BERNARD MAUREY
ALBERT NAHOUM
LAURENT SCHWARTZ

Étude du transformé d'un processus par une surmartingale régulière de mesures

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 274 (1972), p. A1365-A1368.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 1365-1368 (3 mai 1972) Série A

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Étude du transformé d'un processus par une surmartingale régulière de mesures.* Note (*) de MM. **Bernard Maurey, Albert Nahoum** et **Laurent Schwartz**, transmise par M. Henri Cartan.

On étudie les propriétés de régularité des trajectoires $t \to \nu^t_\omega(f^t)$, où $(\nu^t_\omega)_{(t,\omega)\in\mathbf{R}\times\Omega}$ est une surmartinguale régulière de mesures (théorèmes 2, 3, 4 et 5). Comme application, on obtient des propriétés nouvelles de la projection bien mesurable ou prévisible [1] d'un processus (remarque finale). A l'occasion de ce travail, on a mis en évidence un nouveau théorème sur la limite d'une suite de surmartingales p. s. continues à gauche (théorème 1).

A. Préliminaires. — Soient $(\Omega, \mathcal{O}_\lambda, \lambda)$ un espace mesuré σ-fini, $(\mathcal{F}^t)_{t\in\mathbf{R}}$ une famille croissante et continue à droite de sous-tribus de la tribu $\hat{\mathcal{O}}_\lambda$. On suppose que λ est σ-finie sur chaque tribu $\mathcal{F}^t$, et que les $\mathcal{F}^t$ contiennent les parties λ-négligeables.

Théorème 1. — *Soit* (M^t_n) *une suite décroissante de surmartingales positives* λ *p. s. continues à gauche sur* $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$. *La limite* (M^t) *est une surmartingale* λ *p. s. continue à gauche.*

Démonstration. — On peut tout d'abord supposer λ finie. D'autre part, il suffit de montrer que pour tout entier k, $\inf\{\mathrm{M}^t, k\}$ est λ p. s. continue à gauche. On peut donc supposer les (M^t_n) bornées par k. Naturellement, (M^t) est un processus prévisible. On sait [2] que pour que (M^t) soit λ p. s. continue à gauche, il suffit que pour toute suite de temps d'arrêt prévisibles (T_m) tendant en croissant vers $\mathrm{T} < +\infty$, on ait

$$\int \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\, d\lambda = \lim_m \int \mathrm{M}^{\mathrm{T}_m}\, d\lambda.$$

Or

$$\int \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\, d\lambda = \lim_n \int \mathrm{M}^{\mathrm{T}}_n\, d\lambda = \lim_n \lim_m \int \mathrm{M}^{\mathrm{T}_m}_n\, d\lambda = \lim_m \lim_n \int \mathrm{M}^{\mathrm{T}_m}_n\, d\lambda = \lim_m \int \mathrm{M}^{\mathrm{T}_m}\, d\lambda.$$

(L'interversion des limites est justifiée car la suite double est décroissante par rapport à chaque indice : pour l'indice m, en vertu du théorème d'arrêt, qui s'applique aux temps d'arrêt prévisibles pour une surmartingale λ p. s. continue à gauche.)

Nous utiliserons le résultat classique suivant :

Lemme 1. — *Soit* (M^t_n) *une suite de surmartingales sur* $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$, *positives et* λ *p. s. continues à droite ou à gauche ou plus généralement séparables. On suppose que* λ *p. s.,* $\forall\, t$, $\mathrm{M}^t = \lim_m \mathrm{M}^t_n$. *Le processus* (M^t) *est une surmartingale* λ *p. s. réglée.*

Nous ferons dans la suite les hypothèses suivantes :

(SR) Soient $(\mathrm{Y}, \mathcal{Y}, \mathrm{J})$ un espace mesuré σ-fini, et $(\nu^t_\omega)_{(t,\omega)\in\mathbf{R}\times\Omega}$ une J-surmartingale régulière de mesures sur $(\mathrm{Y}, \mathcal{Y})$, c'est-à-dire une famille de mesures $\geqq 0$ sur $(Y, \mathcal{Y})$, d'intégrale $\int \nu_\omega^t \, d\lambda(\omega) = J^t \leqq J$, telle que pour toute $f \geqq 0$ sur Y, J-mesurable, $\nu_\omega^t(f)$ soit une surmartingale λ p. s. continue à droite sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$ (4).

(P) Soit $(f^t)_{t \in \mathbf{R}}$ un processus sur $(Y, \mathcal{Y})$, c'est-à-dire une famille de fonctions sur Y, telle que $(t, y) \to f^t(y)$ soit $\mathcal{B} \otimes \hat{\mathcal{Y}}_J$-mesurable ($\mathcal{B}$ désignant la tribu borélienne sur $\mathbf{R}$), à valeurs réelles ou à valeurs dans un Banach séparable E. On suppose qu'il existe une fonction ρ sur Y, J-intégrable, telle que pour tout t, $\|f^t\| \leqq \rho$.

(LG) Il existe une famille $(\nu_\omega^{t-})_{(t,\omega) \in \mathbf{R} \times \Omega}$ de mesures $\geqq 0$ sur $(Y, \mathcal{Y})$ telle que pour toute $f \geqq 0$ sur Y, J-intégrable $(\nu_\omega^{t-}(f))_{(t,\omega)}$ soit le système des limites à gauche de la surmartingale $(\nu_\omega^t(f))_{(t,\omega)}$.

[Pour l'existence de telles (ν_ω^t) ou (ν_ω^{t-}), *voir* (4).]

B. Résultats.

Théorème 2. — *Sous l'hypothèse* (SR), *si* (f^t) *est un processus réel vérifiant* (P), *on a* λ *p. s.*, $\forall\, t$, $\nu_\omega^t\left(\liminf_{s \searrow t} f^s\right) \leqq \liminf_{s \searrow t} \nu_\omega^s(f^s)$. *En particulier, si les trajectoires de* (f^t) *sont s. c. i.*, λ *p. s.* $t \to \nu_\omega^t(f^t)$ *est sci. De plus, sous l'hypothèse supplémentaire* (LG) :

$$\lambda \text{ p. s.}, \quad \forall\, t, \quad \nu_\omega^t\left(\liminf_{s \nearrow t} f^s\right) \leqq \liminf_{s \nearrow t} \nu_\omega^{s-}(f^s).$$

(Évidemment les mêmes résultats sont vrais avec lim sup, en remplaçant $\leqq$ par $\geqq$.)

Démonstration. — *a.* Supposons (f^t) positif à trajectoires continues. Posons pour $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n^k = [k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}[;$$
$$\forall\, t \in I_n^k, \quad M_n^t = \sup\{f^t;\, t \in I_n^k\}; \qquad m_n^t = \inf\{f^t; \quad t \in I_n^k\}.$$

D'après (SR), les processus $(\nu_\omega^t(M_n^t))$ et $(\nu_\omega^t(m_n^t))$ sont λ p. s. continus à droite, donc aussi $(\nu_\omega^t(f^t))$ puisque

$$\nu_\omega^t(f^t) = \lim_n \nearrow \nu_\omega^t(m_n^t) = \lim_n \searrow \nu_\omega^t(M_n^t).$$

b. Si (f^t) est positif à trajectoires décroissantes, on vérifie immédiatement que $\nu_\omega^t(f^t)$ est une surmartingale sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$.

c. Supposons maintenant (f^t) positif à trajectoires décroissantes et continues à droite. Soit φ continue, à support dans $[-1, 0]$, positive, avec $\int \varphi(t)\, dt = 1$. Soient $\varphi_0 = \varphi$, et $\varphi_{n+1}(t) = 2\,\varphi_n(2\,t)$.

Posons $f_n^t = \varphi_n \star f^t$. Chaque processus (f_n^t) est à trajectoires continues et décroissantes. D'après (a) et (b), $\nu_\omega^t(f_n^t)$ est une surmartingale λ p. s. continue à droite. Par ailleurs, on voit que $(\nu_\omega^t(f^t))$ est la limite croissante des $(\nu_\omega^t(f_n^t))$, donc est elle-même λ p. s. continue à droite (3).

d. Si (f^t) est positif à trajectoires décroissantes et continues à gauche, on voit par une régularisation analogue que $(\nu^t_\omega(f^t))$ est la limite décroissante d'une suite de surmartingales λ p. s. continues à droite, donc est λ p. s. réglée d'après le lemme 1.

e. Soit maintenant (f^t) un processus positif à trajectoires décroissantes. Soient t_0 fixé, et $s > t_0$. On a

$$\nu^s_\omega(f^{t_0+}) \geqq \nu^s_\omega(f^{s-}) \geqq \nu^s_\omega(f^s) \geqq \nu^s_\omega(f^{s+}).$$

On en déduit d'après (c) et (SR) :

$$\lambda \text{ p. s.,} \quad \nu^{t_0}_\omega(f^{t_0+}) = \lim_{s \searrow t_0} \nu^s_\omega(f^{s-}) = \lim_{s \searrow t_0} \nu^s_\omega(f^s) = \lim_{s \searrow t_0} \nu^s_\omega(f^{s+}).$$

Le presque sûr introduit ci-dessus dépend de t_0. L'égalité n'est donc *a priori* réalisée que λ p. s. pour tout t_0 rationnel. Mais la première, la deuxième et la quatrième quantités dans l'égalité sont λ p. s. continues en t_0 à droite d'après (c) et (d) et la troisième est comprise entre la deuxième et la quatrième, de sorte que l'on obtient bien l'égalité ci-dessous λ p. s., pour tout t_0 réel.

f. Si (f^t) est à trajectoires croissantes, on se ramène au cas précédent en étudiant $(\rho - f^t)$.

g. Dans le cas général notons $d_n(t)$ le dyadique $k.2^{-n}$ tel que $(k-1).2^{-n} \leqq t < k.2^{-n}$. Posons

$$\mathrm{I}^t_n = [t, d_n(t)[, \; u^t_n = \inf\{f^s ; s \in \mathrm{I}^t_n\}.$$

On voit facilement que l'ensemble $\{y \mid u^t_n(y) < \alpha\}$ est $\hat{\mathcal{Y}}_{\mathrm{J}}$-analytique donc appartient à $\hat{\mathcal{Y}}_{\mathrm{J}}$. Le processus (u^t_n) est à trajectoires croissantes sur chaque intervalle $\mathrm{I}^{(k-1)2^{-n}}_n$, $k \in \mathbf{Z}$, donc, d'après (f) :

$$\lambda \text{ p. s.,} \quad \forall\, t, \quad \nu^t_\omega(u^{t+}_n) = \lim_{s \searrow t} \nu^s_\omega(u^s_n) \leqq \liminf_{s \searrow t} \nu^s_\omega(f^s).$$

On conclut en notant que

$$\liminf_{s \searrow t} f^s = \lim_n u^{t+}_n.$$

h. Le résultat annoncé sous l'hypothèse (LG) se démontre en modifiant convenablement chaque étape de la démonstration précédente.

On démontre, mutatis mutandis, compte tenu du théorème 1 :

Théorème 3. — *Sous les hypothèses* (SR) *et* (LG), *si* (f^t) *est un processus réel vérifiant* (P), *on a*

$$\lambda \text{ p. s.,} \quad \forall\, t, \quad \nu^{t-}_\omega\Big(\liminf_{s \nearrow t} f^s\Big) \leqq \mathrm{Min}\Big\{\liminf_{s \nearrow t} \nu^s_\omega(f^s), \liminf_{s \nearrow t} \nu^{s-}_\omega(f^s)\Big\}.$$

(Même résultat avec lim sup, en remplaçant $\leqq$ par $\geqq$ et Min par Max.)

Théorème 4. — *On se place sous les hypothèses* (SR), (LG) *et* (P). *On suppose que les trajectoires de* (f^t) *sont réglées à droite* (*resp. à gauche*).

Pour λ presque tout ω, $t \to \nu_\omega^t(f^t)$ et $t \mapsto \nu_\omega^{t-}(f^t)$ sont réglées à droite (resp. : à gauche) de limite à droite (resp. à gauche) $\nu_\omega^t(f^{t+})$ [resp. $\nu_\omega^{t-}(f^{t-})$].

Démonstration. — Le cas scalaire résulte immédiatement des théorèmes 2 et 3.

Dans le cas banachique nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient $u_n : \mathbf{R} \to \mathrm{E}$, $v_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, toutes réglées à droite. On suppose que pour tout n, $\| u_n \| \leqq v_n$, et que $\sum v_n$ est finie, réglée à droite avec $\left(\sum v_n\right)^+ = \sum v_n^+$. La fonction $\sum u_n$ est alors réglée à droite, et $\left(\sum u_n\right)^+ = \sum u_n^+$.*

Soient alors (U_n) un recouvrement ouvert localement fini de E par des ouverts de diamètre $\leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ donné, (φ_n) une partition de l'unité subordonnée à (U_n), et $e_n \in \mathrm{U}_n$. Posons $g^t = f^t/\rho$, et

$$h^t(y) = \sum [\varphi_n \circ g^t(y)]\, \rho(y)\, e_n.$$

En appliquant le lemme 2, avec $v_n(t) = (1 + \varepsilon)\, \nu_\omega^t[(\varphi_n \circ g^t)\, \rho]$, on montre que $\nu_\omega^t(h^t)$ est réglée à droite λ p. s., de limite à droite $\nu^t(h^{t+})$. On conclut facilement, en notant que

$$\| f^t(y) - h^t(y) \| \leqq \varepsilon\, \rho(y), \qquad \text{donc aussi} \quad \| f^{t+}(y) - h^{t+}(y) \| \leqq \varepsilon\, \rho(y).$$

La démonstration dans le cas réglé à gauche est identique.

Comme cas particulier du théorème 4, on a :

THÉORÈME 5. — *On se place sous les hypothèses* (SR), (LG) *et* (P). *On suppose que les trajectoires de (f^t) sont réglées et continues à droite. Pour λ presque tout ω, $t \mapsto \nu_\omega^t(f^t)$ est réglée et continue à droite, et admet comme système de limites à gauche : $t \mapsto \nu_\omega^{t-}(f^{t-})$.*

Remarque. — Supposons que $(\mathrm{Y}, \mathcal{Y}) = (\Omega, \mathcal{O})$, et que (ν_ω^t) soit une désintégration régulière [4] de λ sur les tribus $(\mathcal{F}^t)$. Si (f^t) est un processus sur $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, non nécessairement adapté, $(\nu_\omega^t(f^t))$ et $(\nu_\omega^{t-}(f^t))$ sont respectivement les projections bien mesurable et prévisible du processus [1]. Chacun des théorèmes 2, 3, 4 ou 5 traduit dans ce cas une propriété de ces projections.

(*) Séance du 17 avril 1972.

[1] DELLACHERIE, *Thèse*, Strasbourg, 1970.

[2] MERTENS, *Z. für W.*, Heft 1, 1972.

[3] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris.

[4] L. SCHWARTZ, *Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure* (à paraître au *Journal d'Analyse* de Jérusalem).

[5] *Séminaire de Probabilités II*, Strasbourg (*Lectures Notes* n° 51, Springer-Verlag).

Centre de Mathématiques
de l'École
Polytechnique,
17, rue Descartes,
75-Paris, 5e.

185837. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France