

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

BERNARD MAUREY

ALBERT NAHOUM

LAURENT SCHWARTZ

**Étude du transformé d'un processus par une surmartingale
régulière de mesures**

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 274 (1972), p. A1365-A1368.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL DES PROBABILITÉS. — Étude du transformé d'un processus par une surmartingale régulière de mesures. Note (*) de MM. **BERNARD MAUREY, ALBERT NAHOUM et LAURENT SCHWARTZ**, transmise par M. Henri Cartan.

On étudie les propriétés de régularité des trajectoires $t \rightarrow v_{\omega}^t(f')$, où $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega}$ est une surmartingale régulière de mesures (théorèmes 2, 3, 4 et 5). Comme application, on obtient des propriétés nouvelles de la projection bien mesurable ou prévisible ⁽¹⁾ d'un processus (remarque finale). A l'occasion de ce travail, on a mis en évidence un nouveau théorème sur la limite d'une suite de surmartingales p. s. continues à gauche (théorème 1).

A. PRÉLIMINAIRES. — Soient $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$ un espace mesuré σ -fini, $(\mathcal{F}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille croissante et continue à droite de sous-tribus de la tribu $\hat{\mathcal{O}}_{\lambda}$. On suppose que λ est σ -finie sur chaque tribu \mathcal{F}^t , et que les \mathcal{F}^t contiennent les parties λ -négligeables.

THÉORÈME 1. — Soit (M'_n) une suite décroissante de surmartingales positives λ p. s. continues à gauche sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$. La limite (M') est une surmartingale λ p. s. continue à gauche.

Démonstration. — On peut tout d'abord supposer λ finie. D'autre part, il suffit de montrer que pour tout entier k , $\inf \{ M', k \}$ est λ p. s. continue à gauche. On peut donc supposer les (M'_n) bornées par k . Naturellement, (M') est un processus prévisible. On sait ⁽²⁾ que pour que (M') soit λ p. s. continue à gauche, il suffit que pour toute suite de temps d'arrêt prévisibles (T_m) tendant en croissant vers $T < +\infty$, on ait

$$\int M^T d\lambda = \lim_m \int M^{T_m} d\lambda.$$

Or

$$\int M^T d\lambda = \lim_n \int M_n^T d\lambda = \lim_n \lim_m \int M_n^{T_m} d\lambda = \lim_m \lim_n \int M_n^{T_m} d\lambda = \lim_m \int M^{T_m} d\lambda.$$

(L'interversion des limites est justifiée car la suite double est décroissante par rapport à chaque indice : pour l'indice m , en vertu du théorème d'arrêt, qui s'applique aux temps d'arrêt prévisibles pour une surmartingale λ p. s. continue à gauche.)

Nous utiliserons le résultat classique suivant :

LEMME 1. — Soit (M'_n) une suite de surmartingales sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$, positives et λ p. s. continues à droite ou à gauche ou plus généralement séparables. On suppose que λ p. s., $\forall t$, $M^t = \lim_m M'_n$. Le processus (M') est une surmartingale λ p. s. réglée.

Nous ferons dans la suite les hypothèses suivantes :

(SR) Soient (Y, \mathcal{Y}, J) un espace mesuré σ -fini, et $(v_{\omega}^t)_{(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega}$ une J -surmartingale régulière de mesures sur (Y, \mathcal{Y}) , c'est-à-dire une famille

de mesures ≥ 0 sur (Y, \mathcal{Y}) , d'intégrale $\int v'_\omega d\lambda(\omega) = J^t \leq J$, telle que pour toute $f \geq 0$ sur Y , J -mesurable, $v'_\omega(f)$ soit une surmartingale λ p. s. continue à droite sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$ ⁽⁴⁾.

(P) Soit $(f^t)_{t \in \mathbf{R}}$ un processus sur (Y, \mathcal{Y}) , c'est-à-dire une famille de fonctions sur Y , telle que $(t, y) \rightarrow f^t(y)$ soit $\mathcal{B} \otimes \hat{\mathcal{Y}}$ -mesurable (\mathcal{B} désignant la tribu borélienne sur \mathbf{R}), à valeurs réelles ou à valeurs dans un Banach séparable E . On suppose qu'il existe une fonction ρ sur Y , J -intégrable, telle que pour tout t , $\|f^t\| \leq \rho$.

(LG) Il existe une famille $(v_{\omega}^{t-})_{(t, \omega) \in \mathbf{R} \times \Omega}$ de mesures ≥ 0 sur (Y, \mathcal{Y}) telle que pour toute $f \geq 0$ sur Y , J -intégrable $(v_{\omega}^{t-}(f))_{(t, \omega)}$ soit le système des limites à gauche de la surmartingale $(v_{\omega}^t(f))_{(t, \omega)}$.

[Pour l'existence de telles (v_{ω}^t) ou (v_{ω}^{t-}) , voir ⁽⁴⁾.]

B. RÉSULTATS.

THÉORÈME 2. — Sous l'hypothèse (SR), si (f^t) est un processus réel vérifiant (P), on a λ p. s., $\forall t$, $v_{\omega}^t(\liminf_{s \searrow t} f^s) \leq \liminf_{s \searrow t} v_{\omega}^s(f^s)$. En particulier, si les trajectoires de (f^t) sont s. c. i., λ p. s. $t \rightarrow v_{\omega}^t(f^t)$ est sci. De plus, sous l'hypothèse supplémentaire (LG) :

$$\lambda \text{ p. s.}, \quad \forall t, \quad v_{\omega}^t(\liminf_{s \searrow t} f^s) \leq \liminf_{s \searrow t} v_{\omega}^{s-}(f^s).$$

(Évidemment les mêmes résultats sont vrais avec \limsup , en remplaçant \leq par \geq .)

Démonstration. — a. Supposons (f^t) positif à trajectoires continues. Posons pour $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n^k = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]; \\ \forall t \in I_n^k, \quad M_n^k = \sup \{ f^t; t \in I_n^k \}; \quad m_n^k = \inf \{ f^t; t \in I_n^k \}.$$

D'après (SR), les processus $(v_{\omega}^t(M_n^k))$ et $(v_{\omega}^t(m_n^k))$ sont λ p. s. continus à droite, donc aussi $(v_{\omega}^t(f^t))$ puisque

$$v_{\omega}^t(f^t) = \lim_n \nearrow v_{\omega}^t(m_n^k) = \lim_n \searrow v_{\omega}^t(M_n^k).$$

b. Si (f^t) est positif à trajectoires décroissantes, on vérifie immédiatement que $v_{\omega}^t(f^t)$ est une surmartingale sur $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}^t), \lambda)$.

c. Supposons maintenant (f^t) positif à trajectoires décroissantes et continues à droite. Soit φ continue, à support dans $[-1, 0]$, positive, avec $\int \varphi(t) dt = 1$. Soient $\varphi_0 = \varphi$, et $\varphi_{n+1}(t) = 2 \varphi_n(2t)$.

Posons $f_n^t = \varphi_n \star f^t$. Chaque processus (f_n^t) est à trajectoires continues et décroissantes. D'après (a) et (b), $v_{\omega}^t(f_n^t)$ est une surmartingale λ p. s. continue à droite. Par ailleurs, on voit que $(v_{\omega}^t(f^t))$ est la limite croissante des $(v_{\omega}^t(f_n^t))$, donc est elle-même λ p. s. continue à droite ⁽³⁾.

d. Si (f^t) est positif à trajectoires décroissantes et continues à gauche, on voit par une régularisation analogue que $(\nu_\omega^t(f^t))$ est la limite décroissante d'une suite de surmartingales λ p. s. continues à droite, donc est λ p. s. réglée d'après le lemme 1.

e. Soit maintenant (f^t) un processus positif à trajectoires décroissantes. Soient t_0 fixé, et $s > t_0$. On a

$$\nu_\omega^s(f^{t_0+}) \geq \nu_\omega^s(f^{s-}) \geq \nu_\omega^s(f^t) \geq \nu_\omega^s(f^{s+}).$$

On en déduit d'après (c) et (SR) :

$$\lambda \text{ p. s.}, \quad \nu_\omega^s(f^{t_0+}) = \lim_{s \searrow t_0} \nu_\omega^s(f^{s-}) = \lim_{s \searrow t_0} \nu_\omega^s(f^s) = \lim_{s \searrow t_0} \nu_\omega^s(f^{s+}).$$

Le presque sûr introduit ci-dessus dépend de t_0 . L'égalité n'est donc *a priori* réalisée que λ p. s. pour tout t_0 rationnel. Mais la première, la deuxième et la quatrième quantités dans l'égalité sont λ p. s. continues en t_0 à droite d'après (c) et (d) et la troisième est comprise entre la deuxième et la quatrième, de sorte que l'on obtient bien l'égalité ci-dessous λ p. s., pour tout t_0 réel.

f. Si (f^t) est à trajectoires croissantes, on se ramène au cas précédent en étudiant $(\varphi - f^t)$.

g. Dans le cas général notons $d_n(t)$ le dyadique $k.2^{-n}$ tel que $(k-1).2^{-n} \leq t < k.2^{-n}$. Posons

$$I_n^t = [t, d_n(t)[, u_n^t = \inf \{ f^s; s \in I_n^t \}.$$

On voit facilement que l'ensemble $\{ y \mid u_n^t(y) < \alpha \}$ est $\hat{\mathcal{Y}}_J$ -analytique donc appartient à $\hat{\mathcal{Y}}_J$. Le processus (u_n^t) est à trajectoires croissantes sur chaque intervalle $I_n^{(k-1)2^{-n}}$, $k \in \mathbf{Z}$, donc, d'après (f) :

$$\lambda \text{ p. s.}, \quad \forall t, \quad \nu_\omega^t(u_n^{t+}) = \lim_{s \searrow t} \nu_\omega^s(u_n^s) \leq \liminf_{s \searrow t} \nu_\omega^s(f^s).$$

On conclut en notant que

$$\liminf_{s \searrow t} f^s = \lim_n u_n^{t+}.$$

h. Le résultat annoncé sous l'hypothèse (LG) se démontre en modifiant convenablement chaque étape de la démonstration précédente.

On démontre, mutatis mutandis, compte tenu du théorème 1 :

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses (SR) et (LG), si (f^t) est un processus réel vérifiant (P), on a*

$$\lambda \text{ p. s.}, \quad \forall t, \quad \nu_\omega^t(\liminf_{s \nearrow t} f^s) \leq \text{Min} \{ \liminf_{s \nearrow t} \nu_\omega^s(f^s), \liminf_{s \nearrow t} \nu_\omega^{s-}(f^s) \}.$$

(Même résultat avec $\lim \sup$, en remplaçant \leq par \geq et Min par Max .)

THÉORÈME 4. — *On se place sous les hypothèses (SR), (LG) et (P). On suppose que les trajectoires de (f^t) sont réglées à droite (resp. à gauche).*

Pour λ presque tout ω , $t \mapsto v_\omega^t(f^t)$ et $t \mapsto v_\omega^{t-}(f^t)$ sont réglées à droite (resp. : à gauche) de limite à droite (resp. à gauche) $v_\omega^t(f^{t+})$ [resp. $v_\omega^{t-}(f^{t-})$].

Démonstration. — Le cas scalaire résulte immédiatement des théorèmes 2 et 3.

Dans le cas banachique nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2. — Soient $u_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{E}$, $v_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, toutes réglées à droite. On suppose que pour tout n , $\|u_n\| \leq v_n$, et que $\sum v_n$ est finie, réglée à droite avec $(\sum v_n)^+ = \sum v_n^+$. La fonction $\sum u_n$ est alors réglée à droite, et $(\sum u_n)^+ = \sum u_n^+$.

Soient alors (U_n) un recouvrement ouvert localement fini de \mathbf{E} par des ouverts de diamètre $\leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ donné, (φ_n) une partition de l'unité subordonnée à (U_n) , et $e_n \in U_n$. Posons $g^t = f^t/\rho$, et

$$h^t(y) = \sum [\varphi_n \circ g^t(y)] \rho(y) e_n.$$

En appliquant le lemme 2, avec $v_n(t) = (1 + \varepsilon) v_\omega^t[(\varphi_n \circ g^t) \rho]$, on montre que $v_\omega^t(h^t)$ est réglée à droite λ p. s., de limite à droite $v^t(h^{t+})$. On conclut facilement, en notant que

$$\|f^t(y) - h^t(y)\| \leq \varepsilon \rho(y), \quad \text{donc aussi} \quad \|f^{t+}(y) - h^{t+}(y)\| \leq \varepsilon \rho(y).$$

La démonstration dans le cas réglé à gauche est identique.

Comme cas particulier du théorème 4, on a :

THÉORÈME 5. — On se place sous les hypothèses (SR), (LG) et (P). On suppose que les trajectoires de (f^t) sont réglées et continues à droite. Pour λ presque tout ω , $t \mapsto v_\omega^t(f^t)$ est réglée et continue à droite, et admet comme système de limites à gauche : $t \mapsto v_\omega^{t-}(f^{t-})$.

Remarque. — Supposons que $(Y, \mathcal{Y}) = (\Omega, \mathcal{O})$, et que (v_ω^t) soit une désintégration régulière ⁽⁴⁾ de λ sur les tribus (\mathcal{F}^t) . Si (f^t) est un processus sur $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, non nécessairement adapté, $(v_\omega^t(f^t))$ et $(v_\omega^{t-}(f^{t-}))$ sont respectivement les projections bien mesurable et prévisible du processus ⁽⁴⁾. Chacun des théorèmes 2, 3, 4 ou 5 traduit dans ce cas une propriété de ces projections.

(*) Séance du 17 avril 1972.

⁽¹⁾ DELLACHERIE, *Thèse*, Strasbourg, 1970.

⁽²⁾ MERTENS, *Z. für W.*, Heft 1, 1972.

⁽³⁾ P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris.

⁽⁴⁾ L. SCHWARTZ, *Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure* (à paraître au *Journal d'Analyse* de Jérusalem).

⁽⁵⁾ *Séminaire de Probabilités II*, Strasbourg (Lectures Notes n° 51, Springer-Verlag).