LAURENT SCHWARTZ

Désintégrations régulières, tribus fortes, et probabilités extrémales

Rev. Colombiana Mat., 8 (1974), p. 39-45.

Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 39-45

DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES, TRIBUS FORTES, ET PROBABILITÉS EXTRÉMALES

par

Laurent SCHWARTZ

en hommage et témoignage d'amitié pour le Professeur Yerly .

SOMMAIRE

Le but de cet article est de montrer que, dans l'ensemble convexe des probabilités ayant une désintégration donnée par rapport à une tribu donnée,on peut identifier très facilement les probabilites extrémales, et que tout élément du convexe est, d'ne manière unique, une intégrale des probabilités extrémales du convexe. Il s'agit donc d'un "théorème de CHOQUET", mais sa démonstration se fait directement, "à la main", et d'ailleurs on ne se trouve probablement pas dans les conditions d'application du théorème de CHOQUET.

§ 1. *Intégrales de mesures disjointes.*

PROPOSITION 1. Soient $(X,\mathfrak{X})$, $(Z,\mathcal{Z})$ deux ensembles munis de tribus, $\mathcal{Z}$ dénombrablement séparante (i.e. tout ensemble réduit a un point est élément de $\mathcal{Z}$, et il existe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{Z}$ telle que tout point de Z soit intersection des Z_n qui le contiennent). Soit $(X_z)_{z\in Z}$ une famille de parties deux à deux disjointes de X, indexée par Z ; on suppose que, pour toute $C\in\mathcal{Z}$, $X_C=\bigcup_{z\in C}X_z$ est élément de $\mathfrak{X}$ (donc tout X_z est élément de $\mathfrak{X}$). Soit $(\lambda_z)_{z\in Z}$ une famille de probabilités sur $(X,\mathfrak{X})$, indexée par Z, $\mathcal{Z}$-mesurable (i.e. $z\mapsto\lambda_z(B)$ est $\mathcal{Z}$-mesurable pour tout $B\in\mathfrak{X}$), λ_z portée par X_z (i.e. $\lambda_z(X_z)=1$). Soit $\mathcal{K}$

l'ensemble des probabilités sur $(X, \mathfrak{X})$ *qui s'expriment comme intégrales* $\lambda = \int_Z \lambda_z \, \mu(dz)$[1] , μ *probabilité sur* $(Z, \mathfrak{Z})$. *Alors* $\mathcal{K}$ *est convexe, la représentation comme intégrale est unique* (λ *détermine* μ), *et les éléments extrémaux de* $\mathcal{K}$ *sont exactement les* λ_z, $z \in Z$.

Démonstration 1). Montrons d'abord que chaque λ_z est extrémale sur $\mathcal{K}$. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}$, $0 \leq t \leq 1$, avec $\lambda_z = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$. Prenons les mesures de $X_z \in \mathfrak{X}$: $1 = \lambda_z(X_z) = t\lambda_1(X_z) + (1-t)\lambda_2(X_z)$, donc nécessairement $\lambda_1(X_z) = \lambda_2(X_z) = 1$. Mais, pour $i = 1, 2$, $\lambda_i(X_z) = \int \lambda_{z'}(X_z)\, \mu_i(dz')$, et $\lambda_{z'}(X_z) = 0$ pour $z' \neq z$, donc $\lambda_i(X_z) \leq \mu_i(\{z\})$ donc $\mu_1(\{z\}) = \mu_2(\{z\}) = 1$, μ_1 et μ_2 sont égales à δ_z , λ_1 et λ_2 à λ_z , ce qui prouve bien que chaque λ_z est extrémale.

2) Montrons qu'il n'y a pas d'autres éléments extrémaux. Soit donc $\lambda = \int_z \lambda_z \, \mu(dz)$ un élément extrémal de $\mathcal{K}$. On voit d'abord que μ est ergodique, c. à d. donne à tout élément de $\mathfrak{Z}$ la mesure 0 ou 1 . Sinon il existerait deux ensembles complémentaires C_1, C_2, de Z , éléments de $\mathfrak{Z}$, avec $\mu(C_1) \neq 0$, $\mu(C_2) \neq 0$. On aurait alors

$$\lambda = \int_{C_1} \lambda_z \, \mu(dz) + \int_{C_2} \lambda_z \, \mu(dz) = \lambda_1 + \lambda_2 \, .$$

Posons $X_i = X_{C_i} = \bigcup_{z \in C_i} X_z$, $i = 1, 2$. Ce sont des éléments de $\mathfrak{X}$, disjoints ;

$$\lambda_1(\complement X_1) = \int_{C_1} \lambda_z(\complement X_1)\; \mu(dz) = 0 \, ,$$

donc λ_1 est portée par X_1 , de même λ_2 par X_2 ; en outre $\lambda_i(X) = \lambda_i(X_i) = \mu(C_i) \neq 0$, et leur somme est 1 . On aurait alors

$$\lambda = \lambda_1(X) \frac{\lambda_1}{\lambda_1(X)} + \lambda_2(X) \frac{\lambda_2}{\lambda_2(X)} \, ,$$

---

(1) Pour les intégrales de mesures, voir [1] , § 1 .

ce qui est contraire a l'hypothèse d'extrémalité de λ dans $\mathcal{K}$. Donc μ est bien ergodique. Mais une mesure ergodique sur une tribu dénombrablement séparante est portée par un seul point. Soit en effet $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Z}$ séparant les points; on pourra la supposer stable par complémentarité et réunions et intersections finies. Soit $\mathbb{N}'$ l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $\mu(Z_n) = 1$, et soit $Z' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}'} Z_n$; il est encore de mesure 1.

Soit $a \in Z'$. Si $\mu(\{a\}) = 0$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $a \in Z_k, \mu(Z_k) = 0$, puisque a est l'intersection des Z_n qui le contiennent; alors les $Z_n \setminus Z_k$, $n \in \mathbb{N})$, sont encore de mesure $1, Z_n \setminus Z_k \subset Z_n$, donc l'intersection des $Z_n \setminus Z_k, n \in \mathbb{N}'$, est encore Z', ce qui est impossible puisque $a \notin Z_n \setminus Z_k$ et $a \in Z'$. Donc $\mu(\{a\}) = 1, \mu = \delta_a$, et alors $\lambda = \lambda_a$.

3) La représentation $\lambda = \int_Z \lambda_z \, \mu(dz)$ d'une mesure $\lambda \in \mathcal{K}$ est unique. Supposons en effet que $\lambda = \int_Z \lambda_t \, \mu_i(dz)$, $i = 1, 2$. Soit $C \in \mathcal{Z}$, $X_C = \bigcup_{z \in C} X_z$, élément de $\mathcal{X}$ par hypothèse. Alors $\lambda(X_C) = \int_Z \lambda_z(X_C) \, \mu_i(dz) = \mu_i(C)$, donc nécessairement $\mu_1(C) = \mu_2(C)$, μ_1 et μ_2 sont bien égales.

La proposition précédente est donc tout-à-fait élémentaire, mais nous allons l'appliquer à la théorie de la désintégration des mesures, où elle va nous donner des résultats intéressants.

§ 2. *Mesures ayant une désintégration donnée pour une tribu donnée.*

Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$ dénombrablement engendrée, soit $\overline{\mathcal{O}}$ la tribu universellement mesurable associée à $\mathcal{O}$, c. à d. la tribu des parties mesurables pour toute probabilité sur $(\Omega , \mathcal{O})$, et soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de $\overline{\mathcal{O}}$. Soit $\Lambda : \omega \mapsto \lambda_\omega$ une application de Ω dans l'espace des mesures sur $(\Omega , \mathcal{O})$, $\mathcal{T}$-mesurable (i.e. pour $B \in \mathcal{O}$, $\omega \mapsto \lambda_\omega(B)$ est $\mathcal{T}$-mesurable). On va étudier toutes les probabilités λ sur $(\Omega , \mathcal{O})$, ayant Λ comme désintégration relativement à la tribu $\mathcal{T}$. Comme on ne fait pas d'hypothèse de dénombrabilité sur $\mathcal{T}$, cela n'entraînera pas nécessairement que pour λ-presque tout ω , λ_ω soit portée par l'atome de ω dans $\mathcal{T}$ [2]. Mais appelons molécule de ω, *Mol* (ω), l'ensemble des ω' pour lesquels $\lambda_{\omega'} = \lambda_\omega$; alors les molécules de $\mathcal{T}$ forment une partition de Ω, et λ_ω prend la même valeur pour tous les ω d'une molécule. On sait en outre [3] que, si λ admet Λ comme désintégration relativement à $\mathcal{T}$, pour λ-presque tout ω, λ_ω est portée par $Mol(\omega)$. Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ la tribu engendrée par la fonction $\omega \mapsto \lambda_\omega$, i.e. par les fonctions $\omega \mapsto \lambda_\omega(B)$, $B \in \mathcal{O}$; $\tilde{\mathcal{T}}$ est dénombrablement engendrée, comme $\mathcal{O}$ elle-même. Manifestement $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$, et, comme $\omega \mapsto \lambda_\omega$ est $\tilde{\mathcal{T}}$-mesurable par définition de $\tilde{\mathcal{T}}$, c'est aussi une désintégration de λ relativement à $\tilde{\mathcal{T}}$. L'atome de ω dans $\tilde{\mathcal{T}}$ est $\{\omega' ; \lambda_{\omega'} = \lambda_\omega\}$, c. à d. $Mol(\omega)$ et il est élément de $\tilde{\mathcal{T}}$ puisque cette tribu est dénombrablement engendrée. La donnée de $\Lambda : \omega \mapsto \lambda_\omega$ détermine la sous-tribu $\tilde{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$, et ses atomes, les molécules de Λ.

PROPOSITION 2. *Soient Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$ dénombrablement engendré, $\mathcal{T}$ une sous-tribu de la tribu universellement mesurable $\bar{\mathcal{O}}$, $\Lambda : \omega \mapsto \lambda_\omega$ une fonction sur Ω à valeurs mesures ≥ 0 sur $(\Omega, \mathcal{O})$, $\mathcal{T}$-mesurable. Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ la tribu engendrée par $\omega \mapsto \lambda_\omega$, et soit $Mol(\omega) = \{\omega' ; \lambda_{\omega'} = \lambda_\omega\}$. Soit Ω' l'ensemble des ω pour lesquelles λ_ω est une probabilité, portée par $Mol(\omega)$, et admettant Λ comme désintégration relativement à $\mathcal{T}$ (Ω' est peut-être vide). Soit $\tilde{\mathcal{T}}'$ la tribu induite par $\tilde{\mathcal{T}}$ sur Ω'. On suppose $\mathcal{T}$ universellement forte, i.e. forte pour toute mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$* [4]. *Alors l'ensemble $\mathcal{K}$ des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{O})$ admettant Λ comme désintégration relativement à $\mathcal{T}$ est un convexe donc les éléments extrémaux sont exactement les λ_ω, $\omega \in \Omega'$, et toute probabilité $\lambda \in \mathcal{K}$ est intégrale, d'une manière unique, de ces probabilités extrémales : $\lambda = \int_{\Omega'} \lambda_\omega \, \mu(d\omega)$, μ probabilité sur $(\Omega', \tilde{\mathcal{T}}')$.*

(2) Voir [1], théorème (2,20).
(3) [1], corollaire (2,23).
(4) Voir [1], définition (3,7 quarto).

Démonstration. Si $\lambda = \int_{\Omega'} \lambda_\omega \, \mu(d\omega)$, comme toutes les λ_ω , $\omega \in \Omega'$, admettent Λ comme désintégration, on sait que λ admet aussi Λ comme désintégration(5). Inversement, supposons que la probabilité λ sur $(\Omega , \mathcal{O})$ admette Λ comme désintégration ; on a alors $\lambda = \int_{\Omega} \lambda_\omega \, \lambda(d\omega)$. Mais $\mathcal{T}$ est universellement forte, donc λ-forte, donc λ est portée par l'ensemble des ω pour lesquells λ_ω admet Λ comme désintégration(5) ; et aussi par l'ensemble des ω pour lesquels λ_ω est de masse 1 et portée par $Mol(\omega)$, donc λ est portée par Ω' . On peut donc écrire $\lambda = \int_{\Omega'} \lambda_\omega \, \lambda'(d\omega)$, ou λ' est la probabilité induite par λ sur Ω', relativement à la tribu $\mathcal{O}'$ induite par $\mathcal{O}$ sur Ω'. Mais $\omega \mapsto \lambda_\omega$ est $\tilde{\mathcal{T}}$-mesurable, donc $\tilde{\mathcal{T}}$-mesurable sur Ω' ; alors on peut remplacer λ' par sa restriction μ à $\tilde{\mathcal{T}}'$. Dans cette formule intégrale, λ et les λ_ω sont indifféremment des probabilités sur $(\Omega,\mathcal{O})$ ou $(\Omega,\bar{\mathcal{O}})$, mais aussi sur $(\Omega'.\mathcal{O}')$ ou $(\Omega',\bar{\mathcal{O}}')$, puisque λ et toutes les λ_ω sont portées par Ω' ; c'est le dernier point de vue que nous adopterons. La tribu $\tilde{\mathcal{T}}'$ ne sépare pas les points sur Ω' ; passons au quotient par ses atomes, les molécules des points de Ω'. Soit donc Z l'ensemble des molécules contenues dans Ω' , $\mathcal{Z}$ la tribu quotient ou image de $\tilde{\mathcal{T}}'$ par $\Omega' \to Z$ dénombrablement engendrée comme $\tilde{\mathcal{T}}'$. Alors $\mathcal{K}$ peut encore être considéré comme l'ensemble des intégrales $\lambda = \int_Z \lambda^\bullet_z \, \mu^\bullet(dz)$, $\mu^\bullet$ image de μ par passage au quotient, $\lambda^\bullet_z = \lambda_\omega$ pour $\omega \in z$, $\mu^\bullet$ probabilité sur $(Z, \mathcal{Z})$, λ et les $\lambda^\bullet_z$ probabilités sur $(\Omega' , \bar{\mathcal{O}}')$. On peut alors appliquer la proposition *1*, avec $X = \Omega'$, $\mathcal{X} = \mathcal{O}'$, $X_z = z$. Les conditions de la proposition *1* sont bien satisfaites. Si en effet $C \in \mathcal{Z}$, son image réciproque est une partie $X_C \in \tilde{\mathcal{T}}' \subset \mathcal{O}' = \mathcal{X}$. Donc les éléments extrémaux de $\mathcal{K}$ sont exactement les $\lambda^\bullet_z$, $z \in Z$, ou les λ_ω, $\omega \in \Omega'$; et λ détermine μ sur $(\Omega' , \tilde{\mathcal{T}}')$ de manière unique (ou $\mu^\bullet$ sur $(Z, \mathcal{Z})$ de manière

---

(5) [1] , théorème (3.18) .

unique).

§ 3. *Mesures ayant une désintegration régulière donnée pour une famille de tribus.*

PROPOSITION 3. Soient Ω *un ensemble muni d'une tribu* $\mathcal{O}$ *dénombrablement engendrée* $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *une famille de sous-tribus universellement fortes de la tribu* $\bar{\mathcal{O}}$ *universellement mesurable, croissante et continue à droite,* $\Lambda : (t, \omega) \mapsto \lambda^t_\omega$ *une fonction sur* $\Omega \times \mathbb{R}_+$ *à valeurs mesures* ≥ 0 *sur* $(\Omega, \mathcal{O})$, $\omega \mapsto \lambda^t_\omega$, $\mathcal{T}^t$*-mesurable. On suppose aussi que* Λ *est* $(\bar{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{R}_+)$ *-mesurable, ou* $\mathcal{R}_+$ *est la tribu borélienne de* $\mathbb{R}_+$. *Soit* Ω' *l'ensemble des* ω *pour lesquels* λ_ω *admet* Λ *comme désintégration régulière relativement à* $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$[6]*, est de masse 1 et portée par* $Mol(\omega) = \{\omega' \in \Omega \ ; \lambda^o_{\omega'} = \lambda^o_\omega\}$ *; soit* $\mathcal{T}$ *la tribu engendrée par* $\omega \mapsto \lambda^o_\omega$, $\tilde{\mathcal{T}}'$ *la tribu induite sur* Ω'*. Alors l'ensemble* $\mathcal{K}$ *des probabilités sur* $(\Omega, \mathcal{O})$ *ayant* Λ *comme désintégration régulière coincide avec l'ensemble des intégrales* $\lambda = \int_{\Omega'} \lambda^o_\omega \, \mu(d\omega)$, μ *probabilité sur* $(\Omega', \tilde{\mathcal{T}}')$ *; c'est un convexe, ses points extrémaux sont exactement les* λ_ω, $\omega \in \Omega'$, *et la représentation intégrale ci-dessus de* λ *est unique.*

Démonstration. Au lieu d'utiliser [*1*], théorème *(3,18)*, on utilise théorème *(6,15)*, d'où la représentation intégrale. Le reste se fait en utilisant la proposition *1* comme dans la démonstration de la proposition 2.

---

(6) [1], définition (5,0).

BIBLIOGRAPHIE

1. L. *Schwartz, Surmartigales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure.* Journal d'Analyse Mathématique, Jerusalem, 1973, p. 1-168 .

Centre de Mathématiques
École Polytechnique, 75230 Paris Cedex 05

(Recibido en mayo de 1974) .