Laurent Schwartz

Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Revista Colombiana de Matemáticas, Monografías Matemáticas, vol. 13,
Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad Nacional de Colombia, 2e éd., 1973.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

REVISTA COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS

MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

13

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS

LAURENT SCHWARTZ

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Y

SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. E., COLOMBIA

1973

CONTENIDO

1. Introducción : operadores diferenciales elípticos 1

2. Espacios H^s 2

3. Sistemas elípticos e hipoelípticos. Demostración del teorema fundamental . 39

4. Secciones distribuciones de espacios fibrados con fibra vectorial 53

5. Operadores diferenciales sobre espacios fibrados 64

6. Ejemplo : El operador de Laplace y su carácter elíptico 70

7. El teorema de casi-monomorfismo 76

8. Las ecuaciones A-elípticas 84

9. Problemas no resueltos 96

Bibliografía 98

1. Introducción : operadores diferenciales elípticos e hipoelípticos. En lo que sigue utilizaremos las notaciones del libro "Théorie des Distributions" de Laurent Schwartz, al cual nos vamos a referir con TD. En particular, $x = (x_1, \dots, x_N)$ será un punto de R^N y para $p = (p_1, \dots, p_N)$, con $p_i \geq 0$ entero, pondremos

$$D^p = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_N}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}}$$

siendo $|p| = p_1 + \dots + p_N$ el orden de D^p.

Consideremos un operador diferencial

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x) D^p \quad ,$$

de orden m, donde los coeficientes $\alpha_p(x)$ son funciones indefinidamente derivables. Se dice que D es *elíptico* si el único sistema real $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ para cual la forma homogénea de grado m :

$$\sum_{|p| = m} \alpha_p(x) \xi^p$$

se anula es $\xi = 0$; es decir, la forma es "definida". Aquí hemos puesto $\xi^p = \xi_1^{p_1} \dots \xi_N^{p_N}$ (TD, I. p.14). La elipticidad de un operador D depende únicamente de los términos de grado máximo.

Ejemplos : *1o.* $\Delta = \sum_i \partial^2 / \partial x_i^2$ ya que $\xi_1^2 + \dots + \xi_N^2$ es cero únicamente para $\xi = 0$.

2o. $\Delta^k = k$-ésima iterada de Δ, de orden $m = 2k$, ya que la forma

$(\xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2)^k$ es definida.

3o. Sobre R^2 el operador

$$2\,\partial/\partial z = \partial/\partial x + i\,\partial/\partial y$$

es elíptico, ya que $\xi + i\eta = 0$ únicamente para $\xi = \eta = 0$.

4o. Un operador de orden impar con coeficientes reales no puede ser elíptico.

El operador D es *hipoelíptico* si cada vez que T es una distribución tal que DT es una función indefinidamente diferenciable en un abierto Ω, resulta que T es también una función indefinidamente diferenciable en Ω.

Demostraremos más adelante (§ 3) el teorema fundamental siguiente :

Todo operador elíptico es hipoelíptico.

El recíproco no es cierto, ya que el operador del calor $D = \partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2$ no es elíptico ($-\xi^2$ se anula si $\xi = 0$, τ cualquiera), pero se puede mostrar (Séminaire Schwartz, 1954/55, exposé 10) que D es hipoelíptico.

2. *Espacios* H^s. Para $s = 0$ el espacio H^0 será sencillamente el espacio de Hilbert $L^2(R^N)$. Para s entero positivo, H^s es el espacio prehilbertiano formado por los f tales que para todo p con $|p| \leq s$ se tiene $D^p f \in L^2$, donde las derivaciones se efectuan en el sentido de las distribuciones. El producto escalar sobre H^s se define por

$$< f, g >_s = \sum_{|p| \leq s} \int_{R^N} D^p f(x)\, D^p \overline{g(x)}\, dx \quad ,$$

y la norma por

$$\|f\|_s = \left(\sum_{|p| \leq s} \int_{R^N} | D^p f(x) |^2\, dx \right)^{1/2} .$$

Proposición 2. 1. H^s *es completo* (es decir, un espacio de Hilbert).

Demostración. Sea $f_1, \dots, f_\nu, \dots$ una sucesión de Cauchy en H^s. En virtud de la definición de la norma en H^s para todo p con $|p| \leq s$ la sucesión $D^p f_\nu$ es una sucesión de Cauchy en L^2 y por el teorema de Riesz-Fischer $D^p f_\nu$ converge en L^2 hacia una función $g_p \in L^2$.

Tenemos que $g_p = D^p g$ $(g = g_0)$. En efecto, f_ν tiende a g en L^2 y entonces con más razón en D'. Puesto que la derivación es una operación continua de D' en D', $D^p f_\nu$ tiende a $D^p g$ en D'. Pero $D^p f_\nu$ tiende a g_p en L^2 y luego en D', de donde se sigue que $D^p g = g_p$.

Puesto que $D^p g \in L^2$, tenemos $g \in H^s$ y puesto que $D^p f_\nu$ tiende a $D^p g$ en L^2, f_ν tiende a g en H^s. ∎

Se tiene $H^s \subset L^2 \subset S'$, luego para todo $f \in H^s$ existe su transformada de Fourier $\hat{f}$. En virtud de TD, fórmula (VII, 7 ; 1) la propiedad $f \in H^s$ se traduce en $f \in S'$ y $(2\pi i \xi)^p \hat{f}(\xi) \in L^2$ para todo p con $|p| \leq s$. En virtud del teorema de Parseval-Plancherel y el hecho de que la transformada de Fourier de $D^p f$ es $(2\pi i \xi)^p \hat{f}(\xi)$, obtenemos para la norma en H^s la expresión

$$||f||_s^2 = \sum_{|p| \leq s} || (2\pi i \xi)^p \hat{f}(\xi) ||_{L^2}^2$$

$$= \int_{R^N} \sum_{|p| \leq s} | (2\pi i \xi)^p |^2 \, | \hat{f}(\xi) |^2 \, d\xi \, .$$

Ahora bien, poniendo $\rho^2 = |\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2$, existen $0 < c < C$ tales que

$$c \cdot \sum_{|p| \leq s} | (2\pi i \xi)^p |^2 \leq (1 + \rho^2)^s \leq C \cdot \sum_{|p| \leq s} | (2\pi i \xi)^p |^2 .$$

Por consiguiente, podemos definir sobre H^s una nueva norma, equivalente a la primera, la cual designaremos con el mismo símbolo,

$$||f||_s^2 = \int_{R^N} (1+\rho^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi ,$$

o sea,

$$||f||_s = ||(1+\rho^2)^{s/2} \hat{f}||_{L^2} ,$$

y el producto escalar correspondiente es

$$< f,g>_s = <(1+\rho^2)^{s/2} \hat{f} , (1+\rho^2)^{s/2} \hat{g}>_{L^2} .$$

Ahora se puede definir H^s para todo s real, no necesariamente entero :

Definición. Sea s un número real cualquiera. El espacio H^s está formado por todas las distribuciones T tales que $T \in S'$ y $(1+\rho^2)^{s/2} \hat{T} \in L^2$, provisto del producto escalar

$$< S,T>_s = <(1+\rho^2)^{s/2} \hat{S}, (1+\rho^2)^{s/2} \hat{T}>_{L^2}$$
$$= \int_{R^N} (1+\rho^2)^s \hat{S}(\xi) \hat{T}(\xi) \, d\xi .$$

El espacio H^s es separado, ya que si

$$||T||_s^2 = \int_{R^N} (1+\rho^2)^s |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi$$

es cero, entonces $\hat{T}(\xi) = 0$ y $T = 0$.

Proposición 2.2. H^s *es completo* (es decir, un espacio de Hilbert).

Demostración. Sea $T_1, \dots, T_\nu, \dots$ una sucesión de Cauchy en H^s. En -

tonces $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}_\nu$ es una sucesión de Cauchy en L^2 y por consiguiente $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}_\nu$ tiende hacia una función $f\in L^2$ en L^2. Pongamos $g=(1+\rho^2)^{-s/2}f$. Puesto que $(1+\rho^2)^{-s/2}\in \mathrm{V}_M$, se tiene $g\in \mathrm{S}'$; entonces $g=\hat{T}$ con $T\in \mathrm{S}'$. Como además $f=(1+\rho^2)^{s/2}g=(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}\in L^2$, se tiene $T\in \mathrm{H}^s$ y T_ν tiende hacia T en H^s. ∎

Un espacio de distribuciones $\mathrm{A}\subset \mathrm{D}'$ se llama *normal* si $\mathrm{D}\subset \mathrm{A}\subset \mathrm{D}'$, las inyecciones $\mathrm{D}\to \mathrm{A}\to \mathrm{D}'$ son continuas y D es denso en A. Los espacios H^s son normales; en efecto, se tiene el resultado más fuerte:

Proposición 2.3. Se tiene $\mathrm{S}\subset \mathrm{H}^s\subset \mathrm{S}'$; *las inyecciones* $\mathrm{S}\to \mathrm{H}^s\to \mathrm{S}'$ *son continuas y* S *es denso en* H^s.

Demostración. 1o. $\mathrm{H}^s\subset \mathrm{S}'$ figura en la definición de H^s.

2o. Supongamos que T tiende a cero en H^s; entonces $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}$ tiende a cero en L^2 y, puesto que L^2 está contenido en S' con una topología más fina, $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}$ tiende a cero en S'. Ahora bien, $(1+\rho^2)^{-s/2}\in \mathrm{V}_M$ y, puesto que la multiplicación por un elemento de V_M es una aplicación continua de S' en S' (TD, II, p. 102, Théorème X.), $\hat{T}$ tiende a cero en S', pero (TD, II, p. 107) entonces T mismo tiende a cero en S'.

3o. Sea $\varphi\in \mathrm{S}$; entonces $\hat{\varphi}\in \mathrm{S}$ y puesto que $(1+\rho^2)^{s/2}\in \mathrm{V}_M$, también $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{\varphi}\in \mathrm{S}$ (TD, II, p. 99), lo que significa que $\varphi\in \mathrm{H}^s$, ya que $\mathrm{S}\subset L^2$.

4o. Supongamos que φ tiende a cero en S; entonces $\hat{\varphi}$ tiende a cero en S y puesto que $(1+\rho^2)^{s/2}\in \mathrm{V}_M$, también $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{\varphi}$ tiende a cero en S y con más razón en L^2, de donde síguese que φ tiende a cero en H^s.

5o. Sea $T\in \mathrm{H}^s$; entonces $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}\in L^2$. Puesto que S es denso en L^2 existe una sucesión $\psi_\nu \in \mathrm{S}$ tal que $\psi_\nu \to (1+\rho^2)^{s/2} T$ en L^2. Se tiene $\psi_\nu = (1+\rho^2)^{s/2}\hat{\varphi}_\nu$, con $\hat{\varphi}_\nu \in \mathrm{S}$; entonces $\varphi_\nu \in \mathrm{S}$ tiende hacia T en H^s.

■

Proposición 2.4. Si $s \leq s'$, *entonces* $\mathrm{H}^s \supset \mathrm{H}^{s'}$ *y la inyección* $\mathrm{H}^{s'} \to \mathrm{H}^s$ *es continua.*

Demostración. Se tiene $(1+\rho^2)^{s/2} \leq (1+\rho^2)^{s'/2}$, luego $(1+\rho^2)^{s'/2}\hat{T} \in L^2$ implica $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T} \in L^2$ y además $\|T\|_s \leq \|T\|_{s'}$. ■

En virtud de las dos últimas proposiciones se tiene la cadena infinita de espacios :

$$s' \geq s$$

$$\mathrm{D} \subset \mathrm{S} \subset \mathrm{H}^{s'} \subset \mathrm{H}^s \subset \mathrm{S}' \subset \mathrm{D}' \quad ;$$

cada inyección es continua y D es denso en cada espacio para la topología inducida.

El hecho de que H^s sea normal implica que su dual $(\mathrm{H}^s)'$ es un espacio de distribuciones, es decir, $(\mathrm{H}^s)' \subset \mathrm{D}'$. Es muy importante observar que, a pesar de que H^s es un espacio de Hilbert, no lo identificamos con su dual, sino consideramos $(\mathrm{H}^s)'$ como el dual de H^s para su estructura de espacio de Banach. Más generalmente se tiene :

Proposición 2.5: $(\mathrm{H}^s)' \subset \mathrm{S}'$.

1a. demostración. Sea $T \in \mathrm{H}'$ (para más comodidad de escritura pondremos H y H' en vez de H^s y $(\mathrm{H}^s)'$, si no hay peligro de confusión). La aplicación $\varphi \mapsto T(\varphi)$ es entonces una forma lineal continua sobre H, y puesto que $\mathrm{S} \subset \mathrm{H}$ y la topología de S es más fina que la de H, la aplicación $\varphi \mapsto T(\varphi)$ es una forma lineal continua sobre S y define una distribución $T_0 \in \mathrm{S}'$. Tenemos que mostrar que la aplicación $T \mapsto T_o$ de H' en S' es inyectiva, es decir, si $T_o = 0$, entonces $T = 0$. En efecto, si $T_o = 0$, entonces T se anula sobre S, pero como S es denso en H, T se anula sobre H, es decir $T = 0$. ∎

2a. demostración. Puesto que S es denso en H y la inyección $\mathrm{S} \to \mathrm{H}$ es continua, se sigue (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, prop. 3 y prop. 6) por transposición que la aplicación $\mathrm{H}' \to \mathrm{S}'$ es inyectiva. ∎

Proposición 2.6. El dual $(\mathrm{H}^s)'$ de H^s es isomorfo a H^{-s}, para su estructura de espacio de Banach.

Demostración. Sea $T \in (\mathrm{H}^s)'$. Puesto que por la proposición precedente se tiene $(\mathrm{H}^s)' \subset \mathrm{S}'$, se verifica $T \in \mathrm{S}'$. Ahora una distribución pertenece a L^2, si es continua sobre D para la topología inducida por L^2. Consideremos entonces el máximo de

$$< (1 + \rho^2)^{-s/2} \hat{T} , \psi > ,$$

cuando $\psi \in \mathrm{D}$ recorre el conjunto $\|\psi\|_{L^2} \leq 1$; este máximo es igual a

$$\| (1 + \rho^2)^{-s/2} \hat{T} \|_{L^2} = \| T \|_{-s} .$$

Puesto que $(1 + \rho^2)^{-s/2} \in \mathrm{V}_M$, se puede escribir $\psi = (1+\rho^2)^{s/2} \hat{\bar{\varphi}}$, con $\varphi \in \mathrm{S}$ y la condición $\|\psi\|_{L^2} \leq 1$ equivale a $\|\varphi\|_s \leq 1$. Por consiguiente,

$$< (1 + \rho^2)^{-s/2} \hat{T}, \psi> =$$

$$= < (1 + \rho^2)^{-s/2} \hat{T}, (1 + \rho^2)^{s/2} \hat{\bar{\varphi}} >$$

$$= < \hat{T}, \hat{\bar{\varphi}} > = < T, \bar{\varphi} > = T(\bar{\varphi}) ,$$

donde hemos utilizado el teorema de Parseval (TD, II, fórmula (VII, 6; 6)). Ahora bien,

$$|T(\varphi)| \leq \|T\|_{(H^s)'} \cdot \|\varphi\|_s \leq \|T\|_{(H^s)'} \quad ,$$

de donde se sigue que $(1+\rho^2)^{-s/2}\hat{T} \in L^2$, es decir, que $T \in H^{-s}$, y que

$$\|T\|_{-s} \leq \|T\|_{(H^s)'} \quad .$$

Sea inversamente $T \in H^{-s}$. Tenemos que buscar una acotación para

$$< T, \overline{\varphi} > = < (1+\rho^2)^{-s/2}\hat{T}, (1+\rho^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}} >_{L^2}$$

si $\varphi \in D$ recorre $\|\varphi\|_s \leq 1$, ya que

$$\|T\|_{(H^{s'})} = \max_{\|\varphi\|_s \leq 1} |< T, \overline{\varphi} >| \quad .$$

Ahora bien,

$$|< T, \overline{\varphi} >| = |< (1+\rho^2)^{-s/2}\hat{T}, (1+\rho^2)^{s/2}\hat{\overline{\varphi}} >|_{L^2}$$

$$\leq \|(1+\rho^2)^{-s/2}\hat{T}\|_{L^2} \cdot \|(1+\rho^2)^{s/2}\hat{\varphi}\|_{L^2} = \|T\|_{-s} \cdot \|\varphi\|_s \quad ,$$

de donde $T \in (H^s)'$ y además

$$\|T\|_{(H^s)'} \leq \|T\|_{-s} \quad .$$

Por consiguiente $(H^s)' = H^{-s}$ y $\|T\|_{(H^s)'} = \|T\|_{-s}$. ∎

Proposición 2.7. Sea s un entero positivo. Entonces $T \in H^{-s}$ *si y sólo si es de la forma* $T = \sum_{|p| \leq s} D^p f_p$, *con* $f_p \in L^2$.

Demostración. Sea $T \in H^{-s}$. Entonces $(1+\rho^2)^{-s/2}\hat{T} \in L^2$. Puesto que

$$\frac{1}{(1+\rho^2)^{s/2}} = \frac{1}{(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_N^2)^{s/2}} \geq$$

$$\geq C \frac{1}{1+|\xi_1|^s+\cdots+|\xi_N|^s}$$

tenemos también $\frac{1}{1+|\xi_1|^s+\cdots+|\xi_N|^s} \hat{T} = \hat{f} \in L^2$, $f \in L^2$. Por consiguiente

$$\hat{T} = \hat{f} + \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^s \hat{f} = \hat{f} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\,s} \left(\frac{|\xi_i|^s}{\xi_i^s} \hat{f} \right) = \hat{f} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\,s} \hat{f}_i \quad , \quad \text{donde}$$

$\hat{f}_i = \xi_i^{-s} \cdot |\xi_i|^s \cdot \hat{f} \in L^2$. De aquí resulta (TD,II, fórmula (VII, 7; 1))

$$T = f + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^s \cdot f_j \ .$$

El inverso sigue del lema siguiente :

Lema. La derivación D^p *define una aplicación continua* $T \mapsto D^p T$ *de* H^s *en* $\mathrm{H}^{s-|p|}$.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{H}^s$. Puesto que $T \in \mathcal{S}'$, también se tiene $D^p T \in \mathcal{S}'$. Por otro lado $(D^p T)\hat{} = (2\pi i \xi)^p \hat{T}$ y $|(2\pi i\xi)^p| \leq C(1+\rho^2)^{|p|/2}$, luego

$$\left| (1+|\xi|^2)^{\frac{s-|p|}{2}} (D^p T)\hat{} \right| \leq$$

$$\leq C \left| (1+\rho^2)^{\frac{s-|p|}{2}} (1+\rho^2)^{|p|/2} \cdot \hat{T} \right| = C \,|(1+\rho^2)^{s/2} \hat{T}| ,$$

de donde sigue que

$$(1+\rho^2)^{\frac{s-|p|}{2}} (D^p T)\hat{} \in L^2 \quad ,$$

es decir, $D^p T \in \mathrm{H}^{s-|p|}$. La desigualdad (2.1) implica $\|D^p T\|_{s-|p|} \leq C\, \|T\|_s$, lo que equivale a la continuidad de $T \mapsto D^p T$. ■

Ahora podemos terminar la demostración de la proposición 2.7. Sea

$$T = \sum_{|p| \leq s} D^p f_p \ , \quad f_p \in L^2 = \mathrm{H}^o \ .$$

Entonces $D^p f \in \mathrm{H}^{-|p|} \subset \mathrm{H}^{-s}$ (Proposición 2.4, p.6) y $T \in \mathrm{H}^{-s}$. ∎

Proposición 2.8. Si $\alpha \in \mathrm{S}$, $T \in \mathrm{H}^s$ *entonces* $\alpha * T \in \mathrm{H}^s$ *y la aplicación* $T \mapsto \alpha * T$ *de* H^s *en* H^s *es continua.*

Observación. $\alpha * T$ existe ya que $\mathrm{S} \subset \mathrm{V}'_C$ y $\mathrm{H}^s \subset \mathrm{S}'$ (TD, II, p.103).

Demostración. Se tiene $\alpha * T \in \mathrm{S}'$ (loc.cit.). $(\alpha * T)\hat{} = \hat{\alpha}\hat{T}$ es una función, ya que $\hat{\alpha} \in \mathrm{S}$ y T lo es por hipótesis. $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{\alpha}\hat{T} \in L^2$ ya que $(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T} \in L^2$ por hipótesis y $\hat{\alpha}$ es una función acotada. Luego $\alpha * T \in \mathrm{H}^s$. Finalmente

$$\| \alpha * T \|_s = \| (1+\rho^2)^{s/2} \hat{\alpha}\hat{T} \|_{L^2} \leq$$

$$\leq \text{máx} \, |\hat{\alpha}| \cdot \| (1+\rho^2)^{s/2} \hat{T} \|_{L^2} = \text{máx} \, |\hat{\alpha}| \cdot \| T \|_s \ ,$$

lo que equivale a la continuidad de $T \mapsto \alpha * T$.

Observación. De exactamente la misma manera se puede demostrar que si μ es una medida de masa total finita $(\int |d\mu| < \infty)$ y $T \in \mathrm{H}^s$, entonces $\mu * T \in \mathrm{H}^s$, y la aplicación $T \mapsto \mu * T$ de H^s en H^s es continua. $\mu * T$ existe ya que $\mu \in \mathrm{D}'_{L^1}$ y $T \in \mathrm{H}^s \subset \mathrm{D}'_{L^2}$ (TD, II, p.59).

En realidad se puede demostrar un teorema un poco más fuerte. Antes de enunciarlo introduzcamos los espacios H^∞ y $\mathrm{H}^{-\infty}$. El espacio H^∞ es la intersección de todos los espacios H^s

$$\mathrm{H}^\infty = \bigcap_s \mathrm{H}^s \ .$$

Los elementos de H^∞ son las funciones f cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones son para todo orden *funciones* de L^2, es decir (TD,II, Chap. VI, Théorème XIX), las f son funciones indefinidamente derivables en el sentido usual y tales que $D^p f \in L^2$ para todo p. Sobre H^∞ se pone la topología "límite proyectivo", es decir la menos fina para la cual las aplicaciones $f \mapsto D^p f$ de H^∞ en L^2 son continuas; o, que es lo mismo, la topología menos fina para la cual las inyecciones $H^\infty \to H^s$ son continuas. (En TD, II el espacio H^∞ se designa por D_{L^2}). Claro está que $S \subset H^\infty \subset H^s$, que las inyecciones son continuas y que S es denso en H^∞. En particular H^∞ es un espacio de distribuciones normal (p.5).

El espacio $H^{-\infty}$ es la reunión de los espacios H^s :

$$H^{-\infty} = \bigcup_s H^s$$

provisto de la topología límite inductivo de las topologías de los H^s (Bourbaki, EVT, Chap. II, § 2, nº 4). Las inyecciones $H^s \to H^{-\infty}$ son continuas por definición, se tiene $H^{-\infty} \subset S'$ (puesto que $H^s \subset S'$) y la inyección $H^{-\infty} \to S'$ es continua en virtud de Bourbaki, EVT, Chap. II, § 2, Cor. de la Prop. 1 y de que las inyecciones $H^s \to S'$ lo son (Proposición 2.3). Tenemos entonces la cadena de inclusiones (cf. p. 5).

$$D \subset S \subset H^\infty \subset H^{s'} \subset H^s \subset H^{-\infty} \subset S' \subset D' \qquad s' \geq s$$

siendo cada inyección continua y D denso en cada espacio.

Demostremos ahora que *el dual de* H^∞ *es* $H^{-\infty}$ *y vice versa* (es decir, que $H^{-\infty} = D'_{L^2}$, con la notación de TD,II). En primer lugar, puesto que el dual de H^s es H^{-s}, el dual del límite proyectivo de las H^s es *algebraicamente* igual al límite inductivo de las H^{-s}. (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 2, Cor. de la Prop. 10), es decir a $H^{-\infty}$. La topología de $H^{-\infty}$ es más fina que la topología fuerte sobre $(H^{\infty})'$. En efecto las aplicaciones $H^{\infty} \to H^{s}$ son continuas, de donde sigue por transposición que las aplicaciones $H^{s} \to (H^{\infty})'$ son continuas y, en virtud del teorema ya citado, $H^{-\infty} \to (H^{\infty})'$ es continua.

Los conjuntos acotados para las dos topologías son los mismos. Claramente si A es acotado para $H^{-\infty}$, lo es para $(H^{\infty})'$. Sea, inversamente, A acotado para $(H^{\infty})'$. Puesto que H^{∞} es un espacio de Fréchet, A es equicontinuo (Bourbaki, EVT, Chap. IV § 3, Prop. 2) es decir $A \subset V^{o}$, donde V es una vecindad cerrada de 0 en H^{∞} (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 2, prop. 1). Existe una s tal que V sea una vecindad de 0 en H^{∞} para la topología inducida sobre H^{∞} por H^{s} y sea V_1 la adherencia de V en H^{s}, es decir, $V \subset V_1 \cap H^{\infty}$. Puesto que H^{∞} es denso en H^{s}, toda forma lineal continua sobre H^{∞} que pertenece a A se puede extender por continuidad en una forma lineal continua sobre H^{s} y también por continuidad se ve que $A \subset V_1^{o}$. Esto significa que $A \subset H^{-s}$ y que A es equicontinuo, y con más razón (Bourbaki, EVT, Chap. IV § 3, nº 2) acotado en H^{-s}. Por consiguiente (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 2, prop. 6) A es acotado en $H^{-\infty}$.

H^{∞} es semi-reflexivo como límite proyectivo de espacios reflexivos (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 3, exerc. 18). Con más razón H^{∞} distinguido (loc. cit., exerc. 10 b) y por consiguiente (Grothendieck, Sur les espaces (F) et (D F), Summa Brasiliensis Math., vol. 3, fasc. 6, Théorème 7, p. 73) $(H^{\infty})'$ es bornológico. Por otro lado $H^{-\infty}$ también es bornológico (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 2, exerc. 17a), de donde resulta que las topologías de $(H^{\infty})'$ y $H^{-\infty}$ coinciden (loc. cit., exerc. 13).

Finalmente H^{∞} es reflexivo puesto que es tonelado, luego la aplicación canónica de H^{∞} sobre $(H^{-\infty})'$ es un isomorfismo (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 3, Théorème 2). ∎

Proposición 2.9. Si $\alpha \in \mathcal{S}$, $T \in \mathrm{H}^s$, *entonces* $\alpha * T \in \mathrm{H}^\infty$ *y la aplicación* $T \mapsto \alpha * T$ *de* H^s *en* H^∞ *es continua.*

Demostración. Debemos mostrar que cualquiera que sea s', se tiene $\alpha * T \in \mathrm{H}^{s'}$ y que la aplicación $T \mapsto \alpha * T$ es continua de H^s en $\mathrm{H}^{s'}$. En efecto se tiene

$$\|(1+\rho^2)^{s'/2}(\alpha * T)\hat{}\|_{L^2} = \|(1+\rho^2)^{s'/2}\hat{\alpha}\,\hat{T}\|_{L^2} =$$

$$= \|(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}.\,(1+\rho^2)^{(s'-s)/2}\hat{\alpha}\|_{L^2} \leq \text{máx}\,|(1+\rho^2)^{(s'-s)/2}\,\hat{\alpha}\,| \cdot \|(1+\rho^2)^{s/2}\hat{T}\|_{L^2},$$

y $(1+\rho^2)^{(s'-s)/2}\,\hat{\alpha}$ es acotada según la definición de $\mathcal{S}$ (TD, II, p. 90). ∎

Proposición 2.10. Sea $\alpha_\nu \in \mathcal{D}$ *una sucesión de funciones tal que* $\alpha_\nu \geq 0$, $\int \alpha_\nu\, dx = 1$ *y el soporte de* α_ν *tiende a* 0. *Entonces para* $T \in \mathrm{H}^s$ *la sucesión* $\alpha_\nu * T$ *tiende a* T *en* H^s.

Demostración. El conjunto de las aplicaciones $T \mapsto \alpha_\nu * T$ de H^s en H^s es equicontinuo. En efecto, basta (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 3, Théorème 2) mostrar que para T fijo el conjunto $(\alpha_\nu * T)_{\nu \in N}$ es acotado, lo que sigue de

$$\|\alpha_\nu * T\|_s \leq \text{máx}\,|\hat{\alpha}_\nu| \cdot \|T\|_s \leq \|T\|_s \ ,$$

ya que $|\hat{\alpha}_\nu| \leq \int |\alpha_\nu|\, dx = 1$.

Si ahora $T = \varphi \in \mathcal{D}$, entonces (TD, II, p. 22) $\alpha_\nu * \varphi$ tiende a φ en $\mathcal{D}$ y con más razón en H^s. Puesto que $\mathcal{D}$ es denso en H^s y las aplicaciones $T \to \alpha_\nu * T$ forman un conjunto equicontinuo, resulta (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 3.

Cor. du Th. 4) que $\alpha_\nu * T$ tiende a T · para todo $T \in \mathrm{H}^s$. ∎

Proposición 2.11. Sea $\alpha \in \mathrm{S}$, $T \in \mathrm{H}^s$, *entonces* $\alpha T \in \mathrm{H}^s$ *y la aplicación* $T \mapsto \alpha T$ *de* H^s *en* H^s *es continua.*

Observación. El teorema es trivial si s es entero ≥ 0 y para este caso basta que $\alpha \in \mathrm{B}$. En efecto, la fórmula de Leibniz $D^p(\alpha T) = \sum D^q \alpha \, , D^r T$ muestra que $D^p(\alpha T) \in L^2$ y que $\|\alpha T\|_s \leq cons. \|T\|_s$.

Demostración. Se tiene $\alpha T \in \mathrm{S}'$ ya que $\mathrm{S} \subset \mathrm{V}_M$. Además

$$\begin{aligned}(1+\rho^2)^{s/2}(\alpha T)\hat{} &= (1+\rho^2)^{s/2}(\hat{\alpha} * \hat{T}) \\ &= \int_{R^N} (1+|\xi|^2)^{s/2}\, \hat{\alpha}(\eta)\, \hat{T}(\xi-\eta)\, d\eta \quad . \end{aligned} \tag{2,2}$$

Demostremos ahora la desigualdad

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq C(1+|\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} . \tag{2,3}$$

Sea primero $s \geq 0$; se tiene

$$|\xi| \leq |\eta| + |\xi - \eta| .$$

Si $|\eta| \geq |\xi-\eta|$, entonces $|\xi| \leq 2|\eta|$ y

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq C(1+|\eta|^2)^{s/2} ,$$

$$1 \leq (1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} ,$$

y si $|\eta| \leq |\xi-\eta|$, entonces $|\xi| \leq 2|\xi-\eta|$ y

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq C(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} ,$$

$$1 \leq (1+|\eta|^2)^{s/2} \quad .$$

Si ahora $s=-\sigma,\ \sigma \geq 0$, entonces (2.3) se escribe en la forma

$$\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}} \leq \frac{C}{(1+|\xi-\eta|^2)^{\sigma/2}}(1+|\eta|^2)^{\sigma/2} \quad ,$$

que es equivalente a

$$(1+|\xi-\eta|^2)^{\sigma/2} \leq C(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}(1+|\eta|^2)^{\sigma/2}$$

y éste a (2,3) en el caso ya demostrado. Por otro lado se tiene :

$$\int_{R^N}(1+|\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\alpha}(\eta)|\cdot(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\hat{T}(\xi-\eta)|\,d\eta$$

(2,4)
$$= (1+|\xi|^2)^{|s|/2}|\hat{\alpha}(\xi)| * (1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{T}(\xi)| \ .$$

De (2,2) , (2,3) y (2,4) resulta (TD, II, fórmula (VI, 1,2))

$$||\alpha T||_s \leq C\,||\,(1+\rho^2)^{|s|/2}|\hat{\alpha}(\xi)| * (1+\rho^2)^{s/2}|\hat{T}(\xi)|\,||_{L^2}$$

$$\leq C\,||(1+\rho^2)^{|s|/2}|\hat{\alpha}(\xi)|\,||_{L^1}\cdot||(1+\rho^2)^{s/2}|\hat{T}(\xi)|\,||_{L^2}$$

$$= C\,||(1+\rho^2)^{|s|/2}|\hat{\alpha}(\xi)|\,||_{L^1}\cdot||T||_s \leq C_1\,||T||_s \quad . \quad \blacksquare$$

De la proposición anterior y del lema de la p. 9 sigue la

Proposición 2. 12. Sea

$$D = \sum_{|p|\leq m} \alpha_p D^p$$

un operador diferencial de grado m *con los coeficientes* $\alpha_p \epsilon$ S. *Entonces la aplicación* $T \mapsto DT$ *es continua de* H^s *en* H^{s-m} .

Esta última proposición se puede reemplazar por otra, donde la condición sobre T tiene carácter local. Sea K^s el subespacio de H^s formado por las distribuciones de H^s con soporte compacto, es decir $\mathrm{K}^s = \mathrm{H}^s \cap \mathrm{E}'$. Para todo compacto $K \subset R^N$ sea K^s_K el subespacio de H^s formado por las distribuciones de H^s cuyo soporte está contenido en K. Entonces $\mathrm{K}^s = \bigcup_K \mathrm{K}^s_K$. Sobre K^s_K se pone la topología inducida por H^s y sobre K^s la topología límite inductivo de las topologías de los K^s_K . Esta topología sobre K^s es más fina que la topología inducida por H^s .

Proposición 2.13. *Sea*

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p D^p$$

un operador diferencial de grado m *con los coeficientes* $\alpha_p \epsilon$ E. *Entonces la aplicación* $T \mapsto DT$ *es continua de* K^s en K^{s-m}.

Demostración. Basta demostrar que para cada compacto K la aplicación $T \mapsto DT$ es continua de K^s_K en K^{s-m}_K. Sea $\beta \epsilon \mathrm{D}$ con $\beta = 1$ en una vecindad de K. Entonces βD tiene coeficientes en $\mathrm{D} \subset \mathrm{S}$ y la proposición resulta de la proposición anterior, ya que para $T \epsilon \mathrm{K}^s_K$ se tiene $(\beta D)T = DT$. ■

Sea L^s el espacio formado por las distribuciones T, tales que $\alpha T \epsilon \mathrm{H}^s$ para todo $\alpha \epsilon \mathrm{D}$. Sobre L^s se pone la topología límite proyectivo, la menos fina para la cual las aplicaciones $T \mapsto \alpha T$ de L^s en H^s son continuas. Con otras palabras, T_j tiende a cero en L^s, si para todo $\alpha \epsilon \mathrm{D}$ la sucesión αT_j tiende a cero en H^s . L^s es un espacio de Fréchet . En efecto sea (U_k) un sistema fundamental enumerable de abiertos de R^N y sea (α_k) una partición indefinidamente diferenciable, localmente finita de la unidad, subordenada a (U_k). Entonces la familia enumerable de seminormas $\|\alpha_k T\|_s$ define la topología de L^s .

Veremos en el § 7 que el dual fuerte de K^s es L^{-s} y viceversa . Se tiene entonces el diagrama de inclusiones :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
E & \subset & L^s & \subset & & \subset & L^{-s} & \subset & D' \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
H^{\infty} & \subset & H^s & \subset & L^2 & \subset & H^{-s} & \subset & H^{-\infty} \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
D & \subset & K^s & \subset & & \subset & K^{-s} & \subset & E' .
\end{array}
$$

Dos espacios que ocupan lugares simétricos con respecto a L^2 son duales entre sí .

Proposición 2.14. Sea

$$
D = \sum_{|p|\leq m} \alpha_p D^p
$$

un operador diferencial de grado m con los coeficientes $\alpha \in E$. Entonces la aplicación $T \mapsto DT$ es continua de L^s en L^{s-m} .

Demostración. Supongamos que $T_j \to 0$ en L^s , tenemos que mostrar que para todo $\alpha \in D$ la sucesión $\alpha D T_j \to 0$ en H^{s-m}. Sea $\beta \in D$ igual a uno en la vecindad del soporte de α ; entonces βT_j tiende a cero en H^s . El operador αD tiene sus coeficientes con soporte compacto y con más razón en S; luego por la proposición 2.12 (pág. 15) $\alpha D T_j = \alpha D \beta T_j$ tiende a cero en H^{s-m} . ■

Supongamos que $T \in \mathrm{H}$. Entonces para $A > 0$ se tiene la desigualdad

$$(2,5) \quad \|(1+\rho^2)^{s/2}\, \hat{T}\|_{L^2} \geq c(A,s)\left(\int_{\rho \geq A} \rho^{2s}|\hat{T}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

con $c(A,s) > 0$. Si $s \geq 0$, se puede tomar $c(A,s) = 1$ y además intercalar la expresión $\|\rho^s \hat{T}\|_{L^2}$ entre los dos miembros de la desigualdad.

Teorema 2.1. Sea K un compacto de R^N. Entonces sobre K^s_K las cantidades $\|(1+\rho^2)^{s/2}\, \hat{T}\|_{L^2} = \|T\|_s$ *y*

$$\left(\int_{\rho \geq A} \rho^{2s}|T(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}$$

son normas equivalentes, es decir, existe un $C(K,A,s)$ tal que

$$\|(1+\rho^2)^{s/2}\, \hat{T}\|_{L^2} \leq C(K,A,s) \cdot \left(\int_{\rho \leq A} \rho^{2s}|\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}$$

para todo $T \in \mathrm{K}^s_K$.

Observaciones. 1o. $C(K,A,s)$ tiende a infinito con K y A.

2o. La razón profunda del teorema es el hecho de que $\hat{T}$ es una función analítica entera de tipo exponencial determinado y por consiguiente una mayoración de T fuera de la bola $\rho < A$ implica una mayoración en todas partes.

3o. Del Teorema resulta que para $s \geq 0$ la norma $\|\rho^s \hat{T}\|_{L^2}$ es equivalente a $\|T\|_s$ sobre K^s_K.

Lema 1. Si $T \in \mathrm{E}'$, entonces T es una función analítica, prolongable en una función holomorfa sobre todo C^N.

Demostración. Caso muy particular de la parte trivial del teorema de Paley-Wiener generalizado (TD,II, Chap. VII, Théorème XVI).

Lema 2. Si T_j converge a cero en E' *entonces las funciones analíticas $\hat{T}_j(\xi)$ convergen a cero, uniformemente sobre cada conjunto compacto de R^N.*

Demostración. Puesto que T_j es de soporte compacto, se tiene $\hat{T}_j(\xi) = (T_j)_x \cdot e^{-2\pi i x\xi}$ (TD, II, pp.112-113). Cuando ξ recorre un compacto de R^N, entonces $e^{-2\pi i x\xi}$ recorre una parte acotada de $(\mathrm{E})_x$, luego $(T_j)_x \cdot e^{-2\pi i x\xi}$ tiende a cero uniformemente sobre esta parte acotada de $(\mathrm{E})_x$ por la definición de la topología fuerte sobre E'. ∎

Demostración del Teorema 2.1. Supongamos por el absurdo que no exista tal constante $C(K,A,s)$. Entonces para todo entero $\nu > 0$ existe un $T_\nu \in \mathrm{H}^s_K$ tal que

$$(2,6) \qquad \| (1+\rho^2)^{s/2} \hat{T}_\nu \|_{L^2} \geq \nu \Big[\int_{\rho \geq A} \rho^{2s} |\hat{T}_\nu(\xi)|^2 \, d\xi \Big]^{1/2} .$$

Puesto que al multiplicar T_ν por un factor λ, los dos miembros de (2,6) se multiplican por $|\lambda|$, se puede también tomar una sucesión $S_\nu \in \mathrm{H}^s_K$ tal que

$$\| S_\nu \|_s = 1 , \quad \int_{\rho \geq A} \rho^{2s} |\hat{S}_\nu(\xi)|^2 \, d\xi \leq \frac{1}{\nu^2} .$$

La sucesión S_ν está situada sobre la intersección de la esfera unidad de H^s con K^s_K. Existe (Bourbaki, Top. gén, Chap. I, § 5, Théorème 2) una base de ultrafiltro $\mathfrak{B}$ sobre esta intersección, más fina que (S_ν) y tal que la integral

$$\int_{\rho \geq A} \rho^{2s} |\hat{S}(\xi)|^2 \, d\xi$$

tienda a cero según $\mathfrak{B}$ (loc.cit., § 6, Nº 4). Puesto que H^s es un espacio de Hil -

bert, su bola unidad es débilmente compacta (Bourbaki, EVT, Chap. V, § 1, Théorème 4) y $\mathcal{B}$ converge hacia un elemento $s_o \in \mathrm{K}^s_K$ con $\|s_o\|_s \leq 1$. Ahora bien, la topología de H^s es más fina que la topología de D' (p.6) y por lo tanto la topología de K^s_K es más fina que la inducida por E' y la topología débil de K^s_K es más fina que la topología débil de E'. Luego $\mathcal{B}$ es una base de ultrafiltro en E', acotada y débilmente convergente hacia s_o. Puesto que E' es un espacio de Montel, sobre un conjunto acotado de E' las topologías débil y fuerte coinciden (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 3, prop. 6) y por consiguiente $\mathcal{B}$ tiende fuertemente a s_o en E'. Pero entonces según el lema 2, $\hat{s}(\xi)$ tiende a $\hat{s}_o(\xi)$ uniformemente sobre cada conjunto compacto según $\mathcal{B}$ y, por lo tanto, para todo conjunto compacto $H \subset R^N$ se tiene

$$\lim_{\mathcal{B}} \int_H \rho^{2s} |\hat{s}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_H \rho^{2s} |\hat{s}_o(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

Por hipótesis,

$$\int_H \rho^{2s} |\hat{s}(\xi)|^2 \, d\xi$$

tiende a cero cada vez que H está situado en el complementario de la bola $\rho \leq A$; luego para tal H

$$\int_H \rho^{2s} |\hat{s}_o(\xi)|^2 \, d\xi = 0 \quad ,$$

y $\hat{s}_o(\xi) = 0$ en casi todo H, o bien, puesto que $\hat{s}_o(\xi)$ es analítica, $\hat{s}_o(\xi) \equiv 0$ en H. Se sigue entonces que $\hat{s}_o(\xi) = 0$ para $|\xi| \geq A$, de donde, otra vez por la analiticidad de $\hat{s}_o(\xi)$, que $\hat{s}_o(\xi) = 0$ sobre R^N, es decir, $\hat{s}_o = 0$. Tene -

mos entonces una base de ultrafiltro $\mathcal{B}$ sobre la esfera unidad de H^s que tiende a cero en E' fuertemente y tal que

$$\int_{\rho \geq A} \rho^{2s} | \hat{S}(\xi) |^2 \, d\xi$$

tiende a cero según $\mathcal{B}$. Puesto que

$$(2,7) \qquad \int_{\rho \geq A} (1 + \rho^2)^s \, | \hat{S}(\xi) |^2 \, d\xi < C \cdot \int_{\rho \geq A} \rho^{2s} | \hat{S}(\xi) |^2 \, d\xi$$

(si por ejemplo $A \geq 1$, se puede tomar $C = 2^s$) y que

$$(2,8) \qquad \int_{\rho \leq A} (1 + \rho^2)^s \, | \hat{S}(\xi) |^2 \, d\xi$$

tiende a cero, ya que $\hat{S}(\xi)$ tiende a cero uniformemente sobre cada conjunto compacto, obtenemos sumando las expresiones (2,7) y (2,8) que

$$\left(\int_{R^N} (1 + \rho^2)^s | \hat{S}(\xi) |^2 \, d\xi \right)^{1/2} = || S ||_s$$

tiende a cero, lo que contradice al hecho de que $||S||_s = 1$. Esta contradicción demuestra el teorema. ∎

En el curso de la demostración anterior hemos demostrado el resultado siguiente:

Lema. Si T_j *es acotado y converge débilmente hacia cero en* K^s_K, *entonces las funciones analíticas* $\hat{T}_j(\xi)$ *convergen a cero, uniformemente sobre cada* *conjunto compacto de* R^N .

Sea u una aplicación lineal continua de un espacio de Banach E en otro espacio de Banach F . Se dice que u es *compacta* (antigua terminología : "completamente continua") si se cumple la condición siguiente :

1o. La imagen por u de la bola unidad de E es relativamente compacta en F.

Si E es reflexivo, entonces esta condición es equivalente a :

2o. Si $\mathcal{F}$ es una base de filtro contenida en la bola unidad de E y débilmente convergente, entonces $u(\mathcal{F})$ es fuertemente convergente en F .

1o. $\Longrightarrow$ *2o.* Si $\mathcal{F}$ converge débilmente sobre la bola unidad B de E, entonces $u(\mathcal{F})$ converge débilmente sobre $u(B)$ (Bourbaki, Top. gén., Chap. I, § 6 , Nº 5). Pero $u(B)$ siendo relativamente compacto para la topología fuerte, la topología débil coincide con la fuerte sobre $u(B)$ (Bourbaki, Top. gén., Chap. I, § 10,nº4).

2o. $\Longrightarrow$ *1o.* Sea $\mathcal{V}'$ una base de ultrafiltro sobre $u(B)$. Entonces $\mathcal{V} = u^{-1}(\mathcal{V}')$ es una base de filtro sobre B. Puesto que E es reflexivo, B es débilmente compacto (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 5, prop. 6) y por lo tanto existe sobre B un ultrafiltro $\mathcal{W}$ más fino que $\mathcal{V}$ y débilmente convergente. Pero entonces $u(\mathcal{W}) = \mathcal{V}'$ es fuertemente convergente y $u(B)$ es relativamente compacto. ■

En realidad si E es reflexivo, $u(B)$ es compacto y no sólo relativamente compacto. En efecto B es débilmente compacto, luego $u(B)$ es débilmente compacto y en particular débilmente cerrado y con más razón fuertemente cerrado.

Teorema 2. 2. Para $h > 0$ *la inyección idéntica de* $\mathcal{K}^s_K$ *en* $\mathcal{K}^{s-h}_K$ *es compacta.*

Demostración. Supongamos que

$$\| T_j \| \leq 1 \tag{2,9}$$

y que T_j converge débilmente hacia cero en K^s_K. En virtud del Teorema 2.1 necesitamos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E del filtro T_j tal que

$$\int_{\rho \geq 1} \rho^{2s-2b} |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \varepsilon^2 , \tag{2,10}$$

para todo $T \in E$. Se descompone esta integral en dos partes :

$$\int_{1 \leq \rho} = \int_{1 \leq \rho \leq B} + \int_{\rho > B} .$$

Ahora bien

$$\int_{\rho > B} \rho^{2s-2b} |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \leq \frac{1}{B^{2b}} \int_{\rho \geq 1} \rho^{2s} |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{2,11}$$

para B suficientemente grande, en virtud de (2,5) y (2,9). Por otra parte según el lema (p.21) $T_j(\xi)$ tiende uniformemente hacia cero sobre $\rho \leq B$, luego existe E tal que

$$\int_{1 \leq \rho \leq B} \rho^{2s-2b} |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{para} \quad T \in E .$$

De (2,11) y (2,12) sigue (2,10). ∎

Proposición 2.15. Sea $s \geq -N/2$, $b > 0$. *Entonces la norma* $C_1(K,s,b) = C_1$

de la inyección $\mathcal{K}^s_K \to \mathcal{K}^{s-h}_K$ *tiende a cero cuando el diámetro de* K *tiende a cero.*

Demostración. Puesto que la norma sobre $\mathcal{K}^s_K$ no cambia si se hace una translación sobre K, basta considerar las bolas B_ε con centro en el origen y radio ε en R^N. Tenemos que demostrar que la imagen de la bola unidad de $\mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ en $\mathcal{K}^{s-h}_{B_\varepsilon}$ tiende a 0 cuando ε tiende a cero.

Las bolas unidad de los $\mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ forman una familia decreciente de conjuntos débilmente cerrados en $\mathcal{K}^s_{B_1}$. Puesto que la bola unidad de $\mathcal{K}^s_{B_1}$ es débilmente compacta, las bolas unidad de los $\mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ tenderán débilmente a cero si demostramos que su intersección se reduce a $\{0\}$ (Bourbaki, Top. gén., Chap. I § 10, Cor. du Th. 1). Pero esto implica en virtud del Teorema 2.2 que las imágenes de estas bolas en $\mathcal{K}^{s-h}_K$ tienden fuertemente a cero cuando $\varepsilon > 0$.

Falta entonces demostrar que para $s \geq -N/2$ no hay en H^s distribución cuyo soporte sea el origen. En efecto, si el soporte de T se reduce a $\{0\}$, entonces $\hat{T}$ es un polinomio cuyo grado sea m. $T \in \mathrm{H}^s$ significa $(1+\rho^2)^{s/2}\,\hat{T} \in L^2$ y puesto que hay por lo menos un dominio angular en que $\hat{T} \approx \rho^m$, se tiene $2m + 2s < -N$, es decir, $s < -\frac{N}{2} - m$ o sea $s < -N/2$. ■

Observación. Para $s \geq 0$ la última parte de la demostración es trivial. En efecto en este caso $\mathrm{H}^s \subset \mathrm{H}^0$ (p.6) y la única función de $\mathrm{H}^0 = L^2$ con soporte en $\{0\}$ es la función cero.

Sea $f(x)$ una función localmente integrable y $k \neq 0$. Se pone

$$f_{(k)}(x) = f(x/k) \quad .$$

Para $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\int f_{(k)}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int f(x/k)\,\varphi(x)\,dx = |k|^N \int f(x)\,\varphi(kx)\,dx \;.$$

Por analogía se pone la definición siguiente :

Definición. Para $T \in \mathrm{D}'$ se define $T_{(k)}$ por la fórmula

$$< T_{(k)}\,, \varphi > = |k|^N < T, \varphi(kx) > \quad , \qquad \varphi \in \mathrm{D} \;.$$

Por abuso de lenguaje escribiremos a veces $T(x/k)$ en vez de $T_{(k)}$.

Ejemplo.

$$< \delta_{(k)}\,, \varphi > = |k|^N < \delta\,, \varphi(kx) > = |k|^N < \delta\,, \varphi > \quad ,$$

es decir,

$$\delta_{(k)} = \delta\,(x/k) = |k|^N\,\delta \;.$$

La aplicación $T \mapsto T_{(k)}$ es continua de D' en D' y de S' en S'. Para funciones f se tiene la relación

$$(f_{(k)})\,\hat{} = |k|^N\,\hat{f}(k\,\xi) = |k|^N\,(\hat{f})_{(1/k)}$$

(TD,II, fórmula (VII, 6 ; 16)) y por continuidad se tiene la fórmula análoga

$$(T_{(k)})\,\hat{} = |k|^N\,(\hat{T})_{(1/k)}$$

para $T \in \mathrm{S}'$.

Lema 1. Si $s \geq 0$ *y* $T \in \mathrm{K}^s_{B_\varepsilon}$ *, entonces* $T_{(1/\varepsilon)} \in \mathrm{K}^s_{B_1}$ *y se tiene*

$$|||T|||_s = \varepsilon^{N/2 - s}\,|||T_{(1/\varepsilon)}|||_s \;.$$

Hemos puesto $|||T|||_s = \|\rho^s\,T\|_{L^2}$ que, como sabemos (Observación 3º, p.18) es una norma equivalente a $\|T\|_s$ sobre K^s_K para $s \geq 0$.

Demostración. Puesto que

$$T(x) = T_{(1/\varepsilon)}(x/\varepsilon) ,$$

se tiene

$$\hat{T}(\xi) = \varepsilon^N (T_{(1/\varepsilon)})\hat{}(\varepsilon\xi) ,$$

y por consiguiente

$$|||T|||_s^2 = \|\rho^s \hat{T}\|^2_{L^2} = \int \rho^{2s} |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \varepsilon^{2N} \int \rho^{2s} |(T_{(1/\varepsilon)})\hat{}(\varepsilon\xi)|^2 \, d\xi \qquad (\varepsilon\xi = \xi')$$

$$= \varepsilon^{2N} \int \frac{|\xi'|^{2s}}{\varepsilon^{2s}} |(T_{(1/\varepsilon)})\hat{}(\xi')|^2 \, \frac{d\xi'}{\varepsilon^N}$$

$$= \varepsilon^{N-2s} \int |\xi'|^{2s} |(T_{(1/\varepsilon)})\hat{}(\xi')|^2 \, d\xi'$$

$$= \varepsilon^{N-2s} |||T_{(1/\varepsilon)}|||_s^2 . \quad \blacksquare$$

Observación. De este lema se podría deducir otra vez el teorema anterior, por lo menos en el caso de $s \geq 0$.

Lema 2. Sea $s \geq 0$. Entonces la norma $C_2 = C_2(\varepsilon, s)$ de la aplicación $T \mapsto x_i T$ de $K^s_{B_\varepsilon}$ en $K^s_{B_\varepsilon}$ tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$.

Observaciones. 1o. Sabemos por la proposición 2.11 (pág.14) que la aplica -

ción $T \mapsto x_i T$ es continua, ya que no importa que $x_i \notin \mathcal{S}$, puesto que T tiene soporte compacto.

2o. El lema no es cierto para $s < -N/2 - 1$, ya que entonces $\frac{\partial \delta}{\partial x_i} \in \mathrm{K}^s_{B_\varepsilon}$, $\delta \in \mathrm{K}^s_B$ para todo $\varepsilon \to 0$, y la aplicación $T \mapsto x_i T$ transforma

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad x_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = -\delta .$$

Demostración. Se tiene

$$(x_i T)_{(1/\varepsilon)}(x) = (x_i T)(\varepsilon x) = (\varepsilon x_i)\, T(\varepsilon x) = \varepsilon x_i T_{(1/\varepsilon)}(x)$$

y por consiguiente en virtud del lema 1

$$|||x_i T|||_s = |||(x_i T)_{(1/\varepsilon)}|||_s \cdot \varepsilon^{N/2-s}$$

$$= \varepsilon .\, \varepsilon^{N/2-s} |||(x_i . T)_{(1/\varepsilon)}|||_s$$

$$\leq C_2(1, s)\, \varepsilon .\, \varepsilon^{N/2-s} |||T_{(1/\varepsilon)}|||_s$$

$$= C_2(1, s) .\; \varepsilon |||T|||_s \quad ,$$

de donde síguese

$$C_2(\varepsilon, s) \leq \varepsilon\, C_2(1, s) \quad ,$$

lo que demuestra el lema . ∎

Proposición 2.16. (Whitney). Sea $\alpha(x)$ una función indefinidamente diferenciable que se anula en el origen de R^N. Existen entonces funciones indefinidamente diferenciales $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, tales que $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i(x)$.

Demostraremos la proposición en varias etapas.

1o. Sea $\vec{\alpha}(x)$ *una función indefinidamente diferenciable sobre* R *con valores en un espacio vectorial topológico localmente convexo* E, *es decir,* $\alpha(x) \in \mathcal{E}_R(E)$. *Si* $\vec{\alpha}(x)$ *se anula en el origen, entonces* $\vec{\alpha}(x)/x$ *también es indefinidamente diferenciable.*

Tenemos que demostrar que cualquiera que sea el número entero positivo k, la función

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\vec{\alpha}(x)}{x}\right) = D^k\left(\frac{\vec{\alpha}(x)}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$$

tiende a un límite cuando x tiende a cero. Se tiene

$$\vec{\alpha}(x) = \sum_{p=1}^{m} \frac{x^p}{p!} \vec{\alpha}^{(p)}(0) + \frac{1}{m!}\int_0^x (x-\xi)^m \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

es decir ,

$$\frac{\vec{\alpha}(x)}{x} = \sum_{p=1}^{m} \frac{x^{p-1}}{p!} \vec{\alpha}^{(p)}(0) + \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x (x-\xi)^m \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi \quad .$$

Sea $k \leq m-1$. Para demostrar la afirmación, basta demostrar que

$$(2,13) \qquad D^k\left(\frac{1}{x}\int_0^x (x-\xi)^m \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi\right)$$

tiende a un límite cuando x tiende a cero. Ahora (2,13) es combinación lineal de términos del tipo

$$D^{k-j}(1/x) \,.\, D^j\left(\int_0^x (x-\xi)^m \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi\right) \quad ,$$

los cuales, a menos de un factor constante, son iguales a

$$\frac{1}{x^{k-j+1}} \int_0^x (x-\xi)^{m-j} \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi =$$

$$= x^{m-k} \cdot \frac{1}{x^{m-j+1}} \int_0^x (x-\xi)^{m-j} \vec{\alpha}^{(m+1)}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

y esta expresión tiende a cero, ya que por hipótesis $m-k \geq 1$.

2o. Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_N)$ *una función numérica indefinidamente diferenciable, definida sobre* R^N*, es decir,* $\alpha(x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{E}_{R^N}$. *Si* $\alpha(0, x_2, \ldots, x_N) = 0$ *, entonces* $\alpha(x_1, \ldots, x_N)/x_1 \in \mathrm{E}_{R^N}$.

Cada función $\alpha(x_1, \ldots, x_N)$ de E_{R^N} se puede considerar como una función indefinidamente diferenciable

$$x_1 \mapsto \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

de la variable real x_1 con valores en $\mathrm{E}_{R^{N-1}}$ y viceversa, es decir $\mathrm{E}_{R^N} = \mathrm{E}_R(\mathrm{E}_{R^{N-1}})$. Basta entonces aplicar 1o. con $E = \mathrm{E}_{R^{N-1}}$.

3o. Supongamos que $\alpha(x) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ verifica las hipótesis de la proposición 2.16 . Pongamos

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \{ \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_N) - \alpha(0, x_2, \ldots, x_N) \} +$$

$$+ \{ \alpha(0, x_2, \ldots, x_N) - \alpha(0, 0, \ldots, x_N) \} + \cdots + \alpha(0, 0, \ldots, 0, x_N) .$$

Aplicando 2o. a cada término de esta suma, queda demostrada la proposición 2.16. ∎

Teorema 2.3. *Sea*

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p$$

un operador diferencial de orden m *con los coeficientes indefinidamente diferenciales y sea* $\alpha_p(0) = 0$ *para* $|p| = m$. *Sea* $s \geq 0$. *Entonces la norma* $C_3 \doteq C_3(\varepsilon, s)$ *de la aplicación continua* (proposición 2.13) $T \mapsto DT$ *de* $K^s_{B_\varepsilon}$ *en* $K^{s-m}_{B_\varepsilon}$ *tiende a cero cuando* $\varepsilon \to 0$.

Demostración. En virtud de la proposición 2.16 para cada $|p| = m$ existen funciones indefinidamente diferenciables $\alpha_{p,i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ tales que

$$\alpha_p(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, \alpha_{p,i}(x) .$$

Se tiene entonces

$$D = \sum_{|p|=m} \sum_{i=1}^{N} x_i\, \alpha_{p,i}(x) D^p + \sum_{|p|<m} \alpha_p D^p .$$

Ahora bien en virtud de la fórmula de Leibniz

$$x_i\, \alpha_{p,i}(x)\, D^p T = \alpha_{p,i} D^p(x_i T) + \tilde{D}\, T ,$$

donde $\tilde{D}$ es un operador diferencial de orden $\leq m-1$. Se puede escribir entonces

$$DT = \sum_{i=1}^{N} D_i(x_i T) + D_o T , \tag{2.14}$$

donde las D_i son operadores diferenciales de orden m y D_o es un operador de grado $\leq m-1$.

Ahora bien, con la notación del lema 2 y utilizando la proposición 2.13, se tiene

$$|||D_i(x_i T)|||_{s-m} \leq |||D_i|||_{K^s_{B_1}, K^{s-m}_{B_1}} |||x_i T|||_s \leq$$

(2,15)

$$\leq C_2(\varepsilon, s) |||D_i|||_{K^s_{B_1}, K^{s-m}_{B_1}} |||T|||_s$$

Por otro lado, otra vez en virtud de la proposición 2.13 y con la notación de la proposición 2.15 se tiene

$$|||D_o T|||_{s-m} \leq |||D_o|||_{K^{n-1}_{B_1}, K^{s-m}_{B_1}} |||T|||_{s-1} \leq$$

(2,16)

$$< C_1(B_\varepsilon, s, 1) |||D_o|||_{K^{s-1}_{B_1}, K^{s-m}_{B_1}} |||T|||_s \quad .$$

De (2.14), (2,15) y (2,16) resulta el teorema, puesto que en virtud de la proposición 2.15 y del lema 2 las cantidades $C_1(B_\varepsilon, s, 1)$ y $C_2(\varepsilon, s)$ tienden a cero cuando $\varepsilon \to 0$. ■

Sea $T \in \mathrm{H}^s$, $\alpha \in \mathrm{S}$, entonces $\alpha T \in \mathrm{H}^s$ (proposición 2.11). Sea β_ε una sucesión de funciones con $\beta_\varepsilon \in \mathrm{D}$, $\beta_\varepsilon \geq 0$, $\int \beta_\varepsilon dx = 1$ y tal que el soporte de β_ε esté contenido en B_ε . Entonces $\beta_\varepsilon * T \in \mathrm{H}^\infty$ y $\beta_\varepsilon * T$ tiende a T en H^s cuando $\varepsilon \to 0$ (proposición 2.10). Por consiguiente , $\alpha(\beta_\varepsilon * T) \in \mathrm{H}^\infty$ y $\alpha(\beta_\varepsilon * T)$ tiende en H^s hacia αT, ya que la aplicación $T \mapsto \alpha T$ de H^s

en H^s es continua (proposición 2. 11). De la misma manera $\beta_\varepsilon * (\alpha T) \in H^\infty$ y $\beta_\varepsilon * (\alpha T) \in H^\infty$ y $\beta_\varepsilon * (\alpha T)$ tiende a αT en H^s, puesto que $\alpha T \in H^s$. Resulta entonces que

$$\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$$

pertenece a H^∞ y tiende a cero en H^s. Si imponemos a β_ε condiciones un poco más restrictivas, se puede demostrar un poco más :

Lema (Friedrichs). *Si suponemos que*

$$\beta_\varepsilon \leq \frac{M}{\varepsilon^N} \quad , \quad \left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{N+1}}$$

entonces $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$ *tiende a cero en* H^{s+1} *cuando* $\varepsilon \to 0$.

Observación. Existen funciones β_ε que satisfacen a las condiciones del lema. En efecto sea $\beta \geq 0$, $\int \beta \, dx = 1$ y soporte $(\beta) \subset B_1$. Entonces poniendo

$$\beta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \beta \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad ,$$

se tiene $\beta_\varepsilon \geq 0$, soporte $(\beta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon$,

$$\int \beta_\varepsilon(x) \, dx = \int \beta \, (x/\varepsilon) \frac{dx}{\varepsilon^N} = \int \beta \, (x) \, dx = 1 \quad ,$$

$$\beta_\varepsilon(x) \leq \frac{\text{máx}\, \beta}{\varepsilon^N} \quad , \quad \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \, (x/\varepsilon) \quad ,$$

$$\left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \text{ máx} \left| \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right| .$$

Demostración. Consideremos las funciones $(\varepsilon > 0)$

$$(1+\rho^2)^{(s+1)/2} \mid \hat{\alpha} * (\hat{\beta}_\varepsilon T) - \hat{\beta}_\varepsilon(\hat{\alpha} * \hat{T}) \mid =$$

(2, 17)
$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} \int (\hat{\alpha}(\eta)\, \beta_\varepsilon(\xi-\eta)\, \hat{T}(\xi-\eta) -$$

$$- \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)\, \hat{\alpha}(\eta)\, \hat{T}(\xi-\eta))\, d\eta \quad .$$

En virtud de la desigualdad (2,3) esta función está mayorada por

$$C\int \left(| \beta_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi) | \cdot (1+|\xi|^2)^{1/2} \right) \cdot \left(|\hat{T}(\xi-\eta)| \cdot (1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} \right) \cdot$$
$$\left(|\hat{\alpha}(\eta)| (1+|\eta|^2)^{|s|/2} \right) d\eta$$

(C designará una constante numérica, no la misma en cada fórmula). Supongamos demostrada por un instante la desigualdad

(2,18) $$|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \cdot (1+|\xi|^2)^{1/2} \leq C(1+|\eta|^2)^{1/2} \quad .$$

Entonces (2,17) está mayorado por

$$C\int \left\{ |\hat{T}(\xi-\eta)| (1+|\xi-\eta|^2 \right\}^{s/2} \left(|\hat{\alpha}(\eta)| (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|+1}{2}} \right) d\eta$$

(2, 19)
$$= C(1+\rho^2)^{s/2} |\hat{T}(\xi)| * \left(1+\rho^2\right)^{\frac{|s|+1}{2}} |\hat{\alpha}(\xi)| \quad .$$

Ahora bien $(1+\rho^2)^{s/2} |\hat{T}(\xi)| \in L^2$ y $\left(1+\rho^2\right)^{\frac{|s|+1}{2}} \cdot |\hat{\alpha}(\xi)| \in S \subset L^1$ y, por consiguiente, (2,19) está en L^2 (TD, II, fórmula (VI, 1; 2)). Desde luego (2, 17) está mayorando independientemente de ε por una función fija de L^2 , lo que significa que las funciones

$$\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$$

tienen las normas uniformemente acotadas en H^{s+1}.

Demostremos ahora las desigualdades (2,18). Puesto que

$$(1 + |\xi|^2)^{1/2} \leq C(1 + \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|)$$

y que

$$|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi - \eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \leq 2\, \text{máx}\, |\hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \leq 2\int \beta_\varepsilon(x)\, dx = 2 ,$$

basta demostrar que

(2,20) $$|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \cdot |2\pi i \xi_j| \leq C(1 + |\eta|^2)^{1/2} .$$

Ahora

$$(\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi))(2\pi i \xi_j)$$

es la transformada de Fourier de

(2,21) $$\frac{\partial}{\partial x_j}[(e^{-2\pi i < x,\eta >} - 1)\, \beta_\varepsilon(x)]$$

y para demostrar (2,20) basta mostrar que la norma de (2,21) en L^1 es inferior a $C(1 + |\eta|^2)^{1/2}$. (2,21) es igual a

(2,22) $$-2\pi i\eta_j e^{-2\pi i< x,\eta>} \beta_\varepsilon(x) + (e^{-2\pi i< x,\eta>} - 1)\frac{\partial \beta_\varepsilon(x)}{\partial x_j} .$$

Puesto que $|-2\pi i\eta_j| \leq (1 + |\eta|^2)^{1/2}$, $|e^{-2\pi i< x,\eta>}| = 1$ y $\int \beta_\varepsilon dx = 1$,

la integral del valor absoluto del primer término de (2,22) es inferior a $C(1+|\eta|^2)^{1/2}$.
Por otro lado, en virtud de la desigualdad

$$|e^{-iu} - 1| \leq C\,|u| \;,$$

se tiene

$$(2,23) \qquad |e^{-2\pi i < x, \eta >} - 1| \leq C \cdot |< x, \eta >| \quad .$$

Ahora es suficiente considerar los valores de x que varían en el soporte de $\frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_j}$, es decir en B_ε y luego

$$(2,24) \qquad C|< x, \eta >| \leq C\,\|x\| \cdot \|\eta\| \leq C \cdot \varepsilon (1 + |\eta|^2)^{1/2} \quad .$$

Puesto que $\left|\frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_j}\right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{N+1}}$ y que el volumen de B_ε es proporcional a ε^N, en virtud de (2,23) y (2,24) la integral del valor absoluto del segundo término de (2,22) es también menor que $C(1+|\eta|^2)^{1/2}$.

Podemos ahora concluir la demostración. Para todo $T \in \mathrm{H}^s$ la familia de elementos $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$ de H^{s+1} tiene sus normas acotadas. Por consiguiente las aplicaciones $T \mapsto \alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$ forman un conjunto equicontinuo de aplicaciones de H^s en H^{s+1} (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 3, Th. 2). Basta entonces demostrar que $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$ tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$ y T recorre una parte densa de H^{s+1} (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 3, Cor. 1 du Th. 4). Pero si $T \in \mathrm{S}$, entonces $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * (\alpha T)$ tiende a $\alpha T - \alpha T$ en S y con más razón en H^{s+1} .

Teorema 2. 4. Sea

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x) D^p$$

un operador diferencial de orden m *con* $\alpha_p \in \mathrm{S}$. *Sea* $\beta_\varepsilon \in \mathrm{D}$, $\beta_\varepsilon \geq 0$, $\int \beta_\varepsilon dx = 1$, *soporte* $(\beta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon$,

$$\beta_\varepsilon \leq \frac{M}{\varepsilon^N} , \left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{N+1}} .$$

Entonces para $T \in \mathrm{H}^s$

$$\beta_\varepsilon * DT - D(\beta_\varepsilon * T)$$

tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$ *en* H^{s-m+1} .

Demostración. Es claramente suficiente demostrar el teorema para un monomio diferencial de la forma $\alpha_p D^p$ en vez de D. Ahora bien

$$\beta_\varepsilon * (\alpha_p D^p T) - \alpha_p D^p(\beta_\varepsilon * T) = \beta_\varepsilon * \alpha_p (D^p T) - \alpha_p(\beta_\varepsilon * (D^p T)) ,$$

y el teorema sigue del lema aplicado a $D^p T \in \mathrm{H}^{s-m}$ (proposición 2.12) . ∎

Observación. El teorema sigue siendo cierto si se supone $T \in \mathrm{E}'$, $\alpha_p \in \mathrm{E}$, ya que las α_p se pueden reemplazar por $\gamma \alpha_p$ con $\gamma \in \mathrm{D}$, $\gamma = 1$ sobre el soporte de T.

Ejercicio. a) Para $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ pongamos

$$\|T\|_{s,\varepsilon} = \left(\int_{|\xi| > \varepsilon} |\xi|^{2s} \cdot |\hat{T}(\xi)|^2 \cdot d\xi \right)^{1/2}$$

Sabemos (Teorema 2.1) que $\|T\|_{s,\varepsilon}$ es una norma equivalente a $\|T\|_s$ sobre

$K^s_{B_\varepsilon}$.

Sea ahora $s = -\sigma \leq 0$ y $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\| T \|_{s,\varepsilon} = \sup \ | < T , \psi > |$$

donde el supremo se toma con respecto a ψ que recorre la bola $\|\psi\|_{\sigma, 2\varepsilon} \leq 1$ de $K^\sigma_{B_{2\varepsilon}}$. Demostrar que $\|T\|_{s,\varepsilon}$ es una norma equivalente a $\|T\|_s$ sobre $H^s_{B_\varepsilon}$ (utilizar la dualidad entre H^s y H^σ).

b) Sea $T \in H^s_{B_\varepsilon}$, entonces $T_{(1/\varepsilon)} \in K^s_{B_1}$ (25-26). Demostrar la fórmula

(2,25) $$\|T\|_{s,\varepsilon} = \varepsilon^{N/2 - s} \|T\|_{s,1} \quad .$$

(Para $s \geq 0$ seguir el mismo método que en la demostración del lema 1 de la p. 25. Para $s = -\sigma \leq 0$ reemplazar en la definición de $\|T\|_{s,\varepsilon}$ la expresión $< T , \psi >$ por

$$\varepsilon^N < T_{(1/\varepsilon)} \ , \ \psi_{(1/\varepsilon)} >$$

y tomar en cuenta que si ψ recorre la bola $\|\psi\|_{s,2\varepsilon} \leq 1$ de $K^\sigma_{B_{2\varepsilon}}$, entonces $\psi_{(1/\varepsilon)}$ recorre exactamente la bola de radio $\varepsilon^{-N/2+\sigma}$ de $K^\sigma_{B_2}$ en virtud de la fórmula (2,25) ya demostrada para $\sigma \geq 0$).

c) Se sabe que $\delta \in H^s$ para $s < -N/2$. Demostrar que $\|\delta\|_{s,\varepsilon}$ tiende a cero con ε . (Utilizando la fórmula $\delta_{(1/\varepsilon)} = \varepsilon^{-N}\delta$ (p.25), la fórmula (2,25) da $\|\delta\|_{s,\varepsilon} = \varepsilon^{N/2-s} \|\delta_{(1/\varepsilon)}\|_{s,1} = \varepsilon^{-N/2-s} \|\delta\|_{s,1}$ y $-N/2 - s > 0$).

d) Sea D^p de orden $|p| = m$ (p.1). Demostrar que para todo $T \in \mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ se tiene

$$(2,26) \quad \frac{\|D^p T\|_{s-m,\varepsilon}}{\|T\|_{s,\varepsilon}} = \frac{\|D^p(T_{(1/\varepsilon)})\|_{s-m,1}}{\|T_{(1/\varepsilon)}\|_{s,1}}$$

(Utilizar (2,25) y la relación $D^p(T_{(1/\varepsilon)}) = \varepsilon^m (D^p T_{(1/\varepsilon)})$. En particular la norma del operador D^p de $\mathcal{K}^s_D$ en $\mathcal{K}^{s-m}_{B_\varepsilon}$ es independiente de ε.

e) Sea $\alpha \in \mathcal{E}$. Demostrar que la norma de la aplicación $T \mapsto \alpha T$ de $\mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ en $\mathcal{K}^s_{B_\varepsilon}$ es acotada independientemente de ε para $\varepsilon \leq 1$. (Puesto que $\varepsilon \leq 1$, se puede suponer $\alpha \in \mathcal{D}$. Poner

$$\|\alpha T\|_{s,\varepsilon} = \varepsilon^{N/2-s} \|\alpha_{(1/\varepsilon)} T_{(1/\varepsilon)}\|_{s,1} \leq C_1 \cdot \varepsilon^{N/2-1} \|\alpha_{(1/\varepsilon)} T_{(1/\varepsilon)}\|_s \; .$$

Luego utilizar la mayoración

$$\|\alpha_{(1/\varepsilon)} T_{(1/\varepsilon)}\|_s \leq C_2 \|(1+\rho^2)^{|s|/2} (\alpha_{(1/\varepsilon)})^\wedge\|_{L^1} \|T_{(1/\varepsilon)}\|_s$$

obtenida en la demostración de la proposición 2.11 (pp.14 - 15). Ahora

$$\|T_{(1/\varepsilon)}\|_s \leq C_3 \|T_{(1/\varepsilon)}\|_{s,1} \qquad \text{y}$$

$$\|(1+\rho^2)^{|s|/2} (\alpha_{(1/\varepsilon)})^\wedge\|_{L^1} = \int (1+|\xi|^2)^{|s|/2} |\hat{\alpha}(\xi/\varepsilon)| \, \varepsilon^{-N} d\xi =$$

$$= \int (1+|\varepsilon\xi|^2)^{|s|/2} |\hat{\alpha}(\xi)| \, d\xi$$

se puede mayorar independientemente de ε para $\varepsilon \leq 1$. Finalmente se llega a

$\|\alpha T\|_{s,\varepsilon} \leq C_4 \, \varepsilon^{N/2-1} \, \| T_{(1/\varepsilon)} \|_{s,1} = C_4 \, \| T \|_{s,\varepsilon}$ lo que demuestra la afirmación).

f) Demostrar que para $h > 0$ se tiene $\| T \|_{s-h,\varepsilon} \leq C \, \varepsilon^h \| T \|_{s,\varepsilon}$, donde $C = C(s,h)$ es una constante independiente de ε. (Utilizar (2,25) para s y $s-h$, y la desigualdad $\| T_{(1/\varepsilon)} \|_{s-h,1} \leq C \| T_{(1/\varepsilon)} \|_{s,1}$). Por consiguiente la norma de la inyección de $K^s_{B_\varepsilon}$ en $K^{s-h}_{B_\varepsilon}$ tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$. Con las normas utilizadas en la proposición 2.15 (p.20) esto no era cierto sino para $\geq -N/2$.

g) Sea $D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p D^p$ un operador diferencial de orden m con $\alpha_p \in \mathcal{E}$. Entonces la norma de la aplicación $T \mapsto DT$ de $K^s_{B_\varepsilon}$ en $K^{s-m}_{B_\varepsilon}$ es acotada independientemente de ε para $\varepsilon \leq 1$. (Utilizar d), e), f)).

h) Demostrar que $\| x_i T \|_{s,\varepsilon} \leq C \, \varepsilon \| T \|_{s,\varepsilon}$, donde la constante $C = C(s)$ es independiente de ε. (Utilizar el método de la demostración del lema 2, p.23).

i) Demostrar el análogo del Teorema 2.3 (p.30) para las normas $\| T \|_{s,\varepsilon}$ y $\| DT \|_{s-m,\varepsilon}$.

3. *Sistemas elípticos e hipoelípticos. Demostración del teorema fundamental.* (p.2). Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita l con base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_l$. Se designa por $\mathcal{D}'(E)$ el espacio de las distribuciones con valores en E (TD, I, p.30). Un elemento $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ es por definición una aplicación lineal continua de $\mathcal{D}$ en E. Si $T \in \mathcal{D}'$, entonces $T\vec{e}$ es el elemento de $\mathcal{D}'(E)$ definido por $\varphi \mapsto T(\varphi)\,\vec{e}$ siendo $\vec{e} \in E$. Con esta notación todo $T \in \mathcal{D}'(E)$ se puede escribir en la forma $\vec{T} = T_1 \vec{e}_1 + \cdots + T_l \vec{e}_l$. Se puede demostrar fácilmente que $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}' \otimes E$.

De manera análoga se pueden definir los espacios $\mathrm{E}'(E)$, $\mathrm{S}'(E)$ y en general si A es un espacio de distribuciones, es decir, $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}'$ y la topología de A por D', entonces se puede definir el espacio $\mathrm{A}(E) = \mathrm{A} \otimes E$.

Consideremos en particular el espacio $\mathrm{H}^s(E) = \mathrm{H}^s \otimes E$. Una distribución $\vec{T} \in \mathrm{H}^s(E)$ tiene la norma

$$||\vec{T}||_s = || (1+\rho^2)^{s/2} || \hat{T}(\xi) ||_E ||_{L^2} \quad ,$$

donde $||\vec{e}\,||_E$ es la norma en E. Es evidente que todas las propiedades demostradas para H^s en el § 2 son ciertas para $\mathrm{H}^s(E)$.

Sea ahora F otro espacio vectorial complejo de dimensión finita k con base $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$. Consideraremos operadores diferenciales de la forma

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p \quad ,$$

donde las $\alpha_p(x)$ son funciones indefinidamente diferenciables que toman sus valores en el espacio $\mathrm{L}(E,F)$, es decir, $\alpha_p(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{L}(E,F))$ para $x \in R^N$. Cada $\alpha_p(x)$ es una matriz $(\alpha_{p;j,i}(x))$ con k filas y l columnas (Bourbaki, Alg., Chap. II, § 6, nº 3) y se tiene

$$\alpha_p(x) \,.\, \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{p;j,i}(x) \,.\, \vec{f}_j \quad .$$

Para $\vec{T} \in \mathrm{D}'(E)$ se tiene

$$DT = \sum_{|p| \leq m} \sum_{i,j} \alpha_{p;j,i}(x)\, (D^p T_i)\, \vec{f}_j \quad ,$$

es decir

$$(D\vec{T})_j = \sum_{|p|\leq m} \sum_{i=1}^{l} \alpha_{p;j,i}(x)\,(D^p T_i) \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

D se llamará *elíptica* en $a \in R^N$, si para todo $\xi \in R^N$ diferente de cero la aplicación lineal

$$(3,1) \qquad \sum_{|p|=m} \alpha_p(a)\,\xi^p$$

de E en F es de rango igual a la dimensión de E, es decir una inyección de E en F (Bourbaki, Alg., Chap. II, § 3, prop. 11). Para que esto pueda ser el caso se necesita que $dim\, E \leq dim\, F$. Si D es elíptico en todo $a \in R^N$, entonces se dice que D es elíptico. En el caso particular de que $dim\, E = dim\, F$, D será elíptico si para todo $\xi \neq 0$ real, la matriz cuadrada (3,1) es inversible, es decir,

$$det \sum_{|p|=m} \alpha_p(a)\,\xi^p \neq 0 \quad .$$

Estas definiciones generalizan claramente la de la p. 1.

Si $dim\, E = dim\, F$ y si D es elíptico, entonces ${}^tD$ también lo es. En efecto el transpuesto ${}^tD$ de D está definido por

$${}^tD\,\vec{T} = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|}\, D^p({}^t\alpha_p \cdot \vec{T}) .$$

Ahora, en virtud de la fórmula de Leibniz, la diferencia

$$T \mapsto D^p({}^t\alpha_p) - {}^t\alpha_p D^p\, T$$

es un operador diferencial de grado $< |p|$. Por consiguiente el carácter elíptico de ^tD está determinado por los términos

$$\sum_{|p|=m} (-1)^{|p|}\, {}^t\alpha_p D^p = (-1)^m \sum_{|p|=m} {}^t\alpha_p D^p$$

y

$$(-1)^m \sum_{|p|=m} {}^t\alpha_p(a)\, \xi^p$$

es inversible si (3,1) lo es .

Ejemplo : El operador *grad* definido por

$$T \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

es elíptico. Aquí $l = 1,\ k = N$ y se tiene

$$grad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_N} .$$

La matriz (3,1) correspondiente es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \xi_N = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_N \end{pmatrix}$$

la cual es de rango 1 para todo $\xi \neq 0$. El transpuesto $^t grad = div$, definido por

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T_i}{\partial x_i} ,$$

evidentemente no es elíptico.

Demostraremos en este párrafo el teorema fundamental siguiente, que generaliza para sistemas el teorema enunciado en la página 2 :

Teorema fundamental. Sea $dim E \leq dim F$,

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x) D^p$$

un operador diferencial con coeficientes $\alpha_p(x) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(E,F))$ *y* Ω *un abierto de* R^N. *Sea* D *elíptico. Si* $T \in \mathcal{D}'_\Omega(E)$ *y* $DT \in \mathcal{E}_\Omega(F)$, *entonces* $T \in \mathcal{E}_\Omega(E)$.

Este teorema será consecuencia de varios teoremas auxiliares.

Teorema 3.1. Sea D *un operador elíptico con los coeficientes* $\alpha_p \in \mathcal{L}(E,F)$

constantes. Sea K *un compacto de* R^N. *Entonces la aplicación* $T \mapsto DT$ *de* $\mathcal{K}^s_K(E)$ *en* $\mathcal{K}^{s-m}_K(F)$ *es un monomorfismo*. (s arbitrario real).

Demostración. Ya sabemos que la aplicación es continua (proposición 2.13), entonces basta demostrar que existe $c(K)$ tal que

$$\| T \|_s \leq c(K) \| DT \|_{s-m} \quad .$$

Sea $D = D_o + D_1$, donde D_o es un operador homogéneo de grado m y D_1 un operador de grado $\leq m-1$. Pongamos $(D\,\delta)\hat{} = P(\xi)$, $(D_o\delta)\hat{} = P_o(\xi)$ y $(D_1\delta)\hat{} = P_1(\xi)$; entonces

$$P(\xi) = P_o(\xi) + P_1(\xi) \quad ;$$

puesto que las α_p son constantes, estas tres expresiones son polinomios en ξ con valores en $\mathrm{L}(E,F)$, $P_o(\xi)$ es homogéneo de grado m y $P_1(\xi)$ es de grado $\leq m-1$. Puesto que

$$P_o(\xi) = \sum_{|p|=m} \alpha_p (2\pi i\,\xi)^p = (2\pi i)^m \sum_{|p|=m} \alpha_p\, \xi^p \quad ,$$

de la elipticidad de D se sigue que $P_o(\xi)$ es una inyección de E en F para todo $\xi \neq 0$. Consideremos ahora la expresión $P_o(\xi)\cdot\vec{e} \in F$, cuando ξ recorre $|\xi| = 1$ y $\vec{e}$ recorre $\|\vec{e}\|_E = 1$. La norma $\|P_o(\xi)\cdot\vec{e}\|_F$ es una función continua de ξ y de $\vec{e}$ y no toma el valor cero; por consiguiente tiene un mínimo positivo.

$$\|P_o(\xi)\cdot\vec{e}\|_F > c > 0 \ , \quad \text{si} \quad |\xi| = 1 \, , \|\vec{e}\|_E = 1 \ .$$

Puesto que $\| P_o(\xi) \cdot \vec{e} \|_F$ es homogéneo de grado 1 con respecto a $\vec{e}$ y de grado m con respecto a ξ, se tiene

$$\| P_o(\xi) \cdot \vec{e} \|_F \geq c \, | \xi |^m \| \vec{e} \|_E$$

para todo $\xi \in R^N$ y $\vec{e} \in E$. Por otro lado, puesto que $P_1(\xi)$ es de grado $\leq m-1$, se tiene

$$\| P_1(\xi) \cdot \vec{e} \|_F \leq c_1 \, | \xi |^{m-1} \| \vec{e} \|_E$$

para $|\xi| \geq 1$. Por consiguiente existe una $A > 1$ tal que se cumpla la desigualdad

$$(3,2) \quad \|P(\xi) \cdot \vec{e}\|_F \geq c \, |\xi|^m \|\vec{e}\|_E - c_1 |\xi|^{m-1} \|\vec{e}\|_E \geq c_2 \, |\xi|^m \|\vec{e}\|_E$$

para $|\xi| \geq A$ y todo $\vec{e} \in E$. Consideremos las normas sobre $K^s_K(E)$ y $K^{s-m}_K(F)$ definidas en el Teorema 2.1 (p. 18), con el valor de A definido hace un momento. Poniendo $\vec{e} = \hat{T}(\xi)$ se tiene entonces

$$\| T \|_2 = \int_{|\xi| \geq A} |\xi|^{2s} \| \hat{T}(\xi) \|_D^2 \, d\xi \leq$$

$$\leq c_2^{-2} \int_{|\xi| \geq A} |\xi|^{2s} |\xi|^{-2m} \| P(\xi) \cdot \hat{T}(\xi) \|_F^2 \, d\xi = c_2^{-2} \, \|DT\|_{s-m}^2 \, . \; \blacksquare$$

Observación. Si $P(\xi)$ es una inyección para todo ξ (aún para $\xi = 0$), entonces $T \mapsto DT$ es un monomorfismo de $H^s(E)$ en $H^{s-m}(F)$, ya que en este caso la desigualdad (3,2) se puede reemplazar por

$$\| P(\xi) \cdot \vec{e} \|_F > c_2 (1 + |\xi|^2)^{m/2} \| \vec{e} \|_E$$

para todo $\xi \in R^N$, $\vec{e} \in E$ y por consiguiente

$$\| T \|_s = \| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \| \hat{T}(\xi) \|_E \|_{L^2} \leq$$

$$\leq c_2^{-1} \| (1 + |\xi|^2)^{(s-m)/2} \| (DT)\hat{\ }(\xi) \|_F \|_{L^2} = c_2^{-1} \| DT \|_{s-m} \quad .$$

Teorema 3.2. Supongamos que el operador diferencial

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x) D^p$$

con coeficientes $\alpha_p(x) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(E, F))$ *sea elíptico en* $a \in R^N$. *Sea* $s \geq 0$. *Entonces existe una vecindad compacta* K *de* a *tal que la aplicación* $T \mapsto DT$ *sea un monomorfismo de* $\mathcal{K}^s_K(E)$ *en* $\mathcal{K}^{s-m}_K(F)$.

Demostración. Pongamos

(3,3) $$D = D_o + D_1 \quad ,$$

con

$$D_o = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(a) D^p \ , \quad D_1 = \sum_{|p| \leq m} (\alpha_p(x) - \alpha_p(a)) D^p \ .$$

Puesto que D es elíptico, en virtud del Teorema 3.1, si K es una vecindad compacta de a, entonces

(3,4) $$\| T \|_s \leq C \| D_o T \|_{s-m} \quad .$$

Por otro lado los coeficientes de D_1 se anulan en $x = a$ y en particular los coeficientes con $|p| = m$. Se sigue del Teorema 2.3 (p.30) que dado $\varepsilon > 0$ existe una vecindad compacta K de a tal que

$$(3,5) \qquad \|D_1 T\|_{s-m} \leq \varepsilon \| T \|_s$$

si el soporte de T está contenido en K. Resulta de (3,3), (3,4) y (3,5) que

$$\|T\|_s \leq C \|D_o T\|_{s-m} \leq C \|DT\|_{s-m} + C\|D_1 T\|_{s-m} \leq C\|DT\|_{s-m} + \varepsilon C\|T\|_s .$$

Se toma luego ε tan pequeño que $\varepsilon C < 1$ para obtener finalmente

$$(1 - \varepsilon C) \| T \|_s \leq C \| DT\|_{s-m} . \blacksquare$$

Observaciones. 1o. La demostración anterior muestra en realidad la validez del teorema siguiente : Sean B_1 y B_2 dos espacios de Banach. Entonces los monomorfismos forman un conjunto abierto en el espacio $\mathrm{L}(B_1, B_2)$ de las aplicaciones lineales continuas de B_1 en B_2. Por transposición se puede mostrar que lo mismo es cierto para los epimorfismos.

2o. El Teorema es también cierto para $s < 0$, ver Ejercicio.

Sea Ω un abierto de R^N. K^s_Ω será el espacio de las distribuciones definidas sobre Ω, cuyo soporte está contenido en un compacto $K \subset \Omega$ y tales que su prolongación por cero fuera de Ω pertenezca a H^s. L^s_Ω es el espacio de las distribuciones T sobre Ω, tales que si $\alpha \in \mathrm{D}$ tiene su soporte en el compacto $K \subset \Omega$, entonces la distribución que vale αT en K y cero en $\complement K$ esté en H^s.

Otra manera de definir L^s_Ω es decir que una distribución pertenece a L^s_Ω si en la vecindad de cada punto $a \in \Omega$ coincide con una distribución de H^s. En efecto la primera definición implica la segunda, tomando α igual a uno en una vecindad del punto $a \in \Omega$. Inversamente sea K un compacto de Ω y $\alpha \in \mathrm{D}$ con soporte en K. Podemos recubrir K (Bourbaki, Top. gén., Chap. I, 2[e] éd, § 10, prop. 3) con un número finito de vecindades abiertas U_i $(1 \leq i \leq k)$ tales que en U_i la distribución T coincida con $T_i \in \mathrm{H}^s$. Poniendo $U_o = \complement_\Omega K$ obtenemos un recubrimiento abierto $(U_i)_{0 \leq i \leq k}$ de Ω ; sea $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq k}$ una partición de la unidad sobre Ω, subordenada a $(U_i)_{0 \leq i \leq k}$ (TD, I, Chap. I, Théorème II). Entonces

$$\alpha T = \sum_{i=o}^{k} \alpha \alpha_i T = \sum_{i=1}^{k} \alpha \alpha_i T_i \in \mathrm{H}^s$$

puesto que $\alpha \alpha_o \equiv 0$. ∎

Lema. Sea

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x) D^p$$

un operador diferencial elíptico con coeficientes $\alpha_p(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{L}(E,F))$, s *real cualquiera y* Ω *un abierto de* R^N. *Si* $T \in \mathrm{L}^{s-1}_\Omega(E)$ *y* $DT \in \mathrm{L}^{s-m}_\Omega(F)$, *entonces* $T \in \mathrm{L}^s_\Omega(E)$.

Demostración. Supongamos primero que $s \geq 0$. Sea $a \in \Omega$ entonces en virtud del Teorema 3.2 existe una vecindad compacta $K = K(a,D,s)$ de a tal que la aplicación $T \mapsto DT$ de $\mathrm{K}^s_K(E)$ en $\mathrm{K}^{s-m}_K(F)$ sea un monomorfismo. Sea K_1 un compacto contenido en el interior de K y $\alpha(x) \in \mathrm{D}$ con soporte en K_1, $\alpha(x) \equiv 1$ sobre una vecindad de a. Pongamos $S = \alpha T$; el soporte de S está contenido en K_1 y $S \in L_{\Omega}^{s-1}(E)$. Además $DS = D(\alpha T) = \alpha DT + D_1 T$, donde D_1 es un operador diferencial de grado $\leq m-1$. Se tiene $\alpha DT \in L_{\Omega}^{s-m}(F)$ por hipótesis y $D_1 T \in L_{\Omega}^{s-m}(F)$ en virtud de la proposición 2.14 (p. 17). Resulta entonces $DS \in L_{\Omega}^{s-m}(F)$. Evidentemente basta demostrar que $S \in L_{\Omega}^{s}(E)$ ya que $T \in L_{\Omega}^{s}(E)$ si en la vecindad de cada punto de Ω la distribución T coincide con una distribución de $H^{s}(E)$.

Consideremos la sucesión β_{ε} definida en el Teorema 2.4 (p.35). Puesto que $S \in H^{s-1}(E)$, en virtud de ese Teorema

$$(3,6) \qquad D(\beta_{\varepsilon} * S) - \beta_{\varepsilon} * DS$$

tiende a cero en $H^{s-m}(F)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Si ε es bastante pequeño $\beta_{\varepsilon} * S$ y $\beta_{\varepsilon} * DS$ tienen sus soportes en K. Puesto que $DS \in H^{s-m}(F)$, en virtud de la proposición 2.10 (p. 13), $\beta_{\varepsilon} * DS$ tiende a DS en $H^{s-m}(F)$ y por diferencia con (3,6), $D(\beta_{\varepsilon} * S)$ tiende a DS en $H^{s-m}(F)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Ahora bien $\beta_{\varepsilon} * S \in H^{\infty}(E) \subset H^{s}(E)$ (proposición 2.9) y puesto que $\beta_{\varepsilon} * S$ tiene su soporte en K, tenemos $\beta_{\varepsilon} * S \in K_{K}^{s}(E)$. Como la aplicación $T \mapsto DT$ de $K_{K}^{s}(E)$ en $K_{K}^{s-m}(F)$ es un monomorfismo y como $D(\beta_{\varepsilon} * S)$ converge en $H^{s-m}(F)$, también $\beta_{\varepsilon} * S$ converge en $H^{s}(E)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Pero en $D'(E)$ la distribución $\beta_{\varepsilon} * S$ converge hacia S, luego el límite de $\beta_{\varepsilon} * S$ en $H^{s}(E)$ también debe ser S, de donde $S \in H^{s}(E)$ y $S \in L_{\Omega}^{s}(E)$.

Sea ahora s cualquiera. Como antes, basta demostrar que si S tiene soporte compacto, contenido en Ω, $S \in H^{s-1}(E)$, $DS \in H^{s-m}(F)$, entonces $S \in H^{s}(E)$, es decir, $S \in L_{\Omega}^{s}(E)$. Sea $h \geq 0$ entero. Existe $U \in H^{s+2h-1}(E)$ tal que

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^b U = S ,$$

donde en realidad el operador diferencial es una matriz diagonal de orden $dim\, E$ con todos los elementos de la diagonal principal iguales a

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^b .$$

En efecto basta poner

$$\hat{U}(\xi) = \frac{\hat{S}(\xi)}{(1+\rho^2)^b} ,$$

ya que

$$\left(\delta - \frac{\Delta\delta}{4\pi^2}\right)^{\wedge} = 1 + \rho^2 .$$

Se tiene

$$(1+\rho^2)^{(s+2b-1)/2}\,\hat{U}(\xi) = (1+\rho^2)^{(s-1)/2}\,\hat{S}(\xi) \in L^2 .$$

Claro está que

$$D\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^b$$

es un operador elíptico de grado $m+2b$ y además

$$D\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^b U = DS \in \mathrm{H}^{s-m}(F) .$$

Para b suficientemente grande $s+2b$ es positivo y podemos utilizar el teorema ya demostrado para exponentes positivos . De esto sigue $U \in \mathrm{L}_\Omega^{s+2b}(E)$, es decir, $S \in \mathrm{L}_\Omega^{s}(E)$ (proposición 2.14). ■

Teorema 3.3. *Sea*

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p$$

es un operador diferencial elíptico con coeficientes $\alpha_p(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{L}(E,F))$, *s un número real arbitrario y* Ω *un abierto de* R^N. *Si* $T \in \mathrm{D}'_\Omega(E)$ *y* $DT \in \mathrm{L}^{s-m}(F)$, *entonces* $T \in \mathrm{L}^s_\Omega(E)$.

Demostración. Sea ω un subconjunto abierto, relativamente compacto de Ω. En ω la distribución T es de orden finito (TD,I, p. 85), es decir, existe un $\sigma = \sigma(\omega)$ real tal que $T \in \mathrm{L}^\sigma_\omega(E)$. Al mismo tiempo tenemos $DT \in \mathrm{L}^{s-m}_\omega(F)$.

Demostremos que $T \in \mathrm{L}^s_\omega(E)$.

1o. Si $\sigma \geq s$, entonces $\mathrm{L}^\sigma_\omega(E) \subset \mathrm{L}^s_\omega(E)$ y no hay nada que demostrar;

2o. si $\sigma \leq s-1$, entonces en virtud del Lema y de que

$$T \in \mathrm{L}^{(\sigma+1)-1}_\omega(E)\,,\; DT \in \mathrm{L}^{s-m}_\omega(F) \subset \mathrm{L}^{(\sigma+1)-m}_\omega(F)\,,$$

se sigue $T \in \mathrm{L}^{\sigma+1}_\omega(E)$. Podemos seguir de esta manera hasta llegar a $T \in \mathrm{L}^{\sigma+r}_\omega(E)$ con $s-1 \leq \sigma + r \leq s$.

3o. si $s-1 \leq \sigma \leq s$, entonces $T \in \mathrm{L}^\sigma_\omega(E) \subset \mathrm{L}^{s-1}_\omega(E)$ y de $T \in \mathrm{L}^{s-1}_\omega(E)$ y $DT \in \mathrm{L}^{s-m}_\omega(F)$ sigue, según el lema, que $T \in \mathrm{L}^s_\omega(E)$.

Finalmente si $T \in \mathrm{L}^s_\omega(E)$ para todo abierto relativamente compacto $\omega \subset \Omega$, entonces $T \in \mathrm{L}^s_\Omega(E)$. ∎

Ejemplo. Sea una distribución T tal que $\Delta T \in \mathrm{L}^{s-2}$, entonces en virtud del Teorema 3.3 se tiene $T \in \mathrm{L}^s$ y por consiguiente las segundas derivadas (aún mixtas) están individualmente en L^{s-2}:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \in \mathrm{L}^{s-2} \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_j} \in \mathrm{L}^{s-2} \quad .$$

En particular si ΔT está localmente en L^2 $(s = 2)$, entonces todas las derivadas de orden 2 están localmente en L^2.

Demostración del Teorema Fundamental (p. 43). Sea $T \in \mathrm{D}'_{\Omega}(E)$ y $DT \in \mathrm{E}_{\Omega}(F)$. Entonces $DT \in \mathrm{L}_{\Omega}^{s-m}(F)$ para todo s real y en virtud del Teorema 3,3 $T \in \mathrm{L}^{s}_{\Omega}(E)$ para todo s real, es decir, $T \in \bigcap_{s} \mathrm{L}^{s}_{\Omega}(E)$. Por consiguiente, T está localmente en L^2 junto con sus derivadas de todos los órdenes. De aquí sigue (TD,II, Chap. VI, Théorème XIX) que T es una función indefinidamente derivable, es decir, $T \in \mathrm{E}_{\Omega}(E)$. ∎

Ejercicio. Demostrar el Teorema 3.2 (p. 46) para todo s real. (Considerar primero $a = 0$. Poner $D_o = \sum_{|p|=m} \alpha_p(0) D^p$. En virtud del Teorema 3.1 existe una constante C_1 tal que $||T||_{s,1} \leq C_1 ||D_o T||_{s-m,1}$ para todo $T \in \mathrm{K}^{s}_{B_1}$. De (2,26) resulta entonces :

$$||T||_{s,\varepsilon} \leq C \, ||D_o T||_{s-m,\varepsilon} \leq C_1 \, ||DT||_{s-m,\varepsilon} + C_1 \, ||(D - D_o) \, T||_{s-m,\varepsilon} \quad .$$

Observar luego que $D - D_o$ verifica las condiciones del punto i) del Ejercicio del § 2 (p. 39), de donde $||(D - D_o) \, T||_{s-m,\varepsilon} \leq C_2(\varepsilon) \, || T ||_{s,\varepsilon}$, y $C_2(\varepsilon)$ tiende a cero si $\varepsilon \to 0$. Tomando ε tan pequeño que sea $C_1 \, C_2(\varepsilon) < 1$, se tiene finalmente $(1 - C_1 \, C_2(\varepsilon)) \, . \, ||T||_{s,\varepsilon} \leq C_1 ||DT||_{s-m,\varepsilon}$. (El caso de $a \neq 0$ se obtiene por translación).

Con este resultado la segunda parte de la demostración del lema (p. 48) es inútil, porque la primera es válida para todos los valores reales de s.

4. *Secciones distribuciones de espacios fibrados con fibra vectorial.* Sea $V = V(X, p, F, (r_i))$ un espacio fibrado indefinidamente diferenciable, con base $X = X^N$ de dimensión real N, con proyección p, fibra tipo $F = C^l$ y familia de funciones de referencia $(r_i)_{i \in I}$ (para la definición de un espacio fibrado diferenciable de clase C^∞ ver el curso de Madame Marie-Hélène Schwartz : Espacios fibrados, Monografías Matemáticas, No. 1, Suplemento Revista de Matemáticas Elementales, Bogotá, 1963, § 3). Recordamos que cada r_i está definida en un abierto $U_i \subset X$, las U_i $(i \in I)$ cubren X y para $x \in U_i$ el valor de $r_i(x)$ es una biyección de F sobre F_x.

Supongamos además que el grupo estructural G de V sea un subgrupo del grupo lineal $GL_l(C)$. Entonces la referencia $r_i(x)$ define sobre F_x una estructura de espacio vectorial isomorfo a $F = C^l$. En efecto para $\zeta_1, \zeta_2 \in F$ se pone $r_i(x)\,\zeta_1 + r_i(x)\,\zeta_2 = r_i(x)\,(\zeta_1 + \zeta_2)$ y para $\zeta \in F$, $\lambda \in C$ se pone $\lambda\,[r_i(x)\,\zeta] = r_i(x)\,(\lambda\,\zeta)$. Si $x \in U_i \cap U_j$, entonces $r_i(x)$ y $r_j(x)$ definen la misma estructura de espacio vectorial sobre F_x. En efecto sea $r_i(x)\zeta_1 = r_j(x)\zeta_1^\bullet$, $r_i(x)\,\zeta_2 = r_j(x)\,\zeta_2^\bullet$, entonces $\zeta_1 = g_{ij}(x)\,\zeta_1^\bullet$, $\zeta_2 = g_{ij}(x)\,\zeta_2^\bullet$ y por consiguiente

$$r_i(x)\,\zeta_1 + r_i(x)\,\zeta_2 = r_i(x)\,(\zeta_1 + \zeta_2) =$$

$$= r_i(x)\,(g_{ij}(x)\,\zeta_1^\bullet + g_{ij}(x)\,\zeta_2^\bullet) = r_i(x)\,g_{ij}(x)\,(\zeta_1^\bullet + \zeta_2^\bullet) =$$

$$= r_j(x)\,(\zeta_1^\bullet + \zeta_2^\bullet) = r_j(x)\,\zeta_1^\bullet + r_j(x)\,\zeta_2^\bullet$$

ya que $g_{ij}(x) = r_i^{-1}(x)\,r_j(x) \in GL_l(C)$. De la misma manera se ve que

$$\lambda\,[\,r_i(x)\ \zeta\,] = \lambda\,[\,r_j(x)\ \zeta'\,] \quad .$$

Un espacio fibrado $V(X,p,C^l,(r_i))$ con las propiedades ahora explicadas se llamará un *espacio fibrado con fibra vectorial.*

Llamemos $E_X(V)$ el espacio vectorial de las secciones globales indefinidamente diferenciables de V. Sobre $E_X(V)$ se define una topología de la manera siguiente. Sea r_i una función de referencia de V con dominio $U_i \subset X$, y sea $\rho_i : U_i \times F \to p^{-1}(U_i)$ el mapa local correspondiente a r_i, definido por $\rho_i(x,\zeta) = r_i(x)\,\zeta \quad (x \in U_i\ ,\ \zeta \in F)$. Sea ahora f una sección de V y sea f_i su restricción a U_i. Entonces $\rho_i^{-1} \circ f_i$ es una sección del espacio producto $U_i \times F$, es decir $\rho_i^{-1} \circ f_i$ es una función indefinidamente diferenciable con valores en F. Con otras palabras $\rho_i^{-1} \circ f_i$ pertenece al espacio $E_{U_i}(F) = E_{U_i} \otimes F$. Se dice entonces que $f \in E_X(V)$ tiende a cero si $\rho_i^{-1} \circ f_i$ tiende a cero en $E_U \otimes F$ para todo $i \in I$.

$D_X(V)$ será el espacio de las secciones globales indefinidamente diferenciables con soporte compacto de V. Sobre $D_X(V)$ se pone la topología límite inductivo usual.

Sean $V_1(X,p_1,F_1,(r_{1,i}))$ y $V_2(X,p_2,F_2,(r_{2,j}))$ dos espacios fibrados de clase C^∞ con la misma base X y con fibras vectoriales $F_1 = C^{l_1}$, $F_2 = C^{l_2}$. Definimos el producto tensorial $W = V_1 \underset{(X)}{\otimes} V_2$ de V_1 y V_2 de la manera siguiente : Un elemento de W será un elemento de $(F_1)_x \otimes (F_2)_x$, es decir la fibra de W por encima de $x \in X$ es el producto tensorial de las fibras $(F_1)_x$ y $(F_2)_x$. La proyección p de W es la aplicación $(F_1)_x \otimes (F_2)_x \mapsto x$, la fibra tipo de W es $F_1 \otimes F_2$. Para definir las funciones de referencia de W, sea $r_{1,i}$ una función de referencia de V_1 con dominio $U_{1,i}$, es decir, para $x \in U_{1,i}$ la aplicación $r_{1,i}(x)$ es una biyección lineal de F_1 sobre $(F_1)_x$; de la misma manera sea $r_{2,j}$ una función de referencia de V_2 con dominio $U_{2,j}$ siendo para $x \in U_{2,j}$ la aplicación $r_{2,j}(x)$ una biyección lineal de F_2 sobre $(F_2)_x$. Sea $U_{ij} = U_{1,i} \cap U_{2,j}$ y para $x \in U_{ij}$ sea $r_{ij}(x)$ la biyección lineal $r_{1,i}(x) \otimes r_{2,j}(x)$ de $F_1 \otimes F_2$ sobre $(F_1)_x \otimes (F_2)_x$. Las funciones $r_{ij} : x \mapsto r_{ij}(x)$ obtenidas de esta manera, con dominios U_{ij}, serán las funciones de referencia de $W(X, p, F_1 \otimes F_2, (r_{ij}))$. Los deslizamientos de W son de la forma $(g_{1,ii'})(x) \otimes (g_{2,jj'})(x)$, lo que muestra de una parte que W es también un espacio fibrado diferenciable de clase C^∞ y por otra parte que el grupo estructural de es un subgrupo de $GL(F_1 \otimes F_2)$, es decir, W es un espacio fibrado con fibra vectorial.

De manera análoga si $V(X, p, F, (r_i))$ es un espacio fibrado indefinidamente diferenciable con fibra vectorial, entonces se puede definir la p-ésima potencia exterior $\overset{p}{\Lambda}_{(X)} V$ de V sobre la base X. La base de $\overset{p}{\Lambda}_{(X)} V$ es también X, su fibra por encima de $x \in X$ es $\overset{p}{\Lambda} F_x$, su fibra tipo es $\overset{p}{\Lambda} F$ y sus funciones de referencia son $\overset{p}{\Lambda} r_i : x \mapsto \overset{p}{\Lambda} r_i(x)$ (Bourbaki, Alg., Chap. III, § 5, nº 7), es decir, $\overset{p}{\Lambda}_{(X)} V = \overset{p}{\Lambda}_{(X)} V(X, p, \overset{p}{\Lambda} F, (\overset{p}{\Lambda} r_i))$. También se puede definir el espacio fibrado V^*, dual de V. La fibra de V^* por encima de x es F^*_x, la fibra tipo es F^* (la cual es canónicamente isomorfa a C^l), y la referencia $r^*_i(x)$ es la contragrediente de $r_i(x)$. Por consiguiente el grupo estructural G^* de V^* es el grupo contragrediente del grupo estructural G de V. Luego G^* es también un subgrupo de $Gl_l(C)$, es decir, V^* es un espacio fibrado vectorial.

Sobre los espacios fibrados introducidos ahora se pueden definir numerosas operaciones. Sea por ejemplo ω una sección de $\overset{p}{\Lambda}_{(X)} V$ y $\tilde{\omega}$ una sección de $\overset{p}{\Lambda}_{(X)} V$. Se tiene :

$$\omega : x \mapsto \omega_x \in \overset{p}{\wedge} F_x \quad ,$$

$$\tilde{\omega} : x \mapsto \tilde{\omega}_x \in \overset{p}{\wedge} F_x \quad .$$

Entonces la aplicación

$$x \mapsto \omega_x \wedge \tilde{\omega}_x \in (\overset{p}{\wedge} F_x) \wedge (\overset{p}{\wedge} F_x) = \overset{p+q}{\wedge} F_x$$

define una sección de $\overset{n+q}{\wedge}_{(X)} V$ que escribiremos $\omega \underset{(X)}{\wedge} \tilde{\omega}$. Si ω y $\tilde{\omega}$ son indefinidamente diferenciables, entonces $\omega \underset{(X)}{\wedge} \tilde{\omega}$ lo es también .

Si ω es una sección del espacio fibrado V y si $\tilde{\omega}$ es una sección del espacio dual V^*, entonces la aplicación $x \mapsto < \omega_x , \tilde{\omega}_x >$ define una función numérica sobre X que designaremos por $< \omega , \tilde{\omega} >_{(X)}$. Si las secciones ω y $\tilde{\omega}$ son indefinidamente derivables, entonces $< \omega , \tilde{\omega} >_{(X)}$ es una función numérica indefinidamente derivable sobre X.

Sea ahora V un espacio fibrado indefinidamente diferenciable con fibra vectorial y base X. Sea $\overset{p}{\wedge} T \ (X)$ el espacio fibrado de los covectores tangentes complejos de grado p a la variedad X ; la fibra de $\overset{p}{\wedge} T^* (X)$ por encima de un punto $x \in X$ es el complefijicado (ver Variedades Analíticas Complejas (VAC), § 1) $\overset{p}{\wedge} T_x^* (X)$ del espacio $\overset{p}{\wedge} T_x^* (X)$ de los p- covectores tangentes reales. La fibra tipo del espacio fibrado $\overset{p}{\wedge} T^* (X)$ es $\overset{p}{\wedge} C^l$.

Consideremos el espacio fibrado $V \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T^* (X)$ que es el espacio de los p- covectores tangentes de X con valores en V , ya que las fibras de este espacio son $F_x \otimes (\overset{p}{\wedge} T_x^*(X)_C)$. Una sección de $V \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T^*(X)$ se llamará una *sección - forma diferencial de grado p de* V. Si $V = X \times C$, entonces el concepto introducido ahora se reduce a la de forma diferencial de grado p usual sobre la variedad X. Una sección de V es una sección-función (sección-forma diferencial de grado 0) de V ya que $\overset{0}{\wedge} T^*(X)$ tiene fibra C y por lo tanto $V \underset{(X)}{\otimes} \overset{0}{\wedge} T(X)$ es canónicamente isomorfo a V.

Podemos introducir los espacios $\overset{p}{E}_X(V)$ de las secciones-formas diferenciales de grado p indefinidamente diferenciables de V y los espacios $\overset{p}{D}_X(V)$ de las secciones-formas diferenciales de grado p indefinidamente diferenciables con soporte compacto de V. Sobre $\overset{p}{E}_X(V)$ y $\overset{p}{D}_X(V)$ se pueden definir las topologías usuales.

Supongamos a partir de ahora que la base X del espacio fibrado V, que es una variedad indefinidamente diferenciable por definición, sea además orientada y enumerable en el infinito (es decir, reunión de una familia enumerable de conjuntos compactos, Bourbaki, Top. gén., Chap. I, 2^e éd, § 10 nº 11). Para motivar la definición de las secciones-distribuciones de V, que generalizan las distribuciones y las corrientes (VAC, § 6), consideremos una sección-función f localmente integrable de V y busquemos cuáles son las funciones φ sobre las que f opera como una forma lineal continua.

Sea φ una sección del espacio fibrado $V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$, que, en lo que sigue, llamaremos espacio adjunto de V y designaremos por V'. Para $x \in X$ se tiene $f(x) \in F_x$, $\varphi(x) \in F_x^* \otimes \overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$. Se puede considerar entonces el producto contractado (Bourbaki, Alg., Chap. III, § 4, nº 3) de $f(x)$ y de $\varphi(x)$ que designaremos por $f(x) \perp \varphi(x)$ y que será un elemento de $\overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$. Por consiguiente $f \perp \varphi : x \mapsto f(x) \perp \varphi(x)$ es una sección del espacio fibrado $\overset{N}{\wedge} T^*(X)$ y su integral será el producto escalar buscado entre f y φ es decir,

$$< f, \varphi > = \int_X f \perp \varphi \quad .$$

Esta integral existe si φ es de soporte compacto y en particular f define una forma lineal continua sobre $D_X(V')$.

Definición. Sea $V(X, p, F, (r_i))$ *un espacio fibrado indefinidamente diferenciable con fibra vectorial* $F = C^l$ *y sea* $V' = V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$ *el espacio fibrado adjunto. Designaremos por* $D'_X(V)$ *el espacio vectorial dual fuerte del espacio* $D_X(V')$. *Un elemento de* $D'_X(V)$ *se llamará una sección distribución de* V.

Acabamos de ver que cada sección-función localmente integrable de V define una sección-distribución de V.

De la misma manera el dual de $E_X(V')$ es el espacio $E'_X(V)$ de las secciones-distribuciones con soporte compacto de V.

Los espacios $E'_X(V)$ y $D'_X(V)$ tienen todas las propiedades demostradas en *TD* para los espacios E' y D' sobre R^N. En particular estos espacios son completos, tonelados, bomológicos, reflexivos, de Montel, nucleares (Grothendieck, Produits tensoriels topologique et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc. Nº 16, Chap. 2, p. 55), y de Schwartz (Grothendieck, Sur les espaces (F) et (D F), Summa Brasiliensis Math. vol. 3, Fasc. 6, p. 117).

Sea U el dominio de un mapa local de V, entonces $p^{-1}(U)$ es homeomorfo a $U \times F$. Sea $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_l$ una base del espacio vectorial $F = C^l$. Una sección-distribución por encima de U se puede escribir en la forma $T_1\vec{f}_1 + \cdots + T_l\vec{f}_l$, donde las T_j $(1 \leq j \leq l)$ son distribuciones escalares sobre U.

Demostremos ahora que el adjunto del espacio V' es canónicamente isomorfo al espacio original V. En efecto $V'' = V'^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$; ahora bien ,

$V' = V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$, de donde $V'^* = V \underset{X}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T(X)$ y por consiguiente

$$V'' = V \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X) \quad .$$

Ahora $\overset{N}{\wedge} T_x(X)_C \otimes \overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$ es canónicamente isomorfo a C ya que $z \bigcirc z' \mapsto \langle z, z' \rangle$ define una aplicación lineal no nula de un espacio vectorial de dimensión uno sobre el espacio C también de dimensión uno. Por consiguiente $\overset{N}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$ es isomorfo a $X \times C$ V'' a V .

Se tiene entonces que $D'_X(V')$ es el dual de $D_X(V)$ y $E'_X(V')$ es el dual de $E_X(V)$.

Sea ahora X una variedad diferenciable de clase C^∞ , orientada, enumerable en el infinito. Una forma diferencial de grado p es, por definición, una sección del espacio fibrado $V = \overset{p}{\wedge} T^*(X)$ de los p-covectores tangentes a la variedad X . Existen dos maneras distintas de generalizar el concepto de forma diferencial de grado p. La primera es introducir el concepto de corriente ; sabemos que, por definición, una corriente es una forma lineal continua sobre el espacio

(4,1) $$D_X(\overset{N-p}{\wedge} T^*(X))$$

(VAC, § 6). Por otro lado podemos generalizar las formas diferenciales de grado p, que, como dijimos, son secciones de $\overset{p}{\wedge} T^*(X)$, en secciones distribuciones de este espacio, las cuales son, por definición, formas lineales continuas sobre

(4,2) $$D_X(\overset{p}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)) ,$$

ya que $(\overset{p}{\wedge} T^*(X))^* = \overset{p}{\wedge} T(X)$. La segunda generalización es canónica, mientras la primera es arbitraria, ya que por ejemplo la forma diferencial ω define una corriente mediante la fórmula

$$< \omega , \varphi > = \int_V \omega \wedge \varphi$$

y no la fórmula

$$< \omega , \varphi > = \int_V \varphi \wedge \omega \quad .$$

Mostremos que la definición adoptada de las corrientes las permite identificar con las secciones distribuciones de $\overset{p}{\wedge} T^*(X)$.

Sea $x \in X$, $\xi_p \in \overset{p}{\wedge} T_x(X)_C$, $\overset{N}{\alpha} \in \overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$. Sobre $(\overset{p}{\wedge} T_x(X)_C) \times (\overset{N}{\wedge} T_x^*(x)_C)$ la aplicación

$$(\xi_p , \overset{N}{\alpha}) \mapsto \alpha \llcorner \xi$$

(Bourbaki, Alg., Chap. III, § 8, Def. 2) es bilineal con imagen en $\overset{N-p}{\wedge} T_x^*(X)_C$. Por consiguiente tenemos una aplicación lineal de

$$\overset{p}{\wedge} T_x(X)_C \otimes \overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$$

en $\overset{N-p}{\wedge} T_x^*(X)_C$, definida por

$$(4,3) \qquad \xi_p \otimes \overset{N}{\alpha} \mapsto \alpha \llcorner \xi$$

(Bourbaki, Alg., Chap. III, § 1, nº 2, Scholie). Esta aplicación lineal transforma cada sección indefinidamente diferenciable con soporte compacto del espacio fibrado $\overset{p}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$ en una sección del mismo tipo del espacio $\overset{N-p}{\wedge} T^*(X)$, como se ve inmediatamente considerando mapas locales. Obtenemos así una aplicación lineal continua de (4,2) en (4,1), ya que si una sección de $\overset{p}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N-p}{\wedge} T^*(X)$ tiende a cero, entonces su imagen por la aplicación definida hace un momento, también tenderá a cero.

Ahora bien, esta aplicación lineal continua es un isomorfismo. En efecto, puesto que $\overset{N}{\alpha}$ es de grado N, si $\xi_p \otimes \overset{N}{\alpha} \neq 0$, entonces $\alpha \llcorner \xi \neq 0$, es decir la aplicación (4,3) es una biyección. Como ambos espacios tienen la misma dimensión $\binom{N}{p}$, esta inyección es un isomorfismo, de donde sigue que la aplicación correspondiente de (4,2) en (4,1) es un isomorfismo algebráico continuo y se ve fácilmente con la ayuda de un mapa local, que la aplicación inversa también es continua.

Sea $\overset{p}{\omega} \in \overset{p}{E}_X = E_X(\overset{p}{\wedge} T^*(X))$ y miremos de qué manera opera $\overset{p}{\omega}$ como forma lineal continua sobre el espacio (4,2). Puesto que X es orientada, existe una sección $\overset{N}{\tau}$ de $\overset{N}{\wedge} T^*(X)$ que nunca se anula, y, puesto que $\overset{N}{\wedge} T_x^*(X)_C$ es de dimensión 1, toda sección de $\overset{p}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)$ se puede escribir en la forma $\xi_p \otimes \overset{N}{\tau}$, siendo ξ_p una sección de $\overset{p}{\wedge} T(X)$. Entonces (p.57) $\overset{p}{\omega}$ opera sobre (4.2) mediante la fórmula

$$< \overset{p}{\omega}, \xi_p \otimes \overset{N}{\tau} > = \int_V < \omega_x , \xi_x > \tau_x \quad .$$

Por otro lado a $\xi_p \otimes \overset{N}{\tau}$ le corresponde mediante la aplicación lineal continua definida en (4,3) la sección $\overset{N}{\tau} \llcorner \xi_p$ de $\overset{N-p}{\wedge} T^*(X)$ y sobre (4,1) $\overset{p}{\omega}$ opera de acuerdo con la fórmula

$$< \overset{p}{\omega}, \overset{N}{\tau} \llcorner \xi_p > = \int_V \omega \wedge (\tau \llcorner \xi) \ .$$

Para demostrar que ω define la misma forma lineal sobre los dos espacios isomorfos (4,1) y (4,2) , basta demostrar la identidad algebráica

$$< \overset{p}{\omega} , \xi_p > \overset{N}{\tau} = \overset{p}{\omega} \wedge (\overset{N}{\tau} \llcorner \xi_p) .$$

Estas dos expresiones son trilineales, luego basta demostrar su igualdad para los elementos de una base. Sea $e_1, \ldots, e_N$ una base de $T_x(X)_C$, entonces podemos tomar $\xi_p = e_H$, $H = (h_1, \ldots, h_p)$, $\overset{p}{\omega} = e^*_K$, $K = (k_1, \ldots, k_p)$ y $\overset{N}{\tau} = e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \ldots \wedge e^*_N$. Se tiene

$$\overset{N}{\tau} \llcorner \xi_p = (e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_N) \llcorner e_H = \sigma \, e^*_{\complement H} \quad ,$$

donde σ es la signatura de la permutación

$$\begin{pmatrix} H & & \complement H \\ 1, 2, & \ldots , & N \end{pmatrix} \quad ;$$

y

$$\overset{p}{\omega} \wedge (\overset{N}{\tau} \llcorner \xi_p) = \sigma \, e^*_K \wedge e^*_{\complement H} = \begin{cases} 0, & \text{si } K \neq H \,, \\ e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_N = \overset{N}{\tau} , & \text{si } K = H \,. \end{cases}$$

Por otro lado

$$< \overset{p}{\omega} , \xi_p > = < e^*_K , e_H > = \begin{cases} 0 & \text{si } K \neq H \,, \\ 1 , & \text{si } K = H \,. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Sea más generalmente V un espacio fibrado indefinidamente diferenciable con fibra vectorial. El espacio $D_X(V)$ se puede generalizar en el espacio $\overset{p}{D}_X(V) = D_X(V \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T^*(X))$ de las secciones-formas diferenciales de grado

p (p. 57) y en el espacio $\overset{p}{D'_X}(V)$ de las secciones distribuciones de V (p. 57). Ahora bien, el espacio $\overset{p}{D_X}(V)$ de las secciones de $V \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T^*(X)$ se puede generalizar en el espacio $\overset{p}{D'_X}(V)$ de las secciones-distribuciones de $V \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T^*(X)$, que por definición (p.57) es el dual de

$$D_X(V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{p}{\wedge} T(X) \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)).$$

Los elementos del espacio $\overset{p}{D'_X}(V)$ *se llaman las secciones - corrientes de grado* p *de* V. $\overset{p}{D'_X}(V)$ se puede considerar también como el dual del espacio

$$\overset{N-p}{D_X}(V^*) = D_X(V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N-p}{\wedge} T^*(X))$$

de las secciones - formas diferenciales de grado N-p de V^*. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \textit{secciones} & \longrightarrow & \textit{secciones - formas} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textit{secciones - distribuciones} & \longrightarrow & \textit{secciones - corrientes}. \end{array}$$

En particular $D'_X(V) = \overset{0}{D'_X}(V)$ es el dual de $\overset{N}{D_X}(V^*) = D_X(V^* \underset{(X)}{\otimes} \overset{N}{\wedge} T^*(X)) =$
$= D_X(V')$ como sabemos.

Observemos finalmente que $D'_X(V)$ es el completado de $E_X(V)$ para la topología inducida sobre $E_X(V)$ por $D'_X(V)$ ya que $D'_X(V)$ es completo y $E_X(V)$ es denso. Pero la mencionada topología de $E_X(V)$ se puede definir, sin hacer referencia al espacio $D'_X(V)$, de la manera siguiente: Un filtro $f_j \in E_X(V)$ tiende a cero si para todo mapa local $\Phi : U \to U(U \subset R^N$,

$U \subset X)$ de la base X, las imágenes de f_j por Φ, es decir, las funciones $f_j \circ \Phi$ definidas en U con valores en F convergen a cero como distribuciones sobre U con valores en F. Ahora se pueden definir las secciones-distribuciones de V como elementos del completado de $E_X(V)$ para la topología indicada.

5. *Operadores diferenciales sobre espacios fibrados.* Sean $V_1 = V_1(X, p_1, F_1, (r_1, i))$ y $V_2 = V_2(X, p_2, F_2, (r_{2,j}))$ dos espacios fibrados indefinidamente diferenciables con la misma base X y con fibras vectoriales $F_1 = C^{l_1}$, $F_2 = C^{l_2}$. Un operador lineal continuo D de $E_X(V_1)$ en $E_X(V_2)$ se llama *un operador diferencial con coeficientes indefinidamente diferenciables* si para toda $f \in E_X(V_1)$ el soporte de Df está contenido en el soporte de f. De esta definición resulta que si Ω es un abierto de la base X y si conocemos la sección f en Ω, entonces conocemos Df en Ω. En efecto si $f_1 = f_2$ en Ω, entonces el soporte de $f_1 - f_2$ está contenido en $\complement\Omega$ y por la definición de D el soporte de $D(f_1 - f_2)$ está también contenido en $\complement\Omega$, es decir, $Df_1 = Df_2$ en Ω. Por consiguiente D se puede generalizar en un operador de $\xi_\Omega(V_1)$ en $E_\Omega(V_2)$, ya que para conocer Df en la vecindad de un punto $x \in \Omega$, basta conocer f en la vecindad de x. Claro está que el operador D de $E_\Omega(V_1)$ en $E_\Omega(V_2)$ también es lineal, continuo y disminuye los soportes.

Inversamente, si conocemos el operador D sobre cada $E_{U_i}(V_1)$ donde $(U_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X, entonces conocemos D sobre $E_X(V_1)$.

Demostremos ahora que si D es un operador diferencial con coeficientes indefinidamente diferenciables, en el sentido de la definición dada más arriba, entonces sobre cada dominio U de mapa local de la base X el operador D se puede escribir en la forma

$$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p \quad , \tag{5,1}$$

donde las $\alpha_p(x)$ son funciones indefinidamente diferenciables de x, que toman sus valores en $\mathrm{L}(F_1, F_2)$.

Sea el abierto $\Omega \subset X$ a la vez un dominio de una función de referencia $r_{1,i}$, de una función de referencia $r_{2,j}$ y de un mapa local de la base X. Entonces $\rho_{1,i}$ identifica $p_1^{-1}(\Omega)$ con $\Omega \times F_1$, $\rho_{2,j}$ identifica $p_2^{-1}(\Omega)$ con $\Omega \times F_2$ y Ω se puede considerar como un abierto de R^N. Además el espacio $\mathrm{E}_\Omega(\Omega \times F_1)$ es sencillamente el espacio $\mathrm{E}_\Omega \otimes F_1$ de las funciones indefinidamente diferenciables definidas sobre Ω y con valores en F_1; y de manera análoga $\mathrm{E}_\Omega(\Omega \times F_2) = \mathrm{E}_\Omega \otimes F_2$. En virtud de la observación hecha hace un momento, D es una aplicación lineal continua de $\mathrm{E}_\Omega \otimes F_1$ en $\mathrm{E}_\Omega \otimes F_2$.

Sea $x_o \in \Omega$ y consideremos la aplicación lineal $L_{x_o} : f \mapsto (Df)(x_o)$ de $\mathrm{E}_\Omega \otimes F_1$ en F_2. L_{x_o} es continua, es decir, un elemento del espacio $\mathrm{E}'_\Omega \otimes F_1^* \otimes F_2$ o sea una sección-distribución del espacio $\Omega \otimes F_1$ con valores en F_2. Además para $f \in \mathrm{E}_\Omega \otimes F_1$, cuando x_o recorre un compacto K de Ω, el conjunto $\{(Df)(x_o)\}_{x_o \in K} = \{L_{x_o}(f)\}_{x_o \in K}$ es acotado en F_2, es decir, el conjunto $\{L_{x_o}\}_{x_o \in K}$ de secciones-distribuciones es débilmente acotado y por lo tanto, fuertemente acotado (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 3, nº 6). Por otro lado el soporte de L_{x_o} es el punto x_o y resulta (TD, I, Chap. III, Théorème XXXV) que podemos escribir :

$$L_{x_o} = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \alpha_p(x_o) D^p \delta_{x_o} \quad ,$$

donde m depende de K, $\alpha_p(x_o) \epsilon F_1^* \otimes F_2$ y δ_{x_o} es la masa $+1$, puesta en el punto x_o. Para $f \epsilon \mathrm{E}_\Omega \otimes F_1$ se tiene entonces

$$(Df)(x_o) = < L_{x_o}, f > = < \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \alpha_p(x_o) D^p \delta_{x_o} \ , \ f > =$$

$$= < \delta_{x_o}, \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x_o) D^p f > = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x_o) (D^p f)(x_o) \ .$$

En particular si $(\vec{e}_i)$ $(1 \leq i \leq l)$ es una base de F_1, poniendo $f(x) = (x - x_o)^p \vec{e}_i / p!$ se tiene

$$Df(x_o)_j = \alpha_{p;i,j}(x_o) \qquad (1 \leq j \leq l_2) \ ,$$

lo que muestra que $\alpha_p(x)$ es una función indefinidamente diferenciable de x. ∎

Si D tiene la forma (5,1) sobre un dominio de mapa local, entonces tiene la misma forma sobre cualquier otro mapa con el mismo dominio. El más pequeño número m que se puede tomar en (5,1), si existe, se llama el orden de D sobre el mapa local. Si D es de orden $\leq m$ sobre todo dominio de mapa local, entonces se dice que D es de orden $\leq m$ sobre toda la variedad X.

El operador diferencial D es también una aplicación lineal continua de $\mathrm{E}_X(V_1)$ en $\mathrm{E}_X(V_2)$ para las topologías indicadas al final del § 4 (p.63). Puesto que para estas topologías $\mathrm{E}_X(V_1)$ es denso en $\mathrm{D}'_X(V_1)$ y

$E_X(V_2)$ es denso en $D'_X(V_2)$, D se puede prolongar en una aplicación lineal continua de $D'_X(V_1)$ en $D'_X(V_2)$ y más generalmente de $D'_\Omega(V_1)$ en $D'_\Omega(V_2)$, donde Ω es un abierto de X. Si $T \in D'_\Omega(V_1)$, entonces el soporte de DT está contenido en el de T.

Esta prolongación de D se puede efectuar también por transposición. Sobre cada dominio Ω de mapa local se pone para $\varphi \in D_\Omega(V'_2)$, $T \in D'_\Omega(V_1)$,

$$< DT, \varphi > = < T, {}^tD\varphi > = < T, \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p({}^t\alpha_p(x)\,\varphi(x)) >$$

$$= < \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p T, \varphi > .$$

Ejemplos. Si X es una variedad indefinidamente diferenciable, d es un operador diferencial que aplica $E_X(\overset{p}{\Delta} T^*(X))$ en $E_X(\overset{p+1}{\Delta} T^*(X))$. Con este ejemplo se puede convencer de la necesidad de introducir los operadores diferenciales como aplicaciones de espacios de secciones de espacios fibrados.

De la misma manera los operadores ∂ (VAC, § 7), Δ (VAC, § 8) y sobre una variedad analítica compleja los operadores d_z y d_z (VAC, § 4) son operadores diferenciales.

Definición. Un operador diferencial $D : E_X(V_1) \rightarrow E_X(V_2)$ *de orden* m *se dice elíptico en el punto* $a \in X$, *si para toda función* f *numérica, definida e indefinidamente diferenciable en una vecindad* U *de* a, *tal que* $f(a) = 0$, $(df)_a \neq 0$ *y para toda sección indefinidamente diferenciable* $\vec{g}$ *de* V_1, *definida en en* U *y tal que* $\vec{g}(a) \neq 0$, *se tiene* $(D(f^m \vec{g}))(a) \neq 0$.

Si D es elíptico en todo punto $a \in X$, entonces se dice que D es elíptico.

Mostremos que si D es elíptico en el sentido de esta definición, entonces sobre cada dominio de mapa local, donde D se escribe en la forma (5,1), D es elíptico en el sentido de la definición de la página 34. Tomemos $f(x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_N x_N$ y $\vec{g}(x) \equiv \vec{g}(a)$. Luego

$$(f^m \vec{g})(x) = (\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_N x_N)^m \vec{g}(a)$$

y

$$D(f^m \vec{g})(a) = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(a) D^p (f^m \vec{g})(a) =$$

$$= m! \sum_{|p|=m} \alpha_p(a) \xi^p \cdot \vec{g}(a) .$$

Por hipótesis este elemento de F_2 es diferente de cero cada vez que $\vec{g}(a) \neq 0$ en F_1, lo que significa que $\sum_{|p|=m} \alpha_p(a) \xi^p$ es una inyección de F_1 en F_2.

Inversamente supongamos que para un mapa local, D es elíptico en el sentido de la página 34 y demostremos que lo es en el sentido de la definición anterior. Sean f y $\vec{g}$ dos funciones que satisfacen las condiciones de la definición. En la vecindad de a se puede escribir

$$f(x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_N x_N + O(|x|^2)$$

con $\xi \neq 0$ y

$$\vec{g}(x) = \vec{g}(a) + O(|x|) .$$

Luego :

$$(f^m \vec{g})(x) = (\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_N x_N)^m \vec{g}(a) + O(|x|^{m+1}).$$

En la expresión $D(f^m \vec{g})(a) = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(a) D^p(f^m \vec{g})(a)$ todas las derivadas de orden $\leq m\text{-}1$ valen cero, mientras que para $|p| = m$ se tiene $D^p(f^m \vec{g})(a) = m!\, \xi^p \vec{g}(a)$, de donde

$$D(f^m \vec{g})(a) = m! \sum_{|p|=m} \alpha_p(a)\, \xi^p \cdot \vec{g}(a) \neq 0 ,$$

ya que por hipótesis $\vec{g}(a) \neq 0$ y $\sum_{|p|=m} \alpha_p(a)\, \xi^p$ es una inyección de F_1 en F_2. ■

Del carácter intrínseco de la definición de la elipticidad sigue en particular que si D es elíptico en el sentido de la página 41 sobre el dominio de un mapa, entonces lo es para cualquier otro mapa con el mismo dominio. Se puede decir entonces que D es elíptico si sobre todo dominio de mapa local su expresión (5,1) es elíptica en el sentido de la página 41.

Ejemplo. El operador diferencial $d_{\bar{z}}$ de $\mathrm{E}_X^{p,0}$ en $\mathrm{E}_X^{p,1}$ (VAC, § 6) es elíptico. En efecto, sobre cada dominio de mapa local se tiene

$$d_{\bar{z}}\omega = \sum_{\alpha=1}^{N} d\bar{z}_\alpha \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_\alpha} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} d\bar{z}_\alpha \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial \omega}{\partial y_\alpha} \right)$$

y la matriz

$$\begin{bmatrix} \xi_1 + i\eta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_N + i\eta_N \end{bmatrix}$$

se anula únicamente para $\xi_1 = \ldots = \xi_N = \eta_1 = \ldots \eta_N = 0$.

6. *Ejemplo : El operador de Laplace y su carácter elíptico.* En el curso de Variedades Analíticas Complejas (§ 8) hemos definido el operador de Laplace Δ sobre una variedad de Riemann orientada, mediante la fórmula

$$-\Delta = d\,\partial + \partial\, d\,.$$

Demostremos primero que sobre R^N con la métrica euclídea $\sum_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha \otimes dx_\alpha$ usual el operador Δ así definido se reduce al laplaciano común:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \qquad .$$

Introduzcamos el operador e_α, que será la multiplicación exterior a la izquierda por dx_α, es decir

$$e_\alpha : \omega \mapsto dx_\alpha \wedge \omega \quad .$$

El operador i_α será el adjunto de e_α para la dualidad riemanniana (VAC, § 7), es decir,

$$(i_\alpha T \mid \varphi) = (T \mid e_\alpha \varphi)\,.$$

Calculemos $i_\alpha T$ si T es de grado p; se tiene

$$(\overset{p}{i_\alpha T} \mid \varphi) = (T \mid e_\alpha \varphi) = \langle \overset{-1}{*} T, dx_\alpha \wedge \varphi \rangle =$$

$$= \langle \overset{-1}{*} T \wedge dx_\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{N-p} \langle dx_\alpha \wedge \overset{-1}{*} T, \varphi \rangle =$$

$$= (-1)^{N-p} \langle e_\alpha \overset{-1}{*} T, \varphi \rangle = (-1)^{N-p} (* e_\alpha \overset{-1}{*} T \mid \varphi)\,,$$

es decir

$$i_\alpha = (-1)^{N-p} * e_\alpha \overset{-1}{*} \quad .$$

Si ponemos $H = (h_1, \ldots, h_p)$ y $dx_H = dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_p}$, entonces

$$i_\alpha dx_H = 0 \quad , \qquad \text{si} \quad \alpha \notin H ,$$

(6,1)

$$i_\alpha (dx_\alpha \wedge dx_J) = dx_J \qquad J = (j_1, \ldots j_{p-1}) \ .$$

En efecto $\overset{-1}{*} dx_H = dx_{\complement H}$ y $\alpha \notin H$ implica $\alpha \in \complement H$ es decir, $e_\alpha \overset{-1}{*} dx_H = 0$. Por otro lado

$$\overset{-1}{*} (dx_\alpha \wedge dx_J) = \sigma \, dx_{\complement(\alpha, J)} \quad ,$$

donde σ es la signatura de la permutación

$$\begin{pmatrix} \complement(\alpha, J) \ , \ \alpha \ , \ J \\ 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix} \quad .$$

Por consiguiente

$$e_\alpha \overset{-1}{*} (dx_\alpha \wedge dx_J) = \sigma \, dx_\alpha \wedge dx_{\complement(\alpha, j)}$$

y

$$* e_\alpha \overset{-1}{*} (dx_\alpha \wedge dx_J) = \sigma_1 \, \sigma \, dx_J \quad ,$$

donde σ_1 es la signatura de la permutación

$$\begin{pmatrix} \alpha\,, & \complement(\alpha, J)\,, & J \\ & 1, 2, \ldots, N & \end{pmatrix}$$

Ahora bien $(-1)^{N-p}\,\sigma_1\,\sigma = 1$, lo que demuestra (6,1).

Pongamos ahora

$$d_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

y sea ∂_α el adjunto de d_α para la dualidad riemanniana. De

$$(\partial_\alpha T \mid \varphi) = (T \mid d_\alpha \varphi) = \langle \overset{-1}{*} T, d_\alpha \varphi \rangle =$$

$$= -\langle d_\alpha \overset{-1}{*} T, \varphi \rangle = -(* d_\alpha \overset{-1}{*} T \mid \varphi)\,,$$

resulta

$$\partial_\alpha = -\, * d_\alpha \overset{-1}{*} = -\, d_\alpha\,.$$

Se tiene

$$d = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha d_\alpha$$

y por transposición

$$\partial = -\sum_{\alpha=1}^{N} d_\alpha i_\alpha\,,$$

de donde

(6,2) $$d\,\partial = -\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha d_\alpha d_\beta i_\beta\,, \qquad \partial\, d = -\sum_{\alpha,\beta} d_\beta i_\beta e_\alpha d_\alpha\,.$$

Demostremos las relaciones

(6,3) $$e_\alpha i_\beta + i_\beta e_\alpha = 0 \qquad \text{si} \qquad \alpha \neq \beta \ ,$$

(6,4) $$e_\alpha i_\alpha + i_\alpha e_\alpha = \textit{identidad} .$$

En efecto, si $\alpha \in H$ ó $\beta \notin H$, entonces $e_\alpha i_\beta dx_H = 0$, $i_\beta e_\alpha dx_H = 0$.
Si $\alpha \notin H$ y $\beta \in H$, pongamos $dx_H = dx_\beta \wedge dx_J$ y entonces

$$(e_\alpha i_\beta + i_\beta e_\alpha)(dx_\beta \wedge dx_J) = dx_\alpha \wedge dx_J - dx_\alpha \wedge dx_J = 0 \ ,$$

lo que demuestra (6,3). Por otro lado si $\alpha \notin H$,

$$e_\alpha i_\alpha dx_H = 0 \ , \qquad i_\alpha e_\alpha dx_H = dx_H \ ;$$

si $\alpha \in H$

$$e_\alpha i_\alpha dx_H = dx_H \ , \qquad i_\alpha e_\alpha dx_H = 0 \ ,$$

y queda demostrado (6,4) .

Puesto que d_α conmuta con e_β e i_γ , se tiene en virtud de (6,2)

$$\Delta = -d\partial - \partial d = \sum_{\alpha,\beta} (e_\alpha i_\beta + i_\beta e_\alpha) d_\alpha d_\beta \ ,$$

y en virtud de (6,3) y (6,4) obtenemos finalmente

$$\Delta = \sum_\alpha d_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \ . \ \blacksquare$$

En particular para una forma $\omega = \sum \omega_I dx_I$ de grado p se tiene

$$\Delta\omega = \sum_{\alpha, I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_\alpha^2} dx_I = \sum_I (\Delta \omega_I) dx_I .$$

En esta demostración se consideran únicamente formas y corrientes reales sobre la variedad.

Demostremos ahora que el operador Δ sobre una variedad de Riemann orientada es elíptico. Sea a un punto de la variedad y supongamos que en a la forma cuadrática que define la estructura de Riemann sea $\sum dx_\alpha \otimes dx_\alpha$, es decir, $g_{\alpha\beta}(a) = \delta_{\alpha\omega}$. Sea $\omega = \sum \omega_I dx_I$ una forma diferencial de grado p. Se tiene

$$d\omega = \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_\alpha} (dx_\alpha \wedge dx_I) .$$

En virtud de la fórmula

$$\partial \omega^p = (-1)^p \overset{-1}{*} d * \overset{p}{\omega}$$

se tiene

(6,5) $$\partial d \omega = (-1)^{p+1} \overset{-1}{*} d * (d\omega) .$$

Ahora

$$*(d\omega) = \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_\alpha} (*(dx_\alpha \wedge dx_I))$$

donde $*(dx_\alpha \wedge dx_I)$ es una forma diferencial de grado $N\text{-}p\text{-}1$. Por consiguiente $d * (d\omega)$ es igual a

$$\sum_{\alpha,\beta,I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx_\beta \wedge (*(dx_\alpha \wedge dx_I))$$

más una suma que contiene derivadas de primer orden de las ω_I y en virtud de (6,5) $\partial d \omega$ es igual a

$$(6,6) \qquad (-1)^{p+1} \sum_{\alpha,\beta,I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [\overset{-1}{*}(dx_\beta \wedge (*(dx_\alpha \wedge dx_I)))] \quad ,$$

más una suma que contiene sólo derivadas de primer orden de las ω_I. De la misma manera

$$d \partial_\omega = (-1)^p d \overset{-1}{*} d * \overset{p}{\omega}$$

es igual a

$$(6,7) \qquad (-1)^p \sum_{\alpha,\beta,I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [dx_\beta \wedge (\overset{-1}{*}(dx_\alpha \wedge (*dx_I)))]$$

más una suma que contiene sólo derivadas de orden uno y cero de las ω_I. Puesto que en el caso de una métrica euclídea el operador Δ se reduce al laplaciano común, resulta de (6,6) y (6,7) que en el punto a la suma de los términos de más alto orden de $\Delta \omega$ es

$$(6,8) \qquad \sum_I (\Delta \omega_I) dx_I \quad .$$

Si consideramos ω_a como el vector

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \omega_I \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

del espacio $\overset{p}{\wedge} T_a^{\,*}(V)$, entonces (6,8) será el vector

$$\sum_{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_I \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

y puesto que la matriz cuadrada

$$\sum_{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xi_\alpha^2 = \begin{bmatrix} |\xi|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\xi|^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & |\xi|^2 \end{bmatrix}$$

tiene un determinante diferente de cero para $\xi \neq 0$, queda demostrado que Δ es elíptico.

7. *El teorema de casi-monomorfismo.* Sean $V_1 = V_1(X, p_1, F_1, (r_{1,i}))$ y $V_2 = V_2(X, p_2, F_2, (r_{2,j}))$ dos espacios fibrados con fibras vectoriales $F_1 = C^{l_1}$;

$\dot{F}_2 = C^{l_2}$. Un operador diferencial D de $\mathrm{E}_X(V_1)$ en $\mathrm{E}_X(V_2)$ se llama *hipoelíptico* si, cualquiera que sea el abierto $\Omega \subset X$, de $T \in \mathrm{D}'_\Omega(V_1)$ y $DT \in \mathrm{E}_\Omega(V_2)$ resulta $T \in \mathrm{E}_\Omega(V_1)$. Del teorema fundamental del § 3 (p. 43) resulta que *si D es elíptico entonces es hipoelíptico,* ya que por el carácter local del teorema basta considerar las Ω que son dominios de mapas locales.

Para generalizar al caso de espacios fibrados del Teorema 3.3 (p. 51), se necesita primero introducir los espacios $\mathrm{L}^s_X(V)$, que generalizan los espacios $\mathrm{L}^s(E)$ de aquel teorema.

Más generalmente se podrá definir sobre V el análogo de todo espacio de distribuciones que se define en términos puramente locales ; por ejemplo no podemos esperar de generalizar el espacio S' en un espacio sobre V. Introduzcamos la definición siguiente :

Definición. Un espacio M de distribuciones definidas sobre R^N (es decir $\mathrm{M} \subset \mathrm{D}'_{R^N}$ y la topología de M es más fina que la inducida por el espacio D'_{R^N}) se llama de tipo local si se cumplen las condiciones siguientes :

1o. Si $T \in \mathrm{M}$ y $\alpha \in \mathrm{E}$, entonces $\alpha T \in \mathrm{M}$ y la aplicación $T \mapsto \alpha T$ de M en M es continua.

2o. Si $T \in \mathrm{D}'$ y existe una partición indefinidamente derivable de la unidad (α_i), tal que para todo i la distribución $\alpha_i T$ pertenece a M y $\alpha_i T$ tiende a cero en M, entonces $T \in \mathrm{M}$ y T tiende a cero en M.

3o. Si tenemos un difeomorfismo (homeomorfismo indefinidamente diferenciable en ambos sentidos) de un abierto Ω de R^N sobre otro abierto Ω' de

R^N, entonces la aplicación correspondiente de M_Ω en $\mathrm{M}_{\Omega'}$ es un isomorfismo vectorial-topológico donde M_Ω es el espacio de las distribuciones T sobre Ω, tales que si $\alpha \in \mathrm{D}$ tiene su soporte en el compacto $K \subset \Omega$, entonces la distribución que vale αT en K y cero en $\complement K$ está en M.

4o. Si β es localmente integrable y con soporte compacto y si $T \in \mathrm{M}$, entonces $\beta * T \in \mathrm{M}$ y la aplicación $T \mapsto \beta * T$ de M es continua.

Observemos que estas condiciones son los análogos topológicos de las condiciones que definen un espacio de tipo local en VAC (§ 9).

A cada espacio de tipo local M definido sobre R^N se puede asociar canónicamente un espacio $\mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ de secciones-distribuciones del espacio fibrado $\mathrm{V}(X, p, F, (r_i))$. Una sección-distribución $T \in \mathrm{D}'_X(\mathrm{V})$ pertenece a $\mathrm{M}_X(\mathrm{V})$, si para todo dominio de mapa local U la restricción T_U de T a U pertenece a $\mathrm{M}_U(U \times F) = \mathrm{M}_U \otimes F$. Un cambio de mapa local con el mismo dominio corresponde a un difeomorfismo de U sobre sí mismo y a un deslizamiento de cada fibra $T \mapsto \alpha(x)\, T, \alpha(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{L}(F, F))$. En virtud de las condiciones 1o. y 3o. si $T_U \in \mathrm{M}_U \otimes F$ para un mapa local, entonces T_U pertenece al mismo espacio para cualquier otro mapa local con el mismo dominio. La topología de $\mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ se define diciendo que T tiende a cero si sus restricciones T_U tienden a cero en $\mathrm{M}_U \otimes F$, como corresponde a la condición 2o.

Sea finalmente $\mathrm{K}\mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ el espacio de las secciones-distribuciones $T \in \mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ con soporte compacto. Para todo compacto $K \subset X$ consideremos el subespacio $\mathrm{K}_K \mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ de $\mathrm{M}_X(\mathrm{V})$, formado por las T con soporte contenido en K. Sobre $\mathrm{K}_K \mathrm{M}_X(\mathrm{V})$ se puede poner la topología inducida por

$M_X(V)$ y entonces sobre $KM_X(V)$ se pone la topología límite inductivo de las topologías de los $K_K M_X(V)$.

El espacio L^s (p. 15) es claramente de tipo local sobre R^N si s es un entero, y por consiguiente podemos introducir el espacio $L^s_X(V)$. El espacio $KL^s_X(V)$, correspondiente se llamará sencillamente $K^s_X(V)$, cual, en el caso de que V es el espacio producto $R^N \times C$, se reduce a K^s (p. 16). También en vez de $K_K L^s_X(V)$ escribiremos $K^s_K(V)$; este espacio es un espacio de Banach, ya que el compacto K se puede recubrir por un número finito de compactos K_i , dominios de mapas locales. Siendo entonces $||T||_i$ la norma sobre $K^s_{K_i}(V) = K^s_{K_i} \otimes F$, y α_i una partición indefinidamente diferenciable de la unidad, subordenada a K_i , la expresión $\sum_i || \alpha_i T ||_i$ será una norma sobre $K^s_K(V)$.

El dual fuerte de $K^s_X(V)$ es $L^{-s}_X(V)$ e inversamente . En primer lugar , por el carácter local de los espacios, basta demostrar que el dual de $K^s_\Omega(V) = K^s_\Omega \otimes F$ es $L^{-s}_\Omega(V') = L^{-s}_\Omega \otimes F^*$, donde Ω es un dominio de mapa local de V y de X , que se puede identificar con un abierto de R^N. Considerando componentes, el problema se reduce a demostrar que el dual de K^s_Ω es L^{-s}_Ω (pp. 47-48) y viceversa .

Puesto que H^s_Ω es un espacio de distribuciones normal (p. 6), se tiene $(K^s_\Omega)' \subset D'$. Sea $T \in (K^s_\Omega)'$, entonces para todo compacto $K \subset \Omega$ la distribución T es una forma lineal continua sobre K^s_K (Bourbaki, EVT, Chap. II, § 2 , Cor. de la prop. 1). Sea $\alpha \in D$ con soporte en un compacto $K \subset \Omega$ y sea $S \in H^s$. Entonces $\alpha S \in H^s_K$ y de la relación $< \alpha T, S > = < T , \alpha S >$ resulta, con la ayuda de la proposición 2.11 (p. 14), que αT es una forma lineal continua sobre H^{s}, es decir, (proposición 2.6, p.7) $\alpha T \in H^{-s}$, lo que significa que $T \in L^{-s}_{\Omega}$. Se tiene entonces $(K^{s}_{\Omega})' \subset L^{-s}_{\Omega}$ y la topología de L^{-s}_{Ω} es menos fina que la de $(K^{s}_{\Omega})'$. Inversamente sea $T \in L^{-s}_{\Omega}$ y sea K un compacto de Ω. Sea $\alpha \in D$ igual a 1 sobre K y con soporte contenido en un compacto de Ω. Se tiene entonces $\alpha T \in H^{-s}$ y para todo $S \in K^{s}_{K}$

$$< T , S > = < T , \alpha S > = < \alpha T , S > \quad ,$$

de donde resulta que T es una forma lineal continua sobre K^{s}_{K}, es decir, $L^{-s}_{\Omega} \subset (K^{s}_{\Omega})'$ y la topología de $(K^{s}_{\Omega})'$ es menos fina que la de L^{-s}_{Ω}. Finalmente K^{s}_{K} es reflexivo como subespacio de H^{s} (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 5, prop. 11) y por lo tanto (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 3, exerc. 17) K^{s}_{Ω} también es reflexivo. ■

Con estas definiciones el Teorema 3.3 (p. 51) se puede generalizar de la manera siguiente :

Teorema 7.1. Sea $D : E_X(V_1) \to E_X(V_2)$ *un operador elíptico. Sea* s *entero. Si* $T \in D'_{\Omega}(V_1)$ *y* $DT \in L^{s-m}_{\Omega}(V_2)$, *entonces* $T \in L^{s}_{\Omega}(V_1)$.

Podemos enunciar ahora el resultado principal de esta sección :

Teorema 7.2. Sea D *un operador diferencial del tipo elíptico de* $D'_X(V_1)$ *en* $D'_X(V_2)$ *y sea* s *un número entero positivo. Para todo compacto* K *de* X *la aplicación* $T \mapsto DT$ *de* $K^{s}_{K}(V_1)$ *en* $K^{s-m}_{K}(V_2)$ *es un homomorfismo cuyo núcleo es de dimensión finita* (un tal homomorfismo se llamará un casi-monomorfismo).

Observaciones. *1o.* Si V_1 y V_2 son los espacios fibrados triviales $R^N \times F_1$ y $R^N \times F_2$, entonces en los Teoremas 7.1 y 7.2 no es necesario que s sea entero.

2o. El Teorema 7.2 es también cierto para s negativo, como se puede ver de la demostración, si en vez del Teorema 3.2 utilizamos el Ejercicio de la página 52.

Demostremos primero un resultado de L. Schwartz (Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 236 (1953) 2472-2473). Una aplicación lineal continua de un espacio de Banach E en otro espacio de Banach F es *compacta*, si la imagen de la bola unidad de E es relativamente compacta en F (p. 22).

Proposición 7.1. Sean E y F dos espacios de Banach. Sea u un monomorfismo de E en F y v una aplicación compacta de E en F. Entonces $u+v$ es un casi-monomorfismo de E en F.

Demostración. Sea B la bola unidad de E y sea N el núcleo de $u+v$; pongamos $W = B \cap N$. Se tiene $u(W) = -v(W)$ y este conjunto es precompacto, puesto que $v(B)$ es relativamente compacto por hipótesis. Ahora u es un isomorfismo de E sobre $u(E)$ y por consiguiente W es precompacto y N de dimensión finita (Bourbaki, EVT, Chap. I, § 2, nº 4, Remarque 1).

N tiene un suplementario topológico M en E (Bourbaki, EVT, Chap. I, § 2, nº 3) y la restricción de $u+v$ a M es biunívoca. Debemos demostrar que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre M tal que $(u+v)(\mathcal{U})$ converge en F, entonces $\mathcal{U}$ converge en M.

Sea a el límite de $\|x\|$ según $\mathcal{U}$. Supongamos primero que $a < +\infty$. En este caso $(a+1)B \in \mathcal{U}$, por consiguiente $v(\mathcal{U})$ converge en F y por diferencia $u(\mathcal{U})$ converge en F. Puesto que u es un isomorfismo de M sobre $u(M)$ y $u(M)$ es cerrado en F (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, exerc. 5), $\mathcal{U}$ converge en M.

Mostremos finalmente que $a=+\infty$ es imposible. En el caso contrario $(u+v)(x/\|x\|)$ tendería a cero según $\mathcal{U}$, $v(x/\|x\|)$ tendría un límite y por diferencia $u(x/\|x\|)$ también. Entonces $x/\|x\|$ tendría un límite $y_o \in M$, tal que $\|y_o\| = 1$, $(u+v)(y_o) = 0$ en contradicción con el hecho de que $u+v$ es biunívoca sobre M. ∎

Demostración del Teorema 7.2. El compacto K se puede recubrir con un número finito de conjuntos abiertos W_i $(1 \leq i \leq k)$, tales que cada $\overline{W}_i$ sea contenido y compacto en un dominio U_i de mapa local y que las aplicaciones $T \mapsto DT$ de $\mathcal{K}^s_{\overline{W}_i} \otimes F_1$ en $\mathcal{K}^s_{\overline{W}_i} \otimes F_2$ sean monomorfismos, lo que es posible en virtud del Teorema 3.2 (p. 46). Sea $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ una partición de la unidad subordenada a (W_i). Consideremos la aplicación lineal continua $w: T \mapsto (\alpha_i DT)_{1 \leq i \leq k}$ del espacio de Banach $\mathcal{K}^s_K(V_1)$ en el espacio de Banach $\prod_{i=1}^{k} \mathcal{K}^{s-m}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$. Demostremos que w se puede escribir en la forma $w=u+v$, donde u es un monomorfismo y v una aplicación compacta. En efecto sea u la aplicación

$$u: T \mapsto (D(\alpha_i T))_{1 \leq i \leq k}$$

y v la aplicación

$$v: T \mapsto (\alpha_i DT - D(\alpha_i T))_{1 \leq i \leq k} \quad .$$

Está claro que $w = u + v$. Por otro lado u es el compuesto de la aplicación

(7,1) $$T \mapsto (\alpha_i T)_{i \leq i \leq k}$$

de $\overset{s}{K}_{K}(V_1)$ en $\prod_{i=1}^{k} \overset{s}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_1$ y de la aplicación

(7,2) $$(S_i)_{1 \leq i \leq k} \mapsto (DS_i)_{1 \leq i \leq k}$$

de $\prod_{i=1}^{k} \overset{s}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_1$ en $\prod_{i=1}^{k} \overset{s-m}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$. (7,1) es evidentemente un monomorfismo y (7,2) lo es en virtud de la construcción de los W_i. Por consiguiente u es un monomorfismo.

Por la regla de Leibniz el operador v es de orden $m-1$ y por consiguiente (proposición 2.13, p. 16), $T \mapsto \alpha_i DT - D(\alpha_i T)$ es una aplicación lineal continua de $\overset{s}{K}_{K}(V_1)$ en $\overset{s-m+1}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$. Como por otro lado la inyección de $\overset{s-m+1}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$ en $\overset{s-m}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$ es compacta (Teorema 2.2, p. 22), resulta que v es una aplicación compacta.

En virtud de la proposición 7.1, w es un casi-monomorfismo de $\overset{s}{K}_{K}(V_1)$ en $\prod_{i=1}^{k} \overset{s-m}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$. Ahora bien, la aplicación $(\alpha_i S)_{1 \leq i \leq k} \mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i S = S$ es un isomorfismo topológico del subespacio de $\prod_{i=1}^{k} \overset{s-m}{K}_{\overline{W}_i} \otimes F_2$, formado por los elementos de la forma $(\alpha_i S)_{1 \leq i \leq k}$, sobre $K_{K}^{s-m}(V_2)$. Puesto que $u(\overset{s}{K}_{K}(V_1))$ está contenido en este subespacio, el teorema queda completamente demostrado. ■

Teorema 7.3. Si D es elíptico, entonces para todo compacto $K \subset X$ la aplicación $T \mapsto DT$ es un casi-monomorfismo de $D_K(V_1)$ en $D_K(V_2)$.

Demostración. Si T pertenece al núcleo de la aplicación $T \mapsto DT$, esto quiere decir que $DT = 0$ y, por la hipoelipticidad de D (p.77), que T es indefinidamente diferenciable. El núcleo es entonces el mismo espacio para la aplicación de $D_K(V_1)$ en $D_K(V_2)$ que para la aplicación de $\overset{s}{K}_{K}(V_1)$ en $\overset{s-m}{K}_{K}(V_2)$ y en particular de dimensión finita.

Para demostrar que la aplicación es un homomorfismo basta mostrar que la imagen es cerrada en $\mathcal{D}_K(V_2)$ (Bourbaki, EVT, Chap.IV, § 4, exerc. 5). Sea entonces φ_j una sucesión en $\mathcal{D}_K(V_1)$ tal que $D\varphi_j$ converja hacia un elemento ψ en $\mathcal{D}_K(V_2)$. Tenemos que demostrar que $\psi = D\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{D}_K(V_1)$. Las φ_j están en $\mathcal{K}^s_K(V_1)$, cualquiera que sea s. Por el Teorema 7.2, las $D\varphi_j$ están en $\mathcal{K}^{s-m}_K(V_2)$ y tienden en este espacio hacia ψ. Otra vez por el Teorema 7.2, la imagen de la aplicación $T \to DT$ es cerrada en $\mathcal{K}^{s-m}_K(V_2)$, y por consiguiente $\psi = D\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{K}^s_K(V_1)$. Ahora bien $\psi \in \mathcal{D}_K(V_2)$, luego por la hipoelipticidad de D (p. 77), $\varphi \in \mathcal{D}_K(V_1)$. ■

8. Las ecuaciones A-elípticas.

Definición. Un operador diferencial $D : \mathcal{E}_X(V_1) \to \mathcal{E}_X(V_2)$ *se llama A-elíptico si se cumplen las dos condiciones siguientes :*

a) D *es elíptico;*

b) cualquiera que sea el abierto Ω *de* X, *si* $f = 0$ *es un abierto* $\omega \subset \Omega$ *y si* $Df = 0$ *en* Ω, *entonces* $f = 0$ *en toda la componente conexa de* ω *con respecto a* Ω.

Ejemplo. Si V_1 y V_2 son dos espacios fibrados analíticos-reales y si los coeficientes del operador diferencial elíptico D son analíticos, entonces se sigue de un teorema de Petrowski (Mat. Sbornik, 5 (1938) pp. 3-68) que si DT es una sección analítica de V_2 por encima de un abierto $\Omega \subset X$, entonces T es una sección analítica de V_1 por encima de Ω. Esta propiedad se puede expresar diciendo que D es analítico-hipoelíptico. Claro está que un operador analítico-hipoelíptico y elíptico es también A-elíptico.

Si la variedad X *es conexa y no compacta, y si* D *es un operador* A*-elíptico, entonces para* s *entero* ≥ 0 *y todo compacto* $K \subset X$ *la aplicación* $T \mapsto DT$ *de* $\mathcal{K}_K^s(V_1)$ *en* $\mathcal{K}_K^{s-m}(V_2)$ *es un monomorfismo.* En efecto, sabemos que la aplicación es un homomorfismo. Si T pertenece al núcleo de la aplicación, entonces $DT = 0$ sobre X y el soporte de T está contenido en K, es decir, $T = 0$ en el abierto $\complement K$. Por la condición b) se tiene entonces $T = 0$, es decir, el núcleo de $T \mapsto DT$ se reduce a $\{0\}$. ∎ Veremos (prop. 8.9) que este resultado es también cierto para $s < 0$.

Introduzcamos ahora la definición siguiente :

Definición. Sea X *una variedad conexa y* A *un subconjunto de* X*. Llamaremos la envolvente llena de* A*, y designaremos por* $\hat{A}$*, la reunión de* A *y de las componentes conexas, relativamente compactas de* $\complement A$*. Si* $A = \hat{A}$ *se dirá que* A *es un conjunto lleno.*

Lema 1. Si A *es cerrado,* $\hat{A}$ *lo es también.*

Demostración. $\complement A$ es un abierto. Siendo X una variedad, es en particular localmente conexo y por lo tanto (Bourbaki, Top. gén., Chap. I, 2^e, éd. § 11, prop. 11) toda componente conexa de $\complement A$ es abierta. En particular, las componentes conexas no relativamente compactas de $\complement A$ son abiertas, y también lo es su reunión $\complement \hat{A}$. Luego $\hat{A}$ es cerrado. ∎

Lema 2. Si A *es compacto,* $\hat{A}$ *lo es también.*

Demostración. Siendo X una variedad, es en particular localmente compacto y por lo tanto (Bourbaki, Top. gén. Chap. I, 2^e éd, § 10, prop. 10) existe una vecindad compacta V de A. Sea $\dot{V}$ la frontera de V y pongamos $F = \hat{A} \cap \dot{V}$.

Sean $(B_i)_{i \in I}$ las componentes conexas, relativamente compactas de $\complement A$, es decir, $\hat{A} = A \cup (\bigcup_{i \in I} B_i)$. Puesto que A es cerrado, los B_i son abiertos. Por otro lado los B_i forman un recubrimiento de F; en efecto, todo punto de F pertenece a $\hat{A}$ pero no a A, ya que pertenece a $\dot{V}$, y por consiguiente debe pertenecer a uno de los B_i. Ahora bien, F es compacto, ya que es cerrado y V es compacto, entonces hay un número finito de conjuntos B_i, sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$, que cubren F y, como los conjuntos B_i son disyuntos de dos en dos, son sólo estos conjuntos $B_1, \ldots, B_n$ que encuentran F. Demostremos entonces que

$$\hat{A} \subset \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \ldots \cup \bar{B}_n \cup V .$$

Como ya sabemos (lema 1) que $\hat{A}$ es cerrado y que el segundo miembro es compacto, el enunciado resultará inmediatamente.

Sea $x \in \hat{A}$; si $x \in A$, entonces $x \in V$; si $x \in B_i$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces $x \in \bar{B}_i$. Supongamos entonces que $x \in \hat{A}$ pero $x \notin A$, $x \notin B_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Entonces x pertenece a una componente conexa, relativamente compacta de $\complement A$, que no encuentra F, sea B_j. Se tiene $B_j \cap F = \phi$ y por lo tanto $B_j \cap \dot{V} = \phi$. Puesto que B_j es conexa, debe ser (Bourbaki, Top. gén, Chap. I, 2e éd, § 11, prop. 3) contenido o bien en el exterior o bien en el interior de V. Ahora bien, B_j es adherente a A. En efecto, puesto que X es conexa, $B_j \neq \bar{B}_j$ y como B_j es una componente conexa de $\complement A$, se tiene $\bar{B}_j \cap A \neq \phi$. Pero entonces $B_j \subset \mathring{V}$ y la demostración queda completa. ■

Lema 3. Si A es abierto, $\hat{A}$ lo es también.

Demostración. Sea A' la reunión de A y de los conjuntos abiertos y compactos de $\complement A$. Demostraremos que $A' = \hat{A}$, de donde resultará el lema, puesto que la reunión de los subconjuntos de $\complement A$ que son a la vez abiertos y compactos es un conjunto abierto U de $\complement A$. Luego $U = \complement A \cap V$, donde V es un abierto de X y finalmente $A' = A \cup U = A \cup V$ es abierto.

Falta mostrar que $A' = \hat{A}$. En primer lugar, $A' \subset \hat{A}$, ya que si $x \in A'$, $x \notin A$, entonces x está contenido en un abierto compacto de $\complement A$ y por consiguiente la componente conexa de x en $\complement A$ es compacta, es decir, $x \in \hat{A}$. Mostremos que inversamente $\hat{A} \subset A'$. Sea K una componente conexa compacta de $\complement A$, mostremos que $K \subset A'$. Puesto que X es localmente compacta, también lo es $\complement A$, siendo $\complement A$ cerrado en X. K tiene entonces (Bourbaki, Top. gén. Chap. I, 2^e éd, § 10, prop. 10) en $\complement A$ una vecindad compacta W. K es también una componente conexa de W, puesto que K es conexa y ningún conjunto más grande que K puede existir en W, ya que en el caso contrario este conjunto más grande sería conexo en $\complement A$ y K no sería componente conexa de $\complement A$. Ahora bien, en un compacto W toda componente conexa K tiene un sistema fundamental de vecindades a la vez abiertas y compactas (Bourbaki, Top. gén, Chap. II 2^e éd. § 4. Cor. de la prop. 3, prop. 4, exerc. 23). Existe entonces L abierto, compacto en W, conteniendo K, sin punto común con la frontera de W, es decir, contenido en el interior de W en $\complement A$. Luego L es abierto y compacto en $\complement A$ y $K \subset L$, de donde $K \subset A'$. ∎

La demostración del lema 3 reemplaza una demostración insuficiente de la tesis de Malgrange (Chap. III, § 2, nº 2, lema 2) y nos fue comunicada por este autor.

Lema 4. Si $A \subset B$, entonces $\hat{A} \subset \hat{B}$.

Demostración. Sea $x \in \hat{A}$. Si $x \in B$, entonces $x \in \hat{B}$. Supongamos que $x \notin B$. Entonces $x \notin A$ y por lo tanto la componente conexa K_x^A de x con respecto a A es relativamente compacta. La componente conexa K_x^B de x con respecto a B está contenido en K_x^A y por lo tanto K_x^B es también relativamente compacta es decir, $x \in \hat{B}$. ∎

Lema 5. Si A *es un abierto relativamente compacto, entonces* A *lo es también.*

Demostración. En virtud del lema 3, A es abierto. Puesto que A es compacto, en virtud del lema 2, A lo es también. De $A \subset A$ sigue en virtud del lema 4, $A \subset A$, lo que muestra que A es relativamente compacto. ■

Lema 6. $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$.

Demostración. Las componentes conexas de $\complement \widehat{A}$ son las componentes conexas no relativamente compactas de $\complement A$. ■

Este lema muestra en particular la existencia de conjuntos llenos : cada conjunto de la forma $\widehat{A}$ lo es .

Volvemos ahora a los operadores A-elípticos. Supondremos de ahora en adelante que la variedad X es conexa y no compacta y que D es un operador diferencial A-elíptico de orden m de $\mathrm{E}_X(\mathrm{V}_1)$ en $\mathrm{E}_X(\mathrm{V}_2)$.

Proposición 8.1. Sea K *un compacto lleno de* X*. Entonces*

$$D\,\mathrm{E}'_X(\mathrm{V}_1) \cap \mathrm{E}'_K(\mathrm{V}_2) = D\,\mathrm{E}'_K(\mathrm{V}_1)$$

y más generalmente

$$D\,\mathrm{K}^s_X(\mathrm{V}_1) \cap \mathrm{K}^{s-m}_K(\mathrm{V}_2) = D\,\mathrm{K}^s_K(\mathrm{V}_1) \quad ,$$

cualquiera que sea s.

Demostración. Es evidente que los segundos miembros están contenidos en los primeros (proposición 2.13, p. 16) Supongamos que $T = DS$, T tiene su soporte en K y S tiene soporte compacto. En $\complement K$ la distribución S es solución de la ecuación homogénea $DS = 0$. Por otro lado S es de soporte compacto, es decir, igual a cero fuera de un compacto de X. Resulta entonces del carácter A-elíptico de D que $S = 0$ sobre cada componente conexa, no relativamente compacta de $\complement K$. Pero como K es lleno, todas las componentes conexas de $\complement K$ son relativamente compactas, es decir, $S = 0$ en $\complement K$, o sea que el soporte de S está contenido en K. ∎

Proposición 8.2. El subespacio $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1) \cap \mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ *es cerrado en* $\mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ *para* $s \geq 0$ *y* K *lleno.*

Demostración. Puesto que D es un monomorfismo de $\mathrm{K}^s_K(V_1)$ sobre $D\,\mathrm{K}^s_K(V_1) = D\,\mathrm{K}^s_X(V_1) \cap \mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ (pro. 8.1), resulta (Bourbaki, EVT, Chap. I, § 3, Cor. 3 du Th. 1) que este último espacio es cerrado en $\mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$. ∎

Proposición 8.3. $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1)$ *es cerrado en* $\mathrm{K}^{s-m}_X(V_2)$ *para* $s \geq 0$.

Demostración. $\mathrm{K}^s_X(V)$ es el dual del espacio $\mathrm{L}^{-s}_X(V')$, que es un espacio de Fréchet. Sabemos (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 2, Théorême 5) que un conjunto convexo en el dual de un espacio de Fréchet es débilmente cerrado si y sólo si sus intersecciones con los conjuntos acotados son débilmente cerrados. Sea entonces B un conjunto acotado de $\mathrm{K}^{s-m}_X(V_2)$. El conjunto $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1) \cap B$ es también acotado y por lo tanto (Bourbaki, EVT, Chap. III, § 2, prop. 6) $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1) \cap B$ está contenido en un conjunto $\mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$, donde K es un compacto lleno. En virtud de la prop. 8.2, el subespacio $D\,\mathrm{K}^s_K(V_1) \cap \mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ es fuertemente cerrado en $\mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ y, puesto que $\mathrm{K}^{s-m}_K(V_2)$ es reflexivo (p. 80), también débilmente cerrado (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 3, nº 3, Remarque 1). Por consiguiente $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1) \cap B$ es débilmente cerrado en B, es decir, $D\,\mathrm{K}^s_K(V_1)$ es débilmente cerrado en B, es decir, $D\,\mathrm{K}^s_X(V_1)$ es débilmente cerrado y con más razón fuertemente cerrado. ∎

Proposición 8.4. El transpuesto ^tD *del operador* D *es un epimorfismo del espacio* $L_X^{-s+m}(V'_2)$ *sobre el espacio* $L_X^{-s}(V'_1)$ *para* $s \geq 0$.

Demostración. Si u es una aplicación lineal continua de un espacio vectorial topológico E en otro F tal que $u(E)$ sea cerrado en F, entonces ^tu es un homomorfismo de F' en E' para las topologías $\sigma(E', E)$, $\sigma(F', F)$ (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, prop. 4). Si además E y F son espacios de Fréchet reflexivos, entonces $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$ y $\sigma(F', F) = \sigma(F', F'')$ de donde sigue que ^tu es también un homomorfismo fuerte de F' en E' (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, exerc. 5) y que $^tu(F')$ es cerrado en E'. De la prop. 8.3 resulta entonces que ^tD es un homomorfismo de $L_X^{-s+m}(V'_2)$ en $L_X^{-s}(V'_1)$ y que $^tD(L_X^{-s+m}(V'_2))$ es cerrado en $L_X^{-s}(V'_2)$. Puesto que los dos espacios son reflexivos, $^tD(L_X^{-s+m}(V'_2))$ es también débilmente cerrado en $L_X^{-s}(V'_1)$.

Por otro lado, D es una inyección de $K_X^s(V_1)$ en $K_X^{s-m}(V_2)$ ya que si $DT = 0$ en X y T es de soporte compacto, entonces se sigue, puesto que D es A-elíptico y X conexo, que $T = 0$. Por consiguiente (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, prop. 3) $^tD(L_X^{-s+m}(V'_2))$ es débilmente denso en $L_X^{-s}(V'_1)$. Ahora bien, un conjunto cerrado y denso es todo el espacio. ■

Supongamos a partir de ahora que ^tD ***sea elíptico,*** lo que equivale a decir, (p. 41) que las fibras tipo de los espacios V_1 y V_2 tienen la misma dimensión, es decir, $\dim F_1 = \dim F_2$.

Proposición 8.5. El transpuesto ^tD *del operador* D *es un epimorfismo de* $L_X^{-s+m}(V'_2)$ *sobre* $L_X^{-s}(V'_1)$ *para* s *cualquiera.*

Demostración. Pongamos $\sigma = -s > 0$; entonces $L_X^{\sigma}(V'_1) \subset L_X^{0}(V'_1)$.

${}^tD$ es un epimorfismo de $L^m_X(V'_2)$ sobre $L^{-s}_X(V'_1)$ (prop. 8.4) y con más razón una epiyección de un subespacio conveniente de $L^m_X(V'_2)$ sobre $L^m_X(V'_2)$ sobre $L^\sigma_X(V'_1)$. De $T \in L^m_X(V'_2)$, ${}^tDT \in L^\sigma_X(V'_1)$ y de la elipticidad de ${}^tD$ sigue (Teorema 7.1, p. 80) que $T \in L^{\sigma+m}_X(V'_2)$. Como inversamente ${}^tD$ aplica $L^{\sigma+m}_X(V'_2)$ en $L^\sigma_X(V'_1)$ (proposición 2.14, p. 17) y como estos espacios son de Fréchet, la proposición queda demostrada (Bourbaki, EVT, Chap. I, § 3, Théorème 1). ■

Proposición 8.6. ${}^tD$ *es un epimorfismo de* $E_X(V'_2)$ *sobre* $E_X(V'_1)$.

Demostración. Esto resulta de que $E_X(V) = L^\infty_X(V) = \bigcap_s L^s_X(V)$ y de la prop. 8.5.

Proposición 8.7. $D\,E'_X(V_1)$ *es cerrado en* $E'_X(V_2)$, $D\,K^s_X(V_1)$ *es cerrado en* $K^{s-m}_X(V_2)$ *para* s *cualquiera,* $D\,D_X(V_1)$ *es cerrado en* $D_X(V_2)$.

Demostración. Las dos primeras afirmaciones resultan de las prop. 8.5 y 8.6 (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, prop. 9 y prop. 4). La última resulta de que $D\,D_X(V_1)$ ya es cerrada para la topología menos fina inducida por $K^{s-m}_X(V_2)$ sobre $D_X(V_2)$. ■

Proposición 8.8. Si K *es un compacto lleno, entonces* $D\,E'_K(V_1)$ *es cerrado en* $E'_K(V_2)$, $D\,K^s_K(V_1)$ *es cerrado en* $K^{s-m}_K(V_2)$ *para* s *cualquiera,* $D\,D_K(V_1)$ *es cerrado en* $D_K(V_2)$.

Demostración. Consecuencia de las prop. 8.1 y 8.7. ■

Proposición 8.9. Sea $K \subset X$ *un compacto cualquiera y* s *un número entero cualquiera* (resp. un número real cualquiera si V_1 y V_2 son triviales, cf. p. 81). *Entonces la aplicación* $T \mapsto DT$ *es un monomorfismo de* $K^s_K(V_1)$ *en*

$K^{s-m}_{K}(V_2)$.

Demostración. Sabemos que D es una inyección de $K^{s}_{\hat{K}}(V_1)$ en $K^{s-m}_{\hat{K}}(V_2)$ (dem. de la prop. 8.4). Por otro lado, puesto que $\hat{K}$ es compacto (lema 2), $D\,K^{s}_{\hat{K}}(V_1)$ es cerrado en $K^{s-m}_{\hat{K}}(V_2)$ (proposición 8.8), es decir, D es un monomorfismo de $K^{s}_{\hat{K}}(V_1)$ en $K^{s-m}_{\hat{K}}(V_2)$ y lo es también del subespacio $K^{s}_{K}(V_1)$ en el subespacio $K^{s-m}_{K}(V_2)$. ∎

Podemos resumir los resultados obtenidos en el teorema siguiente :

Teorema 8.1. *Sea* X *una variedad indefinidamente diferenciable, conexa y no compacta. Sean* V_1 *y* V_2 *dos espacios fibrados con fibra vectorial, con base* X *y cuyas fibras tipo tienen la misma dimensión. Sea* D *un operador diferencial* A*-elíptico de* $D'_X(V_1)$ *en* $D'_X(V_2)$. *Entonces :*

1o. *$D\,E'_X(V_1)$ es cerrado en $E'_X(V_2)$, $DK^{s}_{X}(V_1)$ es cerrado en $K^{s-m}_{X}(V_2)$, cualquiera que sea el número entero s* (si $V_1 = V_2 = X \times C^{l}$, entonces s puede ser cualquier número real),

$$D\,D_X(V_1) \text{ es cerrado en } D_X(V_2) .$$

2o. *La aplicación $T \mapsto {}^{t}DT$ es un epimorfismo de $E_X(V'_2)$ sobre $E_X(V'_1)$ y de $L^{s}_{X}(V'_2)$ sobre $L^{s-m}_{X}(V'_1)$, cualquiera que sea s* (véase 1o.).

3o. *Cualquiera que sea el compacto $K \subset X$ y el número s* (véase 1o.), *la aplicación $T \mapsto DT$ es un monomorfismo de $K^{s}_{K}(V'_1)$ en $K^{s-m}_{K}(V_2)$ y de* $D_K(V_1)$ en $D_K(V_2)$.

De las prop. 8.1 y 8.7 resulta también (Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 4, exerc.5) que $T \mapsto DT$ es un monomorfismo débil de $E'_X(V_1)$ en $E'_X(V_2)$. Pero como estos espacios son de Fréchet-Schwartz, la aplicación es también un monomorfismo fuerte (Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasiliensis Math. vol. 3, fasc. 6, Théorème 12, p. 119).

Este teorema muestra en particular la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Sea por ejemplo D un operador elíptico tal que ${}^tD$ sea A-elíptico. Entonces, en virtud del punto 2o. del Teorema 8.1, la ecuación

$$DT = S$$

tiene una solución T, cualquiera que sea el segundo miembro $S \in \mathrm{L}^s_X(\mathrm{V}_2)$ o $S \in \mathrm{E}_X(\mathrm{V}_2)$. En particular sabemos que sobre R^N la distribución de Dirac δ pertenece a L^s para $s < -N/2$, entonces la ecuación

$$DE = \delta I$$

tiene una solución, donde δI es la matriz diagonal con filas y columnas, cuyos elementos diagonales valen todos δ. Con otras palabras : *el operador D tiene una solución elemental* que pertenece a L^{s+m} con $s < -N/2$.

Para terminar, demostremos el resultado siguiente :

Teorema 8.2. En las mismas hipótesis que para el Teorema 8.1 ${}^tD$ aplica $\mathrm{D}'_X(\mathrm{V}'_2)$ sobre $\mathrm{D}'_X(\mathrm{V}'_1)$.

Demostración. Sea $\mathcal{H}\mathrm{E}_X(\mathrm{V}'_2)$ el haz de los gérmenes de secciones f de V'_2 que pertenecen a $\mathrm{E}_\Omega(\mathrm{V}'_2)$, es decir, el haz definido por el prehaz ("Garbendatum") $\{\mathrm{E}_\Omega(\mathrm{V}'_2)\}$, Ω abierto de X. (Para los elementos de la teoría de los haces ver F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1956, § 2). Sea $\mathcal{H}\mathrm{N}$ el subhaz de $\mathcal{H}E_X(V'_2)$ formado por los gérmenes de soluciones de la ecuación ${}^tDf = 0$. Consideremos la sucesión de homomorfismos de haces

$$(8,1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{H}N \xrightarrow{i} \mathcal{H}E_X(V'_2) \xrightarrow{{}^tD} \mathcal{Q} \longrightarrow 0 ,$$

donde i es la inyección idéntica y $\mathcal{Q}$ es el haz cociente. Esta sucesión es exacta, ya que $\mathcal{H}N$ es, por su definición, el núcleo de ${}^tD$. $\mathcal{Q}$ es el haz de los gérmenes de secciones indefinidamente diferenciables de V_1 de la forma ${}^tDg$ con $g \in E_\Omega(V_2')$. Podemos escribir . $\mathcal{Q} = {}^tD\,\mathcal{H}E_X(V'_2) \subset \mathcal{H}E_X(V'_1)$.

La sucesión exacta (8,1) implica la sucesión exacta de cohomología (Hirzebruch, op. cit,, Satz 2.10.1)

$$(8,2) \qquad \begin{gathered} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}N) \xrightarrow{i_*} H^0(X, \mathcal{H}E_X(V'_2)) \xrightarrow{{}^tD_*} \\ \longrightarrow H^0(X, {}^tD\,\mathcal{H}E_X(V_2')) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}N) \xrightarrow{i_*} H^1(X, \mathcal{H}E_X(V'_2)) . \end{gathered}$$

Ahora bien, el haz $\mathcal{H}E_X(V'_2)$ es fino como se comprueba inmediatamente con la ayuda de una descomposición indefinidamente derivable de la unidad (Hirzebruch , op. cit., Satz 2.11.3) , de donde resulta que $H^1(X , \mathcal{H}E_X(V'_2)) = 0$ (Hirzebruch, op. cit., 2.11.1). Por consiguiente la exactitud de la sucesión (8,2) implica que $H^1(X,\mathcal{H}N)$ es isomorfo al cociente de $H^0(X, {}^tD\,\mathcal{H}E_X(V'_2))$ por la imagen de $H^0(X, \mathcal{H}E_X(V'_2))$ con respecto a ${}^tD_*$. Pero $H^0(X, \mathcal{H}E_X(V'_2))$ es sencillamente $E_X(V'_2)$ (Hirzebruch, op. cit., Satz 2.6.2), de donde resulta finalmente :

$$(8,3) \qquad H^1(X ,\mathcal{H}N) = H^0(X , {}^tD\,\mathcal{H}E_X(V'_2)) / {}^tD\,E_X(V'_2) .$$

El espacio vectorial $H^0(X, {}^tD\,\mathcal{H}E_X(V'_2))$ es el espacio de las secciones indefinidamente diferenciables de V'_2 que son localmente de la forma ${}^tDg$; se puede decir entonces que $H^1(X, \mathcal{H}N)$ es isomorfo al cociente del espacio de las secciones indefinidamente diferenciables que son localmente "segundos miembros" de una ecuación ${}^tDg = f$, por el espacio de las secciones indefinidamente diferenciables, que lo son globalmente.

De exactamente la misma manera, podemos escribir la sucesión exacta

$$(8,4) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{H}N' \xrightarrow{i} \mathcal{H}D'_X(V'_2) \xrightarrow{{}^tD} {}^tD\,\mathcal{H}D'_X(V'_2) \longrightarrow 0 ,$$

$\mathcal{H}N'$ es ahora el haz de los gérmenes de secciones-distribuciones T soluciones de ${}^tDT = 0$. Puesto que ${}^tD$ es elíptico, estos gérmenes T pertenecen a $\mathcal{H}E_X(V'_2)$ y por consiguiente $\mathcal{H}N' = \mathcal{H}N$. De la sucesión exacta (8.4) se deduce entonces la sucesión exacta de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}N) \xrightarrow{i_*} H^0(X, \mathcal{H}D'_X(V'_2)) \xrightarrow{{}^tD_*}$$

$$\longrightarrow H^0(X, {}^tD\,\mathcal{H}D'_X(V'_2)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}N) \xrightarrow{i_*} H^1(X, \mathcal{H}D'_X(V'_2)) .$$

Puesto que el haz $\mathcal{H}D'_X(V'_2)$ es fino, obtenemos exactamente como en el caso anterior que

$$(8,5) \qquad H^1(X, \mathcal{H}N) = H^0(X, {}^tD\,\mathcal{H}D'_X(V'_2))/{}^tD\,D'_X(V_2) ,$$

es decir que $H^1(X, \mathcal{H}N)$ es isomorfo al cociente del espacio de las secciones - distribuciones que son localmente segundos miembros por el espacio de las secciones-distribuciones que lo son globalmente.

Comparando (8,3) y (8,5) obtenemos el resultado debido a Malgrange (Thèse , Chap. III, Théorèm 3)

(8,6) $\quad H^0(X, {}^tD\, \mathcal{H}E_X(V'_2))/{}^tD\, E_X(V'_2) = H^0(X, {}^tD\, \mathcal{H}D'_X(V'_2))/{}^tD\, D'_X(V'_2)$.

(Observemos que esta fórmula se demostró bajo la única hipótesis de que ${}^tD$ es hipoelíptico).

Puesto que D es A-elíptico, resulta del 2o. del Teorema 8.1 (p. 93) que ${}^tD\, E_X(V'_2) = E_X(V'_1)$ y también que $H^0(X, {}^tD\, \mathcal{H}E_X(V'_2)) = E_X(V'_1)$. Ahora bien, cada $T \in D'_X(V'_2)$ pertenece localmente a un espacio $L^s_X(V'_2)$ y resulta entonces del mismo Teorema que $H^0(X, {}^tD\, \mathcal{H}D'_X(V'_2)) = D'_X(V'_1)$. Luego la fórmula (8,6) da

$$D'_X(V'_1) / {}^tD\, D'_X(V'_2) = \{0\},$$

es decir ${}^tD\, D'_X(V'_2) = D'_X(V'_1)$ lo que demuestra el teorema . ■

9. Problemas no resueltos.

1o. Generalizar la teoría de los espacios fibrados con fibra vectorial $V(X, p, F, (r_i))$ y de los operadores diferenciales $D : D'_X(V_1) \to D'_X(V_2)$ al caso de fibras F vectoriales-topológicos de dimensión infinita.

2o. ¿Puede existir sobre una variedad indefinidamente diferenciable, no analítica, conexa y no compacta una forma armónica no idénticamente nula y con soporte compacto ?

3o. Sea X una variedad conexa, no compacta. Sabemos (p. 91) que si D es A-elíptico, entonces para todo compacto $K \subset X$ la aplicación $T \mapsto DT$ de $K^s_K(V_1)$ en $K^{s-m}_K(V_2)$ es un monomorfismo y no sólo un casi-monomorfismo .

¿Es cierta esta proposición suponiendo sólo que D sea elíptico y no A-elíptico ?

4o. ¿Todo operador elíptico es también A-elíptico ?

Claro está que el problema 4o. contiene 3o. y 3o. contiene 2o.

5o. Dar una demostración simplificada del teorema de Petrowski citado al principio del § 8 (p. 84).

6a. Si D es A-elíptico y ${}^tD$ elíptico, ¿entonces ${}^tD$ es también A-elíptico ?

BIBLIOGRAFÍA SOMERA

El lector encontrará una bibliografía detallada en las obras siguientes :

Contributions to the theory of Partial Differential Equations, Edited by L. *Bers*, S. *Bochner* and F. *John*, Annals of Mathematics Studies, Nº 33 (1954) .

B. *Malgrange* : Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Thèse, Paris 1955 ; Annales de l'Institut Fourier, vol. 6 (1955/56) .

L. *Nirenberg* : Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Communications on pure and applied mathematics, vol. 8 (1955) pp. 648 - 674 .