R S , Paris, 1970

77 Applications p-radonifiantes et theoreme de dualite, Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, *Studia Math* **38** (1970), 203–213 (Cf article N° 82)

1970

L 78 "Analyse Deuxieme partie topologie generale et analyse fonctionnelle," Hermann, Paris, 1970

S 79 Applications radonifiantes, Seminaire d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1969–1970

80 En collaboration avec J Choksi et J Horvath, "Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures," Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

81 Probabilites cylindriques et applications radonifiantes, *J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math* **18** (2) (1970), 139–286

82 Applications p-radonifiantes et theoreme de dualite, *Troisieme colloque d'Analyse Fonctionnelle (CBRM) Liege 14–16 Septembre 1970*, pp 153 163, Vander Louvain, 1971

83 Produits tensoriels g_p et d_p, applications p-sommantes, applications p-radonifiantes, Seminaire Bourbaki, Novembre 1970, Paris, 1970–1971

1971

84 Surmartingales regulières a valeurs mesures et desintegrations regulieres d'une mesure, *J Analyse Math* **XXVI** (1973), 1 168

*85 Seminaire Goulaouic–Schwartz 1970–1971, Equations aux derivees partielles lineaires et analyse fonctionnelle, Ecole Polytechnique, Paris, 1971

86 En collaboration avec B Maurey et A Nahoum, Etude du transforme d'un processus par une surmartingale reguliere de mesures, *C R Acad Sc Paris* **274** (3 Mai 1972), 1365–1368

1972

87 La fonction δ et les noyaux, *in* "Aspects of Quantum Theory," Cambridge Univ Press, London and New York, 1972

*88 Seminaire Goulaouic–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

1973

*89 **Sémınaire Goulaouic–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris**

*90 Seminaire Maurey–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

91 Seminar Schwartz, L Schwartz and M H Schwartz, Australian National University, Canberra, Australie

1974

*92 **Sémınaire Goulaouic–Schwartz**, Ecole Polytechnique, Paris

*93 Seminaire Maurey–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

94 Desintegrations regulieres, tribus fortes et probabilites extremales, *Rev Columbiana Mat* **VIII** (1974), 39–45

1975

95 "Tenseurs," Hermann, Paris, 1975

*96 Seminaire Goulaouic–Schwartz Ecole Polytechnique, Paris

*97 Seminaire Maurey–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

1976

*98 Seminaire Maurey–Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

*99 Seminaire Goulaouic Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris

100 Processus de Markov et desintegrations regulieres, *Ann Inst Fourier, (Grenoble)* **27** (3) (1977), 211–277

101 Disintegrations of measures, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976

1977

*102 Seminaire Goulaouic–Schwartz, "Equations aux derivees partielles," Ecole Polytechnique, Paris

1978

*103 Seminaire Goulaouic–Schwartz, "Equations aux derivees partielles," Ecole Polytechnique, Paris

*104 Seminaire sur la geométrie des espaces de Banach (ex Maurey-Schwartz), Ecole Polytechnique, Paris

105 Semi-martingales sur des varietes et martingales conformes sur des varietes analytiques complexes, Lecture Notes in Mathematics, No 780, Springer-Verlag, Berlin and New York

1979

106 Geometry and probabilities in Banach spaces, *Conference franco-asiatique, Singapour, Mai 1979*

107 Survey of the theory of martingales, *Bull Malaysian Math Soc* **2** (2) (1979), 61–74

*108 Seminaire Goulaouic–Schwartz, "Equations aux derivees partielles," Ecole Polytechnique, Paris

109 Seminaire d'analyse fonctionnelle (ex seminaire sur la geometrie des espaces de Banach), Ecole Polytechnique, Paris

1980

*110 Seminaire Goulaouic–Schwartz "Equations aux derivees partielles," Ecole Polytechnique, Paris

111 Seminaire d'analyse fonctionnelle, Ecole Polytechnique, Paris

112 Semi-martingales formelles, *in* "Seminaire de Probabilites," XV, 1979–1980, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin and New York, to appear in 1981

1980–1981

113 Geometrie differentielle et semi-martingales, in "Seminaire de Probabilites," XVI, 1980–1981, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin and New York, to appear in 1982

(Les seminaires précedes de * sont des seminaires tenus au Centre de Mathematiques, organises collectivement et qui ne doivent pas veritablement être attribues a L Schwartz)