

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

**Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations
régulières d'une mesure**

J. Analyse Math., 26 (1973), p. 1-168.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURMARTINGALES RÉGULIÈRES À VALEURS MESURES ET DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES D'UNE MESURE

par

LAURENT SCHWARTZ

à Paris, France

en hommage au Professeur B. Amirà

Introduction

L'introduction des espérances conditionnelles a été un de plus grands succès des probabilités dans les dernières décennies. Pratiquement tous les problèmes qui se posaient dans la théorie des martingales ou des processus de Markov peuvent se traiter avec les espérances conditionnelles. Du coup on a presque perdu de vue ce qui était l'outil initialement souhaité: la loi de probabilité conditionnelle, dont d'ailleurs toutes les espérances conditionnelles se déduisent. Au stade actuel, il peut sembler qu'on n'ait rien perdu. Comme malgré tout la connaissance de lois conditionnelles est beaucoup plus forte que celle des espérances conditionnelles, il y a fort à parier qu'elles pourraient donner beaucoup plus. Tout cet article est une étude systématique des lois de probabilités conditionnelles, c'est-à-dire des désintégrations d'une probabilité, soit par rapport à une tribu, soit par rapport à une famille de sous-tribus, croissante et continue à droite, comme on en rencontre dans les processus. Il s'avère qu'on peut obtenir des résultats d'une grande richesse, peu soupçonnés a priori. Nous publierons dans un article ultérieur de applications aux processus de Markov.

L'article commence par des rappels: tribus, mesures, etc... Les lemmes A, A', B, B bis, C, C bis, D, E, F, G, sont tous bien connus ou implicitement connus; nous les réénonçons seulement pour pouvoir y référer de façon précise.

Le §1 traite de l'intégration des mesures. Si $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction sur X à valeurs dans l'espace des mesures sur $(Y, \mathscr{Y})$, on en définit l'intégrale $\lambda = \int \lambda_x d\mu(x)$ par rapport à une mesure μ sur X ; λ est elle-même une mesure sur $(Y, \mathscr{Y})$. Les résultats de ce §1 sont aussi couramment utilisés; je ne suis

pas sûr cependant qu'il en existe d'exposé systématique indiquant tous les résultats dont nous aurons constamment besoin; c'est pourquoi nous les exposons complètement ici. Les propriétés essentielles sont récapitulées dans le théorème (1,9). Il contient la formule de Fubini des intégrales superposées; elle se généralise pour l'intégration d'une fonction à valeurs mesures, à la proposition (1,17).

Le §2 traite des espérances conditionnelles. L'espérance conditionnelle d'une fonction sur $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, est couramment définie si f est à valeurs réelles ≥ 0 (finies ou non) et λ -mesurable, ou à valeurs dans un espace de Banach et λ -intégrable. Nous en rappelons les propriétés au théorème (2.3). Le but du § est de définir l'espérance conditionnelle lorsque f est remplacée par une fonction à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$. La définition est la même, donnée à (2.4). Mais, contrairement, à ce qui se passe pour des fonctions ≥ 0 , il n'y a nécessairement ni existence ni unicité de cette espérance conditionnelle. L'unicité est vraie (théorème (2.7)), moyennant des conditions de finitude et de dénombrabilité relativement simples. Au contraire, l'existence (théorème (2.8)) exige des conditions beaucoup plus strictes, pratiquement on doit être en présence de mesures de Radon sur un espace topologique à parties compactes métrisables. Bien que des contre-exemples soient donnés au §8, quand certaines de ces conditions ne sont pas réalisées, elles sont sans doute trop restrictives. La proposition (2.9), comparant les désintégrations par rapport à deux tribus presque égales, sera souvent utilisée. (2.10) traite alors de la désintégration des mesures. C'est ce que nous avons annoncé au début: si λ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{O})$, une désintégration $x \mapsto \lambda_x^{\mathcal{X}}$ par rapport à une application p de Ω dans un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{X}$, est la donnée des espérances conditionnelles, λ_x étant la probabilité conditionnelle (déduite de λ), lorsqu'on a l'information fournie par $p(\omega) = x$, et la tribu $\mathcal{X}$. Il est préférable de prendre comme définition: $x \mapsto \lambda_x^{\mathcal{X}}$ est l'espérance conditionnelle, par rapport à p , $\mathcal{X}$, de la fonction à valeur mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$: $\omega \mapsto \delta_{(p(\omega))}$. Le théorème (2.11) en donne la caractérisation, et (2.13) à (2.15) des propriétés fondamentales. Le théorème d'unicité est (2.16), le théorème d'existence est (2.17) (donné, pratiquement sous la même forme, par Jirina). Ici ils sont des conséquences directes des théorèmes (2.7) et (2.8). La proposition (2.18) donne une autre caractérisation. Le théorème (2.19) aura dans la suite de

très nombreuses applications; on en déduit déjà tout de suite (2,20 à 23), qui relient la désintégration à d'autres définitions, données dans des cas particuliers divers. De (2.24) à (2.29), on développe des résultats techniques. Ce sont les théorèmes (2.30) et (2.31) qui donnent la relation fondamentale entre désintégrations et espérances conditionnelles, en sens inverse de la définition la désintégration était une espérance conditionnelle particulière, mais elle joue le rôle de noyau, elle donne à son tour toutes les espérances conditionnelles, pour des fonctions intégrables à valeurs banachiques, ou des fonctions ≥ 0 à valeurs réelles ou à valeurs mesures.

Le §3 traite de la transitivité des désintégrations de mesures. En style naïf, il s'agit de ceci: si l'on se donne une première information, définie par ω et une sous-tribu $\mathcal{S}$ de la tribu λ -mesurable, puis une deuxième information définie par ω' et une sous-tribu $\mathcal{T}$, et si la deuxième est plus précise que la première, ce qui se traduit par $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, alors tout se passe comme si on s'était donné la seconde seule (moyennant une condition de dénombrabilité sur $\mathcal{T}$). En termes précis: pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}$ comme λ elle-même, par $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$. On étudie pour cela d'abord la situation la plus générale, qui fait l'objet du théorème (3,3), puis on passe au cas signalé ici, des sous-tribus de la tribu λ -mesurable, à partir de (3,5). On est amené à introduire une notion nouvelle: la tribu $\mathcal{T}$ est dite λ -plus forte que $\mathcal{S}$ si la propriété précédente est réalisée. Une tribu λ -dénombrablement engendrée est λ -forte, c'est-à-dire plus forte qu'elle-même et que toutes ses sous-tribus (théorème (3,8), (3,9), (3,10). (3,10 bis), (3,11) (3,13), (3,14)); tous ces théorèmes joueront un rôle important dans la suite. On peut regretter que certaines conditions soient nécessaires pour qu'une tribu soit λ -forte; le (8,5) donnera des contre-exemples simples montrant qu'une tribu, même borélienne, n'est pas toujours λ -forte. Ces propriétés des tribus fortes nous semblent parmi les plus intéressantes de la théorie.

Le §4 étudie les surmartingales. La théorie des surmartingales à valeurs réelles est supposée connue (rappels au théorème (4,3)), et nous étudions ici les surmartingales à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$. Une surmartingale à valeurs réelles est dite régulière si elle est presque sûrement réglée et continue à droite. Il faut trouver une définition des surmartingales régulières à valeurs mesures; c'est la définition (4,6), d'où on tire quelques conséquences élémentaires

(4,7) à (4,9). Le théorème (4,10 bis) est une conséquence moins simple. On va ensuite se poser la question de l'existence et de l'unicité des modifications régulières d'une surmartingale à valeurs mesures: unicité corollaire (4,10 quater), existence (théorème (4,16)). Il est nécessaire pour cela d'introduire des outils techniques, qui reviendront constamment (systèmes J -determinants, hypothèse J -dénombrable ou J -compacte; la deuxième hypothèse est plus forte que la première, elle semble plus ou moins indispensable à l'existence, alors que la première suffit pour l'unicité). A (4,19) on étudie les limites à gauche. Quand une fonction numérique est réglée, par définition elle possède en tout point une limite à gauche. Mais, pour une surmartingale régulière à valeurs mesures, l'existence de limites à gauche n'est pas assurée, et même la définition demande quelques précautions. La définition est (4,19), le théorème d'unicité (4,21 bis), dans l'hypothèse J -dénombrable, le théorème d'existence (4,22), dans l'hypothèse J -compacte. On en déduit les deux décompositions de Riesz, théorèmes (4,24 et 25).

Le §5 étudie les désintégrations régulières à partir des surmartingales régulières à valeurs mesures, et inversement applique les désintégrations régulières aux surmartingales. Une désintégration régulière d'une mesure λ sur $(\Omega, \mathcal{O})$, par rapport à la famille $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de tribus croissante et continue à droite, est définie à (5,0); c'est une martingale régulière d'espérances conditionnelles de $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$. Les théorèmes (5,1) et (5,1 bis) en donnent les propriétés immédiatement déduites de celles des surmartingales régulières. A partir de là, on va trouver une série de propriétés, toutes du même type: quand une propriété est vraie, pour une désintégration, pour λ -presque tout ω , elle est aussi vraie, pour une désintégration régulière, pour λ -presque ω , pour tout t . Mais c'est souvent difficile à démontrer. La proposition (5,2) est typique de ces propriétés. Toutes les suivantes, (5,3) à (5,6) sont aussi intéressantes. La proposition (5,7) ne donne que des résultats incomplets, qui ne pourront être complétés que beaucoup plus loin (proposition (5,18)). A partir de là, on peut appliquer les désintégrations régulières aux martingales et surmartingales. De même qu'une désintégration donne toutes les espérances conditionnelles, théorèmes (2,30 et 31), une désintégration régulière donne toutes les espérances conditionnelles régulières, proposition (5,9). On passe ensuite aux surmartingales. La proposition (5,10) donne de remarquables

formules intégrales. C'est alors la proposition (5, 12) qui donne, à partir d'une désintégration régulière, les modifications régulières de toutes les surmartingales; c'est un résultat qui nous semble très remarquable, bien que tout-à-fait attendu; sa démonstration complète est difficile. De là on passe, en plusieurs étapes, à partir de (5, 14), à la proposition (5, 18), qui est une des plus intéressantes. En termes de processus, elle s'exprimerait naïvement ainsi: l'information donnée par un point ω et la tribu $\mathcal{F}^s$ devrait donner toute la trajectoire aux instants $t \leq s$. C'est intuitivement évident. Si on l'écrit: pour tout s , pour λ -presque tout ω , c'est très simple. Mais nous voulons: pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_ω^s est portée par l'ensemble des trajectoires coïncidant avec celle d' ω jusqu'à l'instant s . Ce résultat, qui est donc très intuitif, est un des plus difficiles à démontrer; je ne l'ai trouvé que très tardivement, et il nécessite, comme on le constatera, une quantité de résultats antérieurs. On pourrait d'ailleurs aussi naïvement imaginer qu'on a plus, à cause de la continuité à droite de la famille de tribus: λ_ω^s est portée par l'ensemble des trajectoires coïncidant avec ω jusqu'à un instant $> s$. Ceci est faux, comme le montre le contre-exemple (8, 4.3).

Le §6 traite des désintégrations régulières et de la transitivité; il est au §5 ce que le §3 est au §2. Les tribus λ -fortes donnent d'excellentes applications aux désintégrations et surmartingales régulières. Tout d'abord les propositions (6, 2) et (6, 3) donnent une application des désintégrations régulières aux tribus λ -fortes, et montrent que certaines tribus non λ -dénombrablement engendrées sont λ -fortes. Le théorème (6, 6) est le plus important; il est complété à (6, 8). Les théorèmes (6, 9) et (6, 11) étendent aux surmartingales le résultat démontré antérieurement pour les désintégrations régulières. La récapitulation de tous ces résultats dans le théorème (6, 12) donne une bonne idée de l'ensemble des résultats obtenus dans ce chapitre. Ce qu'il y a d'essentiel dans tous ces théorèmes, c'est la possibilité, pour les désintégrations ou les surmartingales régulières, de remplacer la mesure de base λ par l'une quelconque des mesures λ_ω^s de la désintégration régulière de λ , pourvu que l'on se borne aux temps $t \geq s$. Ainsi: si $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une surmartingale régulière par rapport à λ , alors, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(f^t)_{t \geq s}$ est une surmartingale régulière par rapport à λ_ω^s (théorème (6, 9)). Le même résultat serait vrai pour des Markov, nous le publierons ultérieurement.

Le §7 traite des temps d'arrêt. Le résultat le plus important est le théorème (7,2): si $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ -régulière de λ pour la famille des tribus $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, alors une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{F}^T$ définie par le temps d'arrêt T est donnée par $\omega \mapsto \lambda_\omega^{T(\omega)}$. Ainsi une désintégration régulière donne des désintégrations pour tous les temps d'arrêt. Les théorèmes (7,6), (7,7), (7,8) sont de belles applications des paragraphes antérieurs, et leur intérêt dans les processus ne saurait échapper.

Le §8 donne une liste de contre-exemples. Nous les avons rassemblés pour ne pas alourdir le texte antérieur, car un contre-exemple est toujours assez lourd à construire. Ces contre-exemples montrent que, vraisemblablement, les hypothèses faites au cours des différents théorèmes ne sont pas trop loin du strict nécessaire.

Nous nous excusons si cet article est parfois difficile à lire. Les énoncés sont obligatoirement compliqués, à cause des "presque partout" en chaîne, dans un ordre impératif; c'est cela qui fait la force et l'intérêt de ces théorèmes. Les désintégrations régulières permettent de voir sous un jour nouveau les processus de Markov; nous publierons ultérieurement un article sur ce sujet.

Définitions diverses:

Il est entendu, sans que ce soit jamais mentionné, que tous les espaces topologiques considérés sont séparés.

Ces définitions sont des rappels.

Sur un ensemble Y , une tribu $\mathcal{Y}$ est un ensemble de parties ($\mathcal{Y} \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}Y$), $\emptyset \in \mathcal{Y}$, $Y \in \mathcal{Y}$, stable par complémentation ($A \in \mathcal{Y}$ implique $\complement A \in \mathcal{Y}$) et par réunions et intersections dénombrables.

Si $(Y, \mathcal{Y})$ et $(Z, \mathcal{Z})$ sont deux ensembles munis de tribus, une application f de Y dans Z est dite $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable, si, pour tout $B \in \mathcal{Z}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{Y}$. Si Z est $\overline{\mathbb{R}}$, est $\mathcal{Z}$ sa tribu borélienne, il suffit pour cela que, pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{y \in Y; f(y) \leq a\}$ (ou l'ensemble $\{y \in Y; f(y) < a\}$) soit dans $\mathcal{Y}$. On dit aussi alors que f appartient à la tribu $\mathcal{Y}$, et on écrit encore, par abus de langage, $f \in \mathcal{Y}$.

La tribu image directe $f(\mathcal{Y})$ de $\mathcal{Y}$ par f est l'ensemble des $B \subset Z$ tels que $f^{-1}(B) \in \mathcal{Y}$. La tribu $f^{-1}(\mathcal{Z})$, image réciproque de $\mathcal{Z}$ par f , est l'ensemble des $f^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{Z}$. Alors f est $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable, si et seulement si $f(\mathcal{Y}) \supset \mathcal{Z}$.

ou si et seulement si $\mathcal{Y} \supset f^{-1}(\mathcal{Z})$. Si $Y' \subset Y$, nous appellerons $Y' \cap \mathcal{Y}$ la tribu des $B \cap Y'$, $B \in \mathcal{Y}$; c'est l'image réciproque de $\mathcal{Y}$ par l'injection $Y' \rightarrow Y$.

La tribu engendrée par un ensemble de parties de Y est la plus petite tribu qui le contienne. La tribu engendrée par une famille de tribus $(\mathcal{Y}_i)_{i \in I}$ se notera $\bigvee_{i \in I} \mathcal{Y}_i$. On emploiera des notations analogues pour des tribus engendrées analogues; par exemple, si $\mathcal{Y}$ est une tribu et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties, $\mathcal{F} \vee (\bigvee_{i \in I} \{A_i\})$ désignera la tribu engendrée par $\mathcal{Y}$ et les A_i . Une tribu est dite dénombrablement engendrée s'il existe un ensemble dénombrable de parties qui l'engendre. Elle est dite dénombrablement séparante s'il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{B}$ de parties éléments de $\mathcal{Y}$, tel que tout point de $\mathcal{Y}$ soit intersection d'éléments de $\mathcal{B}$. L'atome $\tilde{y}$ de $y \in Y$ relatif à $\mathcal{Y}$ est l'intersection des parties $\in \mathcal{Y}$ qui contiennent y (noter que l'on n'a pas nécessairement $\tilde{y} \in \mathcal{Y}$). La tribu est dite Q -dénumbrablement séparante ($Q =$ quotient), s'il existe $\mathcal{B}$ dénombrable $\subset \mathcal{Y}$, tel que tout atome de $\mathcal{Y}$ soit intersection d'éléments de $\mathcal{B}$; alors tout atome est élément de $\mathcal{Y}$.

Une tribu dénumbrablement engendrée est Q -denombrablement séparante. Une mesure ν sur $(Y, \mathcal{Y})$ est une application de $\mathcal{Y}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ (ensemble $[0, +\infty]$ des nombres réels ≥ 0 et de $+\infty$), dénumbrablement additive: si $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, $B_n \in \mathcal{Y}$, les B_n étant disjoints, on a $\nu(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n)$. Nous supposons presque toujours que ν est σ -finie; Y est réunion d'une suite $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de parties $\in \mathcal{Y}$, de ν -mesures finies. Nous supposons connue la théorie de l'intégration par rapport à une mesure; rappelons que, dans cette théorie, $0 \times (+\infty) = 0$.

Si alors f est une application définie ν -presque partout, de Y dans Z , Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$ et d'une mesure ν , Z d'une tribu $\mathcal{Z}$, on dit que f est $(\nu, \mathcal{Z})$ -mesurable (ou simplement ν -mesurable s'il n'y a aucune ambiguïté), si, pour tout $B \in \mathcal{Z}$, $f^{-1}(B)$ est ν -mesurable. On définit alors une mesure image $f(\nu)$ sur $\mathcal{Z}$, par $(f(\nu))(B) = \nu(f^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{Z}$. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, il sera sous-entendu que $\mathcal{Z}$ est la tribu borélienne. La tribu ν -mesurable se notera $\hat{\mathcal{Y}}_\nu$ ou $\overline{\mathcal{Y}}_\nu$; si $\mathcal{N}_\nu$ est la tribu des parties ν -négligeables ou ν -conégligeables (de complémentaire ν -négligeable), et si ν est σ -finie, $\hat{\mathcal{Y}}_\nu$ est la tribu $\mathcal{Y} \vee \mathcal{N}_\nu$ engendrée par $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{N}_\nu$. Alors f est $(\nu, \mathcal{Z})$ -mesurable, si et seulement si elle est $(\hat{\mathcal{Y}}_\nu, \mathcal{Z})$ -mesurable. Elle est alors aussi $(\hat{\mathcal{Y}}_\nu, \mathcal{Z}_{f(\nu)})$ -mesurable, si $f(\nu)$ est σ -finie.

$\mathcal{Y}$ est dite ν -dénombrablement engendrée, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν (i.e. $\nu(\mathbb{C}Y') = 0$), telle que la tribu intersection $Y' \cap \mathcal{Y}$ soit dénombrablement engendrée [1]. Elle sera dite ν - Q -dénombrablement séparante, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , telle que $Y' \cap \mathcal{Y}$ soit Q -dénombrablement séparante; cela revient à dire qu'il existe une partie dénombrable $\mathcal{B} \subset (Y' \cap \mathcal{Y})$ telle que toute atome de $\mathcal{Y}$, contenu dans Y' , soit intersection des éléments de $\mathcal{B}$ qui le contiennent.

L'application $f: Y \rightarrow Z$ (définie ν -presque partout) est dite ν -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que l'application $f_{Y'}$, restriction de f à Y' , soit définie partout et $(Y' \cap \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable.

Cela équivaut à dire que f est ν -presque partout égale à une application $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$, définie partout et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable ($\tilde{f} = f$ sur Y' et constante sur $\mathbb{C}Y'$). Cela implique que f soit $(\nu, \mathcal{Z})$ -mesurable; nous verrons au lemme A' une certaine réciproque.

Deux tribus $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ sur Y sont dites ν -presque égales, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que $\mathcal{Y}_1 \cap Y'$ et $\mathcal{Y}_2 \cap Y'$ coïncident. Par exemple, si Y est un espace topologique, $\mathcal{Y}$ sa tribu borélienne, $\mathcal{Y}_1$ sera dite être ν -presque borélienne, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que $\mathcal{Y}_1 \cap Y'$ soit contenue dans la tribu borélienne de Y' . Et $\mathcal{Y}_1$ sera dite être ν -presque universellement mesurable, s'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que $\mathcal{Y}_1 \cap Y'$ soit contenue dans la tribu universellement mesurable de Y' .

Soit P une propriété relative aux éléments de Y . On dit que P est vérifiée ν -presque partout, si l'ensemble des y tels que $P(y)$ ne soit pas vraie est ν -négligeable. On écrira encore: *pour ν -presque tout y , $P(y)$* . Mais il ne faudrait pas oublier que, malgré les apparences, il y a là un quantificateur $\exists$. Pour ν -presque tout y , $P(y)$, devrait s'écrire: $(\exists Y' \subset Y)(\forall y \in Y'): P(y)$ et $\nu(\mathbb{C}Y') = 0$. C'est pourquoi les "presque" ne peuvent pas être intervertis avec les autres quantificateurs qui sont de vrais "quel que soit". Nous emploierons une manipulation facile et rapide des symboles "presque", mais il faudra se garder de les intervertir. Par exemple, aux §§4 et suivants une phrase telle que:

Pour λ -presque tout ω , pour tout s , on a $P(\omega, s)$, est beaucoup plus forte que la phrase:

Pour tout s , pour λ -presque tout ω , on a $P(\omega, s)$.

[1] Voir à (8,0) un exemple de tribu non ν -dénombrablement engendrée.

La deuxième veut dire que, pour tout s , il existe un $\Omega'_s \subset \Omega$ portant λ (dépendant de s), tel que $P(\omega, s)$ pour $\omega \in \Omega'_s$. La première veut dire qu'il existe un $\Omega' \subset \Omega$ (indépendant de s), portant λ , tel que, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout s , on ait $P(\omega, s)$.

Prenons par exemple le lemme D , page 12. Dans la propriété 3 des hypothèses: "pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $P(B, x)$ est vérifiée pour μ -presque tout x ", on veut exprimer que, pour tout B , il existe $X'_B \subset X$, portant μ , dépendant donc de B , tel que $P(B, x)$ pour $x \in X'_B$. Dans la conclusion du lemme au contraire: "pour μ -presque tout x , on a $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$ ", il y a un $X' \subset X$ fixe, portant μ , tel que $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$ et tout $x \in X'$.

Lemme A. Soit $\mathcal{Q}$ un ensemble de parties d'un ensemble Y , stable par passage à la réunion des suites croissantes, et stable par complémentation ou par passage à l'intersection des suites décroissantes. Si $\mathcal{Q}$ contient un ensemble $\mathcal{B}$ de parties, stable par complémentation et par réunions et intersections finies, $\emptyset$ et $Y \in \mathcal{B}$, alors $\mathcal{Q}$ contient toute la tribu de parties engendrée par $\mathcal{B}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{Q}'$ le plus petit ensemble de parties contenant $\mathcal{B}$, et stable par réunions des suites croissantes et intersections des suites décroissantes; montrons que $\mathcal{Q}'$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{Q} \supset \mathcal{Q}'$ aura la même propriété. Soit $A \in \mathcal{B}$. Soit $\mathcal{Q}'_A$ l'ensemble des parties B telles que $A \cup B \in \mathcal{Q}'$; il est stable par réunions des suites croissantes et intersections des suites décroissantes, et contient $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{Q}'$; donc $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{Q}'$, implique $A \cup B \in \mathcal{Q}'$. Alors, pour $B \in \mathcal{Q}'$, soit ${}_B\mathcal{Q}'$ l'ensemble des A telles que $A \cup B \in \mathcal{Q}'$: il a aussi la même stabilité et contient $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{Q}'$, donc $A \in \mathcal{Q}'$, $B \in \mathcal{Q}'$ implique $A \cup B \in \mathcal{Q}'$; de même $A \cap B \in \mathcal{Q}'$. Considérons enfin l'ensemble des parties A telles que $\complement A \in \mathcal{Q}'$; il est encore stable par réunions des suites croissantes et intersections des suites décroissantes, et contient $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{Q}'$. Donc $\mathcal{Q}'$ est maintenant stable par réunions et intersections dénombrables et complémentation, donc c'est une tribu qui contient $\mathcal{B}$, cqfd.

Corollaire A'. Soient Y, Z , deux ensembles munis de tribus $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$. Soit ν une mesure σ -finie sur $(Y, \mathcal{Y})$. Soit f une application définie ν -presque partout et $(\nu, \mathcal{Z})$ mesurable de Y dans Z . Supposons qu'il existe $Z' \subset Z$

tel que $f^{-1}(Z')$ porte ν et que $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \cap Z'$ soit dénombrablement engendrée (ceci se produira toujours si $f(\nu)$ est σ -finie et $\mathcal{Z}$ $f(\nu)$ -dénumbrablement engendrée; car, si Z' porte $f(\nu)$ et si $Z' \cap \mathcal{Z}$ est dénombrablement engendrée, $f^{-1}(Z')$ porte ν). Alors f est ν -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble dénombrable générateur de $\mathcal{Z}'$, $\emptyset$ et $Z' \in \mathcal{B}$, stable par complémentation et par réunions et intersections finies. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $B = Z' \cap \bar{B}$, $\bar{B} \in \mathcal{Z}$; $f^{-1}(\bar{B})$ est ν -mesurable, $f^{-1}(Z')$ porte ν , donc $f^{-1}(B)$ est ν -mesurable. Comme ν est σ -finie, il existe $Y_B \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que f soit définie partout sur Y_B et que $f^{-1}(B) \cap Y_B$ soit dans $\mathcal{Y}$. Posons $Y'' = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} Y_B$; d'une part $Y'' \in \mathcal{Y}$ et porte ν , d'autre part, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $(f^{-1}(B) \cap Y'') \in \mathcal{Y}$. Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{Z}'$ tels que $(f^{-1}(B) \cap Y'') \in \mathcal{Y}$; il est stable par réunions de suites croissantes et intersections de suites décroissantes, et contient $\mathcal{B}$, donc, par le lemme A, c'est $\mathcal{Z}'$. Posons alors $Y' = Y'' \cap f^{-1}(Z')$; il est dans $\mathcal{Y}$, et il porte ν puisque Y'' et $f^{-1}(Z')$ portent ν . Soit $f_{Y'}$ la restriction de f à Y' , partout définie. Pour tout $B \in \mathcal{Z}$, $f_{Y'}^{-1}(B) = (f^{-1}(B \cap Z') \cap Y'') \in \mathcal{Y}$, donc $f_{Y'}$ est $(\mathcal{Y} \cap Y', \mathcal{Z})$ -mesurable.

Voici des extensions (voir le lemme C) relatives aux tribus de fonctions.

Lemme B. Soit Y un ensemble, et soit $\mathcal{Q}$ un ensemble de fonctions réelles ≥ 0 bornées sur Y , ayant les propriétés suivantes:

- a) si f est limite d'une suite simplement convergente de fonctions $f_n \in \mathcal{Q}$, bornées dans leur ensemble, alors $f \in \mathcal{Q}$.
- b) $\mathcal{Q}$ est un $\mathbb{R}^+$ -semi-espace vectoriel: $f \in \mathcal{Q}$, $g \in \mathcal{Q}$, $k \in \mathbb{R}^+$, implique $f + g \in \mathcal{Q}$, $kf \in \mathcal{Q}$;
- c) $1 \in \mathcal{Q}$, et $\mathcal{Q}$ est stable par complémentation: $f \in \mathcal{Q}$, $f \leq 1$, implique $1 - f \in \mathcal{Q}$.
- d) $\mathcal{Q}$ est stable par Sup et Inf: $f \in \mathcal{Q}$, $g \in \mathcal{Q}$ implique $\text{Sup}(f, g) \in \mathcal{Q}$, $\text{Inf}(f, g) \in \mathcal{Q}$.

Alors $\mathcal{Q}$ est exactement l'ensemble des fonctions bornées ≥ 0 appartenant à une tribu $\mathcal{T}$; $\mathcal{T}$ est l'ensemble des parties dont la fonction caractéristique est élément de $\mathcal{Q}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties dont la fonction caractéristique est dans $\mathcal{Q}$. $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$ et il est stable par complémentation, puis

par réunions et intersections finies, enfin par réunion d'une suite croissante et intersection d'une suite décroissante, donc $\mathcal{T}$ est une tribu de parties sur Y .

Soit f une fonction bornée appartenant à la tribu $\mathcal{T}$. Elle est limite uniforme d'une suite de combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 de fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathcal{T}$, qui donc appartiennent à $\mathcal{Q}$, donc elle est aussi élément de $\mathcal{Q}$. Inversement, soit $f \in \mathcal{Q}$. Pour tout $a > 0$, $g = \text{Inf}(f/a, 1)$ est une fonction de $\mathcal{Q}$, comprise entre 0 et 1, et qui prend une valeur $\neq 1$ exactement là où f est $< a$. Alors $\text{Inf}(1, n(1-g))$, $n \in \mathbb{N}$, est encore dans $\mathcal{Q}$, comprise entre 0 et 1, $\neq 0$ là où $f < a$, et tend, pour n infini, vers la fonction caractéristique de l'ensemble F_a des points où $f < a$; celle-ci est donc dans $\mathcal{Q}$, donc F_a est dans $\mathcal{T}$, et f est dans $\mathcal{T}$, cqfd.

Lemme B bis. *On a le même énoncé que B, en remplaçant partout "bornée" ≥ 0 par "comprise entre 0 et 1", kf par $\text{Inf}(kf, 1)$, $f + g$ par $\text{Inf}(f + g, 1)$.*

La démonstration est la même. Voici maintenant une version fonctionnelle du lemme ensembliste A.

Lemme C. *Soit $\mathcal{Q}$ un ensemble de fonctions bornées ≥ 0 sur un ensemble Y , ayant les propriétés suivantes:*

- 1) *La limite d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{Q}$ est encore dans $\mathcal{Q}$;*
- 2') *Si $c \in \mathbb{R}^+$, la constante c est dans $\mathcal{Q}$, et, si $f \in \mathcal{Q}$, $f \leq c$, alors $c - f \in \mathcal{Q}$;*
ou 2'') la limite d'une suite décroissante de fonctions de $\mathcal{Q}$ est encore dans $\mathcal{Q}$;
- 3) *$\mathcal{Q}$ contient un ensemble $\mathcal{B}$ de fonctions, stable par Sup et Inf, $\mathbb{Q}^+$ -semi-espace vectoriel; $1 \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est stable par complémentation (si $f \leq 1$, $f \in \mathcal{B}$, alors $1 - f \in \mathcal{B}$). Alors $\mathcal{Q}$ contient la tribu de fonctions bornées ≥ 0 engendrée par $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Comme 1 et 2' impliquent 2'' il suffit de montrer le résultat avec les hypothèses 1, 2'', 3.

Appelons $\mathcal{Q}'$ le plus petit ensemble de fonctions bornées ≥ 0 contenant $\mathcal{B}$ et qui soit stable par passage à la limite des suites croissantes et des suites décroissantes.

Soit $f \in \mathcal{B}$. L'ensemble des $g \geq 0$ bornées telles que $f + g \in \mathcal{Q}'$ est stable par passage à la limite des suites croissantes et décroissantes, et contient $\mathcal{B}$,

donc $\mathfrak{L}'$; donc, si $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathfrak{L}'$, $f + g$ est dans $\mathfrak{L}'$. Soit alors $g \in \mathfrak{L}'$. Considérons l'ensemble des f telles que $f + g \in \mathfrak{L}'$; il est stable par limites croissantes et décroissantes et contient $\mathcal{B}$, donc il contient $\mathfrak{L}'$. Donc $f \in \mathfrak{L}'$, $g \in \mathfrak{L}'$, entraîne $f + g \in \mathfrak{L}'$. On montrera de la même manière que $\mathfrak{L}'$ est stable par Sup et Inf et est un $\mathbb{Q}^+$ -semi-espace vectoriel, donc $\mathbb{R}^+$ -semi-espace vectoriel par passage à la limite; stable par Sup et Inf et limites croissantes ou décroissantes, il est stable par passage à la limite simple de suites bornées. Ensuite $1 \in \mathfrak{L}'$. Considérons l'ensemble des f bornées ≥ 0 telles que $(1 - f)^+ \in \mathfrak{L}'$; il est stable par limites croissantes et décroissantes, et contient $\mathcal{B}$ (si $f \in \mathcal{B}$, $\text{Inf}(f, 1) \in \mathcal{B}$, donc $1 - \text{Inf}(f, 1) = (1 - f)^+ \in \mathcal{B}$); donc il contient $\mathfrak{L}'$. Ainsi $1 \in \mathfrak{L}'$, et $f \in \mathfrak{L}'$, $f \leq 1$, entraîne $1 - f \in \mathfrak{L}'$. Donc $\mathfrak{L}'$ a toutes les propriétés indiquées dans le lemme B, donc contient toute la tribu engendrée par $\mathcal{B}$, et $\mathfrak{L}$ la contient aussi.

Remarque. Soient Y compact métrisable, D un ensemble dénombrable total de $C^+(Y)$ (on sait que de tels ensembles existent), ayant toutes les propriétés de stabilité de 2. Alors D engendre la tribu borélienne de Y [1]. Ainsi pour $\mathcal{B} = D$ ou $C^+(Y)$, $\mathfrak{L}$ contient la tribu des fonctions boréliennes ≥ 0 bornées sur Y .

Lemme C bis. On a le même énoncé que C, en remplaçant partout “borné ≥ 0 ” par “compris entre 0 et 1”, kf par $\text{Inf}(kf, 1)$, $f + g$ par $\text{Inf}(f + g, 1)$ (dans la définition des semi-espaces vectoriels), et c par 1 dans 2’.

Même démonstration.

Lemme D. Soit Y un ensemble muni d’une tribu $\mathcal{Y}$ et d’une mesure ν σ -finie sur $\mathcal{Y}$; on suppose $\mathcal{Y}$ ν -dénombrablement engendrée. Soit X un ensemble muni d’une tribu $\mathcal{X}$ et d’une mesure μ sur $\mathcal{X}$. Soit P une propriété relative aux $B \in \mathcal{Y}$ et aux $x \in X$, ayant les 5 propriétés suivantes:

- 1) Si B_1 et $B_2 \in \mathcal{Y}$ sont disjointes, $P(B_1, x)$ et $P(B_2, x)$ entraînent $P(B_1 \cup B_2, x)$;
- 2) Si B_n est une suite croissante de parties éléments de $\mathcal{Y}$, et x un point, si $P(B_n, x)$ pour tout n , alors $P(\bigcup_n B_n, x)$;

[1] C’est classique; c’est un cas particulier du théorème de Fernique, SCHWARTZ [1], page 108, lemme 18.

- 3) Pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $P(B, x)$ est vérifiée pour μ -presque tout $x \in X$;
- 4) Si N est ν -négligeable, alors, pour μ -presque tout $x \in X$, on a $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$, contenu dans N ;
- 5') Soit $C \in \mathcal{Y}$, tel que $\nu(C) < +\infty$. Alors, pour μ -presque tout x , et tout $B \in \mathcal{Y} \cap C$, $P(B, x)$ entraîne $P(C \setminus B, x)$, ou
- 5'') Soit $C \in \mathcal{Y}$, tel que $\nu(C) < +\infty$. Pour μ -presque tout x , pour toute suite décroissante $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{Y} \cap C$, $P(B_n, x)$ pour tout n implique $P(\bigcap_n B_n, x)$.
- Alors, pour μ -presque tout x , on a $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$.

Démonstration. Comme 2 et 5' entraînent 5'', il suffit de montrer le résultat avec les hypothèses 1, 2, 3, 4 et 5''.

Puisque $\mathcal{Y}$ est ν -dénombrablement engendrée, il existe $Y' \subset Y$, $Y' \in \mathcal{Y}$, portant ν , tel que $Y' \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$ soit dénombrablement engendrée. Ensuite ν est σ -finie; on peut donc écrire $Y' = \bigcup_m Y_m$, réunion d'une suite de parties disjointes, $Y_m \in \mathcal{Y}$, et $\nu(Y_m) < +\infty$. Soit alors $\mathcal{B}$ un ensemble dénombrable d'éléments de $\mathcal{Y}$, tel que $\mathcal{B} \cap Y'$ engendre $\mathcal{Y}'$; on peut toujours supposer $\mathcal{B}$ stable par complémentation et par réunions et intersections finies, et $Y' \in \mathcal{B}$, $Y_m \in \mathcal{B}$ pour tout m .

Soit alors $X'_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des x tels que $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$; comme $\mathcal{B}$ est dénombrable, $X'_{\mathcal{B}}$ porte μ , d'après la propriété 3. Ensuite il existe un $X'' \subset X'_{\mathcal{B}}$, portant μ , tel que, pour tout $x \in X''$, on ait $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y} \cap \mathbb{C}Y'$, d'après la propriété 4. Ensuite, pour tout m , il existe $X_m \subset X''$, portant μ , tel que, pour $x \in X_m$, la propriété $P(B, x)$, relative à $B \in \mathcal{Y} \cap Y_m$, soit stable par intersections des suites décroissantes, d'après 5''.

Alors $\tilde{X} = \bigcap_m X_m$ porte μ . Nous choisirons désormais $x \in \tilde{X}$, et montrerons que l'on a $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$.

Soit $\mathcal{Q}_{x,m}$ l'ensemble des $B \in Y_m \cap \mathcal{Y}$ tels que $P(B, x)$. Cet ensemble contient $\mathcal{B} \cap Y_m$, par hypothèse. Puis $\mathcal{Q}_{x,m}$ est stable par passage à la réunion des suites croissantes, par la propriété 2, et par intersections des suites décroissantes, puisque $x \in X_m$. Donc, par le lemme A, $\mathcal{Q}_{x,m}$ contient toute la tribu de Y_m engendrée par $\mathcal{B} \cap Y_m$, c.à. d. $\mathcal{Y} \cap Y_m$. Par les propriétés 1 et 2, on a aussi

$P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}' = Y' \cap \mathcal{Y}$ et comme on a déjà $P(B, x)$ pour $B \in \mathbb{C}Y' \cap \mathcal{Y}$, on a aussi $P(B, x)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$, par la propriété 1, cqfd.

Définition E. Soit Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$. On appelle ensemble déterminant la donnée: d'un élément $Y' \in \mathcal{Y}$, d'une suite $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{Y}$, disjoints, de réunion Y' , et d'un ensemble $\mathcal{B}$ dénombrable d'éléments de $\mathcal{Y}$, stable par réunions et intersections finies et par complémentation, $Y_m \in \mathcal{B}$ pour tout m , $Y' \in \mathcal{B}$, et tel que $\mathcal{B} \cap Y'$ engendre la tribu $\mathcal{Y} \cap Y'$. On l'abrégera très abusivement par $\mathcal{B}$, au lieu de $(Y', (Y_m)_{m \in \mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

On notera par $M_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, portées par Y' , pour lesquelles $\nu(Y_m) < +\infty$ pour tout m . On appellera $\mathcal{B}$ -mesures des éléments de $M_{\mathcal{B}}$. On appellera ensemble ν -déterminant un ensemble déterminant $\mathcal{B}$ tel que $\nu \in M_{\mathcal{B}}$; il existe un ensemble ν -déterminant, si et seulement si ν est σ -finie et $\mathcal{Y}$ est ν -dénombrablement engendrée. On munira $M_{\mathcal{B}}$ de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions numériques $\nu \rightarrow \nu(B)$, pour $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$: on l'appellera la structure uniforme $\mathcal{B}$ -étroite.

Lemme F. Soient Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, ${}_1\nu$ et ${}_2\nu$ deux mesures σ -finies sur $(Y, \mathcal{Y})$, telles que $\mathcal{Y}$ soit ${}_1\nu$ -dénombrablement engendrée. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble ${}_1\nu$ -déterminant. Si pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a ${}_1\nu(B) \geq {}_2\nu(B)$, alors ${}_1\nu \geq {}_2\nu$.

Démonstration. L'ensemble des $B \in Y_m \cap \mathcal{Y}$ pour lesquels ${}_1\nu(B) \geq {}_2\nu(B)$ est stable par passage à la réunion des suites croissantes, et par passage à l'intersection des suites décroissantes parce que les mesures des Y_m sont finies (pour ${}_1\nu$ donc pour ${}_2\nu$), et il contient $\mathcal{B} \cap Y_m$, donc $\mathcal{Y} \cap Y_m$ par le lemme A. On a donc ${}_1\nu(B) \geq {}_2\nu(B)$ pour tout $B \in Y_m \cap \mathcal{Y}$, donc pour tout $B \in Y' \cap \mathcal{Y}$ par addition dénombrable, donc pour tout $B \in \mathcal{Y}$ puisque ${}_1\nu(\mathbb{C}Y') = {}_2\nu(\mathbb{C}Y') = 0$, cqfd.

Remarque. $\mathcal{B}$ est aussi ${}_2\nu$ -déterminant. Inversement, si l'on sait que $(Y', (Y_m)_{m \in \mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est à la fois ${}_1\nu$ -déterminant et ${}_2\nu$ -déterminant, il suffit de supposer ${}_1\nu(B) \geq {}_2\nu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, pour avoir la même conclusion ${}_1\nu \geq {}_2\nu$.

Proposition G. Soient Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, $\mathcal{B}$ un ensemble déterminant. Alors $M_{\mathcal{B}}$ est métrisable séparable. L'ensemble des $({}_1v, {}_2v)$ pour lesquelles ${}_1v \geq {}_2v$, est fermé dans $M_{\mathcal{B}} \times M_{\mathcal{B}}$. Une application $s \rightarrow v_s$, d'un ensemble S muni d'une tribu $\mathcal{S}$, dans $M_{\mathcal{B}}$, appartient à la tribu $\mathcal{S}$, si et seulement si, pour tout m , pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $s \rightarrow v_s(B)$ appartient à $\mathcal{S}$; ou si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $s \rightarrow v_s(B)$ appartient à $\mathcal{S}$. En d'autres termes, la tribu borélienne $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ de $M_{\mathcal{B}}$ est la tribu engendrée par les fonctions $v \rightarrow v(B)$, $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$; ou par les fonctions $v \rightarrow v(B)$, $B \in \mathcal{Y}$. Cette dernière génération montre que, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux ensembles déterminants pour lesquels les ensembles $M_{\mathcal{B}_1}$ et $M_{\mathcal{B}_2}$ coïncident, les topologies $M_{\mathcal{B}_1}$ et $M_{\mathcal{B}_2}$ sont en général distinctes, mais les tribus boréliennes correspondantes coïncident.

Démonstration. Les applications $v \rightarrow v(B)$, $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, définissent une application de $M_{\mathcal{B}}$ dans un espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, métrisable séparable. Cette application est injective d'après le lemme *F*, donc permet d'identifier $M_{\mathcal{B}}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et la structure uniforme est justement la structure induite, par définition, donc elle est métrisable séparable. Et le lemme *F* montre aussi que ${}_1v \geq {}_2v$ est entraîné par ${}_1v(B) \geq {}_2v(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, donc l'ensemble des $({}_1v, {}_2v) \in M_{\mathcal{B}} \times M_{\mathcal{B}}$ vérifiant ${}_1v \geq {}_2v$ est fermé. Une application $s \rightarrow v_s$ de S dans $M_{\mathcal{B}}$ est alors bien dans $\mathcal{S}$, si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, $s \rightarrow v_s(B)$ est dans $\mathcal{S}$.

Mais alors l'ensemble $\mathcal{Q}_m$ des $B \in \mathcal{Y} \cap Y_m$ pour lesquels $s \rightarrow v_s(B)$ est dans $\mathcal{S}$, est stable par passage à la limite des suites croissantes et complémentation à Y_m , et contient $\mathcal{B} \cap Y_m$, donc c'est $\mathcal{Y} \cap Y_m$ par le lemme *A*; donc $s \rightarrow v_s(B)$ est encore dans $\mathcal{S}$ pour tout $B \in \mathcal{Y} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, donc pour tout $B \in \mathcal{Y} \cap Y'$, donc pour tout $B \in \mathcal{Y}$, cqfd.

§1. Intégration des mesures

Définition (1, 1). Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$. Soit X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{X}$, et soit μ une mesure ≥ 0 sur $\mathcal{X}$. Une famille $(\lambda_x)_{x \in X}$ de mesures ≥ 0 sur Ω , indexée par X , est dite appartenir à la tribu $\mathcal{X}$, si, pour tout $B \in \mathcal{O}$, la fonction $\geq 0: x \rightarrow \lambda_x(B)$, appartient à $\mathcal{X}$; elle est

dite μ -mesurable, si elle appartient à la tribu μ -mesurable $\hat{\mathcal{X}}_\mu$, complétée de $\mathcal{X}$ par rapport à μ , et, dans ce cas, on peut se contenter de supposer λ_x définie pour μ -presque tout x . Supposons désormais $x \rightarrow \lambda_x$ définie μ -presque partout et μ -mesurable, et posons:

$$\lambda(B) = \int_x^* \lambda_x(B) d\mu(x);$$

on voit aussitôt que $\lambda: B \rightarrow \lambda(B)$ est dénombrablement additive sur $\mathcal{O}$, car si $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, réunion disjointe, on a:

$$\lambda(B) = \int_x^* \lambda_x(B) d\mu(x) = \sum_n \int_x^* \lambda_x(B_n) d\mu(x) = \sum_n \lambda(B_n),$$

le deuxième signe égal résultant de ce que les fonctions $x \rightarrow \lambda_x(B_n)$ sont μ -mesurables. On appelle λ l'intégrale des λ_x par rapport à μ , et on pose

$$\lambda = \int_x^* \lambda_x d\mu(x).$$

Proposition (1, 1 bis). Si λ est σ -finie, λ_x est σ -finie pour μ -presque tout x ; si $\mathcal{O}$ est λ -dénumérablement engendrée, $\mathcal{O}$ est λ_x -dénumérablement engendrée pour μ -presque tout x ; si $\mathcal{B}$ est un ensemble λ -déterminant de parties de Ω , il est λ_x -déterminant pour μ -presque tout x . 2) Si $\mathcal{B}$ est un ensemble déterminant, et si $\lambda_x \in M_{\mathcal{B}}$ pour tout x , il revient au même de dire que $x \rightarrow \lambda_x$ appartient à $\mathcal{X}$, au sens de la définition (1, 1), ou en tant qu'application de X dans l'espace topologique $M_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. 1) résulte immédiatement de ce que, si $B \in \mathcal{O}$, $\lambda(B) = 0$ entraîne $\lambda_x(B) = 0$ pour μ -presque tout x , et $\lambda(B) < +\infty$ entraîne $\lambda_x(B) < +\infty$ pour μ -presque tout x . 2) résulte de la proposition G.

Dans toute la suite, sans que ce soit mentionné explicitement, λ sera supposée σ -finie.

Lemme (1.2). *Pour toute fonction $f \geq 0$ (à valeurs finies ou non),*

$$\lambda^*(f) \geq \int_X \lambda_x^*(f) d\mu(x).$$

Démonstration. C'est évident si f est dénombrablement $\mathcal{O}$ -étagée, avec $=$ au lieu de $\geq$, d'où le résultat pour f arbitraire en se rappelant que l'intégrale supérieure de f est la borne inférieure de celle des fonctions dénombrablement étagées qui la majorent.

Lemme (1.3). *Si $f \geq 0$ est λ -négligeable (resp. mesurable), alors, pour μ -presque tout $x \in X$, elle est λ_x -négligeable (resp. mesurable).*

Démonstration. La première affirmation résulte directement du lemme précédent; la deuxième de ce que, si f est λ -mesurable et λ σ -finie, f est la somme d'une fonction f' appartenant à $\mathcal{O}$, et d'une fonction f'' λ -négligeable, donc λ_x -négligeable pour μ -presque tout x .

Lemme (1.4). *Si $f \geq 0$ est λ -mesurable, l'inégalité du lemme (1,2) devient une égalité, et $x \mapsto \lambda_x^*(f)$ est μ -mesurable.*

Si f est dans $\mathcal{O}$, et si $(\lambda_x)_{x \in X}$ est dans $\mathcal{X}$, $x \mapsto \lambda_x^(f)$ est dans $\mathcal{X}$.*

Si $f \geq 0$ est universellement presque borélienne (resp. si f est universellement mesurable et si toutes les λ_x sont de masse $\leq M$ fixe), et si $x \mapsto \lambda_x$ est dans $\mathcal{X}$, alors $x \mapsto \lambda_x^(f)$ est universellement presque borélienne (resp. universellement mesurable).*

Démonstration. La deuxième affirmation résulte de ce que f est limite d'une suite croissante de fonctions dénombrablement $\mathcal{O}$ -étagées, et de l'application du théorème de Fatou.

Ce résultat, bien entendu, ne suppose pas λ σ -finie, et d'ailleurs ni λ ni μ n'y interviennent.

Pour la première partie, on écrit encore $f = f' + f''$, comme dans le lemme précédent; $x \mapsto \lambda_x^*(f')$ est μ -mesurable, par application du résultat antérieur à $\hat{\mathcal{X}}_\mu$ au lieu de $\mathcal{X}$, et $x \mapsto \lambda_x^*(f'')$ est μ -négligeable d'après le lemme (1,3); donc $x \mapsto \lambda_x^*(f)$ est μ -mesurable.

L'égalité (1,2), au lieu de l'inégalité, est vraie, nous l'avons dit, pour une fonction dénombrablement étagée, donc, par Fatou, pour f' dans $\mathcal{O}$, donc pour f λ -mesurable, puisqu'alors $x \rightarrow \lambda_x^*(f')$ est μ -négligeable.

La fonction f est dite universellement presque borélienne, si, quelle que soit la mesure λ sur $(\Omega, \mathcal{O})$, il existe $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' \in \mathcal{O}$, portant λ , tel que la restriction de f à Ω' soit dans $\Omega' \cap \mathcal{O}$. Cela entraîne que f soit universellement mesurable; la réciproque n'est pas nécessairement vraie, sauf relativement à des mesures λ σ -finies.

Supposons donc f universellement presque borélienne et $x \mapsto \lambda_x$ dans $\mathcal{X}$. Soit μ une mesure quelconque sur $(X, \mathcal{X})$, et considérons $\lambda = \int_X^* d\mu(x)$.

(Notons que λ n'est pas nécessairement σ -finie, donc le lemme (1,3) est inapplicable). Alors f est λ -presque borélienne, donc il existe $\Omega' \in \mathcal{O}$ portant λ tel que la restriction de f à Ω' soit dans $\Omega' \cap \mathcal{O}$; pour μ -presque tout x , $\lambda_x(\mathbb{G}\Omega') = 0$, donc $\lambda_x^*(f) = \lambda_x^*(\chi_{\Omega'} f)$; or $x \mapsto \lambda_x^*(\chi_{\Omega'} f)$ est dans $\mathcal{X}$, donc $x \mapsto \lambda_x^*(f)$ est μ -presque partout égale à une fonction de $\mathcal{X}$, donc est μ -presque borélienne; donc elle est bien universellement presque borélienne. Si maintenant on a une majoration $\lambda_x(1) \leq M$ pour tout x , et si f est universellement mesurable, on voit que, si μ est une mesure finie, $\lambda = \int_X^* \lambda_x d\mu(x)$ est aussi une

mesure finie, donc on peut appliquer le lemme (1,3); alors, f étant λ -mesurable, $x \mapsto \lambda_x^*(f)$ est μ -mesurable. Si maintenant μ est quelconque, de toute façon $x \mapsto \lambda_x^*(f)$ est mesurable pour $\chi_A \mu$, où A est quelconque μ -intégrable, et cela signifie qu'elle est μ -mesurable; elle est donc universellement mesurable

Lemme (1,5). *Soit f une fonction sur Ω , à valeurs dans un Banach F , et λ -intégrable. Alors, pour μ -presque tout x , elle est λ_x -intégrable, $x \mapsto \lambda_x(f)$ est μ -intégrable, et l'on a la formule d'intégration de Fubini:*

$$\lambda(f) = \int_X \lambda_x(f) d\mu(x) = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} f(\omega) d\lambda_x(\omega).$$

Démonstration. On peut trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur Ω à valeurs dans F , simplement étagées à étages de λ -mesures finie, convergent

vers f pour n infini sur un ensemble Ω' portant λ , et vérifiant une majoration $\|f_n\| \leq g, \lambda^*(g) < +\infty$.

Pour μ -presque tout x , les étages de f sont de λ_x -mesure finie, et la formule de Fubini est vraie pour tout f_n , par définition même de λ . Mais, pour μ -presque tout x , Ω' porte λ_x (lemme (1, 3)) et $\lambda_x^*(g) < +\infty$ (lemme (1, 2)), donc, par Lebesgue, f est λ_x -intégrable; et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_x(f_n) = \lambda_x(f)$. Comme ensuite

$\|\lambda_x(f_n)\| \leq \lambda_x(g)$, et que (lemme (1, 2)) $\int_x^* \lambda_x^*(g) d\mu(x) < +\infty$, de nouveau

le théorème de Lebesgue permet d'affirmer que $x \rightarrow \lambda_x(f)$ est μ -intégrable,

et que $\int_x \lambda_x(f) d\mu(x)$ est la limite de $\int_x \lambda_x(f_n) d\mu(x)$ pour n infini. Comme

aussi $\lambda(f)$ est la limite des $\lambda(f_n)$, de Fubini pour f_n on déduit Fubini pour f , cqfd.

Lemme (1,6). Soit Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$. Soit f une application de Ω dans Y , λ -presque sûrement $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable; pour μ -presque tout x , elle est λ_x -presque sûrement $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable.

Démonstration. Soit $\Omega' \in \mathcal{O}$, portant λ , tel que la restriction de f à Ω' soit $(\mathcal{O} \cap \Omega', \mathcal{Y})$ -mesurable. Comme Ω' porte λ_x pour μ -presque tout x , le résultat est évident.

(1,7) Cas de mesures de Radon

Supposons que Ω soit un espace topologique, et que les mesures abstraites λ_x sur $\mathcal{O}$ soient de Radon, c. à d. localement finies et intérieurement régulières. Même dans des cas simples et avec des hypothèses très fortes, λ n'est pas nécessairement de Radon [1].

Si on le désire, on devra le mettre dans les hypothèses: on supposera λ de Radon σ -finie. La mesure λ sur $\mathcal{O}$ est, on le sait, λ^* ; mais alors, comme elle est σ -finie, on sait que la fonction $(\lambda^*)^*$ associée sur $\mathfrak{B}\Omega$ est aussi λ^* [2]. Donc

[1] Voir un contre-exemple à (8, 1).

[2] Voir SCHWARTZ [1], pages 16 et 17.

tout ce qui a été dit avec λ^*, λ_x^* , subsiste en remplaçant λ^*, λ_x^* , par $\lambda^\bullet, \lambda_x^\bullet$ (mais sans changer les expressions : intégrable, négligeable, etc..., qui, pour une mesure de Radon, s'appliquent justement aux $\lambda^\bullet, \lambda_x^\bullet$). On a de plus la propriété triviale suivante :

Lemme (1,8). *Soit Y un espace topologique, et f une application λ -mesurable-Lusin de Ω dans Y . Alors, pour μ -presque tout x , f est λ_x -mesurable-Lusin de Ω dans Y .*

Démonstration. Ω est réunion d'une suite de compacts K_n , tels que la restriction de f à chaque K_n soit continue, et d'une partie N λ -négligeable ($\lambda^\bullet(N) = 0$). Mais alors N est λ_x -négligeable pour μ -presque tout x ($\lambda_x^\bullet(N) = 0$), d'où le résultat.

Supposons maintenant μ de Radon sur un espace topologique X . On peut alors, à partir des λ_x , définir deux intégrales de mesures : $\int_x^* \lambda_x d\mu(x) \geq \int_x \lambda_x d\mu(x)$ (elles sont égales si μ est modérée). La première possèdera toutes les propriétés antérieures, en utilisant partout μ^* (et en remplaçant alors μ -négligeable, μ -intégrable, par μ -strictement négligeable, μ -strictement intégrable).

Mais la deuxième aura aussi toutes les mêmes propriétés, en remplaçant partout μ^* par $\mu^\bullet$ (et en gardant les mêmes expressions qu'avant); il n'y a, pour s'en convaincre, qu'à refaire toutes les mêmes démonstrations, en se rappelant que $\mu^\bullet$ vérifie Fatou comme μ et qu'il y a un théorème de Lebesgue aussi bien pour l'intégrabilité que pour l'intégrabilité stricte. Voici un exemple de deux énoncés valables (le deuxième étant le plus intéressant pour nous) : si f est $\left(\int_x^* \lambda_x d\mu(x)\right)$ -négligeable, elle est λ_x -négligeable pour μ -strictement presque tout x ; si elle est $\left(\int_x \lambda_x d\mu(x)\right)$ -négligeable, elle est λ_x -négligeable pour μ -presque tout x .

Bien entendu, on pourra supposer à la fois λ et μ de Radon, sans modifications nouvelles.

On peut résumer tout ce qui précède en un théorème:

Théorème (1,9). Soient Ω, X deux ensembles, munis de tribus $\mathcal{O}, \mathcal{X}$, et soit μ une mesure ≥ 0 sur $\mathcal{X}$. Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une famille de mesures ≥ 0 sur $\mathcal{O}$, indexée par X , μ -mesurable (i.e. pour tout $B \in \mathcal{O}$, $x \rightarrow \lambda_x(B)$ est μ -mesurable). On suppose de plus que Ω est réunion d'une suite de parties Ω_n telle que $\int_X^* \lambda_x(\Omega_n) d\mu(x) < +\infty$.

On appelle intégrale des λ_x par rapport à μ la mesure

$$\lambda = \int_X^* \lambda_x d\mu(x), \quad \lambda(B) = \int_X^* \lambda_x(B) d\mu(x) \text{ pour } B \in \mathcal{O}.$$

Elle est σ -finie, et λ_x est σ -finie pour μ -presque tout x .

Si f est une fonction ≥ 0 sur Ω , on a

$$\lambda^*(f) \geq \int_X^* \lambda_x^*(f) d\mu(x),$$

l'inégalité devenant une égalité si f est λ -mesurable, et alors $x \rightarrow \lambda_x^*(f)$ est μ -mesurable.

Si $\lambda^*(f) = 0$ (resp. $< +\infty$), alors $\lambda_x^*(f) = 0$ (resp. $< +\infty$) pour μ -presque tout x .

Si f est une fonction sur Ω à valeurs dans un Banach F , λ -intégrable, alors elle est λ_x -intégrable pour μ -presque tout x , $x \rightarrow \lambda_x(f)$ est μ -intégrable, et l'on a la formule de Fubini

$$\lambda(f) = \int_X \lambda_x(f) d\mu(x), \text{ ou } \int_{\Omega} f(\omega) d\lambda(\omega) = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} f(\omega) d\lambda_x(\omega).$$

Si f est une fonction sur Ω à valeurs dans un ensemble Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$. λ -presque sûrement $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable, elle est λ_x -presque sûrement $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable pour μ -presque tout x . Tout ceci subsiste sans modification si Ω

est un espace topologique et les λ_x, λ , toutes de Radon, en remplaçant partout λ_x^*, λ^* , par $\lambda_x^\circ, \lambda^\circ$; en outre, si f est une application de Ω dans un espace topologique, Y, λ -mesurable-Lusin, f est λ_x -mesurable-Lusin pour μ -presque tout x . Tout ceci subsiste également si μ est une mesure de Radon sur un espace topologique X en conservant partout μ^* ou en le remplaçant partout par μ° .

Corollaire (1,10). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega, \lambda; F)$, convergeant dans cet espace vers une limite f . On peut en extraire une suite partielle, qui converge en norme L^1 et presque partout, relativement à λ et à μ -presque toute λ_x .

Démonstration. On peut extraire une suite partielle f'_n , qui converge vers f sur un Ω' portant λ , et vérifie $\|f'_n\| \leq g$, $\lambda^*(g) < +\infty$. Alors Ω' porte λ_x pour μ -presque tout x , et $\lambda_x(g) < +\infty$ pour μ -presque tout x .

Transformations usuelles

Proposition (1,11). (évidente). Soit $\lambda = \int_x^* \lambda_x d\mu(x)$, λ σ -finie.

1) Soit Ω' une partie λ -mesurable de Ω . Elle est alors λ_x -mesurable pour μ -presque tout x , et on a, pour les mesures induites sur Ω' , la formule (où $\lambda_{\Omega'}$ est σ -finie):

$$\lambda_{\Omega'} = \int_x^* (\lambda_x)_{\Omega'} d\mu(x).$$

2) Soit p une fonction ≥ 0 sur Ω , λ -mesurable; elle est alors λ -mesurable pour μ -presque tout x , et on a la formule de multiplication des mesures par p :

$$p\lambda = \int_x^* (p\lambda_x) d\mu(x).$$

3) Soit h une application λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable de Ω dans un ensemble Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$; alors elle est λ_x -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{Y})$ -mesurable pour μ -presque tout x , et on a la formule suivante pour les mesures images:

$$h(\lambda) = \int_x^* (h(\lambda_x)) d\mu(x).$$

Remarque. Si l'on désire des propriétés particulières, il faudra généralement les ajouter dans les hypothèses. Par exemple on sait que $p \lambda$ n'a aucune raison d'être σ -finie; si on le suppose, alors $p \lambda_x$ sera σ -finie pour μ -presque tout x . De même $h(\lambda)$ n'est pas forcément σ -finie. Si λ et les λ_x sont de Radon sur Ω topologique, et h λ -propre, on sait que h est λ_x -mesurable pour μ -presque tout x , mais pas forcément λ_x -propre; il faudra le mettre dans les hypothèses si l'on désire que $h(\lambda)$ soit l'intégrale des mesures de Radon $h(\lambda_x)$; d'ailleurs, dans ce cas, si p est localement λ -intégrable, il n'est pas sûr qu'elle soit localement λ_x -intégrable pour μ -presque tout x , et il faudra aussi le mettre dans les hypothèses si l'on désire que la mesure de Radon $p \lambda$ soit l'intégrale des mesures de Radon $p \lambda_x$ [1].

(1,12) Intégrales superposées. Soit maintenant $\omega \rightarrow v_\omega$ une fonction sur Ω , à valeurs dans l'espace des mesures ≥ 0 sur un ensemble Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$. Supposons là λ -mesurable, de sorte qu'on peut considérer l'intégrale $v = \int_\Omega^* v_\omega d\lambda(\omega)$, mesure ≥ 0 sur $\mathcal{Y}$, que nous supposons σ -finie. Il est alors naturel de se demander si $\omega \rightarrow v_\omega$ est λ_x -mesurable pour μ -presque tout x , et si l'on a une formule d'intervention de Fubini analogue à celle du lemme (1,5):

$$v = \int_\Omega^* v_\omega d\lambda(\omega) = \int_x^* d\mu(x) \int_\Omega^* v_\omega d\lambda_x(\omega).$$

Lemme (1,12 bis). Soit μ une mesure sur X . Soit $\omega \rightarrow v_\omega$ une fonction sur $(\Omega, \mathcal{O})$ à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, définie λ -presque partout et λ -mesura-

[1] On trouvera tout cela dans SCHATZ [1], part I.

ble. Si $v = \int_{\Omega} v_{\omega} d\lambda(\omega)$ est σ -finie, et si $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée, $\omega \rightarrow v_{\omega}$ est λ -presque partout égale à une fonction $\omega \rightarrow \overline{v_{\omega}}$, partout définie et appartenant à la tribu $\mathcal{O}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble v -déterminant. L'application $\omega \rightarrow v_{\omega}$ de Ω dans $M_{\mathcal{B}}$ est définie λ -presque partout, et elle est $(\lambda, \mathcal{M})$ -mesurable, où $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne de $M_{\mathcal{B}}$ (proposition G). Comme $\mathcal{M}$ est dénombrablement engendrée, puisque $M_{\mathcal{B}}$ est métrisable séparable, on sait (corollaire A') qu'alors $\omega \rightarrow v_{\omega}$ est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ -mesurable, c.à d. λ -presque partout égale à une application $\omega \rightarrow \overline{v_{\omega}}$, partout définie, et $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ -mesurable, c. à d. appartenant à $\mathcal{O}$ encore en vertu de la prop. G.

Lemme (1,13). Si $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée, $\omega \rightarrow v_{\omega}$ est λ_x -mesurable pour μ -presque tout $x \in X$.

Démonstration. Soit $\omega \rightarrow \overline{v_{\omega}}$, λ -presque partout égale à $\omega \rightarrow v_{\omega}$, et appartenant à $\mathcal{O}$, d'après le lemme précédent; alors, pour μ -presque tout x , $\omega \rightarrow \overline{v_{\omega}}$ et $\omega \rightarrow v_{\omega}$ sont λ_x -presque partout égales, la première est dans $\mathcal{O}$, donc la deuxième est λ_x -mesurable, cqfd.

Lemme (1,14). Supposons que $\omega \rightarrow v_{\omega}$ soit λ -mesurable et λ_x -mesurable pour μ -presque tout x . Alors $\theta_x = \int_x^* v_{\omega} d\lambda_x(\omega)$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$, σ -finie pour μ -presque tout x ; la fonction à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$: $x \rightarrow \theta_x$, est μ -mesurable, et on a la formule de Fubini

$$v = \int_x^* \theta_x d\mu(x) \text{ ou } \int_{\Omega}^* v_{\omega} d\lambda(\omega) = \int_x^* d\mu(x) \int_{\Omega}^* v_{\omega} d\lambda_x(\omega).$$

Démonstration. Le fait que $x \rightarrow \theta_x$ soit μ -mesurable et que $v = \int_x^* \theta_x d\mu(x)$ s'écrit: pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $x \rightarrow \int_{\Omega}^* v_{\omega}(B) d\lambda_x(\omega)$ est μ -mesurable et

$$\int_{\Omega}^* v_{\omega}(B) d\lambda(\omega) = \int_X^* d\mu(x) \int_{\Omega}^* v_{\omega}(B) d\lambda_x(\omega).$$

Or ceci n'est autre que le lemme (1,4), appliqué à la fonction λ -mesurable $f: \omega \rightarrow v_{\omega}(B)$. Si on prend $B = Y_m \in \mathcal{Y}$ avec $Y = \bigcup_m Y_m$, $v(Y_m) < +\infty$, on en déduit que $\theta_x(Y_m) < +\infty$ pour μ -presque tout x , donc θ_x est σ -finie pour μ -presque tout x .

Lemme (1,15). *Dans les conditions du lemme (1,14), soit f une fonction sur Y , à valeurs dans un Banach F , v -intégrable; alors, pour μ -presque tout x , pour λ_x -presque tout ω , f est v_{ω} -intégrable, la fonction $g: \omega \rightarrow v_{\omega}(f)$ est λ_x -intégrable, la fonction $x \rightarrow \lambda_x(g)$ est μ -intégrable, et on a la formule de Fubini:*

$$v(f) = \int_Y f(y) dv(y) = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} d\lambda_x(\omega) \int_Y f(y) dv_{\omega}(y).$$

Le même résultat subsiste pour $f \geq 0$, en remplaçant partout intégrable par mesurable, $\int$ par $\int^*$.

Démonstration. C'est évident, il n'y a que la difficulté de l'écrire! Il existe Ω' , portant λ tel que f soit v_{ω} -intégrable pour tout $\omega \in \Omega'$, que $g: \omega \rightarrow v_{\omega}(f)$ soit λ intégrable, et:

$$v(f) = \int_{\Omega}^* v_{\omega}(f) d\lambda(\omega) = \int_{\Omega}^* g(\omega) d\lambda(\omega) = \lambda(g).$$

Mais alors il existe $X' \subset X$, portant μ , tel que, pour $x \in X'$, Ω' porte λ_x , que g soit λ_x -intégrable, que $x \rightarrow \lambda_x(g)$ soit μ -intégrable, et que $\lambda(g) = \int_X^* d\mu(x) \int_{\Omega}^* g(\omega) d\lambda_x(\omega)$, ce qui est la formule cherchée.

Lemme (1,16). *Plaçons-nous dans les conditions du lemme (1,14). Si f est une application de Y dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, v -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable, alors, pour μ -presque tout x , pour λ_x -presque tout ω , f est v_ω -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable.*

Si Y et Z sont des espaces topologiques, v et les v_ω de Radon et si f est une application v -mesurable-Lusin de Y dans Z , alors, pour μ -presque tout x , pour λ_x -presque tout ω , f est v_ω -mesurable-Lusin de Y dans Z . Evident.

Tout ceci peut se résumer en un théorème unique (en évitant de répéter inutilement le lemme (1,16)):

Proposition (1,17). *Plaçons-nous dans les conditions du théorème (1,9). Soient Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, $(v_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, λ -mesurable, d'intégrale $v = \int_{\Omega}^* v_\omega d\lambda(\omega)$ σ -finie.*

Si, pour μ -presque tout x , $(v_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est λ_x -mesurable (ce qui se produira toujours si $\mathcal{Y}$ est v -dénumérablement engendrée, ou si $(v_\omega)_{\omega \in \Omega}$ appartient à $\mathcal{O}$), alors $\theta_x = \int_{\Omega}^ v_\omega d\lambda_x(\omega)$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$, σ -finie pour μ -presque tout x , et on a la formule d'intégrales superposées*

$$v = \int_{\Omega}^* v_\omega d\lambda(\omega) = \int_X^* d\mu(x) \int_{\Omega}^* v_\omega d\lambda_x(\omega).$$

Si en outre f est une fonction sur Y , à valeurs dans un Banach F et v -intégrable, ou ≥ 0 et v -mesurable, on a la formule d'intégrales superposées:

$$v(f) = \int_Y f(y) dv(y) = \int_X^* d\mu(x) \int_{\Omega} d\lambda_x(\omega) \int_Y f(y) dv_\omega(y).$$

Toutes les fois que les mesures considérées sont de Radon (v et les v_y , ou λ et les λ_x , ou μ) les résultats sont valables sans changer la terminologie, en remplaçant $\int^$ par $\int$.*

* * *

2. Espérance conditionnelle d'une fonction à valeurs mesures et désintégration d'une mesure

Définition (2,0). Dans ce paragraphe, Ω sera un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$ et d'une mesure λ sur $\mathcal{O}$, X sera un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{X}$, et p sera une application de Ω dans X , définie λ -presque partout et $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable. La mesure image $\mu = p(\lambda)$ sera supposée σ -finie, donc λ sera aussi σ -finie sur Ω .

Soit f une fonction définie λ -presque partout sur Ω , à valeurs dans un Banach F et λ -intégrable, ou à valeurs ≥ 0 et λ -mesurable. Une fonction $f^{\mathcal{X}}[1]$ sur X , à valeurs dans F et μ -intégrable ou à valeurs ≥ 0 et μ -mesurable, partout définie, sera appelée une espérance conditionnelle de f relativement à $p, \mathcal{X}, \lambda$, si elle a les propriétés suivantes:

1) Elle appartient à la tribu $\mathcal{X}$ (si $\mathcal{X}$ est μ -complète, on pourra supposer que $f^{\mathcal{X}}$ est seulement définie μ -presque partout, $f^{\mathcal{X}}$ devant alors être seulement μ -mesurable);

2) Elle vérifie l'égalité des espérances conditionnelles: pour toute partie $A \in \mathcal{X}$, on a:

$$(2,1) \quad \int_{p^{-1}(A)} f(\omega) d\lambda(\omega) = \int_A f^{\mathcal{X}}(x) d\mu(x) \quad [2]$$

Lemme (2,1). Si f est λ -mesurable ≥ 0 , et si $f^{\mathcal{X}}$ est une espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, alors, pour toute fonction g μ -mesurable ≥ 0 , on a

$$(2,2) \quad \int_{\Omega}^* f(\omega) g(p(\omega)) d\lambda(\omega) = \int_X^* f^{\mathcal{X}}(x) g(x) d\mu(x).$$

Si en outre g est ≥ 0 et $g\mu$ σ -finie, $f^{\mathcal{X}}$ est encore espérance conditionnelle de f relativement à $p, \mathcal{X}$, et à la mesure $(g \circ p)\lambda$.

[1] L'écriture $f^{\mathcal{X}}$ est abusive; on devrait écrire $f_{\lambda}^{\mathcal{X}, p}$, et nous aurons parfois à le faire. Ces définitions, sont bien connues. Toutefois, en calcul des probabilités, λ est toujours de masse 1; c'est en fait absolument inutile.

[2] $\int$ est à remplacer par $\int^*$ dans le cas où f est λ -mesurable ≥ 0 .

Démonstration. La première affirmation est évidente si g est une combinaison linéaire finie à coefficients ≥ 0 de fonctions caractéristiques de parties appartenant à $\mathcal{X}$; par passage à la limite croissante (Fatou), c'est vrai pour $g \in \mathcal{X}$; si ensuite g est μ -mesurable, elle peut s'écrire, μ étant σ -finie, $g = g' + g''$, $g' \in \mathcal{X}$, et g'' μ -négligeable, donc $g'' \circ p$ λ -négligeable, d'où le résultat.

La seconde affirmation est évidente. Comme $f^{\mathcal{X}}$ est dans la tribu $\mathcal{X}$, il reste à vérifier que, pour toute $g' \geq 0$ μ -mesurable, on a :

$$\int_{\Omega}^* f(\omega) g'(p(\omega)) (g(p(\omega))) d\lambda(\omega) = \int_{\mathcal{X}}^* f^{\mathcal{X}}(x) g'(x) (g(x)) d\mu(x),$$

ce qui est (2.2) pour la fonction gg' .

L'égalité des espérances conditionnelles signifie exactement, pour $f \geq 0$, que $f^{\mathcal{X}} \mu$ est la mesure image $p(f\lambda)$. Ceci permet de voir immédiatement qu'il existe des espérances conditionnelles, et que deux d'entre elles sont μ -presque partout égales. [En effet $p(f\lambda)$ est une mesure sur $\mathcal{X}$, dont on voit immédiatement qu'elle est de base μ (i.e. tout ensemble μ -négligeable est $p(f\lambda)$ -négligeable), donc elle est bien de la forme $f^{\mathcal{X}} \mu$, où $f^{\mathcal{X}}$ peut être choisie dans la tribu $\mathcal{X}$, par Lebesgue-Nikodym, et d'une manière unique, à une fonction μ -négligeable près]. La μ -classe des espérances conditionnelles est donc bien déterminée; on l'appelle la *classe espérance conditionnelle* ou *l'espérance conditionnelle* de f pour p , $\mathcal{X}$; elle ne dépend que de la λ -classe de f . Le cas où f est banachique s'en déduit aisément, et on démontre facilement pour les espérances conditionnelles un ensemble de propriétés, qui sont classiques; nous les admettrons et nous contenterons de les résumer en un théorème :

Théorème (2,3). *Toute fonction f sur Ω , définie λ -presque partout, à valeurs dans un Banach F et λ -intégrable, ou ≥ 0 et λ -mesurable, a des espérances conditionnelles $f^{\mathcal{X}}$ pour p , $\mathcal{X}$, λ , et deux d'entre elles sont μ -presque partout égales. Si f est λ -intégrable, $f^{\mathcal{X}}$ est μ -intégrable, et $f \rightarrow f^{\mathcal{X}}$ est linéaire continue de $L^1(\Omega, \lambda; F)$ dans $L^1(X, \mu; F)$, de norme ≤ 1 :*

$$\|f^{\mathcal{X}}\|_{L^1(X, \mu; F)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega, \lambda; F)}.$$

On a toujours l'inégalité de la norme: $\|f^{\mathcal{X}}\|_F \leq (\|f\|_F)^{\mathcal{X}}$ λ -presque partout.

Si g est μ -mesurable réelle, et si $(g \circ p)f$ est λ -intégrable ou $gf^{\mathcal{X}}$ μ -intégrable ces deux propriétés sont vraies; dans ce cas (et dans tous les cas pour f et $g \geq 0$), on a:

$$\int_{\Omega} f(\omega) g(p(\omega)) d\lambda(\omega) = \int_{\mathcal{X}} f^{\mathcal{X}}(x) g(x) d\mu(x).$$

Si $g \geq 0$ et si $g\mu$ est σ -finie, $(g \circ p)\lambda$ a pour image $p((g \circ p)\lambda) = g\mu$, et $f^{\mathcal{X}}$ est encore espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}$, relativement à la mesure $(g \circ p)\lambda$.

Si q est une application de X dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, μ -presque partout définie et $(\mu, \mathcal{Z})$ -mesurable, et si $\nu = q(\mu) = (q \circ p)(\lambda)$ est σ -finie, $((f^{\mathcal{X}})^{\mathcal{Z}})$ espérance conditionnelle de $f^{\mathcal{X}}$ par rapport à $q, \mathcal{Z}, \mu$, est aussi espérance conditionnelle de f par rapport à $q \circ p, \mathcal{Z}, \lambda$.

(2,4) Cas d'une fonction à valeurs mesures

$\Omega, \mathcal{O}, \lambda, X, \mathcal{X}, \mu$, ayant la même signification que précédemment, soit maintenant Y un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, et soit $\omega \rightarrow v_{\omega}$ une fonction sur Ω , à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$. On la supposera définie λ -presque partout et λ -mesurable, et on posera $\nu = \int_{\Omega}^* v_{\omega} d\lambda(\omega)$. On appelle alors espérance con-

ditionnelle, de cette fonction pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, une fonction $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, ayant les propriétés suivantes;

1) Elle appartient à la tribu $\mathcal{X}$, i.e., pour tout $B \in \mathcal{O}$, $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(B)$ appartient à $\mathcal{X}$ (si $\mathcal{X}$ est μ -complète, elle doit donc être simplement μ -mesurable, et on pourra supposer $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ définie seulement μ -presque partout);

2) Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a l'égalité des espérances conditionnelles

$$\int_{p^{-1}(A)}^* v_{\omega} d\lambda(\omega) = \int_A^* v_x^{\mathcal{X}} d\mu(x).$$

Ici l'existence et l'unicité ne sont plus du tout aussi évidentes. Nous supposons toujours, sans le mentionner explicitement, $v = \int_{\Omega}^* v_{\omega} d\lambda(\omega)$ σ -finie.

Lemme (2,5) Soit $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}$. Si g est μ -mesurable ≥ 0 , on a :

$$\int_{\Omega}^* g(p(\omega)) v_{\omega} d\lambda(\omega) = \int_{\mathcal{X}}^* g(x) v_x^{\mathcal{X}} d\mu(x).$$

Si en outre $g\mu$ est σ -finie, $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ est encore espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}$ pour $p, \mathcal{X}$, relativement à la mesure $(g \circ p)\lambda$.

Démonstration. Comme le lemme (2,1).

Lemme (2,6). Soit $\omega \rightarrow v_{\omega}$ une fonction sur Ω à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, et $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ une fonction sur X à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$. Pour que la deuxième soit espérance conditionnelle de la première relativement à $p, \mathcal{X}, \lambda$, il faut et il suffit que, pour toute $f \geq 0$ appartenant à $\mathcal{Y}$, ou pour toute fonction f caractéristique d'un $B \in \mathcal{Y}$, $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(f)$ soit espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}(f)$ pour $p, \mathcal{X}, \lambda$. Si en outre $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée, et si $\mathcal{B}$ est un ensemble v -déterminant, il suffit, pour avoir la même conclusion, que $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ soit dans $\mathcal{X}$ ou que $v_x^{\mathcal{X}} \in M_{\mathcal{B}}$ pour tout x , et que, pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(B)$ soit espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}(B)$ pour $p, \mathcal{X}, \lambda$.

Démonstration. La première partie revient exactement à dire que, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(B)$ est dans $\mathcal{X}$, et que, pour tout $A \in \mathcal{X}$,

$$\int_{p^{-1}(A)}^* v_{\omega}(B) d\lambda(\omega) = \int_A^* v_x^{\mathcal{X}}(B) d\mu(x).$$

Pour la deuxième partie, on remarque que l'ensemble $\mathcal{Y}_m$ des $B \in \mathcal{Y} \cap Y_m$ pour lesquels $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(B)$ est espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}(B)$ est stable

par réunions des suites croissantes et complémentation à Y_m , et contient $\mathcal{B} \cap Y_m$, donc est $\mathcal{Y} \cap Y_m$ par le lemme A; par addition dénombrable, c'est donc encore vrai pour $B \in \mathcal{Y} \cap Y'$, mais aussi pour tout $B \in \mathcal{Y} \cap \complement Y'$, donc pour tout $B \in \mathcal{Y}$, cqfd.

Remarque. Si $f \geq 0$ est seulement λ -mesurable, $x \rightarrow (v_x^x)^*(f)$ est seulement μ -mesurable, donc est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow (v_\omega)^*(f)$ pour $p, \hat{x}_\mu, \lambda$ et non pour p, x, λ .

Théorème (2,7) (Unicité). *Si $\mathcal{Y}$ est v -dénumbrablement engendrée, deux espérances conditionnelles de $\omega \rightarrow v_\omega$ sont μ -presque partout égales.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la deuxième partie du lemme (2,6). Comme $\mathcal{B}$ est dénombrable, on voit que, si $x \rightarrow {}_1v_x^x$ et $x \rightarrow {}_2v_x^x$ sont deux espérances conditionnelles, on a, pour μ -presque tout x , ${}_1v_x^x(B) = {}_2v_x^x(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$. Mais on sait que, pour μ -presque tout x , $\mathcal{B}$ est ${}_1v_x^x$ -déterminant et ${}_2v_x^x$ -déterminant; donc le lemme F, appliqué à ${}_1v_x^x$ et ${}_2v_x^x$, montre que pour μ -presque tout x , ${}_1v_x^x = {}_2v_x^x$, cqfd.

On pourrait aussi utiliser un autre lemme, qui nous sera utile ailleurs:

Lemme (2,7 bis). *Soient $x \rightarrow {}_1v_x^x$, $x \rightarrow {}_2v_x^x$, deux fonctions à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, μ -mesurables ${}_1v = \int_x^* {}_1v_x^x d\mu(x)$, ${}_2v = \int_x^* {}_2v_x^x d\mu(x)$ où ${}_1v + {}_2v$ est σ -finie, et $\mathcal{Y}$ est $({}_1v + {}_2v)$ -dénumbrablement engendrée.*

1) *Si, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on a ${}_1v_x^x(B) \geq {}_2v_x^x(B)$ pour μ -presque tout x , alors ${}_1v_x^x \geq {}_2v_x^x$ pour μ -presque tout x .*

2) *Si en outre $\int_x^* {}_1v_x^x d\mu(x) = \int_x^* {}_2v_x^x d\mu(x)$, alors ${}_1v_x^x = {}_2v_x^x$ pour μ -presque tout x .*

Démonstration. 1) Soit $\mathcal{B}$ un ensemble $({}_1v + {}_2v)$ -déterminant. Comme il est dénombrable, pour μ -presque tout x , on a ${}_1v_x^x(B) \geq {}_2v_x^x(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$; d'autre part, la propriété (1,1 bis) dit que, pour μ -presque tout x , $\mathcal{B}$

est $({}_1v_x^x + {}_2v_x^x)$ -déterminant; le lemme F, appliqué à ${}_1v_x^x$ et ${}_2v_x^x$, donne la conclusion.

2) Pour tout $B \in \mathcal{Y} \cap Y_m$, les inégalités: ${}_1v_x^x(B) \geq {}_2v_x^x(B)$ pour μ -presque tout x , et $+\infty > \int_x {}_1v_x^x(B) d\mu(x) = \int_x {}_2v_x^x(B) d\mu(x)$, montrent que ${}_1v_x^x(B) = {}_2v_x^x(B)$ pour μ -presque tout x . La même méthode que pour 1) montre alors que ${}_1v_x^x = {}_2v_x^x$ pour μ -presque tout x .

Théorème (2,8) (Existence). *Si $\mathcal{Y}$ est la tribu borélienne d'un espace topologique Y , et si v est portée par une réunion dénombrable Y' de compacts métrisables de v -mesures finies, alors $\omega \rightarrow v_\omega$ admet des espérances conditionnelles, et deux d'entre elles sont μ -presque partout égales. Il existe des espérances conditionnelles pour lesquelles toutes les v_x^x sont portées par Y' , et intérieurement régulières (mais peut-être pas de Radon, même si v et les v_ω sont de Radon, parce que non nécessairement localement finies).*

Démonstration. Comme v est σ -finie et que $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée (la tribu borélienne d'une réunion dénombrable de compacts métrisables est dénombrablement engendrée), le théorème d'unicité précédent est applicable, et seule l'existence est à démontrer.

Soit Y' portant v , $Y' = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, réunion dénombrable de compacts métrisables, qu'on peut supposer disjoints (concassage)[1], et de v -mesures finies. Pour tout m , considérons les mesures induites sur K_m , $\omega \rightarrow (v_\omega)_{K_m}$; pour λ -presque tout ω , et tout m , v_ω est portée par Y' et $v_\omega(K_m)$ fini, donc la mesure induite $(v_\omega)_{K_m}$ est de Radon sur K_m ; si on trouve des espérances conditionnelles de ces fonctions à valeurs mesures de Radon sur les K_m , $x \rightarrow v_{x,m}^x$, il suffira de prendre $v_x^x = \sum_{m \in \mathbb{N}} j_m(v_{x,m}^x)$, où j_m est l'injection $K_m \rightarrow Y$, et le problème sera résolu.

On est donc ramené au cas où $Y = K_m$ est un compact métrisable, v de Radon sur Y , ce que nous supposerons désormais. La fonction $\omega \rightarrow v_\omega(1)$ est alors λ -intégrable (d'intégrale $v(1)$); soit ρ une espérance conditionnelle de

[1] Concassage. Voir Bourbaki [1], page 18; SCHWARTZ [1], page 46.

cette fonction, donc une fonction ≥ 0 partout finie, μ -intégrable sur X . Soit $C^+(Y)$ l'espace des fonctions ≥ 0 continues sur Y . Pour $\phi \in C^+(Y)$, $\omega \rightarrow v_\omega(\phi)$ est λ -intégrable ≥ 0 , majorée par $\omega \rightarrow \|\phi\|_{C(Y)} v_\omega(1)$: elle a donc une espérance conditionnelle ϕ^x , majorée par $\|\phi\|_{C(Y)} \rho$. Appelons-là $\bar{\phi} \rho$, où $\bar{\phi}$ est prise nulle là où ρ est nulle; $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ est $\mathbb{R}^+$ -semi-linéaire de $C^+(Y)$ dans $L^\infty(X, \mu)$, $\|\bar{\phi}\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq \|\phi\|_{C^+(Y)}$. Ensuite on sait (théorème de Maharam)[1] qu'il existe un relèvement r de $L^\infty(X, \mu)$ dans l'espace $\mathcal{B}(X)$ des fonctions réelles bornées, avec $\|r(f)\|_{\mathcal{B}(X)}$ (i.e. $\sup_{x \in X} |(r(f))(x)| = \|f\|_{L^\infty(X, \mu)}$).

Nous poserons alors $\theta_x(\phi) = (r(\bar{\phi}))(x)$, pour $\phi \in C^+(Y)$, $x \in X$. Pour x fixé, $\theta_x: \phi \rightarrow \theta_x(\phi)$ est une forme $\mathbb{R}^+$ -semi-linéaire ≥ 0 sur $C^+(Y)$: c'est donc une mesure de Radon ≥ 0 sur Y , de norme ≤ 1 . Posons $\bar{v}_x^x = \rho(x)\theta_x$. Vérifions d'abord l'égalité des espérances conditionnelles.

Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des fonctions $f \geq 0$ boréliennes bornées sur Y telles que $x \rightarrow \bar{v}_x^x(f) = \rho(x)\theta_x(f)$ soit μ -mesurable et que l'on ait, pour toute $A \in \mathcal{X}$,

$$\text{l'égalité } \int_{p^{-1}(A)} v_\omega(f) d\lambda(\omega) = \int \bar{v}_x^x(f) d\mu(x). \text{ Cet ensemble est stable par pas-}$$

sage à la limite simple de suites croissantes, par Fatou; mais il contient les fonctions constantes, puisque ρ est une espérance conditionnelle de la fonction $\omega \rightarrow v_\omega(1)$; et, s'il contient $f \leq c$, il contient $c-f$, parce que $\omega \rightarrow v_\omega(1)$ est λ -intégrable et que ρ est μ -intégrable. Ensuite il contient $C^+(Y)$, car, pour $\phi \in C^+(Y)$, on a:

$$\begin{aligned} \int_{p^{-1}(A)} v_\omega(\phi) d\lambda(\omega) &= \int_A \phi_x^x d\mu(x) = \int_A \bar{\phi}(x) \rho(x) d\mu(x) = \int_A (r(\bar{\phi}))(x) \rho(x) d\mu(x) \\ &= \int_A \theta_x(\phi) \rho(x) d\mu(x) = \int_A \bar{v}_x^x(\phi) d\mu(x). \end{aligned}$$

Donc, en vertu du lemme C, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble de toutes les fonctions boréliennes bornées ≥ 0 sur Y ; donc, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $x \rightarrow \bar{v}_x^x(B)$ est μ -mesurable, et, pour tout $A \in \mathcal{X}$, $\int_{p^{-1}(A)} v_\omega(B) d\lambda(\omega) = \int_A \bar{v}_x^x(B) d\mu(x)$, donc, pour toute

[1] Voir Dorothy MAHARAM [1], et SCHWARTZ [1], page 130.

$A \in \mathcal{X}$, $\int_{p^{-1}(A)}^* v_\omega d\lambda(\omega) = \int_A^* \bar{v}_x^{\mathcal{X}} d\mu(x)$. Mais la fonction $x \rightarrow \bar{v}_x^{\mathcal{X}}$ est seulement μ -mesurable, et n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{X}$. Si toutefois on la change sur une partie μ -négligeable de X , de manière qu'elle appartienne à $\mathcal{X}$, elle vérifiera toujours la même égalité des espérances conditionnelles, et on aura gagné. Or le lemme (1, 12 bis) permet de le faire, $\mathcal{Y}$ étant v -dénombrablement engendrée.

Proposition (2,9). Soient $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$, deux tribus sur X ; supposons p à la fois $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable et $(\lambda, \mathcal{X}')$ -mesurable, de mesures images μ et μ' σ -finies. Soient $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}, x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}'}$, deux familles de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, indexées par X , ayant les 4 propriétés suivantes:

- 1) $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_\omega$ relativement à $p, \mathcal{X}, \lambda$;
- 2) $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \vee p(\mathcal{N}_\lambda)$;
- 3) $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}'}$ appartient à la tribu $\mathcal{X}'$;
- 4) pour λ -presque tout ω , $v_{p(\omega)}^{\mathcal{X}} = v_{p(\omega)}^{\mathcal{X}'}$.

Alors $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}'}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_\omega$ relativement à $p, \mathcal{X}', \lambda$. En particulier, toute espérance conditionnelle pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, l'est aussi pour $p, \mathcal{X}', \lambda$, si $\mathcal{X}'$ est intermédiaire entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X} \vee p(\mathcal{N}_\lambda)$.

Démonstration. A cause de 3, il suffit de démontrer l'égalité fondamentale des espérances conditionnelles. Soit donc $A' \in \mathcal{X}'$; par 2, il existe $A \in \mathcal{X}$, tel que la différence entre $p^{-1}(A)$ et $p^{-1}(A')$ soit λ -négligeable.

$$\begin{aligned} \int_{p^{-1}(A')}^* v_\omega d\lambda(\omega) &= \int_{p^{-1}(A)}^* \dots = \int_A^* v_x^{\mathcal{X}} d\mu(x) = \int_{p^{-1}(A)}^* v_{p(\omega)}^{\mathcal{X}} d\lambda(\omega) \\ &= \int_{p^{-1}(A')}^* \dots = \int_{p^{-1}(A')}^* v_{p(\omega)}^{\mathcal{X}'} d\lambda(\omega) = \int_{A'}^* v_x^{\mathcal{X}'} d\mu(x), \end{aligned}$$

cqfd.

(2,10) Désintégration des mesures

Définition. Soient $\Omega, \mathcal{O}, \lambda, X, \mathcal{X}, \mu$, comme précédemment.

On appelle désintégration de λ relativement à $p, \mathcal{X}$, une espérance conditionnelle de la fonction $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$, à valeurs mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$, relativement à $p, \mathcal{X}$, $\lambda(\delta_{(\omega)})$ est la masse de Dirac du point ω ; $\delta_{(\omega)}(B) = 1$ ou 0 selon que $\omega \in B$ ou $\omega \notin B$.

Théorème (2,11). Une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, est une famille $x \rightarrow \lambda_x$ de mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$, indexée par X , vérifiant les propriétés suivantes:

- 1) $x \rightarrow \lambda_x$ appartient à la tribu $\mathcal{X}$;
- 2) pour toute $A \in \mathcal{X}$, on a l'égalité de la désintégration:

$$(2,12) \quad \chi_{p^{-1}(A)} \lambda = \int_A^* \lambda_x d\mu(x); \text{ ou, pour tout } B \in \mathcal{O}:$$

$$\lambda(p^{-1}(A) \cap B) = \int_A^* \lambda_x(B) d\mu(x).$$

Démonstration. Il suffit de traduire la définition des espérances conditionnelles, compte tenu de ce que $\int_{p^{-1}(A)}^* \delta_{(\omega)}(B) d\lambda(\omega) = \lambda(p^{-1}(A) \cap B)$.

Corollaire (2,13). Si $x \rightarrow \lambda_x$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, on a l'égalité (2,12) aussi pour B λ -mesurable et pour A μ -mesurable. Plus généralement, pour $f \geq 0$ λ -mesurable sur Ω et $g \geq 0$ μ -mesurable sur X , on a:

$$\int_{\Omega}^* f(\omega) g(p(\omega)) d\lambda(\omega) = \int_X^* \lambda_x^*(f) g(x) d\mu(x).$$

En outre, $x \rightarrow \lambda_x$ est encore une désintégration de la mesure $(g \circ p)\lambda$ relativement à $p, \mathcal{X}$, si son image $g\mu = p((g \circ p)\lambda)$ est σ -finie sur $\mathcal{X}$.

Démonstration. C'est le lemme (2,5) appliqué à $\nu_\omega = \delta_{(\omega)}$.

Corollaire (2,14). Les désintégrantes λ_x de λ sont μ -indépendantes, au sens suivant:

Si g_1, g_2 , sont deux fonctions μ -mesurables ≥ 0 , telles que $g_1\mu$ et $g_2\mu$ soient σ -finies, et si $\int_x^* \lambda_x g_1(x) d\mu(x) = \int_x^* \lambda_x g_2(x) d\mu(x)$, alors $g_1 = g_2$ μ -presque partout.

Démonstration. D'après le corollaire précédent, $(g_1 \circ p) \lambda = \int_x^* g_1(x) d\mu(x)$, donc $(g_1 \circ p)\lambda = (g_2 \circ p)\lambda$, donc leurs images sont aussi égales, $g_1\mu = g_2\mu$, donc $g_1 = g_2$ μ -presque partout.

Proposition (2,15). Si $x \rightarrow \lambda_x$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, λ_x a la masse 1 pour μ -presque tout x .

Démonstration. $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}(1)$ est la constante 1; donc son espérance conditionnelle est la constante 1; or elle doit être μ -presque partout égale (lemme, (2,6)) à $x \rightarrow \lambda_x(1)$.

Théorème (2,16) (Unicité de la désintégration)

Si $\mathcal{O}$ est λ -dénombrablement engendrée, deux désintégrations de λ pour $p, \mathcal{X}$, sont μ -presque partout égales.

C'est le théorème (2,7) appliqué à $\nu_\omega = \delta_{(\omega)}$.

On pourra donc parler, si elle existe, de la μ -classe désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$.

Théorème (2,17) de Jirina [1] (Existence de désintégrations) [2]

Si Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, λ une mesure sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de λ -mesures finies, elle possède des désintégrations pour $p, \mathcal{X}$, et deux d'entre

[1] Voir Jirina [1].

[2] Voir à (8,2) un contre-exemple lorsque les conditions de l'énoncé ne sont pas réalisées.

elles sont μ -presque partout égales. On peut trouver des désintégrations pour lesquelles toutes les λ_x sont de Radon de masse 1.

Démonstration. C'est le théorème (2,8) appliqué à $\nu_\omega = \delta_{(\omega)}$.

Soit $\Omega' = \bigcup_n K_n$ une réunion dénombrable de compacts métrisables, portant λ . Il existe alors $X' \subset X$, $X' \in \mathcal{X}$ portant μ , tel que, pour $\mathcal{X} \in X'$, λ_x soit de masse 1 (propriété (2,15)) et portée par Ω' , donc image par l'injection $\Omega' \rightarrow X$ d'une mesure sur Ω' (à savoir la mesure induite $(\lambda_x)_{\Omega'}$); mais Ω' est souslinien, et une mesure de masse 1 sur Ω' est de Radon, donc, pour $x \in X'$, λ_x est de Radon de masse 1 sur Ω . En remplaçant λ_x par $\delta_{(a)}$, a fixe $\in \Omega$, pour $x \notin X'$, on a une nouvelle désintégration pour laquelle toutes les λ_x sont de Radon de masse 1.

Proposition (2,18). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit $A \subset X$, μ -mesurable. Pour μ -presque tout x , λ_x est portée par $p^{-1}(A)$ si $x \in A$, par $p^{-1}(\mathbb{C}A)$ si $x \in \mathbb{C}A$. Inversement, soit $x \rightarrow \lambda_x$ une famille de mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$, indexée par X , ayant les propriétés suivantes:

- 1) $x \rightarrow \lambda_x$ appartient à $\mathcal{X}$;
- 2) $\lambda = \int_x^* \lambda_x d\mu(x)$;
- 3) Pour tout $A \in \mathcal{X}$, pour μ -presque tout $x \in A$, λ_x est portée par $p^{-1}(A)$. Alors c'est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$.

Démonstration. Montrons d'abord la partie directe. Il suffit d'écrire l'égalité de la désintégration:

$$0 = \lambda^*(p^{-1}(A) \cap \mathbb{C}(p^{-1}(A))) = \int_A^* \lambda_x(\mathbb{C}p^{-1}(A)) d\mu(x);$$

donc $\lambda_x(\mathbb{C}p^{-1}(A)) = 0$ pour μ -presque tout $x \in A$.

Prenons maintenant la réciproque.

Il suffit de montrer l'égalité de la désintégration.

$$\chi_{p^{-1}(A)} \lambda = \int_X^* (\chi_{p^{-1}(A)} \lambda_x) d\mu(x);$$

mais, pour μ -presque tout $x \in A$, λ_x est portée par $p^{-1}(A)$, donc $\chi_{p^{-1}(A)} \lambda_x = \lambda_x$; et, pour μ -presque tout $x \in \mathbb{G}A$, λ_x est portée par $p^{-1}(\mathbb{G}A)$, donc $\chi_{p^{-1}(A)} \lambda_x = 0$, d'où le résultat $\int_A^* \lambda_x d\mu(x)$.

Théorème (2,19). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour p , $\mathcal{X}$. Soit f une application, μ -presque partout définie et μ -mesurable, de X dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, et supposons que $\mathcal{Z}$ soit $f(\mu)$ -dénombrablement séparante. Alors, pour μ -presque tout $x \in X$, $f \circ p$ est λ_x -presque partout égale à la constante $f(x)$.

Démonstration. Soit $Z' \in \mathcal{Z}$, portant $f(\mu)$, tel que $\mathcal{Z} \cap Z'$ soit dénombrablement séparante. Soit donc $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de Z , appartenant à la tribu $\mathcal{Z}$, telle que tout z de Z' soit intersection des Z_n qui le contiennent. Soit $A_n = f^{-1}(Z_n)$. La proposition (2, 18) nous dit que, pour μ -presque tout $x \in A_n$, λ_x est portée par $p^{-1}(A_n)$, donc, pour λ_x -presque tout ω , $f(p(\omega)) \in Z_n$. Donc il existe $X' \subset X$, portant μ , tel que, pour $x \in X'$, pour λ_x -presque tout ω , $f(p(\omega))$ soit élément de tous les Z_n pour lesquels $f(x) \in Z_n$. Mais, si $x \in f^{-1}(Z')$, l'intersection des Z_n pour lesquels $f(x) \in Z_n$ est $\{f(x)\}$. Donc, pour $x \in X' \cap f^{-1}(Z')$, $f \circ p$ est λ_x -presque partout égale à la constante $f(x)$, cqfd.

Exemple d'application

Considérons par exemple une intégrale de la forme $J = \int_{\Omega} \psi(p(\omega), \omega) d\lambda(\omega)$,

où ψ est une fonction sur $X \times \Omega$ à valeurs dans un Banach, et supposons que l'intégrale écrite ait un sens.

On voudrait effectuer le calcul en deux temps, d'abord en fixant $p(\omega) = x$, ensuite en intégrant par rapport à x . On a toujours, si $(\lambda_x)_{x \in X}$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$:

$$J = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} \Psi(p(\omega), \omega) d\lambda_x(\omega).$$

Si ensuite $\mathcal{X}$ est μ -dénombrablement séparante, on saura que, pour μ -presque tout x , p est λ_x -presque sûrement égale à x , et on pourra écrire:

$$J = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} \Psi(x, \omega) d\lambda_x(\omega),$$

ce qui est le résultat cherché.

Par exemple on peut étendre la dernière formule (2,3) à des fonctions à valeurs vectorielles. Si f est une fonction sur Ω à valeurs dans un Banach F , g une fonction sur X à valeurs dans un Banach séparable G , et si Φ est une application bilinéaire de $F \times G$ dans un Banach E , si enfin $\Phi(f, g \circ p)$ est λ -intégrable, on peut appliquer le théorème (2,19) puisque la tribu borélienne de G est dénombrablement séparante, et écrire:

$$\int_{\Omega} \Phi(f(\omega), g(p(\omega))) d\lambda(\omega) = \int_X d\mu(x) \int_{\Omega} \Phi(f(\omega), g(x)) d\lambda_x(\omega).$$

Théorème (2,20). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une famille de mesures sur Ω , indexée par X , ayant les propriétés suivantes:

- 1) $x \rightarrow \lambda_x$ appartient à $\mathcal{X}$;
- 2) $\lambda = \int_X^* \lambda_x d\mu(x)$;
- 3) Pour μ -presque tout x , λ_x est portée par $p^{-1}(\tilde{x})$, où $\tilde{x}$ est l'atome de x dans la tribu $\mathcal{X}$ (intersection de toutes les parties de la tribu contenant x).
Alors $x \rightarrow \lambda_x$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$.

Inversement, si $\mathcal{X}$ est μ - Q -dénombrablement séparante (il existe $X' \in \mathcal{X}'$, portant μ , et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{X}'$, telle que l'atome $\tilde{x}$ de tout $x \in \mathcal{X}'$ soit intersection des A_n contenant x), alors toute désintégration a les propriétés précédentes; en outre, pour μ -presque tout x , p est $(\lambda_x, \mathcal{X})$ -mesurable, et $p(\lambda_x) = \delta_{(x)}$.

Démonstration. Supposons que $x \rightarrow \lambda_x$ ait les propriétés 1-2-3. Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a :

$$\chi_{p^{-1}(A)} \lambda = \int_X^* (\chi_{p^{-1}(A)} \lambda_x) d\mu(x),$$

d'après 2 et le point 2 de la proposition (1,11); mais ceci vaut $\int_A^* \lambda_x d\mu(x)$

d'après 3, donc on a l'égalité de la désintégration, et 1 permet de conclure.

Inversement, soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration.

Appelons Z le quotient de X par la relation d'équivalence où les classes sont les atomes de $\mathcal{X}$, et π la surjection canonique de X sur Z . Soient $\pi(\mathcal{X})$ la tribu image et $\pi(\mu)$ la mesure image. Si $\mathcal{X}$ est μ - Q -dénombrablement séparable, $\pi(\mathcal{X})$ est $\pi(\mu)$ -dénombrablement séparable. Alors, d'après le théorème (2,19), pour μ -presque tout x , $\pi \circ p$ est λ_x -presque partout égale à $\pi(x) = \tilde{x}$, autrement dit λ_x est portée par $p^{-1}(\tilde{x})$.

Soit alors x un point tel que λ_x soit portée par $p^{-1}(\tilde{x})$ et de masse 1. Pour tout $A \in \mathcal{X}$, $p^{-1}(A)$ est λ_x -mesurable, et de mesure 1 ou 0 selon que $x \in A$ ou $x \notin A$; donc p est $(\lambda_x, \mathcal{X})$ -mesurable, et l'image $p(\lambda_x)$ est la mesure sur X , qui vaut 1 ou 0 sur A , selon que $x \in A$ ou $x \notin A$, c. à d. $\delta_{(x)}$, cqfd.

Remarque. 1) Une tribu μ -dénombrablement engendrée est évidemment μ - Q -dénombrablement séparable.

2) La mesure de Dirac $\delta_{(x)}$ n'est pas portée par x , mais par l'atome $\tilde{x}$ de x .

Corollaire (2,21). Soient Ω, X deux espaces topologiques, λ une mesure de Radon ≥ 0 sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, p une application λ -propre de Ω dans X , $\mu = p(\lambda)$ sa mesure de Radon image. Alors λ possède une désintégration relativement à p , où toutes les λ_x sont de Radon de masse 1, et deux désintégrations sont μ -presque partout égales. Une désintégration est une famille $(\lambda_x)_{x \in X}$ satisfaisant aux propriétés 1, 2, ou 1, 3, 4:

- 1) pour tout B borélien de Ω , $x \rightarrow \lambda_x(B)$ est borélienne;
- 2) pour tout A borélien de X ,

$$\chi_{p^{-1}(A)}\lambda = \int_A \lambda_x d\mu(x);$$

$$3) \quad \lambda = \int_X \lambda_x d\mu(x);$$

4) pour μ -presque tout $x \in X$, λ_x est portée par $p^{-1}(\{x\})$.

Démonstration. Ici $\mathcal{O}, \mathcal{X}$, sont les tribus boréliennes de Ω, X . Comme λ est de Radon σ -finie sur Ω , on doit toujours employer $\lambda^\bullet$ au lieu de λ^* (voir (1,7)). La mesure image est de Radon, également σ -finie (si λ est portée par $\bigcup_n K_n$, K_n compacts métrisables, la restriction de p à K_n étant continue, μ est portée par $\bigcup_n p(K_n)$, $p(K_n)$ compact); il est entendu qu'ici nous employons partout, pour l'égalité de la désintégration, $\mu^\bullet$ au lieu de μ^* , car c'est bien la mesure abstraite $\mu^\bullet$ qui est l'image de la mesure abstraite $\lambda^\bullet$, avec la formule correcte $\mu^\bullet(A) = (\lambda^\bullet)^*(p^{-1}(A)) = \lambda^\bullet(p^{-1}(A))$. Alors 1, 2, est la définition des désintégrations. D'autre part, on sait que l'image d'un compact métrisable par une application continue est encore compact métrisable [1], donc $p(K_n)$ est compact métrisable, donc la tribu borélienne de X est μ -dénombrablement engendrée et μ -dénombrablement séparante. On peut donc appliquer le théorème (2,20), donc la désintégration peut se définir aussi par 1, 3 et 4.

On a un résultat analogue à (2,19) pour une fonction à valeurs mesures:

Corollaire (2,22). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit $x \rightarrow v_x$ une fonction sur X , à valeurs dans l'espace des mesures sur un ensemble Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$ et μ -mesurable. On suppose que $v = \int_X v_x^\bullet d\mu(x)$ est σ -finie, et que $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée. Alors, pour μ -presque tout x , la fonction $\omega \rightarrow v_{p(\omega)}$ est λ_x -presque partout égale à la constante v_x .

Démonstration. Si on remplace la fonction $x \rightarrow v_x$ par une autre, qui

[1] Voir Schwartz [1], page 111, théorème 6; l'image continue d'un compact souslinien et un compact est souslinien si et seulement si l est métrisable.

lui est μ -presque partout égale, cela ne change rien, car $\omega \rightarrow v_{p(\omega)}$ est remplacée par une fonction qui lui est λ -presque partout égale, donc qui, pour μ -presque tout x , lui est λ_x -presque partout égale. Or, si $\mathcal{B}$ est un ensemble v -déterminant, $v \in M_{\mathcal{B}}$, on sait que $v_x \in M_{\mathcal{B}}$ pour μ -presque tout x , et on peut donc supposer que c'est vrai pour tout x . Comme alors $M_{\mathcal{B}}$ est un espace topologique à tribu borélienne dénombrablement engendrée donc dénombrablement séparante, le corollaire résulte du théorème (2,19), compte tenu de la proposition G.

Corollaire (2,23). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Supposons que $\mathcal{O}$ soit λ -dénumérablement engendrée. Alors, pour μ -presque tout x , λ_x est portée par $p^{-1}(\tilde{x})$, où $\tilde{x}$ est l'ensemble des x' de X pour lesquels $\lambda_{x'} = \lambda_x$ ($\tilde{x} \supset \tilde{x}$ évidemment).

Démonstration. Il suffit, de prendre $v_x = \lambda_x$ et d'appliquer le corollaire précédent: il dit que, pour μ -presque tout x , $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ est λ_x -presque partout égale à λ_x , autrement dit λ_x est portée par l'ensemble des ω pour lesquels $\lambda_{p(\omega)} = \lambda_x$, c. à d. par $p^{-1}(\tilde{x})$.

Désintégrations et mesures induites

Lemme (2,24). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit Ω' une partie de Ω , λ -mesurable. L'image par p de la mesure induite $\lambda_{\Omega'}$ est la mesure ayant pour densité par rapport à μ la fonction $x \rightarrow \lambda_x(\Omega')$.

Démonstration. Sa valeur sur $A \in \mathcal{X}$ doit être $\lambda_{\Omega'}(p^{-1}(A)) = \lambda(p^{-1}(A) \cap \Omega')$, c. à d. $\int_A^* \lambda_x(\Omega') d\mu(x)$, d'où le résultat.

Proposition (2,25). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit $\Omega' \subset \Omega$, λ -mesurable, et $\Omega'' \subset \Omega'$, $\Omega'' \in \mathcal{O}$, $(\Omega' \setminus \Omega'')$ λ -négligeable. Alors $x \rightarrow \chi_{\Omega''}(\lambda_x)_{\Omega'} / \lambda_x(\Omega'')$ (remplacé par 0 lorsque le dénominateur est nul) est une désintégration de la mesure induite $\lambda_{\Omega'}$, pour $p', \mathcal{X}$ ($p' =$ restriction de p à Ω').

Démonstration. Tout d'abord $x \rightarrow \chi_{\Omega'}(\lambda_x)_{\Omega'}$ appartient à $\mathcal{X}$; si en effet $B \in \mathcal{O} \cap \Omega'$, $(\chi_{\Omega'}(\lambda_x)_{\Omega'})(B) = \lambda_x(\Omega'' \cap B)$, et $\Omega'' \cap B \in \mathcal{O}$; il en est de même de $x \rightarrow \lambda_x(\Omega'')$, donc du quotient, remplacé par 0 sur 1 l'ensemble, appartenant à $\mathcal{X}$, où le dénominateur est nul. Ensuite, pour $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \chi_{p^{-1}(A)}\lambda_{\Omega'} &= (\chi_{p^{-1}(A)}\lambda)_{\Omega'} = \int_A^* (\lambda_x)_{\Omega'} d\mu(x) \quad (\text{point 1 de la prop. (1,11)}) \\ &= \int_A^* \frac{(\lambda_x)_{\Omega'}}{\lambda_x(\Omega')} (\lambda_x(\Omega') d\mu(x)) = \int_A^* \frac{\chi_{\Omega'}(\lambda_x)_{\Omega'}}{\lambda_x(\Omega'')} (\lambda_x(\Omega') d\mu(x)) \end{aligned}$$

(parce que $\lambda_x(\Omega'') = \lambda_x(\Omega')$ pour μ -presque tout x , et que Ω'' porte $(\lambda_x)_{\Omega'}$ pour μ -presque tout x); c'est l'égalité de la désintégration, compte tenu du lemme (2,24).

Remarque. Si Ω' porte λ , $\lambda_x(\Omega'') = 1$ pour μ -presque tout x . Alors $x \rightarrow \chi_{\Omega'}(\lambda_x)_{\Omega'}$ est aussi une désintégration de $\lambda_{\Omega'}$ pour $p, \mathcal{X}$.

Désintégrations et produits par des fonctions

Lemme (2,26). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit $f \geq 0$ une fonction λ -mesurable sur Ω ; la mesure image de $f\lambda$ par p est la mesure dont la densité par rapport à μ est la fonction $f' : x \rightarrow \lambda_x(f)$.

Démonstration. Soit $g \geq 0$ une fonction sur X , appartenant à $\mathcal{X}$. Alors

$$(p(f\lambda))(g) = (f\lambda)(g \circ p) = \lambda^*(f(g \circ p)) = \int_X^* \lambda_x^*(f)g(x)d\mu(x).$$

Proposition (2,27). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit f une fonction ≥ 0 λ -mesurable sur Ω , et soit $f' \geq 0$, appartenant à $\mathcal{O}$, λ -presque partout égale à f . Supposons que l'image $\bar{f}\mu$ de $f\lambda$ soit σ -finie. Une désintégration de $f\lambda$ pour $p, \mathcal{X}$, est donnée par $x \rightarrow f'\lambda_x/\lambda_x^*(f')$, remplacée par 0 là où le dénominateur est nul.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{O}$; $x \rightarrow (f' \lambda_x)(B) = \lambda_x(f' \chi_B)$ est dans $\mathcal{X}$ parce que $f' \chi_B$ est dans $\mathcal{O}$; de même $x \rightarrow \lambda_x(f')$ est dans $\mathcal{X}$, donc aussi le quotient remplacé par 0 sur l'ensemble, appartenant à $\mathcal{X}$, où le dénominateur est nul. Soit ensuite g une fonction ≥ 0 sur X , appartenant à $\mathcal{X}$:

$$(g \circ p)(f\lambda) = f \int_X^* \lambda_x g(x) d\mu(x) = \int_X^* (f\lambda_x) g(x) d\mu(x)$$

(point 2 de la proposition (1,11))

$$\begin{aligned} &= \int_X^* \frac{(f\lambda_x)}{\lambda_x^*(f')} g(x) (\lambda_x^*(f) d\mu(x)) \\ &= \int_X^* \frac{f' \lambda_x}{\lambda_x^*(f')} g(x) (\lambda_x^*(f) d\mu(x)) \end{aligned}$$

(parce que $f\lambda_x = f' \lambda_x$ et $\lambda_x^*(f) = \lambda_x(f')$ pour μ -presque tout x), ce qui est l'égalité de la désintégration, compte tenu du théorème 26.

Désintégrations et mesures images

Proposition (2,28). Soient Ω' un ensemble, $\mathcal{O}'$ une tribu sur Ω' , λ' une mesure sur $(\Omega', \mathcal{O}')$. Soit q une application de Ω' dans Ω , $(\lambda', \mathcal{O})$ -mesurable avec $q(\lambda') = \lambda$. Soit $(\lambda'_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ' pour $q \circ p, \mathcal{X}$.

1) Si q est $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable, alors $x \rightarrow \lambda_x = q(\lambda'_x)$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$.

2) Si q est λ' -presque $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable, elle est $(\lambda'_x, \mathcal{O})$ -mesurable pour μ -presque tout x ; il existe une désintégration $x \rightarrow \lambda_x$ de λ pour $p, \mathcal{X}$, qui vérifie $\lambda_x = q(\lambda'_x)$ pour μ -presque tout x ;

3) Si, pour μ -presque tout x , q est $(\lambda'_x, \mathcal{O})$ -mesurable, alors $x \rightarrow q(\lambda'_x)$ est une désintégration de λ pour $p, \hat{\mathcal{X}}_u$.

Démonstration

1) On a $(p \circ q)(\lambda') = p(\lambda) = \mu$.

Puisque q est $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable, $\lambda_x = q(\lambda'_x)$ existe toujours. En outre $x \rightarrow \lambda_x$ est dans $\mathcal{X}$; en effet, pour $B \in \mathcal{O}$, $\lambda_x(B) = \lambda'_x(q^{-1}(B))$, et $q^{-1}(B) \in \mathcal{O}'$. Reste à voir l'égalité de la désintégration. Pour $A \in \mathcal{X}$,

$$\chi_{p^{-1}(A)}\lambda = q(\chi_{q^{-1}p^{-1}A}\lambda') = q\left(\int_A^* \lambda'_x d\mu(x)\right) = \int_A^* \lambda_x d\mu(x),$$

d'où le résultat.

2) Supposons maintenant que q soit seulement λ' -presque $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable. Alors, pour μ -presque tout x , elle est λ'_x -presque $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable (lemme (1, 6)), et $q(\lambda'_x)$ existe. Il existe une application q' , λ' -presque partout égale à q , qui est $(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ -mesurable; pour μ -presque tout x , q' est λ'_x -presque partout égale à q , et $q'(\lambda'_x) = q(\lambda'_x)$. On vient de voir que $(q'(\lambda'_x))_{x \in X}$ est une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$; donc elle est bien une désintégration qui est μ -presque partout égale à $(q(\lambda_x))_{x \in X}$.

3) Si, pour μ -presque tout x , q est $(\lambda'_x, \mathcal{O})$ -mesurable, alors $x \rightarrow \lambda_x = q(\lambda'_x)$ est définie μ -presque partout; elle est μ -mesurable, c. à d. appartient à $\hat{\mathcal{X}}_\mu$, car, pour $B \in \mathcal{O}$, $x \rightarrow \lambda_x(B) = \lambda'_x(q^{-1}(B))$ est μ -mesurable, $q^{-1}(B)$ étant λ' -mesurable (lemme (1, 4)). L'égalité de la désintégration se fait comme pour 1

4) S'il n'y a aucune hypothèse, $q(\lambda'_x)$ peut ne jamais exister.

Changement de p sur une partie négligeable

Comme nous l'avons vu à la définition, les désintégrations de λ pour $p, \mathcal{X}$ supposent seulement p définie λ -presque partout, et ne changent donc pas si on change p sur une partie λ -négligeable. Mais alors on peut aussi changer $X, \mathcal{X}$:

Proposition (2,29). Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$. Soit X' une partie de X , telle que $p^{-1}(X')$ porte λ . Alors $p' = p: \Omega \rightarrow X'$ est toujours λ -presque partout définie de Ω dans X' , et $(\lambda, \mathcal{X}')$ -mesurable, si $\mathcal{X}' = X' \cap \mathcal{X}$. L'image $\mu' = p'(\lambda)$ est la mesure définie sur X' par $\mu'(A') = \mu^*(A') = \mu(A)$, $A' \in \mathcal{X}'$, A étant n'importe quelle partie $\in \mathcal{X}$ telle que $A' = A \cap X'$; et $(\lambda_x)_{x \in X'}$ est une désintégration de λ pour $p', \mathcal{X}'$.

Démonstration. Soient $A' \in \mathcal{X}'$, $A \in \mathcal{X}$, $A' = A \cap X'$. Alors $\mu'(A') = (p'(\lambda))(A') = \lambda(p'^{-1}(A')) = \lambda(p^{-1}(A)) = \mu(A)$, d'où le résultat sur l'image.

La fonction $x \rightarrow \lambda_x$, de X' dans l'espace des mesures sur Ω , est évidemment dans $\mathcal{X}' = X' \cap \mathcal{X}$. Et, pour $A' \in \mathcal{X}'$: $\chi_{p'^{-1}(A')}\lambda = \chi_{p^{-1}(A)}\lambda = \int_A^* \lambda_x d\mu(x) = \int_{A'}^* \lambda_x d\mu'(x)$, ce qui est l'égalité de la désintégration.

Relation entre espérances conditionnelles et désintégrations des mesures

Théorème (2,30). *Supposons que λ ait une désintégration pour $p, \mathcal{X}$, soit $x \rightarrow \lambda_x$. Pour toute f λ -intégrable à valeurs dans un Banach, ou ≥ 0 λ -mesurable, alors $x \rightarrow \lambda_x(f)$ est définie μ -presque partout et μ -presque partout égale aux espérances conditionnelles de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda$; si f est ≥ 0 et dans $\mathcal{O}$, $x \rightarrow \lambda_x(f)$ est elle-même une espérance conditionnelle.*

Démonstration. La fonction $x \rightarrow \lambda_x(f)$ satisfait à l'égalité des espérances conditionnelles, car, si $A \in \mathcal{X}$, $\int_{p^{-1}(A)} f d\lambda = (\chi_{p^{-1}(A)}\lambda)(f) = \int_A \lambda_x(f) d\mu(x)$; mais elle est seulement μ -mesurable, et n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{X}$. Mais alors elle est une espérance conditionnelle de f pour $p, \hat{\mathcal{X}}_\mu, \lambda$; toute espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda$ l'est aussi pour $p, \hat{\mathcal{X}}_\mu, \lambda$, donc μ -presque partout égale à la précédente. Si $f \geq 0$ est dans $\mathcal{O}$, $x \rightarrow \lambda_x(f)$ est dans $\mathcal{X}$ et est donc exactement une espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda$.

Ainsi la possession d'une désintégration donne des espérances conditionnelles pour toutes les fonctions, d'où son avantage; mais l'espérance conditionnelle existe toujours, alors que la désintégration suppose des conditions particulières sur $\Omega, \mathcal{O}, \lambda$. Il est normal de dire que λ_x est la loi de probabilité conditionnelle associée à la loi de probabilité λ , lorsque l'on a l'information $p(\omega) = x$, relativement à la tribu $\mathcal{X}$ sur X .

La désintégration de λ a été obtenue comme cas particulier d'une espérance

conditionnelle d'une fonction à valeurs mesures; mais inversement elle donne toutes les espérances conditionnelles des fonctions à valeurs mesures:

Désintégrations et espérances conditionnelles d'une fonction à valeurs mesures.

Proposition (2,31). Soient $\omega \rightarrow v_\omega$ une fonction sur Ω à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, λ -mesurable, $v = \int_{\Omega}^* v_\omega d\lambda(\omega)$ σ -finie, et $x \rightarrow \lambda_x$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$.

1) Si $\omega \rightarrow v_\omega$ appartient à $\mathcal{O}$, la fonction à valeurs mesures $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}} = \int_{\Omega} v_\omega d\lambda_x(\omega)$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_\omega$ pour $p, \mathcal{X}, \lambda$.

2) Si $\mathcal{Y}$ est v -dénombrablement engendrée, $\omega \rightarrow v_\omega$ a des espérances conditionnelles pour $p, \mathcal{X}, \lambda$; toutes sont μ -presque partout égales à la fonction $x \rightarrow \int_{\Omega} v_\omega d\lambda_x(\omega)$.

Démonstration. 1) La fonction $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}} = \int_{\Omega}^* v_\omega d\lambda(\omega)$ est bien définie partout; si $B \in \mathcal{Y}$, on a $v_x^{\mathcal{X}}(B) = \int_{\Omega} v_\omega(B) d\lambda_x(\omega)$, donc $= \lambda_x(g)$, où g est la fonction $\omega \rightarrow v_\omega(B)$, $g \in \mathcal{O}$. Donc d'après (2,30), $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}(B) = \lambda_x(g)$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow g(\omega) = v_\omega(B)$, et le lemme (2,6) dit bien que $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ est espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_\omega$.

2) Si $\omega \rightarrow v_\omega$ est seulement λ -mesurable, mais $\mathcal{Y}$ v -dénombrablement engendrée, le lemme (1,12bis) dit que $\omega \rightarrow v_\omega$ est λ -presque partout égale à $\omega \mapsto \tilde{v}_\omega$, appartenant à $\mathcal{O}$; celle-ci a une espérance conditionnelle $x \rightarrow \tilde{v}_x^{\mathcal{X}} = \int_{\Omega}^* \tilde{v}_\omega d\lambda_x(\omega)$, donc la première aussi. Pour λ -presque tout ω ,

$\nu_\omega = \tilde{\nu}_\omega$; donc, pour μ -presque tout x , pour λ_x -presque tout ω , $\nu_\omega = \tilde{\nu}_\omega$ et $\tilde{\nu}_x^{\mathcal{X}} = \int_{\Omega}^* \nu_\omega d\lambda_x(\omega)$. Le fait que toutes les espérances conditionnelles aient la même propriété est le théorème d'unicité (2.7).

Remarque. On a donc deux théorèmes d'existence très différents pour les espérances conditionnelles des fonctions à valeurs mesures. Au théorème (2,8), aucune désintégration de λ n'est supposée; on fait sur $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ une hypothèse très forte de type "compact métrisable". Ici au contraire on devra faire sur $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$ le même type d'hypothèse très forte, pour avoir une désintégration de λ ; mais ensuite on ne fait sur $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ qu'une hypothèse relativement faible. Dans la partie 1 de la proposition (2,31), il n'y a aucune hypothèse sur $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ (sauf, comme toujours, la σ -finitude de ν). On trouve une espérance conditionnelle, pourvu que $\omega \rightarrow \nu_\omega$ appartienne à $\mathcal{O}$; cette espérance n'est pas forcément unique à un ensemble μ -négligeable près, on n'est pas dans le cas d'unicité (2.7). Dans la partie 2, $\omega \rightarrow \nu_\omega$ est seulement λ -mesurable, mais alors $\mathcal{Y}$ doit être ν -dénombrablement engendrée; et on est dans le cas d'unicité.

§3 Transitivité des désintégrations de mesures

Décrivons d'abord la situation qui sera étudiée dans le reste du chapitre.

(3,0): Les théorèmes qui suivent vont jouer un rôle essentiel dans la suite; il importe, quitte à se donner du mal, de les énoncer dans les conditions les plus générales. Soient $(\Omega, \mathcal{O})$, $(X, \mathcal{X})$, $(Z, \mathcal{Z})$ des ensembles munis de tribus, λ une mesure sur Ω , p une application $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable de Ω dans X , $\mu = p(\lambda)$ sa mesure image, q une application $(\mu, \mathcal{Z})$ -mesurable de X dans Z , $\nu = q(\mu)$ sa mesure image; on suppose ν , donc λ et μ , σ -finies. Alors $q \circ p$ est $(\lambda, \mathcal{Z})$ -mesurable, et $(q \circ p)\lambda = \nu$. On peut alors avoir des désintégrations du type 1-2, c. à d. de λ pour $p, \mathcal{X}$; du type 1-3, c. à d. de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$; du type 2-3, c. à d. de μ pour $q, \mathcal{Z}$. Le théorème qui suit indique comment, de certaines désintégrations, on en déduit d'autres. Moyennant certaines conditions, d'une désintégration 1-3 on déduit une désintégration 2-3; tandis que, sans aucune condition (autre que la σ -finitude de λ, μ, ν), de désintégrations 1-2 et 2-3, on déduit une désintégration 1-3. Si l'on ne se trouve pas dans les conditions

d'unicité des désintégrations, on pourra alors en former beaucoup d'autres, pas forcément égales. Partons par exemple de désintégrations 1-2 et 2-3; on forme d'abord une désintégration 1-3; mais celle-ci en donne une, que nous appellerons 2'-3', pas forcément égale à la désintégration 2-3 de départ; mais avec 1-2 et 2'-3', on formera 1'-3', peut-être différente de 1-3; de 1'-3' on déduit (2''-3''), et ainsi de suite. Si $\mathcal{O}$ est λ -dénombrablement engendrée, le théorème d'unicité (2,7) affirme que 1'-3' est identique (aux ensembles ν -négligeables près) à 1-3, et on n'obtiendra pas plus que 1-2, 2-3, 1-3, 2'-3'; en outre, si l'on part de 1-2, 2'-3', on obtiendra 1-3, et plus rien d'autre. Si maintenant c'est $\mathcal{X}$ qui est μ -dénombrablement engendrée, on saura que 2'-3' est 2-3; à partir de 1-2 et 2-3, on obtiendra 1-3 et plus rien d'autre.

Dans la pratique, Ω sera un espace topologique, λ une mesure de Radon sur Ω portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables; donc $\mathcal{O}$ sera λ -dénombrablement engendrée.

Mais $(X, \mathcal{X})$ et $(Z, \mathcal{Z})$ seront arbitraires; par exemple p et q seront l'identité, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Z}$ seront des sous-tribus de la tribu λ -mesurable. Des hypothèses trop étroites sur $(X, \mathcal{X})$ sont donc gênantes. Nous donnerons d'abord un résultat, classique pour les espérances conditionnelles des fonctions scalaires ou banachiques, que nous étendrons aux fonctions à valeurs mesures.

Théorème (3,0). *Soit f une fonction sur Ω , λ -intégrable à valeurs dans un Banach F , ou λ -mesurable ≥ 0 . Si $f^{\mathcal{X}}$ est une espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, et si $((f^{\mathcal{X}})^{\mathcal{Z}})$ est une espérance conditionnelle de $f^{\mathcal{X}}$ pour $q, \mathcal{Z}, \mu$, alors c'est aussi une espérance conditionnelle de f pour $q \circ p, \mathcal{X}, \lambda$.*

Soit $\omega \rightarrow v_{\omega}$ une fonction sur Ω à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, λ -mesurable, $v = \int_{\Omega}^ v_{\omega} d\lambda(\omega)$ σ -finie. Si $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ est une espérance conditionnelle de cette fonction pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, et si $z \rightarrow (v^{\mathcal{X}})_z^{\mathcal{Z}}$ est une espérance conditionnelle de $x \rightarrow v_x^{\mathcal{X}}$ pour $q, \mathcal{Z}, \mu$, c'est aussi une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}$ pour $q \circ p, \mathcal{X}, \lambda$.*

Démonstration. La première partie étant classique et évidente (et déjà énoncée au théorème (2,3)), nous ne démontrerons que la deuxième, qui est d'ailleurs aussi évidente. Par hypothèse, $z \rightarrow (v^{\mathcal{X}})_z^{\mathcal{Z}}$ appartient à $\mathcal{Z}$; il

reste à montrer l'égalité des espérances conditionnelles. Or, si $A \in \mathcal{Z}$:

$$\int_{(q \circ p)^{-1}(A)}^* v_\omega d\lambda(\omega) = \int_{q^{-1}(A)}^* v_x^\mathcal{X} d\mu(x) = \int_A^* (v_z^\mathcal{Z})^\mathcal{X} dv(z), \text{ cqfd.}$$

Théorème (3,1). 1) Soit $(\lambda_z^\mathcal{Z})_{z \in Z}$ une désintégration de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$. Si p est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ -mesurable, la mesure μ a une désintégration pour $q, \mathcal{Z}$, qui est ν -presque partout égale à $z \rightarrow p(\lambda_z^\mathcal{Z})$.

2) Soient $(\lambda_x^\mathcal{X})_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, et $(\mu_z^\mathcal{Z})_{z \in Z}$ une désintégration de μ pour $q, \mathcal{Z}$. Si l'on pose $\lambda_z^\mathcal{Z} = \int_X^* \lambda_x^\mathcal{X} d\mu_z^\mathcal{Z}(x)$, alors $(\lambda_z^\mathcal{Z})_{z \in Z}$ est une désintégration de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$.

Démonstration. Le point 1 n'est autre que la proposition (2,28), où $\Omega', \Omega, X, \mathcal{O}', \mathcal{O}, \mathcal{X}, q, p, \lambda', \lambda, \mu$, sont remplacés par $\Omega, X, Z, \mathcal{O}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, p, q, \lambda, \mu, \nu$. Démontrons le point 2. Nous cherchons une désintégration de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$, c. à d. une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$ pour $q \circ p, \mathcal{Z}, \lambda$. Pour cela nous en prenons d'abord, d'après le théorème précédent, une espérance conditionnelle pour $p, \mathcal{X}, \lambda$, c. à d. une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, ou $x \rightarrow \lambda_x^\mathcal{X}$. Ensuite nous devons prendre une espérance conditionnelle de cette fonction relativement à $q, \mathcal{Z}, \mu$; or, d'après la proposition (2,31), on pourra prendre $z \rightarrow \int \lambda_x^\mathcal{X} d\mu_z^\mathcal{Z}(x)$, ce qui est le résultat cherché.

(3,2) Désintégrations cohérentes. Soient $(\lambda_x^\mathcal{X})_{x \in X}, (\lambda_z^\mathcal{Z})_{z \in Z}, (\mu_z^\mathcal{Z})_{z \in Z}$, des désintégrations respectives de λ pour $p, \mathcal{X}$, de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$, de μ pour $q, \mathcal{Z}$.

On dit qu'elles sont cohérentes, si, pour ν -presque tout z , $\mu_z^\mathcal{Z} = p(\lambda_z^\mathcal{Z})$, et $\lambda_z^\mathcal{Z} = \int_X^* \lambda_x^\mathcal{X} d\mu_z^\mathcal{Z}(x)$.

Théorème (3,3). 1) Si Ω est un espace topologique, λ une mesure de Radon sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, et si p est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ -mesurable, il existe des désintégrations cohérentes.

2) Dans les mêmes conditions, si en outre $p^{-1}(\mathcal{X})$ est λ -dénumérablement engendrée, alors, pour ν -presque tout $z \in Z$, $\lambda_z^{\mathcal{X}}$ est encore désintégrée sur $p, \mathcal{X}$, par $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$. En particulier, pour μ -presque tout x , λ_x est désintégrée, pour $p, \mathcal{X}$, par la même désintégration que λ , c. à d. $x' \rightarrow \lambda_{x'}^{\mathcal{X}}$, mais aussi par la fonction constante $x' \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$.

Démonstration. 1) Par le théorème (2, 17), il existe des désintégrations $(\lambda_x^{\mathcal{X}})_{x \in X}$ et $(\lambda_z^{\mathcal{Z}})_{z \in Z}$ de λ pour $p, \mathcal{X}$, et pour $q \circ p, \mathcal{Z}$. Par le 1 du théorème (3, 1), on en déduit une désintégration $(\mu_z^{\mathcal{Z}})_{z \in Z}$ de μ pour $q, \mathcal{Z}$, qui est ν -presque partout égale à $z \rightarrow p(\lambda_z^{\mathcal{Z}})$. Ensuite $z \rightarrow \int_X^* \lambda_x^{\mathcal{X}} d\mu_z^{\mathcal{Z}}(x)$ est une désintégration de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$, d'après le 2 du théorème (3, 1), mais elle est nécessairement ν -presque partout égale à $z \rightarrow \lambda_z^{\mathcal{Z}}$ d'après l'unicité du théorème (2, 17).

2) Soient $(\lambda_x^{\mathcal{X}})_{x \in X}$ une désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, et $(\lambda_z^{\mathcal{Z}})_{z \in Z}$ une désintégration de λ pour $q \circ p, \mathcal{Z}$. Quitte à les modifier sur des parties négligeables, ce qui ne change pas le résultat, on peut supposer $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ et $\lambda_z^{\mathcal{Z}}$ toutes de masse 1. On peut leur adjoindre une désintégration $(\mu_z^{\mathcal{Z}})_{z \in Z}$ de μ pour $q, \mathcal{Z}$, et les 3 sont cohérentes comme nous venons de le voir. Nous allons maintenant en fait démontrer la partie 2 présente sans aucune hypothèse sur $\Omega, \mathcal{O}$, en supposant seulement que nous partons de 3 désintégrations cohérentes, au moins pour la partie 2a). Comme $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$ est déjà dans $\mathcal{X}$, il suffit de montrer l'égalité des désintégrations.

2a) Supposons d'abord $\mathcal{X}$ μ -dénumérablement engendrée. Nous utiliserons la proposition (2, 18). Pour ν -presque tout z , on a $\lambda_z^{\mathcal{Z}} = \int_X^* \lambda_x^{\mathcal{X}} d\mu_z^{\mathcal{Z}}(x)$ et $\mu_z^{\mathcal{Z}}$ est l'image $p(\lambda_z^{\mathcal{Z}})$, par l'hypothèse de cohérence, et ceci est l'hypothèse 2 de (2, 18). C'est l'hypothèse 3 de (2, 18) qui est à rechercher. Soit $A \in \mathcal{X}$, $z \in Z$; appelons $P(A, z)$ la propriété: pour $\mu_z^{\mathcal{Z}}$ -presque tout $x \in A$ (resp. $x \in \mathbb{G}A$), $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ est portée par $p^{-1}(A)$ (resp. $p^{-1}(\mathbb{G}A)$). Nous allons montrer qu'on a les 5 propriétés du lemme D, pour $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Les propriétés 1 et 2 du lemme D sont évidentes, et même plus: pour z donné, $P(A, z)$ est une propriété relative à A , qui est stable par complémentation et réunions et intersections dénombrables; l'ensemble des A qui vérifient $P(A, z)$ est une tribu.

Montrons la propriété 3. Soit A donnée. Puisque $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$ est une dés-intégration de λ pour $p, \mathcal{X}$, il est vrai que, pour μ -presque tout x , $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ est portée par $p^{-1}(A)$ ou $p^{-1}(\mathbb{G}A)$ selon que $x \in A$ ou $x \in \mathbb{G}A$; donc, puisque $\mu = \int_z^* \mu_z^{\mathcal{X}} dv(z)$, on voit que, pour v -presque tout z , ceci est vrai pour $\mu_z^{\mathcal{X}}$ -presque tout x , autrement dit on a bien $P(A, z)$ pour v -presque tout z . Montrons la propriété 4. Soit N μ -négligeable.

Alors, pour v -presque tout z , N est $\mu_z^{\mathcal{X}}$ -négligeable; en outre, $p^{-1}(N)$ est λ -négligeable, donc, pour μ -presque tout x , $p^{-1}(N)$ est $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ -négligeable; donc, pour v -presque tout z , $p^{-1}(N)$ est $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ -négligeable pour $\mu_z^{\mathcal{X}}$ -presque tout x . Choisissons un z ayant ces propriétés. Alors, pour $\mu_z^{\mathcal{X}}$ -presque tout x , $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ est portée par $p^{-1}(\mathbb{G}N)$, a fortiori par $p^{-1}(\mathbb{G}A)$ pour $A \subset N$, donc on a $P(A, z)$ pour tout $A \subset N$. Montrons enfin 5. Il n'est même pas nécessaire de supposer $\mu(C)$ fini. Pour $C \in \mathcal{X}$ quelconque, pour tout z tel que $P(C, z)$, c. à d. pour v -presque tout z , pour tout $A \subset C$, $P(A, z)$ entraîne $P(C \setminus A, z)$ puisque l'ensemble des A vérifiant $P(A, z)$ est une tribu. Le lemme D nous dit alors que, pour v -presque tout z , on a $P(A, z)$ pour tout $A \in \mathcal{X}$, autrement dit la propriété 3 de (2, 18) car, pour v -presque tout z , $\mu_z^{\mathcal{X}} = p(\lambda_z^{\mathcal{X}})$, et alors $\lambda_z^{\mathcal{X}}$ est désintégrée relativement à $p, \mathcal{X}$, par $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$, ce qui est le résultat cherché.

2b) Supposons enfin, ce qui est moins que de supposer $\mathcal{X}$ μ -dénombrablement engendrée, que c'est seulement $p^{-1}(\mathcal{X})$ qui est λ -dénombrablement engendrée. Il existe Ω' portant λ tel que la tribu $p^{-1}(\mathcal{X}) \cap \Omega'$ soit engendrée par $p^{-1}(\mathcal{B}) \cap \Omega'$, où $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ dénombrable [1]. Si donc $C \in p^{-1}(\mathcal{X})$, il existe C' , élément de la tribu engendrée par $p^{-1}(\mathcal{B})$, tel que la différence entre C et C' soit dans $\mathbb{G}\Omega'$; mais cette différence est saturée par rapport à p , donc elle est en fait contenue dans $\mathbb{G}(p^{-1}(p(\Omega')))$. Donc on peut remplacer Ω' par $p^{-1}(p(\Omega'))$, et alors cela signifie que $p^{-1}(p(\Omega')) \cap p^{-1}(\mathcal{B})$ engendre $p^{-1}p(\Omega') \cap p^{-1}(\mathcal{X})$, ou que $p(\Omega') \cap \mathcal{B}$ engendre $p(\Omega') \cap \mathcal{X}$.

Appelons $\mathcal{X}'$ la tribu engendrée par $\mathcal{X}$ et $\{p(\Omega')\}$.

[1] L'expression " λ -dénombrablement engendrée" est donc ici entendue dans un sens un peu plus général qu'auparavant; en effet, λ est une mesure sur la tribu $\mathcal{O}$ et non sur la tribu $p^{-1}(\mathcal{X})$, sous-tribu de $\hat{\mathcal{O}}_\lambda$. Cela veut exactement dire ce qui est écrit ici: l'ensemble Ω' porte λ , il peut être pris dans $\mathcal{O}$ si l'on veut, mais non dans $p^{-1}(\mathcal{X})$. Sans quoi $\mathcal{X}$ serait μ -dénombrablement engendrée.

Alors p est encore λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{X}')$ -mesurable (et l'image μ' est un prolongement de μ ; $p(\Omega')$ n'est peut-être pas μ -mesurable, alors qu'il est μ' -mesurable et porte μ'); q est encore $(\mu', \mathcal{Z})$ -mesurable, de même image $q(\mu') = \nu$; et $\mathcal{X}'$ est maintenant μ' -dénombrablement engendrée.

En outre, $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$ est encore désintégration de λ pour $p, \mathcal{X}'$, puisque $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \setminus p(\mathcal{N}_\lambda)$ (proposition (2,9)), et rien n'est changé pour les $\lambda_z^{\mathcal{Z}}$. Alors on en déduit que, pour ν -presque tout z , $\lambda_z^{\mathcal{Z}}$ est désintégrée pour $p, \mathcal{X}'$, par $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$; mais comme cette fonction appartient à $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}'$, c'est une désintégration pour $p, \mathcal{X}$.

2c) En prenant $Z = X$, $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $q = Id_X$, on trouve bien que, pour μ -presque tout x , $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ admet la désintégration $x' \rightarrow \lambda_{x'}^{\mathcal{X}}$. Mais le corollaire (2,22) dit que, pour μ -presque tout x , la fonction $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}^{\mathcal{X}}$ est $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ -presque partout égale à la constante $\lambda_x^{\mathcal{X}}$; et la proposition (2,9), appliquée aux désintégrations (c. à d. à $\nu_\omega = \delta_{(\omega)}$), avec $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$, et pour la mesure $\lambda_x^{\mathcal{X}}$, dit que $x' \rightarrow \lambda_{x'}^{\mathcal{X}}$ est aussi une désintégration de $\lambda_x^{\mathcal{X}}$.

Remarque. Si $p^{-1}(\mathcal{X})$ est λ -dénombrablement engendrée, alors automatiquement p est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ -mesurable (dès qu'elle est $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable). En effet, en reprenant les notations de la partie 2b) de la démonstration, si on pose $X' = p(\Omega')$, on a vu que $X' \cap \mathcal{X}$ est (engendrée par $X' \cap \mathcal{B}$, donc) dénombrablement engendrée, et $p^{-1}(X') = p^{-1}p(\Omega') \supset \Omega'$ porte λ ; il suffit donc d'appliquer le corollaire A' .

Corollaire (3,4). *Plaçons-nous dans les conditions du théorème (3,3). Soit f une fonction sur Ω , λ -intégrable à valeurs dans un Banach F , ou λ -mesurable ≥ 0 , et soit $f^{\mathcal{X}}$ une espérance conditionnelle de f relativement à $p, \mathcal{X}, \lambda$. Pour ν -presque tout z , f est encore $\lambda_z^{\mathcal{Z}}$ -intégrable ou mesurable, et $f^{\mathcal{X}}$ est encore une espérance conditionnelle de f relativement à $p, \mathcal{X}, \lambda_z^{\mathcal{Z}}$.*

Démonstration. La première affirmation est le lemme (1,5) ou (1,4). Ensuite, pour μ -presque tout x , $f^{\mathcal{X}}(x)$ est égale à $\lambda_x^{\mathcal{X}}(f)$; alors, pour ν -presque tout z , pour $\mu_z^{\mathcal{Z}}$ -presque tout x , $f^{\mathcal{X}}(x) = \lambda_x^{\mathcal{X}}(f)$; et en même temps, pour ν -presque tout z , $\lambda_x^{\mathcal{X}}$ est désintégrée pour $p, \mathcal{X}$, par $x \rightarrow \lambda_x^{\mathcal{X}}$, et $\mu_z^{\mathcal{Z}} = p(\lambda_z^{\mathcal{Z}})$; donc, pour de tels z , $f^{\mathcal{X}}$ est une espérance conditionnelle de f pour $p, \mathcal{X}, \lambda_z^{\mathcal{Z}}$, puisqu'elle appartient à la tribu $\mathcal{X}$, cqfd.

Corollaire (3,4) bis. *Plaçons-nous dans les conditions du théorème (3,3). Soit $\omega \rightarrow \rho_\omega$ une fonction à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, λ -mesurable, avec $\rho = \int_{\Omega} \rho_\omega d\lambda(\omega)$ σ -finie; supposons $\mathcal{Y}$ ρ -dénumérablement engendrée.*

Soit $x \rightarrow \rho_x^{\mathcal{X}}$ une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \nu_\omega$ pour $p, \mathcal{X}, \lambda$ (proposition (2,31)). Alors, pour ν -presque tout z , $\omega \rightarrow \nu_\omega$ est encore λ_z -mesurable, et $x \rightarrow \rho_x^{\mathcal{X}}$ est encore une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \nu_\omega$ pour $p, \mathcal{X}, \lambda_z^{\mathcal{X}}$.

Démonstration. C'est la même que celle du corollaire précédent, en s'appuyant sur le fait que, pour μ -presque tout x , donc aussi pour ν -presque tout z , pour $\mu_z^{\mathcal{X}}$ -presque tout x , $\rho_x^{\mathcal{X}} = \int_{\Omega} \rho_\omega d\lambda_x^{\mathcal{X}}(\omega)$.

Cas des sous-tribus de la tribu mesurable et d'une mesure de Radon

Nous allons améliorer notablement ces résultats, en affaiblissant les conditions sur la tribu $\mathcal{X}$ (ou $p^{-1}(\mathcal{X})$). Bien qu'on puisse le faire dans cette situation générale, c'est assez lourd, et sans doute inutile pour les applications aux processus stochastiques.

Nous allons désormais toujours nous placer dans la situation qui est celle des processus. Ω sera un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne; λ sera une mesure de Radon portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, de sorte qu'on a le théorème d'existence et d'unicité (2,17). On étudiera précisément les désintégrations pour $X = \Omega$, $p =$ identité, et on prendra sur $X = \Omega$ diverses sous-tribus de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles λ sera supposée σ -finie. Si $\mathcal{T}$ (au lieu de $\mathcal{X}$, nous changerons les notations) est une telle sous-tribu, une désintégration $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}})_{\omega \in \Omega}$ relative à $\mathcal{T}$ est une famille de mesures sur Ω , indexée par Ω , telle que:

- 1) $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ appartienne à $\mathcal{T}$;
- 2) pour toute $A \in \mathcal{T}$, $\chi_A \lambda = \int_A \lambda_\omega^{\mathcal{T}} d\lambda(\omega)$.

Nous écrivons $d\lambda(\omega)$ au lieu de $d\lambda^{\mathcal{T}}(\omega)$, $\lambda^{\mathcal{T}}$ étant la restriction de la mesure λ à $\mathcal{T}$ ou son prolongement de Lebesgue; on trouve la même chose, puisque

$\omega \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. Rappelons aussi que, pour toute fonction $f \geq 0$ λ -mesurable sur Ω , et toute fonction $g \geq 0$ sur Ω , $\lambda^\mathcal{F}$ -mesurable ou même appartenant à la tribu $\mathcal{F} \vee \mathcal{N}_\lambda$, on a $\lambda^*(gf) = \int_\Omega (\lambda_\omega^\mathcal{F})^*(f)g(\omega)d\lambda(\omega)$; en effet, la proposition (2,9) dit que $\omega \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{F}$ est encore désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{F} \vee \mathcal{N}_\lambda$.

La situation particulière se relie d'ailleurs aisément à la situation générale:

Proposition (3,5). 1) Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une désintégration de λ pour p , $\mathcal{X}$; alors $(\lambda_{p(\omega)})_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de λ pour la sous-tribu $\mathcal{F} = p^{-1}(\mathcal{X})$ de la tribu λ -mesurable.

2) Inversement, soit $(\bar{\lambda}_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une désintégration de λ pour $\mathcal{F} = p^{-1}(\mathcal{X})$. Alors $\bar{\lambda}_\omega$ prend une valeur constante en tous les points ω de $p^{-1}(\{x\})$, soit λ_x (en prenant $\lambda_x = 0$ pour $p^{-1}(\{x\}) = \emptyset$), et $(\lambda_x)_{x \in X}$ est une désintégration de λ pour p , $\tilde{\mathcal{X}} = (\mathcal{X} \cap p(\Omega)) \vee \{p(\Omega)\}$, et sur $\mathcal{X}$ si $p(\Omega) \in \mathcal{X}$, en particulier si p est surjective.

Démonstration. Par définition de $p^{-1}(\mathcal{X})$, si $x \rightarrow \lambda_x$ est dans $\mathcal{X}$, $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ est dans $p^{-1}(\mathcal{X})$. Inversement, supposons $\omega \rightarrow \bar{\lambda}_\omega$ dans $p^{-1}(\mathcal{X})$; pour $x \in p(\Omega)$, $\bar{\lambda}_\omega$ est constante sur $p^{-1}(\{x\})$, soit λ_x ; prenons $\lambda_x = 0$ pour $x \notin p(\Omega)$. Alors $x \rightarrow \lambda_x$ est, sur $p(\Omega)$, dans la tribu des parties de $p(\Omega)$ dont l'image réciproque est dans $p^{-1}(\mathcal{X})$, soit $\mathcal{X} \cap p(\Omega)$; et elle est constante sur $\complement p(\Omega)$, donc elle est bien dans la tribu $\tilde{\mathcal{X}} = (\mathcal{X} \cap p(\Omega)) \vee \{p(\Omega)\}$. Si $p(\Omega) \in \mathcal{X}$ (en particulier si p est surjective), cette tribu est contenue dans $\mathcal{X}$. Soit maintenant $C \in p^{-1}(\mathcal{X})$, soit $C = p^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{X}$. Alors, si $x \rightarrow \lambda_x$ est une désintégration de λ pour p , $\mathcal{X}$:

$$\chi_C \lambda = \chi_{p^{-1}(A)} \lambda = \int_A^* \lambda_x d\mu(x) = \int_C \lambda_{p(\omega)} d\lambda(\omega),$$

ce qui est l'égalité de la désintégration pour $Id_\Omega, p^{-1}(\mathcal{X})$, ce qui démontre 1).

L'application p est encore $\mathbf{I}(\lambda, \tilde{\mathcal{X}})$ -mesurable; soit $\tilde{\mu}$ la mesure image de λ sur $(X, \tilde{\mathcal{X}})$ ($\tilde{\mu}$ est différente de μ ; par exemple $p(\Omega)$ n'est peut-être pas μ -mesurable (catastrophe de la mesure image!) alors qu'elle porte $\tilde{\mu}$). Soit alors $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{X}} = (\mathcal{X} \cap p(\Omega)) \vee \{p(\Omega)\}$; soit $A \in \mathcal{X}$, tel que $A \cap p(\Omega) = \tilde{A} \cap p(\Omega)$. Alors, si on suppose que $\omega \rightarrow \lambda_\omega$ est une désintégration de λ pour $Id_\Omega, p^{-1}(\mathcal{X})$:

$$\chi_{p^{-1}(\tilde{A})}\lambda = \chi_{p^{-1}(A)}\lambda = \int_{p^{-1}(A)} \bar{\lambda}_\omega d\lambda(\omega) = \int_{p^{-1}(\tilde{A})} \lambda_{p(\omega)} d\lambda_{(\omega)} = \int_{\tilde{A}} \lambda_x d\tilde{\mu}(x),$$

ce qui est l'égalité de la désintégration pour $p, \tilde{\mathcal{X}}$, et démontre 2).

Si $p(\Omega) \in \mathcal{X}$, on a $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}} \vee p(\mathcal{N}_\lambda)$, et $x \rightarrow \lambda_x$ est alors une désintégration pour $p, \mathcal{X}$.

Proposition (3,6). Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles λ est σ -finie. On suppose que $(\lambda_\omega^\mathcal{T})_{\omega \in \Omega}, (\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega \in \Omega}$, sont deux sous-familles de mesures sur Ω , indexées par Ω , ayant les propriétés suivantes:

- 1) $(\lambda_\omega^\mathcal{T})_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}$;
- 2) Pour tout $A' \in \mathcal{T}'$, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que la différence entre A et A' soit λ -négligeable (i.e. $\mathcal{T}'$ est continue dans $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$, où $\mathcal{N}_\lambda$ est la tribu des parties λ -négligeable ou conégligeables).
- 3) $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{\mathcal{T}'}$ appartient à $\mathcal{T}'$;
- 4) Pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{T} = \lambda_\omega^{\mathcal{T}'}$.

Alors $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}'$; en particulier, $(\lambda_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration pour toute tribu comprise entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$.

Inversement, si $(\lambda_\omega^\mathcal{T})_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}$ et $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega \in \Omega}$ pour $\mathcal{T}'$, et si $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda$, alors $\lambda_\omega^\mathcal{T} = \lambda_\omega^{\mathcal{T}'}$ pour λ -presque tout ω .

Démonstration. La première partie n'est autre que la proposition (2,9), adaptée à $X = \Omega$, $p = Id$.

La deuxième résulte de la première et du théorème d'unicité (2,16); en effet, $(\lambda_\omega^\mathcal{T})_{\omega \in \Omega}$ et $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega \in \Omega}$ sont toutes deux des désintégrations pour $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda$.

Définition (3,7). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles λ est σ -finie. Soient $(\lambda_\omega^\mathcal{S})_{\omega \in \Omega}, (\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega' \in \Omega'}$, des désintégrations de λ pour $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, respectivement. On dit que $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, si, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{T}$ est dans la tribu $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ mesurable, et $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}$ par $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega' \in \Omega'}$ (c. à d. comme λ -elle-même).

Remarquons que la définition ne dépend pas des désintégrations $(\lambda_\omega^\mathcal{S})_{\omega \in \Omega}$, et $(\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega' \in \Omega'}$ considérées. Soient en effet $(\lambda_\omega^{\mathcal{S}'})_{\omega \in \Omega}, (\lambda_\omega^{\mathcal{T}'})_{\omega \in \Omega}$ d'autres désinté-

grations. Pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{S} = \lambda_\omega^{\mathcal{S}'}$, donc la propriété trouvée pour les $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est vraie pour les $\lambda_\omega^{\mathcal{S}'}$. Ensuite, pour λ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^\mathcal{S} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$; donc, pour λ -presque tout ω , pour $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^\mathcal{S} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$; et alors la prop. (3,6) montre que, si $(\lambda_{\omega'}^\mathcal{S})_{\omega' \in \Omega}$ est une désintégration de $\lambda_\omega^\mathcal{S}$, $(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'})_{\omega' \in \Omega}$, qui appartient à $\mathcal{T}$ et lui est $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque partout égale, en est une aussi.

Lemme (3,7 bis). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles λ est σ -finie. Soit μ une mesure de Radon sur Ω , de base λ , σ -finie sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, elle est μ -plus forte que $\mathcal{S}$.

Démonstration. Soit $\mu = f\lambda$, $f \geq 0$ localement λ -intégrable. Comme λ est σ -finie, on peut supposer f borélienne; μ est σ -finie sur Ω . Une désintégration de $f\lambda$ pour $\mathcal{S}$ est alors $\omega \rightarrow \mu_\omega^\mathcal{S} = (f\lambda_\omega^\mathcal{S})/\lambda_\omega^\mathcal{S}(f)$ (proposition (2,27)). $\mathcal{T}$ étant $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable pour λ -presque tout ω , est aussi $\mu_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable pour μ -presque tout ω . Pour λ -presque tout ω , donc pour μ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$, puisque $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$; alors $f\lambda_\omega^\mathcal{S}/\lambda_\omega^\mathcal{S}(f)$ est désintégrée par $\omega' \rightarrow f\lambda_{\omega'}^\mathcal{T}/\lambda_{\omega'}^\mathcal{T}(f)$, toujours par (2,27); et ceci est précisément une désintégration de μ pour $\mathcal{T}$, cqfd.

Conséquence. Nous pouvons maintenant nous abstraire, dans tous les problèmes de force des sous-tribus, de la condition de σ -finitude:

Définition (3,7 ter). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable. On dit que $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, si, pour toute mesure de Radon μ sur Ω , de base λ , σ -finie sur $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est μ -plus forte que $\mathcal{S}$; ceci subsiste alors même si μ n'est pas σ -finie sur $\mathcal{S}, \mathcal{T}$. Il existe toujours une mesure de Radon μ sur Ω , équivalente à λ (i.e. μ est de base λ , λ est de base μ), et finie [1]; alors $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, si et seulement si elle est μ -plus forte que $\mathcal{S}$. On peut donc toujours se ramener aux mesures finies.

Une ennui constant est le suivant: il est difficile ou fastidieux de vérifier que, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{T}$ est dans la tribu $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable. On introduit pour cela la définition suivante:

[1] Supposons λ portée par la réunion $\bigcup_m K_m$ de compacts disjoints de λ -mesure > 0 : il suffit de prendre $\mu = \sum_{m \in \mathbb{N}} \chi_{K_m} \lambda / \lambda(K_m) 2^m$.

Définition (3,7 quarto). On dit que la tribu $\mathcal{T}$ est λ -presque borélienne (resp. λ -presque universellement mesurable), s'il existe $\Omega' \in \mathcal{O}$, portant λ , tel que $\mathcal{T} \cap \Omega'$ soit dans la tribu borélienne de Ω' (resp. dans la tribu universellement Radon-mesurable de Ω'). Cela veut dire que l'application identique de $(\Omega, \mathcal{O})$ (resp. $(\Omega, \bar{\mathcal{O}})$), où $\bar{\mathcal{O}}$ est la tribu universellement Radon-mesurable de Ω dans $(\Omega, \mathcal{T})$, est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ (resp. $(\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{T})$)-mesurable. Il résulte du corollaire A' que, si $\mathcal{T}$ est λ -dénombrablement engendrée, c. à d. s'il existe $\Omega' \in \mathcal{O}$, portant λ , tel que $\mathcal{T} \cap \Omega'$ soit dénombrablement engendrée, alors $\mathcal{T}$ est λ -presque borélienne.

Si $\mathcal{T}$ est λ -presque universellement mesurable, alors, quelle que soit la tribu $\mathcal{S}, \lambda_\omega^\mathcal{S}$ porte Ω' pour λ -presque tout ω , donc $\mathcal{T}$ est $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque universellement mesurable et a fortiori $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable pour λ -presque tout ω .

On dit que $\mathcal{T}$ est λ -forte, si elle est λ -presque universellement mesurable et λ -plus forte qu'elle-même. [1]

Théorème (3,8). Une tribu $\mathcal{T}$ λ -dénombrablement engendrée est λ -forte.

Démonstration. D'abord $\mathcal{T}$ est λ -presque borélienne, donc l'application identique de Ω est λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ -mesurable. Alors le théorème est conséquence du 2 du théorème (3, 3) (en se ramenant à λ finie).

Proposition (3,9). Pour toute tribu $\mathcal{U}$ sur Ω et toute mesure μ sur Ω , posons $\bar{\mathcal{U}}_\mu = \mathcal{U} \setminus \mathcal{N}_\mu$, tribu engendrée par $\mathcal{U}$ et les parties μ -négligeables ou conégligeables, et posons $\bar{\mathcal{U}} = \bigcap_\mu \bar{\mathcal{U}}_\mu$, intersection pour toutes les mesures de Radon μ sur Ω . [2]

Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{T}, \mathcal{T}'$, quatre sous-tribus de la tribu λ -mesurable. Supposons qu'elles vérifient les propriétés suivantes:

- 1) $\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{S}' \setminus \mathcal{N}_\lambda$;
- 2) $\mathcal{T} \setminus \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T}' \setminus \mathcal{N}_\lambda$, et, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \setminus \mathcal{N}_{\lambda_\omega^\mathcal{S}}$; ceci se produira sûrement si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont λ -presque égales, c. à d. s'il existe $\Omega' \subset \Omega$ portant λ tel que $\mathcal{T} \cap \Omega' = \mathcal{T}' \cap \Omega'$, ou si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \subset \bar{\mathcal{T}}$.

Alors, si $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}'$ est aussi λ -plus forte que $\mathcal{S}'$.

[1] Voir un exemple de tribu non λ -forte, à (8.5).

[2] Si $\mathcal{U}$ est la tribu borélienne, $\bar{\mathcal{U}}$ est la tribu universellement mesurable.

Démonstration. On peut supposer λ finie.

Tout d'abord des désintégrations de λ pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont λ -presque partout égales d'après la fin de (3, 6); donc, si $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, elle est λ -plus forte que $\mathcal{S}'$. Nous pouvons donc nous contenter maintenant de prendre $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Puisque $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda$, la fin de (3, 6), montre que, pour λ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}'}$; donc, pour λ -presque tout ω , pour $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}'}$. Et pour λ -presque tout ω , on suppose que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_{\lambda_\omega^\mathcal{S}}$.

Donc, pour λ -presque tout ω , on est dans la situation suivante;

- 1) $(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_{\omega' \in \Omega'}$ est une désintégration de $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ pour $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$);
- 2) $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_{\lambda_\omega^\mathcal{S}}$;
- 3) $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}'}$ appartient à $\mathcal{T}'$;
- 4) pour $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}'}$.

Alors la proposition (3, 6) dit bien que, pour ces valeurs de ω , $(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}'})_{\omega' \in \Omega'}$ est une désintégration de $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ pour $\mathcal{T}'$.

Ceci démontre le théorème dans le cas général. Il reste à montrer que les deux conditions particulières indiquées dans 2) entraînent la condition générale. Supposons qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ portant λ , tel que $\mathcal{T} \cap \Omega' = \mathcal{T}' \cap \Omega'$. Alors $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda$. En outre, pour λ -presque tout ω , Ω' porte $\lambda_\omega^\mathcal{S}$, donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_{\lambda_\omega^\mathcal{S}}$.

Si maintenant nous supposons que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \subset \bar{\mathcal{T}}$, d'une part $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda$ et $\mathcal{T}' \vee \mathcal{N}_\lambda \subset \bar{\mathcal{T}} \vee \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$, et d'autre part, pour tout ω , $\mathcal{T}' \subset \bar{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_{\lambda_\omega^\mathcal{S}}$, cqfd.

Corollaire (3,9 bis). Supposons $\mathcal{T}$ λ -forte.

Si $\mathcal{T}'$ est λ -presque universellement mesurable et λ -presque égale à $\mathcal{T}$, ou si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \subset \bar{\mathcal{T}}$, alors $\mathcal{T}'$ est aussi λ -forte.

Démonstration. Il suffit de faire $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, $\mathcal{S}' = \mathcal{T}'$ dans la proposition qui précède (compte tenu de ce que, dans la définition de " λ -forte", on doit supposer que la tribu est λ -presque universellement mesurable; ceci est automatiquement vérifié si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \subset \bar{\mathcal{T}}$).

Proposition (3,10). Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de la tribu λ -mesurable, sur laquelle λ soit σ -finie. Supposons que, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{T}$ soit dans la tribu $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ -mesurable.

La tribu $\mathcal{T}$ est λ -plus forte qu'elle-même, si et seulement si, pour λ -presque tout ω , pour toute $A \in \mathcal{T}$, $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ est portée par A ou $\mathbb{G}A$ (i.e., pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ donne à tous les éléments de $\mathcal{T}$ la mesure 0 ou 1).

Démonstration. On sait (corollaire (2,22)) que, pour λ -presque tout ω , la fonction $\omega' \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{T}$ est $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ -presque partout égale à $\lambda_\omega^\mathcal{T}$. Considérons seulement ces valeurs de ω . Dire que $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}$ par $(\lambda_{\omega'}^\mathcal{T})_{\omega' \in \Omega}$, c'est dire que, pour toute $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\chi_A \lambda_\omega^\mathcal{T} = \int_A^* \lambda_{\omega'}^\mathcal{T} d\lambda_\omega^\mathcal{T}(\omega')$$

qui vaut $\lambda_\omega^\mathcal{T} \lambda_\omega^\mathcal{T}(A)$; c'est donc dire que, pour toute A , $\chi_A \lambda_\omega^\mathcal{T} = \lambda_\omega^\mathcal{T}(A) \lambda_\omega^\mathcal{T}$, ce qui équivaut à $\lambda_\omega^\mathcal{T}(A) = 0$ ou 1.

Proposition (3,10 bis). Soient $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles λ est σ -finie. Soient $(\lambda_\omega^\mathcal{S})_{\omega \in \Omega}$, $(\lambda_\omega^\mathcal{T})_{\omega \in \Omega}$, des dés-intégrations de λ pour $\mathcal{S}, \mathcal{T}$.

1) Pour λ -presque tout ω , on a :

$$\lambda_\omega^\mathcal{S} = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^\mathcal{T} d\lambda_\omega^\mathcal{S}(\omega');$$

2) Pour λ -presque tout ω , $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^\mathcal{S}$ est $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ -presque partout égale à la mesure constante $\lambda_\omega^\mathcal{S}$, donc

$$\lambda_\omega^\mathcal{S} = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^\mathcal{S} d\lambda_\omega^\mathcal{T}(\omega')$$

Démonstration. 1) Si $\mathcal{T}$ était λ -presque borélienne, donc l'identité

λ -presque $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ -mesurable, cela résulterait du 2^e théorème (3,3). Mais nous n'avons ici aucune hypothèse sur $\mathcal{T}$.

Utilisons le théorème (1,17) en y remplaçant $Y, \Omega, X, \mathcal{Y}, \mathcal{O}, \mathcal{X}, \nu_\omega, \lambda_x, \mu$, par $\Omega, \Omega, \Omega, \mathcal{O}, \mathcal{S}, \lambda_\omega^\mathcal{T}, \lambda_\omega^\mathcal{S}, \lambda^\mathcal{S}$ (restriction de λ à $\mathcal{S}$). Nous avons d'une part

$$\lambda = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^\mathcal{T} d\lambda(\omega'), \text{ et d'autre part } \lambda = \int_{\Omega} \lambda_{\omega}^\mathcal{S} d\lambda^\mathcal{S}(\omega);$$

comme $\mathcal{O}$ est λ -dénombrablement engendrée, nous en déduisons que, pour λ -presque tout ω , $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$ est $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable, et que, si l'on pose $\theta_\omega = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^\mathcal{T} d\lambda_\omega^\mathcal{S}(\omega')$, alors

$$\omega \rightarrow \theta_\omega \text{ est } \lambda^\mathcal{S}\text{-mesurable donc appartient à } \mathcal{S} \vee \mathcal{N}_\lambda, \text{ et que } \lambda = \int_{\Omega} \theta_\omega d\lambda^\mathcal{S}(\omega) = \int_{\Omega} \theta_\omega d\lambda(\omega).$$

Si donc nous montrons que, pour toute $A \in \mathcal{S} \vee \mathcal{N}_\lambda$, θ_ω est portée par A pour λ -presque tout $\omega \in A$, nous saurons que $\omega \rightarrow \theta_\omega$ est une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{S} \vee \mathcal{N}_\lambda$ (proposition (2,18)). Or, $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$ étant une désintégration de λ pour $\mathcal{T}$, on sait que, pour λ -presque tout $\omega' \in A$, $\lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$ est portée par A ; donc, pour λ -presque tout ω , pour $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque tout $\omega' \in A$, $\lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$ est portée par A . Ensuite, pour λ -presque tout ω , $\mathbf{GA}$ est θ_ω -mesurable, donc on a la formule intégrale $\theta_\omega(\mathbf{GA}) = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}(\mathbf{GA}) d\lambda_\omega^\mathcal{S}(\omega') = 0$,

d'où le résultat.

Ceci nous prouve que $\omega \rightarrow \theta_\omega$ est une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{S} \vee \mathcal{N}_\lambda$; donc elle est λ -presque partout égale à $\omega \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{S}$, qui est une désintégration de λ pour $\mathcal{S}$ donc pour $\mathcal{S} \vee \mathcal{N}_\lambda$.

2) La mesure λ se désintègre pour $\mathcal{T}$, suivant $\omega \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{T}$. Ensuite $\omega \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{S}$ est une fonction sur Ω à valeurs mesures sur Ω , appartenant à la tribu $\mathcal{S}$ donc à la tribu $\mathcal{T}$; l'application du corollaire (2,22) (valable parce que $\mathcal{O}$ est ν -dénombrablement engendrée, $\nu = \int_{\Omega} \lambda_\omega^\mathcal{S} d\lambda(\omega) = \lambda$) donne le résultat.

Corollaire (3,11). Plaçons-nous dans les conditions de la proposition (3,10 bis). Si $\mathcal{T}$ est λ -forte, pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ est désintégrée pour $\mathcal{S}$ par la fonction constante $\omega' \rightarrow \lambda_\omega^\mathcal{T}$.

Le réciproque est vraie. En effet, λ ergodique sur $\mathcal{G} \Leftrightarrow \lambda$ est désintégrée par $\omega \mapsto \lambda$. Nous montrons l'équivalence $\Rightarrow$, montrons $\Leftarrow$. Soit $A \in \mathcal{G}$. Alors, $\forall \omega \in A$, λ est portée par A donc $\lambda(A) \neq 0$, $\exists \omega \in A$ tel que $\lambda(A) = 1$, donc $\lambda(A) \in \{0, 1\}$, λ ergodique

Démonstration. Une constante appartient à $\mathcal{S}$. Il reste à vérifier l'égalité de la désintégration. On doit avoir, pour λ -presque ω , pour tout $A \in \mathcal{S}$:

$$\chi_A \lambda_\omega^\mathcal{T} = \int_A \lambda_\omega^\mathcal{T} d\lambda_\omega^\mathcal{T}(\omega') = \lambda_\omega^\mathcal{T} \lambda_\omega^\mathcal{T}(A);$$

la proposition (3,10) l'affirme même pour $A \in \mathcal{T}$, cqfd.

Proposition (3,13). Soient $\Omega, \mathcal{O}, X, \mathcal{X}, p$, comme dans (3,0). Soit λ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, telle que p soit $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable et que $\mu = p(\lambda)$ soit σ -finie. On suppose que λ est une intégrale $\lambda = \int_S^* \lambda_s d\nu(s)$ de mesures, par rapport à une mesure ν sur un ensemble S muni d'une tribu $\mathcal{S}$; on suppose que, pour ν -presque tout $s \in S$, p est $(\lambda_s, \mathcal{X})$ -mesurable, $\mu_s = p(\lambda_s)$ est σ -finie, et λ_s admet, relativement à $p, \mathcal{X}$, toujours la même désintégration, $(\lambda_x^*)_x \in X$ indépendante de s . Alors λ admet, par rapport à $p, \mathcal{X}$, encore la même désintégration $(\lambda_x^*)_{x \in X}$.

Remarque. On utilisera le plus souvent ce résultat pour $X = \Omega, p = \text{identité}, \mathcal{T} = \mathcal{X}$ sous-tribu de la tribu λ -mesurable, et de la tribu λ_s -mesurable pour ν -presque tout $s \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Comme $(\lambda_x^*)_{x \in X}$ appartient à $\mathcal{X}$, il suffit de démontrer l'égalité de la désintégration. Soit donc $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \chi_{p^{-1}(A)} \lambda &= \int_S^* (\chi_{p^{-1}(A)} \lambda_s) d\nu(s) = \int_S^* d\nu(s) \int_A^* \lambda_x d\mu_s(x) = \int_A^* \lambda_x d\mu(x), \\ &\text{car } \mu = \int_S^* d\nu(s), \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

Théorème (3,14). Soient $\mathcal{S}', \mathcal{T}$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable. Si $\mathcal{T}$ est λ -presque universellement mesurable et λ -plus forte que $\mathcal{S}'$,

elle est λ -plus forte que toute sous-tribu $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}'$. Si $\mathcal{T}$ est λ -forte, elle est λ -plus forte que toutes ses sous-tribus.

Démonstration. On peut supposer λ finie.

D'après la proposition (3,10 bis), pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est égal à l'intégrale de mesures $\int_\Omega \lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'} d\lambda_\omega^\mathcal{S}(\omega')$.

Or, $\mathcal{T}$ étant λ -plus forte que $\mathcal{S}'$, pour λ -presque tout ω' , $\mathcal{T}$ est dans la tribu $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$ -mesurable, et $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}$ par une désintégration fixe de λ , disons $(\lambda_{\omega''}^\mathcal{T})_{\omega'' \in \Omega}$. Donc, pour λ -presque tout ω , pour $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -presque tout ω' , $\mathcal{T}$ est dans la tribu $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$ -mesurable, et $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}$ par $(\lambda_{\omega''}^\mathcal{T})_{\omega'' \in \Omega}$. Par ailleurs, puisque $\mathcal{T}$ est λ -presque universellement mesurable, pour λ -presque tout ω , elle est dans la tribu $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ -mesurable ((3,7) quarto). On déduit alors de la proposition (3,13) appliquée à $\lambda_\omega^\mathcal{S}$, intégrale des $\lambda_{\omega'}^{\mathcal{S}'}$, que, pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est aussi désintégrée pour $\mathcal{T}$ par $(\lambda_{\omega''}^\mathcal{T})_{\omega'' \in \Omega}$, c. à d. que $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$.

Remarque. On pourrait retrouver d'une autre manière le théorème (3.8).

Si $\mathcal{T}$ est λ -dénombrablement engendrée, elle est λ -presque borélienne. Ensuite elle est λ - Q -dénombrablement séparante, donc, pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ est portée par l'atome de ω dans $\mathcal{T}$ (théorème (2,20)); donc nécessairement, dans ce cas, $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ donne à tout $A \in \mathcal{T}$ la mesure 0 ou 1; d'après la proposition (3,10), $\mathcal{T}$ est λ -plus forte qu'elle même, et alors, par le présent théorème, elle est λ -plus forte que toutes ses sous-tribus.

Proposition (3,15). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, deux sous-tribus de la tribu λ -mesurable, C une partie λ -mesurable de Ω . Si $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \cap C$ est λ_C -plus forte que $\mathcal{S} \cap C$. Si $\mathcal{T}$ est λ -forte, $\mathcal{T} \cap C$ est λ_C -forte.

Démonstration. On peut supposer λ finie.

Soit $\mathcal{T}$ λ -plus forte que $\mathcal{S}$. Une désintégration de λ_C pour $\mathcal{S} \cap C$ est donnée par $\omega \rightarrow \chi_C(\lambda_\omega^\mathcal{S})_C / \lambda_\omega^\mathcal{S}(C')$, où $C' \subset C$ est borélien λ -équivalent à C (proposition (2,25)). Par hypothèse, pour λ -presque tout ω , donc pour λ_C -presque tout $\omega \in C$, $\lambda_\omega^\mathcal{S}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^\mathcal{T}$; donc $(\lambda_\omega^\mathcal{S})_C$ est désin-

tégrée pour $\mathcal{T} \cap C$ par $\omega' \rightarrow \chi_{C'}(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_C / \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')$; et alors, par (2,27), $\chi_{C'}(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_C / \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')$ est désintégrée sur $\mathcal{T} \cap C$ par

$$\begin{aligned} \omega' &\rightarrow \frac{\chi_{C'}(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_C}{\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')} \frac{\chi_{C'}}{\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')} \left[\frac{\chi_{C'}(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_C}{\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')} \left(\frac{\chi_{C'}}{\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C')} \right) \right]^{-1} \\ &= \chi_{C'}(\lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}})_C / \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}}(C'), \end{aligned}$$

ce qui est précisément une désintégration de λ_C pour $\mathcal{T} \cap C$; donc $\mathcal{T} \cap C$ est λ_C -plus forte que $\mathcal{S} \cap C$.

La seconde conclusion résulte aussitôt de la première.

Lemme (3,16). Soient $(C_i)_{i \in I}$ une partition de Ω en parties λ -mesurables, et $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus, $\mathcal{T}_i$ tribu λ_{C_i} -mesurable sur C_i , sur laquelle λ_{C_i} est σ -finie; l'ensemble d'indices I est fini ou dénombrable. Soit $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^i$ une désintégration de λ_{C_i} pour $\mathcal{T}_i$. Alors une désintégration de λ pour la tribu $\mathcal{T} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{T}_i$ engendrée par les $\mathcal{T}_i$ sur Ω , est $\omega \rightarrow \lambda_{\omega} = \overline{\lambda_{\omega}^i}$ pour $\omega \in C_i$, où $\overline{\lambda_{\omega}^i}$ est l'image de λ_{ω}^i par l'injection $C_i \rightarrow \Omega$.

Démonstration. Puisque $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^i$ appartient à $\mathcal{T}_i$, $\omega \rightarrow \overline{\lambda_{\omega}^i}$ appartient aussi à $\mathcal{T}_i$; une fonction sur Ω , qui, sur chaque C_i , appartient à $\mathcal{T}_i$, appartient bien à $\mathcal{T}$. Il reste à vérifier l'égalité de la désintégration, et il suffit évidemment de la vérifier pour $A \subset C_i$, $A \in \mathcal{T}_i$. On a

$$\chi_A \lambda = \overline{\chi_A \lambda_{C_i}} = \overline{\int_A \lambda_{\omega}^i d\lambda_{C_i}(\omega)} = \int_A \overline{\lambda_{\omega}^i} d\lambda(\omega) = \int_A \lambda_{\omega} d\lambda(\omega), \text{ cqfd.}$$

Proposition (3,17). Soient $(C_i)_{i \in I}$ une partition de Ω en parties λ -mesurables, $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$, $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$, deux familles de tribus, $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{T}_i$ sur C_i ; I fini ou dénombrable.

1) Si, pour tout $i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est λ_{C_i} -plus forte que $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{T} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est λ -plus forte que $\mathcal{S} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{S}_i$.

2) Si, pour tout $i \in I$, $\mathcal{T}_i$ est λ_{C_i} -forte, $\mathcal{T} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est λ -forte.

Démonstration. On peut supposer λ -finie.

1) Soit $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}$ une désintégration de λ_{C_i} pour $\mathcal{S}_i$. Une désintégration de λ pour $\mathcal{S}$ est donnée par $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}}$, suivant le lemme précédent, $\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}} = \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}$ pour $\omega \in C_i$. Pour λ_{C_i} -presque tout ω , donc pour λ -presque tout $\omega \in C_i$, $\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}_i$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}_i}$. Montrons que, dans ce cas, $\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}} = \lambda_{\omega'}^{\mathcal{T}_j}$ pour $\omega' \in C_j$, $j \in I$, ce qui sera le résultat cherché: $\mathcal{T}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$. Comme $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}}$ appartient à $\mathcal{T}$, il suffit de montrer l'égalité de la désintégration; et il suffit de le faire pour $A \subset C_j$, $A \in \mathcal{T}_j$.

Soit d'abord $j = i$. Alors

$$\overline{\chi_A \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}} = \overline{\chi_A \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}} = \int_A^{\cdot} \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i} d\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}(\omega') = \int_A^{\cdot} \lambda_{\omega}^{\mathcal{T}_i} d\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}(\omega') = \int_A^{\cdot} \lambda_{\omega}^{\mathcal{T}} d\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}(\omega').$$

Soit ensuite $j \neq i$. Alors

$$\overline{\chi_A \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}} = 0, \text{ et } \int_A^{\cdot} \lambda_{\omega}^{\mathcal{T}} d\lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i}(\omega') = 0 \text{ puisque } \lambda_{\omega}^{\mathcal{S}_i} \text{ est portée par } C_i.$$

2) résulte aussitôt de 1).

Nous allons maintenant chercher à caractériser les mesures ayant une désintégration donnée.

Théorème (3,18). Soient Ω un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{X}$, p une application de Ω dans X , avec $p(\Omega) \in \mathcal{X}$. Soit $(\lambda_x)_{x \in X}$ une famille de mesures de Radon sur Ω , telle que p soit (λ_x, X) -mesurable pour tout x , et que chaque $\mu_x = p(\lambda_x)$ soit σ -finie sur $\mathcal{X}$. [1]

Soit X' l'ensemble des points x' de X' tels que $\lambda_{x'}$ soit désintégrée, relativement à p , $\mathcal{X}$, par $x \mapsto \lambda_x$ (X' est éventuellement vide); soit $\Omega' = p^{-1}(X')$.

Soit λ une mesure de Radon sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, telle que p soit $(\lambda, \mathcal{X})$ -mesurable, et que $\mu = p(\lambda)$ soit σ -finie sur $\mathcal{X}$. On suppose en outre que $p^{-1}(\mathcal{X})$ est λ -forte. Pour que λ

[1] On pourrait en fait supposer les λ_x toutes de masse ≤ 1 .

admette $x \mapsto \lambda_x$ comme désintégration relativement à $p, \mathcal{X}$, il faut et il suffit qu'elle soit une intégrale $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{p(\omega)} d\nu(\omega)$, où ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, portée par Ω' ; dans ce cas $\nu = \lambda^*$ répond aussi à la question, et λ est portée par Ω' .

Démonstration. Il résulte de la proposition (3, 5) que λ admet $x \rightarrow \lambda_x$ pour désintégration relativement à $p, \mathcal{X}$, si et seulement si elle admet $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ comme désintégration relativement à la sous-tribu $p^{-1}(\mathcal{X})$ de $\mathcal{O}$ (à cause de l'hypothèse $p(\Omega) \in \mathcal{X}$). De même, si $\Omega' = p^{-1}(X')$, Ω' est exactement l'ensemble des ω' tels que $\lambda_{p(\omega')}$ admette $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ comme désintégration relativement à $p^{-1}(\mathcal{X})$.

1) Supposons que $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{p(\omega')} d\nu(\omega')$, ν portée par Ω' ; alors, pour ν -presque tout ω' , $\lambda_{p(\omega')}$ admet $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ comme désintégration relativement à la tribu $p^{-1}(\mathcal{X})$; donc, par la prop. (3, 13), λ admet la même désintégration (sans aucune hypothèse de force pour $p^{-1}(\mathcal{X})$).

2) Supposons inversement que λ admette la désintégration $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ relativement à $p^{-1}(\mathcal{X})$. Puisque $p^{-1}(\mathcal{X})$ est λ -forte, pour λ -presque tout ω' , $\lambda_{p(\omega')}$ admet la même désintégration $\omega \rightarrow \lambda_{p(\omega)}$ que λ , relativement à $p^{-1}(\mathcal{X})$; donc λ est portée par Ω' . On a alors la formule intégrale, résultant de la désintégration, $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{p(\omega')} d\lambda(\omega')$, donc une représentation intégrale du type voulu avec $\nu = \lambda^*$.

Remarque. Si λ est une intégrale $\lambda = \int_X^* \lambda_x d\nu(x)$, ν mesure sur X portée par X' , la prop. (3, 13) dit que λ admet la désintégration $x \rightarrow \lambda_x$ relativement à $p, \mathcal{X}$. Inversement, si λ admet cette désintégration, on sait seulement que λ est portée par Ω' , et $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{p(\omega')} d\lambda(\omega') = \int_X^* \lambda_x d\mu(x)$; mais, du fait que λ est portée par $\Omega' = p^{-1}(X')$, on ne peut pas déduire que μ est portée par X' (catastrophe de la mesure image). Si toutefois X est un espace topo-

logique, $\mathcal{X}$ sa tribu borélienne, et si p est universellement mesurable-Lusin, (ce qui aura sûrement lieu, puisqu'elle est $(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ -mesurable, si X est sous-linien [1]), $\mu = p(\lambda)$ est intérieurement régulière [2], il n'y a pas de catastrophe de la mesure image, et, du fait que λ est portée par Ω' , on peut déduire que μ est portée par X' . Donc, la condition nécessaire et suffisante de l'énoncé peut, dans ce cas, être remplacée par la suivante:

λ est une intégrale $\lambda = \int_x^* \lambda_x dv(x)$, où v est une mesure sur $(X, \mathcal{X})$, portée

par X' ; dans ce cas, on peut prendre $v = \mu^* = p(\lambda^*)$.

Il y a un autre cas où l'on peut conclure de la même manière: si $X' \in \mathcal{X}$ (par exemple si $X' = X$). Car alors, de ce que λ est portée par $p^{-1}(X')$, on peut déduire que μ est portée par X' .

§ 4. Surmartingales à valeurs mesures

(4,1) Rappels sur les surmartingales. Dans tout ce paragraphe, R sera un sous-ensemble de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, et Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$ et d'une mesure λ sur $\mathcal{O}$, σ -finie.

D'autre part $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ sera une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable, indexée par R ; on la suppose croissante, $\mathcal{F}^s \subset \mathcal{F}^t$ pour $s \leq t$, et continue à droite: $\mathcal{F}^t = \bigcap_{t' > t} \mathcal{F}^{t'}$ si t est non isolé à droite dans R . On suppose en outre que λ est σ -finie sur toutes les $\mathcal{F}^t$.

Remarque. On peut en fait toujours supposer que R est un intervalle $[a, +\infty]$ ou $]a, +\infty]$. Partons en effet de R quelconque. Pour $t \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à $R \cap [t, +\infty]$, on appellera $\mathcal{F}^t$ l'intersection des $\mathcal{F}^u$, $u \in R \cap [t, +\infty]$; on aura ainsi prolongé la famille de tribus en une famille indexée par un certain ensemble $S \subset [a, b]$, $a = \inf R$, $b = \sup R$. Le complémentaire de S est une réunion d'intervalles $[\alpha_v, \beta_v]$ [ou] α_v, β_v [et en outre de $[b, +\infty]$ ou $]b, +\infty]$. Pour les t d'un intervalle $[\alpha_v, \beta_v]$, on posera $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}^{\beta_v}$; pour les points d'un] α_v, β_v [on posera $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}^{\alpha_v}$; pour les t de $[b, +\infty]$,

[1] Schwartz [1], théorème 14, page 129.

[2] Schwartz [1], page 31.

on prend pour $\mathcal{T}^t$ n'importe quelle tribu contenant $\bigcup_{u \in R} \mathcal{T}^u$, et contenue dans la tribu λ -mesurable; s'il s'agit de $]b, +\infty]$, on prendra $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}^b$. On aura ainsi une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable, indexée par $\overline{\mathbb{R}}$, croissante et continue à droite. Le seul obstacle est que peut-être λ ne sera pas σ -finie sur les $\mathcal{T}^t$, $t \leq a$; on se limitera alors à $]a, +\infty]$ si $a \notin R$.

Une surmartingale réelle relative à $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ et à λ est une fonction f sur $R \times \Omega$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, ou encore une famille de fonctions $(f^t)_{t \in R}$, $f^t(\omega) = f(t, \omega)$, ayant les propriétés suivantes:

- 1) pour tout $t \in R$, f^t appartient à $\mathcal{T}^t$;
pour tout $t \in R$, la fonction $(f^t)^- = \text{Sup}(-f^t, 0)$ est λ -intégrable, de sorte que f^t a une intégrale, finie ou égale à $+\infty$;
- 2) pour $s \leq t$, $f^s \geq ((f^t)^s)$ λ -presque partout, où $((f^t)^s)$ est une espérance conditionnelle de f^t pour la tribu $\mathcal{T}^s$ et la mesure λ . On peut écrire cela sans invoquer d'espérances conditionnelles; pour tout $A \in \mathcal{T}^s$, $\int_A f^s d\lambda \geq \int_A f^t d\lambda$; et c'est alors vrai aussi pour tout $A \in \mathcal{T}^s \vee \mathcal{N}_\lambda$. Deux surmartingales f, g , sont λ -équivalentes, si, pour tout $t \in R$, f^t et g^t sont égales λ -presque partout. Une modification d'une surmartingale est une surmartingale équivalente.

Une surmartingale est dite régulière, si, pour λ -presque tout ω , la fonction $t \rightarrow f^t(\omega)$ est réglée et continue à droite, à valeurs finies ou égales à $+\infty$.

Remarque (4,1 bis). Soit $\bar{f}$ une surmartingale sur $R \times \Omega$, relativement à la famille de tribus $(\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda)_{t \in R}$. Elle est trivialement équivalente à une surmartingale f par rapport à $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$; en effet, pour tout t , $\bar{f}^t$ est λ -presque partout égale à f^t , appartenant à $\mathcal{T}^t$.

(4,2) La suite d'approximation décroissante dans R

Nous supposerons choisie une fois pour toutes une suite croissante $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in N}$ de parties de R ; chacune, R_n , est l'ensemble des points d'une suite finie ou infinie croissante cofinale à R , et la réunion R' des R est dense à droite dans R (i.e. tout $t \in R$ est limite de points $t' \in R'$, $t' \geq t$; cela

revient exactement à dire que R' est dense et contient les points de R isolés à droite). Une telle suite existe toujours. On peut en effet trouver un sous-ensemble dénombrable R' dense à droite dans R . Construisons ensuite une suite croissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\overline{\mathbb{R}}$, $r_0 = -\infty$, cofinale à R , telle que chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$ rencontre R' . Si R a un plus grand élément, r_n sera égale à ce plus grand élément pour $n \geq 1$. Chaque ensemble $R' \cap [r_n, r_{n+1}]$ est non vide, et est fini ou dénombrable; soit ρ_n une surjection de $\mathbb{N}$ sur cet ensemble. Il suffit alors de prendre pour R_n l'ensemble des $\rho_j(k)$, pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$. La suite des R_n est bien croissante; la réunion des R_n est l'ensemble des $\rho_j(k)$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, soit R' .

Ensuite R_n contient au moins un point, $\rho_j(0)$, dans chaque intervalle $[r_j, r_{j+1}]$, donc il est cofinal à R ; et il en contient au plus $n + 3$, à savoir les $\rho_j(k)$, $0 \leq k \leq n$, et éventuellement en plus r_j et r_{j+1} ; donc il est l'ensemble des points d'une suite, finie ou infinie, croissante. Nous appellerons alors t_n le plus petit élément de R_n majorant t ; pour tout $t \in R$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, de limite t ; en outre, si $t \in R'$, t_n est égal à t pour n assez grand. Enfin, pour s et $t \in R$, on a $s \leq t$ si et seulement si on a $s_n \leq t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite des t_n sera la suite d'approximation décroissante de t définie par la suite $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $R = \mathbb{R}$, on prend habituellement pour R_n l'ensemble des $k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$, et alors R' est l'ensemble des nombres dyadiques.

Une surmartingale f est dite $\mathcal{R}$ -régulière, si elle est partout finie, et toutes les intégrales $\int_{\Omega} f^t d\lambda$ sont finies et bornées supérieurement, si elle est régulière, et si, pour tout t et tout ω , $f^t(\omega)$ est la limite de $f^{t_n}(\omega)$ pour n infini, si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire.

Théorème (4,3) des surmartingales

1) Si f est une surmartingale, la fonction (à valeurs finies ou $+\infty$):

$$t \rightarrow J^t = \int_{\Omega} f^t d\lambda$$
est décroissante; si f est régulière, ou admet une modification régulière, cette fonction est continue à droite. Inversement, si

$t \rightarrow J' = \int_{\Omega} f' d\lambda$ est finie et continue à droite, f admet des modifications finies et régulières, et elle est elle-même régulière si R est dénombrable.

2) Une surmartingale f' sur $R' \times \Omega$, partout finie, régulière, pour laquelle $J' = \int_{\Omega} f' d\lambda$ est majorée par un nombre $< +\infty$ fixe, admet un prolongement unique en une surmartingale $\mathcal{R}$ -régulière sur $R \times \Omega$, justement en posant $f^t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\omega)$ si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire.

3) Deux modifications régulières d'une surmartingale sont λ -presque partout égales (si ${}_1f, {}_2f$, sont ces modifications, alors, pour λ -presque tout ω , ${}_1f^t(\omega) = {}_2f^t(\omega)$ pour tout $t \in R$);

4) Pour qu'une fonction f sur $R \times \Omega$ soit une surmartingale régulière, (il faut et) il suffit qu'elle ait les propriétés suivantes: $f^t \in \mathcal{T}^t$ pour tout $t \in R$; pour $s', t' \in R'$, $s' \leq t'$, $(f^{s'})^-$ et $(f^{t'})^-$ sont λ -intégrables, et on a l'inégalité des surmartingales, $\int_A f^{s'} d\lambda \geq \int_A f^{t'} d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{T}^{s'}$; pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow f^t(\omega)$ est continue à droite;

5) Pour qu'une fonction f sur $R \times \Omega$ soit une surmartingale $\mathcal{R}$ -régulière, (il faut et) il suffit que, d'une part, sa restriction à $R' \times \Omega$ soit une surmartingale finie à integrale $t' \rightarrow J' = \int_{\Omega} f^{t'} d\lambda$ bornée supérieurement et continue à droite, et que, d'autre part, pour tout t et pour tout ω , $f^t(\omega)$ soit la limite de $f^{t^n}(\omega)$ pour n infini si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire.

6) Si f est une surmartingale régulière ≥ 0 , et si O^t est l'ensemble des ω tels que $f^t(\omega) = 0$, il existe $\Omega' \subset \Omega$, portant λ , tel que la suite $(\Omega' \cap O^t)_{t \in R}$ soit croissante et continue à droite ($O^t = \bigcap_{t' > t} O^{t'}$ si t est non isolé à droite dans R);

7) Si f est une surmartingale régulière, et si F^t est l'ensemble des ω pour lesquels $f^t(\omega) < +\infty$, il existe $\Omega' \subset \Omega$, portant λ , tel que la suite $(F^t \cap \Omega')_{t \in R}$ soit croissante;

8) *Toute limite d'une suite croissante de surmartingales régulières est une surmartingale régulière.*

Commentaires. La plupart de ces résultats sont classiques, nous ne les redémontrons pas [1]. Les points 1, 2, 3, 6, 7, 8, sont classiquement énoncés sous cette forme (souvent toutefois on suppose que toutes les $\mathcal{F}^t$ contiennent la tribu $\mathcal{N}_\lambda$ des parties λ -négligeables ou conégligeables de Ω . Mais, si l'on choisit justement le prolongement, pour $t \in R$, en posant $f^t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{t_n}(\omega)$ si cette limite existe et 0 si elle n'existe pas, comme $f^{t_n} \in \mathcal{F}^{t_n}$, f^t appartient à toutes les $\mathcal{F}^{t_n}$, donc à $\mathcal{F}^t = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^{t_n}$, et non seulement à $\mathcal{F}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$.

Voyons le point 4. On sait que la fonction f' , restriction de f à $R' \times \Omega$, est une surmartingale régulière; donc elle admet un prolongement régulier $\bar{f}$ par 2; mais, puisque, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \bar{f}^t(\omega)$ et $t \rightarrow f^t(\omega)$ sont continues à droite et coïncident sur R' , elles coïncident sur R , donc, puisque $f^t \in \mathcal{F}^t$ pour tout $t \in R$, f est bien une surmartingale régulière. Pour 5: les conditions énoncées disent que la restriction f' de f à $R' \times \Omega$ est une surmartingale régulière; et alors f est exactement son prolongement suivant 2, donc est une surmartingale $\mathcal{R}$ -régulière sur $R \times \Omega$.

Remarque. Nous avons vu à (4, 1) qu'on peut toujours prolonger la famille de tribus en une famille plus grande, indexée par $\bar{\mathbb{R}}$ si $a = \inf R$ est dans R , sinon par $]a, +\infty]$. On peut de même toujours prolonger une surmartingale régulière f donnée sur $R \times \Omega$. Si $t \in \bar{\mathbb{R}}$ est adhérent à $R \cap [t, +\infty]$, on prendra pour $f^t(\omega)$ la limite de $f^u(\omega)$ lorsque $u \in R \cap [t, +\infty]$ tend vers t , si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas. On aura ainsi une surmartingale régulière sur $S \times \Omega$. La complémentaire de S est réunion d'intervalles $[\alpha_v, \beta_v[$ ou $] \alpha_v, \beta_v[$, et de $[b, +\infty]$ ou $]b, +\infty]$, $b = \sup R$. Pour les t d'un $[\alpha_v, \beta_v[$ ou $] \alpha_v, \beta_v[$, on prendra $f^t = f^{\beta_v}$, pour les t d'un $] \alpha_v, \beta_v[$, on prendra $f^t = f^{\alpha_v}$. Si $b \in R$, on pourra, pour $t \geq b$, prendre $f^t = f^b$. Par contre, si $b \notin R$, la surmartingale ne pourra peut-être pas être prolongée jusqu'à b . Dans tous les cas on aura une famille $(\mathcal{F}^t)_{t \in I}$ et une surmartingale régulière $(f^t)_{t \in I}$ sur $I \times \Omega$, où I est un intervalle $|a, b|$, avec ou sans l'une ou l'autre de ses extrémités.

[1] On les trouvera par exemple dans P. A. MEYER [1].

(4,4) Surmartingales à valeurs mesures. Soient toujours Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω , λ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, et $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable, indexée par $R \subset \overline{\mathbb{R}}$, croissante et continue à droite, λ σ -finie sur toutes les $\mathcal{T}^t$.

Soient ensuite Y un ensemble, $\mathcal{Y}$ une tribu sur Y . Une surmartingale de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, relative à $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ et à λ , est une famille de mesures $(v_\omega^t)_{(t, \omega) \in R \times \Omega}$ indexée par $R \times \Omega$, ayant les propriétés suivantes:

1) Pour tout $t \in R$, $\omega \rightarrow v_\omega^t$ appartient à $\mathcal{T}^t$ (autrement dit, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, $\omega \rightarrow v_\omega^t(B)$ appartient à $\mathcal{T}^t$). Alors on peut considérer l'intégrale de mesures $J^t = \int_{\Omega} v_\omega^t d\lambda(\omega)$; on la supposera toujours σ -finie.

2) Pour $s, t \in R$, $s \leq t$, et tout $A \in \mathcal{T}^s$, on a l'inégalité des surmartingales:

$$\int_A^* v_\omega^s d\lambda(\omega) \geq \int_A^* v_\omega^t d\lambda(\omega) \text{ (en particulier, } J^s \geq J^t \text{)}.$$

Si Y est réduit à un point, il y a identité entre l'ensemble des mesures ≥ 0 sur Y et l'ensemble des nombres réels ≥ 0 , et les surmartingales de mesures sur Y sont simplement les surmartingales réelles ≥ 0 .

Rappelons que, si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, la limite v existe toujours, elle est définie par $v(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(B)$ pour tout $B \in \mathcal{Y}$. Supposons v σ -finie. On a alors $v^*(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*(f)$ pour toute $f \geq 0$. [1] En particulier, f est v -négligeable si et seulement si elle est v_n -négligeable pour tout n . Soit f une fonction sur Y à valeurs dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$; f est v -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable si et seulement si elle est v_n -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable pour tout n . Il est évident que la première propriété implique la seconde. Supposons inversement f v_n -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable pour tout n ; il existe une suite croissante $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $Y_n \in \mathcal{Y}$ portant v_n , tel que la restriction de f à Y_n soit $(Y_n \cap \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable; alors, si $Y' = \bigcup_n Y_n$, Y' porte toutes les v_n donc v , et la restriction de f à Y' est $(Y' \cap \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable. En particulier, si $\mathcal{Z}$ est v -dénombrablement engendrée (donc v_n -dénombrablement

[1] En utilisant Lebesgue-Nikodym, on pose $v_n = p_n v$, où p_n croît avec n et tend vers 1 pour n infini, et c'est alors le lemme de Fatou.

engendrée pour tout n), f est $(v, \mathcal{Z})$ -mesurable si et seulement si elle est $(v_n, \mathcal{Z})$ -mesurable pour tout n .

Appelons alors $J^{-\infty}$ la borne supérieure de toutes les J^t , $t \in R$; c'est la limite d'une suite croissante. Supposons la σ -finie. Alors $f \geq 0$ sur Y sera $J^{-\infty}$ -négligeable si et seulement si elle est J -négligeable pour tout t , et $f: Y \rightarrow Z$ sera $J^{-\infty}$ -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable si et seulement si elle est J^t -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable pour tout t ; si $\mathcal{Z}$ est $J^{-\infty}$ -dénombrablement engendrée, f sera $(J^{-\infty}, \mathcal{Z})$ -mesurable, si et seulement si elle est $(J^t, \mathcal{Z})$ -mesurable pour tout t .

Nous avons supposé toutes les J^t - σ -finies; cela n'entraîne évidemment pas que $J^{-\infty}$ soit σ -finie. Il n'y a néanmoins aucun inconvénient grave à le supposer, car c'est en tout cas vrai si on se limite aux $t \geq t_0 \in R$ fixé, puisqu'alors la mesure $J^{-\infty}$ est remplacée par J^{t_0} . Et, dans la plupart des énoncés, on verra aisément qu'une propriété vraie pour $R \cap [t_0, +\infty]$, quelque soit t_0 , est aussi vraie pour R . Nous supposerons donc généralement $J^{-\infty}$ - σ -finie, et le lecteur rétablira de lui-même les énoncés si cette hypothèse n'est pas réalisée. Plus généralement, J étant une mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$, on appellera J -surmartingale, une surmartingale de mesures pour laquelle $J \geq J^t$ pour tout t , et, sans le mentionner explicitement, nous supposerons J σ -finie.

Proposition (4,5). 1) Soit $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, $\omega \rightarrow v_{\omega}^t$ appartenant à la tribu $\mathcal{T}^t$, $J \geq J^t = \int_{\Omega}^* v_{\omega}^t d\lambda(\omega)$ une mesure σ -finie sur $(Y, \mathcal{Y})$. Alors $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ est une surmartingale, si et seulement si, pour toute $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, $(v_{\omega}^t(f))_{(t, \omega)}$ est une surmartingale; et alors, pour toute $f \geq 0$ J -mesurable, $((v_{\omega}^t)^*(f))_{(t, \omega)}$ est une surmartingale pour la famille de tribus $(\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_{\lambda})_{t \in R}$.

2) Soient $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, $\omega \rightarrow v_{\omega}^t$ dans $\mathcal{T}^t$, $J \geq J^t = \int_{\Omega}^* v_{\omega}^t d\lambda(\omega)$ σ -finie; et supposons que $\mathcal{Y}$ soit J -dénombrablement engendrée. Si, pour s, t , fixés, $s \leq t$, la fonction $\omega \rightarrow v_{\omega}^t$ admet une espérance conditionnelle $\omega \rightarrow \rho_{\omega}^{t,s}$ relativement à $\mathcal{T}^s$, alors l'inégalité des surmartingales: $\int_A^* v_{\omega}^s d\lambda(\omega) \geq \int_A^* v_{\omega}^t d\lambda(\omega)$ pour toute $A \in \mathcal{T}^s$, est équivalente à: pour λ -presque tout ω , $v_{\omega}^s \geq \rho_{\omega}^{t,s}$.

3) Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale pour la famille de tribus $\hat{\mathcal{T}}_\lambda^t$ (où $\hat{\mathcal{T}}_\lambda^t$ est la complétée de Lebesgue de $\mathcal{T}^t$ pour la mesure λ^t , restriction de λ à $\mathcal{T}^t$), elle est λ -équivalente à une surmartingale pour la famille de tribus $\mathcal{T}^t$.

Démonstration. 1) Il est équivalent de dire que $\omega \rightarrow v_\omega^t$ est dans $\mathcal{T}^t$, ou que, pour toute $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, $\omega \rightarrow v_\omega^t(f)$ est dans $\mathcal{T}^t$; et il est équivalent d'écrire que, pour $s \leq t$, $\int_A v_\omega^s d\lambda(\omega) \geq \int_A v_\omega^t d\lambda(\omega)$ ou que, pour toute $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, $\int_A v_\omega^s(f) d\lambda(\omega) \geq \int_A v_\omega^t(f) d\lambda(\omega)$.

Si toutes ces propriétés sont réalisées, et si $f \geq 0$ est J -mesurable, elle est somme $f' + f''$, $f' \in \mathcal{Y}$, f'' J -négligeable, f' et $f'' \geq 0$; alors, pour t fixé, $\omega \rightarrow v_\omega^t(f')$ est dans $\mathcal{T}^t$, $\omega \rightarrow v_\omega^t(f'')$ est λ -négligeable, donc $\omega \rightarrow v_\omega^t(f)$ est dans $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$; pour $s \leq t$, on a encore

$$\int_A^* (v_\omega^s)^*(f) d\lambda(\omega) = \left(\int_A^* v_\omega^s d\lambda(\omega) \right)^*(f) \geq \left(\int_A^* v_\omega^t d\lambda(\omega) \right)^*(f) = \int_A^* (v_\omega^t)^*(f) d\lambda(\omega).$$

donc $(t, \omega) \rightarrow (v_\omega^t)^*(f)$ est encore une surmartingale.

2) La deuxième condition entraîne trivialement la première car

$$\int_A^* v_\omega^t d\lambda(\omega) = \int_A^* \rho_\omega^{t,s} d\lambda(\omega).$$

Inversement, si la première est réalisée, on saura que, pour s, t , fixés, $s \leq t$, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on a l'inégalité des surmartingales

$$\int_A^* v_\omega^s(B) d\lambda(\omega) \geq \int_A^* v_\omega^t(B) d\lambda(\omega)$$

pour $A \in \mathcal{T}^s$, donc l'inégalité des espérances conditionnelles: $v_\omega^s(B) \geq \rho_\omega^{t,s}(B)$ pour λ -presque tout ω . Alors la proposition (2, 7 bis) donne le résultat.

3) résulte du lemme (1, 12 bis), appliqué à chaque fonction $\omega \rightarrow v_\omega^t$, t fixé dans R .

(4,6) Surmartingale de mesures régulière. On dit qu'une surmartingale de mesures $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est régulière, si, pour toute fonction $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, la surmartingale $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est régulière. D'après le point 8 du théorème (4.3), la limite d'une suite croissante de surmartingales régulières est une surmartingale régulière.

Proposition (4,7). Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale (J σ -finie).

1) Si la surmartingale est régulière, la fonction $t \rightarrow J^t = \int_{\Omega}^* v_\omega^t d\lambda(\omega)$,

qui est décroissante, est continue à droite; la réciproque est vraie si R est dénombrable;

2) Si la surmartingale est régulière, alors: pour toute $f \geq 0$ J -négligeable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^t -négligeable; si $f \geq 0$ est J -mesurable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^t -mesurable, et, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow (v_\omega^t)^*(f)$ est réglée et continue à droite; si $f \geq 0$ est J -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^t -intégrable; si $\mathcal{B}$ est un ensemble J -déterminant, pour λ -presque tout ω , pour tout t , il est v_ω^t -déterminant; et, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t$ est continue à droite de R dans $M_{\mathcal{B}}$ (mais non nécessairement réglée). Enfin la surmartingale admet des modifications régulières pour lesquelles toutes les mesures appartiennent à $M_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. Pour $f \geq 0$ dans $\mathcal{Y}$, si $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière, $t \rightarrow \int_{\Omega}^* v_\omega^t(f) d\lambda(\omega) = J^t(f)$ (qui est décroissante) est continue à droite, ce qui veut exactement dire que $t \rightarrow J^t$ est décroissante et continue à droite.

Inversement, supposons $t \rightarrow J^t$ continue à droite et R dénombrable. Soit $Y = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$, $J(Y_m) < +\infty$. Pour toute fonction $f \geq 0$, dans $\mathcal{Y}$, bornée, portée par Y_m , $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale, et $t \rightarrow J^t(f) = \int_{\Omega}^* v_\omega^t(f) d\lambda(\omega)$ est continue à droite et finie, donc c'est une surmartingale régulière, par le point 1 de (4,3). Comme une limite d'une suite croissante de surmartingales

régulières est régulière (point 8 de (4,3)), on voit que, pour toute fonction $f \geq 0$ sur Y , appartenant à $\mathcal{Y}$ (qui est donc limite croissante de combinaisons linéaires finies de fonctions de $\mathcal{Y}$ portées par les Y_m et bornées), $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est encore régulière, donc $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est régulière.

Supposons désormais $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ régulière. Supposons f J -négligeable. Elle est majorée par une fonction g de $\mathcal{Y}$, J -négligeable. Pour $t' \in R'$, g est J' -négligeable, donc, pour λ -presque tout ω , elle est $v_\omega^{t'}$ -négligeable. Donc, R' étant dénombrable, pour λ -presque tout ω , g est $v_\omega^{t'}$ -négligeable pour tout $t' \in R'$. Mais, la surmartingale étant supposée régulière, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(g)$ est continue à droite, et nulle sur R' , donc nulle sur R . On voit bien que, pour λ -presque tout ω , pour tout $t \in R$, f est v_ω^t -négligeable.

Supposons maintenant $f \geq 0$ J -mesurable. On a $f = f' + f''$, $f' \in \mathcal{Y}$, f'' J -négligeable, f' et $f'' \geq 0$; alors $(v_\omega^t(f'))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière, et pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow (v_\omega^t)^*(f'')$ est nulle, donc $((v_\omega^t)^*(f))_{(t,\omega)}$, qui est une surmartingale pour $(\mathcal{F}^t \setminus \mathcal{N}_\lambda)_{t \in R}$ par la proposition précédente, est régulière. Comme $v_\omega^t(f'') = 0$, f est v_ω^t -mesurable. Si f est J -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $(v_\omega^t)^*(f)$ est fini (théorème (4,3), points 1 et 3), donc f est v_ω^t -intégrable.

Soit enfin $\mathcal{B}$ J -déterminant. Puisque $J(\mathbb{C}Y') = 0$, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_\omega^t(\mathbb{C}Y') = 0$. D'autre part, pour tout m , Y_m est J -intégrable; donc, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(Y_m)$ est finie (réglée et continue à droite); donc $\mathcal{B}$ est bien v_ω^t -déterminant. Alors pour λ -presque tout ω , puisque $t \rightarrow v_\omega^t(B)$ est continue à droite pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, $t \rightarrow v_\omega^t$ est continue à droite de R dans $M_{\mathcal{B}}$. (Mais elle n'est pas nécessairement réglée; pour $t_0 \in R$, le fait que, lorsque $t < t_0$ tend vers t_0 , $v_\omega^t(B)$ ait une limite, pour $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, ne prouve pas qu'il existe une mesure $v_\omega^{t_0-} \in M_{\mathcal{B}}$, telle que $v_\omega^t(B)$ ait la limite $v_\omega^{t_0-}(B)$, pour $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$).

Soit U l'ensemble des (t, ω) pour lesquels $v_\omega^t \in M_{\mathcal{B}}$; nous venons de voir que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $(t, \omega) \in U$; d'autre part, pour tout t , l'ensemble des ω tels que $(t, \omega) \in U$ appartient à $\mathcal{F}^t$, car il est défini par les inégalités $v_\omega^t(\mathbb{C}Y') = 0$, $v_\omega^t(Y_m) < +\infty$ pour tout m . Si donc on remplace v_ω^t par 0 pour $(t, \omega) \notin U$, on obtient une modification λ -presque partout égale à la surmartingale donnée, donc encore régulière, mais pour laquelle toutes les mesures sont dans $M_{\mathcal{B}}$.

Proposition (4,8). Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Soit f une application de Y dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, J -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable. Pour λ -presque tout ω , pour tout $t \in \mathbb{R}$, f est v_ω^t -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable.

Démonstration. Il existe $Y' \in \mathcal{Y}$, portant J , tel que la restriction de f à Y' soit $(Y' \cap \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable. La proposition précédente dit que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , Y' porte v_ω^t , d'où le résultat.

Proposition (4,8 bis). Soit $(v_\omega)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Soit $y \rightarrow \rho_y$ une fonction à valeurs mesures dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, J -mesurable, $\rho = \int_Y^* \rho_y dJ(y)$ σ -finie, $\mathcal{Z}$ ρ -dénombrablement engendrée. Pour λ -presque tout ω , pour tout t , $y \rightarrow \rho_y$ est v_ω^t -mesurable; la fonction $\omega \rightarrow \int_Y^* \rho_y dv_\omega^t(y)$ appartient à $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$, et

$$\int_Y^* \rho_y dJ'(y) = \int_{\Omega} d\lambda(\omega) \int_Y^* \rho_y dv_\omega^t(y).$$

Démonstration. Quand il n'y a qu'une seule valeur de t , c'est la proposition (1,17) (la tribu μ -mesurable $\hat{\mathcal{X}}_\mu$ de cette proposition étant même remplacée par la tribu plus grande $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$), la fin résulte donc entièrement de cette proposition.

Montrons le début. D'après (1,12 bis), il existe $y \rightarrow \overline{\rho_y}$, J -presque partout égale à $y \rightarrow \rho_y$, mais appartenant à $\mathcal{Y}$; alors $y \rightarrow \overline{\rho_y}$ et $y \rightarrow \rho_y$, pour λ -presque tout ω , pour tout t , sont v_ω^t -presque partout égales; la première étant dans $\mathcal{Y}$, la deuxième est v_ω^t -mesurable.

Proposition (4,9). Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Si $Y' \in \mathcal{Y}$, les mesures induites $((v_\omega^t)_{Y'})_{(t,\omega)}$ forment une $J_{Y'}$ -surmartingale régulière. Si f est une fonction ≥ 0 de $\mathcal{Y}$, et si fJ est σ -finie, les mesures $(fv_\omega^t)_{(t,\omega)}$ forment une (fJ) -surmartingale régulière. Si h est une application

$(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable de Y dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, et si $h(J)$ est σ -finie, les mesures images $(h(v_\omega^t))_{(t, \omega)}$ forment une $h(J)$ -surmartingale régulière de mesures sur $(Z, \mathcal{Z})$.

Evident.

On peut maintenant donner une propriété relative aux fonctions à valeurs dans un Banach.

Lemme (4,10). Soit J une mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Y , J -intégrables, à valeurs dans un Banach F , qui converge vers f dans $L^1(Y, \mathcal{Y}, J; F)$. On peut en extraire une suite partielle $(f_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$, et trouver une fonction $h \geq 0$ J -intégrable, telle que, pour tout p , on ait $\|f_{n_p}\|_F \leq h$, et $\|f - f_{n_p}\|_F \leq (1/2^p)h$.

Démonstration. Il suffit de prendre f_{n_p} telle que $\|f - f_{n_p}\|_{L^1(J; F)} \leq 1/2^{2p+1}$. Alors on a $\|f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\|_{L^1(J; F)} \leq 1/2^{2p}$, donc, si nous posons

$$h = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^p \|f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\|_F + \|f_{n_0}\|_F,$$

h est une fonction ≥ 0 (finie ou non) sur Y , J -mesurable, et J -intégrable, car

$$J(h) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} + \|f_{n_0}\|_{L^1(J; F)} < +\infty;$$

et l'on a: $\|f_{n_0}\|_F \leq h$, puis

$$\|f_{n_{p+1}}\|_F \leq \|f_{n_0}\|_F + \sum_{k=0}^p \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_F \leq h,$$

et

$$\begin{aligned} \|f - f_{n_p}\|_F &\leq \sum_{k=p}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_F \\ &\leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=p}^{+\infty} 2^k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_F \leq \frac{1}{2^p} h. \end{aligned}$$

Proposition (4,10 bis). Soit $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Soit f une fonction sur Y , à valeurs dans un Banach F , J -intégrable. Pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_{ω}^t -intégrable, et, pour λ -presque tout ω , la fonction $t \rightarrow v_{\omega}^t(f)$ est réglée et continue à droite.

Démonstration. Il existe une suite de fonctions f_n , combinaisons linéaires finies, à coefficients dans F , de fonctions réelles ≥ 0 appartenant $\mathcal{V}$ et J -intégrables, qui converge vers f dans $L^1(Y, J; F)$. Déterminons une fonction h et une suite partielle $(f_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ comme dans le lemme précédent. Grâce à la forme particulière des f_{n_p} , pour λ -presque tout ω , chaque f_{n_p} est v_{ω}^t -intégrable pour tout t , et chaque fonction $t \rightarrow v_{\omega}^t(f_{n_p})$ est réglée et continue à droite (proposition (4,7)). Pour λ -presque tout ω , pour tout t , h est v_{ω}^t -intégrable, et $t \rightarrow v_{\omega}^t(h)$ est finie, réglée, et continue à droite, donc localement bornée sur R . Mais, si f_{n_p} est v_{ω}^t -intégrable pour tout p et si h est v_{ω}^t -intégrable, l'inégalité $\|f - f_{n_p}\|_F \leq \frac{1}{2^p} h$ prouve que f est v_{ω}^t -intégrable, et que $v_{\omega}^t(f_{n_p})$ converge pour p infini vers $v_{\omega}^t(f)$. En outre, pour λ -presque tout ω , l'inégalité $\|v_{\omega}^t(f_{n_p}) - v_{\omega}^t(f)\|_F \leq \frac{1}{2^p} v_{\omega}^t(h)$ montre que la suite de fonctions $t \rightarrow v_{\omega}^t(f_{n_p})$ converge vers la fonction $t \rightarrow v_{\omega}^t(f)$ localement uniformément sur R ; et une limite localement uniforme de fonctions réglées et continues à droite, à valeurs dans un espace métrique complet, est réglée et continue à droite, cqfd.

Proposition (4,10 ter). Soit J une mesure sur $(Y, \mathcal{V})$, σ -finie, $\mathcal{V}$ J -dénombrablement engendrée, et soit $\mathcal{B}$ un ensemble J -déterminant. Soit $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{V})$, $\omega \rightarrow v_{\omega}^t$ appartenant à $\mathcal{T}^t$ pour tout t , avec $J \geq J^t = \int_{\Omega}^* v_{\omega}^t d\lambda(\omega)$. Si la famille $(v_{\omega}^t(B))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale (resp. une surmartingale régulière) pour tout $B \in \mathcal{B}$, alors $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale (resp. une surmartingale régulière).

Démonstration. 1) Faisons la démonstration avec "surmartingale régulière", on en déduira le cas "surmartingale" en réduisant R à deux élé-

ments. Appelons $\mathfrak{L}_m$ l'ensemble des $B \in \mathscr{Y}' \cap Y_m$, telles que $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ et $(v_\omega^t(Y_m \setminus B))_{(t,\omega)}$ soient des surmartingales régulières. C'est un ensemble stable par complémentation à Y_m . Il est stable par réunion des suites croissantes. Soit en effet $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{L}_m$, croissante, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$.

D'une part $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière, comme limite d'une suite croissante de surmartingales régulières. Ensuite $(v_\omega^t(Y_m \setminus B))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale, comme limite décroissante d'une suite de surmartingales ≥ 0 à intégrales finies; pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(Y_m \setminus B)$ est réglée et continue à droite, comme différence de deux fonctions finies réglées et continues à droite, $t \rightarrow v_\omega^t(Y_m)$ et $t \rightarrow v_\omega^t(B)$; donc $(v_\omega^t(Y/B))_{(t,\omega)}$ est aussi une surmartingale régulière, ce qui prouve bien la stabilité affirmée. Comme ensuite $\mathfrak{L}_m$ contient $Y_m \cap \mathscr{B}$, il contient $Y_m \cap \mathscr{Y}$ par le lemme A. Donc, pour tout $B \in \mathscr{Y} \cap Y_m$, $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière; par addition dénombrable (c. à d. par addition finie et passage à la limite des suites croissantes), il en est encore ainsi pour $B \in \mathscr{Y} \cap Y'$.

Comme ensuite (prop. (4,7)), pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_\omega^t(\mathbf{G}Y') = 0$, il en est encore ainsi pour tout $B \in \mathscr{Y}$, et $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière.

Corollaire (4, 10 quarto) (Unicité des modifications régulières)

Si J est une mesure (σ -finie) sur $(Y, \mathscr{Y})$, et si $\mathscr{Y}$ est J -dénombrablement engendrée, deux modifications régulières d'une J -surmartingale sont λ -presque partout égales. Plus généralement, deux surmartingales régulières sur $R \times \Omega$, qui sont λ -presque partout égales sur $R' \times \Omega$, sont λ -presque partout égales sur $R \times \Omega$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble J -déterminant; pour λ -presque tout ω , pour tout t , il est ${}_1v_\omega^t$ -déterminant et ${}_2v_\omega^t$ -déterminant. Les deux surmartingales régulières $({}_1v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$, $({}_2v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$, $B \in \mathscr{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, sont λ -presque partout égales sur $R' \times \Omega$, donc aussi sur $R \times \Omega$; comme alors $\mathscr{B}$ est dénombrable, on voit que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , pour tout $B \in \mathscr{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, ${}_1v_\omega^t(B) = {}_2v_\omega^t(B)$, donc ${}_1v_\omega^t = {}_2v_\omega^t$ par le lemme F.

(4.11) Surmartingales $\mathcal{K}$ -régulières, $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulières

Supposons que Y soit un espace topologique, $\mathcal{Y}$ sa tribu borélienne. Supposons donnée une suite de compacts métrisables disjoints K_m , $m \in \mathbb{N}$, de Y , de réunion Y' . On introduira l'espace $\tilde{Y}'$, somme topologique des K_m , donc espace localement compact polonais, à injection continue dans Y . On notera par $\mathcal{K}$ l'espace $C'^+(\tilde{Y}')$ des mesures de Radon ≥ 0 sur $\tilde{Y}'$, qu'on munira de la topologie vague. Si l'on convient d'identifier une fonction sur Y' à sa prolongée par 0 sur $\complement Y'$, et une mesure de Radon sur $\tilde{Y}'$ à son image par l'injection $\tilde{Y}' \rightarrow Y$, on voit qu'il y a identité entre $\mathcal{K} = C'^+(\tilde{Y}')$ et l'espace des mesures ≥ 0 sur Y , portées par Y' et donnant à chaque K_m une mesure finie.

Si J est une mesure sur $(Y, \mathcal{Y})$, portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de J -mesures finies, on pourra, par concassage [1] choisir ces compacts disjoints, donc trouver un $\mathcal{K}$ tel que $J \in \mathcal{K}$. En particulier, si J est une mesure de Radon sur Y , et si les parties compactes de Y sont métrisables (par exemple si Y est souslinien ou métrisable), ce sera possible.

Pour $\mathcal{K}$ donné, on appellera $\mathcal{K}$ -surmartingale de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, une surmartingale pour laquelle toutes les v_ω^t appartiennent à $\mathcal{K}$, ainsi que les

$$J^t = \int_{\Omega}^* v_\omega^t d\lambda(\omega) \text{ et } J^{-\infty} = \sup_{t \in R} J^t. \text{ Si } J \in \mathcal{K}, \text{ toute } J\text{-surmartingale admet}$$

une modification qui est une $\mathcal{K}$ -surmartingale. Une surmartingale $(v_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est dite $\mathcal{K}$ -régulière, si, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t$ est une fonction réglée et continue à droite de R dans $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de R comme à (4,2); $(v_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est dite $\mathcal{K}$ -surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulière, si elle est une $\mathcal{K}$ -surmartingale $\mathcal{K}$ -régulière, et si en outre, pour tout t et tout ω , v_ω^t est la limite des $v_\omega^{t_n}$ dans $\mathcal{K}$ si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas.

Convention de langage (4,11 bis). Nous conviendrons d'employer les abréviations suivantes:

- 1) Si nous ne faisons sur $(Y, \mathcal{Y}, J)$ aucune autre hypothèse que la σ -finitude de J , nous ne le mentionnerons même pas, comme convenu antérieurement.

[1] Voir BOURBAKI [1], page 18, SCHWARTZ [1] page 46.

2) Si en outre $\mathcal{V}$ est J -dénombrablement engendrée, nous écrirons au début de l'énoncé: *Hypothèse J -dénombrable*.

3) Si Y est un espace topologique, $\mathcal{V}$ sa tribu borélienne, $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts métrisables disjoints définissant un espace $\mathcal{X}$ indiqué antérieurement, et si J est portée par $Y' = \bigcup_m K_m$ et donne aux K_m des mesures finies, nous écrirons au début de l'énoncé: *Hypothèse J -compacte*.

Lemme (4,12). *Soit D_m un ensemble total dans $C^+(K_m)$, $1 \in D_m$. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de Radon ≥ 0 sur K_m (ou un filtre quelconque). Pour que les μ_n aient une limite dans $C'^+(K_m)$ pour n infini (resp. aient une limite μ), il faut et il suffit que, pour toute $\phi \in D_m$, les $\mu_n(\phi)$ aient une limite (resp. convergent vers $\mu(\phi)$).*

Démonstration. Si μ_n converge vers μ , bien évidemment $\mu_n(\phi)$ converge vers $\mu(\phi)$ pour toute $\phi \in D_m$.

Inversement, supposons que $\mu_n(\phi)$ ait une limite pour toute $\phi \in D_m$; alors les μ_n sont dans une même boule de $C'(K_m)$ (car les $\mu_n(1)$ sont bornées); celle-ci est compacte; donc la convergence des μ_n vers une limite est assurée si l'on sait qu'elle n'a pas plus d'une valeur d'adhérence; or deux valeurs d'adhérence sont deux mesures qui ont la même valeur sur toute $\phi \in D_m$ total, donc coïncident.

Si maintenant les $\mu_n(\phi)$ tendent vers $\mu(\phi)$ pour toute $\phi \in D_m$, les μ_n ont une limite, qui coïncide avec μ sur D_m donc partout.

Lemme (4,13). *Soient S un ensemble, $\mathcal{S}$ une tribu de parties sur S , $(\mu_s)_{s \in S}$ une famille de mesures ≥ 0 sur K_m indexée par S , et D_m une partie totale dans $C^+(K_m)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *L'application $s \rightarrow \mu_s$ de S dans l'espace topologique $C'^+(K_m)$ est dans la tribu $\mathcal{S}$ (autrement dit l'image réciproque de tout ensemble borélien de $C'^+(K_m)$ est dans $\mathcal{S}$);*

b) *$s \rightarrow \mu_s$, en tant qu'application de S dans l'espace des mesures ≥ 0 sur K_m , est dans $\mathcal{S}$ (autrement dit, pour toute fonction $f \geq 0$ borélienne sur K_m , $s \rightarrow \mu_s(f)$ appartient à $\mathcal{S}$);*

- c) Pour toute $\phi \in C^+(K_m)$, $s \rightarrow \mu_s(\phi)$ appartient à $\mathcal{S}$;
 d) Pour toute $\phi \in D_m$, $s \rightarrow \mu_s(\phi)$ appartient à $\mathcal{S}$.

Démonstration. On peut se borner à démontrer le lemme pour D_m dénombrable, car toute partie totale contient une partie totale dénombrable. Tout d'abord a et d sont équivalentes. En effet, $\mu \rightarrow (\mu(\phi))_{\phi \in D_m}$ est une injection de $C^+(K_m)$ dans $\mathbb{R}_+^{D_m}$, qui est continue; comme $C^+(K_m)$ est lusinien, elle est borélienne de $C^+(K_m)$ sur son image, ainsi que l'application réciproque. Donc, pour que $s \rightarrow \mu_s$ soit dans $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $s \rightarrow (\mu_s(\phi))_{\phi \in D_m}$, application de S dans $\mathbb{R}_+^{D_m}$, soit dans $\mathcal{S}$, autrement dit que chaque composante, $s \rightarrow \mu_s(\phi)$, soit dans $\mathcal{S}$. Ensuite $b \Rightarrow c$, $c \Rightarrow d$, et il reste donc à montrer que a implique b .

Soit $\mathcal{Q}_m$ l'ensemble des fonctions f bornées ≥ 0 sur K_m telles que $s \rightarrow \mu_s(f)$ appartienne à $\mathcal{S}$. Le théorème de Lebesgue montre que la limite d'une suite simplement convergente de fonctions de $\mathcal{Q}_m$, bornées dans leur ensemble, est encore dans $\mathcal{Q}_m$. Par ailleurs $\mathcal{Q}_m$ contient, par l'hypothèse a , l'ensemble $C^+(K_m)$ des fonctions continues ≥ 0 sur K_m . Donc, par le lemme C, $\mathcal{Q}_m$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées ≥ 0 sur K_m . Mais, si f est borélienne ≥ 0 sur K_m , elle est limite de la suite croissante des $\inf(f, k)$, $k \in \mathbb{N}$, boréliennes bornées, donc, par Fatou, $s \rightarrow \mu_s(f)$ est encore dans la tribu $\mathcal{S}$, cqfd.

Théorème (4,15). Hypothèse J -compacte.

Soit $(v'_\omega)_{(t,\omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, $\omega \rightarrow v'_\omega$ appartenant à $\mathcal{T}^t$ pour tout t , et $J \geq J^t = \int_{\Omega}^* v'_\omega d\lambda(\omega)$.

1) Si $(v'_\omega)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale, elle est $\mathcal{K}$ -régulière, si et seulement si elle est régulière.

2) Pour tout m , soit D_m un ensemble dénombrable total de $C^+(K_m)$ formé de fonctions comprises entre 0 et 1, stable par $\sup$ et $\inf$, tel que $\phi \in D_m$ entraîne $1_m - \phi \in D_m$, et que $f \in D_m$, $g \in D_m$, $k \in \mathbb{Q}_+$ entraîne $\inf(kf, 1_m) \in D_m$, $\inf(f + g, 1_m) \in D_m$ (nous identifions chaque fonction sur K_m à sa prolongée par 0 en dehors, donc la fonction 1_m , égale à 1 sur K_m , à une fonction sur Y ,

la fonction caractéristique de K_m). Soit $D = \bigcup_m D_m$. Si, pour toute $\phi \in D$, $(v_\omega^t(\phi))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière, $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière et $\mathcal{K}$ -régulière.

Démonstration. Démontrons d'abord le point 2. La démonstration est très analogue à celle de la prop. (4, 10 ter). Soit $\mathfrak{L}_m$ l'ensemble des fonctions boréliennes f sur K_m (identifiées à leur prolongement par 0 en dehors de K_m), telles que $0 \leq f \leq 1$, et que $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ et $(v_\omega^t(1_m - f))_{(t,\omega)}$ soient des surmartingales régulières. Bien évidemment, si $f \in \mathfrak{L}_m$, alors $1_m - f \in \mathfrak{L}_m$. Ensuite $\mathfrak{L}_m$ est stable par passage à la limite des suites croissantes. Soit en effet $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathfrak{L}_m$, de limite f . D'abord $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est une limite d'une suite croissante de surmartingales régulières, donc elle est aussi une surmartingale régulière. Ensuite $(v_\omega^t(1_m - f))_{(t,\omega)}$ est limite λ -presque partout d'une suite décroissante de surmartingales intégrables (par hypothèse, $1_m \in D_m$), donc elle est une surmartingale; comme $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ et $(v_\omega^t(1_m))_{(t,\omega)}$ sont régulières à valeurs λ -presque partout finies, $(v_\omega^t(1_m - f))_{(t,\omega)}$ est aussi régulière, donc $f \in \mathfrak{L}_m$. Comme $\mathfrak{L}_m$ contient D_m , le lemme C bis dit que $\mathfrak{L}_m$ contient toutes les fonctions boréliennes sur K_m , comprises entre 0 et 1. Si alors f est une fonction borélienne sur $Y' = \bigcup_m K_m$, elle est limite croissante d'une suite de combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 de fonctions boréliennes portées par les K_m , comprises entre 0 et 1, donc $(v_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est encore une surmartingale régulière par le point 8 du théorème (4, 3); et finalement c'est encore vrai pour f borélienne ≥ 0 sur Y , puisque pour λ -presque tout ω , pour tout t , v_ω^t est portée par Y' . Cela prouve que $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière. Mais ensuite le lemme (4, 12) dit aussi, puisque, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(\phi)$ est réglée et continue à droite pour toute $\phi \in D$, que $t \rightarrow v_\omega^t$ est réglée et continue à droite comme fonction de R dans $\mathcal{K}$, et $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est $\mathcal{K}$ -régulière. Le point 1 est alors évident. Car, que $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ soit régulière ou $\mathcal{K}$ -régulière, elle vérifie les conditions de 2.

Théorème (4,16). *Hypothèse J-compacte*

- 1) Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale, $t \rightarrow J^t = \int_{\Omega}^* \overline{v_\omega^t} d\lambda(\omega)$ continue à

droite. Il existe des modifications $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$, J - $\mathcal{K}$ -surmartingales $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulières.

2) Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale sur $R' \times \Omega$, et si $t' \rightarrow J'$ est continue à droite, il existe un prolongement unique en une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulière sur $R \times \Omega$.

3) Pour que $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ soit une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulière, (il faut et) il suffit que, d'une part, sa restriction à $R' \times \Omega$ soit une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale à intégrale $t' \rightarrow J'$ continue à droite, et que, d'autre part, pour tout t et tout ω , v_ω^t soit la limite de $v_\omega^{t_n}$ dans $\mathcal{K}$ pour n infini, si cette limite existe, et 0 dans le cas contraire.

Démonstration. A) démontrons d'abord le point 2. Soit D_m un ensemble dénombrable total dans $C^+(K_m)$, $1_m \in D_m$ (1_m s'identifie aussi à une fonction sur Y , la fonction caractéristique de K_m), vérifiant les conditions de stabilité de l'énoncé du théorème (4, 15), et soit $D = \bigcup_m D_m$. On sait, pour $\phi \in D$, que $(t', \omega) \rightarrow v_\omega^{t'}(\phi) = \phi^{t'}(\omega)$ est une surmartingale finie régulière sur $R' \times \Omega$, avec $\int_\Omega^* \phi^{t'}(\omega) d\lambda(\omega) \leq J(\phi) < +\infty$; elle admet donc un prolongement en une surmartingale $\mathcal{R}$ -régulière sur $R \times \Omega$, en posant $\phi^t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(\omega)$ si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire (théorème (4, 3), point 2). Appelons $\Omega_{t,\phi}$ l'ensemble des ω pour lesquels la limite précédente existe et est finie. Alors $\Omega_{t,\phi} \in \mathcal{T}^t$ et il porte λ . En outre, il existe un ensemble Ω_ϕ^* qui porte λ , tel que, pour $\omega \in \Omega_\phi^*$, $t \rightarrow \phi^t(\omega)$ soit finie, réglée et continue à droite. Tous les $\Omega_{t,\phi}$ contiennent Ω_ϕ^* . Appelons Ω_t l'intersection de tous les $\Omega_{t,\phi}$ pour $\phi \in D$, et Ω^* l'intersection des Ω_ϕ^* . Pour tout $t \in R$, $\Omega_t \in \mathcal{T}^t$, et tous les Ω_t contiennent Ω^* qui porte λ . Soit $\omega \in \Omega_t$; alors la suite $v_\omega^{t_n}(\phi)$ a une limite finie pour n infini, pour toute $\phi \in D$. Soit au contraire $\omega \notin \Omega_t$; pour au moins une $\phi \in D$, $v_\omega^{t_n}(\phi)$ n'a pas de limite finie. Tout cela veut exactement dire, d'après le lemme (4, 12), que $(v_\omega^{t_n})_{K_m}$ a une limite dans $C'^+(K_m)$, donc $v_\omega^{t_n}$ a une limite dans $\mathcal{K}$ pour n infini, si $\omega \in \Omega_t$, et n'en a pas, si $\omega \notin \Omega_t$. Nous appellerons v_ω^t la limite des $v_\omega^{t_n}$ dans $\mathcal{K}$, si elle existe, et 0 dans le cas contraire. Si donc nous montrons que $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une $\mathcal{K}$ -surmartingale $\mathcal{K}$ -ré-

gulière, elle sera $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière. Pour $\phi \in D_m$, comme $\Omega_{t,\phi} \supset \Omega_t$, la fonction $\omega \rightarrow v_\omega^t(\phi)$ n'est autre que la fonction $\omega \rightarrow \phi^t(\omega)$, remplacée par 0 sur le complémentaire de $\Omega_t \in \mathcal{T}^t$; donc elle est dans $\mathcal{T}^t$. Ceci étant vrai pour toute $\phi \in D_m$, le lemme (4,13) dit que, pour toute f borélienne ≥ 0 sur K_m , $t \rightarrow v_\omega^t(f)$ est dans $\mathcal{T}^t$; c'est donc encore vrai pour f borélienne ≥ 0 sur Y' , puis sur Y puisque toutes les v_ω^t sont portées par Y' . Donc, pour tout t , $\omega \rightarrow v_\omega^t$ est dans $\mathcal{T}^t$. Ensuite, pour λ -presque tout ω , à savoir pour $\omega \in \Omega^*$, $v_\omega^t(\phi) = \phi^t(\omega)$ donc $(v_\omega^t(\phi))_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière, pour $\phi \in D$. Enfin, pour $\omega \in \Omega^*$, $\phi \in C^+(K_m)$, $v_\omega^t(\phi)$ est la limite des $v_\omega^{t_n}(\phi)$, donc $J(\phi) \geq \int_{\Omega}^* v_\omega^t(\phi) d\lambda(\omega)$

par Fatou. Mais alors, par application du lemme C, on voit que $J(f) \geq \int_{\Omega}^* v_\omega^t(f) d\lambda(\omega)$, pour f borélienne ≥ 0 bornée sur K_m , puis par Fatou pour $f \geq 0$ borélienne sur Y' , puis sur Y puisque toutes les v_ω^t sont portées par Y' ; donc $J \geq \int_{\Omega}^* v_\omega^t d\lambda(\omega)$. Le théorème (4,15) dit alors que $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J -surmartingale $\mathcal{H}$ -régulière, donc elle est bien une J - $\mathcal{H}$ -surmartingale $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière.

B) démontrons maintenant le point 3. Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ satisfait aux propriétés indiquées, la première condition dit que sa restriction $(v_\omega^{t'})_{(t',\omega)}$ à $\underline{R'} \times \Omega$ satisfait aux conditions de 2, donc il en existe un prolongement unique $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ en une J - $\mathcal{H}$ -surmartingale $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière et qui, à cause de la deuxième condition, est précisément $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$.

C) démontrons enfin 1. Tout d'abord, pour t fixé, pour λ -presque tout ω , $v_\omega^t(\mathbb{G}Y')$ est nul, et $\omega \rightarrow v_\omega^t(K_m)$ est fini. Donc l'ensemble Ω_t des ω pour lesquels ces deux conditions sont réalisées appartient à $\mathcal{T}^t$ (parce que $\mathbb{G}Y'$ et K_m sont boréliens) et porte λ ; en remplaçant v_ω^t par 0 sur $\mathbb{G}\Omega_t$, on obtient donc une modification de $\omega \rightarrow v_\omega^t$, qui maintenant est formée de mesures appartenant toutes à $\mathcal{H}$. Il existe donc trivialement une modification de la surmartingale donnée, qui est une $\mathcal{H}$ -surmartingale. Nous supposons cette modification faite. Alors la restriction à $R' \times \Omega$ vérifie les conditions de 2, donc elle admet un prolongement $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$, J - $\mathcal{H}$ -surmartingale $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -ré-

gulière par B. Il nous reste à montrer que $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une modification de $(\underline{v}_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$. Fixons donc $t \in R$. L'ensemble $(R' \cup \{t\})$ étant dénombrable, $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est régulière sur $(R' \cup \{t\}) \times \Omega$ par le lemme (4, 7); alors $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ et $(\underline{v}_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ sont deux surmartingales régulières sur $(R' \cup \{t\}) \times \Omega$, λ -presque partout égales sur $R' \times \Omega$, donc aussi sur $(R' \cup \{t\}) \times \Omega$ par (4, 10 quarto), et il s'agit bien d'une modification, cqfd.

Remarque (4,16 bis). On aurait pu partout remplacer la droite par la gauche, considérer une famille de tribus $(\mathcal{S}^t)_{t \in R}$, croissante et continue à gauche ($\mathcal{S}^t = \bigvee_{t' < t} \mathcal{S}^{t'}$ pour t non isolé à gauche dans R), les surmartingales réglées et continues à gauche, les intégrales $t \rightarrow J^t$ continues à gauche, et remplacer R' par un ensemble dense contenant tous les points isolés à gauche, donc construire une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite d'approximation t_n croissante de $t \in R$ ($t_n \leq t$ pour tout n). Il y a toutefois deux importantes modifications, quand on passe de la droite à la gauche (indépendamment du fait que la condition $\int f^t d\lambda \leq M < +\infty$ est à remplacer par

$$\int (f^t)^- d\lambda \leq M < +\infty):$$

1) Si f est une surmartingale sur $R \times \Omega$, réglée et continue à gauche, l'intégrale $t \rightarrow \int f^t d\lambda$ n'est pas nécessairement continue à gauche. Ainsi, dans les cas de surmartingales fonctions f ou mesures $(\mu_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, la continuité à gauche de $t \rightarrow \int f^t d\lambda$, à valeurs finies ou de $t \rightarrow J^t \leq J$, sera une condition *suffisante* d'existence de modifications continues à gauche, mais non nécessaire.

2) La limite d'une suite croissante de surmartingales réglées et continue à gauche n'est plus nécessairement continue à gauche (point 8 de (4,3)).

Il en résulte que, dans les surmartingales de mesures, bien des résultats disparaissent. *La notion même de surmartingale régulière à gauche n'est plus la même.* Toutefois le théorème précédent (4,16) subsiste, avec des

modifications mineures: dans le point 3, on doit supprimer le “(il faut et)” car la condition de continuité à gauche de $t \rightarrow J^t$ est suffisante mais non nécessaire. Nous abandonnerons ici ces considérations. Nous en reparlerons à la remarque (4, 22 bis).

(4,19) Etude des limites à gauche. Quand nous avons obtenu des surmartingales $\mathcal{K}$ -régulières, nous avons, pour tout t non isolé à gauche dans R (pour abrégier, nous dirons toujours: pour tout t) des mesures limites $v_\omega^{t-} = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}$ dans $\mathcal{K}$. Il est important d'étudier la signification intrinsèque de ces limites, car a priori elles dépendent du choix de la suite de compacts K_m ; or, si J est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables disjoints de J -mesures finies, il existe une infinité de choix possibles de ces compacts.

Définition (4,19). 1) Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une $\mathcal{K}$ -surmartingale $\mathcal{K}$ -régulière. On appelle système de $\mathcal{K}$ -limites à gauche, une famille $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ (définie uniquement pour t non isolé gauche) de mesures sur Y , telle que:

pour tout t , $\omega \rightarrow v_\omega^{t-}$ appartienne à la tribu $\mathcal{T}^{t-} = \bigvee_{t' < t} \mathcal{T}^{t'}$; pour tout t et tout ω , $v_\omega^{t-} \in \mathcal{K}$;

pour λ -presque tout ω , pour tout t , v_ω^{t-} est la limite de $v_\omega^{t'}$ dans $\mathcal{K}$, quand $t' \in R$, $t' < t$, tend vers t .

Comme deux modifications $\mathcal{K}$ -régulières d'une surmartingale sont λ -presque partout égales, deux familles de $\mathcal{K}$ -limites à gauche, même correspondant à des modifications $\mathcal{K}$ -régulières distinctes, sont λ -presque partout égales.

2) En supposant simplement Y ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, et J mesure σ -finie sur $(Y, \mathcal{Y})$, $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière, on appelle famille de limites à gauche une famille $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, ayant les propriétés suivantes:

pour tout $t, \omega \rightarrow v_\omega^{t-}$ appartient à la tribu $\mathcal{T}^{t-}$;
pour toute $f \geq 0$ sur Y , appartenant à $\mathcal{Y}$ et J -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^{t-}(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$. Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J -surmartingale, on a, pour toute $f \geq 0$, appartenant à $\mathcal{Y}$ et J -inté-

grable, $J(f) \geq \int_{\Omega} v_{\omega}^{*-}(f) d\lambda(\omega)$; ceci est alors vrai pour $f \geq 0, f \in \mathcal{U}$, et donne

$$J \geq \int_{\Omega} v_{\omega}^{*-} d\lambda(\omega).$$

On remarquera que nous supposons f J -intégrable, ce que nous n'avions pas fait pour la définition des surmartingales régulières à (4, 6); une hypothèse de ce genre est ici indispensable.[1]

Lemme (4,19 bis). Soit $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Y , à valeurs dans un Banach F , J -intégrables, et convergeant vers une limite f dans $L^1(Y, J; F)$. Soit d'autre $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{U})$. Supposons que, pour tout n , pour λ -presque tout ω , pour tout t , f_n soit v_{ω}^t -intégrable, et que $\lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_{\omega}^{t'}(f_n) = v_{\omega}^t(f_n)$. Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_{ω}^t -intégrable, et $\lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_{\omega}^{t'}(f) = v_{\omega}^t(f)$, dans chacun des deux cas suivants:

- a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions ≥ 0 ;
- b) $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est un système de limites à gauche.

Démonstration. Quitte à extraire une suite partielle, nous pouvons supposer, d'après le lemme (4, 10), qu'il existe une fonction $h \geq 0$, J -intégrable, telle que $\|f - f_n\|_F \leq \frac{1}{2^n} h$. Comme alors, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_{\omega}^t(h)$ est finie, réglée et continue à droite, donc localement bornée, nous en déduisons ceci: d'une part, pour tous t, ω , tels que $v_{\omega}^t(h) < +\infty$, f est v_{ω}^t -intégrable, et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{\omega}^t(f_n) = v_{\omega}^t(f)$; d'autre part, pour λ -presque tout ω , la suite de fonctions réglées et continues à droite $t \rightarrow v_{\omega}^t(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge localement uniformément vers la fonction réglée et continue à droite

[1] Prenons par exemple Ω réduit à un seul point. Alors toutes les tribus $\mathcal{F}^t$ sont triviales. On a simplement une famille décroissante $(v^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de mesures sur $(Y, \mathcal{U})$. Supposons par exemple que $R = \mathbb{N}$, et que $v^{\infty-} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v^n = 0$. Il se peut alors que $f \geq 0$ borélienne soit non v^n -intégrable pour tout n , donc $v^n(f) = +\infty$; on aura cependant $v^{\infty-}(f) = 0$. Il suffira de prendre $Y = \mathbb{R}$, et $v^n = (1/n) dx$, dx mesure de Lebesgue, avec f borélienne non dx -intégrable.

$t \rightarrow v_\omega^t(f)$ (voir proposition (4,10 bis) et on peut intervertir les limites, F étant complet; donc

$$\lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lim_{n \rightarrow \infty} v_\omega^{t'}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{v_\omega^t(f_n)}.$$

Supposons d'abord que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite croissante de fonctions ≥ 0 . Alors la dernière quantité est, par Fatou, $v_\omega^t(f)$. Comme il s'agit d'une limite finie, cela prouve que f est v_ω^t -intégrable, et donne le résultat relatif à l'hypothèse a. Supposons maintenant que $(v_\omega^t)_{(t, \omega)} = (v_\omega^{t-})_{(t, \omega)}$ soit un système de limites à gauche. Comme alors, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(h)$ est finie et réglée, $v_\omega^{t-}(h) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(h) < +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_\omega^{t-}(f_n) = v_\omega^{t-}(f)$, d'où la même conclusion.

Proposition (4,20). Soient $(v_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une surmartingale régulière, $(v_\omega^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche.

Si $f \geq 0$ est J -négligeable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -négligeable.

Si f est une fonction sur Y , à valeurs dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, et J -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable, alors, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable.

Si f est une fonction sur Y , à valeurs dans un Banach F , et J -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^{t-}(f)$ est la limite de $v_\omega^{t'}(f)$ dans F , quand $t' < t$ tend vers t ; en particulier $t \rightarrow v_\omega^{t-}(f)$ est réglée et continue à gauche. Si $\mathcal{B}$ est un système J -déterminant, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\mathcal{B}$ est v_ω^{t-} -déterminant.

Démonstration. Si $f \geq 0$ est J -négligeable, on sait d'une part que, λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(f)$ est identiquement nulle (proposition (4,7)), d'autre part que $v_\omega^t(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$, donc $t \rightarrow v_\omega^{t-}(f)$ est aussi identiquement nulle. De là on déduit la propriété relative à $f: Y \rightarrow Z$ comme la proposition (4,8). L'énoncé de la fin relatif à $\mathcal{B}$ est trivial: si $J(\mathbb{C}Y') = 0$ et $J(Y_m) < +\infty$, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_\omega^{t-}(\mathbb{C}Y') = 0$ et $v_\omega^{t-}(Y_m) < +\infty$.

Soit maintenant f J -intégrable à valeurs dans un Banach F . Par le lemme (4, 10) on peut trouver une fonction $h \geq 0$, J -intégrable et qu'on peut supposer dans $\mathcal{Y}$ puisque J est σ -finie, et une suite de fonctions f_n , combinaisons linéaires finies à coefficients dans F de fonctions ≥ 0 appartenant à $\mathcal{Y}$ et J -intégrables, convergeant vers f dans $L^1(Y, J; F)$. Comme, pour tout n , on sait que pour λ -presque tout ω , pour tout t , f_n est v_ω^{t-} -intégrable, et que $\lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f_n) = v_\omega^{t-}(f_n)$, le b du lemme précédent donne la conclusion.

Proposition (4,21). Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une surmartingale régulière, $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ un système de limites à gauche. Alors $(v_\omega^s)_\omega, (v_\omega^{t-})_\omega, (v_\omega^t)_\omega$, pour $s < t$, forment une surmartingale pour les tribus $\mathcal{T}^s, \mathcal{T}^{t-}, \mathcal{T}^t$.

Démonstration. C'est connu pour les surmartingales scalaires. Alors, si f est ≥ 0 dans $\mathcal{Y}$ et J -intégrable, $(v_\omega^s(f))_\omega, (v_\omega^{t-}(f))_\omega, (v_\omega^t(f))_\omega$, forment une surmartingale pour $\mathcal{T}^s, \mathcal{T}^{t-}, \mathcal{T}^t$. C'est vrai par passage à la limite croissante pour tout $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, d'où le résultat par (4,5).

Théorème (4,21 bis) (Unicité des limites à gauche). Hypothèse J -dénombrable.

Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière, soit $\mathcal{B}$ un ensemble J -déterminant.

1) Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, telle que $\omega \rightarrow \overline{v_\omega^t}$ soit dans $\mathcal{T}^{t-}$ pour tout t , et que, pour λ -presque tout ω , v_ω^t soit portée par Y' pour tout t .

Si, pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ est un système de limites à gauche de la surmartingale régulière $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$, alors $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est un système de limites à gauche de $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$.

2) Deux systèmes de limites à gauche sont λ -presque partout égaux.

Démonstration. 1) Soit $\mathcal{Q}_m$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$ tels que $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$ soit un système de limites à gauche de la surmartingale régulière $(v_\omega^t(B))_{(t,\omega)}$. $\mathcal{Q}_m$ est stable par complémentation à Y_m . Ensuite $\mathcal{Q}_m$ est stable par réunion des suites croissantes, par application du point a du lemme (4,19 bis). Alors $\mathcal{Q}_m \supset Y_m \cap \mathcal{Y}$ par le lemme C. Si maintenant f est une fonction ≥ 0 sur Y' ,

appartenant à $\mathcal{Y}$ et J -intégrable, elle est limite d'une suite croissante de fonctions étagées, à étages dans les Y_m , et encore une application du point a du lemme (4,19 bis) montre que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^t(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$. La même conclusion subsiste pour $f \geq 0$ borélienne J -intégrable sur Y , puisque, pour λ -presque tout ω , v_ω^t est portée par Y' pour tout t .

2) Soient $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$, $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$, deux systèmes de limites à gauche. Pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_\omega^{t-}(B) = v_\omega^{t-}(B)$, puisqu'il s'agit de deux systèmes de limites à gauche d'une surmartingale régulière (B est J -intégrable). Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\mathcal{B}$ est v_ω^{t-} -déterminant et v_ω^{t-} -déterminant d'après (4,20), et le lemme F dit que $v_\omega^{t-} = v_\omega^{t-}$, cqfd.

Théorème (4,22) (Existence des limites à gauche). *Hypothèse J -compacte.*

Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale, $\mathcal{K}$ -régulière. Pour tout $(t,\omega) \in R \times \Omega$, appelons v_ω^{t-} la mesure égale à la limite dans $\mathcal{K}$ de $v_\omega^{t'}$, $t' < t$, quand t' tend vers t , si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas. Alors $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ est un système de $\mathcal{K}$ -limites à gauche et de limites à gauche.

Démonstration. Pour t fixé (comme toujours non isolé à gauche), soit Ω_t l'ensemble des ω pour lesquels $v_\omega^{t'}$ a une limite dans $\mathcal{K}$ lorsque $t' < t$ tend vers t . Ω_t est dans $\mathcal{T}^{t-}$; car, d'après le lemme (4,12), $\omega \in \Omega_t$ revient à écrire que, si D_m est dénombrable dense dans $C^+(K_m)$, $1_m \in D_m$, $v_\omega^{t'}(\phi)$ a une limite pour $t' < t$, $t' \rightarrow t$, pour toute $\phi \in D_m$, $m \in \mathbb{N}$. Si alors nous appelons v_ω^{t-} cette limite, quand elle existe, et 0 quand elle n'existe pas, pour toute $\phi \in D_m$, $\omega \rightarrow v_\omega^{t-}(\phi)$ appartiendra à $\mathcal{T}^{t-}$, donc aussi $\omega \rightarrow v_\omega^{t-}$ par (4.13). Par définition, la famille $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ ainsi construite est une famille de $\mathcal{K}$ -limites à gauche. Il faut alors démontrer que, pour toute $f \geq 0$ de $\mathcal{Y}$, J -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^t(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$; on le sait seulement pour $f \in \mathcal{K}$, c. à d. $f \geq 0$ continue à support compact sur $\tilde{Y}'$. Soit $\mathcal{Q}_m$ l'ensemble des fonctions f boréliennes ≥ 0 bornées sur K_m , pour lesquelles, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^t(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$. Alors $\mathcal{Q}_m$ est stable par passage à la limite des suites

croissantes, par le point a du lemme (4,19 bis), et par complémentation aux fonctions constantes sur K_m , donc vérifie les propriétés 1 et 2' du lemme C; comme $\mathcal{Q}_m$ contient $C^+(K_m)$, il contient toutes les fonctions boréliennes bornées ≥ 0 sur K_m , par le lemme C. Ensuite, toute fonction f borélienne ≥ 0 J -intégrable sur Y' est limite d'une suite croissante de fonctions étagées, à étages contenus dans des K_m , donc encore le point a du lemme (4,19 bis) montre que la même conclusion subsiste pour f . On peut ensuite trivialement remplacer Y' par Y , cqfd.

Remarque (4,22 bis). *Hyphothèse J -compacte.*

Soit maintenant $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ une famille de tribus, indexée par R , croissante et continue à gauche (voir (4,16 bis)). Construisons les $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t' > t} \mathcal{F}^{t'}$, pour t non isolé à droite, en prenant $\mathcal{T}^t = \mathcal{F}^t$ si t est isolé à droite. La famille des $\mathcal{T}^t$ est continue à droite. Soit $(\mu_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une J -surmartingale relative à $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ à intégrale $t \rightarrow J^t$ continue à gauche. On peut en trouver une modification, que nous appellerons encore $(\mu_\omega^t)_{(t, \omega)}$, $\mathcal{H}$ -régulière à gauche, par le théorème (4,16) où droite est remplacée par gauche. Celle-ci possède alors des $\nu_\omega^t = \mu_\omega^{t+}$ associées, en posant $\mu_\omega^{t+} = \mu_\omega^t$ pour t isolé à droite, et $(\nu_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est une surmartingale régulière à droite pour les tribus $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$. A partir de là on pourra former les $\mathcal{T}^{t-} = \bigvee_{t' < t} \mathcal{T}^{t'}$ pour les t non isolés à gauche, $\mathcal{T}^{t-} = \mathcal{F}^t$ pour t isolé à gauche. Alors on trouvera des ν_ω^{t-} , qui ne seront autres que les μ_ω^t initiaux pour t non isolé à gauche, de sorte qu'on pourra poser $\nu_\omega^{t-} = \mu_\omega^t$ pour t isolé à gauche, et retrouver partout les μ_ω^t initiaux. Ainsi le cas des surmartingales régulières à gauche $(\mu_\omega)_{(t, \omega)}$ peut s'étudier à partir des ν_ω^{t-} d'une surmartingale $(\nu_\omega^t)_{(t, \omega)}$ régulière à droite. En particulier, on voit que la définition d'une surmartingale régulière à gauche doit être la suivante, à la place de (4,6): si $(\mu_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est une J -surmartingale relative à une famille de tribus croissante et continue à gauche, elle est dite régulière à gauche, si, pour tout f , J -intégrable ≥ 0 (et non seulement J -mesurable), la surmartingale $(\mu_\omega^t(f))_{(t, \omega)}$ est régulière à gauche, c. à d. λ -presque sûrement réglée et continue à gauche.

(4,23) Limites d'une surmartingale régulière à l'infini

Le seul cas intéressant est celui où $a = \inf R$ et $b = \sup R$ ne sont pas

dans R . Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. J portée par $\bigcup_m K_m$, K_m métrisables compacts, $J(K_m) < +\infty$. Alors nous pouvons poser $\tilde{R} = R \cup \{a\} \cup \{b\}$. Nous poserons $\mathcal{T}^{a+} = \bigcap_{t \in R} \mathcal{T}^t$, et supposons que λ est σ -finie sur $\mathcal{T}^a$; puis $\mathcal{T}^{b-} = \bigvee_{t \in R} \mathcal{T}^t$. Le point b devenant isolé à droite, nous remplacerons R' par $\tilde{R}' = \tilde{R}' \cup \{b\}$. Et nous pourrions toujours prendre $v_\omega^b = 0$. On aura alors sur $\tilde{R}' \times \Omega$ une surmartingale régulière. Elle admet donc un prolongement en une surmartingale régulière sur $\tilde{R} \times \Omega$, par (4,16), et c'est la surmartingale donnée sur $R \times \Omega$. On voit donc qu'il existe une famille de mesures $(v_\omega^{a+})_{\omega \in \Omega}$ et une famille $(v_\omega^{b-})_{\omega \in \Omega}$, appartenant respectivement aux tribus $\mathcal{T}^{a+}$ et $\mathcal{T}^{b-}$, et ayant les propriétés suivantes, d'après les théorèmes (4,16), (4,21), (4,22).

Proposition (4,23). *Hypothèse J -compacte.*

Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J -surmartingale régulière sur $R \times \Omega$, $a = \inf R$ et $b = \sup R$ n'appartenant pas à R , alors il existe des familles $(v_\omega^{a+})_{\omega \in \Omega}$, $(v_\omega^{b-})_{\omega \in \Omega}$, appartenant à $\mathcal{T}^{a+}$ et $\mathcal{T}^{b-}$ respectivement, ayant les propriétés, suivantes:

1) Si f est une fonction sur Y , à valeurs dans un Banach F , J -intégrable, pour λ -presque tout ω , f est v_ω^{a+} -intégrable et v_ω^{b-} -intégrable, et $v_\omega^{a+}(f) = \lim_{t > a, t \rightarrow a} v_\omega^t(f)$, $v_\omega^{b-}(f) = \lim_{t < b, t \rightarrow b} v_\omega^t(f)$.

2) Si f est une fonction ≥ 0 sur Y , J -mesurable, pour λ -presque tout ω , f est v_ω^{a+} -mesurable, et $v_\omega^{a+}(f) = \lim_{t > a, t \rightarrow a} v_\omega^t(f)$.

3) Pour λ -presque tout ω , v_ω^t tend vers v_ω^{a+} , pour t tendant vers a , et vers v_ω^{b-} , pour t tendant vers b , dans l'espace $\mathcal{K}$ (muni, comme toujours, de la topologie vague).

L'une quelconque de ces trois propriétés caractérise ces familles de mesures, à un changement près sur un ensemble λ -négligeable.

Proposition (4,24). *Première décomposition de Riesz[1]. Hypothèse J -compacte.*

[1] On trouvera les deux décompositions de Riesz à Paul-André MEYER [1], page 132. Nous supposons $b \notin R$, faute de quoi c'est encore vrai mais légèrement différent dans la formulation, et pratiquement trivial.

Soit $b = \sup R$, $b \notin R$. Toute J -surmartingale régulière $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est somme de 2 J -surmartingales régulières, $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$, où $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une martingale à intégrale constante jusqu'à b inclusivement, (i.e. $t \rightarrow \int_\Omega^* \rho_\omega^t d\lambda(\omega)$

est constante, mais $\int_\Omega^* \rho_\omega^{b-} d\lambda(\omega)$ est égale à cette constante) et $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ tend vers 0 pour t tendant vers b (i.e. $(\sigma_\omega^{b-} = 0)_{(\omega)}$ est un système de limites en b pour $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$).

Une telle décomposition est unique à un ensemble λ -négligeable près.

(Bien entendu, on peut prendre comme système de limites en b pour v_ω^t les $v_\omega^{b-} = \rho_\omega^{b-} + \sigma_\omega^{b-} = \rho_\omega^{b-}$.)

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Partons de deux décompositions

$$({}_1\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}, ({}_2\rho_\omega^t)_{(t,\omega)} \text{ et } ({}_1\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}, ({}_2\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}.$$

On sait que $({}_1\rho_\omega^t)_{(\omega)}$ et $({}_1\rho_\omega^{b-})_{(\omega)}$ forment une surmartingale par rapport aux tribus $\mathcal{F}^t, \mathcal{F}^{b-}$ (prop. (4,21)), donc pour $A \in \mathcal{F}^t$:

$$\int_A^* {}_1\rho_\omega^t d\lambda(\omega) \geq \int_A^* {}_1\rho_\omega^{b-} d\lambda(\omega)$$

$$\int_A^* {}_1\rho_\omega^t d\lambda(\omega) \geq \int_A^* {}_1\rho_\omega^{b-} d\lambda(\omega)$$

$$\int_\Omega^* {}_1\rho_\omega^t d\lambda(\omega) = \int_\Omega^* {}_1\rho_\omega^{b-} d\lambda(\omega) \text{ (par hypothèse);}$$

comme toutes ces intégrales sont des mesures σ -finies sur $(Y, \mathcal{Y})$, puisque majorées par J , les signes $\geq$ des 2 premières formules sont en fait des signes $=$. Donc $({}_1\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une famille régulière d'espérances conditionnelles de $({}_1\rho_\omega^{b-})_{(\omega)} = ({}_2\rho_\omega^{b-})_{(\omega)} = (v_\omega^{b-})_{(\omega)}$ (λ -presque partout). On se trouve dans le cas d'unicité des espérances conditionnelles (théorème (2,7)), donc $({}_1\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ et

$({}_2\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ sont modification l'une de l'autre; étant toutes les deux régulières, elles sont λ -presque partout égales par (4, 10 quarto). Soit alors $\mathcal{B}$ un ensemble J -déterminant; pour λ -presque tout ω , pour tout t , il est ${}_1\sigma_\omega^t$ -déterminant et ${}_2\sigma_\omega^t$ -déterminant. Mais, pour λ -presque tout ω , pour tout t , pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, $v_\omega^t(B) - {}_1\rho_\omega^t(B) = {}_1\sigma_\omega^t(B)$ et $v_\omega^t(B) - {}_2\rho_\omega^t(B) = {}_2\sigma_\omega^t$ donc ${}_1\sigma_\omega^t \mathcal{B} = {}_2\sigma_\omega^t \mathcal{B}$, donc ${}_1\sigma_\omega^t = {}_2\sigma_\omega^t$ par le lemme F; $({}_1\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ et $({}_2\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ sont elles aussi λ -presque partout égales.

Passons à l'existence. Pour t donné, l'ensemble des ω pour lesquels $v_\omega^t(\mathbb{G}Y') = 0$, $v_\omega^t(K_m) < +\infty$ pour tout m , est dans $\mathcal{T}^t$; si on pose $v_\omega^t = v_\omega^t$ lorsqu'il en ait ainsi, $v_\omega^t = 0$ autrement, on a une modification $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ avec $v_\omega^t \in \mathcal{K}$ pour tous t, ω ; pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_\omega^t = v_\omega^t$. Si alors nous trouvons une décomposition de Riesz pour $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$, $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$, on en aura une pour $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ en posant $\rho_\omega^t = \rho_\omega^t$, $\sigma_\omega^t = \sigma_\omega^t$ si $v_\omega^t = v_\omega^t$, et $\rho_\omega^t = v_\omega^t$, $\sigma_\omega^t = 0$ autrement. On peut donc directement supposer que toutes les v_ω^t sont dans $\mathcal{K}$.

Alors $\omega \rightarrow v_\omega^{b-}$ est une fonction sur Ω , à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, d'intégrale $J^{b-} = \int_{\Omega}^* v_\omega^{b-} d\lambda(\omega) \leq J$. On est dans le cas d'existence d'espérances

conditionnelles (théorème (2, 8)). Donc $\omega \rightarrow v_\omega^{b-}$ admet, pour tout $t \in R$, une espérance conditionnelle $(\bar{\rho}_\omega^t)_{\omega \in \Omega}$ relativement à la tribu $\mathcal{T}^t$. On définit ainsi une martingale de mesures $(\bar{\rho}_\omega^t)_{(t,\omega)}$; elle admet, d'après le théorème (4.16), une modification, $\mathcal{K}$ -martingale $\mathcal{K}$ -régulière, $(\bar{\rho}_\omega^t)_{(t,\omega)}$. La différence $\bar{\sigma}_\omega^t = v_\omega^t - \bar{\rho}_\omega^t$ est bien définie en tant que mesure de Radon sur $\tilde{Y}'$. Fixons t . Pour toute

$\phi \in C^+(K_m)$, et toute $A \in \mathcal{T}^t$, on a $\int_A^* v_\omega^t(\phi) d\lambda(\omega) \geq \int_A^* v_\omega^{b-}(\phi) d\lambda(\omega) =$

$\int_A^* \bar{\rho}_\omega^t(\phi) d\lambda(\omega)$; donc $\bar{\sigma}_\omega^t(\phi) \geq 0$ λ -presque partout, puisque $\omega \rightarrow v_\omega^t(\phi)$ et

$\omega \rightarrow \bar{\rho}_\omega^t(\phi)$ sont toutes deux dans la tribu $\mathcal{T}^t$. Si donc D_m est un ensemble dénombrable dense dans $C^+(K_m)$, pour λ -presque tout ω , on aura $\bar{\sigma}_\omega^t(\phi) \geq 0$ pour toute $\phi \in D_m$, donc $\bar{\sigma}_\omega^t \geq 0$. Ceci montre seulement que, pour tout t , pour λ -presque tout ω , $\bar{\sigma}_\omega^t \geq 0$. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout $t' \in R'$ dénombrable, $\bar{\sigma}_\omega^{t'} \geq 0$. Mais on sait que, pour λ -presque tout ω ,

$t \rightarrow v_\omega^t$ et $t \rightarrow \bar{\rho}_\omega^t$ sont continues à droite de R dans $\mathcal{X}$ donc dans $C'(Y)$ muni de la topologie vague, donc aussi $t \rightarrow \bar{\sigma}_\omega^t$, donc $\bar{\sigma}_\omega^t$ est ≥ 0 pour $t \in R$. Pour nous ramener aux schémas antérieurs, il faut que $\sigma_\omega^t \geq 0$ pour tout ω et tout t . On remarquera alors que, pour t fixé, $\omega \rightarrow (v_\omega^t)_K$ et $\omega \rightarrow (\bar{\rho}_\omega^t)_K$ appartiennent à $\mathcal{T}^t$, en tant que fonctions sur Ω à valeurs dans $C'(K_m)$ (lemme (4, 13)) donc aussi $\omega \rightarrow (\bar{\sigma}_\omega^t)_{K_m}$; or l'ensemble des mesures ≥ 0 est borélien dans $C'(K_m)$, donc l'ensemble des ω pour lesquels $\bar{\sigma}_\omega^t \geq 0$ est dans $\mathcal{T}^t$. En remplaçant $\bar{\rho}_\omega^t$ par v_ω^t et $\bar{\sigma}_\omega^t$ par 0 quand celle-ci n'est pas ≥ 0 , on obtient des ρ_ω^t et σ_ω^t , et on voit que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\rho_\omega^t = \rho_\omega^t$, et $\sigma_\omega^t = \sigma_\omega^t$ et les familles obtenues $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}, (\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$, vérifient toujours partout $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$; pour tout t , $\omega \rightarrow \rho_\omega^t, \omega \rightarrow \sigma_\omega^t$ appartiennent toujours à $\mathcal{T}^t$. L'inégalité des surmartingales pour $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est évidente: pour $s \leq t$, $A \in \mathcal{T}^s$, $\int_A^* \sigma_\omega^s d\lambda(\omega) + \int_A^* \rho_\omega^s d\lambda(\omega) \geq \int_A^* \sigma_\omega^t d\lambda(\omega) + \int_A^* \rho_\omega^t d\lambda(\omega)$, et, comme toutes ces intégrales sont majorées par J σ -finie, on a aussi $\int_A^* \sigma_\omega^s d\lambda(\omega) \geq \int_A^* \sigma_\omega^t d\lambda(\omega)$. Alors $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale de mesures pour les tribus $\mathcal{T}^t$, $\mathcal{X}$ -régulière. Soit $f \geq 0$ J -intégrable. Comme $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une martingale régulière d'espérances conditionnelles, on sait que, $(\rho_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$ est une martingale uniformément intégrable, et $\rho_\omega^t(f)$ tend vers $\rho_\omega^{b-}(f) = v_\omega^{b-}(f)$ pour λ -presque tout ω , lorsque t tend vers b , de sorte que $\sigma_\omega^t(f)$ tend vers 0; ce qui, d'après (4, 23), veut exactement dire que $\sigma_\omega^{b-} = 0$ pour λ -presque tout ω .

Proposition (4,25). (Deuxième décomposition de Riesz)[1] *Hypothèse J -dénombrable.*

Soit $b = \sup R$, $b \notin R$. Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière. Supposons que toute fonction sur Ω , à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$ et à intégrale σ -finie, admette des espérances conditionnelles par rapport aux $\mathcal{T}^t$, et que toute J -surmartingale admette des modifications régulières (ceci se produira

[1] Pour $b \in R$, l'énoncé subsiste, mais la démonstration est bien plus simple, et nous n'en parlons pas. Dans ce cas, les 2 décompositions de Riesz coïncident.

toujours dans l'hypothèse J -compacte). Alors $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est somme d'une martingale régulière $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ et d'un potentiel régulier $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$, c. à. d. d'une surmartingale régulière, dont l'intégrale $\Sigma^t = \int_\Omega \sigma_\omega^t d\lambda(\omega)$ tend vers 0 pour t tendant vers b , et admettant 0 comme système de valeurs limites à gauche en b .

Démonstration. Rappelons que, si $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale régulière à valeurs réelles ≥ 0 ($\sigma_\omega^t \in \mathbb{R}^+$), $\lim_{t \rightarrow b} \int_\Omega \sigma_\omega^t d\lambda(\omega) \geq \int_\Omega \sigma^{b-} d\lambda(\omega)$, de sorte que la convergence de l'intégrale vers 0 entraîne que 0 soit système de valeurs limites à gauche; si $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J -surmartingale à valeurs mesures, en prenant les valeurs sur une fonction $f \geq 0$ borélienne J -intégrable, on en déduit la même conclusion, de sorte que nous devons simplement montrer que Σ^t tend vers 0, et les valeurs limites 0 s'en déduisent. Montrons l'unicité. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble J -déterminant. Si on a deux décompositions, $v_\omega^t = {}_1\rho_\omega^t + {}_1\sigma_\omega^t = {}_2\rho_\omega^t + {}_2\sigma_\omega^t$, on aura, pour tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, deux décompositions de Riesz $v_\omega^t(B) = {}_i\rho_\omega^t(B) + {}_i\sigma_\omega^t(B)$, $i = 1, 2$, qui sont donc λ -presque partout égales; comme, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{B}$ est v_ω^t -déterminant, donc déterminant pour ${}_1\rho_\omega^t, {}_2\rho_\omega^t, {}_1\sigma_\omega^t, {}_2\sigma_\omega^t$, le lemme F montre que, pour λ -presque tout ω , pour t , on a ${}_1\rho_\omega^t = {}_2\rho_\omega^t$ et ${}_1\sigma_\omega^t = {}_2\sigma_\omega^t$. La même démonstration aurait d'ailleurs été valable pour démontrer l'unicité dans (4, 24) mais n'est pas plus simple que celle que nous avons donnée. Montrons maintenant l'existence.

Choisissons une fois pour toutes une suite θ_n croissante, cofinale à R . Pour t donné, et $\theta_n \geq t$, $\omega \rightarrow v_\omega^{\theta_n}$ a une espérance conditionnelle relativement à tribu $\mathcal{T}^t$; choisissons-en une arbitrairement, soit $\omega \rightarrow \rho_\omega^{\theta_n, t}$. Le théorème (3, 0), l'unicité des espérances conditionnelles (2, 7), et l'inégalité du point 2 de la proposition (4, 5) montrent que $\rho_\omega^{\theta_n, t} \leq v_\omega^t$ λ -presque partout. Il existe donc un ensemble Ω_t , portant λ , tel que, pour $\omega \in \Omega_t$, la suite de mesures $\rho_\omega^{\theta_n, t}$ soit $\leq v_\omega^t$ et décroissante; elle a une limite $\rho_\omega^t \leq v_\omega^t$; en outre, comme $\omega \rightarrow v_\omega^t$, $\omega \rightarrow \rho_\omega^{\theta_n, t}$ sont dans $\mathcal{T}^t$, la proposition G montre que l'ensemble Ω_t des points ω pour lesquels ces propriétés ont lieu est dans $\mathcal{T}^t$, et $\omega \rightarrow \bar{\rho}_\omega^t$

est dans $\mathcal{T}^t \cap \Omega_t$; donc elle est définie λ^t -presque partout et dans $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}^t$, complétée de Lebesgue de $\mathcal{T}^t$ pour la restriction λ^t de λ à $\mathcal{T}^t$. Si $t \geq s$, et si $A \in \mathcal{T}^s$, $\int_A^* \rho_{\omega}^s d\lambda(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A^* \overline{\rho_{\omega}^{\theta_{n^s}} d\lambda(\omega)}$ (le passage à la limite décroissante est possible parce que $\int_{\Omega}^* \overline{\rho_{\omega}^{\theta_{n^s}} d\lambda(\omega)} = \int_{\Omega}^* v_{\omega}^{\theta_{n^s}} d\lambda(\omega) \leq J$ est σ -finie) = $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A^* v_{\omega}^{\theta_{n^s}} d\lambda(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A^* \overline{\rho_{\omega}^{\theta_{n^t}} d\lambda(\omega)} = \int_A^* \overline{\rho_{\omega}^t d\lambda(\omega)}$. Donc $(\rho_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, définie sur $S = \bigcup_{t \in R} \{t\} \times \Omega_t$, est une martingale pour les tribus $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}^t$, majorée par la surmartingale $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ sur son ensemble de définition.

Définissons la différence $\sigma_{\omega}^t = v_{\omega}^t - \rho_{\omega}^t$ comme suit. Soit $\mathcal{B}$ un système J -déterminant. Pour λ -presque tout ω , pour tout t , $v_{\omega}^t(Y_m) < +\infty$ pour tout m , et $v_{\omega}^t(\mathbb{G}Y') = 0$. Alors on peut définir la restriction de σ_{ω}^t à Y_m comme différence de deux mesures finies, et par là on la définit sur Y . Ainsi on a défini σ_{ω}^t sur un ensemble $S' \subset S$, mais dont la section par $\{t\} \times \Omega$ porte toujours λ , pour tout t , et $\omega \mapsto \sigma_{\omega}^t$ est dans $\mathcal{T}^t$. Bien évidemment pour tout t , $\omega \rightarrow \sigma_{\omega}^t$ appartient à $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}^t$, comme on le voit en prenant sa valeur sur les $B \in \mathcal{U} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$ (proposition G). Ensuite $(\sigma_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une surmartingale pour les tribus $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}^t$; si en effet $s \leq t$,

$$A \in \hat{\mathcal{T}}_{\lambda^s}^s, \text{ on a } \int_A^* \overline{\sigma_{\omega}^s d\lambda(\omega)} + \int_A^* \overline{\rho_{\omega}^s d\lambda(\omega)} \geq \int_A^* \overline{\sigma_{\omega}^t d\lambda(\omega)} + \int_A^* \overline{\rho_{\omega}^t d\lambda(\omega)}$$

d'où $\int_A^* \overline{\sigma_{\omega}^s d\lambda(\omega)} \geq \int_A^* \overline{\sigma_{\omega}^t d\lambda(\omega)}$ par différence, possible puisque les intégrales représentent des mesures $\leq J$ σ -finies. D'autre part c'est un potentiel, autrement dit l'intégrale $\Sigma^t = \int_{\Omega}^* \overline{\sigma_{\omega}^t d\lambda(\omega)}$ tend vers 0 pour t tendant vers b . En effet,

$$\text{pour } t \text{ fixé, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega}^* \overline{\sigma_{\omega}^{\theta_{n^t}} d\lambda(\omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega}^* \overline{v_{\omega}^{\theta_{n^t}} d\lambda(\omega)} - \int_{\Omega}^* \overline{\rho_{\omega}^t d\lambda(\omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega}^* \overline{\rho_{\omega}^{\theta_{n^t}} d\lambda(\omega)} - \int_{\Omega}^* \overline{\rho_{\omega}^t d\lambda(\omega)} = 0, \text{ puisque, pour } \lambda\text{-presque tout}$$

$\overline{\rho_\omega^{\theta_n t}}$ décroît quand n croît et tend vers $\overline{\rho_\omega^t}$ avec $\int_\Omega \overline{\rho_\omega^{\theta_n t}} d\lambda(\omega) \leq J$ σ -finie.

Le fait que $\overline{\rho_\omega^t}, \overline{\sigma_\omega^t}$, pour tout t fixé, ne soient définies que λ -presque partout, est sans importance, puisque seule $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}$ intervenait. On a ainsi décomposé toute J -surmartingale en somme d'une martingale et d'un potentiel. Mais maintenant il existe une modification régulière $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ de $(\overline{\rho_\omega^t})_{(t,\omega)}$ et une modification régulière $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ de $(\overline{\sigma_\omega^t})_{(t,\omega)}$, pour les tribus $\mathcal{T}^t$ elles-mêmes. (On trouve d'abord des modifications pour lesquelles $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda^t}$ est remplacée par $\mathcal{T}^t$, lemme (1,12 bis), ensuite l'énoncé suppose l'existence de modifications régulières). Il est vrai que l'on n'a plus nécessairement $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$. Appelons U l'ensemble des (t,ω) tels que: $v_\omega^t(B) \geq \rho_\omega^t(B)$ et $v_\omega^t(Y_m) < +\infty$ et $\rho_\omega^t(Y_m) < +\infty$ pour tout m . Le lemme F dit que, pour tout $(t,\omega) \in U$, on a $v_\omega^t \geq \rho_\omega^t$. Mais en outre, pour $t \in R$, l'ensemble Ω_t des ω pour lesquels $(t,\omega) \in U$ est dans $\mathcal{T}^t$, et, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $(t,\omega) \in U$ (pour $B \in \mathcal{B}$, on sait que, pour tout $t' \in R'$, pour λ -presque tout ω , $v_\omega^{t'}(B) \geq \rho_\omega^{t'}(B)$; donc, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow v_\omega^t(B)$ et $t \rightarrow \rho_\omega^t(B)$ sont continues à droite, et la première majore la deuxième sur R' , donc sur R). En prenant alors $\rho_\omega^t = \rho_\omega^{t'}$ et $\sigma_\omega^t = \rho_\omega^t$ si $(t,\omega) \in U$, $\rho_\omega^t = v_\omega^t$ et $\sigma_\omega^t = 0$ sinon, on a la martingale régulière et le potentiel régulier répondant à la question; elles sont partout définies sur $R \times \Omega$, $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$ partout, $\omega \rightarrow \rho_\omega^t$ et $\omega \rightarrow \sigma_\omega^t$ appartiennent à $\mathcal{T}^t$ parce que $\Omega_t \in \mathcal{T}^t$, et, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\rho_\omega^t = \rho_\omega^{t'}$, $\sigma_\omega^t = \sigma_\omega^{t'}$, cqfd.

* * *

§5. Désintégrations régulières et surmartingales

Définition (5,0). Dans tout ce paragraphe, Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, λ une mesure de Radon sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, $\Omega' = \bigcup_m H_m$; nous appellerons $\tilde{\Omega}'$

la somme topologique des H_m et nous appellerons $\mathcal{H}$ (ce qui s'appelait $\mathcal{X}$ au § précédent sur l'espace Y , c. à d.) l'espace $C'^+(\tilde{\Omega}')$. $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ sera une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable, indexée par $R \subset \overline{\mathbb{R}}$, croissante et continue à droite; λ sera supposée σ -finie sur toutes les $\mathcal{T}^t$. Alors λ possède une

Indépendant

désintégration relativement à toute $\mathcal{F}^t$, qui est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$ relativement à $\mathcal{F}^t, \lambda$ (voir (2,10)). Si on choisit ainsi, pour chaque t , une désintégration, on aura une martingale de mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$ lui-même, relative aux $\mathcal{F}^t$. La mesure qui remplace ici la mesure J du paragraphe précédent n'est autre que λ elle-même, $\int_{\Omega}^* \delta_{(\omega)} d\lambda(\omega) = \lambda$. On est alors dans

les conditions d'application du théorème (4,16), (ici $J^t = \lambda$ pour tout t , donc $t \rightarrow J^t$ est continu à droite!) de sorte qu'il existe des modifications régulières de cette martingale, et que deux d'entre elles sont λ -presque partout égales. Une telle modification régulière s'appellera une désintégration régulière de λ pour la famille de tribus $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$. On définira de même les désintégrations $\mathcal{H}$ -régulières, $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ -régulières. Nous n'allons pas répéter tous les résultats du § précédent, mais résumerons les principaux (essentiellement (4, 10 bis), (4, 16), (4, 22)) en un théorème:

Théorème (5,1). 1) Il existe des désintégrations régulières de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$, c. à d. des familles $(\lambda_{(\omega)}^t)_{(t, \omega)}$ de mesures sur Ω , indexées par $R \times \Omega$, ayant les propriétés suivantes: pour tout t , $\omega \rightarrow \lambda_{(\omega)}^t$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{F}^t$; pour toute $f \geq 0$ λ -mesurable, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow (\lambda_{(\omega)}^t)^*(f)$ est réglée et continue à droite. Deux désintégrations régulières sont λ -presque partout égales.

2) Si λ est portée par Ω' , réunion dénombrable de compacts métrisables disjoints H_m , toute désintégration régulière est $\mathcal{H}$ -régulière: pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \lambda_{(\omega)}^t$ est réglée et continue à droite de R dans $\mathcal{H}$.

Il existe alors des désintégrations $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ -régulières, c. à d. des désintégrations pour lesquelles toutes les $\lambda_{(\omega)}^t$ sont dans $\mathcal{H}$, qui sont $\mathcal{H}$ -régulières, et pour lesquelles, pour tout t et tout ω , $\lambda_{(\omega)}^t$ est la limite de $\lambda_{(\omega)}^{t_n}$ dans $\mathcal{H}$ pour n infini, si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas.

Pour que $(\lambda_{(\omega)}^t)_{(t, \omega)}$ soit une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ -régulière, il faut et il suffit que toutes les $\lambda_{(\omega)}^t$ soient dans $\mathcal{H}$, que, sur $R' \times \Omega$, $(\lambda_{(\omega)}^{t'})_{(t', \omega)}$ soit une famille de désintégrations de λ pour les $\mathcal{F}^{t'}$, $t' \in R'$, et que, pour tout t et tout ω , $\lambda_{(\omega)}^t$ soit la limite dans $\mathcal{H}$ de $\lambda_{(\omega)}^{t_n}$ si cette limite existe et 0 si elle n'existe pas.

3) Posons $\lambda_\omega^{t-} = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}$, limite dans $\mathcal{H}$; pour λ -presque tout ω , λ_ω^{t-} existe pour tout t non isolé à gauche dans R . Alors, pour toute fonction f , à valeurs dans un Banach et λ -intégrable, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est λ_ω^t -intégrable et λ_ω^{t-} -intégrable; $t \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ est réglée et continue à droite et $\lambda_\omega^{t-}(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}(f)$.

Proposition (5,1 bis). Si $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ et si (λ_ω^{t-}) est un système de limites à gauche, pour tout t , $\omega \rightarrow \lambda_\omega^t$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{F}^t$ et $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{t-}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{F}^{t-}$.

Démonstration. La première affirmation est dans la définition. Pour la deuxième, on prendra d'abord $f \geq 0$, appartenant à $\mathcal{O}$, et λ -intégrable; la théorie des martingales réelles montre alors que $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{t-}(f)$ est une espérance conditionnelle de f pour $\mathcal{F}^{t-}$, λ ; par passage à la limite de suites croissantes, ceci reste vrai pour $f \geq 0$ dans $\mathcal{O}$ quelconque; donc $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{t-}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$ pour $\mathcal{F}^{t-}$, λ , donc une désintégration de λ pour $\mathcal{F}^{t-}$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des martingales régulières particulières que sont les désintégrations régulières.

Proposition (5,2). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$. Soit $s \in R$ et $A \in \mathcal{F}^s$. Pour λ -presque tout ω , pour tout $t \geq s$, λ_ω^t est portée par A ou $\mathbb{C}A$ selon que $\omega \in A$ ou $\omega \in \mathbb{C}A$, et, pour tout $t > s$, λ_ω^{t-} est portée par A ou $\mathbb{C}A$ selon que $\omega \in A$ ou $\omega \in \mathbb{C}A$.

Démonstration. Pour $t' \in R'$, $t' \geq s$, pour λ -presque tout $\omega \in A$, $\lambda_\omega^{t'}$ est portée par A (proposition (2,18)). Donc, pour λ -presque tout $\omega \in A$, pour tout $t' \in R'$, $t' \geq s$, $\lambda_\omega^{t'}$ est portée par A , autrement dit $\lambda_\omega^{t'}(\mathbb{C}A) = 0$. Mais, pour λ -presque tout $\omega \in A$, $t \rightarrow \lambda_\omega^t(\mathbb{C}A)$ est continue à droite, donc $\lambda_\omega^t(\mathbb{C}A) = 0$ pour tout $t \in R$, $t \geq s$, donc λ_ω^t est portée par A . On ne peut pas immédiatement dire la même chose pour les λ_ω^{t-} . Mais on peut écrire $\mathbb{C}A$ comme réunion d'une suite de parties C_n de $\mathcal{F}^s$, de λ -mesures finies, puisque λ est σ -finie sur $\mathcal{F}^s$. Alors, d'après le théorème (5,1), point 3, pour λ -presque tout $\omega \in A$,

pour tout $t > s$, $\lambda_\omega^{t-}(C_n) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}(C_n) = 0$, donc on a encore $\lambda_\omega^{t-}(\mathbb{G}A) = 0$ et λ_ω^{t-} est portée par A , cqfd.

Proposition (5,3). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Soit f une fonction sur Ω , à valeurs dans un Banach F , λ -mesurable-Lusin, et telle que la mesure $\|f\|_F \lambda$ soit σ -finie sur toutes les $\mathcal{T}^t$. Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout t , f est λ_ω^t -intégrable et λ_ω^{t-} -intégrable, $t \rightarrow \lambda_\omega^t(f)$ est réglée et continue à droite, et $\lambda_\omega^{t-}(f) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}(f)$.

Démonstration. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Puisque $\|f\|_F \lambda$ est σ -finie sur $\mathcal{T}^{t_0}$, Ω est réunion d'une suite de parties $\Omega_n \in \mathcal{T}^{t_0}$, sur lesquelles f est λ -intégrable. Pour λ -presque tout $\omega \in \Omega_n$, et tout $t \geq t_0$, λ_ω^t est portée par Ω_n , donc f est λ_ω^t -presque partout égale à $\chi_{\Omega_n} f$ λ -intégrable; de même, pour $t > t_0$, λ_ω^{t-} est portée par Ω_n , et f est λ_ω^{t-} -presque partout égale à $\chi_{\Omega_n} f$, λ -intégrable. Alors l'application du point 3 de (5,1) montre que le résultat est valable, pour λ -presque tout $\omega \in \Omega_n$ et tout $t \geq t_0$ ou $> t_0$; ceci étant vrai pour tout Ω_n et tout t_0 , le résultat cherché s'en déduit.

Proposition (5,4). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Pour λ -presque tout ω , pour tout t , λ_ω^t et λ_ω^{t-} sont des mesures de Radon de masse 1, $t \rightarrow \lambda_\omega^t$ est réglée et continue à droite de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{P}(\Omega)$ des probabilités de Radon sur Ω , muni de la topologie étroite, et $\lambda_\omega^{t-} = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}$, limite dans $\mathcal{P}(\Omega)$. Inversement, si $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une famille de mesures sur Ω , si, pour tout t , $\omega \rightarrow \lambda_\omega^t$ appartient à $\mathcal{T}^t$, si, pour tout $t' \in \mathbb{R}'$, $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{t'}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}^{t'}$, et si, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \lambda_\omega^t$ est continue à droite de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Démonstration. Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière. Pour $t' \in \mathbb{R}'$, pour λ -presque tout ω , $\lambda_\omega^{t'}$ est de masse 1 (proposition (2,15)). Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout $t' \in \mathbb{R}'$, $\lambda_\omega^{t'}$ est de masse 1. Mais comme, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \lambda_\omega^t(1)$ est continue à droite, λ_ω^t est de masse 1 pour tout t . Ensuite, λ étant σ -finie sur toutes les $\mathcal{T}^t$, la proposition précédente

montre que $\lambda_{\omega}^{t-}(1) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_{\omega}^{t'}(1) = 1$, donc λ_{ω}^{t-} aussi est de masse 1.

Comme toutes ces mesures sont de Radon sur $\tilde{\Omega}'$, si elles sont de masse 1, elles sont de Radon sur Ω . La fonction $t \rightarrow \lambda_{\omega}^t$ est continue à droite de R dans $\mathcal{H}$, c. à d. pour la topologie vague sur $\tilde{\Omega}'$, mais toutes les masses sont égales à 1, donc il y a aussi continuité à droite pour la topologie étroite sur $\tilde{\Omega}'$. De même, la formule $\lambda_{\omega}^{t-} = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_{\omega}^{t'}$ étant valable dans $\mathcal{H}$, avec des mesures de masse 1, est valable pour la topologie étroite sur $\tilde{\Omega}'$. Et comme $\tilde{\Omega}' \rightarrow \Omega$ est continue, la convergence étroite sur $\tilde{\Omega}'$ entraîne la convergence étroite sur Ω .

Inversement, soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une famille de mesures ayant les propriétés de la deuxième partie de l'énoncé, et soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière. Pour tout $t' \in R'$, pour λ -presque tout ω , on a $\lambda_{\omega}^{t'} = \lambda_{\omega}^{t'}$; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout $t' \in R'$, $\lambda_{\omega}^{t'} = \lambda_{\omega}^{t'}$. Comme ensuite, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \lambda_{\omega}^t$ et $t \rightarrow \lambda_{\omega}^t$ sont continues à droite de R dans $\mathcal{P}(\Omega)$ et coïncident sur R' , elles coïncident sur R . Comme ensuite, pour tout $t \in R$, $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^t$ est dans $\mathcal{T}^t$ et λ -presque partout égale à $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^t$, qui est une désintégration, elle est elle-même une désintégration, donc $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ est bien une désintégration régulière.

Nous allons maintenant étendre la proposition (2,19) au cas d'une désintégration régulière.

Proposition (5,5). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$. Soit f une application de Ω dans un ensemble Z muni d'une tribu $\mathcal{Z}$, définie λ -presque partout et $(\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_{\lambda, \mathcal{Z}})$ -mesurable pour tout t . Alors, si $\mathcal{Z}$ est $f(\lambda)$ -dénombrablement séparante, pour λ -presque tout ω , pour tout $t \in R$, f est λ_{ω}^{t-} -presque et λ_{ω}^{t-} -presque partout égale à la constante $f(\omega)$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de (2,19) [1]. Soit $\mathcal{Z}' \in \mathcal{Z}$, portant $f(\lambda)$ (de sorte que $f^{-1}(Z')$ porte λ), tel que $Z' \cap \mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ soit dénombrablement séparante, et soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties appartenant à $\mathcal{Z}'$, telle que tout point z' de Z' soit l'intersection des Z_n qui le con-

[1] appliquée à $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$, désintégration régulière de λ pour la famille $(\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_{\lambda})_{t \in R}$.

tiennent. Soit $A_n = f^{-1}(Z_n)$. On sait alors que $A_n \in \mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$ pour tout t ; d'après la proposition (5,2), pour λ -presque tout $\omega \in A_n$, λ_ω^t est portée par A_n et λ_ω^{t-} aussi. Donc, pour λ -presque tout $\omega \in f^{-1}(Z')$, pour tout t , λ_ω^t et λ_ω^{t-} sont portées par l'intersection des A_n contenant ω , c. à d. l'image réciproque de l'intersection des Z_n contenant $f(\omega)$, c. à d. par $\{f(\omega)\}$, cqfd.

Nous donnerons de même, sans démonstration car c'est toujours la même, l'extension du corollaire (2,22):

Proposition (5,6). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Soit $\omega \rightarrow v_\omega$ une application de Ω dans l'espace des mesures sur un ensemble Y muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, appartenant à toutes les tribus $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$.

On suppose que $\mathcal{Y}$ est v -décombrablement engendrée, où $v = \int_\Omega v_\omega d\lambda(\omega)$.

Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\omega' \rightarrow v_{\omega'}$ est λ_ω^t -presque et λ_ω^{t-} -presque partout égale à la constante v_ω .

Passons maintenant au cas d'une application f elle-même variable avec t , ce qui suppose une topologie sur Z .

Proposition (5,7). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ sur $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Soit Z un espace topologique, $\mathcal{Z}$ une tribu quelconque sur Z . Soit f une application de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans Z , définissant une famille $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications de Ω dans Z , $f^t(\omega) = f(t, \omega)$. On suppose que:

- 1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, f^t est $(\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda, \mathcal{Z})$ -mesurable;
- 2) Il existe un ensemble R' décombrable dense dans $\mathbb{R}$, contenant tous ses points isolés à droite (resp. à gauche), tel que, pour tout $t' \in R'$, la tribu $\mathcal{Z}$ soit $f^{t'}(\lambda)$ -décombrablement séparante;
- 3) Pour λ -presque tout ω , la fonction $t \rightarrow f^t(\omega)$ est continue à droite (resp. à gauche).

Alors, pour λ -presque ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , la "trajectoire": $t \mapsto f^t(\omega')$, $t < s$ (resp. $t \leq s$), coïncide avec la trajectoire: $t \mapsto f^t(\omega)$, $t < s$ (resp. $t \leq s$).

La fin de l'énoncé veut aussi dire que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_ω^s est portée par l'ensemble des ω' pour lesquels la trajectoire, pour les temps $< s$ (resp. $\leq s$) est la même que celle de ω .

Démonstration. Il résulte de la proposition (5,5) que, pour t' fixé dans R' , pour λ -presque tout ω , pour tout $s \geq t'$, $f^{t'}$ est λ_ω^s -presque partout égale à $f^{t'}(\omega)$. Comme R' est dénombrable, on voit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , la trajectoire $t' \mapsto f^{t'}(\omega')$ coïncide avec la trajectoire $t' \mapsto f^{t'}(\omega)$, sur $R' \cap [-\infty, s]$. Le résultat subsiste pour λ_ω^{s-} , en remplaçant $[-\infty, s]$ par $[-\infty, s[$. Ceci règle le cas où $R = R'$ est dénombrable, et il n'y a pas besoin de topologie sur Z .

Supposons maintenant R quelconque, Z topologique et la continuité à droite. La conclusion précédente pour R' est valable; en outre, pour λ -presque tout ω' , $t \mapsto f^t(\omega')$ est continue à droite; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque et λ_ω^{s-} -presque tout ω' , elle est continue à droite. Mais, si $t \mapsto f^t(\omega')$ et $t \mapsto f^t(\omega)$ sont toutes les deux continues à droite et coïncident sur $R' \cap [-\infty, s]$ ou $R' \cap [-\infty, s[$, elles coïncident sur $R \cap [-\infty, s]$. Dans le cas de la continuité à gauche, si $t \mapsto f^t(\omega')$ et $t \mapsto f^t(\omega)$ coïncident sur $R' \cap [-\infty, s]$ ou $R' \cap [-\infty, s[$, et sont toutes deux continues à gauche, en choisissant R' de manière qu'il contienne tous les points de R isolés à gauche, on voit qu'elles coïncideront sur $R \cap [-\infty, s]$.

Remarque. 1. En général $\mathcal{Z}$ est la tribu borélienne de Z . Elle est dénombrablement engendrée toutes les fois que Z est souslinien ou sous-espace d'un souslinien. Si maintenant Z est topologique quelconque et si les f^t sont λ -mesurables-Lusin pour $t' \in R'$, $f^{t'}(\lambda)$ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables (parce que λ a cette propriété, et que l'image d'un compact métrisable par une application continue est un compact métrisable), donc Z est $f(\lambda)$ -dénumbrablement séparante, donc la proposition s'applique encore.

Remarque. 2. Dans le cas de la continuité à droite, on a évidemment l'énoncé suivant: pour tout s , pour λ -presque tout ω , pour λ_ω^s -presque tout ω' , $t \mapsto f^t(\omega')$ et $t \mapsto f^t(\omega)$ coïncident sur $R \cap [-\infty, s]$; il suffit en effet de remplacer R' par $R' \cup \{s\}$. Mais je ne sais pas si l'on peut intervertir "pour tout s " et "pour λ -presque tout ω ". Nous verrons cependant un cas très général où c'est possible, mais la démonstration est considérablement plus difficile. Voir proposition (6, 18).

Corollaire (5,7 bis). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ . Soit F un ensemble de $R \times \Omega$, F^t sa section par $t \in R$, c. à d. l'ensemble des ω tels que $(t, \omega) \in F$. On suppose que, pour tout $t \in R$, $F^t \in \mathcal{F}^t \setminus \mathcal{N}_{\lambda}$, et que, pour λ -presque tout $\omega \in \Omega$, la section F_{ω} a une fonction caractéristique continue à droite (resp. à gauche). Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , pour tout $t < s$, (resp. $t \leq s$), ω' est dans F^t ou dans $\complement F^t$ selon que ω est dans F^t ou dans $\complement F^t$.

Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction caractéristique de F .

(5,8) Application des désintégrations régulières aux martingales

Nous avons démontré des propriétés très fortes des surmartingales régulières au § précédent, en faisant sur $(Y, \mathcal{Y})$ des hypothèses de compacité et métrisabilité. Maintenant, nous allons montrer à peu près les mêmes résultats, en supposant seulement que $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une J -martingale ou surmartingale sur $(Y, \mathcal{Y})$, J σ -finie, mais nous supposerons sur $(\Omega, \mathcal{O})$ les hypothèses indiquées au début de ce §, impliquant l'existence de désintégrations régulières de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ (on comparera au théorème (2, 31)).

Proposition (5,9). Soit $\omega \rightarrow v_{\omega}$ une fonction sur Ω , à valeurs mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, appartenant à $\mathcal{O}$, $J = \int_{\Omega}^* v_{\omega} d\lambda(\omega)$ σ -finie. Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$. Alors $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, où $v_{\omega}^t = \int_{\Omega}^* v_{\omega} \cdot d\lambda_{\omega}^t(\omega')$, est une martingale régulière d'espérances conditionnelles de $\omega \rightarrow v_{\omega}$ pour les tribus $\mathcal{F}^t$.

En outre, si $(\lambda_{\omega}^{t-})_{(t,\omega)}$ est une famille de limites à gauche associée à la désintégration régulière, alors les $v_{\omega}^{t-} = \int_{\Omega}^* v_{\omega} \cdot d\lambda_{\omega}^{t-}(\omega')$ forment un système de limites à gauche pour la martingale $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, et $\omega \rightarrow v_{\omega}^{t-}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_{\omega}$ pour la tribu $\mathcal{F}^{t-}$ et λ .

Remarque. Si $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}$ est seulement λ -mesurable, on sait, par le lemme (1, 12 bis), si $\mathcal{Y}$ est J -dénombrablement engendrée, qu'il existe une fonction $\omega \rightarrow v_{\omega}$, qui lui est λ -presque partout égale donc a les mêmes espérances

conditionnelles, mais appartient à la tribu $\mathcal{O}$. On se ramène donc aisément au cas traité ici, qui a le mérite de ne faire aucune autre hypothèse sur J que la σ -finitude. Par contre, nous avons vu au théorème (2,16) que cette seule condition de σ -finitude n'entraîne peut-être pas l'unicité de l'espérance conditionnelle; la famille des v_ω^{t-} n'est pas forcément unique non plus, si $\mathcal{Y}$ n'est pas J -dénombrablement engendrée.

Démonstration. Le théorème (2,31) dit justement que, pour tout t , $\omega \rightarrow v_\omega^t$ (resp. v_ω^{t-}) est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow v_\omega$ relativement à $\mathcal{F}^t$ (resp. $\mathcal{F}^{t-}$).

Soit f une fonction ≥ 0 sur Y , appartenant à $\mathcal{Y}$. Alors la fonction g sur Ω , définie par $g(\omega') = v_\omega(f)$, est dans $\mathcal{O}$, et l'on a exactement $v_\omega^t(f) = \lambda_\omega^t(g)$, $v_\omega^{t-}(f) = \lambda_\omega^{t-}(g)$. Le fait que $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ soit une désintégration régulière entraîne alors que, pour λ -presque tout ω , $t \rightarrow \lambda_\omega^t(g)$ soit réglée et continue à droite, donc aussi $t \rightarrow v_\omega^t(f)$, donc $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une martingale régulière. Ensuite, si f est en outre J -intégrable, alors g est λ -intégrable (et $J(f) = \lambda(g)$), de sorte que, pour λ -presque tout ω , g est λ_ω^{t-} -intégrable donc f v_ω^{t-} -intégrable, et $v_\omega^{t-}(f) = \lambda_\omega^{t-}(g) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} \lambda_\omega^{t'}(g) = \lim_{t' < t, t' \rightarrow t} v_\omega^{t'}(f)$, cqfd.

Nous allons maintenant faire la même étude pour des surmartingales mais elle est notablement plus délicate.

Lemme (5,10). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et soit $(\lambda_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ un système de limites à gauche. Pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout t , on a les formules intégrales:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \lambda_\omega^t d\lambda_\omega^s(\omega') = \lambda_\omega^{\text{Min}(s,t)};$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} \lambda_\omega^t d\lambda_\omega^{s-}(\omega') = \lambda_\omega^{s-} \text{ pour } t \geq s, \lambda_\omega^t \text{ pour } t < s;$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} \lambda_\omega^{t-} d\lambda_\omega^s(\omega') = \lambda_\omega^s \text{ pour } t > s, \lambda_\omega^{t-} \text{ pour } t \leq s;$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} \lambda_\omega^{t-} d\lambda_\omega^{s-}(\omega') = \lambda_\omega^{(\text{Min}(s,t))-}$$

(On peut l'écrire en une seule formule: si $\tau = t$ ou $t-$, $\sigma = s$ ou $s-$, c'est toujours $\lambda_{\omega}^{\text{Min}(\sigma, \tau)}$).

Démonstration. Fixons t . Soit $\hat{R}'$ dense dans R , contenant tous les points isolés à droite de $R \cap [-\infty, t]$. Pour $s' \in \hat{R}'$, pour λ -presque tout ω , on a les formules intégrales, d'après la proposition (3, 10 bis) (avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}^t$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}^s$ ou $\mathcal{T}^{s-}$). Donc, pour λ -presque tout ω on a ces formules pour tout $s' \in R$.

Utilisons alors la proposition (5, 9). Elle nous dit que $(s, \omega) \rightarrow \int_{\Omega} \lambda_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$

est une martingale régulière (d'espérances conditionnelles de la fonction $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^t$, pour $s \leq t$). Mais $(s, \omega) \rightarrow \lambda_{\omega}^s$ est aussi une martingale régulière. Elles sont λ -presque partout égales sur $\hat{R}' \times \Omega$, d'après ce que nous venons de voir, donc sur $(R \cap [-\infty, t]) \times \Omega$ par le corollaire (4, 10 quarto). Ensuite $(\lambda_{\omega}^{s-})_{(s, \omega)}$ est un système de limites à gauche de la deuxième et encore la proposition (5, 9) nous dit que $(s, \omega) \rightarrow \int_{\Omega} \lambda_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$ est un système de limites

à gauche de la première, donc elles sont bien λ -presque partout égales.

Nous avons donc démontré que, pour tout t , pour λ -presque tout ω , pour tout $s \leq t$, on a les deux premières formules intégrales; il nous faut maintenant intervertir "pour tout t " et "pour λ -presque tout ω ". On remarquera d'abord qu'on peut toujours remplacer la désintégration régulière par une autre; en effet, pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_{ω}^s et λ_{ω}^{s-} sont inchangées et d'autre part, pour λ -presque tout ω' , pour tout t , les $\lambda_{\omega'}^t$ sont inchangées, donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout t , la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t$ est remplacée par une fonction λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque partout égale, ce qui ne change rien non plus aux seconds membres des formules. On peut donc supposer toutes les λ_{ω}^t et λ_{ω}^{t-} dans un même espace $M_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ système λ -déterminant, et toutes de masse ≤ 1 . Alors, d'une part, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t' \in R'$, $t' \leq s$, on a les deux premières formules intégrales; d'autre part, la désintégration étant régulière, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $B \in \mathcal{B}$, pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , la fonction $t \mapsto \lambda_{\omega'}^t(B)$ est continue à droite. Choisissons un tel ω . Lorsque $t' \in R'$, $t' \geq t$, tend vers t , la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t'}(B)$ converge alors vers la

fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t(B)$, λ_{ω}^s -presque partout et λ_{ω}^{s-} -presque partout: alors $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t(B)$ sera λ_{ω}^s -mesurable et λ_{ω}^{s-} -mesurable, pour tout $B \in \mathcal{B}$; d'après la proposition G , $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t$ est aussi λ_{ω}^s -mesurable et λ_{ω}^{s-} -mesurable, en tant que fonction à valeurs mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$. Donc toutes les intégrales écrites ont un sens. Ensuite, par le théorème de convergence de Lebesgue, applicable parce que $\lambda_{\omega'}^t(B) \leq 1$:

$$\lambda_{\omega}^s(B) = \lim_{t' \rightarrow t} \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^{t'}(B) d\lambda_{\omega}^s(\omega') = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t(B) d\lambda_{\omega}^s(\omega')$$

$$\lambda_{\omega}^{s-}(B) = \lim_{t' \rightarrow t} \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^{t'}(B) d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t(B) d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega').$$

En faisant $B = \mathbb{C}Y'$, on trouve 0 partout, donc $\int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ et $\int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$,

mesures de masse ≤ 1 , appartiennent encore à $M_{\mathcal{B}}$; elles sont égales respectivement à λ_{ω}^s et à λ_{ω}^{s-} sur tout $B \in \mathcal{B}$, donc elles sont exactement λ_{ω}^s et λ_{ω}^{s-} , ce qui achève la démonstration pour les deux premières formules, pour $s \leq t$. Mais les deux dernières s'en déduisent aussitôt, pour $s < t$. En effet, pour λ -presque tout ω' , pour tout $B \in \mathcal{B}$, lorsque $t' \in R'$ tend vers t par valeurs $< t$, $\lambda_{\omega'}^{t'}(B)$ tend vers $\lambda_{\omega'}^t(B)$; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t'}(B)$ tend vers la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t(B)$, λ_{ω}^s -presque partout et λ_{ω}^{s-} -presque partout, en restant bornée par 1, lorsque $t' < t$ tend vers t . La même méthode que ci-dessus montre que, si ω satisfait à toutes ces propriétés, on a, par le théorème de convergence de Lebesgue, pour $s < t$:

$$\lambda_{\omega}^s = \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' < t}} \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega}^s(\omega') = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$$

$$\lambda_{\omega}^{s-} = \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' < t}} \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega'),$$

la limite étant prise dans $M_{\mathcal{B}}$.

Nous avons donc démontré les deux premières formules pour $s \leq t$, les deux dernières pour $s < t$.

Considérons maintenant la fonction $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t$, à valeurs dans $M_{\mathcal{B}}$; pour tout t , $\omega \mapsto \lambda_\omega^t$ appartient à $\mathcal{T}^t$, et, pour λ -presque tout ω , $t \mapsto \lambda_\omega^t$ est continue à droite. L'espace $M_{\mathcal{B}}$ est métrisable séparable, sa tribu borélienne est donc dénombrablement séparante. La proposition (5,7) dit alors que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t < s$, la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t$ est λ_ω^s -presque partout et λ_ω^{s-} -presque partout égale à la constante λ_ω^t ; cela donne immédiatement les deux premières formules intégrales pour $s > t$. En utilisant la fonction $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^{t-}$, et la continuité à gauche de $t \mapsto \lambda_\omega^t$ pour λ -presque tout ω , la même proposition (5,7) dit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \leq s$, $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t-}$ est λ_ω^s -presque partout et λ_ω^{s-} -presque partout égale à la constante λ_ω^{t-} , ce qui donne les deux dernières formules intégrales cherchées pour $s \geq t$.

Lemme (5,11). *Hypothèse J-dénombrable.*

Soient $(v_\omega^{t'})_{(t', \omega)}$, sur $R' \times \Omega$, une J-surmartingale de mesures et $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$.

1) Pour λ -presque tout ω , pour tout $s \in R$, $v_\omega^{t', s} = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega')$ est défini pour tout $t' \in R'$, et $t' \mapsto v_\omega^{t', s}$ est une fonction décroissante sur $R' \cap [s, +\infty]$.

2) Si $t' \rightarrow J^{t'} = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda(\omega)$ est continue à droite sur R' , alors pour λ -presque tout ω , pour tout s , $t' \mapsto v_\omega^{t', s}$ est continue à droite sur $R' \cap [s, +\infty]$.

3) Les mêmes résultats sont valables avec $v_\omega^{t', s} = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_\omega^{s-}(\omega')$.

Démonstration. 1) Puisque $\mathcal{V}$ est J-dénombrablement engendrée, la proposition (4,8 bis) (appliquée aux $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$) montre que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t' \in R'$, la fonction à valeurs mesures $\omega' \mapsto v_{\omega'}^{t'}$, λ -mesurable (elle appartient à $\mathcal{T}^{t'}$), est λ_ω^s -mesurable. Donc $v_\omega^{t', s}$ est bien définie, pour λ -presque tout ω , pour s , pour tout $t' \in R'$. Bien entendu, d'après (2,31), $\omega \mapsto v_\omega^{t', s}$ est une espérance conditionnelle de $\omega' \mapsto v_{\omega'}^{t'}$ pour la tribu $\mathcal{F}_{\lambda^s}^s$.

Mais ce n'est pas ici une valeur de s qui nous intéresse, c'est le: "pour λ -presque tout ω , pour tout s ".

Le lemme précédent indique aussi que, si $t' \in R'$, $t'' \in R'$, $t' \leq t''$, pour λ -presque tout ω , pour tout $s \leq t'$, $\lambda_\omega^s = \int_{\Omega} \lambda_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega')$. Choisissons ω

avec toutes les propriétés précédentes: la proposition (1,17) dit qu'alors

$$v_{\omega}^{t'',s} = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t''} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') = \int_{\Omega} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t''} d\lambda_{\omega'}^{t'}(\omega') = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'',t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega').$$

Mais, $(v_{\omega}^{t'})_{(t',\omega)}$ étant une surmartingale sur $R' \times \Omega$, le point 2 de la proposition (4,5) dit que, pour λ -presque tout ω' , $v_{\omega'}^{t'',t'} \leq v_{\omega'}^{t'}$ (ceci, pour t' , t'' fixés, ou variables, puisque R' est dénombrable); donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , $v_{\omega'}^{t'',t'} \leq v_{\omega'}^{t'}$, et alors $\int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'',t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') \leq \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') = v_{\omega}^{t',s}$, ce qui montre la propriété de décroissance.

2) Pour λ -presque tout ω' , $t'' \rightarrow v_{\omega'}^{t'',t'} \leq v_{\omega'}^{t'}$ est donc décroissante, et a donc une limite $\tilde{v}_{\omega'}^{t'} \leq v_{\omega'}^{t'}$ quand t'' tend vers t' par valeurs strictement supérieures.

$$\text{Par Fatou, } \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'',t'} d\lambda(\omega') \text{ tend vers } \int_{\Omega} \tilde{v}_{\omega'}^{t'} d\lambda(\omega').$$

$$\text{Mais } \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'',t'} d\lambda(\omega') = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t''} d\lambda(\omega') = J^{t''}, \text{ la limite est donc } J^{t'}, \text{ si l'on}$$

$$\text{suppose la continuité à droite des intégrales; donc } \int_{\Omega} \tilde{v}_{\omega'}^{t'} d\lambda(\omega') = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda(\omega'),$$

avec $\tilde{v}_{\omega'}^{t'} \leq v_{\omega'}^{t'}$ λ -presque partout. On a donc égalité λ -presque partout (point 2 de (2,7 bis)): donc, pour λ -presque tout ω' , pour tout t' , t'' , $t' \leq t''$, $\tilde{v}_{\omega'}^{t'} = \lim_{t'' > t', t'' \rightarrow t'} v_{\omega'}^{t'',t'} = v_{\omega'}^{t'}$. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s ,

$$\text{pour } \lambda_\omega^s\text{-presque tout } \omega', v_{\omega'}^{t'',t'} \text{ tend vers } v_{\omega'}^{t'} \text{ pour } t'' \rightarrow t', \text{ et par suite, par Fatou, } \lim_{t'' > t', t'' \rightarrow t'} v_{\omega}^{t'',s} = \lim_{t'' > t', t'' \rightarrow t'} \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'',t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega') = v_{\omega}^{t',s},$$

ce qui achève la démonstration.

3) Les mêmes résultats sont valables avec les λ_ω^{s-} , en remplaçant $\mathcal{T}^s$ par $\mathcal{T}^{s-}$.

Proposition (5,12). *Hypothèse J-dénombrable.*

Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$.

1) Toute J-surmartingale de mesures $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ sur $(Y, \mathcal{Y})$, définie sur $R' \times \Omega$, à intégrale $t' \rightarrow J^{t'} = \int_\Omega v_\omega^{t'} d\lambda(\omega)$ continue à droite, admet un prolongement en une J-surmartingale régulière $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ sur $R \times \Omega$; pour λ -presque tout ω , pour tout s , $v_\omega^s = \lim_{\substack{t' \in R', t' \geq s, t' \rightarrow s}} \int_\Omega v_\omega^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega')$.

2) Toute J-surmartingale de mesures $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ à intégrale $t \rightarrow J^t$ continue à droite, admet des modifications régulières. Deux d'entre elles sont λ -presque partout égales. Pour toute modification régulière $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$, pour λ -presque tout ω , pour tout s , on a $v_\omega^s = \lim_{\substack{t' \in R', t' \geq s, t' \rightarrow s}} \int_\Omega v_\omega^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega')$.

3) Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J-surmartingale régulière, pour λ -presque tout ω , pour tout s , la fonction $t \mapsto \int_\Omega v_\omega^t d\lambda_\omega^s(\omega')$ est définie sur $R \cap [s, +\infty]$, et est décroissante et continue à droite; sa valeur pour $t = s$ est $\int_\Omega v_\omega^s d\lambda_\omega^s(\omega') = v_\omega^s$.

Le même résultat est valable pour λ_ω^{s-} au lieu de λ_ω^s , sauf en ce qui concerne la valeur pour $t = s$. Toutefois, si la martingale donnée a un système de limites à gauche $(v_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$, alors, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $v_\omega^{s-} \geq \int_\Omega v_\omega^s d\lambda_\omega^{s-}(\omega')$.

4) Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une famille de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$, telle que, pour tout t , $\omega \mapsto v_\omega^t$ appartienne à $\mathcal{T}^t$, et que $J \geq J^t = \int_\Omega v_\omega^t d\lambda(\omega)$. Pour que ce soit une surmartingale (resp. une surmartingale régulière), il faut et il suffit que pour tout s , pour tout $t \geq s$, pour λ -presque tout ω , on ait $v_\omega^s \geq \int_\Omega v_\omega^t d\lambda_\omega^s(\omega')$

(resp. que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \geq s$, on ait la même inégalité, et que le 2ème membre soit une fonction décroissante de t , tendant vers le premier quand $t \geq s$ tend vers s).

Démonstration. 1) A) Puisque $\omega' \rightarrow v_{\omega'}^{t'}$ est dans $\mathcal{T}^{t'}$, elle est λ -mesurable; d'après le lemme (1,12 bis), il en existe une modification, $\omega' \rightarrow \bar{v}_{\omega'}^{t'}$, λ -presque partout égale, et qui est dans $\mathcal{O}$ (naturellement, elle n'est plus dans $\mathcal{T}^{t'}$, mais dans $\mathcal{T}^{t'} \vee \mathcal{N}_{\lambda}$). Posons alors $\bar{v}_{\omega'}^{t',s} = \int_{\Omega} \bar{v}_{\omega'}^{t'} d\lambda_{\omega'}^s(\omega')$, qui existe toujours; en outre, $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^{t',s}$ appartient à $\mathcal{T}^s$, et $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^{t',s}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^{t'}$ pour $\mathcal{T}^s, \lambda$. Maintenant introduisons la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'approximation de s définie par $\mathcal{R} = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Modifions-là comme suit: Pour tout s , au lieu d'utiliser s_n , nous utiliserons $\bar{s}_n$, égal à s_n si $s \neq R_n$ ou si $s \in R_n$ est isolé à droite dans R ; sinon, $\bar{s}_n$ sera le premier point de R_n qui majore strictement s_n ; les raisons de ce choix apparaîtront plus loin.

Soit $\mathcal{B}$ un système J -déterminant.

Nous appellerons alors U l'ensemble des $(s, \omega) \in R \times \Omega$ pour lesquels $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s}(\mathbf{C}Y') = 0$ pour tout n , $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s}(Y_m) < +\infty$ pour tout n et tout m , et la suite $(\bar{v}_{\omega}^{s_n, s})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Nous appellerons $\bar{v}_{\omega}^s$ la limite de $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s}$, pour n infini, si $(s, \omega) \in U$.

B) Pour tout s , l'ensemble Ω_s des ω pour lesquels $(s, \omega) \in U$ appartient à $\mathcal{T}^s$. En effet, d'après le lemme F, si $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s} \in M_{\mathcal{B}}$, la croissance de la suite des $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s}$ s'écrit: $\bar{v}_{\omega}^{s_n, s}(\mathcal{B}) \leq \bar{v}_{\omega}^{s_{n+1}, s}$ pour tout n et tout $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$; et toutes les fonctions $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^{s_n, s}$ appartiennent à $\mathcal{T}^s$. En outre, $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^s(B)$ appartient alors à $\mathcal{T}^s \cap \Omega_s$, pour tout $B \in \mathcal{B}$ donc aussi $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^s$. Si donc on pose $\bar{v}_{\omega}^s = 0$ pour $(s, \omega) \notin U$, maintenant $\bar{v}_{\omega}^s$ est défini pour tout s et tout ω , et, pour tout s , $\omega \rightarrow \bar{v}_{\omega}^s$ est dans $\mathcal{T}^s$.

C) Pour λ -presque tout ω , $(s, \omega) \in U$ pour tout s . En effet, pour tout $t' \in R'$, pour λ -presque tout ω' , $v_{\omega'}^{t'}(\mathbf{C}Y') = 0$; donc, pour λ -presque tout ω , pour λ^s -presque tout ω' , pour tout $t' \in R'$, $\bar{v}_{\omega}^{t', s}(\mathbf{C}Y') = 0$, et $\bar{v}_{\omega}^{t', s}(\mathbf{C}Y') = \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'}(\mathbf{C}Y') d\lambda_{\omega'}^s(\omega') = 0$. Ensuite, la fonction $\omega' \rightarrow \bar{v}_{\omega'}^{t'}$ est λ -intégrable;

donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , elle est λ_ω^s -intégrable, et $\overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}}$ (Y_m) est alors fini pour tout n et tout m . Enfin le lemme précédent dit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $t' \rightarrow \int_\Omega \overline{v_\omega^{t', s}} d\lambda_\omega^s(\omega')$ est

décroissante sur R' , donc $(\overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}})_{n \in \mathbb{N}}$ sera croissante. Il est donc bien montré que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(s, \omega) \in U$.

D) La famille $(\tilde{v}_\omega^s)_{(s, \omega)}$ est à intégrale continue à droite sur R . En effet, pour $s \in R$, $\tilde{J}^s = \int_\Omega \tilde{v}_\omega^s d\lambda(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}} d\lambda(\omega)$ (limite λ -presque partout

d'une suite croissante, Fatou) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \overline{v_\omega^{\bar{s}_n}} d\lambda(\omega)$ (propriété des espérances conditionnelles). Or la fonction $t' \rightarrow \int_\Omega \overline{v_\omega^{t'}}$

$d\lambda(\omega) = J^{t'}$ est supposée décroissante et continue à droite sur R' , donc la fonction $s \rightarrow \tilde{J}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} J^{s_n}$

$= \lim_{t' \geq s, t' \rightarrow s} J^{t'}$ est décroissante et continue à droite sur R . En outre $\tilde{J}^s \leq J$.

E) Montrons que, pour tout n , $(\overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}})_{(s, \omega)}$ est une surmartingale régulière; comme $(\tilde{v}_\omega^s)_{(s, \omega)}$ est λ -presque partout la limite de la suite, λ -presque partout croissante, de ces surmartingales, elle sera aussi une surmartingale régulière. Soit $s \leq t$, donc $\bar{s}_n \leq \bar{t}_n$. Pour $A \in \mathcal{F}_s$, $\int_A \overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}} d\lambda(\omega) = \int_A \overline{v_\omega^{\bar{s}_n}}$

$d\lambda(\omega)$ (égalité des espérances conditionnelles) $\geq \int_A \overline{v_\omega^{\bar{t}_n}}$ (inégalité des surmartingales)

$= \int_A \overline{v_\omega^{\bar{t}_n, t}} d\lambda(\omega)$ (égalité des espérances conditionnelles).

Donc $(\overline{v_\omega^{\bar{s}_n, s}})_{(s, \omega)}$ est bien une surmartingale. Elle est régulière, et c'est là qu'intervient le choix particulier des $\bar{s}_n$.

Soient en effet α, β , deux points consécutifs de R_n . Pour tout $s \in [\alpha, \beta[$, $s_n = \alpha$ pour $s = \alpha$, et $s_n = \beta$ pour $s \neq \alpha$; mais alors $\bar{s}_n = \beta$ pour tout $s \in [\alpha, \beta[$, si $\alpha \in R_n$ n'est pas isolé à droite dans R ; si α est isolé à droite dans R , on a encore $\bar{s}_n = \alpha$ pour $s = \alpha$, mais ce sera sans importance pour la continuité

à droite, puisque α est isolé à droite dans R . Alors $s \rightarrow \overline{v_{\omega}^{s,n,s}}$ n'est autre, dans $[\alpha, \beta[$, que $s \rightarrow \int_{\Omega} \overline{v_{\omega}^{\beta} d\lambda_{\omega}^s(\omega')}$, si α n'est pas isolé à droite dans R , et

la même fonction, sauf au point α où c'est $\int_{\Omega} \overline{v_{\omega}^{\alpha} d\lambda_{\omega}^{\alpha}(\omega')}$, si α est isolé à droite

dans R . Dans chaque cas, la proposition (5,9) dit justement que cette fonction est continue à droite dans $[\alpha, \beta[$, et la surmartingale $(v_{\omega}^{s,n,s})_{(s,\omega)}$ est bien régulière. Donc maintenant $(\tilde{v}_{\omega}^s)_{(s,\omega)}$ est une surmartingale régulière. Mais elle ne prolonge pas nécessairement la surmartingale donnée $(v_{\omega}^{s'})_{(s',\omega)}$ sur $R' \times \Omega$. Cependant, le lemme précédent dit que, pour λ -presque tout ω , pour tout $s' \in R'$, $\overline{v_{\omega}^{s',n,s'}}$ va en croissant et tend vers $v_{\omega}^{s',s'}$ pour n infini. Comme ensuite $\overline{v_{\omega}^{s',s'}} = v_{\omega}^{s'}$ pour λ -presque tout ω (unicité des espérances conditionnelles), et que $v_{\omega}^{s'} = v_{\omega}^s$ pour λ -presque tout ω , on voit que, pour $s' \in R'$, $\tilde{v}_{\omega}^s = v_{\omega}^{s'}$ λ -presque partout. Si donc nous appelons v_{ω}^s la mesure égale à $\tilde{v}_{\omega}^s$ pour $s \notin R'$ et à v_{ω}^s pour $s \in R'$, $(v_{\omega}^s)_{(s,\omega)}$ a toutes les propriétés voulues.

2) Soit maintenant $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une surmartingale sur $R \times \Omega$, à intégrale $t \rightarrow J^t$ continue à droite. On peut prendre sa restriction à $R' \times \Omega$, puis trouver un prolongement à $R \times \Omega$, régulier d'après la partie 1), soit $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$. Il nous reste à montrer que $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une modification de $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, autrement dit que, pour $t \in R$ donné, $v_{\omega}^t = v_{\omega}^t$ pour λ -presque tout ω . On refait la démonstration C du théorème (4,16). $R' \cup \{t\}$ est encore dénombrable, donc la proposition (4,7) dit que $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est régulière sur $(R' \cup \{t\}) \times \Omega$. La proposition (4,10 quarto) dit alors que $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ et $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$, surmartingales régulières qui coïncident λ -presque partout sur R' , coïncident λ -presque partout sur $(R' \cup \{t\}) \times \Omega$.

3) Si la J -surmartingale $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est régulière, elle admet une modification également régulière, où toutes les mesures sont dans un même $M_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ système J -déterminant (proposition (4,7)); et il est visible qu'une telle modification ne change rien, car elle est λ -presque partout égale à la surmartingale donnée, de sorte que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \geq s$, la fonction $\omega' \mapsto v_{\omega}^t$ est remplacée par une fonction λ_{ω}^s -presque

et λ_ω^{s-} -presque partout égale. Faisons donc l'hypothèse que toutes les v_ω^t sont dans $M_{\mathcal{B}}$. En répétant mot pour mot la démonstration de la fin de la proposition (5, 10), (en gardant λ_ω^s et λ_ω^{s-} mais en remplaçant $\lambda_{\omega'}^t$ par $v_{\omega'}^t$), on voit que toutes les intégrales écrites ont un sens: pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \geq s$, la fonction $\omega' \mapsto v_{\omega'}^t$ est λ_ω^s -mesurable et définit donc des mesures $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_\omega^s(\omega')$ et $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_\omega^{s-}(\omega')$. En appliquant la partie 2, et la proposition (5, 10), on voit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s :

- a) pour tout $t \geq s$, $\omega' \mapsto v_{\omega'}^t$ est λ_ω^s -mesurable;
- b) $t' \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega')$ est décroissante et continue à droite sur $R' \cap [s, +\infty]$,

et sa valeur limite en s est v_ω^s ;

b') pour λ_ω^s -presque tout ω'' , pour tout $t \geq s$, $t' \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega''}^{t'} d\lambda_{\omega''}^t(\omega')$ est définie et décroissante sur $R' \cap [t, +\infty]$, et sa valeur limite en t est $v_{\omega''}^t$;

- c) pour tout $t \geq s$, $\lambda_\omega^s = \int_{\Omega} \lambda_{\omega''}^t d\lambda_\omega^s(\omega'')$.

Choisissons un ω ayant toutes ces propriétés, et $s \leq t \leq t'$. Appliquons la proposition (1, 17) d'intégrales superposées, à partir de c):

$$\int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega') = \int_{\Omega} d\lambda_\omega^s(\omega'') \int_{\Omega''} v_{\omega''}^{t'} d\lambda_{\omega''}^t(\omega').$$

Cette proposition (1, 17) est applicable, parce que l'intégrale du 1er membre, majorée par v_ω^s , est σ -finie, et que $\mathcal{V}$ est v_ω^{s-} dénombrablement engendrée, puisque $v_\omega^s \in M_{\mathcal{B}}$. Faisons alors tendre t' vers t ; la dernière intégrale écrite, d'après b'), croît et tend vers $v_{\omega''}^t$, pour λ_ω^s -presque tout ω'' ; donc le deuxième membre, par Fatou, tend en croissant vers $\int_{\Omega} v_{\omega''}^t d\lambda_\omega^s(\omega'')$. Ceci prouve que,

pour $t' \geq t$ tendant vers t , $\int_{\Omega} v_{\omega'}^{t'} d\lambda_\omega^s(\omega')$ tend en croissant vers $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_\omega^s(\omega')$.

On déduit alors de b) que $t \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ est une fonction décroissante

et continue à droite sur $R \cap [s, +\infty]$, et que sa valeur en s est v_{ω}^s . Ceci règle la partie 3 de l'énoncé en ce qui concerne les intégrales par rapport à λ_{ω}^s . Pour les intégrales par rapport à λ_{ω}^{s-} , on peut faire le même raisonnement; toutefois, en général, la surmartingale n'admettra pas de limites à gauche (nous sommes seulement dans le cas de l'hypothèse J -dénombrable). On fera des hypothèses analogues à a, b, b', c en remplaçant partout λ_{ω}^s par λ_{ω}^{s-} , mais en gardant λ_{ω}^t , et en écrivant pour c : $\lambda_{\omega}^{s-} = \int_{\Omega} \lambda_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega'')$, et sans rien supposer

pour les valeurs limites en s ou en t . Soit t' fixé dans R' . On sait, par la proposition (5,9), que $(s, \omega) \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ est une martingale régulière d'es-

pérances conditionnelles de $\omega \mapsto v_{\omega}^{t'}$, pour les tribus $\mathcal{T}^s \vee \mathcal{N}_{\lambda}$ (car $\omega' \mapsto v_{\omega}^{t'}$ appartient à $\mathcal{T}^{t'}$, donc est λ -mesurable, mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$). Et cette proposition en donne aussi un système de limites à gauche, les $(s, \omega) \mapsto \rho_{\omega}^{s, t'}$ $= \int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$; et la proposition (4,20) dit alors que, pour λ -presque tout

ω , pour tout s , cette limite à gauche $\rho_{\omega}^{s, t'}$ est dans $M_{\mathcal{B}}$; elle est donc σ -finie et $\mathcal{Y}$ est $\rho_{\omega}^{s, t'}$ -dénombrablement engendrée.

On choisira ω vérifiant, outre a, b, b', c, cette propriété pour tout $t' \in R'$, et on aura la formule intégrale de (1,17):

$$\int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = \int_{\Omega} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega'') \int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^t(\omega').$$

En faisant encore tendre t' vers t , on trouvera que $\int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$ tend en croissant vers $\int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$, donc que $t \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$ est décroissante et continue à droite sur $R \cap [s, +\infty]$.

On ne peut rien de plus si la surmartingale donnée n'a pas de limites à gauche (dont, rappelons-le, l'existence n'est pas assurée dans l'hypothèse

J -dénombrable). Mais la martingale régulière $(s, \omega) \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ est

λ -presque partout majorée, pour $s \leq t'$, par la surmartingale régulière $(s, \omega) \mapsto v_{\omega}^s$. Si donc cette dernière admet des limites à gauche, il y aura la même majoration: pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t' \geq s$:

$$\int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') \leq v_{\omega}^{s-}. \text{ En passant à la limite pour } t' \text{ tendant vers } s:$$

$$\int_{\Omega} v_{\omega}^s d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') \leq v_{\omega}^{s-}, \text{ ce qui achève de démontrer 3).}$$

4) Le cas de la surmartingale se déduit de celui de la surmartingale régulière en prenant un ensemble R réduit à 2 éléments, $\{s, t\}$. Si la famille $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ est une J -surmartingale, nous venons démontrer à 3) qu'elle a les propriétés indiquées. Supposons inversement ces propriétés réalisées. Pour tout s , pour tout $t \geq s$, l'inégalité est celle des surmartingales, donc on a en tout cas une J -surmartingale.

Elle est à intégrales continues à droite; en effet, de la formule intégrale

$$\lambda = \int_{\Omega} \lambda_{\omega}^s d\lambda(\omega), \text{ on peut déduire, pour } s \text{ et } t \text{ fixés: } J^t = \int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda(\omega') =$$

$$\int_{\Omega} d\lambda(\omega) \int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega').$$

La proposition (1,17) est en effet applicable, parce que J^t est σ -finie et $\mathcal{U}J^t$ -dénombrablement engendrée. Mais, pour λ -presque tout ω , pour tout s ,

$\int_{\Omega} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ tend par hypothèse en croissant vers v_{ω}^s lorsque t tend vers s ;

par Fatou, on en déduit que le dernier membre tend vers $\int_{\Omega} v_{\omega}^s d\lambda(\omega)$, c'est-

à-dire que J^t tend vers J^s quand t tend vers s . On sait alors par 2), que la surmartingale donnée admet des modifications régulières, et en outre que toute modification régulière est donnée, pour λ -presque tout ω , pour tout s , par

la limite, pour $t' \geq s$, $t' \in R'$, tendant vers s , de $\int_{\Omega} v_{\omega}^{t'} d\lambda_{\omega}^s(\omega')$, c'est-à-dire v_{ω}^s . cqfd.

Remarque. Il existe naturellement un énoncé analogue pour une surmartingale de fonctions à valeurs réelles, au lieu d'une surmartingale de fonctions à valeurs mesures (c'en est un cas particulier pour des fonctions ≥ 0 , en prenant Y réduit à un point); la démonstration est la même, en plus simple.

Remarque. Par contre je ne vois aucun moyen d'obtenir par des procédés de ce genre les limites à gauche $(v_\omega^-)_{(t,\omega)}$, et sans doute n'existent-elles pas sans les hypothèses très fortes de J -compacité. Donc je ne vois pas de possibilité d'une première décomposition de Riesz (proposition (4,24)), qui utilise les v_ω^b . Par contre la deuxième décomposition de Riesz ne les utilise pas et subsiste.

Proposition (5,13). *Hypothèse J -dénombrable.*

Soit $b = \sup R$, $b \notin R$. [1] Soient $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ et $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale régulière sur $(Y, \mathcal{Y})$. Alors on peut écrire $v_\omega^t = \rho_\omega^t + \sigma_\omega^t$, où $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une martingale régulière, et $(\sigma_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est un potentiel régulier, c. à d. une surmartingale régulière dont l'intégrale $\Sigma^t = \int_\Omega \sigma_\omega^t d\lambda(\omega)$ tend vers 0 pour t tendant vers b . Cette décomposition est unique à des ensembles λ -négligeables près. En outre, on a, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\rho_\omega^t = \lim_{\theta \rightarrow b} \int_\Omega v_\omega^\theta d\lambda_\omega(\omega')$.

Démonstration. On se trouve dans les conditions d'application de (4,25): les espérances conditionnelles existent par (2,31), ainsi que les modifications régulières des surmartingales par (5,12). La seule chose nouvelle est l'expression explicite de la martingale $(\rho_\omega^t)_{(t,\omega)}$. Reprenons la construction de (4,25); pour $\overline{\rho_\omega^{\theta_{n,t}}}$, nous pouvons, par (4,22), prendre $\overline{\rho_\omega^{\theta_{n,t}}} = \int_\Omega v_\omega^{\theta_n} d\lambda_\omega^t(\omega')$.

Mais alors, une suite étant dénombrable, le lemme (5.11) dit justement que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , la suite $(\rho_\omega^{\theta_{n,t}})_{(t,\omega)}$ ainsi définie est décroissante; donc sa limite existe (toutes ces mesures étant σ -finies), soit

[1] Voir note [1], page (97).

$\overline{\rho_\omega^t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\rho_\omega^{\theta_n t}}$. Ensuite, pour n fixé, $(\rho_\omega^{\theta_n t})_{(t, \omega)}$, pour $t \leq \theta_n$, est une martingale régulière pour les tribus $\mathcal{F}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$ par la proposition (5,9). Alors $(\rho_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est limite λ -presque partout d'une suite décroissante de martingales régulières, donc elle est, elle aussi, une martingale régulière (il suffit de raisonner par différence: $(\rho_\omega^{\theta_0 t} - \rho_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est λ -presque partout limite de la suite croissante des $(\rho_\omega^{\theta_0 t} - \rho_\omega^{\theta_n t})_{(t, \omega)}$, martingales régulières). Mais alors la martingale finale, $(\rho_\omega^t)_{(t, \omega)}$, modification régulière d'une surmartingale régulière pour $\mathcal{F}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$, lui est λ -presque partout égale. Comme enfin, d'après le point 3 de la proposition (5,12), pour λ -presque tout ω , pour tout t , $\theta \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega}^{\theta} d\lambda_{\omega}^t(\omega')$ est décroissante, on peut remplacer la limite pour θ_n tendant vers b par la limite pour θ tendant vers b .

Proposition (5,14). *Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(\lambda_{\omega}^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche. Soit $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ une surmartingale régulière à valeurs réelles, $(f^{t-})_{t \in \mathbb{R}}$ son système de limites à gauche. Pour λ -presque tout ω , pour tout s : pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , la trajectoire $t \mapsto f^t(\omega')$, $t \leq s$, est égale à la trajectoire $t \mapsto f^t(\omega)$; pour λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto f^t(\omega')$, $t < s$, est égale à $t \mapsto f^t(\omega)$; pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto f^{t-}(\omega')$, $t \leq s$, est égale à $t \mapsto f^{t-}(\omega)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition (5,7), la continuité à droite pour les f^t et la continuité à gauche pour les f^{t-} , pour obtenir tous les résultats, sauf un: on trouve seulement que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , $t \mapsto f^t(\omega')$ est égale à $t \mapsto f^t(\omega)$ pour $t < s$ et non pour $t \leq s$. Il nous faut donc démontrer en plus que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , $f^s(\omega') = f^s(\omega)$, autrement dit f^s est λ_{ω}^s -presque partout égale à $f^s(\omega)$. Nous le ferons en plusieurs étapes.

1) Supposons qu'on ait une inégalité $f(t, \omega) \leq M < +\infty$. Montrons que, pour λ -presque tout ω , pour tout s tel que $f(s, \omega) = M$, f^s est λ_{ω}^s -presque partout égale à M . On peut supposer λ_{ω}^s de masse 1. Nous savons que

$\lambda_\omega^s(f^s) = f^s(\omega) = M$, par le point 3 de la proposition (5,12); alors $\lambda_\omega^s(M - f^s) = 0$ avec $M - f^s \geq 0$, donc $M - f^s$ est bien λ_ω^s -presque partout nulle.

2) Sans hypothèse sur f , posons $f_M^s = \text{Inf}(f^s, M)$; on obtient une surmartingale, partout majorée par M . On peut lui appliquer le résultat 1; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s tel que $f^s(\omega) \geq M$, on a, λ_ω^s -presque partout, $f^s \geq M$.

3) Ceci est encore vrai pour λ -presque tout ω , tout s , et pour tout M rationnel. Considérons un ω ayant cette propriété, et vérifiant en outre $\lambda_\omega^s(f^s) = f^s(\omega)$ pour tout s . Pour un tel ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , on a $f^s(\omega') \geq M$ pour tout M rationnel tel que $f^s(\omega) \geq M$, donc $f^s(\omega') \geq f^s(\omega)$. On a donc $f^s \geq f^s(\omega)$ λ_ω^s -presque partout; mais en même temps $\lambda_\omega^s(f^s) = f^s(\omega)$. On peut en conclure $\lambda_\omega^s(f^s - f^s(\omega)) = 0$ avec $f^s - f^s(\omega)$ λ_ω^s -presque partout ≥ 0 , donc $f^s = f^s(\omega)$ λ_ω^s -presque partout, toutes les fois que $f^s(\omega)$ est fini. Mais, si $f^s(\omega) = +\infty$, $f^s \geq f^s(\omega)$ donne encore $f^s = f^s(\omega)$. D'autre part, les f^s formant une surmartingale régulière, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $f^s(\omega) > -\infty$ (en effet, les $\text{Inf}(f^s, 0)$ forment une surmartingale régulière, à intégrales finies et continues à droite, donc elle admet d'après le point 1 du théorème (4,3), une modification régulière partout finie; et celle-ci est égale à f λ -presque partout sur $\{(s, \omega); f^s(\omega) \leq 0\}$). Ceci achève la démonstration.

Proposition (5,15) Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(\lambda_\omega^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche; soit $(v_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une J -surmartingale régulière, éventuellement $(v_\omega^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche; hypothèse J -dénombrable. Pour λ -presque tout ω , pour tout s : pour λ_ω^s -presque tout ω' , la trajectoire $t \mapsto v_{\omega'}^t$, $t \leq s$, est égale à la trajectoire $t \mapsto v_\omega^t$; pour λ_ω^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto v_{\omega'}^t$, $t < s$, est égale à $t \mapsto v_\omega^t$; pour λ_ω^{s-} -presque et λ_ω^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto v_{\omega'}^t$, $t \leq s$, est égale à $t \mapsto v_\omega^{t-}$.

Démonstration. On voit comme toujours qu'on peut remplacer la surmartingale donnée par une modification régulière, de sorte qu'on peut supposer toutes les v_ω^t dans un même espace $M_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ système J -déterminant. Il suffira alors de prendre les valeurs des v_ω^t , v_ω^{t-} , $v_{\omega'}^t$, $v_{\omega'}^{t-}$, dans l'é-

noncé, sur $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est dénombrable), pour obtenir le résultat en appliquant le lemme F.

Nous allons maintenant étendre la proposition (5,7), au cas continu à droite, pour $t \leq s$.

Corollaire (5,15 bis). *Dans les conditions de la précédente proposition, on a, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout t , les formules intégrales:*

$$\int_{\Omega}^{\cdot} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega') = v_{\omega}^t \text{ pour } t \leq s;$$

$$\int_{\Omega}^{\cdot} v_{\omega}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = v_{\omega}^t \text{ pour } t < s;$$

$$\int_{\Omega}^{\cdot} v_{\omega}^{t-} d\lambda_{\omega}^s(\omega') = \int_{\Omega}^{\cdot} v_{\omega}^{t-} d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = v_{\omega}^{t-} \text{ pour } t \leq s.$$

Lemme (5,16) Soit f une fonction sur $R \times \Omega$, à valeurs réelles; on suppose que pour tout t , $f^t \in \mathcal{T}^t$, et que, pour tout ω , $f_{\omega}: t \mapsto f^t(\omega)$ est réglée et continue à droite. On suppose en outre que $R \cup \{b\}$, où $b = \sup R$, est fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit une fonction M sur $R \times \Omega$, comme suit: $\sigma(t, \omega)$ étant le saut de f_{ω} au point t , $\sigma(t, \omega) = f^t(\omega) - f^{t-}(\omega)$, et ρ un nombre > 0 ,

$M(t, \omega)$ est le nombre des $s \leq t$ pour lesquels $\sigma(s, \omega) \geq \rho$. Alors, pour tout ω , $t \mapsto M(t, \omega)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, est croissante et continue à droite et, pour tout t , $M^t: \omega \mapsto M(t, \omega)$ est dans la tribu $\overline{\mathcal{T}^t}$, intersection des complétées de $\mathcal{T}^t$ pour toutes les mesures abstraites sur $\mathcal{T}^t$.

Démonstration. Une fonction réglée et continue à droite a ses points de saut $\geq \rho$ isolés (parce que $R \cup \{b\}$ est fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$), donc ou bien il y en a un nombre fini, ou bien éventuellement une suite infinie croissante tendant vers b , si $b \notin R$. Alors M prend des valeurs entières ≥ 0 finies. Trivialement $t \mapsto M(t, \omega)$ est continue à droite et croissante. Pour montrer que M^t est dans $\overline{\mathcal{T}^t}$, nous pouvons une fois pour toutes fixer t , donc on peut supposer que

$R \leq t$, et que l'ensemble dense R' contient alors t . Appelons $\mathcal{R}$ la tribu borélienne de cet R . Pour tout n , la fonction $(s, \omega) \mapsto f^{s_n}(\omega)$ appartient alors à $\mathcal{R} \times \mathcal{T}^t$, donc aussi, par passage à la limite, f elle-même; il est de même de f^- et de σ . Considérons alors le sous-ensemble de $R^n \times \Omega$: $\{t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t, \omega; \sigma(t_1, \omega) \geq \rho, \dots, \sigma(t_n, \omega) \geq \rho\}$; il est dans la tribu $\mathcal{R}^n \times \mathcal{T}^t$. D'après le théorème de Choquet, sa projection sur Ω est donc $\mathcal{T}^t$ -analytique et par suite appartient à $\overline{\mathcal{T}^t}[*]$, cqfd.

Lemme (5,17). Soit $R \cup \{b\}$ fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$, et soit $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$. Soit f une fonction sur $R \times \Omega$, telle que, pour tout $t, f^t \in \mathcal{T}^t$, et que, pour λ -presque tout $\omega, f_\omega: t \mapsto f^t(\omega)$ soit réglée et continue à droite. Pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , la trajectoire $t \rightarrow f^t(\omega')$, $t \leq s$, est égale à la trajectoire $t \rightarrow f^t(\omega)$.

Démonstration. Nous savons déjà, par la proposition (5,7), que c'est vrai pour $t < s$, et, par la proposition (5,14) que c'est vrai pour $t \leq s$ si f est une surmartingale régulière: en particulier si, pour λ presque tout $\omega, f_\omega: t \mapsto f^t(\omega)$ est décroissante et continue à droite. Comme c'est vrai pour $t \leq s$ pour une constante, c'est vrai par différence, pour $t \leq s$, si f est croissante, continue à droite, bornée par un nombre fini; également si f n'est pas bornée, puisqu'elle est la limite des $\text{Inf}(f, n)$ pour n tendant vers $+\infty$.

Soit Ω_* un ensemble portant λ tel que f_ω soit réglée et continue à droite pour $\omega \in \Omega_*$. On peut remplacer f par 0 sur $(\Omega \setminus \Omega_*) \times R$, et il est visible que cela ne change rien au résultat, car, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω', ω et ω' sont dans Ω_* . Toutefois la nouvelle fonction f^t n'est plus dans $\mathcal{T}^t$, mais dans $\mathcal{T}^t \vee \{\Omega_*\}$, donc de toute façon dans $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$; et on sait que $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est aussi une désintégration régulière pour les tribus $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$. Pour la nouvelle fonction, f_ω est réglée et continue à droite pour tout ω , ce que nous supposons désormais.

Pour tout ρ rationnel > 0 , construisons la fonction ${}^\rho M$ définie au lemme précédent. Pour tout $t, {}^\rho M^t$ appartient aussi à $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\lambda$, d'après ce lemme; mais maintenant toutes les ${}^\rho M_\omega$ sont croissantes et continues à droite, donc

[*] Voir par exemple P. A. Meyer [1], chap. IV, t. 52, page 102.

nous avons pour ${}^{\rho}M$ un résultat relatif aux trajectoires pour $t \leq s$. Et ceci restera vrai pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout ρ rationnel > 0 . Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout ρ rationnel > 0 , pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , les trajectoires $t \mapsto {}^{\rho}M'(\omega')$, et $t \mapsto {}^{\rho}M'(\omega)$ coïncident pour $t \leq s$. Il en résulte que, si le saut de l'une des fonctions $f_{\omega'}, f_{\omega}$, au point s , est > 0 , le saut de l'autre lui est égal. Comme on peut faire le même raisonnement pour $-f$, on voit que, si l'un des sauts est $\neq 0$, l'autre lui est égal; donc aussi si l'un des deux est nul. On sait déjà que les trajectoires $t \mapsto f^t(\omega')$, $t \mapsto f^t(\omega)$, coïncident pour $t < s$, on sait maintenant en plus que leurs sauts au point s coïncident, donc les trajectoires coïncident pour $t \leq s$.

Voici maintenant le résultat définitif qui étend la proposition (5,7):

Proposition (5,18). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. On suppose $R \cup \{b\}$, $b = \sup R$, fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction sur $R \times \Omega$, à valeurs dans un espace topologique Y souslinien complètement régulier; on suppose que, pour tout t , $f^t \in \mathcal{T}^t$, et que, pour λ -presque tout ω , $f_{\omega}: t \mapsto f^t(\omega)$ est réglée et continue à droite. Alors, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , les trajectoires $f_{\omega'}, f_{\omega}$, coïncident sur $R \cap [-\infty, s]$.

Démonstration. Quitte à remplacer la topologie de Y par une plus faible, on peut supposer qu'il est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. [1] Chacune des projections de f répond alors aux conditions du lemme précédent, d'où le résultat.

Remarques. 1) Il n'est donc pas nécessaire de faire une hypothèse aussi stricte; il suffit qu'il existe une injection continue j de Y dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ou dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$), telle que, pour λ -presque tout ω , $j \circ f_{\omega}$ soit réglée et continue à droite. Il sera en fait rare que f_{ω} ne soit pas elle-même continue à droite, et en tout cas elle le devient par affaiblissement de la topologie, en identifiant Y à $j(Y)$; mais il se peut que $j \circ f_{\omega}$ ait des limites à gauche dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et non dans $j(Y)$, donc, pour l'hypothèse réglée, cela peut être intéressant.

2) Le fait d'exiger que Y soit souslinien complètement régulier ne semble, pas trop gênant. Mais il est souhaitable de se débarrasser de l'hypothèse réglée

[1] Schwartz [1], corollaire 1, page 105.

et de supposer seulement f , ou $j \circ f$, continue à droite. On peut y parvenir comme suit. C'est au lemme (5,16) que cette hypothèse s'est introduite. En supposant seulement f continue à droite, on peut toujours appeler saut la quantité $\sigma(t, \omega) = f(t, \omega) - \liminf_{s < t, s \rightarrow t} f(s, \omega)$. Ce qui empêche alors de con-

struire la fonction ${}^{\rho}M$, c'est que, pour ρ donné > 0 , l'ensemble des t pour lesquels $\sigma(t, \omega) \geq \rho$ n'est plus une suite finie ou infinie, mais un ensemble bien ordonné. Par un raisonnement un peu plus compliqué que ci-dessus, on pourra définir ${}^{\rho}M$ de la même manière, mais à valeurs dans l'ensemble des ordinaux dénombrables, et on verra que, pour tout t , ${}^{\rho}M^t$ est encore dans la tribu $\mathcal{F}^t$. Un résultat connu dit alors qu'il existe un ordinal fixe α_0 dénombrable tel que, pour λ -presque tout ω , pour tout t , $M(t, \omega) \leq \alpha_0[1]$. Le résultat du lemme (5,16) reste alors valable; nous laissons au lecteur le soin de voir la démonstration dans ses détails. *Donc la proposition (5,18) subsiste avec l'amélioration notable: f est seulement supposée continue à droite, non nécessairement réglée.*

Dans les processus de Markov [2], Y est toujours souslinien complètement régulier, et les trajectoires f_{ω} sont généralement supposées continues à droite, et réglées sur $[0, \zeta(\omega)[$; ici il y a au plus un point, $\zeta(\omega)$, où n'existe pas de limite à gauche: dans ce cas, l'introduction des nombres ordinaux transfinis n'est pas nécessaire, simplement la quantité $M(t, \omega)$ (relative à un $\rho > 0$ et à une des projections de $\mathbb{R}^N$) peut éventuellement prendre la valeur $+\infty$ aux points $t \geq \zeta(\omega)$; le fait que $\{\omega; M(t, \omega) \geq n\}$ soit dans $\mathcal{F}^t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffit pour conclure que $M^t \in \mathcal{F}^t$. Si alors $M^s(\omega) = +\infty$, c'est que $s \geq \zeta(\omega)$, on saura que $M^s(\omega') = +\infty$, donc $s \geq \zeta(\omega')$, et alors $f^s(\omega) = f^s(\omega') = \Delta$.

3) Il semble en partie indispensable que $R \cup \{b\}$ soit fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$. Toutefois il suffit évidemment que f_{ω} ait une limite à gauche et à droite en tout point de $[-\infty, b[\cup \overline{R}$, la limite à droite égale à $f(t, \omega)$ en tout point $t \in R$. Comme l'existence d'une limite à gauche en $b = \sup R$ n'est pas exigée si $b \notin R$, on pourra aussi toujours supposer que R est réunion d'une famille dénombrable de parties R^i , chaque $R^i \cup \{\sup R^i\}$ étant fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$, la restriction des f_{ω} à chaque R^i étant réglée et continue à droite; on raisonnera séparément sur chaque R^i et le résultat final subsiste.

[1] Voir P. A. MEYER [1], page 199.

[2] ζ est le temps de mort.

§ 6. Désintégrations régulières et transitivité

Dans tout ce paragraphe, Ω sera un espace topologique, λ une mesure de Radon sur Ω , portée par une réunion dénombrable de compacts H_m disjoint métrisables; Ω' sera leur réunion, $\tilde{\Omega}'$ leur somme topologique et $\mathcal{H} = C^+(\tilde{\Omega}')$. Elle admet alors des désintégrations relativement à toutes les sous-tribus $\mathcal{T}$ de la tribu λ -mesurable, sur lesquelles elle est σ -finie, et aussi des désintégrations régulières par rapport aux familles de tribus, croissantes, et continues à droite.

Proposition (6,1). *Soient $\mathcal{S}$, et $(\mathcal{T}^{\pm n})_{n \in \mathbb{N}}$ des sous-tribus λ -mesurables. Si la suite $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. la suite $(\mathcal{T}^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante), si $\mathcal{T}^{+\infty}$ est la tribu engendrée par la réunion (resp. $\mathcal{T}^{-\infty}$ la tribu intersection), et si toutes les $\mathcal{T}^n$ (resp. $\mathcal{T}^{-n}$) sont λ -plus fortes que $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}^{+\infty}$ (resp. $\mathcal{T}^{-\infty}$) est aussi λ -plus forte que $\mathcal{S}$.*

Démonstration. On peut prendre λ finie (par (3,7 ter)). Prenons le cas décroissant. Posons $R = -\bar{\mathbb{N}} = \{-\infty, \dots, -n, \dots, -2, -1, 0\}$, et $R_n = \{-n, \dots, -2, -1, 0\}$. Alors λ admet une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière, soit $(\lambda_\omega^{-n})_{\omega \in \Omega}$ pour $\mathcal{T}^{-n}$, $(\lambda_\omega^{-\infty})_{\omega \in \Omega}$ pour $\mathcal{T}^{-\infty}$: $\lambda_\omega^{-\infty}$ est la limite de λ_ω^{-n} dans $\mathcal{H}$ si cette limite existe, 0 si elle n'existe pas (théorème 4,16).

Si maintenant μ est une autre mesure analogue sur Ω , et si Ω' porte aussi μ , μ admet aussi des désintégrations $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulières; si on sait, pour une raison quelconque, que, pour $\mathcal{T}^{-n}$, elle admet la même désintégration $(\lambda_\omega^{-n})_{\omega' \in \Omega}$ que λ , alors, pour $\mathcal{T}^{-\infty}$, ce sera aussi la même désintégration $(\lambda_\omega^{-\infty})_{\omega' \in \Omega}$ que pour λ . Or, si $(\lambda_\omega^{\mathcal{S}})_{\omega \in \Omega}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{S}$, pour λ -presque tout ω , Ω' porte $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ et celle-ci est de masse 1; et, puisque chaque $\mathcal{T}^{-n}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$, pour λ -presque tout ω , $\mathcal{T}^{-n}$ est $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ -mesurable et $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ admet pour désintégration pour $\mathcal{T}^{-n}$ la même que λ soit $(\lambda_\omega^{-n})_{\omega' \in \Omega}$. Alors bien entendu, pour ces valeurs de ω , $\mathcal{T}^{-\infty}$ est aussi dans la tribu $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ -mesurable, et, d'après ce que nous avons dit, en prenant $\mu = \lambda_\omega^{\mathcal{S}}$, $\lambda_\omega^{\mathcal{S}}$ est désintégrée pour $\mathcal{T}^{-\infty}$ par $(\lambda_\omega^{-\infty})_{\omega' \in \Omega}$, donc $\mathcal{T}^{-\infty}$ est λ -plus forte que $\mathcal{S}$.

Dans le cas de la suite croissante, il faut tout simplement renverser la gauche et la droite dans les résultats du §4, et considérer le cas des familles de tribus

croissantes et continues à gauche, avec des désintégrations régulières à gauche, avec $R = +\overline{\mathbb{N}}$, $R_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, et on obtient exactement le même résultat, cqfd.

Corollaire (6,2). Soit $\mathcal{T}^{-\infty}$ l'intersection d'une suite $(\mathcal{T}^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de tribus λ -mesurables. Si toutes les $\mathcal{T}^{-n}$ sont λ -fortes, leur intersection $\mathcal{T}^{-\infty}$ l'est aussi.

Démonstration. La condition d'universelle mesurabilité est triviale. Toutes les $\mathcal{T}^{-n}$ sont λ -plus fortes que $\mathcal{T}^{-\infty}$, donc aussi leur intersection $\mathcal{T}^{-\infty}$, cqfd.

Remarque. Il ne semble pas qu'on ait le même résultat pour la tribu $\mathcal{T}^{+\infty}$ engendrée par la réunion d'une suite croissante $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ce qui reste vrai, c'est que $\mathcal{T}^{+\infty}$ est λ -plus forte que toute sous-tribu de l'une quelconque des $\mathcal{T}^n$.

Corollaire (6,3). Soit $(\mathcal{U}^t)_{t \in R}$ une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable; elle est indexée par $R \subset \overline{\mathbb{R}}$ quelconque. On la suppose croissante, mais non nécessairement continue à droite, et on pose $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t' > t} \mathcal{U}^{t'}$, pour t non isolé à droite dans R et $\mathcal{T}^t = \mathcal{U}^t$ pour t isolé à droite. Alors $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$ est croissante et continue à droite. Si les $\mathcal{U}^t$ sont λ -fortes, les $\mathcal{T}^t$ le sont aussi.

Résulte du corollaire (6,2).

L'intérêt de ce résultat est son utilisation dans les processus. Soit X un espace métrique complet séparable, et $\text{Rég}(R, X)$ l'espace des fonctions sur R , à valeurs dans X , réglées et continues à droite; on le munit de la topologie de la convergence simple sur un ensemble dénombrable dense à droite dans R . On sait qu'il est lusinien [1]. Un point ω est donc un "trajectoire" $\in \text{Rég}(R, X)$. La probabilité λ sur Ω est quelconque. Pour $t \in R$, soit R^t l'ensemble $R \cap [-\infty, t]$; posons $\Omega^t = \text{Rég}(R^t, X)$. Alors, pour tout $t \in R$, on a une application borélienne $r^t: \omega \rightarrow \omega^t$ de Ω dans Ω^t , qui fait correspondre à chaque

[1] Vior SCHWARTZ [1], théorème 19, page 138.

trajectoire ω sa restriction ω^t aux temps $\leq t$. Appelons $\mathcal{O}^t$ la tribu borélienne de Ω^t ; $\mathcal{U}^t$ sera l'image réciproque de $\mathcal{O}^t$ par l'application r^t ; $\mathcal{U}^t \subset \mathcal{C}$, c'est une sous-tribu de la tribu borélienne de Ω . Comme Ω^t est lusinien, $\mathcal{O}^t$ est dénombrablement engendrée, donc aussi $\mathcal{U}^t$. D'autre part la famille $(\mathcal{U}^t)_{t \in R}$ est évidemment croissante; $\mathcal{U}^t$ est aussi ce qu'on appelle la tribu du passé de l'instant t . Mais la famille des $\mathcal{U}^t$ n'est pas continue à droite.

C'est pourquoi on est amené à adopter les tribus $\mathcal{F}^t = \mathcal{U}^t$ pour t isolé à droite dans R , $\mathcal{F}^t = \bigcap_{t' > t} \mathcal{U}^{t'}$ pour t non isolé à droite. Le corollaire précédent dit que $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$, qui est maintenant croissante et continue à droite, est une famille de sous-tribus λ -fortes de la tribu borélienne de Ω .

On peut aussi considérer $(\overline{\mathcal{F}^t})_{t \in R}$; c'est encore une famille croissante et continue à droite, et les $\overline{\mathcal{F}^t}$ sont universellement mesurables et encore λ -fortes, d'après le corollaire (3, 9 bis). [1]

Dans la suite, nous nous intéressons aux familles $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ de tribus λ -fortes. Comme nous venons de le voir à la remarque qui suit le corollaire (6,2), les tribus $\mathcal{F}^t = \bigvee_{t' < t} \mathcal{F}^{t'}$ ne le sont pas nécessairement, et il n'y a aucune raison, en pratique, de l'espérer. (Cependant, dans le cas de processus étudiés ci-dessus, $\mathcal{F}^{t-} = \mathcal{U}^{t-}$ est λ -forte, parce que borélienne et dénombrablement engendrée).

Lemme (6,5). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$: supposons les $\mathcal{F}^t$ λ -fortes. Soit $t \in R$. Pour λ -presque tout ω , pour tout s , $\mathcal{F}^t$ est λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque universellement mesurable, et, pour $s \leq t$, λ_{ω}^s et λ_{ω}^{s-} sont désintégrées pour $\mathcal{F}^t$ comme λ elle-même, c. à d. par $(\lambda_{\omega'}^t)_{\omega' \in \Omega}$.

Démonstration. Il existe Ω' portant λ , tel que $\mathcal{F}^t \cap \Omega'$ soit universellement mesurable. Pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_{ω}^s et λ_{ω}^{s-} portent Ω' , donc $\mathcal{F}^t$ est λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque universellement mesurable, donc en particulier λ_{ω}^s -mesurable et λ_{ω}^{s-} -mesurable. Pour λ -presque tout ω' , $\mathcal{F}^t$ est $\lambda_{\omega'}^t$ -mesurable, et $\lambda_{\omega'}^t$ est désintégrée pour $\mathcal{F}^t$ comme λ elle-même, puisque $\mathcal{F}^t$ est λ -plus forte qu'elle-même; donc, pour λ -presque tout ω , pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $\mathcal{F}^t$ est $\lambda_{\omega'}^t$ -mesurable et $\lambda_{\omega'}^t$ est désintégrée pour $\mathcal{F}^t$ comme λ .

[1] Mais, $\mathcal{F}^t$, λ -forte, n'est pas λ -dénumbrablement engendrée en général; voir (8, 4.3).

Enfin, pour λ -presque tout ω , pour tout $s \leq t$, λ_ω^s et λ_ω^{s-} sont des intégrales de mesures $\lambda_{\omega'}^t$, par le lemme (5, 10). Donc, par la proposition (3, 13), pour λ -presque tout ω , pour tout $s \leq t$, λ_ω^s et λ_ω^{s-} sont aussi désintégrées pour $\mathcal{T}^t$ comme λ elle-même.

Théorème (6,6). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$; les $\mathcal{T}^t$ sont supposées λ -fortes. Pour λ -presque tout ω , pour tout s : toutes les $\mathcal{T}^t$ sont λ_ω^s -presque et λ_ω^{s-} -presque universellement mesurables, toutes les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, sont λ_ω^s -fortes et λ_ω^{s-} -fortes; λ_ω^s et λ_ω^{s-} admettent $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ comme désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière pour les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, et $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ comme système de $\mathcal{H}$ -limites à gauche correspondantes pour $t > s$.

Démonstration. 1) Le lemme précédent dit que, pour tout t' , pour λ -presque tout ω , pour tout s , $\mathcal{T}^{t'}$ est λ_ω^s -presque et λ_ω^{s-} -presque universellement mesurable. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , les $\mathcal{T}^{t'}$, $t' \in R'$, sont λ_ω^s -presque et λ_ω^{s-} -presque universellement mesurables, donc aussi leur réunion et par suite toutes les $\mathcal{T}^t$, $t \in R$.

2) Ensuite, toujours d'après le lemme précédent, pour λ -presque tout ω , pour tout $s \in R$, pour tout $t' \in R' \cap [s, +\infty]$, λ_ω^s et λ_ω^{s-} sont désintégrées pour $\mathcal{T}^{t'}$ par $(\lambda_{\omega'}^{t'})_{\omega' \in \Omega}$.

Toutes les $\lambda_{\omega'}^{t'}$ sont dans $\mathcal{H}$, de sorte que l'espace $\mathcal{H}$ est utilisable pour toute λ_ω^s à la place de λ . Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout $s \in R$, λ_ω^s et λ_ω^{s-} admettent une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ régulière, qui est $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ sur $(R' \cap [s, +\infty]) \times \Omega$. Elle est alors déterminée pour $t \in R \cap [s, +\infty]$, par la condition 2 du théorème (5, 1), comme la limite de $\lambda_{\omega'}^{t_n}$ dans $\mathcal{H}$, aux points ω' où cette limite existe, et 0 aux points où elle n'existe pas: c'est exactement $\lambda_{\omega'}^t$, donc $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ est bien une désintégration régulière de λ_ω^s et λ_ω^{s-} , pour $(\mathcal{T}^t)_{t \geq s}$, pour les valeurs de ω, s , considérées.

3) On doit voir que, pour λ -presque tout ω , pour tout $s \in R$, toute $\mathcal{T}^t$, $\lambda \geq s$, est λ_ω^s -plus forte qu'elle-même et λ_ω^{s-} -plus forte qu'elle-même. Pour λ -presque tout ω , pour tout s , tout $t, s \leq t$, $\mathcal{T}^t$ est λ_ω^s -presque et λ_ω^{s-} -presque universellement mesurable, et λ_ω^s et λ_ω^{s-} sont désintégrées pour $\mathcal{T}^t$ par $(\lambda_{\omega'}^t)_{\omega' \in \Omega}$. D'autre part, pour λ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^t$ est désintégrée pour $\mathcal{T}^t$

comme λ elle-même, par $(\lambda_{\omega''}^t)_{\omega'' \in \Omega}$, puisque $\mathcal{T}^t$ est λ -plus forte qu'elle-même. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \geq s$, pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^t$ est désintégrée pour $\mathcal{T}^t$ comme λ , par $(\lambda_{\omega'}^t)_{\omega' \in \Omega}$, ou aussi comme λ_{ω}^s et λ_{ω}^{s-} . On a donc bien montré que pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $t \geq s$, $\mathcal{T}^t$ est λ_{ω}^s -plus forte et λ_{ω}^{s-} -plus forte qu'elle-même, donc λ_{ω}^s -forte et λ_{ω}^{s-} forte.

4) Pour λ -presque tout ω , pour tout t , λ_{ω}^{t-} est la limite dans $\mathcal{H}$ de $\lambda_{\omega'}^{s'}$ quand $t' < t$ tend vers t ; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , pour tout t , $\lambda_{\omega'}^t$ est la limite dans $\mathcal{H}$ de $\lambda_{\omega'}^{t'}$ quand $t' < t$ tend vers t , et $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ est donc un système de $\mathcal{H}$ -limites à gauche pour la désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ de λ_{ω}^s ou λ_{ω}^{s-} , pour $t > s$.

Corollaire (6,7). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, et $(\lambda_{\omega}^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche associé. Supposons les $\mathcal{T}^t$ λ -fortes. Pour λ -presque tout ω , pour tout s : toutes les $\mathcal{T}^t$ sont λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque universellement mesurables, toutes les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, sont λ_{ω}^s -fortes et λ_{ω}^{s-} -fortes; $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega'), t \geq s}$ est une désintégration régulière de λ_{ω}^s et de λ_{ω}^{s-} pour les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, et $(\lambda_{\omega'}^{t-})_{(t, \omega')}$ est un système de limites à gauche correspondantes, pour $t > s$.

Démonstration. Donnons la démonstration pour les λ_{ω}^s , c'est la même pour les λ_{ω}^{s-} . Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière. On sait que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $\lambda_{\omega}^s = \lambda_{\omega}^s$; donc le théorème précédent dit que les $\mathcal{T}^t$ sont λ_{ω}^s -presque universellement mesurables, et les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, λ_{ω}^s -fortes. Ensuite, pour λ -presque tout ω' , pour tout t , $\lambda_{\omega'}^t = \lambda_{\omega'}^t$; donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , pour tout t , $\lambda_{\omega'}^t = \lambda_{\omega'}^t$; comme alors $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ est une désintégration régulière de λ_{ω}^s , pour les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$, d'après le théorème précédent, et que $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^t$ est dans $\mathcal{T}^t$ pour tout t , $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ est aussi une désintégration régulière de λ_{ω}^s pour les $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$. De la même manière, si $(\lambda_{\omega'}^{t-})_{(t, \omega')}$ est un système de $\mathcal{H}$ -limites à gauche de $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$, il est un système de limites à gauche (théorème 4.22), donc λ -presque partout égal à $(\lambda_{\omega'}^{t-})_{(t, \omega')}$; donc, pour λ -presque tout ω , pour

tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^{t-} = \lambda_{\omega'}^t$; comme alors $\overline{(\lambda_{\omega'}^t)_{t \leq s}}$, est un système de $\mathcal{H}$ -limites à gauche, donc de limites à gauche, de la désintégration régulière $(\lambda_{\omega'}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de λ_ω^s par le théorème précédent, $(\lambda_{\omega'}^{t-})_{t \in \mathbb{R}}$ est un système de limites à gauche associé à la désintégration régulière $(\lambda_{\omega'}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de λ_ω^s , $t > s$.

Théorème (6,8). Soit $(\lambda_\omega^t)_{t \in \mathbb{R}}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et soit $(\lambda_\omega^{t-})_{t \in \mathbb{R}}$ un système de limites à gauche. On suppose les $\mathcal{T}^t$ λ -fortes.

Pour λ -presque tout ω , pour tout s : λ_ω^s admet comme désintégration régulière, pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, la fonction $(t, \omega') \rightarrow \lambda_{\omega'}^t$, pour $t \geq s$, et la constante $(t, \omega') \rightarrow \lambda_\omega^s$ pour $t < s$, et comme système de limites à gauche les $\lambda_{\omega'}^{t-}$, pour $t > s$, les λ_ω^s pour $t \leq s$, et toutes les tribus $\mathcal{T}^t$ sont λ_ω^s -fortes. Pour tout s , si $\mathcal{T}^{s-}$ est λ -forte, pour λ -presque tout ω : λ_ω^{s-} admet comme désintégration régulière, pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ la fonction $(t, \omega') \rightarrow \lambda_{\omega'}^t$, pour $t \geq s$, $(t, \omega) \rightarrow \lambda_\omega^{s-}$ pour $t < s$, et comme système de limites à gauche, les $\lambda_{\omega'}^{t-}$ pour $t > s$, et λ_ω^{s-} pour $t \leq s$.

Démonstration. On sait (proposition (5,15)) que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^s$ est λ_ω^s -presque partout égale à la constante λ_ω^s . Comme la première est une désintégration de λ_ω^s pour $\mathcal{T}^s$, et que la seconde est constante donc appartient à $\mathcal{T}^s$, la seconde aussi est une désintégration de λ_ω^s pour $\mathcal{T}^s$. Mais alors elle appartient à $\mathcal{T}^t$ pour tout $t \leq s$, et vérifie, pour toute $A \in \mathcal{T}^t$, l'égalité de la désintégration qu'elle vérifie pour toute $A \in \mathcal{T}^s$; donc elle est une désintégration de λ_ω^s pour $\mathcal{T}^t$, $t \leq s$. Comme cette désintégration est indépendante de t , elle est régulière pour $t \leq s$. Conservée seulement pour $t < s$, et remplacée par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^t$, pour $t \geq s$, elle donne une désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Il est alors clair que toutes les $\mathcal{T}^t$ sont λ_ω^s -fortes; nous l'avons vu pour $t \geq s$, et, pour $t < s$, cela résulte de ce que λ_ω^s est désintégrée pour $\mathcal{T}^t$ par une constante égale à elle-même.

Passons maintenant à λ_ω^{s-} . Comme nous l'avons indiqué, il n'est pas sûr que les $\mathcal{T}^{s-}$ soient λ -fortes; c'est pourquoi nous l'avons mis dans les hypothèses. Alors, pour s donnée, pour λ -presque tout ω :

- a) λ_ω^{s-} admet $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ pour désintégration régulière pour $t \geq s$;
- b) elle admet $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{s-}$ comme désintégration pour $\mathcal{T}^{s-}$ (supposée λ -forte); mais $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{s-}$ est λ_ω^{s-} -presque partout égale à la constante λ_ω^{s-} , par le corollaire (2, 22), donc λ_ω^{s-} admet aussi la constante λ_ω^{s-} comme désintégration pour $\mathcal{T}^{s-}$; alors; elle admet aussi la constante λ_ω^{s-} comme désintégration régulière pour les $\mathcal{T}^t$, $t < s$, puisque $\mathcal{T}^t \subset \mathcal{T}^{s-}$, par le même raisonnement que plus haut. cqfd.

Remarque. Dans le cas de λ_ω^{s-} , nous avons écrit: pour tout s , pour λ -presque tout ω ; nous ignorons si l'on peut intervertir et écrire: pour λ -presque tout ω , pour tout s . La raison est que nous ignorons si, pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_ω^{s-} admet $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{s-}$ pour désintégration relativement à $\mathcal{T}^{s-}$. S'il en est ainsi, on peut poursuivre, car, d'après la proposition (5, 7), pour λ -presque tout ω , pour tout s , $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{s-}$ est égale à la constante λ_ω^{s-} .

Nous allons maintenant utiliser les propriétés des désintégrations régulières relatives à des tribus $\mathcal{T}^t$ λ -fortes, aux surmartingales réelles et aux surmartingales de mesures.

Théorème (6,9). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(\lambda_\omega^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche. Supposons les $\mathcal{T}^t$ λ -fortes. Soit $f = (f^t(\omega))_{(t, \omega)}$ une surmartingale régulière réelle, pour les tribus $\mathcal{T}^t$ et la mesure de base λ , $(f^t_-(\omega))_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche.

Pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(f^t(\omega'))_{(t, \omega')}$ est une surmartingale régulière pour $t \geq s$, $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}, t \geq s}$ et la mesure de base λ_ω^s , ou pour la mesure de base λ_ω^{s-} ; et $(f^{t-}(\omega'))_{(t, \omega')}$ est un système de limites à gauche associé pour $t > s$.

Démonstration. Soient d'abord $t', t'' \in \mathbb{R}, t' \leq t''$. Appelons $(f^{t''})^{t'}$, espérance conditionnelle de $f^{t''}$ pour $\mathcal{T}^{t'} \vee \mathcal{N}_\lambda$ et λ , la fonction $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t'}(f^{t''})$ (théorème (2, 30)). L'inégalité des surmartingales relative à t', t'' , est $(f^{t''})^{t'} \leq f^{t'}$ λ -presque partout. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(f^{t''})^{t'} \leq f^{t'}$, λ_ω^s -presque partout et λ_ω^{s-} -presque partout. Mais, d'après le corollaire (6, 7), pour λ -presque tout ω , pour tout $s \leq t'$, $\mathcal{T}^{t''}$ est λ_ω^s -mesurable et λ_ω^{s-} -mesurable, ainsi que $\mathcal{T}^{t'}$, et λ_ω^s et λ_ω^{s-} admettent aussi pour désintégration, pour $\mathcal{T}^{t'}$,

$\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{s'}$. Donc la même fonction, $(f^{t'})^{t'}: \omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{t'}(f^{t'})$ est aussi une espérance conditionnelle de $f^{t'}$ pour $\mathcal{T}^{t'} \vee \mathcal{N}_{\lambda_{\omega'}^{s'}}$ et $\lambda_{\omega'}^{s'}$, ou $\mathcal{T}^{t'} \vee \mathcal{N}_{\lambda_{\omega'}^{s'-}}$ et $\lambda_{\omega'}^{s'-}$. Donc $f^{t'}, f^{t''}$ est encore une surmartingale pour les tribus $\mathcal{T}^{t'}, \mathcal{T}^{t''}$, et la mesure de base $\lambda_{\omega'}^{s'}$ ou $\lambda_{\omega'}^{s'-}$. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $f = (f^t(\omega'))_{(t,\omega')}$ est encore une surmartingale sur $(R' \cap [s, +\infty]) \times \Omega$, pour la mesure de base λ_{ω}^s ou λ_{ω}^{s-} , et les tribus $\mathcal{T}^t$, $t \geq s$.

Mais, pour λ -presque tout ω' , $t \rightarrow f^t(\omega')$ est réglée et continue à droite. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_{ω}^s -presque ou λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $t \rightarrow f^t(\omega')$ est réglée et continue à droite; d'après le théorème (4,3), point 4, f est une surmartingale régulière pour les temps $t \geq s$.

Théorème (6,11). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, et soit $(\lambda_{\omega}^{t-})_{(t,\omega)}$ un système de limites à gauche. On suppose les $\mathcal{T}^t$ λ -fortes.

Soit $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une J -surmartingale de mesures, régulière, sur $(Y, \mathcal{Y})$; hypothèse J -dénombrable. Soit éventuellement $(v_{\omega}^{t-})_{(t,\omega)}$ un système de limites à gauche.

1) Pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(v_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ est une v_{ω}^s -surmartingale (resp. v_{ω}^{s-} -surmartingale) régulière, relativement à la mesure de base λ_{ω}^s (resp. λ_{ω}^{s-}), pour $t \geq s$, et $(v_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ est un système de limites à gauche pour $t > s$.

2) Si l'on a l'hypothèse J -compacte, si $(v_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ est une $J\mathcal{K}$ -surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{B})$ -régulière, alors, pour λ -presque tout ω , pour tout s , $(v_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ est une $v_{\omega}^s\mathcal{K}$ -surmartingale (resp. $v_{\omega}^{s-}\mathcal{K}$ -surmartingale) $\mathcal{K}\mathcal{B}$ -régulière, pour les $t \geq s$, relativement à la mesure de base λ_{ω}^s (resp. λ_{ω}^{s-}).

Démonstration. Montrons d'abord le point 1).

Nous avons déjà vu, au point 3) de la proposition (5,12), que, pour λ -presque tout ω , pour $t \geq s$, $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega') \leq v_{\omega}^s$ et $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') \leq v_{\omega}^{s-}$. Ceci prouve que, si l'on prend λ_{ω}^s (resp. λ_{ω}^{s-}) comme mesure de base au lieu de λ , c'est v_{ω}^s (resp. v_{ω}^{s-}) qui pourra remplacer J . Comme ensuite on peut supposer que toutes les mesures v_{ω}^t et v_{ω}^{t-} sont dans un même espace $M_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ système

J -déterminant, on prendra les valeurs de tout sur $B \in \mathcal{B} \cap Y_m$, $m \in \mathbb{N}$, et le résultat 1) de l'énoncé sera conséquence des théorèmes (6,9), (4,10 ter) et (4,21 bis).

Le point 2) est évident. On sait déjà en effet que $(v_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ pour $t \geq s$, est encore une v_{ω}^s (resp. v_{ω}^{s-})-surmartingale régulière pour la mesure de base λ_{ω}^s (resp. λ_{ω}^{s-}). La seule chose qui reste à montrer est donc que, pour tout ω' tout t , $v_{\omega'}^t$ est la limite des $v_{\omega'}^n$ dans $\mathcal{X}$ si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas; or c'est la définition de la J - $\mathcal{X}$ -surmartingale $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ -régulière $(v_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$.

Il n'est pas inutile de récapituler comme suit les propositions (5,12), (5,15), (6,11), (5,10), (6,8):

Théorème (6,12). Soient $(\lambda_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(\lambda_{\omega}^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche, $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega)}$ une J -surmartingale régulière, $(v_{\omega}^{t-})_{(t, \omega)}$ un système de limites à gauche; hypothèse J -dénombrable. On suppose les $\mathcal{T}^t$ λ -fortes.

1) Pour λ -presque tout ω , pour tout s : $(v_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ est une v_{ω}^s (resp. v_{ω}^{s-}) surmartingale régulière, pour $t \geq s$, lorsqu'on prend λ_{ω}^s (resp. λ_{ω}^{s-}) comme mesure de base, et $(v_{\omega'}^{t-})_{(t, \omega')}$ en est un système de limites à gauche pour $t > s$; pour λ_{ω}^s -presque tout ω' , la trajectoire $t \mapsto v_{\omega'}^t$, $t \leq s$, est égale à $t \mapsto v_{\omega}^t$, et, pour λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto v_{\omega'}^t$, $t < s$, est égale à $t \mapsto v_{\omega}^t$; pour λ_{ω}^s -presque et λ_{ω}^{s-} -presque tout ω' , $t \mapsto v_{\omega'}^{t-}$, $t \leq s$, est égale à $t \mapsto v_{\omega}^{t-}$.

2) Pour λ -presque tout ω , pour tout s : $t \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega')$ est décroissante et continue à droite pour $t \geq s$, et $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^s(\omega') = v_{\omega}^t$ pour $t \leq s$;

$t \mapsto \int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega')$ est décroissante et continue à droite pour $t \geq s$, majorée par v_{ω}^{s-} , et $\int_{\Omega} v_{\omega'}^t d\lambda_{\omega}^{s-}(\omega') = v_{\omega}^t$ pour $t < s$.

3) Pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_{ω}^s admet pour désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, la famille $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ pour $t \geq s$, et une constante égale à λ_{ω}^s pour $t < s$.

3') Pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_ω^{s-} admet pour désintégration régulière, pour $(\mathcal{T}^t)_{t \geq s}$, la famille $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$. Pour tout s tel que $\mathcal{T}^{s-}$ soit λ -forte, pour λ -presque tout ω , λ_ω^{s-} admet pour désintégration régulière, pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, la famille $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ pour $t \geq s$, la constante λ_ω^{s-} pour $t < s$.

4) Pour λ -presque tout ω , pour tous s, t :
$$\int_{\Omega} \lambda_\omega^t d\lambda_\omega^s(\omega') = \lambda_\omega^{\text{Min}(\sigma, \tau)}$$
 pour $\sigma = s$ ou s_- , $\tau = t$ ou t_- , le Min étant pris pour la relation d'ordre où $a_- < a < b_-$ pour $a < b$.

(6,13) Familles auto-désintégrantes

Nous allons maintenant nous donner l'espace Ω et la famille $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, et chercher pour quelles mesures λ sur $(\Omega, \mathcal{O})$ elle peut être une désintégration régulière. On pourra se borner à des λ_ω^t toutes de masse ≤ 1 .

Proposition (6,14) (qui correspond à (3,13)). Soient Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$, $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille de tribus, croissante et continue à droite, $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une famille de mesures de masse ≤ 1 sur $(\Omega, \mathcal{O})$. Soit $\lambda = \int^* \lambda_s d\mu(s)$ une intégrale de mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$; μ est une mesure sur $(S, \mathcal{S})$; on suppose que chaque $\mathcal{T}^t$ est λ -mesurable et λ_s -mesurable pour μ -presque tout $s \in S$, et que λ est σ -finie sur chaque $\mathcal{T}^t$, ainsi que λ_s pour μ -presque tout $s \in S$. On suppose ensuite que, pour μ -presque tout s , λ_s admet $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ comme désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$; que $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ est mesurable pour le produit de $\hat{\mathcal{O}}_\lambda$ et de la tribu borélienne de $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ (en général elle est progressivement mesurable); et enfin que $\mathbb{R}$ est souslinien. Alors λ admet $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ comme désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Démonstration. Par (3,13), on sait déjà que, pour tout t , $\omega \mapsto \lambda_\omega^t$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}^t$; il s'agit de montrer la régularité de la désintégration. Soit donc f une fonction ≥ 0 bornée sur Ω , appartenant à $\mathcal{O}$. Soit $(f_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une martingale régulière d'espérances conditionnelles de f relativement à λ et aux tribus $\mathcal{T}^t$.

On peut toujours supposer qu'on la détermine d'abord pour les $t' \in \mathbb{R}'$, et

qu'ensuite on pose $f_\omega^t = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\omega^{t_n}$ si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire. Alors, pour tout n , la fonction $(t, \omega) \mapsto f_\omega^{t_n}$ appartient à la tribu $\hat{\mathcal{O}}_\lambda \times \mathcal{R}$, donc aussi $(t, \omega) \mapsto f_\omega^t$, égale à la limite des précédentes pour n infini si cette limite existe et est finie, 0 dans le cas contraire. Pour tout t , $\omega \mapsto f_\omega^t$ et $\omega \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ sont des espérances conditionnelles, donc sont λ -presque partout égales. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout $t' \in R'$, $f_\omega^{t'} = \lambda_\omega^{t'}(f)$; donc, pour μ -presque tout s , pour λ_s -presque tout ω , pour tout $t' \in R'$, $f_\omega^{t'} = \lambda_\omega^{t'}(f)$. Soit A l'ensemble des (t, ω) pour lesquels $f_\omega^t \neq \lambda_\omega^t(f)$. Puisque $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ est mesurable pour $\hat{\mathcal{O}}_\lambda \times \mathcal{R}$, ainsi que $(t, \omega) \mapsto f_\omega^t$, A est dans $\hat{\mathcal{O}}_\lambda \times \mathcal{R}$. Donc sa projection sur Ω est $\hat{\mathcal{O}}_\lambda$ -analytique [1], donc λ -mesurable. C'est l'ensemble $\tilde{A}$ des ω pour lesquels il existe un t tel que $(t, \omega) \in A$. Mais, en vertu des hypothèses sur les λ_s , pour μ -presque tout s , pour λ_s -presque tout ω , $t \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ est continue à droite; ensuite, pour λ -presque tout ω , $t \mapsto f_\omega^t$ est continue à droite, donc, pour μ -presque tout s , pour λ_s -presque tout ω , $t \mapsto f_\omega^t$ est continue à droite. On en déduit que, pour μ -presque tout s , pour λ_s -presque tout ω , $t \mapsto f_\omega^t$ et $t \mapsto \lambda_\omega^t(f)$, continues à droite et égales sur R' , sont égales sur R . Cela prouve que, pour μ -presque tout s , $\lambda_s(\tilde{A}) = 0$, donc, $\tilde{A}$ étant λ -mesurable, $\lambda(\tilde{A}) = 0$. Cela prouve bien que, pour λ -presque tout ω , $t \mapsto \lambda_\omega^t(f)$ est réglée et continue à droite, donc $(\lambda_\omega^t(f))_{(t, \omega)}$ est une martingale régulière. Par passage à la limite croissante, ceci est encore vrai pour toute $f \geq 0$ appartenant à $\mathcal{O}$, donc $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ est une désintégration régulière de λ pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$, cqfd.

Proposition (6,15) (correspondant à (3,17)). *Soient Ω un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, $(\lambda_\omega^t)_{(t, \omega)}$ une famille de mesures du Radon sur Ω , de masse ≤ 1 , $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$ une famille de tribus, croissante et continue à droite, sur Ω . On suppose que $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ est dans la tribu $\hat{\mathcal{O}}_\lambda \times \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la tribu borélienne de R ; que R est souslinien et a un plus petit élément a ; et que, pour tout t et tout ω , $\mathcal{F}^t$ est λ_ω^a -mesurable. Soit λ une mesure de*

[1] Voir par exemple P. A. Meyer [1], théorèmes III, (T9) et (T12), et (T52). On y démontre que, si $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{O}}_\lambda$ est une tribu, et si $(R, \mathcal{R})$ est un compact métrisable muni de sa tribu borélienne, tout ensemble appartenant à la tribu $\mathcal{R} \times \mathcal{F}$ se projette suivant un ensemble $\mathcal{F}$ -analytique. Mais on voit aisément qu'il suffit de supposer R souslinien.

Radon sur $(\Omega, \mathcal{O})$, portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables; on suppose que λ est σ -finie sur chaque $\mathcal{F}^t$ et que chaque $\mathcal{F}^t$ est λ -forte. Soit Ω' l'ensemble (éventuellement vide) des ω' tels que $\lambda_{\omega'}$ admette $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Pour que λ admette $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière pour $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, il faut et il suffit que λ soit une intégrale $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{\omega'}^a d\nu(\omega')$, où ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, portée par Ω' . Dans ce cas, λ elle-même est portée par Ω' , et on peut prendre $\nu = \lambda^*$ elle-même.

Démonstration. Si ν est une telle intégrale, le résultat est donné par la proposition précédente. Inversement, si λ admet $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière, elle s'écrit nécessairement $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{\omega'}^a d\lambda(\omega')$. Il reste à démontrer que λ est portée par Ω' ; autrement dit que, pour λ -presque tout ω' , $\lambda_{\omega'}^a$ admet $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière, ce qui résulte du corollaire (6,7) les $\mathcal{F}^t$ étant supposées λ -fortes.

Remarque. Un cas particulièrement intéressant sera le suivant: $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille de tribus universellement mesurables et universellement fortes, Ω est souslinien; et toute $\lambda_{\omega'}$ admet $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière. Alors une mesure de Radon λ sur Ω admettra $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ comme désintégration régulière, si et seulement si elle est une intégrale $\lambda = \int_{\Omega}^* \lambda_{\omega'}^a d\nu(\omega')$, où ν est une mesure de Radon sur Ω , et on pourra alors prendre $\nu = \lambda$. On pourra dire que $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t, \omega')}$ est une famille autodésintégrant par rapport à $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

§7. Temps d'arrêt

Ω sera, comme toujours, un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$, λ sera une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sera une famille de sous-tribus de la tribu λ -mesurable, croissante et continue à droite, λ sera σ -finie sur toutes les $\mathcal{F}^t$.

Définition (7,1). On appelle temps d'arrêt une variable aléatoire T sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, ayant la propriété suivante:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $A^t = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq t\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}^t$. (Remarquons que la mesurabilité de T résulte automatiquement de l'hypothèse qui est faite après, puisque les $\mathcal{F}^t$ sont des sous-tribus de la tribu λ -mesurable).

Bien entendu, l'ensemble $A^{t-} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) < t\}$ appartient aussi à $\mathcal{F}^t$; il est en effet la réunion des ensembles A^s , pour $s < t$. Donc, par différence, $A^{(t)} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) = t\}$ appartient à $\mathcal{F}^t$.

On appelle alors $\mathcal{F}^T$, tribu du passé du temps d'arrêt, la tribu formée des $A \subset \Omega$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $A \cap A^t$ appartienne à $\mathcal{F}^t$; $\mathcal{F}^T$ est aussi une sous-tribu de la tribu λ -mesurable. La variable aléatoire T appartient à la tribu $\mathcal{F}^T$. Nous appellerons λ^T la restriction de λ à la tribu $\mathcal{F}^T$; nous serons obligés de la supposer σ -finie.

Théorème (7,1 bis). Soit $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une surmartingale régulière de mesures sur $(Y, \mathcal{Y})$. Si $(T_s)_{s \in S}$ est une famille de temps d'arrêt, indexée par un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$, croissante et continue à droite, et si λ est σ -finie sur les $\mathcal{F}^{T_s}$, alors $(v_\omega^{T_s(\omega)})_{(s,\omega)}$ est une surmartingale régulière pour la famille de tribus $(\mathcal{F}^{T_s} \vee \mathcal{N}_\lambda)_{s \in S}$.

Démonstration. Il suffit de prendre les valeurs des mesures sur $f \geq 0$, appartenant à $\mathcal{Y}$, et on est ramené au cas connu des surmartingales réelles ≥ 0 .

Remarque. Ce qui oblige à remplacer $\mathcal{F}^{T_s}$ par $\mathcal{F}^{T_s} \vee \mathcal{N}_\lambda$, c'est que $\omega \rightarrow v_\omega^{T_s(\omega)}$ n'a pas raison de faire partie de la tribu $\mathcal{F}^{T_s}$ elle-même. Mais:

Proposition (7,1 ter). Hypothèse J -compacte.

Si $(v_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une J - $\mathcal{K}$ -surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulière, alors, pour tout temps d'arrêt T , $\omega \rightarrow v_\omega^{T(\omega)}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}^T$ elle-même.

Démonstration. C'est évident si T ne prend qu'un ensemble dénombrable V de valeurs; en effet, dans ce cas, $\mathcal{F}^T$ est la tribu $\bigvee_{t \in V} A^{(t)} \cap \mathcal{F}^t$; or $\omega \rightarrow v_\omega^{T(\omega)} = v_\omega^t$ appartient précisément à la tribu $\mathcal{F}^t$ sur $A^{(t)}$. Si ensuite T est quelconque, et si T_n est sa suite décroissante d'approximation, $T_n(\omega)$

$= (T(\omega))_n$, alors $\omega \rightarrow v_\omega^{T_n(\omega)}$ appartient à $\mathcal{T}^{T_n}$, mais $v_\omega^{T(\omega)}$ est exactement la limite de $v_\omega^{T_n(\omega)}$ dans $\mathcal{K}$, si cette limite existe, et 0 si elle n'existe pas, donc, en tant que fonction à valeurs dans l'espace $\mathcal{K}$, $\omega \rightarrow v_\omega^{T(\omega)}$ est dans $\bigcap_n \mathcal{T}^{T_n} = \mathcal{T}^T$, donc est dans $\mathcal{T}^T$ au sens général par le lemme (4.13).

Théorème (7,2). Soit T un temps d'arrêt, tel que λ^T soit σ -finie. Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ sur $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Alors $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{T(\omega)}$ est une désintégration de λ sur la tribu $\mathcal{T}^T$.

Démonstration. Adjoignons à R un élément que nous noterons, pour simplifier, $+\infty$, et qui sera strictement supérieur à tous les autres. Nous poserons $\mathcal{T}^{+\infty} = \hat{\mathcal{O}}_\lambda$. Nous appellerons $v_\omega^{+\infty}$ la mesure de Dirac $\delta_{(\omega)}$. Puisque $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une λ - $\mathcal{H}$ -martingale $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ régulière d'espérances conditionnelles de $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$ par rapport aux $\mathcal{T}^t$, $t \in R$, et à λ , elle le reste avec cette adjonction. Alors la proposition précédente dit exactement que $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{T(\omega)}$ est dans la tribu $\mathcal{T}^T$, et le théorème (7,1 bis) dit alors que $(v_\omega^{T(\omega)})_\omega$, $(\delta_{(\omega)})_\omega$, est une martingale pour $\mathcal{T}^T, \hat{\mathcal{O}}_\lambda$, donc que $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{T(\omega)}$ est une désintégration de λ pour $\mathcal{T}^T$, cqfd.

Remarque. 1) Il est évident que, sans une hypothèse du type de la régularité des désintégrations, un résultat analogue au théorème précédent serait impensable. Supposons par exemple que tous les ensembles $A^{(t)}$ soient λ -négligeables. Si $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ est une famille arbitraire de désintégrations, on en obtiendra une autre $(\lambda'_\omega^t)_{(t,\omega)}$ en remplaçant λ_ω^t par 0 pour $\omega \in A^{(t)}$. Mais alors $\lambda_\omega^{T(\omega)}$ sera nulle pour tout ω , et ne donnera pas une désintégration de λ sur $\mathcal{T}^T$.

Remarque. 2) C'est ici que l'introduction de la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indispensable; c'est elle qui assure que $\omega \rightarrow \lambda_\omega^{T(\omega)}$ appartient à la tribu $\mathcal{T}^T$. Nous avons besoin d'une propriété vérifiée, non seulement pour λ -presque tout ω , mais pour tout ω .

Corollaire (7,3). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière de λ sur $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Il existe un borélien Ω_* , portant λ , et ayant la propriété suivante:

pour tout temps d'arrêt T , tel que λ soit σ -finie sur $\mathcal{F}^T$, $(\lambda_{\omega}^{T(\omega)})_{\omega \in \Omega}$ est la restriction à Ω , d'une désintégration de λ sur la tribu $\mathcal{F}^T$; et elle est donc elle-même une désintégration de λ sur la tribu $\mathcal{F}^T \vee \mathcal{N}_{\lambda}$.

Démonstration. Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière. On sait alors qu'il existe un Ω , portant λ tel que $\lambda_{\omega}^t = \lambda_{\omega}^t$ pour $\omega \in \Omega$, et $t \in R$, d'où le résultat.

Corollaire (7,4). Soit $(\lambda_{\omega}^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ sur $(\mathcal{F}^t)_{t \in R}$. Soit $(T_s)_{s \in S}$ une famille croissante et continue à droite de temps d'arrêts T_s , indexée par $S \subset \bar{\mathbb{R}}$; nous supposons λ σ -finie sur toutes les $\mathcal{F}^{T_s}$. Alors $(\lambda_{\omega}^{T_s(\omega)})_{(s,\omega)}$ est une désintégration régulière de λ sur $(\mathcal{F}^{T_s})_{s \in S}$.

Démonstration. C'est le théorème (7,1 bis), avec une martingale au lieu de surmartingale, avec $\omega \rightarrow \delta_{(\omega)}$ comme fonction finale pour $\mathcal{F}^{+\infty} = \hat{\mathcal{O}}_{\lambda}$.

Remarque. On doit partir d'une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière pour être sûr que chaque $\omega \rightarrow \lambda_{\omega}^{T_s(\omega)}$ est une désintégration sur $\mathcal{F}^{T_s}$ (remarque suivant le théorème (7,2)). Mais on n'obtient pas une désintégration- $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière par rapport à une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de S . Il suffit de considérer le cas où $R = \bar{\mathbb{R}}$, et $T_s = T + s$, $s \geq 0$, T étant un temps d'arrêt; c'est le fait que $(T + s)_n \neq T + s_n$ qui empêche de trouver une telle suite S_n .

Supposons maintenant toutes les $\mathcal{F}^t$ λ -fortes. Nous allons déduire, pour les temps d'arrêt, des conséquences de §§3 et 6.

Proposition (7,5). Si toutes les $\mathcal{F}^t$ sont λ -fortes, alors, pour tout temps d'arrêt T , $\mathcal{F}^T$ est λ -forte.

Démonstration. Supposons d'abord que T ne prenne qu'un ensemble dénombrable V de valeurs. Alors $\mathcal{F}^T = \bigvee_{t \in V} (A^{(t)} \cap \mathcal{F}^t)$; le résultat est alors une conséquence de (3,15), qui dit que les $A^{(t)} \cap \mathcal{F}^t$ sont $\lambda_{A^{(t)}}$ -fortes, et de (3,17).

Soit maintenant T quelconque. Alors $\mathcal{F}^T$ est l'intersection des tribus $\mathcal{F}^{T_n}$, où T_n est un temps d'arrêt qui n'a qu'un ensemble dénombrable de valeurs, donc le résultat est conséquence du corollaire (6,2).

Théorème (7,6). Soit $(\lambda'_{\omega})_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ sur la famille $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de tribus λ -fortes. Pour tout temps d'arrêt S , tel que λ soit σ -finie sur $\mathcal{T}^S$, il existe un ensemble Ω_* borélien portant λ ayant la propriété suivante: pour tout temps d'arrêt $T \geq S$, pour tout $\omega \in \Omega_*$, $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda^{T(\omega')}_{\omega'}$.

Démonstration. Puisque toutes les $\mathcal{T}^t$ sont λ -fortes, et qu'en outre $\mathcal{T}^S$ l'est aussi (proposition précédente), le théorème (6,6) permet de trouver $\bar{\Omega}_*$ borélien portant λ tel que:

Pour tout $\omega \in \bar{\Omega}_*$, et tout s , $(\lambda'_{\omega'})_{t \geq s, \omega' \in \Omega}$ est une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ^s_{ω} pour $(\mathcal{T}^t)_{t \geq s}$; on en déduit que, pour tout $\omega \in \bar{\Omega}_*$, $(\lambda'_{\omega'})_{t \geq S(\omega), \omega' \in \Omega}$ est une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ pour la famille de tribus $(\mathcal{T}^t)_{t \geq S(\omega)}$. Si alors $\tilde{T}$ est un temps d'arrêt $\geq S(\omega)$ (i.e. $\tilde{T}(\omega') \geq S(\omega)$ pour tout $\omega' \in \Omega$), il résulte du théorème (7,2) que $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}^{\tilde{T}}$ par $\omega' \rightarrow \lambda^{\tilde{T}(\omega')}_{\omega'}$. Si T est seulement un temps d'arrêt $\geq S$, posons $\tilde{T} = \text{Sup}(T, S(\omega))$, ou encore $\tilde{T}(\omega') = \text{Max}(T(\omega'), S(\omega))$. Alors $\tilde{T}$ est un nouveau temps d'arrêt $\geq S(\omega)$; donc, pour $\omega \in \bar{\Omega}_*$, $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}^{\tilde{T}}$ par $\omega' \rightarrow \lambda^{\tilde{T}(\omega')}_{\omega'}$. Nous allons en déduire un résultat analogue pour T au lieu de $\tilde{T}$.

On sait (théorème (2,19)) qu'il existe un borélien $\Omega_* \subset \bar{\Omega}_*$ portant λ , tel que, pour tout $\omega \in \Omega_*$, S (qui appartient à la tribu $\mathcal{T}^S$) soit $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ -presque partout égal à la constante $S(\omega)$. Comme alors $T \geq S$, T est $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ -presque partout $\geq S(\omega)$; donc $\tilde{T} = T$ $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ -presque partout, si $\omega \in \Omega_*$. Donc les deux fonctions $\omega' \rightarrow \lambda^{\tilde{T}(\omega')}_{\omega'}$ et $\omega' \rightarrow \lambda^{T(\omega')}_{\omega'}$ sont $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ -presque partout égales, si $\omega \in \Omega_*$. En outre la deuxième est dans la tribu $\mathcal{T}^T$ et la première est une désintégration de $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ sur $\mathcal{T}^{\tilde{T}}$. Enfin $T \leq \tilde{T}$ donc $\mathcal{T}^T \supset \mathcal{T}^{\tilde{T}}$. Nous avons donc exactement toutes les conditions d'application de la proposition (3,6), permettant d'affirmer que $\omega' \rightarrow \lambda^{T(\omega')}_{\omega'}$ est une désintégration de $\lambda^{S(\omega)}_{\omega}$ sur $\mathcal{T}^T$, pour $\omega \in \Omega_*$.

Remarque. Ω_* dépend de S , mais non de T . Dans ce qui suit au contraire, nous avons un Ω_* qui dépend de T , mais non de S , et S n'a même pas besoin d'être un temps d'arrêt.

Proposition (7,7). Soient $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$, $(\lambda_\omega^{t-})_{(t,\omega)}$ un système de limites à gauche, et T un temps d'arrêt. Pour λ -presque tout ω , pour tout $s \geq T(\omega)$, T est λ_ω^s -presque partout égal à $T(\omega)$, et, pour tout $s < T(\omega)$, T est λ_ω^s -presque partout $> s$. Pour λ -presque tout ω , pour tout $s > T(\omega)$, T est λ_ω^{s-} -presque partout égal à $T(\omega)$, et, pour tout $s \leq T(\omega)$, T est λ_ω^{s-} -presque partout $\geq s$.

Démonstration. Appelons f la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(t, \omega); t < T(\omega)\}$ dans $R \times \Omega$. Puisque T est un temps d'arrêt, pour tout t , $f^t: \omega \mapsto f(t, \omega)$ appartient à $\mathcal{T}^t$; pour tout ω , $f_\omega: t \mapsto f(t, \omega)$ est décroissante et continue à droite. Donc f est une surmartingale régulière (à valeurs réelles ≥ 0) pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$. Donc, d'après la proposition (5,14), pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , la trajectoire $f_{\omega'}$ coïncide avec f_ω pour $t \leq s$. Si $s \geq T(\omega)$, la trajectoire f_ω a son unique saut au point $t = T(\omega)$, donc aussi $f_{\omega'}$, donc $T(\omega') = T(\omega)$. Si $s < T(\omega)$, la trajectoire f_ω est constante égale à 1, donc aussi $f_{\omega'}$, donc $T(\omega') > s$. On fait de même pour λ_ω^{s-} , mais en prenant les trajectoires pour $t < s$ seulement.

Théorème (7,8). Soit $(\lambda_\omega^t)_{(t,\omega)}$ une désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière de λ pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in R}$; toutes les $\mathcal{T}^t$ sont supposées λ -fortes. Soit T un temps d'arrêt, tel que λ soit σ -finie sur $\mathcal{T}^T$. Il existe un borélien Ω_* portant λ , ayant la propriété suivante: pour $\omega \in \Omega_*$, pour tout $s \leq T(\omega)$, λ_ω^s est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$.

Corollaire (évident). Dans les mêmes conditions, si S est une fonction sur Ω à valeurs dans R , $S \leq T$, alors, pour tout $\omega \in \Omega_*$, $\lambda_\omega^{S(\omega)}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$.

Démonstration. Utilisons le théorème (6,6): il existe un ensemble Ω_* portant λ tel que, pour tout $\omega \in \Omega_*$, et tout $s \in R$, λ_ω^s admette $(\lambda_{\omega'}^t)_{(t,\omega')}$ pour désintégration $(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ -régulière sur $(\mathcal{T}^t)_{t \geq s}$. On peut supposer aussi que pour $\omega \in \Omega_*$, $s \leq T(\omega)$, on a $T \geq s$ λ_ω^s -presque partout (lemme précédent). Soit $\omega \in \Omega_*$, $s \leq T(\omega)$. Posons $\tilde{T} = \sup(T, s)$. Alors $\tilde{T}$ est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{T}^t)_{t \geq s}$; donc, d'après le théorème (7,2), λ_ω^s est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{\tilde{T}(\omega')}$. Mais λ_ω^s -presque sûrement, $T \geq s$, donc $\tilde{T} = T$, donc

$\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{\tilde{T}(\omega')}$ est λ_{ω}^s -presque partout égale à $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega}^{T(\omega)}$; cette dernière fonction appartient à $\mathcal{T}^T$; et $T \leq \tilde{T}$ donc $\mathcal{T}^{\tilde{T}} \subset \mathcal{T}^T$; nous sommes donc exactement dans les conditions d'application de la proposition (3,6), qui nous dit que λ_{ω}^s est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$, cqfd.

Remarque. Soient S, T , deux temps d'arrêt, $S \leq T$, λ σ -finie sur $\mathcal{T}^S$. Appelons $\Omega(S, T)$ l'ensemble des ω pour lesquels $\lambda_{\omega}^{S(\omega)}$ est désintégrée sur $\mathcal{T}^T$ par $\omega' \rightarrow \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$. Nous avons donc vu que, pour S fixé, $\bigcap_T \Omega(S, T)$ porte λ , et que, pour T fixé, $\bigcap_S \Omega(S, T)$ porte λ . Il serait encore plus agréable que $\bigcap_{S, T} \Omega(S, T)$ porte λ ; mais ce serait sans doute trop beau.

* * *

§8. Contre-exemples divers

Contre-exemple (8,0). Tribus non-dénombrablement engendrées ou séparantes.

Rappelons qu'une tribu λ dénombrablement engendrée est λ - $\mathcal{Q}$ -dénombrablement séparante. La tribu borélienne d'un espace souslinien est dénombrablement engendrée et séparante.

(8,0.1). Soit Ω un compact métrisable, ayant la puissance du continu et soit $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne. Si λ est une mesure $\neq 0$ diffuse sur Ω , $\hat{\mathcal{O}}_{\lambda}$ n'est pas λ -dénombrablement engendrée (par contre elle est évidemment dénombrablement séparante). Si en effet il en était ainsi, comme tout ensemble λ -mesurable est, à un ensemble λ -négligeable près, borélien, il existerait un borélien $\Omega' \subset \Omega$, portant λ , tel que toutes les parties λ -mesurables de Ω' soient boréliennes; or, si N est une partie λ -négligeable de Ω' ayant la puissance du continu, toutes les parties de N sont λ -mesurables puisque λ -négligeables, donc la puissance de l'ensemble des parties λ -mesurables de Ω' est strictement supérieure à celle du continu, alors que la puissance de l'ensemble des parties boréliennes de Ω , donc de Ω' , est celle du continu. La tribu $\overline{\mathcal{O}}$ des parties universellement mesurables n'est pas non plus λ -dénombrablement engendrée. En effet, avec les mêmes notations toutes les parties universellement mesurables de Ω' devraient être boréliennes. Or il est connu qu'il n'en es pas

ainsi (par exemple Ω' , espace lusinien ayant la puissance du continu, contient une partie souslinienne non borélienne, donc universellement mesurable et non borélienne).

Contre-exemple (8,1). Une intégrale de mesures de Radon n'est pas nécessairement de Radon

Ceci a été signalé à (1,7). Nous allons donner un exemple d'un espace topologique Ω , de tribu borélienne $\mathcal{O}$, et d'une intégrale $\lambda = \int_X \lambda_x d\mu(x)$ de mesures de Radon λ_x sur $(\Omega, \mathcal{O})$, qui est une mesure abstraite sur $(\Omega, \mathcal{O})$, non de Radon.

Un contre-exemple évident est le suivant: si λ est une mesure abstraite, par exemple de masse 1, sur $(\Omega, \mathcal{O})$, qui n'est pas de Radon, elle peut quand même s'écrire comme intégrale $\int_{\Omega} \delta_{(\omega)} d\lambda(\omega)$, où $\delta_{(\omega)}$, masse +1 au point ω , est de Radon. Ici $(X, \mathcal{X}) = (\Omega, \mathcal{O})$, $\mu = \lambda$. On peut donner un exemple

ou même μ est de Radon, de masse 1. Soit en effet une intégrale $\nu = \int_X \nu_x d\mu(x)$,

et soit Ω^* une partie de Ω , portant toutes les ν_x , mais ne portant pas ν . En tout cas, Ω^* est de ν -mesure extérieure 1, et son complémentaire de ν -mesure intérieure nulle, et ils ne sont pas ν -mesurables. Considérons la mesure induite $\lambda = \nu_{\Omega^*}$ par ν sur Ω^* , définie comme toujours par $\nu_{\Omega^*}(B) = \nu^*(B)$ pour B borélien dans Ω^* ; si B' est un borélien de Ω tel que $B' \cap \Omega^* = B$, on a $\nu_{\Omega^*}(B) = \nu(B')$. Posons de même $\lambda_x = (\nu_x)_{\Omega^*}$. Alors $x \mapsto \lambda_x$ est μ -mesurable, car $x \mapsto \lambda_x(B) = x \mapsto \nu_x(B')$, qui est μ -mesurable. Ensuite $\int_X \lambda_x(B) d\mu(x)$

$\int_X \nu_x(B') d\mu(x) = \nu(B') = \lambda(B)$, donc $\lambda = \int_X \lambda_x d\mu(x)$; les λ_x sont de Radon

sur Ω^* , puisque Ω^* porte ν_x donc est ν_x -mesurable, μ est de Radon sur X , λ n'est pas de Radon sur Ω^* , sans quoi ν , image de λ par l'injection $\Omega^* \rightarrow \Omega$, serait portée par Ω^* ; ce qui donne le contre-exemple cherché. Un tel exemple de Ω , Ω^* , ν_x , ν , s'obtiendra aisément comme suit. On sait qu'il existe une

partie Ω^* non Lebesgue-mesurable de $\Omega = [0, 1]^2$, dont toute section, $\Omega^* \cap (\{x\} \times [0, 1])$, soit le complémentaire d'un point dans $\{x\} \times [0, 1]$. On prendra $\nu = dx \otimes dy$, $\nu_x = \delta_{(x)} \otimes dy$ pour $x \in [0, 1]$, et $\mu = dx$ sur $[0, 1]$. On sait que $dx \otimes dy = \int_{[0, 1]} (\delta_{(x)} \otimes dy) dx$. Pour $x \in [0, 1]$, $\nu_x = \delta_{(x)} \otimes dy$

est bien portée par Ω^* et même par $(\{x\} \times [0, 1]) \cap \Omega^*$, qui est le complémentaire d'un point dans $\{x\} \times [0, 1]$, et cependant ν n'est pas portée par Ω^* supposé non $(dx \otimes dy)$ -mesurable. Ceci donne en même temps un contre-exemple à une réciproque possible du lemme (1, 3): $\mathbb{G}\Omega^*$ est ν_x -négligeable pour tout x , sans être ν -négligeable, et aussi ν_x -mesurable pour tout x sans être ν -mesurable.

Contre-exemple (8, 2). Cas de non-unicité de la désintégration d'une mesure

(8.2.1) Soit $X = [0, 1]$, et $\tilde{X}$ la somme de deux ensembles X^+ , X^- , identiques à X . On a donc des bijections $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$, de X dans X^+ et X^- respectivement. Soit p la "projection" $x^\pm \mapsto x$ de $\tilde{X}$ sur X . On peut mettre sur $\tilde{X}$ la relation d'ordre totale où, pour $x < y$, on a $x^- < x^+ < y^-$. On le munira alors de la topologie des intervalles, où un système fondamental de voisinages de x^+ (resp. x^-) est formé des intervalles $[x^+, y^-[, y > x$ (resp.] $y^+, x^-]$, $y < x$). Notons que p est continue de $\tilde{X}$ sur X , mais que $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$ sont discontinues de X dans $\tilde{X}$. La topologie de $\tilde{X}$ est séparée, séparable (l'ensemble des r^+ , ou l'ensemble des r^- , r rationnel, sont denses), compacte (si $\tilde{\mathcal{U}}$ est un ultrafiltre, sa projection $p(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X , qui converge vers un point a , et il est aisé de voir que $\tilde{\mathcal{U}}$ converge vers a^+ ou vers a^-). Chaque point a un système fondamental dénombrable de voisinages. On vérifie aussi que $\tilde{X}$ est de Lindelöf. Soit en effet $(\tilde{U}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\tilde{X}$, de réunion $\tilde{U}$. On voit aussitôt que $\tilde{U}$ est réunion d'une suite d'intervalles disjoints (contenant ou non leurs extrémités); et chaque $\tilde{U}_i$ a la même propriété. Il suffit donc de montrer que tout intervalle de $\tilde{X}$, recouvert par une famille d'ouverts, est recouvert par une sous-famille dénombrable. Comme par ailleurs un intervalle est réunion d'intervalles fermés, il suffit finalement

de montrer que, si $[a^+, b^-]$ est recouvert par la famille des $\tilde{U}_i$, il est recouvert par une sous-famille dénombrable. Soit c la borne supérieure des points x de $[a, b]$ tels que $[a^+, x^-]$ soit recouvert par une sous-famille dénombrable de $(\tilde{U}_i)_{i \in I}$; alors $[a^+, c^-]$ est aussi recouvert par une sous-famille dénombrable; et l'on a nécessairement $c = b$, sans quoi il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $[c^+, (c + \varepsilon)^-]$ soit recouvert par un seul des U_i , ce qui serait en contradiction avec la propriété de c ; donc $\tilde{X}$ est bien de Lindelöf. $\tilde{X}$ est d'ailleurs un bon exemple d'un Lindelöf dont le carré $\tilde{X} \times \tilde{X}$ n'est pas de Lindelöf; en effet, la famille des rectangles ouverts $[0^-, x^-] \times [0^-, (1-x)^-]$ a une réunion qui contient la "deuxième diagonale" Δ^- , ensemble des $(x^-, (1-x)^-)$, et, si on supprime de la famille l'ouvert $[0^-, a^-] \times [0^-, (1-a)^-]$, la réunion ne contient plus le point $(a^-, (1-a)^-)$, de sorte qu'il n'existe pas de sous-famille stricte ayant la même réunion.

(8,2.2) Par ailleurs $\tilde{X}$ n'est pas non plus métrisable. Sans quoi $\tilde{X} \times \tilde{X}$ le serait aussi, et, comme il est séparable, tous ses sous-espaces seraient aussi séparables; or la diagonale précédente Δ^- a la puissance du continu et sa topologie induite par $\tilde{X} \times \tilde{X}$ est discrète (de même l'ensemble des (x^+, x^-) , $x \in X$, est discret avec la puissance du continu). Donc $\tilde{X}$ est un bon contre-exemple pour toutes sortes de propriétés: compact séparable où tout point a une base dénombrable de voisinages, ii n'est pas métrisable; il est de Lindelöf mais $\tilde{X} \times \tilde{X}$ ne l'est pas; $\tilde{X} \times \tilde{X}$ est un espace séparable dont un sous-espace n'est pas séparable.

(8,2.2 bis) En outre, l'espace X^- (ou X^+) muni de la topologie induite par $\tilde{X}$, est paracompact. En effet, soit $(U_i^-)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X^- ; soit c la borne supérieure des x tels que $[0^-, x^-]$ admette un recouvrement plus fin localement fini; alors $[0^-, c^-]$ aussi admet un recouvrement plus fin localement fini, car c est limite d'une suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que chaque $[0^-, x_n^-]$ admette un recouvrement plus fin localement fini, donc $[0^-, c^-]$ est réunion de la suite d'ouverts disjoints $[0^-, x_0^-], [x_0^-, x_1^-], \dots, [x_n^-, x_{n+1}^-], \dots$, chacun d'eux admet un recouvrement plus fin localement fini, donc aussi leur réunion, $]0^-, c^-]$, et aussi $[0^-, c^-]$. Mais alors nécessairement $c = 1$, sans quoi il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]c^-,$

$(c + \varepsilon)^-]$ soit couvert par un seul des U_i , donc $[0^-, (c + \varepsilon)^-]$ admettrait aussi un recouvrement plus fin localement fini, ce qui serait contraire à la propriété de c ; donc X^- est bien paracompact. Mais $X^- \times X^-$ ne l'est pas et n'est même pas normal. En effet, l'ensemble Δ^- des $(x^-, (1-x)^-)$ est discret pour la topologie induite, comme nous l'avons vu à (8,2.2); il n'est pas fermé dans $\tilde{X} \times \tilde{X}$ (son adhérence contient aussi tout les points $(x^+, (1-x)^-)$, et $(x^-, (1-x)^+)$), mais il est fermé dans $X^- \times X^-$. Appelons j la bijection $x \mapsto (x^-, (1-x)^-)$ de X sur Δ^- . Soient A, B , l'ensemble des rationnels et l'ensemble des irrationnels dans X , et considérons les ensembles fermés $j(A), j(B)$ de $X^- \times X^-$; ils sont disjoints; montrons qu'ils n'ont pas de voisinages disjoints. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, des voisinages de $j(A), j(B)$, dans $X^- \times X^-$. Pour tout x , il existe un rectangle de la forme $V_x = [(x - \varepsilon_x)^-, x^-] \times [(1 - x - \varepsilon_x)^-, (1 - x)^-]$, $\varepsilon_x > 0$, qui est contenu dans $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ selon que x est dans A ou B (exception pour $x = 0$). Pour un $x \in A$ et un $y \in B$, V_x et V_y sont disjoints si et seulement si ε_x ou ε_y est $< |x - y|$. Rangeons les rationnels $\neq 0$ en une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La réunion d'intervalles $\bigcup_{n \geq m} [r_n - \varepsilon_{r_n}/n, r_n + \varepsilon_{r_n}/n]$ contient un ouvert dense dans $]0, 1[$; l'intersection $\bigcap_m$ de tous ces ensembles, quand m varie, est le complémentaire d'un ensemble maigre dans $]0, 1[$, et elle a donc la puissance du continu (Baire). Elle contient donc au moins un irrationnel, $y_0 \in B$. Il existe donc une infinité d'intervalles $[r_n - \varepsilon_{r_n}/n, r_n + \varepsilon_{r_n}/n]$ dont y_0 est élément; pour chacun des rationnels r_n correspondants, $\varepsilon_{r_n} \geq \varepsilon_{r_n}/n \geq |r_n - y_0|$, et comme ε_{r_n}/n tend vers 0, on doit, si l'on veut que $V_{r_n} \cap V_{y_0} = \emptyset$, avoir $\varepsilon_{y_0} < |r_n - y_0|$, donc $\varepsilon_{y_0} = 0$, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne peuvent être disjoints, ce qui prouve bien que $X^- \times X^-$ n'est pas normal. La fonction caractéristique de $j(A)$ sur Δ^- est continue, mais n'admet pas de prolongement en une fonction continue sur $X^- \times X^-$.

(8,2.3) Il existe une correspondance bijective entre l'espace $C_0(\tilde{X})$ des fonctions continues sur $\tilde{X}$, nulles au point 0^- , et l'espace des fonctions réglées et continues à droite sur X ; si f est réglée et continue à droite sur X , il lui correspond la fonction $\hat{f}$ continue sur $\tilde{X}$ définie par $\hat{f}(x^+) = f(x), \hat{f}(x^-) = \lim_{x' < x, x' \rightarrow x} \hat{f}(x')$ (avec $f(0^-) = 0$), et on retrouve f à partir de $\hat{f}$ par $f(x) = \hat{f}(x^+)$.

La topologie de la convergence uniforme est compatible avec cette correspondance. L'espace $C(\tilde{X})$ des fonctions continues sur $\tilde{X}$ est un Banach non séparable; car s'il était séparable, $\tilde{X}$ serait compact polonais donc métrisable, et on a vu qu'il ne l'était pas. On le voit aussi directement: car il est métrique et alors tous ses sous-espaces le seraient aussi, or le sous-espace des fonctions caractéristiques des intervalles $[0^-, a^-]$ est discret, pour la convergence uniforme, et a la puissance du continu. C'est d'ailleurs de la même manière qu'on montre que l'espace des fonctions réglées et continues à droite sur X n'est pas séparable, en considérant les fonctions caractéristiques des intervalles $[0, a[$ sur X . Et cela montre alors de nouveau que $\tilde{X}$ n'est pas métrisable. Cependant le dual $C'(X)$, espace des mesures de Radon, est séparable pour la topologie *-faible, car les combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac $\delta_{(r+)}$, r rationnel, y sont denses et cela donne donc un exemple d'un Banach non séparable E tel que $\sigma(E', E)$ soit séparable.

On sait en outre que l'espace des fonctions réglées et continues à droite sur X , pour la topologie de la convergence simple sur un ensemble dense de X , est lusinien; donc l'espace $C(\tilde{X})$ des fonctions continues sur $\tilde{X}$, muni de la topologie de la convergence simple sur un ensemble dense de $\tilde{X}$, est lusinien.

(8,2.4) L'espace $\tilde{X}$ est fortement radonien: toute mesure $\tilde{m} \geq 0$ sur la tribu borélienne de $\tilde{X}$, localement finie, est de Radon, et tempérée. Comme X est de Lindelöf, il suffit de le voir pour une mesure ≥ 0 finie. Or celle-ci, par l'intégrale, définit une forme linéaire continue sur $C(\tilde{X})$, donc une mesure de Radon ≥ 0 , qui à son tour, par prolongement de Lebesgue, définit une mesure abstraite $\tilde{m}'$, de Radon, c'est-à-dire intérieurement régulière, sur la tribu borélienne. Mais les mesures $\tilde{m}$ et $\tilde{m}'$ ont même intégrale sur toute fonction continue ≥ 0 ; et les fonctions continues ≥ 0 engendrent la tribu des fonctions boréliennes bornées ≥ 0 ($\tilde{X}$ étant de Lindelöf, toute fonction semi-continue inférieurement ≥ 0 est limite croissante d'une suite de fonctions continues ≥ 0), donc ces deux mesures coïncident par le lemme C.

(8,2.5) Appelons σ l'opérations "symétrie", $x^+ \mapsto x^-$, $x^- \mapsto x^+$ de $\tilde{X}$ sur lui-même. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\tilde{X}$; comme nous l'avons vu, il est réunion

dénombrable d'intervalles disjoints, contenant ou ne contenant pas leurs extrémités. Donc, à un ensemble dénombrable près, il est symétrique, c'est-à-dire stable par σ , et image réciproque $p^{-1}(U)$ d'un ouvert $U = p(\tilde{U})$ de X . Alors l'ensemble des parties de $\tilde{X}$ qui sont, à un ensemble dénombrable près, image réciproque par p d'un borélien de X , est stable par réunions et intersections dénombrables, et par complémentation, et il contient tous les ouverts de $\tilde{X}$, donc toute la tribu borélienne: les boréliens de $\tilde{X}$ sont donc exactement les ensembles de la forme $p^{-1}(B)$, B borélien de X , à des ensembles dénombrables près. Comme on le voit, la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\tilde{X}$ est assez pauvre; X^+ et X^- ne sont pas boréliens. Puisque $\tilde{X} \times \tilde{X}$ n'est pas de Lindelöf, la tribu borélienne de ce produit n'est pas forcément le produit des tribus boréliennes; et en effet elle ne l'est pas. Puisque $\tilde{X}$ est le Lindelöf, la tribu borélienne de $\tilde{X}$ est engendrée par les fonctions continues, autrement dit coïncide avec la tribu de Baire; le produit des tribus de Baire est toujours la tribu de Baire du produit, donc on peut dire aussi: la tribu de Borel de $\tilde{X} \times \tilde{X}$ n'est pas sa tribu de Baire. La démonstration est simple. Un produit d'intervalles de $\tilde{X}$ découpe sur la diagonale Δ^- de (8,2.1) un intervalle, c'est-à-dire l'image d'un intervalle de X par la bijection $j: x \mapsto (x^-, (1-x)^-)$ de X sur Δ^- . Donc un ensemble de la tribu engendrée par ces produits d'intervalles, c'est-à-dire de la tribu produit des tribus boréliennes sur $\tilde{X} \times \tilde{X}$, découpe sur Δ^- un ensemble, correspondant par j à un borélien de X . Or Δ^- est discrète dans $\tilde{X} \times \tilde{X}$, donc localement compacte donc borélienne (intersection d'un ouvert et d'un fermé); alors toute partie de Δ^- , correspondant par j à une partie arbitraire de X , est dans la tribu borélienne de $\tilde{X} \times \tilde{X}$. Donc la tribu borélienne est bien strictement plus grande que le produit des tribus boréliennes.

(8,2.6) Si λ est une mesure de Radon sur X , elle définit une mesure de Radon $\tilde{\lambda}$ sur $\tilde{X}$, en posant $\tilde{\lambda}(\tilde{f}) = \lambda(f)$, pour f réglée et continue à droite sur X , et en convenant que $\tilde{\lambda}$ ne possède pas de masse au point 0^- . Par ailleurs, si $\tilde{\mu}^*[1]$ est une mesure de Radon sur $\tilde{X}$. Son image $p(\tilde{\mu}^*) = \mu$ est une mesure de Radon sur X , définie par $\mu(f) = \tilde{\mu}^*(\tilde{f}^*)$ pour f continue sur X , ou $\tilde{f}^*$

[1] Nous réservons la notation $\tilde{\mu}$ à la mesure associée comme ci-dessus à une mesure μ sur X . C'est pourquoi nous notons $\tilde{\mu}^*$ une mesure arbitraire sur $\tilde{X}$.

est la fonction continue sur $\tilde{X}$ définie par $\hat{f}^*(x^+) = \hat{f}^*(x^-) = f(x)$ (c'est $\hat{f}$, sauf au point 0: $\hat{f}^*(0^-) = f(0)$, $\hat{f}(0^-) = 0$). On n'a pas nécessairement $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}^*$; mais, si λ est de Radon sur X , $p(\tilde{\lambda}) = \lambda$. Mais de toute façon on peut voir que toute mesure de Radon diffuse $\tilde{\mu}^*$ sur X est la mesure $\tilde{\mu}$ associée à la mesure $\mu = p(\tilde{\mu}^*)$ sur X , et qu'alors $\tilde{\mu}^* = \tilde{\mu} = (p(\tilde{\mu}^*))^\sim$.

En effet, remarquons d'abord que, si $\tilde{\mu}^*$ est diffuse, $\mu = p(\tilde{\mu}^*)$ l'est aussi, car $\mu(\{x\}) = \tilde{\mu}^*(\{x^+, x^-\}) = 0$, et que, si μ est diffuse, $\tilde{\mu}$ l'est aussi, car, pour tout x , $\tilde{\mu}^*(\{x^+\})$ est la limite pour ε tendant vers 0 de $\tilde{\mu}([x^+, (x + \varepsilon)^-]) = \mu([x, x + \varepsilon])$, donc c'est 0, et de même $\tilde{\mu}([x^-]) = 0$.

Ensuite on sait que $\tilde{\mu}^*(\hat{f}) = \tilde{\mu}(\hat{f}) (= \mu(f))$ si f est une fonction continue sur X . Si $\hat{f}$ est une fonction caractéristique d'intervalle continue sur $\tilde{X}$, nulle en 0^- , elle provient de f , fonction caractéristique d'intervalle sur X ; f est limite simple d'une suite bornée de fonctions continues et $\hat{f}$ est limite de la suite des $\hat{f}_n$ sauf au plus en 2 points, et, comme $\tilde{\mu}^*$ est diffuse ainsi que $\mu = p(\tilde{\mu}^*)$ et $\tilde{\mu}$, on a encore $\tilde{\mu}^*(\hat{f}) = \tilde{\mu}(\hat{f})$. Ceci reste alors vrai pour toute combinaison linéaire finie de telles fonctions, c'est-à-dire pour toute $\hat{f}$, où f est une fonction en escalier continue à droite; si maintenant f est réglée, continue à droite, elle est limite uniforme d'une suite de fonctions f_n en escalier continues à droite, et $\hat{f}$ est la limite uniforme des $\hat{f}_n$, donc on a encore $\tilde{\mu}^*(\hat{f}) = \tilde{\mu}(\hat{f})$; et $\tilde{\mu}^* = \tilde{\mu}$ comme nous l'avions dit.

On a donc défini, par $\tilde{\mu}^* \mapsto p(\tilde{\mu}^*) = \mu$, et $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ une correspondance bijective entre les mesures de Radon diffuses sur X et sur $\tilde{X}$. Si $\tilde{\mu}^*$ est quelconque, $\tilde{\mu}^*$ et $\tilde{\mu}$ ont toujours même partie diffuse.

On peut le voir d'une autre manière. Puisque tout borélien de $\tilde{X}$ est symétrique à un ensemble dénombrable près, on peut considérer les mesures diffuses sur la tribu borélienne comme des mesures diffuses sur la tribu borélienne symétrique; et nous avons vu que les mesures de Radon sur $\tilde{X}$ sont exactement les mesures sur la tribu borélienne. Or il existe une correspondance bijective entre les boréliens de X et les boréliens symétriques de $\tilde{X}$ par $\tilde{B} \mapsto B = p(\tilde{B})$, $B \mapsto \tilde{B} = p^{-1}(B)$, donc aussi une correspondance bijective entre mesures ≥ 0 diffuses sur X et sur $\tilde{X}$; et cette correspondance est la même que ci-dessus, puisque, de $\tilde{X}$ à X , elle est définie par $\tilde{\mu} \mapsto \mu = p(\tilde{\mu})$.

(8,2.7) Etudions les parties $\tilde{\lambda}$ -mesurables de $\tilde{X}$, pour une mesure $\tilde{\lambda}$ diffuse sur X . Une partie est négligeable si et seulement si elle est contenue dans un borélien négligeable; comme les parties dénombrables sont ici négligeables, une partie de $\tilde{X}$ est $\tilde{\lambda}$ -négligeable, si et seulement si sa symétrisée est $\tilde{\lambda}$ -négligeable, si et seulement si sa projection par p sur X est λ -négligeable. Donc une partie $\tilde{A} \subset X[1]$ est $\tilde{\lambda}$ -mesurable si et seulement si, à un ensemble près de projection λ -négligeable sur X , elle est symétrique, $\tilde{A}^* = \tilde{A} = p^{-1}(A)$, A λ -mesurable. En particulier, X^+ et X^- ne sont $\tilde{\mu}^*$ -mesurables que pour $\tilde{\mu}^*$ atomique; car ils le sont si et seulement s'ils le sont par rapport à la partie diffuse $\tilde{\mu}'$ de $\tilde{\mu}^*$, et alors X^+ ne peut être $\tilde{\mu}'$ -mesurable que s'il diffère de son symétrisé $\tilde{X}$ par un ensemble $\tilde{\mu}'$ -négligeable, or X^- ne peut être $\tilde{\mu}'$ -négligeable que si $p(X^-) = X$ est μ' -négligeable, ou $\mu' = 0$. Cela veut aussi dire que l'application $x \mapsto x^+$ (ou $x \mapsto x^-$) n'est λ -mesurable-Lusin que pour λ atomique; en effet, si elle est mesurable, l'image λ^+ de λ par $x \rightarrow x^+$ doit être une mesure de Radon sur $\tilde{X}$, portée par X^+ , donc pour laquelle X^+ est mesurable, donc elle est atomique et par suite λ aussi. Les espaces X^+ , X^- , ne sont pas radoniens, puisqu'ils sont sous-espaces de $\tilde{X}$ radonien et ne sont pas universellement mesurables. Ils sont même "anti-radoniens" par excellence: une mesure de Borel sur X^+ n'est de Radon que si elle est atomique. En effet, son image par l'injection $X^+ \hookrightarrow \tilde{X}$ doit être de Radon sur $\tilde{X}$ et portée par X^+ , donc atomique. Mais $x \mapsto x^+$ établit une correspondance bijective entre parties boréliennes de X et de X^+ , autrement dit X a les mêmes parties boréliennes pour sa topologie usuelle ou la topologie définie à partir de X^+ par $x \mapsto x^+$; en effet, X^+ est plus fin que X , mais tout ouvert de X^+ , réunion dénombrable d'intervalles disjoints, ouverts ou contenant leur origine (extrémité gauche), est borélien dans X , donc tout borélien de X^+ est aussi borélien de X . Donc l'application $x \rightarrow x^+$, mesurable-Borel, n'est pas mesurable-Lusin pour une mesure $\lambda \neq 0$ non atomique; et $x \mapsto x^+$ établit une correspondance bijective entre les mesures de Radon (ou de Borel) sur X et les mesures de Borel sur X^+ . Si λ est une mesure de Radon diffuse sur X , son image λ^+ dans X^+ est une mesure de Borel, et son image $\tilde{\lambda}$ dans $\tilde{X}$,

[1] Nous réservons la notation $\tilde{A}$ à une partie symétrique $p^{-1}(A)$, $A \subset X$, et notons $\tilde{A}^*$ une partie quelconque de $\tilde{X}$.

image de λ^+ par l'injection identique de X^+ dans $\tilde{X}$, n'est pas portée par X^+ (catastrophe de la mesure image), puisque X^+ n'est pas $\tilde{\lambda}$ -mesurable.

On ne sait pas si le produit de deux espaces radoniens est radonien; il serait intéressant de savoir si $\tilde{X} \times \tilde{X}$ qui n'est de Lindelöf alors que $\tilde{X}$ l'est, ne serait pas un exemple d'un produit non radonien d'espaces radoniens.

(8,2.8) Enfin l'espace $\Omega = \tilde{X}$ va nous donner des exemples de non-unicité de la désintégration. La tribu borélienne de $\tilde{X}$ n'est pas $\tilde{\lambda}$ -dénombrablement engendrée, si λ est $\neq 0$ et diffuse. En effet, sans cela il existerait $\tilde{X}' \subset \tilde{X}$, borélien et portant λ , tel que la tribu borélienne de $\tilde{X}'$ soit dénombrablement engendrée; on peut supposer $\tilde{X}'$ symétrique. Soit $(\tilde{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite génératrice; chacun des $\tilde{B}_n^*$ peut s'écrire comme réunion d'un borélien symétrique B_n et d'une partie dénombrable $\tilde{N}_n^*$; alors la tribu engendrée est entièrement formée de parties symétriques, à des ensembles dénombrables près, contenus dans $\tilde{N}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{N}_n^*$. Alors toute partie dénombrable de $\tilde{X}'$ devrait être contenue dans $\tilde{N}^*$, alors que $\tilde{X}'$ a la puissance du continu, ce qui est absurde. La même conclusion est valable pour des mesures non atomiques, car une tribu μ -dénombrablement engendrée l'est aussi par rapport à la partie diffuse $\tilde{\mu}'$ de $\tilde{\mu}^*$. (Par contre évidemment la tribu borélienne de X^+ est dénombrablement engendrée, puisqu'elle est isomorphe à celle de X). De la même manière, la tribu borélienne de $\tilde{X}$ n'est pas λ -dénombrablement séparante. Alors, en prenant $(Y, \mathcal{Y}) = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{X}})$, ou $(\Omega, \mathcal{O}) = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{X}})$, nous aurons d'excellents exemples où les conditions des théorèmes (2,7) ou (2,16) ne sont pas réalisées, et où il y aura plusieurs espérances conditionnelles de fonctions à valeurs mesures, ou plusieurs désintégrations d'une mesure. Bornons-nous au cas de la désintégration, un contre-exemple à (2,16) donnant un contre-exemple à (2,7). Nous prenons donc $\Omega = \tilde{X}$, et prenons justement l'application p de $\tilde{X}$ dans X déjà considérée, et une mesure $\tilde{\lambda}$ diffuse sur $\tilde{X}$, $(p\tilde{\lambda}) = \lambda$ diffuse. Montrons qu'elle a pour désintégration relativement à p , $\mathcal{X}$ (tribu borélienne de X), la fonction $x \mapsto \tilde{\lambda}_x^* = \alpha(x)\delta_{(x+)} + \beta(x)\delta_{(x-)}$, où α et β sont des fonctions ≥ 0 arbitraires de somme 1. Soit $\tilde{B}^*$ borélien de $\Omega = \tilde{X}$, $\tilde{B}^* = p^{-1}(B) = \tilde{B}$ symétrique, à une partie dénombrable près. Alors $\delta_{(x+)}(\tilde{B}^*) = \delta_{(x-)}(\tilde{B}^*)$ sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de x , et $x \mapsto \tilde{\lambda}_x^*(\tilde{B}^*)$ est la fonction caractéristique de B à un ensemble dénombrable

près, donc elle est borélienne, et $x \mapsto \tilde{\lambda}_x^*$ appartient à $\mathcal{X}$. Ensuite $\int_X \tilde{\lambda}_x^* d\lambda(x) = \tilde{\lambda}$,

puisque $\alpha + \beta = 1$ (pour tout $\tilde{B}$, $\int_X \tilde{\lambda}_x^*(\tilde{B}^*) d\lambda(x) = \int_X \delta_{(x)}(B) d\lambda(x) = \lambda(B)$

$= \tilde{\lambda}(\tilde{B}^*)$) et λ_x est portée par $p^{-1}(\{x\})$ pour tout x , donc c'est bien une désintégration d'après le théorème (2, 20). Deux de ces désintégrations ne sont λ -presque sûrement égales, que si les α correspondantes sont λ -presque partout égales; il y a donc, avec le choix de α , une infinité de désintégrations essentiellement distinctes, ayant une puissance strictement supérieure à celle du continu.

On peut d'ailleurs aussi considérer les désintégrations de $\tilde{\lambda}$ par rapport à l'application identique et à la tribu borélienne $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{X}}$ elle-même. Il y a encore la même infinité de désintégrations essentiellement distinctes. Toute fonction $\omega \mapsto \tilde{\lambda}_\omega^*$: $x^+ \mapsto \alpha^+(x)\delta_{(x^+)} + \beta^+(x)\delta_{(x^-)}$, $x^- \mapsto \alpha^-(x)\delta_{(x^+)} + \beta^-(x)\delta_{(x^-)}$ où α^+ , β^+ , α^- , β^- , sont des fonctions ≥ 0 sur X , $\alpha^+ + \beta^+ = 1$, $\alpha^- + \beta^- = 1$, est une désintégration. Si en effet $\tilde{B}^*$ est borélienne dans $\tilde{X}$, elle est symétrique $= p^{-1}(B)$ à une partie dénombrable près, donc $\omega \mapsto \tilde{\lambda}_\omega(\tilde{B}^*)$ est la fonction caractéristique de $\tilde{B}^*$ à une partie dénombrable près, donc borélienne. Ensuite $\int_\Omega \tilde{\lambda}_\omega^* d\tilde{\lambda}(\omega) = \tilde{\lambda}$. En effet, comme ci-dessus, $\int_\Omega \tilde{\lambda}_\omega^*(\tilde{B}^*) d\tilde{\lambda}(\omega) = \int_\Omega \chi_{\tilde{B}^*}(\omega) d\tilde{\lambda}(\omega) = \tilde{\lambda}(\tilde{B}^*)$. Enfin, si $\tilde{A}^*$ est borélienne, donc symétrique à une partie dénombrable près, pour $\tilde{\lambda}$ -presque tout $\omega \in \tilde{A}^*$, $\tilde{\lambda}_\omega^*$ est portée par $\tilde{A}^*$, donc c'est une désintégration par la proposition (2, 18). Remarquons que $\tilde{\lambda}_\omega$ n'est pas portée par l'atome de ω , qui est $\{\omega\}$ lui-même, dès que β^+ et α^- sont partout $\neq 0$; c'est donc un contre-exemple au théorème (2, 20), possible parce que la tribu borélienne de $\tilde{X}$ n'est pas $\tilde{\lambda}$ -dénombrablement séparante.

(8, 2.9) Comme $\tilde{X}$ ne vérifie pas non plus les conditions de l'espace Y des théorèmes (2, 8) et (2, 17), on peut se demander s'il existe toujours des espérances conditionnelles de fonctions à valeurs mesures ou des désintégrations de mesures. Pour éviter des confusions de notation (il y a un espace X dans tout ce No (8, 2), et un autre espace X dans les théorèmes (2, 8) et (2, 17)) nous mettrons des ' à toutes les lettres du théorème (2, 8): Ω' , λ' , ν'_ω , $\nu'_{x'}^{\mathcal{X}'}$,

$p', X', \mathcal{X}', \mu', Y', \mathcal{Y}'$. Reprenons alors la démonstration de (2,8), avec $(Y', \mathcal{Y}') = \text{l'espace } (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{X}})$ du présent paragraphe.

On y utilise deux fois le fait que Y' est compact métrisable. Une première fois pour dire que $\mathfrak{U}$ est, d'après le lemme C, l'ensemble de toutes les fonctions boréliennes ≥ 0 bornées. Mais ceci ne dépend pas du fait que Y' est métrisable, mais du fait que $C^+(Y')$ engendre toute la tribu des fonctions boréliennes ≥ 0 bornées. Or ceci est toujours vrai simplement si Y' est compact de Lindelöf, ce qui est le cas ici (voir (8,2.4)). On l'utilise une deuxième fois, pour passer d'une désintégration relative à la tribu complétée $\mathcal{X}'_\mu$ à une désintégration relative à $\mathcal{X}'$ elle-même; or cela suppose que $\mathcal{Y}'$ soit v' -dénombrablement engendrée, ce qui ne se produira ici que si v' est atomique, c'est-à-dire pratiquement jamais. Donc le théorème (2,8) (resp. (2,18)) subsiste avec l'hypothèse que v' (resp. λ') soit portée par une réunion dénombrable de compacts de Lindelöf de v' -mesures (resp. λ' -mesures) finies, à condition que la tribu $\mathcal{X}'$ soit μ' -complète. Nous n'aurons donc pas ici de contre-exemple à l'existence d'espérances conditionnelles à valeurs mesures ou de désintégrations, si la tribu $\mathcal{X}'$ est μ' -complète. Si elle ne l'est pas, il se peut très bien que $\tilde{X}$ donne des contre-exemples, mais je n'en ai pas trouvé. [1]

Contre-exemple (8,3). Cas de non-existence de la désintégration

(8,3.1) Il est très facile de donner des contre-exemples du théorème (2,17), et par la même au théorème (2,8) dont il se déduit, si $\mathcal{O}$ n'est pas la tribu borélienne d'un espace topologique. Soit Ω un compact métrisable ayant la puissance du continu. Soit λ une probabilité de Radon diffuse sur Ω . Soit $\mathcal{T}$ la tribu borélienne, $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$ la tribu λ -mesurable. Alors λ définit aussi une mesure sur la tribu $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$. Cette mesure admet-elle une désintégration par rapport à la sous-tribu $\mathcal{T}$? Soit $\omega \mapsto \hat{\lambda}_\omega$ une telle désintégration. Comme $\mathcal{T}$ est dénombrablement séparante, le théorème (2,20) dit qu'il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$, borélien, portant λ , tel que, pour $\omega \in \Omega'$, on ait $\hat{\lambda}_\omega = \delta_{(\omega)}$. Soit alors $B \in \hat{\mathcal{T}}_\lambda$; la fonction $\omega \mapsto \hat{\lambda}_\omega(B)$ coïncide, sur Ω' , avec la fonction caractéristique de B ; et elle doit appartenir à $\mathcal{T}$. Autrement dit, on aura

[1] Sunyach a montré (résultat non publié) qu'une probabilité de Radon a toujours une désintégration par rapport à une sous-tribu complète de la tribu mesurable.

$\hat{\mathcal{T}}_\lambda \cap \Omega' = \mathcal{T} \cap \Omega'$, toutes les parties λ -mesurables de Ω' devront être boréliennes. Or l'ensemble des parties boréliennes de Ω' a au plus la puissance du continu; et, comme il existe une partie λ -négligeable N' de Ω' ayant la puissance du continu, l'ensemble des parties de N' , λ -négligeables donc λ -mesurables, a une puissance strictement supérieure à celle du continu. Nous arrivons donc à une contradiction, donc $\hat{\lambda}$, mesure sur $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$, n'est pas désintégrable relativement à la sous-tribu $\mathcal{T}$ de $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$. Même résultat avec $\hat{\mathcal{T}}$ au lieu de $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$, pour la même raison (voir (8,0)).

(8,3.2) Il est donc intéressant d'avoir des contre-exemples où $\mathcal{O}$ est la tribu borélienne d'un espace topologique Ω , λ une mesure de Borel sur Ω , c'est-à-dire une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$.

Soit X un compact métrisable, μ une probabilité de Radon sur X , Ω une partie de X , non μ -mesurable, de μ -mesure extérieure 1. On sait que μ définit une mesure induite λ sur Ω , définie par $\lambda(B) = \mu^*(B) = \mu(B')$, pour B borélien de Ω , B' borélien de X tel que $B' \cap \Omega = B$. Si $\mathcal{O}$ est la tribu borélienne de Ω , λ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{O})$, et, si p est l'injection canonique de Ω dans X , elle est continue donc $(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ -mesurable de Ω dans X , $\mathcal{X}$ tribu borélienne de X . La mesure image $p(\lambda)$ est précisément μ ; puisqu'elle n'est pas portée par Ω , λ n'est pas de Radon. Alors λ n'admet pas de désintégration relativement à p , $\mathcal{X}$. En effet, si $(\lambda_x)_{x \in X}$ est une telle désintégration, comme $\mathcal{X}$ est dénombrablement séparante, le théorème (2,20) dit que, pour μ -presque tout x , λ_x est portée par $p^{-1}\{x\}$. En particulier, pour μ -presque tout $x \in X \setminus \Omega$, λ_x est nulle; or pour μ -presque tout x , elle doit avoir la masse 1. Ceci est contradictoire avec le fait que $X \setminus \Omega$ n'est pas μ -négligeable. Donc λ n'est pas désintégrable pour p , $\mathcal{X}$.

Dans cet exemple, la non-surjectivité de p joue un rôle essentiel; le contre-exemple suivant donne un cas où p est surjective.

(8,3.3) On sait qu'il existe une partie Ω de $[0,1]^2 = X \times Y$, qui coupe chaque verticale $\{x\} \times Y$ en un point exactement, et qui cependant n'est pas $(dx \otimes dy)$ -mesurable. Soit $\mathcal{O}$ la tribu borélienne de Ω . Soit λ la mesure induite par $dx \otimes dy$ sur Ω , $\lambda(B) = (dx \otimes dy)^*(B)$ pour B borélien dans Ω . Cette mesure λ sur Ω est de Borel, non de Radon; sans quoi, par la régularité intérieure, $(dx \otimes dy)^*(\Omega)$ serait la borne supérieure des $(dx \otimes dy)(K)$, K compact

dans Ω , donc $(dx \otimes dy)^*(\Omega)$, et Ω serait $(dx \otimes dy)$ -mesurable, ce qui est contraire à l'hypothèse. Soit p la première projection $(x, y) \mapsto x$, de Ω sur X , qui est continue surjective de Ω sur X ; $\mathcal{X}$ sera la tribu borélienne de X . Soit μ la mesure image $p(\lambda)$. Supposons que λ admette une désintégration $x \mapsto \lambda_x$ par rapport à p , $\mathcal{X}$ ou même $\hat{\mathcal{X}}_\mu$. Le théorème (2,20) dit encore que, pour μ -presque tout x , λ_x est portée par $p^{-1}(\{x\})$ et de masse 1, donc égale à $\delta_{(F(x))}$, où f est l'application de X dans Y dont le graphe est Ω , et $F(x) = (x, f(x))$; F est une application de X dans Ω . Montrons que F (ou f) n'est pas μ -mesurable (Lusin ou Borel, c'est la même chose puisque Ω est métrisable séparable). Si en effet il en était ainsi, $F(\mu)$ serait égale à λ , car, pour tout borélien B de Ω , on aurait $(F(\mu))(B) = \mu(p(B)) = \lambda(p^{-1}(p(B))) = \lambda(B)$. Alors λ serait nécessairement de Radon sur Ω , et nous avons vu qu'elle ne l'était pas. Donc il existe un borélien B_0 de Ω , tel que $F^{-1}(B_0) = p(B_0)$ ne soit pas μ -mesurable. Or la fonction caractéristique de $p(B_0)$ est $x \mapsto \delta_{(F(x))}(B_0)$, μ -presque partout égale à $x \mapsto \lambda_x(B_0)$, qui devrait être μ -mesurable. Nous aboutissons donc à une contradiction, et λ n'est pas désintégrable pour p , $\hat{\mathcal{X}}_\mu$.

Remarquons que F et p sont des bijections réciproques entre Ω et X , que $\mu = p(\lambda)$, mais que λ n'est pas $F(\mu)$, puisque justement F n'est pas μ -mesurable! Comme p est surjective, la proposition (3,5) montre que λ n'est pas non plus désintégrable par rapport aux sous-tribus $p^{-1}(\mathcal{X})$ et $p^{-1}(\hat{\mathcal{X}}_\mu)$ de la tribu λ -mesurable de Ω . Les éléments de $\mathcal{T} = p^{-1}(\mathcal{X})$ sont les parties boréliennes de Ω dont la projection par p est borélienne sur X (l'ensemble borélien B_0 ci-dessus n'est pas dans $\mathcal{T}$). Comme $\hat{\mathcal{X}}_\mu$ est la complétée de $\mathcal{X}$ par rapport à μ , c'est-à-dire engendrée par $\mathcal{X}$ et les parties contenues dans des parties μ -négligeables éléments de $\mathcal{X}$, $p^{-1}(\hat{\mathcal{X}}_\mu)$ est engendrée par $\mathcal{T}$ et les parties contenues dans des parties λ -négligeables de $\mathcal{T}$, c'est donc la complétée $\hat{\mathcal{T}}_{\lambda|_{\mathcal{T}}}$ de $\mathcal{T}$ par rapport à $\lambda|_{\mathcal{T}}$, restriction de λ à $\mathcal{T}$. J'ignore si λ admet une désintégration par rapport à la tribu plus grande $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$ de Ω .

Nous avons donc un exemple d'une mesure de Borel λ finie sur un espace métrisable, n'ayant pas de désintégration par rapport à une sous-tribu, borélienne ou λ -complète, de la tribu λ -mesurable. Naturellement, si λ était de Radon, justement le théorème (2,17) donnerait l'existence d'une désintégration.

(8,3.4) Il serait important d'avoir aussi des exemples de probabilités de Radon sur un compact Ω (non métrisable), n'ayant pas de désintégration par rapport à une sous-tribu, non complète [1] de la tribu λ -mesurable. En particulier: si la tribu borélienne de $X \times Y$ est strictement plus grande que le produit des tribus boréliennes de X et de Y , existe-t-il une probabilité de Radon λ sur $X \times Y$, n'ayant pas de désintégration par rapport au produit des tribus boréliennes?

Contre-exemple (8,4) pour le théorème (2,20)

Plaçons-nous dans les conditions de ce théorème, mais en supposant que $\mathcal{X}$ n'est pas μ - Q -décomptablement séparante; alors il peut arriver que, pour tout x , λ_x ne soit pas portée par $p^{-1}(\{\tilde{x}\})$. On pourra se borner au cas où p est l'identité, $X = \Omega$, et où $\mathcal{X} = \mathcal{T}$ est une sous-tribu, non λ -décomptablement séparante, de la tribu λ -mesurable de Ω , et on donnera des exemples où, pour aucune valeur de ω , λ_ω n'est portée par l'atome de ω dans $\mathcal{T}$.

(8,4.1) Un premier exemple est donné par $\Omega = \tilde{X}$ de (8,2), et où $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne elle-même $\tilde{\mathcal{X}}$. On a vu, à (8,2.7), que $\omega \mapsto \delta_{(\sigma\omega)}$, où σ est la symétrie, est une désintégration de $\tilde{\lambda}$ (diffuse), par rapport à $\tilde{\mathcal{X}}$; $\delta_{(\sigma\omega)}$ n'est jamais portée par ω .

L'intérêt de cet exemple est que $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne elle-même, dont les atomes sont les points. Mais il a un défaut: il n'y a pas unicité de la désintégration, et $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$ est aussi une désintégration pour laquelle $\delta_{(\omega)}$ est toujours portée par ω .

Voici une variante. L'application $x \rightarrow x^+$ de X dans $\tilde{X}$ est borélienne (voir (8,2.6)); donc, comme X est compact métrisable, toute probabilité de Radon $\lambda \neq 0$ diffuse sur X admet une désintégration relativement à p , $\tilde{\mathcal{X}}$, et une seule à un ensemble $\tilde{\lambda}$ -négligeable près ($\tilde{\lambda}$ est l'image de λ). Or c'est évidemment $x^+ \mapsto \delta_{(x)}$, $x^- \mapsto \delta_{(x)}$. Elle n'est cependant pas, pour λ -presque tout élément de X , portée par son image réciproque, puisque, pour tout x^- , son image réciproque est vide, et que X^- n'est pas λ -négligeable.

[1] Voir note [1] page 155.

(8,4.2) Voici un cas beaucoup plus courant. Soit Ω un compact métrisable, de tribu borélienne $\mathcal{O}$, et soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de $\mathcal{O}$, dénombrablement engendrée. Par exemple, Ω est le tore $\mathbb{T}$. dont on appellera s la symétrie $\omega \mapsto -\omega$, et $\mathcal{T}$ sera la tribu des parties boréliennes symétriques. Ou bien Ω sera un produit $X \times Y$ de compacts métrisables et $\mathcal{T}$ sera la tribu image réciproque, par la projection, de la tribu borélienne de X , X et Y ayant la puissance du continu. Soit alors λ une probabilité de Radon diffuse sur Ω , ayant la propriété suivante: il n'existe pas de partie $\Omega' \subset \Omega$, borélienne, portant λ , telle que $\mathcal{T} \cap \Omega'$ ait pour atomes des points. On formera immédiatement des exemples de telles mesures; sur le tore, on prendra la mesure de Lebesgue (si Ω' porte λ , $\Omega'' = \Omega' \cap s\Omega'$ la porte aussi; alors $\Omega'' \cap \mathcal{T}$ a des atomes qui ne sont jamais des points, mais des couples de deux points symétriques, donc l'atome de tout point de Ω'' dans $\Omega' \cap \mathcal{T}$ est formé de deux points); sur $X \times Y$, on prendra $\lambda = \mu \otimes \nu$, $\mu \neq 0$, ν diffuse $\neq 0$; alors Ω' devrait contenir un point au plus sur chaque verticale $\{x\} \times Y$, donc serait $(\mu \otimes \nu)$ -négligeable s'il est $(\mu \otimes \nu)$ -mesurable, d'après Fubini (ν est diffuse), donc il ne saurait porter λ . Considérons maintenant la sous-tribu $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$ de la tribu λ -mesurable, engendrée par $\mathcal{T}$ et les parties λ -négligeables de Ω . Elle n'est plus λ -Q-dénombrablement séparante. En effet, ses atomes sont maintenant les points. S'il existait une suite de parties $B_n \in \mathcal{T}'$, séparant λ -presque tout les points de Ω , on voit que chaque B_n est, à un ensemble λ -négligeable près N_n , dans $\mathcal{T}$; un ensemble de la tribu engendrée par les B_n appartient à $\mathcal{T}$, à un ensemble λ -négligeable près, contenu dans $N = \bigcup_n N_n$. Alors, pour λ -presque tout ω , $\{\omega\}$ différerait de $\tilde{\omega}$, atome de ω dans $\mathcal{T}$, par un ensemble contenu dans N ; si nous appelons $\tilde{N}$ la réunion de N et de l'ensemble λ -négligeable des ω n'ayant pas cette propriété, on voit que, pour tout $\omega \notin \tilde{N}$, $\tilde{\omega}$ serait $\{\omega\}$, à une partie près contenue dans $\tilde{N}$; donc, si $\Omega' = \complement \tilde{N}$, $\mathcal{T} \cap \Omega'$ aurait pour atomes des points, ce qui est contraire à nos hypothèses. Donc $\mathcal{T}'$ n'est pas λ -dénombrablement séparante. On doit donc s'attendre à ce que les conclusions du théorème (2,20) soient en défaut. Supposons que l'on ait la conclusion de (2,20). Alors, $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$ serait une désintégration de λ par rapport à $\mathcal{T}'$. Si alors $B \in \mathcal{O}$, sa fonction caractéristique $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}(B)$ appartiendrait à $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$, donc

$\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$, contenant $\mathcal{O}$ et $\mathcal{N}_\lambda$, serait toute la tribu λ -mesurable. Mais la tribu λ -mesurable, contenant $\mathcal{O}$, est dénombrablement séparante, et nous avons vu que $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$ ne l'était pas. Les conclusions de (2, 20) sont donc bien en défaut. Dans l'exemple du tore, une désintégration de λ est donnée par $\omega \mapsto \frac{1}{2}(\delta_{(\omega)} + \delta_{(3\omega)})$, qui n'est jamais portée par l'atome $\{\omega\}$ de ω dans $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$. Dans le cas du produit $X \times Y$, et de $\lambda = \mu \otimes \nu$, une désintégration est donnée par $(x, y) \mapsto \delta_{(x)} \otimes \nu$, qui n'est jamais portée par l'atome $\{(x, y)\}$ de (x, y) dans $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$, puisque ν est diffuse non nulle.

On pourrait dire que, dans cet exemple, l'adjonction de $\mathcal{N}_\lambda$ a joué un rôle essentiel. Autrement dit qu'un tel contre-exemple sort obligatoirement des sous-tribus de la tribu borélienne. Mais, si nous appelons $\mathcal{D}$ la tribu engendrée par les parties dénombrables, nous pourrions considérer $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} \vee \mathcal{D}$; elle est contenue dans $\mathcal{O}$. Elle n'est pas non plus dénombrablement séparante (ses atomes sont encore des points), sans quoi $\mathcal{T}'$ le serait. Elle n'admet pas non plus de désintégration λ -presque partout égale à $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$, sans quoi λ admettrait $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$ comme désintégration aussi pour $\mathcal{T}'$; donc les conclusions de (2, 20) sont encore en défaut. Dans l'exemple du tore et du produit, de toute façon, on a une désintégration $\omega \mapsto \lambda_\omega^\mathcal{T}$ où jamais $\lambda_\omega^\mathcal{T}$ n'est égale à $\delta_{(\omega)}$.

(8, 4.3) On peut donner un exemple très important dans la théorie des processus de Markov. Soit Ω l'espace des fonctions numériques sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, réglées et continues à droite, muni de l'une des topologies lusiniennes usuelles[*]. Un point ω est donc une fonction réglée et continue à droite sur $\mathbb{R}^+$, nous appellerons X^t la fonction définie par $X^t(\omega) = \omega(t)$. Introduisons les tribus définies après le corollaire (6, 3): $\mathcal{U}^s$ est la tribu du passé, engendrée par les fonctions X^t , $t \leq s$, et $\mathcal{T}^s = \mathcal{U}^{s+}$. Chaque tribu $\mathcal{U}^s$ est dénombrablement engendrée; mais on peut montrer que $\mathcal{T}^s$ ne l'est plus, ni $\mathcal{Q}$ -dénombrablement séparante. Cela ne me semble pas élémentaire, mais la suite va le montrer. Soit λ une probabilité de Radon sur Ω , définissant un processus de Markov simple, par exemple le mouvement brownien avec départ (à l'instant 0) à l'origine (λ -presque sûrement, $X^0 = 0$). La propriété

[*] Voir Schwartz [1], page 138.

de Markov dit que, si f est une fonction sur Ω , appartenant à la tribu de l'avenir de l'instant s (c'est-à-dire engendrée par les X^t , $t \geq s$), ses espérances conditionnelles par rapport à la tribu de X^s sont aussi des espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{F}^s$. Donc, si nous choisissons une désintégration arbitraire $\omega \mapsto \lambda_\omega^s$ de λ par rapport à $\mathcal{F}^s$, $\omega \mapsto \lambda_\omega^s(f)$ est λ -presque partout égale à une fonction de la tribu de X^s , a fortiori dans $\mathcal{U}^s$. Mais alors ceci est aussi vrai pour f dans la tribu $\mathcal{U}^s$ elle-même. Donc finalement pour toute fonction f de la tribu $\mathcal{O}$ des trajectoires, $\omega \mapsto \lambda_\omega^s(f)$ est λ -presque partout égale à une fonction de la tribu $\mathcal{U}^s$; autrement dit, $\omega \mapsto \lambda_\omega^s$ appartient à $\mathcal{U}^s \vee \mathcal{N}_\lambda$. Elle est donc aussi une désintégration de λ par rapport à $\mathcal{U}^s \vee \mathcal{N}_\lambda$, d'après la proposition (3, 6). (Il est d'ailleurs bien connu que $\mathcal{F}^s \subset (\mathcal{U}^s \vee \mathcal{N}_\lambda)$). Il est moins simple de voir qu'on peut en fait choisir $\omega \mapsto \lambda_\omega^s$ de manière qu'elle appartienne à $\mathcal{U}^s$, et soit donc une désintégration de λ pour $\mathcal{U}^s$. On peut même aller beaucoup plus loin, car, dans le cas des processus de Markov, on dispose d'une expression explicite des désintégrations. On peut trouver une désintégration régulière $(\lambda_\omega^s)_{(s, \omega)}$ de λ par rapport à la famille $(\mathcal{F}^s)_{s \in \mathbb{R}^+}$ (croissante et continue à droite), de manière que, pour tout $s, \omega \mapsto \lambda_\omega^s$ soit dans $\mathcal{U}^s$ et soit donc aussi désintégration de λ pour $\mathcal{U}^s$. Nous admettrons ce résultat.

L'atome de ω dans $\mathcal{U}^s$ est l'ensemble des trajectoires ω' , pour lesquelles $\omega'(t) = \omega(t)$ pour $t \leq s$. En outre, $\mathcal{U}^s$ est exactement l'ensemble des parties boréliennes de Ω qui sont réunion d'atomes de $\mathcal{U}^s$. La proposition (5, 18) dit justement que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , on a $\omega'(t) = \omega(t)$ pour tout $t \leq s$, autrement dit que λ_ω^s est portée par l'atome de ω dans $\mathcal{U}^s$. Par contre, et c'est là le contre-exemple, nous allons voir qu'il n'est pas porté par l'atome de ω dans $\mathcal{F}^s$. Utilisons en effet les notations classiques dans les Markov, avec les probabilités $P^x, [*]$ $x \in \mathbb{R}$; d'ailleurs $(P^x)_{x \in \mathbb{R}}$ est une désintégration de λ par rapport à la tribu de X^0 . On peut alors démontrer la propriété suivante, qui est plus forte que la propriété de Markov forte (et qui peut servir de base à une nouvelle étude des processus de Markov par les désintégrations régulières, étude que nous publierons dans un article ultérieur): pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $\varepsilon > 0$,

(*) Nous prenons les notations de Blumenthal-Gettoor [1].

l'image $X^{s+\varepsilon}(\lambda_\omega^s)$ est $X^\varepsilon(P^{X^s(\omega)})$. Dans le cas du mouvement brownien, cette dernière mesure est gaussienne, donc diffuse. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $\varepsilon > 0$, $X^{s+\varepsilon}$ est λ_ω^s -presque sûrement différent de $X^{s+\varepsilon}(\omega)$. En faisant $\varepsilon = 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$, on voit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour λ_ω^s -presque tout ω' , la trajectoire de ω' diffère de celle de ω en une suite de points, à droite de s et tendant vers s . Or l'atome de ω dans $\mathcal{T}^s$, réunion de ses atomes dans les tribus $\mathcal{U}^{s+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, est justement l'ensemble des trajectoires ω' qui coïncident avec ω jusqu'à un temps (dépendant de ω') $> s$. Et $\mathcal{T}^s$ est l'ensemble des parties boréliennes de Ω qui sont réunion d'atomes de $\mathcal{T}^s$. Donc, pour λ -presque tout ω , pour tout s , l'atome de ω dans $\mathcal{T}^s$ est λ_ω^s -négligeable. C'est l'exemple le plus fort qu'on puisse donner en sens inverse des conclusions de la proposition (2,20); il se rapporte non seulement à une désintégration, mais à une désintégration régulière.

Considérons maintenant la famille de tribus $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, encore croissante et continue à droite. Les atomes de $\overline{\mathcal{T}}^t$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}^t$; si en effet ω_1 et ω_2 appartiennent à un même atome de $\mathcal{T}^t$, et si $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{(\omega_1)} + \delta_{(\omega_2)})$, toute fonction de $\overline{\mathcal{T}}^t$ est dans $\mathcal{T}^t \vee \mathcal{N}_\mu$, donc doit être μ -presque partout égale à une fonction de $\mathcal{T}$, donc en particulier égale en ω_1 et en ω_2 donc prend la même valeur en ces deux points, qui sont donc dans un même atome de $\overline{\mathcal{T}}^t$. Ensuite toute désintégration régulière pour $(\mathcal{T}^t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ l'est aussi pour $(\overline{\mathcal{T}}^t)_{t \in \mathbb{R}^+}$; donc on a les mêmes propriétés qu'antérieurement en remplaçant les $\mathcal{T}^t$ par les $\overline{\mathcal{T}}^t$. Il résulte de ces conclusions que, pour la probabilité markovienne λ du mouvement brownien, $\mathcal{T}^t$ et $\overline{\mathcal{T}}^t$ ne sont pas λ -dénombrablement engendrées ni λ - $\mathcal{Q}$ -dénombrablement séparantes; rappelons cependant qu'elles sont μ -fortes pour toute mesure de Radon μ sur Ω , par les corollaires (6,3) et (3,9 bis).

(8,4.4) Le résultat précédent ne tient pas à la propriété de Markov, mais à une propriété de dispersion des trajectoires, qui peut s'exprimer naïvement ainsi: quand on connaît la trajectoire jusqu'à l'instant s , la loi de probabilité de X^t , $t > s$, est diffuse; en termes précis, pour λ -presque tout ω , pour tout s , pour tout $\varepsilon > 0$, $X^{s+\varepsilon}(\lambda_\omega^s)$ est diffuse; simplement, dans le cas précédent, c'est la propriété de Markov $X^{s+\varepsilon}(\lambda_\omega^s) = X^\varepsilon(P^{X^s(\omega)})$ qui permettait de voir

cette propriété de diffusion. La conclusion est toujours que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , l'atome de ω dans $\mathcal{T}^s$ est λ_ω^s -négligeable. Mais considérons au contraire le processus classique suivant: les T_n , $n \in \mathbb{N}$, sont une suite croissante de variables aléatoires, $T_0 = 0$, $T_n \geq 0$, les $T_{n+1} - T_n$ étant indépendantes et suivant toutes la loi en $e^{-x} dx$. On posera alors $X^t(\omega) = \text{Max}\{n; T_n(\omega) \leq t\}$.

On peut alors réaliser ce système avec le même Ω que précédemment, l'espace des fonctions réglées et continues à droite, et avec une loi λ pour laquelle on a λ -presque sûrement, pour tout t , $X^t(\omega) = \text{Max}\{n; T_n(\omega) \leq t\}$. Les T_n sont alors des temps d'arrêt, et le processus est encore markovien. Mais la loi de probabilité $X^{s+\varepsilon}(\lambda_\omega^s) = X^\varepsilon(P^{X^s(\omega)})$ n'est plus ici diffuse, c'est une loi de Poisson de paramètre ε , translatée de $X^s(\omega)$.

D'après le théorème (7, 7), pour λ -presque tout ω , pour tout s , si $X^s(\omega) = n$, c'est-à-dire si $T_n(\omega) \leq s < T_{n+1}(\omega)$, pour λ_ω^s -presque tout ω' , on a aussi $T_n(\omega') \leq s < T_{n+1}(\omega')$, donc $X^s(\omega') = n = X^s(\omega)$, mais en outre $X^t(\omega') = X^t(\omega)$ pour $t < \text{Inf}(T_{n+1}(\omega), T_{n+1}(\omega'))$, nombre $> s$. Donc, dans ce cas, pour λ -presque tout ω , pour tout s , l'atome de ω dans $\mathcal{T}^s$ porte λ_ω^s .

On peut donc s'attendre à ce que, pour cette loi λ , la tribu $\mathcal{T}^s$ soit λ - Q -dénombrablement séparante. Il est en bien ainsi, et ici encore cela n'a rien à voir avec la nature du processus markovien choisi, mais vient d'un fait beaucoup plus général: λ est concentrée sur l'ensemble Ω' des trajectoires à valeurs entières (ou à valeurs dans n'importe quel sous-espace discret de $\mathbb{R}$). En effet, les tribus $\mathcal{T}^s \cap \Omega'$ et $\mathcal{U}^s \cap \Omega'$ coïncident; car deux trajectoires, à valeurs entières, et continues à droite, qui coïncident jusqu'à l'instant s , coïncident jusqu'à un instant $> s$; donc les atomes de $\mathcal{T}^s \cap \Omega'$ et de $\mathcal{U}^s \cap \Omega'$ coïncident, et comme, pour chacune de ces tribus, un ensemble lui appartient si et seulement s'il est borélien et réunion d'atomes, ces deux tribus coïncident. Or $\mathcal{U}^s$ est dénombrablement engendrée, donc aussi $\mathcal{T}^s \cap \Omega'$, et par suite $\mathcal{T}^s$ est λ -dénombrablement engendrée donc λ - Q -dénombrablement séparante, et le théorème (2, 20) cette fois s'applique. En outre, avec ces seules hypothèses sur λ , c'est-à-dire sans aucune hypothèse markovienne, la proposition (5, 18) dit que, pour λ -presque tout ω , pour tout s , λ_ω^s est portée par l'atome de ω dans $\mathcal{U}^s$, mais aussi par Ω' , donc par l'atome de ω dans $\mathcal{U}^s \cap \Omega' = \mathcal{T}^s \cap \Omega'$, donc par l'atome de ω dans $\mathcal{T}^s$.

Contre-exemple (8,5). Tribus non fortes

Il est dit dans les hypothèses qu'une tribu λ -forte est λ -presque universellement mesurable. Il est donc intéressant de trouver des tribus universellement mesurables ou même boréliennes qui ne sont pas λ -fortes. (8,4.2) nous en donne un exemple immédiat.

Soit $\Omega = \mathbb{T}$ le tore, λ la mesure de Lebesgue du tore, $\mathcal{F}$ la tribu des parties boréliennes symétriques. La tribu (borélienne) $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \vee \mathcal{D}$ engendrée par $\mathcal{F}$ et les parties dénombrables n'est pas λ -forte. En effet, la désintégration de λ par rapport à $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}''$ est $\omega \mapsto \frac{1}{2}(\delta_{(\omega)} + \delta_{(-\omega)}) = \lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$. Mais $\lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$ est afomique; alors $\mathcal{F}''$ est $\lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$ -dénumbrablement engendrée (par les parties $\{\omega\}$ et $\{s\omega\}$) et séparante, donc une désintégration de $\lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$ pour $\mathcal{F}''$ prend obligatoirement (comme il était trivial), pour $\lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$ -presque tout ω' , c'est-à-dire pour $\omega' = \omega$ et $\omega' = s\omega$, la valeur $\delta_{(\omega')}$. Elle n'est alors pas $\lambda_{\omega}^{\mathcal{F}}$ -presque partout égale à $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{\mathcal{F}}$, et $\mathcal{F}''$ n'est pas λ -forte.

Pour l'exemple $\lambda = \mu \otimes \nu$ sur $X \times Y$, également donné à (8,4.2), $\mathcal{F}''$ est au contraire λ -forte. En effet, $(x, y) \mapsto \lambda_{x,y}^{\mathcal{F}} = \delta_{(x)} \otimes \nu$ est une désintégration de λ par rapport à $\mathcal{F}$, donc aussi par rapport à $\mathcal{F}''$; mais alors $(x', y') \mapsto \lambda_{x',y'}^{\mathcal{F}}$ est une désintégration de $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ pour $\mathcal{F}$, donc aussi pour $\mathcal{F}''$ parce que toute partie dénombrable est $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ -négligeable. Mais considérons $\mathcal{F}''' = \mathcal{F} \vee \Delta$, où Δ est formée de toutes les parties boréliennes contenues dans une réunion dénombrable de verticales et supposons aussi μ diffuse. Toute partie élément de Δ est alors λ -négligeable, donc $(x, y) \mapsto \lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ est encore une désintégration de λ pour $\mathcal{F}'''$. Mais maintenant, pour tout (x, y) , $\mathcal{F}'''$ est $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ -dénumbrablement engendrée et séparante, car $\{x\} \times Y$ porte $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ et qu'à sur cette partie, $\mathcal{F}'''$ est toute la tribu borélienne. Donc une désintégration de $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ pour $\mathcal{F}'''$ est, sur $\{x\} \times Y$, $(x, y) \mapsto \delta_{(x,y')}$, et elle n'est pas $\lambda_{x,y}^{\mathcal{F}}$ -presque partout égale à $(x, y') \mapsto \lambda_{x,y'}^{\mathcal{F}}$, donc $\mathcal{F}'''$ n'est pas λ -forte. On peut voir les choses autrement, en utilisant la proposition (3,10). Dans le cas du tore, il est faux que $\frac{1}{2}(\delta_{(\omega)} + \delta_{(s\omega)})$ donne à tout $A \in \mathcal{F}''$ la mesure 0 ou 1, puisque $\{\omega\}$ et $\{s\omega\}$ ont la mesure $\frac{1}{2}$; dans le cas du produit $X \times Y$, il est faux que $\delta_{(x)} \otimes \nu$ donne à tout $A \in \mathcal{F}'''$ la mesure 0 ou 1, puisque tout borélien de $\{x\} \times Y$ est dans $\mathcal{F}'''$ et que ν est diffuse. Donc, dans ces deux cas, la tribu n'est pas λ -forte.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Tribus.

Tribu: page 6; atome d'une tribu: page 6; images directe et réciproque $f(\mathcal{Y}), f^{-1}(\mathcal{Z})$: page 6; fonction appartenant à une tribu: page 6; application $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable: page 6; tribu engendrée et symbole $\vee$: page 7; tribu dénombrablement engendrée, séparante: page 7; Q -dénombrablement séparante: page 7; intersection avec une partie et notation $Y' \cap \mathcal{Y}$: page 8.

Mesures. Mesure: page 7; mesure σ -finie: page 7; application $(\nu, \mathcal{Z})$ -mesurable ou ν -mesurable: page 7; tribu complétée et notation $\hat{\mathcal{Y}}_\nu$: page 7; application ν -presque $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ -mesurable: page 7; tribus ν -presque égales: page 8; Tribu ν -dénombrablement engendrée ou séparante: pages 7 et 52; tribu ν -presque borélienne, ν -presque universellement mesurable: page 58. Fonction universellement presque borélienne, universellement mesurable: page 18. Notation $\bar{\mathcal{F}}$: page 58.

Ensembles déterminants.

Ensemble déterminant, notation $\mathcal{B}$: page 14; $\mathcal{B}$ -mesure: page 14; ensemble J -déterminant: page 14; espace $M_{\mathcal{B}}$: page 14.

Fonction à valeurs mesures appartenant à une tribu: page 15.

Intégrale de mesures, notation $\int_X^* \lambda_x d\mu(x)$: page 16.

Espérance conditionnelle, notation $f^{\mathcal{F}}$: page 27. Cas d'une fonction à valeurs mesures: page 29.

Desintégration d'une mesure: page 35. Notation $\lambda_\omega^{\mathcal{F}}$: page 35.

Désintégrations cohérentes: page 50.

Tribu λ -plus forte qu'une autre; page 56, tribu λ -forte: page 58.

Surmartingales. Famille de tribus $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$, l'ensemble R : page 67. Surmartingale à valeurs scalaires: page 68; surmartingale régulière: page 68; surmartingale à valeurs mesures: page 72; la suite d'approximation, notations $\mathcal{R}$ et R_n : page 68; notation t_n : page 69; surmartingales équivalentes: page 68; modification d'une surmartingale: page 68; J -surmartingale: page 73; sur-

martingale à valeurs mesures régulière: page 75; notation $\mathcal{K}$: page 81; $\mathcal{K}$ -surmartingale: page 81; surmartingale $\mathcal{K}$ -régulière: page 81; surmartingale $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulière: page 81.

Hypothèse J -dénombrable: page 82; hypothèse J -compacte: page 82. Surmartingale régulière à gauche: pages 87, 93.

Système de limites à gauche d'une surmartingale régulière, notation v_{ω}^{t-} : page 88. Limites à l'infini: page 93; potentiel: page 98.

Désintégration régulière: page 101. Notation $\lambda_{\omega}^t, \lambda_{\omega}^{t-}$: page 101. Famille auto-désintégrant: page 136.

Temps d'arrêt.

Temps d'arrêt: page 139, notation $\mathcal{T}^T$: page 139.

Contre-exemple $\tilde{X}, X^+, X^-$: pages 146 et suivantes.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

R. M. Blumenthal et R. K. Gettoor [1], Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York and London, 1968.

Nicolas Bourbaki [1], Intégration, chapitre IX, Paris, Hermann, 1969.

M. Jirina [1]. *Czech. Math. J.*, tome 9 No. 3, 1959, p. 445.

Dorothy Maharam [1], On a theorem of von Neumann, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9, 1958, 987-994.

Paul-André Meyer [1], Probabilités et Potentiels, Paris, Hermann, 1966.

Laurent Schwartz [1], Radon measures on arbitrary topological spaces, à paraître au Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Inde.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
DÉFINITIONS DIVERSES	6
Lemme A	9
Lemme B	10
Lemme C	11
Lemme D	12
Définition E	14
Lemme F	14
Proposition G	51

§1. INTÉGRATION DES MESURES	15
(1,7) Cas des mesures de Radon	19
Théorème (1,9)	21
Transformations usuelles	22
(1,12) Intégrales superposées	23
§2. ESPÉRANCES CONDITIONNELLES D'UNE FONCTION À VALEURS MESURES ET DÉSINTÉGRATION D'UNE MESURE	27
Théorème (2,7) (Unicité)	31
Théorème (2,8) (Existence)	32
(2,10) Désintégration des mesures	35
Relations entre espérances conditionnelles et désintégration des mesures	46
§3. TRANSITIVITÉ DES DÉSINTÉGRATIONS DE MESURES	48
Cas des sous-tribus de la tribu borélienne et d'une mesure de Radon ..	54
(3,13) page 62 : Intégrale de mesures ayant la même désintégration	
§4. SURMARTINGALES À VALEURS MESURES	67
Théorème (4,3) des surmartingales	69
(4,4) Surmartingales à valeurs mesures	72
(4,6) Surmartingale à valeurs mesures régulière	75
(4,10 quarto) Unicité des modifications régulières	80
(4,11) Surmartingales $\mathcal{K}$ -régulières, $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ -régulières	81
(4,16) Existence de modifications régulières	84
(4,19) Etude des limites à gauche	88
(4,21 bis) Unicité des limites à gauche	91
(4,22) Existence des limites à gauche	92
(4,23) Limites d'une surmartingale régulière à l'infini	93
(4,24) Décompositions de Riesz	94
§5. DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES ET SURMARTINGALES	100
(5,8) Applications des désintégrations régulières aux surmartingales ..	107
§6. DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES ET TRANSITIVITÉ	127
(6,13) page 136 : Famille auto-désintégrantes	
§7. TEMPS D'ARRÊT	138

§8. CONTRE-EXEMPLES DIVERS 144

Contre-exemple (8,0). Tribus non dénombrablement engendrées ou
séparantes 144

Contre-exemple (8,1). Une intégrale de mesures de Radon n'est pas
nécessairement de Radon 145

Contre-exemple (8,2). Cas de non-unicité de la désintégration d'une
mesure 146

Contre-exemple (8,3). Cas de non-existence de la désintégration 155

Contre-exemple (8,4) au théorème (2,20) 158

Contre-exemple (8,5). Tribus non fortes 158

INDEX TERMINOLOGIQUE 165

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 166

CENTRE DE MATHÉMATIQUES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
PARIS, FRANCE

(Reçu le 2 janvier 1971)

Prop. (5,4), page 103, des. 109. pour la top-étroite.