Laurent Schwartz

Probabilités cylindriques et applications radonifiantes

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 18 (1971), p. 139-286.

Probabilités cylindriques et applications radonifiantes

Par Laurent SCHWARTZ

Cet article est amicalement dédié au Professeur Kôsaku YOSIDA.

La présente théorie peut être indifféremment présentée sous forme linéaire ou non linéaire. La forme non linéaire, où il s'agit d'espaces topologiques quelconques, paraît plus générale que la forme linéaire, où on se restreint aux espaces vectoriels topologiques. Mais tout espace topologique séparé peut être plongé dans l'espace de ses probabilités de Radon, muni de la topologie de la convergence étroite (1), de sorte que le cas non linéaire est aussi un cas particulier du cas linéaire. Nous traiterons ici le cas linéaire, qui a l'avantage de permettre l'utilisation systématique des propriétés des espaces vectoriels topologiques.

Nous commençons par des préliminaires, sur les espaces vectoriels quasi-normés et les espaces bitopologiques. La nécessité de considérer les applications p-radonifiantes, non seulement pour $p\geqslant 1$, mais aussi pour $p<1$ (et même pour $p=0$), mène assez rapidement à étendre aussi les espaces de Banach, et à considérer les quasi-Banach, munis de p-normes ou quasi-normes, et qui ne sont plus localement convexes. Nous en donnons d'abord les définitions essentielles. Nous étudions ensuite les espaces L^p, $0<p<+\infty$, à valeurs dans des quasi-Banach, pour lesquels il y a un théorème de FISCHER-RIESZ, proposition (0.1). Mais on aura aussi besoin d'autre chose; si F est un Banach, on devra utiliser l'espace des applications μ-mesurables de Ω dans $\sigma(F', F)$, dont la norme est de puissance p-ième intégrable, espace que nous nommons $L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$; il est aussi complet, proposition (0.2). Cela mène naturellement à introduire les espaces bitopologiques, muni d'une part d'une topologie, d'autre part d'une quasi-norme définissant une topologie plus fine; et on a encore un théorème de Fischer-Riesz, proposition (0.2 bis). Ces espaces bitopologiques jouent constamment un rôle important dans la suite; on trouvera par exemple, si G est un quasi-Banach, des probabilités de Radon sur le bidual $\sigma(G'', G')$, pour lesquels la norme est de puissance p-ième intégrable. Le § se termine par l'étude analogue des espaces L^0 de classes de fonctions mesurables, avec la convergence en probabilité. On parlera donc ensuite des L^p, avec $0\leqslant p\leqslant +\infty$.

Le §1 donne le théorème de compacité de PROKHOROV (1.1) (compacité d'un ensemble de probabilités pour la topologie étroite), fondement de toute la théorie. Pour bien analyser ensuite les probabilités de Radon, nous introduisons les fonctions

(1) La topologie étroite sera définie dans la démonstration du théorème (1.1).

poids sur l'espace $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ des probabilités sur la demi-droite achevée $\bar{\boldsymbol{R}}_+$: (1.1 bis). Les principaux exemples sont (1.3), (1.4), (1.9) (les poids J_α, d'un usage constant ensuite), (1.12) (les J-poids, très importants aussi). Les poids plus forts ou plus faibles que L^0, (1.12 bis), les poids compacts, (1.13), seront fondamentaux. Les poids homogènes, (1.14), sont les plus importants dans la pratique; il semble même que finalement ce soient les seuls importants, comme le montrent des résultats plus récents d'ASSOUAD. Les poids servent remarquablement pour analyser les compacts de $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$, et la topologie des espaces L^p et L^0.

Aux poids sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$, on doit associer les fonctions compactes sur des espaces topologiques, (1.15). On définit alors un ordre d'une probabilité de Radon sur un espace topologique X, à partir d'un poids et d'une fonction $\geqslant 0$ sur X. La proposition (1.16) est la traduction, en terme de fonctions et poids, du théorème de PROKHOROV (1.1). Nous introduisons ensuite les probabilités cylindriques. Soulignons d'abord que, sans que ce soit jamais explicitement mentionné dans la suite, *tous les espaces vectoriels topologiques, seront supposés séparés par leur dual* (mais non nécessairement localement convexes). Pour les définitions et propriétés élémentaires des probabilités cylindriques, nous renvoyons à SCHWARTZ [1] et [4]. Nous introduisons ici, sur l'espace $\check{\mathscr{P}}(E)$ des probabilités cylindriques sur E, la topologie cylindrique. La proposition (1.17.0) donne une propriété importante de convergence cylindrique. Le théorème (1.17) est alors encore une fois une expression du théorème de compacité de PROKHOROV (1.1), il sera fondamental dans l'étude des applications radonifiantes. A partir de (1.18), nous spécifions le poids et étudions les probabilités de Radon d'ordre p, $0<p<+\infty$, puis aussi $p=0$, d'où le théorème (1.18 bis) traduisant encore PROKHOROV, et le corollaire (1.18 ter). On sait qu'il y a équivalence entre probabilité cylindrique et classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur le dual; (1.19) donne alors les relations entre ce qui précède et des énoncés sur des fonctions aléatoires (fonctions aléatoires décomposées). Le théorème (1.20) fait pendant à (1.18 bis).

Le § 2 introduit le type et les applications radonifiantes, qui seront l'objet essentiel du présent travail. Le type est défini à (2.1.0). Il est lié à la concentration scalaire des probabilités cylindriques, (2.1.00). Toutes les considérations sur le type de (2.1) seront fondamentales ensuite, notamment le corollaire de (2.1.8.0), l'exemple de la probabilité cylindrique de Gauss (2.1.8 bis), la proposition (2.1.10) et ses corollaires. A (2.2.0) nous introduisons les conditions d'approximation qui joueront un rôle essentiel ensuite. En réalité ces conditions sont peut-être superflues; en effet une vieille conjecture de Banach exprime que tous les espaces de Banach ont la propriété d'approximation, et dans ce cas (bien qu'il ne s'agisse pas exactement de la même hypothèse), toutes les précautions prises ici sont superflues; en attendant mieux, on ne peut pas s'en passer, et elles interviendront d'un bout à l'autre de cet article, apportant une gêne et une complication dont on se passerait volontiers. On passe à (2.3) à la définition des applications radonifiantes; une application est $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante, si elle transforme toute probabilité cylindrique de type (A, α') en une probabilité de Radon d'ordre (B, β), définition (2.3). On est, hélas, comme il vient d'être dit, obligé de considérer les applications approximativement radonifiantes, très approximativement radonifiantes. Le théorème (2.4) est le critère fondamental, dérivant directement de PROKHOROV (1.1). Dans (2.6) on introduit les propriétés d'approximation du type de celle de Banach, qui permettront de supprimer approximativement ou très approximativement dans les énoncés ultérieurs. Les définitions (2.6.3), (2.6.4), les propositions (2.7), (2.8), (2.9), sont importantes. La proposition (2.10) permet alors de ramener "très approximativement" à "approximativement", d'où le corollaire (2.11) qui combine tout ce qui précède. Le § se termine par (2.13) qui donne des énoncés en termes de fonctions aléatoires linéaires et d'applications décomposantes, avec la proposition (2.14).

Le § 3 traite des applications p-radonifiantes dans les Banach et les quasi-Banach, pour $0<p\leqslant+\infty$. C'est ici que sont les développements les plus récents et les plus intéressantes des dernières années sur les probabilités cylindriques: la rencontre de la théorie des probabilités cylindriques, avec ses applications probabilistes, avec la théorie, déjà presque achevée antérieurement, des applications p-sommantes. Rencontre double: des critères pour les applications p-sommantes donneront des critères pour les applications p-radonifiantes, avec applications probabilistes, mais aussi des méthodes probabilistes donneront des critères pour les applications p-sommantes (lois de Gauss-Lévy). Dans tout ce §, le premier espace sera un Banach E ou un dual $*$-faible $\sigma(F', F)$ d'un quasi-Banach F, le deuxième espace sera un quasi-Banach G ou un dual $*$-faible $\sigma(H', H)$ d'un Banach H. A (3.1), on définit les applications p-sommantes, la proposition (3.2) est fondamentale. Le théorème le plus important de cet article est alors (3.4), donnant la relation entre applications p-sommantes de E dans G et applications approximativement p-radonifiantes de E dans $\sigma(G'', G')$. La proposition (3.6), aussi fondamentale, est l'inégalité de PIETSCH, connue pour les applications p-sommantes, et que nous redémontrons ici, puisqu'elle servira alors pour les applications p-radonifiantes.

Toutes les propositions suivantes sont importantes, le corollaire (3.8), la proposition (3.8.0) (une application p-radonifiantes est aussi q-radonifiante pour $q\geqslant p$); (3.8.2) donne des exemples courants, et notamment les opérateurs p-nucléaires (3.8.3). On cherche ensuite à remplacer $\sigma(G'', G')$ par G lui-même; c'est possible si

G est réflexif ou si $1<p<+\infty$ (proposition (3.9)). On cherche ensuite à supprimer "approximativement"; on le peut si (E, E') a la propriété d'approximation métrique ou si $p\geqslant 1$ (proposition (3.10)). Tous ces résultats sont récapitulés à (3.11 bis). Et le § se termine à (3.13) par le point de vue des fonctions aléatoires linéaires et des applications décomposantes. La proposition (3.14) donne un critère qui sera très utile.

Le § 4 étudie le cas $p=0$, les applications 0-radonifiantes. Elles ont été connues (théorème de MINLOS) avant les p-radonifiantes pour $p>0$; cependant elles sont plus difficiles, et leur liaison avec des 0-sommantes n'existe pas vraiment. Cette étude est aussi fondamentale pour les applications probabilistes. Le théorème fondamental (4.1) est l'analogue de (3.4) pour $p=0$. Sa démonstration est assez longue, mais importante. L'inégalité de PIETSCH est (4.5) et (4.12.1) (SUNYACH); elle est nouvelle, puisque rien d'analogue n'existait pour des applications sommantes avec $p=0$. Autre version: (4.12.7). Le théorème de KWAPIEN (4.13) étend à $p=0$ un résultat antérieur (3.8.0): une application 0-radonifiante est q-radonifiante pour tout $q\geqslant 0$. On passe de $\sigma(G'', G')$ à G à (4.19), on supprime "approximativement" à (4.20).

Le § 5 donne le théorème de dualité, le moyen pratique le plus commode pour montrer qu'une application est radonifiante. On définit d'abord le cotype, (5.1), puis la propriété d'interversion de Fubini pour les poids, (5.5), avec les critères pratiques (5.7.3) et (5.7.13), utiles pour le type et l'ordre 0. On a alors la condition de PIETSCH généralisée (5.8), d'où le théorème de dualité (5.15), fondamental. Le corollaire est une variante dans les notations, qui sera commode. La proposition (5.17) traite le cas des poids homogènes, dont le cas p, proposition (5.19), est le plus important. Une bonne application est donnée à (5.20.1): les applications radonifiantes entre espaces de Hilbert sont les opérateurs de Hilbert-Schmidt, application immédiate du théorème de dualité. Si d'ailleurs le premier est hilbertien, on a aussi un bon énoncé, proposition (5.20.4). On va maintenant se placer dans une situation plus générale, à partir de (5.21). Cette situation est notablement plus compliquée, et inutile dans le cas des Banach. Mais, dans la pratique, les espaces de suites sont agréablement considérés comme sous-espaces de l'espace K^N de toutes les suites, les espaces fonctionnels comme sous-espaces de l'espace $\mathscr{D}'$ des distributions; c'est à cette situation générale qu'on devra faire face. Une bonne figure récapitulative est donnée dès le début. Le théorème de dualité général est alors (5.23); on élimine les conditions d'approximation spéciale à (5.29), d'où un théorème général de dualité pour des quasi-Banach à (5.32), avec le corollaire (5.34) pour le cas p. A (5.36) on fait la liaison avec les §§ 3 et 4, et le théorème de dualité (5.15).

Le §6 va donner de nombreux exemples et applications. Les exemples (6.I) sont en dimension finie; là toutes les probabilités sont de Radon, et le seul intérêt est d'obtenir des inégalités précises résultant des théorèmes antérieurs. Dans (6.I.2), nous partons d'une inégalité sur les polynomes trigonométriques, d'où la proposition (6.I.2; 4) par application du théorème de dualité, avec la variante (6.I.2; 5) en termes de suites de variables aléatoires. L'introduction des variables aléatoires subnormales (6.I.2; 10) permet d'obtenir le théorème de SALEM-ZYGMUND pour les polynomes trigonométriques aléatoires, (6.I.2; 15). Ensuite à (6.I.3), nous introduisons les variables trigonométriques encore une fois pour un autre théorème de dualité; nous en déduirons l'inégalité de MENCHOV (6.I.3; 11) et (6.I.3; 12). A partir de (6.II) nous passons aux suites infinies de variables aléatoires, pour appliquer le théorème de dualité en situation générale, (5.23). Les propositions (6.II.1, puis 1 bis, 1 ter et 1 quarto) donnent les conditions générales d'utilisation. Comme exemples, nous donnerons d'abord un théorème de KHINTCHINE-KOLMOGOROV, (6.II.2; 2), un résultat sur les séries de Fourier aléatoires (6.II.3), puis les applications 0-radonifiantes dans les espaces de suites, (6.II.4), que nous ne traitons pas complètement car il fait l'objet détaillé d'un article antérieur, et nous terminons par le théorème de MENCHOV, (6.II.5), un théorème de KWAPIEN-PELCZYNSKI, (6.II.6), et une autre application (6.II.7). Ce montre que de nombreux exemples usuels, déjà connus ou non, peuvent être déduits des théorèmes de dualité.

Depuis que cet article a été écrit, de nouveaux théorèmes ont été démontrés, qu'il est impossible d'incorporer dans le texte. Signalons avant tout les applications ω-sommantes (p-sommantes pour $-1<p<0$), de MAUREY [2], et la résolution de la conjecture de PIETSCH pour les Banach (toute application p-radonifiante pour un $p<1$ est 0-radonifiante, et même ω-sommante), par Simone CHEVET [1] et MAUREY [3]. D'autre part PIETSCH a presque achevé l'étude des applications p-radonifiantes dans les espaces de suites (GOULAOUIC-SCHWARTZ [1], exposés 29 et 31). Signalons qu'une partie des résultats du présent article ont été exposés dans un séminaire, à l'Ecole polytechnique (1969–70) (SCHWARTZ [4]).

§0. Préliminaires: Les espaces vectoriels quasi-normés et les espaces bitopologiques.

(0.00) On appelle p-quasi-norme sur un espace vectoriel E sur le corps $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$, $0<p\leqslant 1$, une application $x\mapsto\|x\|$ de E dans $\boldsymbol{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\|kx\|=|k|\,\|x\|$ pour $k\in\boldsymbol{K}$, $x\in E$;

b) $\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p$, pour $x,\ y\in E$;

c) $\|x\|>0$ pour $x\neq 0$.

Une 1-quasi-norme est une norme. Une p-quasi-norme est une q-quasi-norme pour $q\leqslant p$. Une quasi-norme définit sur E une topologie d'espace vectoriel, pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les quasi-boules fermées de centre origine; cette topologie est métrisable, car $(x, y)\mapsto \|x-y\|^p$ est une distance qui la définit. Pour cette topologie, les quasi-boules fermées sont fermées et la quasi-norme est continue, car $|\|x\|^p-\|y\|^p|\leqslant\|x-y\|^p$. On appellera espace vectoriel quasi-normé un espace vectoriel muni d'une quasi-norme, et de la topologie correspondante. L'espace $L^p(X, \mu)$ relatif à un espace topologique X et une mesure μ sur X est un espace vectoriel quasi-normé, normé pour $p\geqslant 1$, p-quasi-normé pour $p<1$. Son dual est réduit à $\{0\}$ si μ est diffuse et $p<1$; de tels espaces vectoriels sans dual seront inutilisables pour tout ce qui suit; aussi *tous les espaces vectoriels topologiques*, dans la suite, *seront-ils automatiquement supposés séparés par leur dual, sauf mention explicite du contraire*; mais, bien entendu, les espaces vectoriels topologiques qu'on formera à partir d'eux ne le seront pas nécessairement.

Un espace vectoriel quasi-normé complet sera appelé un quasi-Banach.

L'enveloppe convexe équilibrée fermée de la quasi-boule unité de E a une jauge, qui est une norme (c'est trivialement une semi-norme, mais c'est une norme parce que E est séparé par son dual); l'espace E muni de cette norme se notera E_N, et $E\rightarrow E_N$ est continue. Les espaces E et E_N ont le même dual E', qui est un Banach pour la norme $\|\xi\|=\operatorname{Sup}_{\|x\|\leqslant 1}|\langle\xi, x\rangle|$. Alors E_N s'envoie isométriquement dans le bidual E''. Bien entendu, la boule unité de E' est $*$-faiblement compacte. La boule unité de E_N est $\sigma(E'', E')$-dense dans celle de E'' et faiblement fermée dans E, mais la boule unité de E n'a aucune raison d'avoir les mêmes propriétés. Si E est un quasi-Banach, E_N n'a aucune raison de l'être. Considérons par exemple l'espace l^s, $0<s<1$, des suites $c=(c_n)_{n\in N}$ telles que $\sum_{n\in N}|c_n|^s<+\infty$, avec $\|c\|_s=(\sum_{n\in N}|c_n|^s)^{1/s}$. C'est un espace vectoriel s-quasi-normé, et un quasi-Banach. La boule unité contient tous les éléments $\varepsilon_m=(c_n=0$ pour $n\neq m$, $c_m=1)$, de quasi-norme 1; l'enveloppe convexe équilibrée fermée de la quasi-boule unité est donc l'ensemble des suites $c\in l^s$ dont la norme dans l^1 est $\leqslant 1$. Donc $(l^s)_N$ est l'espace l^s muni de la norme induite par l^1; il n'est pas complet. Le dual de l^s comme de l^1 est l^∞. La boule unité de l^s est compacte dans l'espace K^N, donc sûrement fermée dans l^s muni de la topologie $\sigma(l^s, l^\infty)$. *Dans la suite, nous supposerons automatiquement, sauf mention expresse du contraire, que la boule unité de E est faiblement fermée* (ce qui entraine a fortiori que E soit séparé par son dual!). L'espace vectoriel normé E_N, bien que généralement non complet, est tonnelé si E

est complet (par exemple l^s, $0<s<1$, est tonnelé pour la topologie induite par l^1). En effet, un tonneau T pour E_N l'est a fortiori pour E, qui est de Baire, donc c'est un voisinage de 0 dans E, donc dans E_N puisqu'il est convexe. Toute partie $*$-faiblement bornée de E' est équicontinue sur E_N et sur E, et $*$-fortement bornée dans E', $(E_N)'$ ou $(\hat{E}_N)'$. Pour qu'un p-quasi-normé E soit complet, il faut et il suffit que, pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de E telle que $\sum_{n\in N}\|x_n\|^p<+\infty$, la série $\sum_{n\in N} x_n$ converge. Et, dans ce cas, $\|\sum_{n\in N} x_n\|^p\leqslant \sum_{n\in N}\|x_n\|^p$.

Soient E, G, des espaces vectoriels quasi-normés (Si E est q-quasi-normé et G p-quasi-normé, ils sont tous deux $\mathrm{Min}\,(p, q)$-quasi-normés.). Une application linéaire u continue de E dans G est faiblement continue; la réciproque n'est pas vraie. Mais, si u est faiblement continue, ${}^t u$ est toujours continue de $\sigma(G', G)$ dans $\sigma(E', E)$ et de G' dans E'; u est faiblement continue si et seulement si elle est continue de E_N dans G_N. Par exemple l'application identique de l^s, muni de la topologie induite par l^1 dans l^s, est faiblement continue, mais n'est pas continue. Dans le même ordre d'idées, une partie est faiblement bornée dans E si et seulement si elle est bornée dans E_N, mais elle ne l'est pas nécessairement dans E; par exemple, dans l^s, la boule unité de la norme l^1 est faiblement bornée mais non bornée. Sur $\mathscr{L}(E; G)$, la fonction $u\mapsto\|u\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|$ est une p-quasi-norme si G est p-quasi-normé; pour cette quasi-norme, $\mathscr{L}(E; G)$ est complet si G est complet, et alors $\mathscr{L}(\hat{E}; G)$ est identique à $\mathscr{L}(E; G)$. Si u est seulement faiblement continue de E dans G, la quantité $\|u\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|$ est infinie si u n'est pas continue; mais $\|u\|_N$, norme de u dans $\mathscr{L}(E_N; G_N)$, est toujours finie; on a d'ailleurs toujours $\|u\|_N\leqslant\|u\|$. Soient E, G, des espaces quasi-normés, ainsi que F, H, et H complet. Une application linéaire faiblement continue u de $\sigma(F', F)$ dans G (c. à d., continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G'))$ est continue de F' dans G_N; car l'image par u de la boule unité de F', $\sigma(F', F)$-bornée, est bornée dans $\sigma(G, G')$, donc bornée dans G_N; elle a donc une norme $\|u\|_N$ finie. Une application linéaire faiblement continue de E dans $\sigma(H', H)$ est continue de E_N dans H', a fortiori de E dans H'; en effet, la boule unité de E_N est faiblement bornée, donc son image est bornée dans $\sigma(H', H)$, donc bornée dans H' parce que H_N est tonnelé. Elle a donc une norme $\|u\|=\|u\|_N$, indifféremment en tant qu'opérateur de E dans H' ou de E_N dans H', car l'image de la boule unité de E est contenue dans les mêmes boules que celle de la boule unité de E_N, H' étant normé. Enfin, si u est une application linéaire continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H)$, elle est continue de F' dans H' pour la même raison. On peut eventuellement tout écrire avec une formulation unique. Ayant défini E_N lorsque E est un quasi-normé, on peut pour $E=\sigma(F', F)$, F quasi-normé, appeles E_N l'espace de Banach F'. On notera cependant que E est plus fin que E_N pour E quasi-normé, alors que E_N est plus fin que E pour E dual $*$-faible d'un quasi-normé.

D'autre part, si $E=\sigma(F', F)$, F quasi-normé, ce que nous appellerons E' sera toujours F muni de sa quasi-norme. Alors:

PROPOSITION (0.0). *Si E est ou un espace quasi-normé ou un dual $*$-faible d'un quasi-normé, G un quasi-normé ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach, une application linéaire faiblement continue u de E dans G est continue de E_N dans G_N.*

L'énoncé ainsi donné couvre d'un seul coup 4 cas différents. C'est plus commode, mais il faudra souvent en fait 4 démonstrations différentes; d'un autre côté, chaque fois qu'un seul énoncé couvrira les 4 cas, tous ceux qui s'appuieront sur lui feront de même. Parfois, il semblera plus clair de donner les 4 énoncés; ainsi la proposition (0.0) pourra aussi s'énoncer:

(0.0 bis) *Soient E un quasi-normé ou $\sigma(F', F)$ le dual $*$-faible d'un quasi-normé, G un quasi-normé ou $\sigma(H', H)$ le dual $*$-faible d'un quasi-Banach, u une application linéaire faiblement continue de E ou $\sigma(F', F)$ dans G ou $\sigma(H', H)$. Alors elle est continue de E_N ou F' dans G_N ou H'.*

Le mélange fréquent des deux types d'énoncé est en fait incorrect. Par exemple, au § 3, il est dit au début que E est *ou bien* un Banach *ou bien* un dual $*$-faible d'un quasi-Banach F. Alors, dans un énoncé tel que celui de la proposition (3.5 quinto), il y a une incorrection à dire que u est continue de E *ou* F' dans G *ou* H'; il est ici sous-entendu que *le 1[er] espace* est E ou $\sigma(F', F)$, mais que, s'il est appelé E, *il n'est pas un* $\sigma(F', F)$, mais un Banach; et u ne serait évidemment pas continue de E dans G si E avait le droit d'être $\sigma(F', F)$, elle n'est pas continue de $\sigma(F', F)$ dans G mais de F' dans G. Cette incorrection ne semble pas grave, mais aide au contraire à mieux comprendre!

Espaces L^p. Soit Ω un espace topologique séparé muni d'une mesure de Radon $\mu\geqslant 0$ (finie ou non) et soit E q-quasi-normé. On appelle $L^p(\Omega, \mu; E)$, $0<p<+\infty$, l'espace vectoriel des μ-classes de fonctions f sur Ω, à valeurs dans E, μ-mesurables (Lusin) et telles que $\int_\Omega \|f(\omega)\|^p d\mu(\omega)<+\infty$, et on pose

$$|||f|||_p \quad \text{ou} \quad \|f\|_p=\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}.$$

Pour $p=+\infty$, $L^\infty(\Omega, \mu; E)$ est l'espace des μ-classes de fonctions μ-mesurables et bornées, avec $\|f\|_\infty=(\text{Sup. ess.})_\mu\|f\|_E$.

PROPOSITION (0.1). *$L^p(\Omega, \mu; E)$ est* Min(p, q)*-quasi-normé* (2) *si E est q-quasi-*

(2) Mais non nécessairement séparé par son dual!

normé, et complet si E est complet (Fischer-Riesz).

DÉMONSTRATION. Soient f et g deux fonctions de $L^p(\Omega, \mu; E)$. Supposons d'abord $1 \geqslant q \geqslant p$; c'est connu si $p=1$, supposons donc $p<1$, et montrons que $L^p(\Omega, \mu; E)$ est p-quasi-normé. Comme E est aussi p-quasi-normé, on a

$$\int_\Omega \|f(\omega)+g(\omega)\|_E^p d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega (\|f(\omega)\|_E^p + \|g(\omega)\|_E^p) d\mu(\omega) ,$$

ce qui prouve le résultat $\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$. Supposons maintenant $q<p$, et montrons que $L^p(\Omega, \mu; E)$ est q-quasi-normé. Soit d'abord p fini. Posons $\|f(\omega)\|_E^q = \alpha(\omega)$, $\|g(\omega)\|_E^q = \beta(\omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^q &= \left(\int_\Omega \|f(\omega)+g(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)\right)^{q/p} = \left(\int_\Omega (\|f(\omega)\|_E^q + \|g(\omega)\|_E^q)^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} \\
&= \left(\int_\Omega (\alpha(\omega)+\beta(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega (\alpha(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega (\beta(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} \quad \text{(Minkowski, avec } \frac{p}{q}>1) \\
&= \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega \|g(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)\right)^{q/p} = \|f\|_p^q + \|g\|_p^q ,
\end{aligned}$$

qui est l'inégalité cherchée.

Pour $p=+\infty$, on aura simplement

$$(\text{Sup. ess.})_\mu(\|f+g\|)^q \leqslant (\text{Sup. ess.})_\mu(\|f\|^q) + (\text{Sup. ess.})_\mu(\|g\|)^q$$

ou

$$\|f+g\|_{L^\infty}^q \leqslant \|f\|_{L^\infty}^q + \|g\|_{L^\infty}^q ,$$

et $L^\infty(\Omega, \mu; E)$ est encore q-quasi-normé.

Si E est complet $L^p(\Omega, \mu; E)$ est complet (Fischer-Riesz). Pour le voir, on démontre que, si $(f_n)_{n\in N}$ est une suite de $L^p(\Omega, \mu; E)$ telle que $\sum_{n\in N} \|f_n\|_p^{\mathrm{Min}(p,q)} < +\infty$, alors $\sum_{n\in N} f_n$ converge dans $L^p(\Omega, \mu; E)$. Or, si $q \geqslant p$, c'est connu pour $p=1$, donc on peut supposer $p<1$; alors, par hypothèse $\sum_{n=0}^\infty \|f_n(\omega)\|_E^p d\mu(\omega) < +\infty$, donc, pour μ-presque tout ω, $\sum_{n=0}^\infty \|f_n(\omega)\|_E^p$ converge, et par suite, E étant p-quasi-normé, $\sum_{n=0}^\infty f_n(\omega)$ converge vers une limite $f(\omega)$; f est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables à valeurs dans un espace métrisable;

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p d\mu(\omega) \leqslant \sum_{n=0}^\infty \int_\Omega \|f_n(\omega)\|_E^p d\mu(\omega) < +\infty ,$$

donc $f \in L^p(\Omega, \mu; E)$; et enfin

$$\|f - \sum_{n=0}^m f_n\|_p^p \leqslant \sum_{n>m} \int_\Omega \|f_n(\omega)\|_E^p d\mu(\omega)$$

tend vers 0 pour m infini, donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge vers f dans $L^p(\Omega, \mu; E)$. Supposons ensuite $q<p$, et soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de $L^p(\Omega, \mu; E)$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p^q<+\infty$. Soit d'abord p fini. De

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\Omega \|f_n(\omega)\|_E^p \, d\mu(\omega)\right)^{q/p} < +\infty ,$$

on déduit, en posant

$$\alpha_n(\omega)=\|f_n(\omega)\|_E^q , \quad \text{que} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\Omega (\alpha_n(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} < +\infty ,$$

d'où, par Fischer-Riesz appliqué à $p/q>1$, on déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\omega)$ converge μ-presque partout, donc, E étant q-quasi-normé, que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\omega)$ converge μ-presque partout vers une limite $f(\omega)$; f est encore μ-mesurable; en posant $\|f(\omega)\|_E^q=\alpha(\omega)$, on a $\alpha(\omega)\leqslant \sum_n \alpha_n(\omega)$, et

$$\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p \, d\mu(\omega)\right)^{q/p} = \left(\int_\Omega (\alpha(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p}$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\Omega (\alpha_n(\omega))^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{q/p} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\Omega \|f_n(\omega)\|_E^p \, d\mu(\omega)\right)^{q/p} < +\infty ,$$

donc $f\in L^p(\Omega, \mu; E)$; et

$$\|f-\sum_{n=0}^{m} f_n\|_p^q \leqslant \sum_{n>m}\left(\int_\Omega \|f_n(\omega)\|_E^p \, d\mu(\omega)\right)^{q/p}$$

tend vers 0 pour m infini, donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge vers f dans $L^p(\Omega, \mu; E)$, qui est bien complet. Pour p infini, on suppose $\sum_{n=0}^{\infty}$ (Sup. ess.)$\|f_n(\omega)\|_E^q<+\infty$; donc, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n(\omega)\|_E^q<+\infty$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\omega)$ converge vers une limite $f(\omega)$, avec $\|f(\omega)\|_E^q\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n(\omega)\|_E^q$; f est μ-mesurable; puis

$$(\text{Sup. ess.})_\mu \|f\|_E^q \leqslant (\text{Sup. ess.})_\mu \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|_E^q\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(\text{Sup. ess.})_\mu \|f_n\|_E^q < +\infty ,$$

donc $f\in L^\infty(\Omega, \mu; E)$; et en raisonnant sur $\sum_{n>m}$, on voit encore que $\sum_n f_n$ converge vers f dans $L^\infty(\Omega, \mu; E)$, qui est bien complet. CQFD.

Soit ensuite $E=\sigma(F', F)$ le dual $*$-faible d'un quasi-normé F. Nous appellerons $L^p(\Omega, \mu; E)$ (3), $0<p<+\infty$, l'espace des μ-classes de fonctions μ-mesurables f sur Ω à valeurs dans $E=\sigma(F', F)$, telles que $\int_\Omega \|f(\omega)\|_{F'}^p \, d\mu(\omega)<+\infty$, et nous poserons $\|f\|_p=\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_{F'}^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p}$; pour $p=\infty$, $L^\infty(\Omega, \mu; E)$ est l'espace des μ-classes de fonctions μ-mesurables à valeurs dans $\sigma(F', F)$, et bornées en norme, avec $\|f\|_\infty=$

(3) Ce n'est pas conforme à la définition courante de $L^p(\Omega, \mu; E)$.

$(\text{Sup. ess.})_\mu \|f\|_E$. Les mêmes démonstrations que précédemment montrent que $L^p(\Omega, \mu; E)$ est $\mathrm{Min}\,(p, 1)$-quasi-normé, car F' est toujours un Banach pour sa norme. D'autre part:

PROPOSITION (0.2). *$L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$ est complet; si F est un Banach réflexif ou si F' est séparable, $L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F)) = L^p(\Omega, \mu; F')$.*

DÉMONSTRATION. On sait que F' est un Banach. Les démonstrations faites antérieurement pour E quasi-normé sont encore valables pour $E = \sigma(F', F)$, tant qu'il ne s'agit que des inégalités, car on raisonne alors sur le Banach F' (on fait donc $q=1$ dans les calculs précédents); la seule chose à montrer est que, si les f_n sont μ-mesurables, f est aussi μ-mesurable. On sait toujours que f est μ-presque partout égale à la somme $\sum_n f_n$, avec $\sum_n \|f_n\|_{F'} < +\infty$ μ-presque partout. Soit K un compact de Ω, et soit $\delta > 0$. Il existe d'abord un compact $K' \subset K$, tel que $\mu(K \backslash K') \leqslant \delta/2$, et que, toutes les fonctions f_n soient continues de K' dans $\sigma(F', F)$, puisque les f_n sont μ-mesurables-Lusin de Ω dans $\sigma(F', F)$. Ensuite, d'après EGOROV, il existe un compact $K'' \subset K'$, tel que $\mu(K' \backslash K'') \leqslant \delta/2$, et que, sur K'', la série $\sum_n \|f_n(\omega)\|_{F'}$ converge uniformément (les fonctions $\|f_n\|$, composées de f_n μ-mesurables $\Omega \to \sigma(F', F)$, et de la fonction norme, semi-continue inférieurement sur $\sigma(F', F)$, sont μ-mesurables de Ω dans $\boldsymbol{R}_+$); donc, sur K'', la série $\sum_n f_n$ converge uniformément, quand on munit F' de la structure uniforme de la norme, a fortiori quand on le munit de la structure uniforme $\sigma(F', F)$. Donc la restriction de f à K'' est continue de K'' dans $\sigma(F', F)$. Comme δ est arbitraire, f est bien μ-mesurable de Ω dans $\sigma(F' F)$, et $L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$ est bien complet.

Si F est un Banach réflexif, F' l'est aussi, et un théorème connu de PHILIPPS (4) dit que toute fonction à valeurs dans l'espace F', faiblement mesurable, est aussi mesurable. Il en est de même si F' est séparable donc polonais, car toute application dans F', mesurable pour une topologie séparée plus faible que la sienne, l'est aussi pour sa topologie. Dans les deux cas, on a donc $L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F)) = L^p(\Omega, \mu; F')$. CQFD.

Espaces bitopologiques. L'exemple que nous venons d'étudier avec $\sigma(F', F)$ introduit une structure nouvelle qu'on rencontrera souvent.

On appellera espace vectoriel bitopologique E un espace vectoriel, avec:

1) une topologie vectorielle, pour laquelle il est séparé par son dual;

2) une partie B bornée équilibrée fermée, qu'on appellera la quasi-boule unité, définissant donc une jauge j_B, qui, sur le sous-espace vectoriel E_B engendré par B, soit une quasi-norme, notée aussi $\| \ \|$. Cette quasi-norme définit donc sur E_B une

(4) Voir PHILIPPS [1].

topologie plus fine que celle de 1), et quasi-normée. La quasi-norme, prolongée par $+\infty$ en dehors de E_B, est semi-continue inférieurement sur E. Sauf mention expresse du contraire, la topologie de E est celle de 1, qu'on appelle aussi la première; d'ailleurs la deuxième n'existe que sur E_B (son injection dans la première est continue). Si toutefois il devait y avoir confusion (par exemple si $E_B=E$), on écrira ${}_1E$ et ${}_2E$. Si E et G sont deux espaces vectoriels bitopologiques, et si u est une application linéaire de E dans G, on dira qu'elle est continue ou faiblement continue, si elle l'est pour les premières topologies. Si on écrit qu'elle est 2-continue ou continue pour les deuxièmes topologies, on voudra dire qu'elle envoie la quasi-boule unité de E dans une quasi-boule de G.

Soient Ω un espace topologique muni d'une mesure de Radon $\mu\geqslant 0$, et E un espace vectoriel bitopologique. On appelle $L^p(\Omega, \mu; E)$ l'espace des μ-classes d'applications μ-mesurables f de Ω dans E (donc relativement à la première topologie de E), et telles que

$$|||f|||_p=\left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}<+\infty \quad \text{si} \quad p<+\infty\,,$$

et

$$|||f|||_{+\infty}=(\text{Sup. ess.})_\mu\|f(\omega)\|<+\infty \quad \text{si} \quad p=+\infty\,.$$

Si la quasi-norme de E_B est une q-quasi-norme, $f\mapsto|||f|||_p$ est une $\mathrm{Min}\,(p, q)$-quasi-norme.

Notons que la fonction $\omega\mapsto\|f(\omega)\|$ est μ-mesurable, car la quasi-norme de E est semi-continue inférieurement pour sa 1$^{\text{ère}}$ topologie. Notons aussi que la seule condition $|||f|||_p<+\infty$ implique que f prenne μ-presque toutes ses valeurs dans E_B. Reprenons alors le cas considéré plus haut; si F est quasi-normé, $E=\sigma(F', F)$ est un espace bitopologique, avec comme 1$^{\text{ère}}$ topologie $\sigma(F', F)$ et comme quasi-norme sa norme de dual. Et ce que nous avons appelé $L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$ est bien compatible avec ce que nous venons de définir pour un espace bitopologique quelconque. Si E est un quasi-normé, il est aussi bitopologique, avec la topologie $\sigma(E, E')$ et sa quasi-norme (mais aussi bien sûr pour sa quasi-norme et la topologie qu'elle définit comme 1$^{\text{ère}}$ topologie). Un cas très important dans la suite sera celui-ci.

Soit G un espace quasi-normé. Son dual G' est un Banach, et admet un dual G'', bidual de G. La boule unité de G admet alors une adhérence B'' dans $\sigma(G'', G')$, qui est d'ailleurs compacte, car la boule unité de G est contenue dans celle de G_N. Alors la topologie $\sigma(G'', G')$ et la quasi-boule B'' définissent une bitopologie, qu'on appellera la bitopologie canonique $\sigma(G'', G')$.

Alors les propositions (0.1) et (0.2) admettent la généralisation suivante:

PROPOSITION (0.2 bis). *Si E est un espace vectoriel bitopologique, l'espace $L^p(\Omega, \mu; E)$, $0<p\leqslant+\infty$, est complet si E_B est complet pour la 2ème topologie.*

DÉMONSTRATION. On prendra une série $\sum_n f_n$, avec $\sum_n \|f_n\|_p^{\mathrm{Min}(p,q)}<+\infty$, et on devra montrer qu'elle est convergente. On trouvera une limite μ-presque partout f, exactement comme dans la proposition (0.1), et toutes les inégalités de la démonstration de la proposition (0.1) subsisteront; la seule difficulté consistera à montrer que f est μ-mesurable pour la 1ère-topologie de E. Pour cela, on procèdera comme dans la démonstration de la proposition (0.2), E jouant le rôle de $\sigma(F', F)$. (On utilise seulement le fait que ${}_2E$, muni de la quasi-norme, est plus fin que ${}_1E$).

Enfin, pour $p=0$, et μ de masse 1, on définit $L^0(\Omega, \mu; E)$ comme l'espace vectoriel des μ-classes d'applications μ-mesurables de Ω dans E (pour la 1ère topologie), prenant leurs valeurs dans E_B. On le munit toujours de la topologie définie par la famille de jauges $f\mapsto J_\alpha(\mu, f)=\mathrm{Inf}\,\{M\geqslant 0; \mu\{\omega\in\Omega; \|f(\omega)\|>M\}\leqslant\alpha\}$, $0<\alpha<1$, dite topologie de la convergence en probabilité relativement à la structure uniforme de E_B définie par la quasi-norme [5]. Alors:

PROPOSITION (0.3). *$L^0(\Omega, \mu; E)$ est un espace vectoriel topologique métrisable, complet si E_B est complet pour sa 2e topologie. En outre, si F est un Banach réflexif, ou si F' est séparable, $L^0(\Omega, \mu; \sigma(F', F))=L^0(\Omega, \mu; F')$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, si f et g sont deux fonctions μ-mesurables et $\geqslant 0$, on a toujours $J_{\alpha+\beta}(\mu, f+g)\leqslant J_\alpha(\mu, f)+J_\beta(\mu, g)$. En effet, f est majorée par $J_\alpha(\mu, f)$, sauf sur un ensemble de points de Ω de μ-mesure $\leqslant\alpha$, et g majorée par $J_\beta(\mu, g)$ sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leqslant\beta$; donc $f+g$ est majorée par $J_\alpha(\mu, f)+J_\beta(\mu, g)$, sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leqslant\alpha+\beta$, et donc $J_{\alpha+\beta}(\mu, f+g)\leqslant J_\alpha(\mu, f)+J_\beta(\mu, g)$. A fortiori, si f et g sont des fonctions sur Ω, μ-mesurables, à valeurs dans E, on a $J_{\alpha+\beta}(\mu, \|f+g\|^q)\leqslant J_\alpha(\mu, \|f\|^q)+J_\beta(\mu, \|g\|^q)$. Si donc nous appelons $V=V(\alpha, \varepsilon)$ l'ensemble des $f\in L^0(\Omega, \mu; E)$ telles que $J_\alpha(\mu, \|f\|^q)\leqslant\varepsilon$, alors $W=V(\alpha/2, \varepsilon/2)$ vérifie $W+W\subset V$; on en déduit aussitôt que les $V(\alpha, \varepsilon)$, pour $0<\alpha<1$, et $\varepsilon>0$, forment un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie d'espace vectoriel. Comme on en déduit immédiatement une base dénombrable, avec $\alpha=1/m$, $\varepsilon=1/n$, $L^0(\Omega, \mu; E)$ est métrisable. Montrons qu'il est complet si ${}_2E_B$ est complet. Soit donc $(f_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy. Il suffit de prouver qu'on peut en extraire une suite partielle convergente. Or il en existe une suite partielle

(5) La convergence en probabilité est associée à une structure uniforme (voir SCHWARTZ [1], 2e partie chap. 5, §1). Mais ici il s'agit de la convergence en probabilité pour la structure uniforme de E_B, alors que les fonctions ne sont pas mesurables à valeurs dans E_B!

$(f_{n_k})_{k\in N}$ telle que

$$J_{\frac{1}{2^{k+1}}}(\mu, \|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|^q)\leqslant \frac{1}{2^{k+1}}\,.$$

Posons $f_{n_{k+1}}-f_{n_k}=\theta_k$. Il s'agit de montrer que la série $\sum_{k\in N}\theta_k$ converge dans $L^0(\Omega, \mu; E)$, avec

$$J_{\frac{1}{2^{k+1}}}(\mu, \|\theta_k\|^q)\leqslant \frac{1}{2^{k+1}}\,.$$

Pour tous $l\in N$, $m\in N$,

$$J_{\frac{1}{2^l}}(\mu, \|\theta_l\|^q+\|\theta_{l+1}\|^q+\cdots+\|\theta_{l+m}\|^q)\leqslant \frac{1}{2^{l+1}}+\frac{1}{2^{l+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{l+m+1}}\leqslant\frac{1}{2^l}\,.$$

Comme l'ensemble

$$\Omega_{l,m}=\left\{\omega\in\Omega;\ \|\theta_l(\omega)\|^q+\cdots+\|\theta_{l+m}(\omega)\|^q>\frac{1}{2^l}\right\}$$

croit avec m, et que sa mesure reste $\leqslant 1/2^l$, il en sera de même pour l'ensemble réunion

$$\Omega_l=\left\{\omega\in\Omega;\ \|\theta_l(\omega)\|^q+\cdots+\|\theta_{l+m}(\omega)\|^q+\cdots>\frac{1}{2^l}\right\}\ ;\quad \text{posons}$$

$$\bar{\Omega}_l=\bigcup_{l'\geqslant l}\Omega^{l'}\ ,\quad \text{de sorte que}\quad \mu(\bar{\Omega}_l)\leqslant\frac{1}{2^{l-1}}\ ;$$

pour μ-presque tout ω, la série $\sum_k\|\theta_k(\omega)\|^q$ converge, a fortiori la série $\sum_k\theta_k(\omega)$ converge dans ${}_2E_B$; soit $\theta(\omega)$ sa somme. Alors θ est une fonction définie μ-presque partout sur Ω à valeurs dans E_B, et on a $\|\theta(\omega)-\sum_{k=0}^{l-1}\theta_k(\omega)\|^q\leqslant 1/2^l$ pour $\omega\notin\Omega_l$, et $\mu(\Omega_l)\leqslant 1/2^l$. Sur tout $\complement\bar{\Omega}_l$, la série $\sum_k\theta_k$ converge uniformément, par rapport à la structure uniforme de ${}_2E_B$ définie par la quasi-norme, donc a fortiori pour la structure uniforme ${}_1E$ de la 1ère topologie; en effet pour $\omega\notin\bar{\Omega}_l$, et pour tout $l'\geqslant l$, donc $\omega\notin\Omega_{l'}$, $\|\theta(\omega)-\sum_{k=0}^{l'-1}\theta_k(\omega)\|^q\leqslant 1/2^{l'}$. Mais, pour tout l, il existe $\tilde{\Omega}_l\supset\bar{\Omega}_l$, $\mu(\tilde{\Omega}_l)\leqslant 1/2^{l-2}$, tel que les restrictions des θ_k à $\complement\tilde{\Omega}_l$ soient toutes continues de $\complement\tilde{\Omega}_l$ dans E, et $\sum_k\theta_k$ converge uniformément vers θ sur $\complement\tilde{\Omega}_l$; donc la restriction de θ à $\complement\tilde{\Omega}_l$ est continue de $\complement\tilde{\Omega}_l$ dans E, et par suite θ est μ-mesurable-Lusin de Ω dans E. En outre, $\sum_k\theta_k$ converge vers θ dans $L^0(\Omega, \mu; E)$ d'après sa définition, puisque $J_{1/2^l}(\mu, \|\theta-\sum_{k=0}^{l-1}\theta_k\|^q)\leqslant 1/2^l$. Donc $L^0(\Omega, \mu; E)$ est bien complet. La partie relative à F' se démontre comme la proposition (0.2). CQFD.

REMARQUE. Si G est quasi-normé, l'espace bitopologique $\sigma(G'', G')$ satisfait

aux conditions des proposition (0.2 bis et 3); car B'' est compacte donc complète pour $\sigma(G'', G')$, donc $E_{B''}$ est complet pour la quasi-norme (6).

§ 1. Le théorème de compacité de PROKHOROV; poids; probabilités cylindriques.

THÉORÈME (1.1). *Soient X un espace topologique séparé, $\mathscr{P}(X)$ l'espace des probabilités de Radon sur X (mesures de Radon $\geqslant 0$ de masse 1), muni de la topologie de la convergence étroite. Soit $\mathscr{M}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$. Une condition suffisante pour que $\mathscr{M}$ soit relativement compacte dans $\mathscr{P}(X)$ est la suivante:*

Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un compact K_ε de X tel que, pour toute $\lambda\in\mathscr{M}$, on ait $\lambda(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$.

DÉMONSTRATION. La topologie de la convergence étroite, pour X complètement régulier, est la topologie de la convergence simple sur l'espace $\mathscr{B}(X)$ des fonctions continues bornées; elle est induite par la topologie vague de l'espace des probabilités sur le compactifié de Čech $\check{X}$ de X. Si alors f est une fonction semi-continue inférieurement sur X, $\geqslant 0$ ou même bornée inférieurement, donc enveloppe supérieure de fonctions continues bornées, la fonction $\lambda\mapsto\lambda(f)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie étroite. Autrement dit, l'ensemble des λ pour lesquelles $\lambda(f)\leqslant M$ est étroitement fermé; si des λ_j convergent étroitement vers λ, $\liminf_j \lambda_j(f)\geqslant\lambda(f)$. TOPSOE (7) a étendu la définition de la convergence étroite au cas où X n'est plus nécessairement complètement régulier. C'est précisément la topologie la moins fine pour laquelle $\lambda\mapsto\lambda(f)$ soit semi-continue inférieurement, pour toute f semi-continue inférieurement bornée sur X; on peut se contenter, pour des λ de masse fixée égale à 1, de fonctions $f\geqslant 0$ car, dès que f est semi-continue inférieurement bornée, il existe un M tel que $f+M$ soit semi-continue inférieurement bornée$\geqslant 0$.

Démontrons le théorème seulement dans le cas où X est complètement régulier; c'est plus simple, et cela nous suffira pour la suite. Soit $\check{X}$ le compactifié de Čech de X. Puisque la topologie étroite sur $\mathscr{P}(X)$ est induite par la topologie étroite (ou vague) de $\mathscr{P}(\check{X})$, et que $\mathscr{P}(\check{X})$ est vaguement compact, il suffit de montrer que l'adhérence $\overline{\mathscr{M}}$ de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{P}(\check{X})$ est dans $\mathscr{P}(X)$. Or, la fonction $\lambda\mapsto\lambda(K)$ étant semi-continue supérieurement pour la topologie étroite, on voit que, pour tout $\varepsilon>0$ et toute $\lambda\in\overline{\mathscr{M}}$, on a $\lambda(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$. Donc toute $\lambda\in\overline{\mathscr{M}}$ est portée par une réunion dénombrable de compacts de X donc par X. CQFD.

(1.1 bis) *Les fonctions-poids.*

(6) Voir BOURBAKI [1], démonstration du lemme 1, chap. III, § 3, n°. 4.

(7) F. TOPSOE [1].

DÉFINITIONS. *Soit $\bar{\boldsymbol{R}}_+$ la demi-droite $\geqslant 0$ achevée (sous-ensemble des éléments $\geqslant 0$ de la droite réelle achevée $\bar{\boldsymbol{R}}$, donc réunion de la demi-droite $\geqslant 0$ et de $+\infty$; avec sa topologie compacte usuelle). Une fonction poids Φ sera une application de $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ dans $\bar{\boldsymbol{R}}_+$, ayant les propriétés suivantes:*
(1) *Φ est croissante pour la relation d'ordre $\mu \leqslant \nu$ ($\mu \leqslant \nu$ signifiant que, pour tout $a \geqslant 0$, $\mu(]a, +\infty]) \leqslant \nu(]a, +\infty])$); autrement dit, si $\mu \leqslant \nu$, on a $\Phi(\mu) \leqslant \Phi(\nu)$;*
(2) *Φ est semi-continue inférieurement, sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ muni de la topologie étroite. Autrement dit, si $\lim_j \mu_j = \mu$ pour la convergence étroite, on a $\liminf_j \Phi(\mu_j) \geqslant \Phi(\mu)$.*

Notons que la relation d'ordre définie ici n'est pas la relation usuelle entre mesures (qui serait triviale pour des mesures ayant toutes la même masse 1!). Soit $\mu \in \mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$; pour $t \geqslant 0$, soit $M(t) = \mu(]t, +\infty])$; la relation d'ordre entre les mesures est la relation d'ordre usuelle entre leurs fonctions de répartition M. Notons que l'on a toujours les inégalités

$$(1.2) \qquad (1-M(t))\delta_{(0)} + M(t)\delta_{(t)} \leqslant \mu \leqslant (1-M(t))\delta_{(t)} + M(t)\delta_{(+\infty)} .$$

Si μ est une probabilité sur $\bar{\boldsymbol{R}}$ ou $\boldsymbol{C}$, appelons $|\mu|$ son image dans $\bar{\boldsymbol{R}}_+$ par l'application $t \mapsto |t|$ (pas de confusion possible avec la notation habituelle de module d'une mesure, puisque μ est déjà $\geqslant 0$); on posera alors $\Phi(\mu) = \Phi(|\mu|)$, ce qui permet d'étendre Φ aux probabilités sur $\bar{\boldsymbol{R}}$ ou $\boldsymbol{C}$. Soient X un espace topologique séparé, λ une probabilité de Radon sur X, f une fonction sur X à valeurs dans $\bar{\boldsymbol{R}}$ ou $\boldsymbol{C}$, λ-mesurable. Alors l'image $f(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur $\bar{\boldsymbol{R}}$ ou $\boldsymbol{C}$, et on peut calculer $\Phi(f(\lambda))$, que nous noterons aussi $\Phi(\lambda, f) = \Phi(\lambda, |f|)$.

PROPOSITION (1.2 bis). 1′) *Pour X, λ donnés, si $0 \leqslant f \leqslant g$, on a $f(\lambda) \leqslant g(\lambda)$, donc $\Phi(\lambda, f) \leqslant \Phi(\lambda, g)$.*
2′) *Pour X, f donnés, f semi-continue inférieurement $\geqslant 0$, l'application $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, f)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{P}(X)$.*

Soit en effet $\lim_j \lambda_j = \lambda$, suivant un ultrafiltre sur $\mathscr{P}(X)$. Comme $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ est compact parce que $\bar{\boldsymbol{R}}_+$ est compact, on a $\lim_j f(\lambda_j) = \mu \in \mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$. Donc pour toute fonction continue réelle φ sur $\bar{\boldsymbol{R}}_+$, on a $\lim_j \lambda_j(\varphi \circ f) = \lim_j (f(\lambda_j))(\varphi) = \mu(\varphi)$. Prenons en particulier φ croissante et $\geqslant 0$, alors $\varphi \circ f$ est semi-continue inférieurement sur X, de sorte que, d'après la définition même de la convergence étroite des mesures, $\liminf_j \lambda_j (\varphi \circ f) \geqslant \lambda(\varphi \circ f) = f(\lambda)(\varphi)$. Donc, pour φ continue, croissante et $\geqslant 0$, on a $\mu(\varphi) \geqslant (f(\lambda))(\varphi)$. Mais toute fonction caractéristique d'un intervalle ouvert $]a, +\infty]$ est limite simple d'une suite de telles fonctions φ, bornées par 1, donc, par Lebesgue, $\mu(]a, +\infty]) \geqslant (f(\lambda))(]a, +\infty])$ ou, pour la relation d'ordre des mesures sur $\bar{\boldsymbol{R}}_+ : \mu \geqslant f(\lambda)$. La croissance de Φ donne donc $\Phi(\mu) \geqslant \Phi(\lambda, f)$. Et la semi-continuité inférieure de Φ sur $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$ donne $\liminf_j \Phi(\lambda_j, f) \geqslant \Phi(\mu)$, donc finalement $\liminf_j \Phi(\lambda_j, f) \geqslant \Phi(\lambda, f)$. CQFD.

Exemples de fonctions-poids sur $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$.

Exemple (1.3).

$$\|\mu\|_p = \left(\int_{\bar{R}_+} t^p d\mu(t)\right)^{1/p}, \qquad 0 < p < +\infty,$$

définit un poids $\| \ \|_p$. Pour λ probabilité de Radon sur X topologique, et f λ-mesurable à valeurs dans $\bar{R}$ ou C,

$$\|\lambda, f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(X,\lambda)},$$

cette dernière quasi-norme (c'est une norme pour $p \geqslant 1$, non pour $p < 1$, L^p n'étant pas localement convexe) étant supposée égale à $+\infty$ pour $f \notin L^p(X, \lambda)$.

Exemple (1.4).

$$\|\mu\|_\infty = \text{Maximum du support de } \mu$$

définit un poids $\| \ \|_\infty$. Pour λ de Radon sur X et f λ-mesurable, à valeurs dans $\bar{R}$ ou C,

$$\|\lambda, f\|_\infty = (\text{Sup. ess.})_\lambda |f| = \|f\|_{L^\infty(X,\lambda)}$$

(la dernière norme supposée égale à $+\infty$ pour $f \notin L^\infty(X, \lambda)$).

Exemple (1.5) (utile pour les variables aléatoire gaussiennes). $\mu \mapsto \int_{\bar{R}_+} \exp(k\pi t^2) d\mu(t)$ est un poids.

Exemple (1.6). Les exemples (1.3), (1.5) sont des cas particuliers du suivant: soit φ une fonction $\geqslant 0$ sur $\bar{R}_+$, croissante, continue à gauche (donc semi-continue inférieurement): $\Phi(\mu) = \int_{\bar{R}_+} \varphi(t) d\mu(t)$ est un poids. La croissance de Φ est assurée par celle de φ, comme on le voit en utilisant la formule d'intégration par parties dans les intégrales de Stieltjes; si $M(t) = \mu(]t, +\infty])$, on a en effet

$$\int_{\bar{R}_+} \varphi(t) d\mu(t) = \varphi(0) + \int_0^{+\infty} M(t) d\varphi(t),$$

avec $d\varphi \geqslant 0$, et la relation d'ordre pour les mesures μ est exactement la relation d'ordre habituelle pour les fonctions M correspondantes. Ensuite la semi-continuité inférieure de Φ est assurée par celle de φ.

Pour X, λ, comme précédemment on a

$$\Phi(\lambda, f) = \int_X \Phi(|f(x)|) d\lambda(x).$$

Exemple (1.7). Prenons un poids Φ de la forme (1.6,) avec $\varphi(+\infty)<+\infty$, $\varphi(t)>0$ pour $t>0$ et tendant vers 0 pour t tendant vers 0. L'inégalité (1.2) nous donne, pour tout t:

$$M(t)\varphi(t)\leqslant\Phi(\mu)\leqslant(1-M(t))\varphi(t)+M(t)\varphi(+\infty)\ .$$

On en déduit aisément que $\Phi(\mu_j)$ converge vers 0 si et seulement si μ_j converge étroitement vers δ (i.e. si, pour tout $t>0$, $M_j(t)$ tend vers 0). Alors, pour X, λ donnés, f_j fonctions λ-mesurables sur X, à valeurs finies réelles ou complexes, $\Phi(\lambda, f_j)$ converge vers 0 si et seulement si f_j converge vers 0 en probabilité relativement à λ, c. à d. vers 0 dans $L^0(X, \lambda)$. Dans la pratique, on prend fréquemment $\varphi(t)=\operatorname{Inf}(1, t)$.

Exemple (1.8). Pour tout $a\geqslant 0$, $\mu\mapsto M(a)=\mu(]a, +\infty])$ est un poids; il est de la forme (1.6), avec φ fonction caractéristique de l'ouvert $]a, +\infty]$. Nous appellerons M_a ce poids.

Pour que $\mu_j\in\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ converge étroitement vers δ, il faut et il suffit que, pour tout $a>0$, $M_a(\mu_j)$ converge vers 0. Pour que f_j converge vers 0 dans $L^0(X, \lambda)$, il faut et il suffit que, pour tout $a>0$, $M_a(\lambda, f_j)$ converge vers 0. En d'autres termes, les ensembles $\{\mu\in\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+);\, M_a(\mu)\leqslant\varepsilon\}$, $a>0$, $\varepsilon>0$, forment un système fondamental de voisinages de δ dans $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$, et les ensembles $\{f\in L^0(X, \lambda);\, M_a(\lambda, f)\leqslant\varepsilon\}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans $L^0(X, \lambda)$.

Exemple (1.9). Soit $\alpha\geqslant 0$. Pour toute μ, il existe un plus petit nombre $a\geqslant 0$ tel que $\mu(]a, +\infty])\leqslant\alpha$. Appelons $J_\alpha(\mu)$ ce nombre; J_α est un poids. Il est en effet trivialement croissant; il est semi-continu inférieurement, car l'ensemble des μ pour lesquelles $J_\alpha(\mu)\leqslant b$ est exactement l'ensemble des μ pour lesquelles $\mu(]b, +\infty])\leqslant\alpha$, il est donc fermé dans $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$. Le cas $\alpha\geqslant 1$ est sans intérêt, car J_α est identiquement nulle. Pour $\alpha=0$, on retrouve l'exemple (1.4).

Il y a une relation évidente entre les poids M_a (exemple précédent) et les poids J_α. Pour $0<a<+\infty$, $0<\alpha<1$, l'inégalité $M_a(\mu)\leqslant\alpha$ est équivalente à $\mu(]a, +\infty])\leqslant\alpha$, donc à $J_\alpha(\mu)\leqslant a$. ($a\mapsto M_a(\mu)$ et $\alpha\mapsto J_\alpha(\mu)$ sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre). Soit X un espace topologique séparé, λ une probabilité de Radon sur X. Un système fondamental de voisinages de 0 de $L^0(X, \lambda)$ est donné par les homothétiques des V_α, $0<\alpha<1$:

$$f\in V_\alpha \Longleftrightarrow \lambda(\{x\in X;\, |f(x)|>1\})\leqslant\alpha\ ;$$

la jauge de ce voisinage V_α est précisément donnée par

$$f\mapsto\operatorname{Inf}\{a\in\boldsymbol{R}_+;\, \lambda\{x\in X;\, |f(x)|>a\}\leqslant\alpha\}=J_\alpha(\lambda, f)\ .$$

C'est pourquoi ces poids J_α joueront un rôle essentiel pour tout ce qui concernera la convergence en probabilité. Ici encore, $\mu_j \in \mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$ converge étroitement vers δ, si et seulement si, pour tout $\alpha>0$, $J_\alpha(\mu_j)$ tend vers 0; f_j converge vers 0 dans $L^0(X, \lambda)$, si et seulement si, pour tout $\alpha>0$, $J_\alpha(\lambda, f_j)$ tend vers 0.

PROPOSITION (1.10). *Toute constante $\geqslant 0$ est un poids. La somme et l'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de poids sont des poids. Le produit d'un poids par un nombre $\geqslant 0$ est un poids. Si Φ est un poids, et si φ est une fonction $\geqslant 0$, croissante et continue à gauche sur $\bar{\boldsymbol{R}}_+$, $\varphi\circ\Phi$ est un poids. Si S est un espace topologique séparé muni d'une mesure $\rho\geqslant 0$, et si $(\Phi_s)_{s\in S}$ est une famille de poids indexée par S, telle que, pour toute $\mu\in\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$, $s\mapsto\Phi_s(\mu)$ soit ρ-mesurable, alors Φ définie par $\Phi(\mu)=\int_S \Phi_s(\mu)d\rho(s)$ est un poids.*

Tout se démontre assez facilement. Bornons-nous par exemple à montrer que, pour $\varphi\geqslant 0$, croissante et continue à gauche, $\varphi\circ\Phi$ est un poids; il suffit de voir qu'elle est semi-continue inférieurement pour la topologie étroite. Soit $\alpha\geqslant 0$; il existe β (maximum de $\varphi^{-1}([0, \alpha])$), tel que $\varphi(t)\leqslant\alpha$ soit équivalent à $t\leqslant\beta$; alors l'ensemble des μ qui vérifient $\varphi(\Phi(\mu))\leqslant\alpha$ est exactement l'ensemble de celles qui vérifient $\Phi(\mu)\leqslant\beta$, il est donc fermé, d'où le résultat.

Plusieurs des exemples précédents sont formés d'après ce théorème. Prenons par exemple les poids (1.6); d'après la formule de Stieltjes, ils s'écrivent $\varphi(0)+\int_{\bar{\boldsymbol{R}}_+} M_s d\varphi(s)$, ce sont donc des intégrales de poids.

Exemple (1.11). En appliquant la proposition (1.10) aux M_a de l'exemple (1.8), en nous bornant à des $a>0$, on trouve que, pour toute fonction $\varphi\geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$, $\sup\limits_{0<t<+\infty} \varphi(t)M_t$ est un poids. On peut naturellement se borner à des fonctions φ croissantes (car, pour $t'\geqslant t$, $M_{t'}\leqslant M_t$, donc, si $\varphi(t')<\varphi(t)$, $\varphi(t')M_{t'}\leqslant\varphi(t)M_t$, et par suite t' n'intervient pas dans le calcul de Sup; on peut donc toujours remplacer φ par la plus petite majorante croissante).

Supposons en particulier φ croissante, $\varphi(+\infty)<+\infty$, $\varphi(t)>0$ pour $t>0$ et tendant vers 0 pour t tendant vers 0. Les inégalités (1.2) donnent alors, pour tout t fini >0:

$$\varphi(t-0)M_t(\mu)\leqslant\Phi(\mu)\leqslant\operatorname{Max}\,(\varphi(t), \varphi(+\infty)M_t(\mu))\ .$$

Alors $\Phi(\mu_j)$ converge vers 0 si et seulement si μ_j tend vers δ, et f_j converge vers 0 dans $L^0(X, \lambda)$ si et seulement si $\Phi(\lambda, f_j)$ tend vers 0.

Exemple (1.12). En appliquant la proposition 1.10 aux J_α de l'exemple (1.9), en nous bornant à $0<\alpha<1$, on voit que, pour toute fonction $\varphi\geqslant 0$ sur $]0, 1[$, $\sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)J_\alpha$ est un poids. Ici encore on peut prendre φ croissante, car $\alpha\mapsto J_\alpha$ est décroissante. Supposons $\varphi(\alpha)>0$ pour $\alpha>0$. Soit $t>0$ fini, on a

$$J_\alpha((1-M(t))\delta_{(0)}+M(t)\delta_{(t)})=0 \text{ si } \alpha\geqslant M(t), \quad t \text{ si } \alpha<M(t)\ ;$$

$$J_\alpha((1-M(t))\delta_{(t)}+M(t)\delta_{(+\infty)})=t \text{ si } \alpha\geqslant M(t), \quad +\infty \text{ si } \alpha<M(t)\ .$$

Alors les inégalités (1.2) donnent

$$\varphi(M(t)-0)t\leqslant\Phi(\mu)\leqslant+\infty\ .$$

On peut seulement conclure que, si $\Phi(\mu_j)$ tend vers 0, $M_t(\mu_j)$ tend vers 0 pour tout $t>0$, et μ_j tend vers δ; la réciproque n'est pas vraie, puisque $(1-k)\delta_{(0)}+k\delta_{(+\infty)}$ tend vers δ pour $k>0$ tendant vers 0, et que Φ vaut toujours $+\infty$ sur une telle mesure. Les poids $\operatorname{Sup}_{0<\alpha<1}\varphi(\alpha)J_\alpha$, avec φ partout >0 et bornée, seront très utilisés plus tard; *on les appellera les J-poids* (la raison pour laquelle on suppose φ bornée sera vue à l'exemple (2.10 bis).

(1.12 bis) *Poids plus forts et plus faibles que L^0.* Un poids Φ est dit plus fort que L^0, si la convergence de $\Phi(\mu_j)$ vers 0 implique la convergence étroite des μ_j vers δ; alors pour X, λ, donnés, $f_j\in L^0(X,\lambda)$, la convergence de $\Phi(\lambda,f_j)$ vers 0 implique la convergence des f_j vers 0 dans $L^0(X,\lambda)$, d'où la dénomination "plus fort que L^0". Inversement, Φ est dit plus faible que L^0 si la convergence des μ_j vers δ implique la convergence des $\Phi(\mu_j)$ vers 0; et alors la convergence des f_j dans un $L^0(X,\lambda)$ entraîne la convergence des $\Phi(\lambda,f_j)$ vers 0. Un poids plus fort et plus faible que L^0 est dit équivalent à L^0. [8]

Φ est plus fort que L^0, si et seulement si les ensembles $\{\mu\in\mathscr{P}(\overline{R}_+);\Phi(\mu)\leqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, forment une base de filtre plus fine que le filtre des voisinages de δ dans $\mathscr{P}(\overline{R}_+)$; et plus faible si elle est moins fine, c. à d. si chacun de ces ensembles est un voisinage de δ dans $\mathscr{P}(\overline{R}_+)$. Φ est équivalente à L^0, si et seulement si ces ensembles forment un système fondamental de voisinages de δ.

PROPOSITION (1.12 ter). *Un poids Φ est plus fort que L^0, si et seulement si $\Phi(\mu)=0$ implique $\mu=\delta$. Il est plus faible que L^0 si et seulement si $\Phi((1-k)\delta_{(t)}+k\delta_{(+\infty)})$ tend vers 0 quand $t\geqslant0$ et $k\geqslant0$ tendent vers 0.*

DÉMONSTRATION. Si Φ est plus fort que L^0, bien évidemment $\Phi(\mu)=0$ implique $\mu=\delta$. Inversement, supposons cette condition réalisée; soient des μ_j formant un ultrafiltre, tel que $\Phi(\mu_j)$ converge vers 0; comme $\mathscr{P}(\overline{R}_+)$ est compact, les μ_j ont une limite étroite μ; la semi-continuité inférieure de Φ entraîne $\Phi(\mu)=0$, donc $\mu=\delta$, et Φ est plus fort que L^0.

Si Φ est plus faible que L^0, il est certain que $\Phi((1-k)\delta_{(t)}+k\delta_{(+\infty)})$ doit tendre vers 0 quand k et t tendent vers 0, puisque $(1-k)\delta_{(t)}+k\delta_{(+\infty)}$ tend vers δ. In-

[8] De toute façon, si f_j converge vers f dans $L^0(X,\lambda)$, $f_j(\lambda)$ converge étroitement vers $f(\lambda)$, donc $f\mapsto\Phi(\lambda,f)$ est semi-continue inférieurement de $L^0(X,\lambda)$ dans $\overline{R}_+$.

versement supposons cette condition réalisée. Supposons que μ_j tende vers δ. Soit $\varepsilon>0$. Soient $t>0$ et $k>0$ tels que $\Phi((1-k)\delta_{(t)}+k\delta_{(+\infty)})\leqslant\varepsilon$. Il existe j_0 tel que $\mu_j(]t, +\infty])\leqslant k$ pour $j\geqslant j_0$; alors $\mu_j\leqslant(1-k)\delta_{(t)}+k\delta_{(+\infty)}$, donc $\Phi(\mu_j)\leqslant\varepsilon$ pour $j\geqslant j_0$, donc $\Phi(\mu_j)$ tend vers 0, et Φ est plus faible que L^0.

Exemples. Les exemples (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) si $\varphi(t)>0$ pour $t>0$, sont plus forts que L^0; les exemples (1.6) si $\varphi(+\infty)<+\infty$ et si $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, sont plus faibles que L^0. On retrouve ce qui est dit à l'exemple (1.7) pour l'équivalence avec L^0. Les poids M_a (exemple (1.8)) pour $a>0$, J_α (exemple (1.9)) pour $\alpha>0$, sont plus faibles que L^0. L'exemple (1.11), avec $\varphi(+\infty)<+\infty$, $\varphi(t)>0$ pour $t>0$ et tendant vers 0 pour t tendant vers 0, est équivalent à L^0; l'exemple (1.12) avec $\varphi(\alpha)>0$ pour $\alpha>0$ est plus fort que L^0, et il est plus faible, si φ est bornée et nulle au voisinage de $\alpha=0$. Les J-poids (exemple (1.12)) sont plus forts que L^0.

(1.13) *Poids compacts.*

DÉFINITION. *Un poids Φ sur $\mathscr{P}(\bar{R}^+)$ est compact si, pour tout $M\geqslant 0$ fini, l'ensemble $\{\mu\in\mathscr{P}(\bar{R}_+); \Phi(\mu)\leqslant M\}$ est un compact de $\mathscr{P}(R_+)$.* Nous disons bien $\mathscr{P}(R_+)$ et non $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$; en effet, cet ensemble est toujours fermé à cause de la semi-continuité inférieure de Φ, et comme $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$ est compact, il est toujours compact dans $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$. Donc *Φ est compact, si et seulement si $\Phi(\mu)<+\infty$ implique μ soit portée par R_+.* Le critère de PROKHOROV (théorème (1.1)) dit que Φ est compact, si et seulement si, pour tout $M\geqslant 0$ fini et tout $\varepsilon>0$, il existe $a\geqslant 0$ fini tel que $\Phi(\mu)\leqslant M$ implique $\mu(]a, +\infty])\leqslant\varepsilon$.

Mais, si μ porte la masse $k>0$ à l'infini, $\mu\geqslant(1-k)\delta_{(0)}+k\delta_{(+\infty)}$, donc:

PROPOSITION (1.13). *Φ est compact si et seulement si $\Phi((1-k)\delta_{(0)}+k\delta_{(+\infty)})=+\infty$ pour $0<k\leqslant 1$.*

Les exemples (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) si $\varphi(+\infty)=+\infty$, (1.11) ($\Phi=\operatorname*{Sup}_{0<t<+\infty}\varphi(t)M_t$, φ croissante), si $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$, (1.12) ($\Phi=\operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1}\varphi(\alpha)J_\alpha$, φ croissante) si $\varphi(\alpha)>0$ pour tout α, donnent des poids compacts; les J-poids de (1.12) sont compacts. Soit X un espace topologique séparé, et soit λ une probabilité de Radon sur X. Un ensemble B de $L^0(X, \lambda)$ est borné, si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe a *fini* tel que $\lambda\{x\in X; |f(x)|>a\}\leqslant\varepsilon$ pour toute $f\in B$. Cela veut exactement dire que l'ensemble des $f(\lambda)$ est relativement compact dans $\mathscr{P}(R)$ ou $\mathscr{P}(C)$; si donc Φ est compact, l'ensemble $\{f\in L^0(X, \lambda); \Phi(\lambda, f)\leqslant M\}$ est borné dans $L^0(X, \lambda)$, pour tout M fini.

(1.14) *Poids homogènes.*

DÉFINITION. Pour $\mu\in\mathscr{P}(R_+)$, et $\tau>0$ fini, soit $\tau\mu$ l'image de μ par l'homothétie de centre origine et de rapport τ (la notation pourrait faire confondre avec le produit de μ par τ, ce qui serait absurde pour les mesures ayant toutes la même masse 1). Alors Φ est dit homogène (sous-entendu de degré 1), si on a toujours $\Phi(\tau\mu)=\tau\Phi(\mu)$. Pour f λ-mesurable sur X, on aura alors $\Phi(\lambda, \tau f)=|\tau|\Phi(\lambda, f)$, parce que, pour $\tau>0$: $\tau(f(\lambda))=(\tau f)(\lambda)$. Les exemples (1.3), (1.4), (1.9) (les J_α), (1.12) sont homogènes. Donc (1.3), (1.4), (1.12) si φ est partout >0, sont homogènes compacts; les J-poids sont homogènes compacts. Les poids homogènes joueront un rôle important à cause de l'intervention des semi-normes dans les espaces vectoriels topologiques, qui sont elles-mêmes homogènes. La notion d'homogénéité indique le rôle important que joueront les J_α pour étudier l'espace $L^0(X, \lambda)$.

(1.14 bis) *Remarque.* Nous n'avons pas donné un seul exemple de poids Φ à la fois plus faible que L^0 et compact. C'est inévitable. Les proposition (1.12 ter) et (1.13) l'excluent. Si Φ est plus faible que L^0, alors, pour tout $M>0$ fini, l'ensemble $\{\mu\in\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+); \Phi(\mu)\leqslant M\}$ est un voisinage de δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$. Or, d'après la définition d'un voisinage de δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$, il n'est jamais compact. On peut encore le voir autrement. Pour X, λ, donnés, $M\geqslant 0$ fini, $\{f\in L^0(X, \lambda); \Phi(\lambda, |f|)\leqslant M\}$ devrait être un voisinage de 0, et borné; or, sauf dans des cas triviaux, les voisinages de 0 dans un $L^0(X, \lambda)$ ne sont jamais bornés.

Remarquons aussi que nous avons trouvé des poids *homogènes* plus faibles que L^0 (exemple: les J_α, $\alpha>0$) ou plus forts (exemple (1.12), avec $\varphi>0$) mais jamais équivalents à L^0. C'est inévitable. Sans quoi les ensembles $\{f\in L^0(X, \lambda); \Phi(\lambda, f)\leqslant M\}$, M fini >0, formeraient un système fondamental de voisinages de 0 de $L^0(X, \lambda)$, et comme ils sont homothétiques, ces voisinages seraient bornés, ce qui est impossible.

Un poids homogène compact est plus fort que L^0 (et évidemment pas plus faible, sans quoi il serait homogène et équivalent, ou compact et plus faible, ce qui, nous venons de le voir, est exclu). En effet, soit $\Phi(\mu)=0$. La fonction $a\mapsto\Phi((1-k)\delta_{(0)}+k\delta_{(a)})$, k fixé, est homogène en a; pour a infini elle doit tendre vers $+\infty$, si $k>0$, puisque Φ est compact; donc elle est $\neq 0$ pour tout $a>0$ et tout $k>0$. Or $0=\Phi(\mu)\geqslant\Phi((1-k)\delta_{(0)}+k\delta_{(a)})$ pour $k=\mu(]a, +\infty])$; donc $\mu(]a, +\infty])=0$ pour tout $a>0$, donc $\mu=0$.

On peut aussi préciser:

PROPOSITION (1.14 ter).

1) *Pour qu'une partie* $\mathscr{M}$ *de* $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$ *soit relativement compacte dans* $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$, *il faut et il suffit qu'il existe un poids compact* Φ *tel que* $\Phi(\mu)\leqslant 1$ *pour toute* $\mu\in\mathscr{M}$. *On peut même supposer* Φ *de la forme* (1.11) (*avec* $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$), *ou* J-*poids de la forme* (1.12) (*avec* φ *partout* >0 *et bornée*) (*donc homogène et plus fort que* L^0).

2) *Pour qu'une partie* B *d'un* $L^0(X, \lambda)$ *soit bornée, il faut et il suffit qu'il*

***existe un poids compact Φ tel que $\Phi(\lambda, f)\leqslant 1$ pour toute $f\in B$; on peut en outre choisir Φ de la forme* (1.11) *ou J-poids* (1.12).**

DÉMONSTRATION. Nous venons déjà d'indiquer à la remarque précédente, que B est borné si et seulement si l'ensemble $\mathscr{M}$ des $|f|(\lambda)$, $f\in B$, est relativement compact dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$. Donc 2) résultera de 1). La suffisance de la condition est la définition même des poids compacts. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit donc $\mathscr{M}$ une partie relativement compacte de $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a(\mathscr{M}, \varepsilon)$ fini $\geqslant 1$ tel que $\mu(]a, +\infty])\leqslant\varepsilon$ pour toute $\mu\in\mathscr{M}$; mais cela veut dire que

$$\frac{1}{\varepsilon} M_{a(\mathscr{M},\varepsilon)}(\mu)\leqslant 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a(\mathscr{M}, \varepsilon)} J_\varepsilon(\mu)\leqslant 1\,,$$

donc que $\Phi(\mu)\leqslant 1$, si Φ est le poids défini par

$$\operatorname*{Sup}_{0<\varepsilon<1} \frac{1}{\varepsilon} M_{a(\mathscr{M},\varepsilon)} \quad \text{ou par} \quad \operatorname*{Sup}_{0<\varepsilon<1} \frac{1}{a(\mathscr{M}, \varepsilon)} J_\varepsilon\,.$$

(1.15) *Fonctions $\geqslant 0$ compactes sur un espace topologique.*

DÉFINITION. *Une fonction θ sur un espace topologique séparé X est dite compacte, si elle est $\geqslant 0$ (à valeurs, comme toujours, finies ou non), et si, pour tout $a<+\infty$, l'ensemble $\{x\in X; \theta(x)\leqslant a\}$ est compact. Cela entraîne la semi-continuité inférieure de θ.*

Un poids compact est une fonction compacte sur $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$. L'exemple le plus important sera le suivant: si F est un espace de Banach, la norme sur $\sigma(F', F)$ est compacte. La norme sur un Banach réflexif est compacte pour la topologie faible. Si E est un espace vectoriel topologique, F un sous-espace vectoriel de E, muni d'une structure de Banach avec injection continue, et si la boule unité de F est compacte dans E, la fonction sur E, égale à la norme sur F et à $+\infty$ sur $\complement F$, est compacte.

(1.15 bis) *Ordre d'une probabilité de Radon.*

DÉFINITION. Soient X un espace topologique séparé, θ une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur X, Φ un poinds sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$. On dit qu'une probabilité de Radon λ sur X est d'ordre (Φ, θ), si $\Phi(\lambda, \theta)$ (c. à d. $\Phi(\theta(\lambda)))\leqslant 1$. Si λ est d'ordre (Φ, θ), elle est a fortiori d'ordre $(\bar{\Phi}, \bar{\theta})$, si $\bar{\Phi}\leqslant\Phi$ et $\bar{\theta}\leqslant\theta$.

Alors on a le corollaire trivial suivant du théorème de PROKHOROV:

PROPOSITION (1.16). ***Soient X un espace topologique séparé, θ une fonction compacte $\geqslant 0$ sur X, Φ un poids compact sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$. L'ensemble $\mathscr{M}$ des probabilités de Radon λ sur X, d'ordre (Φ, θ), c. à d. vérifiant $\Phi(\lambda, \theta)\leqslant 1$, est compact dans $\mathscr{P}(X)$.***

DÉMONSTRATION. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a_\varepsilon<+\infty$ tel que $\Phi(\mu)\leqslant 1$ entraîne

$\mu(]a_\varepsilon, +\infty]) \leqslant \varepsilon$; donc $\Phi(\lambda, \theta) \leqslant 1$ entraîne $\lambda(K_\varepsilon) = \lambda(\{x \in X; \theta(x) \leqslant a_\varepsilon\}) \geqslant 1 - \varepsilon$, et, comme cet ensemble K_ε est compact, le théorème de PROKHOROV dit que $\mathscr{M}$ est relativement compact dans $\mathscr{P}(X)$. Mais la fonction $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, \theta)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{P}(X)$, donc $\mathscr{M}$ est fermé, donc il est compact. CQFD.

REMARQUE 1. L'inégalité $\leqslant 1$ peut évidemment être remplacée par $\leqslant M$, M fini >0.

REMARQUE 2. Si $\Phi(\lambda, \theta) < +\infty$, Φ compact, $\theta(\lambda)$ est portée par $\boldsymbol{R}_+$, donc λ est portée par l'ensemble $\{x \in X;\ \theta(x) < +\infty\}$.

Applications aux probabilités cylindriques sur les espaces vectoriels topologiques.[9]

(1.17.00) *La topologie cylindrique.*

DÉFINITION. Dans toute la suite, les espaces vectoriels topologiques considérés, même si ce n'est pas explicitement écrit, seront sur $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$, *non nécessairement localement convexes, mais séparés par leur dual* (*donc séparés*). Soit E un tel espace vectoriel. Appelons $\check{\mathscr{P}}(E)$ l'espace des probabilités cylindriques sur E; nous le munirons de la topologie la moins fine pour laquelle, pour toute application linéaire continue v de E dans un espace vectoriel G de dimension finie, l'application $\lambda \mapsto v(\lambda)$ de $\check{\mathscr{P}}(E)$ dans $\mathscr{P}(G)$, soit continue. En d'autres termes, des probabilités cylindriques λ_j convergent vers une probabilité cylindrique λ, si et seulement si, pour toute v, $v(\lambda_j)$ converge vers $v(\lambda)$ dans $\mathscr{P}(G)$. On appellera topologie cylindrique cette topologie, convergence cylindrique la convergence correspondante. Trivialement l'injection $\mathscr{P}(E) \to \check{\mathscr{P}}(E)$ est continue; et $\check{\mathscr{P}}(E)$ est séparé, parce que les $\mathscr{P}(G)$ sont séparées (pour G de dimension finie) et que les $v: \check{\mathscr{P}}(E) \to \mathscr{P}(G)$ séparent les points de $\check{\mathscr{P}}(E)$, par définition même des probabilités cylindriques.

PROPOSITION (1.17.0).

1) *Si $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$, pour que des probabilités cylindriques λ_j converge cylindriquement vers une probabilité cylindrique λ, il faut et il suffit que les images de Fourier $\mathscr{F}\lambda_j$ convergent vers $\mathscr{F}\lambda$, uniformement sur tout compact contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

2) *Pour $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in E'$, les images $\xi(\lambda_j)$ convergent vers $\xi(\lambda)$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$.*

3) *Sur l'espace $\mathscr{P}(E_\sigma)$ des probabilités de Radon sur $E_\sigma = \sigma(E, E')$, la topologie cylindrique n'est autre que la topologie étroite.*

DÉMONSTRATION. On peut toujours, dans tous les cas, supposer $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$.

1) L'image de Fourier de $v(\lambda)$, v application linéaire continue de E dans un espace

(9) Les probabilités cylindriques sont définies et étudiées dans SCHWARTZ [1], 2e partie, et dans SCHWARTZ [4].

vectoriel de dimension finie, est l'image réciproque par ${}^tv$ de $\mathscr{F}\lambda$; la 1[ère] partie résulte alors du théorème de convergence de Paul LÉVY.

2) Si λ_j converge cylindriquement vers λ, évidemment $\xi(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$. Supposons inversement que, pour tout ξ, $\xi(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$. Soit v l'application linéaire continue de E dans $\boldsymbol{R}^n$ définie par n éléments du dual, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$. Sûrement, par compacité, les $v(\lambda_j)$ ont une limite étroite ν dans $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}^n)$, $\bar{\boldsymbol{R}}$ étant un compactifié de $\boldsymbol{R}$. Mais les projections de ν sur les facteurs sont les images de λ par $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, donc portées par $\boldsymbol{R}$; donc ν est portée par $\boldsymbol{R}^n$. Mais alors $v(\lambda)$ et ν sont des probabilités sur $\boldsymbol{R}^n$, ayant même image de Fourier puisque leurs images par toute forme linéaire sur $\boldsymbol{R}^n$ coincident; donc $v(\lambda)=\nu$. Ainsi, pour toute v, les $v(\lambda_j)$ convergent vers $v(\lambda)$, et par suite λ_j converge cylindriquement vers λ.

3) Pour que la topologie cylindrique sur $\mathscr{P}(E_\sigma)$, a priori moins fine que la topologie étroite, soit la même, il faut et il suffit que, pour toute fonction f semi-continue inférieurement bornée sur E_σ, $\lambda \mapsto \lambda(f)$ soit semi-continue inférieurement pour la topologie cylindrique. Comme la masse est toujours 1, il suffit que ce soit vrai pour $f \geqslant 0$, d'où simplement pour $f=\chi_{\mathscr{O}}$, où les $\mathscr{O}$ forment une base, stable par réunions finies, de la topologie E_σ, car toute fonction $f \geqslant 0$ semi-continue inférieurement est enveloppe supérieure de sommes finies de $\chi_{\mathscr{O}}$. Or de tels ouverts formant une base de E_σ peuvent être définis par les $v^{-1}(\Omega)$, $v: E \to G$ linéaires continues de E dans les espaces vectoriels de dimension finie, Ω ouverts de G. Alors $\lambda(v^{-1}(\Omega))=(v(\lambda))(\Omega)$; $\lambda \mapsto v(\lambda)$ est continue de $\check{\mathscr{P}}(E)$ dans $\mathscr{P}(G)$, et $\nu \mapsto \nu(\Omega)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{P}(G)$, d'où le résultat. CQFD.

COROLLAIRE. *Soient Φ un poids, θ une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur $E_\sigma=\sigma(E, E')$. Sur l'espace $\mathscr{P}(E_\sigma)$ des probabilités de Radon sur E_σ, la fonction $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, \theta)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie cylindrique.*

Il suffit d'appliquer la proposition précédente et la proposition (1.2 bis).

THÉORÈME (1.17). *Soient E un espace vectoriel topologique séparé par son dual, θ une fonction compacte sur E, Φ un poids compact. L'ensemble $\mathscr{M}$ des probabilités de Radon sur E, d'ordre (Φ, θ), c. à d. vérifiant $\Phi(\lambda, \theta) \leqslant 1$, est compact dans $\mathscr{P}(E)$, donc fermé dans $\check{\mathscr{P}}(E)$.*

En d'autres termes, toute probabilité cylindrique λ, limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j d'ordre (Φ, θ), est elle-même une probabilité de Radon, d'ordre (Φ, θ).

(1.18) *Exemple fondamental: probabilités de Radon d'ordre p sur des Banach.*

1) *Soient E un espace vectoriel topologique, B une partie équilibrée fermée de E. La jauge de B est la fonction θ_B ou j_B définie par* $\theta_B(x)=\mathrm{Inf}\{k\geqslant 0; x\in kB\}$. Bien entendu, θ_B vaut $+\infty$ sur le complémentaire du sous-espace vectoriel E_B engendré par B. Et θ_B est semi-continue inférieurement, car, pour a fini>0, $\theta_B(x)\leqslant a$ équivaut à $x\in aB$, qui est fermé.

2) *Soit alors Φ un poids homogène* (il n'est pas intéressant de considérer les poids non homogènes, car les jauges sont homogènes). *On dit qu'une probabilité de Radon λ sur E est d'ordre Φ, s'il existe une partie B, équilibrée fermée bornée, telle que λ soit d'ordre (Φ, θ_B), i.e. que $\Phi(\lambda, \theta_B)\leqslant 1$.* Cela implique, si Φ est compact, que λ soit portée par E_B.

3) Un ensemble $\mathscr{M}$ de $\mathscr{P}(E)$ est dit uniformément d'ordre Φ s'il existe une même partie B bornée équilibrée fermée telle que toutes les $\lambda\in\mathscr{M}$ soient d'ordre (Φ, θ_B).

4) En particulier, λ est dite d'ordre p, $0<p\leqslant+\infty$, si elle est d'ordre $\| \ \|_p$, poids défini aux exemples (1.3) et (1.4).

5) Nous aurons toujours, dans la suite, à étendre les résultats relatifs aux poids $\| \ \|_p$ à $p=0$. Une probabilité de Radon λ sur E est dite d'ordre 0, si, pour tout $\alpha>0$, elle est d'ordre J_α. Ce n'est donc pas *un* poids qui intervient, mais la famille des poids J_α. *Mais alors toute probabilité de Radon est automatiquement d'ordre* 0; en effet, il existe une partie équilibrée bornée (et même compacte) B telle que $\lambda\left(\complement B\right)\leqslant\alpha$, ou $J_\alpha(\lambda, j_B)\leqslant 1$, et λ est d'ordre (J_α, j_B).

6) Un ensemble $\mathscr{M}\in\mathscr{P}(E)$ est alors uniformément d'ordre p, $0<p\leqslant+\infty$, s'il est uniformément d'ordre $\| \ \|_p$. Il est uniformément d'ordre 0 si, pour tout $\alpha>0$, il est uniformément d'ordre J_α; bien entendu, bien que toute probabilité de Radon soit d'ordre 0, un ensemble $\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(E)$ n'est pas en général uniformément d'ordre 0. Si les parties bornées de E sont relativement compactes, $\mathscr{M}$ est uniformément d'ordre 0 si et seulement s'il est relativement compact dans $\mathscr{P}(E)$; c'est exactement l'énoncé du théorème de PROKHOROV (1.1).

6 bis) On peut raffiner, et se donner un ensemble $\mathscr{T}$ de parties bornées équilibrées fermées de E. Alors λ sera dite d'ordre Φ (homogène) relativement à $\mathscr{T}$, ou d'ordre $(\Phi,\mathscr{T})$, s'il existe une partie $B\in\mathscr{T}$ telle que λ soit d'ordre (Φ, θ_B); on étendra de même toutes les notions précédentes.

7) Soit E un espace vectoriel bitopologique, de quasi-boule unité B, de quasi-norme θ. Alors une probabilité de Radon λ sur E (pour sa 1ère topologie!) sera dite d'ordre Φ, Φ poids homogène, s'il existe $M\geqslant 0$ fini tel que λ soit d'ordre $(\Phi, \theta/M)$, ou encore si $\Phi(\lambda, \theta)$ est fini. On notera par $\Phi(\lambda)$ la quantité $\Phi(\lambda, \theta)$. Si $\tau\lambda$ est l'homothétique de λ par l'homothétie de centre origine et de rapport τ,

$\Phi(\tau\lambda)=|\tau|\Phi(\lambda)$. Sur l'espace des probabilités de Radon, $\lambda\mapsto\Phi(\lambda)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie étroite ou cylindrique (prop. (1.2 bis) et corollaire de la prop. (1.17.0)).

En prenant $\Phi=\|\ \|_p$, λ est d'ordre p, $0<p\leqslant+\infty$, si et seulement s'il existe $M\geqslant 0$ fini tel que λ soit d'ordre $(\|\ \|_p, \theta/M)$, ou si $\|\lambda, \theta\|_p$, noté $\|\lambda\|_p$, est fini; ou encore si θ est dans $L^p(E, \lambda)$, et $\|\lambda\|_p=\|\theta\|_{L^p(E,\lambda)}$. Nécessairement λ est alors portée par E_B.

Un ensemble $\mathscr{M}$ est uniformément d'ordre Φ si et seulement si $\Phi(\lambda)$ est borné par un nombre $M\geqslant 0$ fini pour $\lambda\in\mathscr{M}$; on notera par $\Phi(\mathscr{M})$ la borne supérieure de $\Phi(\lambda)$ pour $\lambda\in\mathscr{M}$.

Puis λ est, comme précédemment, d'ordre 0, si, pour tout α, $0<\alpha<1$, elle est d'ordre J_α; une probabilité de Radon λ sur E est d'ordre 0 si et seulement si elle est portée par E_B. Mais on peut dire plus. Pour tout $\alpha>0$, il existe $R(\alpha)\geqslant 1$ fini tel que la boule de rayon $R(\alpha)$ contienne une masse $\geqslant 1-\alpha$, donc, si Φ est le J-poids (forme (1.12)) $\Phi=\operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1}(1/R(\alpha))\,J_\alpha$, λ est d'ordre Φ. Et un ensemble $\mathscr{M}$ de probabilités de Radon sur E est uniformément d'ordre 0 si et seulement s'il existe un J-poids Φ tel que les $\lambda\in\mathscr{M}$ soient uniformément d'ordre Φ. Cela veut exactement dire, d'après l'énoncé 1 de la proposition (1.14 ter), que l'ensemble des $\theta(\lambda)$, $\lambda\in\mathscr{M}$, est une partie relativement compacte de $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$.

Dans les exemples donnés au § 6, nous aurons souvent besoin de ce fait: si λ est une probabilité de Radon sur E, elle est concentrée à ε près sur la quasi-boule de rayon R, si et seulement si $J_\varepsilon(\lambda)=J_\varepsilon(\lambda, \theta)\leqslant R$; et λ est d'ordre $((1/R)J_\varepsilon, \theta)$.

8) Soient E un quasi-normé, E_N son espace normé associé. Une probabilité de Radon λ sur E, d'ordre Φ homogène, l'est a fortiori sur E_N, puisque l'injection $E\to E_N$ est continue de quasi-norme $\leqslant 1$; et $(\Phi(\lambda))_{E_N}\leqslant(\Phi(\lambda))_E$. Si E est dual $*$-faible $\sigma(F', F)$ d'un quasi-normé F, une probabilité de Radon λ d'ordre Φ sur $E_N=F'$ l'est a fortiori sur E, et alors $(\Phi(\lambda))_{E_N}=(\Phi(\lambda))_E$ puisque les normes sont les mêmes.

Le passage de E à E_N donne donc lieu à des résultats opposés dans les deux cas; ce n'est pas étonnant, puisque E est plus fin que E_N dans le premier et moins fin dans le deuxième.

Le théorème (1.17) admet alors le corollaire trivial suivant:

THÉORÈME (1.18 bis). *Soient E un espace vectoriel topologique (séparé par son dual), Φ un poids homogène compact, $\mathscr{T}$ un ensemble de parties équilibrées compactes de E. Alors toute probabilité cylindrique λ, limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j uniformément d'ordre Φ pour $\mathscr{T}$ (resp. uniformément d'ordre p, $0\leqslant p\leqslant+\infty$), est elle-même de Radon d'ordre Φ (resp. d'ordre p) pour*

$\mathscr{T}$.

DÉMONSTRATION. Par définition, il existe une partie $B \in \mathscr{T}$, telle que les λ_j soient d'ordre (Φ, θ_B). Alors B est compacte, donc θ_B est une fonction compacte, et on peut appliquer le théorème (1.17).

Ce résultat s'applique automatiquement pour $\Phi = \| \quad \|_p$, $p > 0$. Pour le cas de l'ordre 0, c'est ce qui a été dit à 7).

Nous nous attacherons spécialement, dans la suite, au cas où E est, soit un espace vectoriel quasi-normé, soit un dual $*$-faible $\sigma(F', F)$ d'un quasi-normé F. Dans le second cas, la boule est compacte, mais pas dans le premier.

Nous pourrions songer à prendre l'image dans $\sigma(E'', E')$ par l'application canonique de E dans $\sigma(E'', E')$; la boule unité de E'' est alors compacte. *Mais nous perdons alors énormément*; toute l'originalité de E par rapport à E_N disparaît, puisque E_N a le même dual et le même bidual que E. Nous sommes donc amenés à la convention suivante: *dans $\sigma(E'', E')$, la fonction θ qui interviendra sera toujours la jauge $\theta_{\bar{B}}$ de l'adhérence $\bar{B}$ ou B'' (pour la topologie $\sigma(E'', E')$) de la boule unité B de E.* On voit que $\bar{B}$ peut être beaucoup plus petite que la boule unité de E'', donc $\theta_{\bar{B}}$ beaucoup plus grande que la norme de E'' (et bien sûr compacte pour $\sigma(E'', E')$). Une probabilité de Radon d'ordre Φ dans E a une image dans $\sigma(E'', E')$ qui est de Radon d'ordre Φ, pour cette fonction θ. *Et c'est par rapport à cette fonction θ qu'on définira les probabilités de Radon d'ordre Φ dans $\sigma(E'', E')$, les ensembles uniformément d'ordre Φ, d'ordre* 0, *etc.* $\cdots$. Cela revient (en omettant de le mentionner!) à prendre la conception (6 bis) de (1.18), avec $\mathscr{T}$ = ensemble des parties bornées de $\sigma(E'', E')$, adhérences des parties bornées de E. C'est donc, comme il est dit dans les préliminaires avant la proposition (0.2 bis), *l'espace bitopologique* $\sigma(E'', E')$ qui intervient ici.

Rappelons que, pour E quasi-normé, *on suppose toujours implicitement (préliminaires,* (0.00)) *que la boule unité de E est faiblement fermée.* Alors $\theta_{\bar{B}}$ induit sur E exactement la quasi-norme θ.

Remarquons aussi que, pour $E = \sigma(F', F)$, F quasi-Banach, on peut employer encore $\sigma(E'', E')$ pour désigner E lui-même, car $E' = F$, conventionnellement muni de sa quasi-norme (préliminaires, (0.00)).

COROLLAIRE (1.18 ter). *Soit E un espace vectoriel quasi-normé ou un dual $*$-faible d'un quasi-normé. Soit Φ un poids homogène compact. Toute probabilité cylindrique λ, limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j, uniformément d'ordre Φ* (*resp. uniformément d'ordre p*, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$), *a une image dans l'espace bitopologique $\sigma(E'', E')$ qui est encore de Radon d'ordre Φ* (*resp. d'ordre p*). *En outre, $\Phi(\lambda) \leqslant \liminf_j \Phi(\lambda_j)$. Enfin λ est de Radon sur E lui-même, si*

E est un Banach réflexif, et alors d'ordre Φ (resp. d'ordre p).

Seul le cas réflexif demande une démonstration. Dans ce cas, la norme est compacte pour $\sigma(E, E')$, et nous savons seulement que λ a une image dans $\sigma(E, E')$ qui est de Radon. Mais, d'après un théorème de Phillips, toute probabilité de Radon sur $\sigma(E, E')$ provient d'une probabilité de Radon sur E lui-même. Donc il existe $\bar{\lambda}$ de Radon sur E telle que λ et $\bar{\lambda}$ aient même image dans $\sigma(E, E')$; mais $\check{\mathscr{P}}(E) \to \check{\mathscr{P}}(\sigma(E, E'))$ est toujours une bijection (10), donc $\lambda = \bar{\lambda}$, et λ est bien de Radon sur E. CQFD.

REMARQUE. Supposons F Banach réflexif, $E = \sigma(F', F)$. Alors λ *provient* d'une probabilité de Radon sur F' fort. Cela n'a pas de sens a priori de dire que λ *est* une probabilité de Radon sur F', puisqu'elle est donné comme probabilité cylindrique *sur* $\sigma(F', F)$, donc *pas sur* F'. Toutefois, puisque $\check{\mathscr{P}}(F') \to \check{\mathscr{P}}(\sigma(F', F))$ est une bijection (F' ayant pour dual $F'' = F$), on peut quand même identifier $\check{\mathscr{P}}(F')$ et $\check{\mathscr{P}}(\sigma(F', F))$ par cette bijection, et il est alors correct de dire que λ, probabilité cylindrique sur $\sigma(F', F)$ donc sur F', *est* de Radon sur F'.

Mais supposons F non réflexif, et F' séparable. Il est alors polonais de sorte que $\mathscr{P}(F') \to \mathscr{P}(\sigma(F', F))$ est bijective; donc λ *provient* d'une probabilité de Radon $\bar{\lambda}$ (unique) sur F'. Mais il est ici *totalement incorrect* de dire que λ *est* une probabilité de Radon sur F'; car $\check{\mathscr{P}}(F') \to \check{\mathscr{P}}(\sigma(F', F))$ *n'est pas injective*, et on ne peut donc pas identifier $\check{\mathscr{P}}(F')$ à un sous-espace de $\check{\mathscr{P}}(\sigma(F', F))$; on ne peut donc pas écrire $\lambda = \bar{\lambda}$ (11).

(1.19) *Fonctions aléatoires linéaires, applications décomposées.*

Soit E un espace vectoriel topologique séparé par son dual. Soit f une fonction aléatoire linéaire sur E', c. à d. une application linéaire de E' dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$, Ω espace topologique séparé, μ probabilité de Radon sur Ω. On sait qu'elle définit une probabilité cylindrique λ sur E que nous noterons λ_f, et qu'on établit ainsi une correspondance bijective entre $\check{\mathscr{P}}(E)$ et l'ensemble des classes d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E' (12).

On dit que f est décomposée, s'il existe une application μ-mesurable (au sens de Lusin) φ de Ω dans E, telle que, pour tout $\xi \in E'$, $f(\xi) \in L^0(\Omega, \mu)$ soit la μ-classe de la fonction $\langle \varphi, \xi \rangle$ ou $\xi \circ \varphi$, c. à d. de la fonction $\omega \mapsto \langle \varphi(\omega), \xi \rangle$; s'il en est ainsi, φ est unique à un ensemble négligeable près, autrement dit la μ-classe de φ est unique. Nous appellerons f_φ ou φ^* la fonction aléatoire $\xi \mapsto \langle \varphi, \xi \rangle$; la probabilité

(10) D'après leur définition même, les probabilités cylindriques sur E ne dépendent que de la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$.

(11) La probabilité cylindrique $\delta_{(a)}$ construite dans SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, §3, exemple 2, est sur l^1; son image dans $\sigma(l^1, c^0)$ est nulle.

(12) SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. V, §2.

associée qui est alors de Radon, est λ_{f_φ} ou $\lambda_{\varphi*}$, et c'est l'image $\varphi(\mu)$; on pourra aussi la noter λ_φ. Si f est décomposée, nous appellerons aussi φ_f l'application φ telle que $f=f_\varphi$, et alors $\varphi_f(\mu)=\lambda_f$.

PROPOSITION (1.19.0) *Pour que f soit décomposée, il est nécessaire que sa probabilité cylindrique associée λ_f soit de Radon* (puisqu'elle n'est autre que l'image $\varphi(\mu)$); *inversement, si λ_f est de Radon et portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de E, f est décomposée* ([13]).

Cette condition est réalisée, pour λ_f de Radon, si E est souslinien ou quasi-normé ou métrisable, ou si son dual est $*$-faiblement séparable, ou si $E=\sigma(F', F)$, F quasi-normé séparable ou Banach réflexif.

Voici quelques conséquences de cette manière de voir.

1) Soit Φ un poids sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$, et soit θ une fonction semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ sur E. Soit φ une application μ-mesurable de Ω dans E, $\lambda=\varphi(\mu)$ sa probabilité de Radon associée. Alors $\Phi(\lambda, \theta)=\Phi(\mu, \theta\circ\varphi)$. Donc λ est d'ordre (Φ, θ) si et seulement si $\Phi(\mu, \theta\circ\varphi)\leqslant 1$.

2) Soit E un espace vectoriel bitopologique, θ sa quasi-norme, et soit Φ un poids homogène, et toujours $\lambda=\varphi(\mu)$. Alors $\Phi(\lambda, \theta)$ se note $\Phi(\lambda)$ (voir (1.18), 7), et vaut $\Phi(\mu, \|\varphi\|)$ qu'on peut aussi noter $\Phi(\mu, \varphi)$. Donc $\varphi(\mu)$ est d'ordre Φ, si et seulement si $\Phi(\mu, \varphi)<+\infty$. Si $\mathscr{B}$ est un ensemble d'applications μ-mesurables de Ω dans E, on appellera $\Phi(\mu, \mathscr{B})$ la borne supérieure des $\Phi(\mu, \varphi)$ pour $\varphi\in\mathscr{B}$; c'est aussi $\Phi(\mathscr{M}_{\mathscr{B}})$, si $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ est l'ensemble des $\varphi(\mu)$, $\varphi\in\mathscr{B}$; et $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ est uniformément d'ordre Φ, si et seulement si $\Phi(\mu, \mathscr{B})$ est fini.

Un ensemble $\mathscr{B}\subset L^p(\Omega, \mu; E)$ est borné dans $L^p(\Omega; \mu; E)$ si et seulement si l'ensemble des $\theta\circ\varphi$ correspondantes est borné dans $L^p(\Omega, \mu)$, c. à d. s'il existe un poids Φ, proportionnel à $\| \ \|_p$ (exemples (1.3 et 4)) pour $p>0$, ou un J-poids Φ (forme (1.12)) pour $p=0$, tel que $\Phi(\mu, \mathscr{B})<+\infty$ (prop. (1.14 ter)). On peut alors relier les espaces L^p et les probabilités d'ordre p par ceci, d'après (1.18): *Si φ est une application μ-mesurable de Ω dans E, $\varphi(\mu)$ est d'ordre p, $0\leqslant p\leqslant+\infty$, **si et seulement si** $\varphi\in L^p(\Omega, \mu; E)$; et, pour un ensemble $\mathscr{B}$ de fonctions μ-mesurables, l'ensemble $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ des $\varphi(\mu)$, $\varphi\in\mathscr{B}$, est uniformément d'ordre p, si et seulement si $\mathscr{B}$ est une partie bornée de $L^p(\Omega, \mu; E)$; et on a*

$$\|\varphi(\mu)\|_p=\|\varphi\|_{L^p(\Omega,\mu;E)} \quad \textit{pour} \quad p>0\,. \tag{1.19}$$

3) D'autre part, *soient $f_j: E'\to L^0(\Omega, \mu)$ des fonctions aléatoires linéaires, con-*

([13]) SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. V, §4, théorème 11. Ce que nous appelons ici ***décomposée*** s'appelait alors *mesurablement décomposée* Nous ne redonnons pas ici la démonstration de ce théorème.

vergeant vers $f: E' \to L^0(\Omega, \mu)$ pour la topologie de la convergence simple. Alors les probabilités cylindriques associées λ_j convergent cylindriquement vers λ.

En effet, soit v une application linéaire continue de E dans $\boldsymbol{K}^n$; elle peut être définie comme $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, où les ξ_k sont des éléments de E'; alors $v(\lambda_j)$ est l'image $w_j(\mu)$ de μ par l'application μ-mesurable $w_j=(f_j(\xi_1), f_j(\xi_2), \cdots, f_j(\xi_n))$ de Ω dans $\boldsymbol{K}^n$; puisque les f_j convergent simplement vers f, les $f_j(\xi_k)$ convergent vers $f(\xi_k)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant n$, donc les applications w_j convergent vers l'application $w=(f(\xi_1), f(\xi_2), \cdots, f(\xi_n))$ de Ω dans $\boldsymbol{K}^n$, pour la μ-convergence en probabilité; donc les images $v(\lambda_j)=w_j(\mu)$ convergent étroitement dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K}^n)$ vers $w(\mu)=v(\lambda)$, et les λ_j convergent cylindriquement vers λ. CQFD.

Le théorème (1.18) donne alors:

THÉORÈME (1.20). *Soit E un espace vectoriel quasi-normé (resp. un dual $\sigma(F', F)$, F quasi-normé). Soit f une application linéaire de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$. Supposons que f soit limite simple d'applications f_j décomposées par des $\varphi_j: \Omega \to E$, qui forment un ensemble borné dans $L^p(\Omega, \mu; E)$. Alors la probabilité cylindrique λ associée à f est de Radon d'ordre p dans $\sigma(E'', E')$ (resp. $\sigma(F', F)$). En outre, f est décomposée par une fonction $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$ si E est un Banach réflexif (resp. $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$, si F est séparable, $L^p(\Omega, \mu; F')$ si F est un Banach réflexif ou si F' est séparable).*

DÉMONSTRATION. Les seules parties non triviales sont celles de la fin. Si E est un Banach réflexif, λ est de Radon sur E métrisable, donc f est décomposée par une $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$. Si F est un Banach réflexif, F' l'est aussi, λ est alors de Radon sur F', et ici encore f est décomposée par $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; F')$. Si F est séparable, les compacts de $\sigma(F', F)$ sont métrisables, donc f est réalisée par $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$. Si enfin F' est séparable, donc polonais, f est décomposée par $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; \sigma(F', F))$ qui est $L^p(\Omega, \mu; F')$. Mais, comme nous l'avons signalé à la remarque qui suit le théorème (1.18), il n'est pas correct de dire que λ est de Radon sur F' dans ce dernier cas.

REMARQUE. Bien entendu, lorsque f est réalisable par $\varphi: \Omega \to E$, il n'est pas exact que les φ_j convergent nécessairement vers φ dans $L^p(\Omega, \mu; E)$.

§ 2. Le type et les applications radonifiantes.

(2.1.0) *Le type d'une probabilité cylindrique. Définition.*

Soit E un espace vectoriel topologique, séparé par son dual. Soient Φ un poids sur $\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)$, θ' une fonction $\geqslant 0$ quelconque sur E'. On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de type (Φ, θ'), si, pour tout $\xi \in E'$, qui définit donc une probabilité image $\xi(\lambda)$ sur $\boldsymbol{K}$, on a:

$$\Phi(\xi(\lambda))\leqslant\theta'(\xi)\ .$$

Noter la différence entre type et ordre. L'ordre (Φ, θ) n'a été défini que pour des probabilités de Radon, et θ était une fonction sur E; le type (Φ, θ') est défini pour des probabilités cylindriques, et θ' est une fonction sur E'. En outre, si λ est de type (Φ, θ'), elle est a fortiori de type $(\bar{\Phi}, \bar{\theta}')$ si $\bar{\Phi}\leqslant\Phi$ et $\bar{\theta}'\geqslant\theta'$ (alors qu'on devait prendre $\bar{\theta}\leqslant\theta$ pour l'ordre). D'ailleurs, si λ, de Radon, est d'ordre (Φ, θ), Φ homogène, elle est aussi d'ordre $(\tau\Phi, (1/\tau)\theta)$, $\tau>0$ fini; si λ, cylindrique, est de type (Φ, θ'), elle est aussi de type $(\tau\Phi, \tau\theta')$.

Enfin l'ensemble des probabilités cylindriques, de type (Φ, θ') est cylindriquement fermé, puisque $\lambda\mapsto\Phi(\xi(\lambda))$ est semi-continue inférieurement sur $\check{\mathscr{P}}(E)$.

(2.1.00) Les propriétés de concentration scalaire des probabilités cylindriques sont des propriétés de type. Soit A une partie équilibrée de E, et soit N la jauge de A^0 dans E'. Si λ est scalairement concentrée à ε près sur A, alors, pour tout $\xi\in E'$, $\xi(\lambda)$ est concentrée à ε près sur $\xi(A)$, donc a fortiori sur $[-N(\xi), +N(\xi)]$, car $\xi(A)$ est pincé entre $[-N(\xi), +N(\xi)]$ et $[-N(\xi), +N(\xi)]$; donc λ est de type (J_ε, N). Inversement, si λ est de type (J_ε, N), alors, pour tout ξ, $\xi(\lambda)$ est scalairement concentrée à ε près sur $[-N(\xi), +N(\xi)]$, donc, sinon sur $\xi(A)$, en tout cas sur tout $(1+\delta)\xi(A)$, $\delta>0$; et λ est scalairement concentrée à ε près sur tout $(1+\delta)A$. *Si A est faiblement compact*, $\xi(A)$ est compact donc est nécessairement l'intervalle fermé $[-N(\xi), +N(\xi)]$, et *λ est scalairement concentrée à ε près sur A, si et seulement si elle est de type (J_ε, N).*

(2.1.1) *Soit Φ un poids homogène, et soit $\mathfrak{S}$ une topologie vectorielle sur E' (non nécessairement séparée). On dira qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de type Φ pour la topologie $E'_{\mathfrak{S}}$, s'il existe un voisinage V de 0 de $E'_{\mathfrak{S}}$, équilibré fermé, tel que λ soit de type (Φ, θ'_V), où θ'_V est la jauge de V.* Cela revient à dire que l'ensemble $\{\xi\in E'; \Phi(\xi(\lambda))\leqslant1\}$ est un voisinage de 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$; ou encore que, *lorsque ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\Phi(\xi(\lambda))$ tend vers 0.*

(2.1.3) *Un ensemble $\mathscr{M}$ de probabilités cylindriques est alors dit uniformément de type Φ pour $E'_{\mathfrak{S}}$, s'il existe un même voisinage V de 0 de $E'_{\mathfrak{S}}$ tel que toutes les $\lambda\in\mathscr{M}$ soient de type (Φ, θ'_V)*; ou encore si l'intersection $\bigcap_{\lambda\in\mathscr{M}}\{\xi\in E'; \Phi(\xi(\lambda))\leqslant1\}$ est un voisinage de 0 de $E'_{\mathfrak{S}}$; ou encore si, quand ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\Phi(\xi(\lambda))$ tend vers 0 uniformément pour $\lambda\in\mathscr{M}$.

(2.1.4) *λ est dite de type p pour $E'_{\mathfrak{S}}$, $0<p\leqslant+\infty$, si elle est de type $\|\ \|_p$*; de même pour un ensemble $\mathscr{M}$ uniformément de type p;

(2.1.5) *λ sera dite de type 0 pour $E'_{\mathfrak{S}}$, si, pour tout $\alpha>0$, elle est de type J_α* (exemple (1.9)). Notons ici que cela ne fait pas intervenir un type déterminé, mais une famille de types, les J_α; le type 0 nécessite donc toujours un examen spécial. S'il existe un J-poids Φ (compact de la forme (1.12)) tel que λ soit de type Φ, elle est de type 0, mais ce n'est pas nécessaire. Comme les ensembles $\{\mu \in \mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+);\ J_\alpha(\mu) \leqslant \varepsilon\}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, forment un système fondamental de voisinages de δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$, on voit que *$\lambda$ est de type 0, si et seulement si, lorsque ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\xi(\lambda)$ tend vers δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$.*

Si $\mathfrak{S}$ est une famille de parties équilibrées bornées de E, stable par homothétie, et si $E'_{\mathfrak{S}}$ est la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, alors λ est de type 0 pour $E'_{\mathfrak{S}}$, si et seulement si elle est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée [14]. Cela résulte immédiatement de (2.1.00).

(2.1.6) Bien entendu *un ensemble $\mathscr{M} \in \check{\mathscr{P}}(E)$ est dit uniformément de type 0, pour $E'_{\mathfrak{S}}$, si, pour tout $\alpha > 0$, il est uniformément de type J_α.* Cela exprime que, *quand ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\xi(\lambda)$ tend vers δ, uniformément pour $\lambda \in \mathscr{M}$.* Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties équilibrées bornées de E, stable par homothéties et réunions finies, dire que *$\mathscr{M}$ est uniformement de type 0 pour $E'_{\mathfrak{S}}$*, c'est dire que *les $\lambda \in \mathscr{M}$ sont uniformément scalairement $\mathfrak{S}$-concentrées*, c. à d. que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathfrak{S}$ telle que, pour tout $\xi \in E'$ et toute $\lambda \in \mathscr{M}$, $\xi(\lambda)$ soit concentrées sur $\xi(A)$ à ε près.

(2.1.7) Souvent $E'_{\mathfrak{S}}$ sera le dual fort de E, mais ce peut être aussi E'_c, E'_τ (topologie de Mackey). Dans un article antérieur [15], E était l'espace $\sigma(l^\infty, l^s)$ avec $0 < s < 1$; alors $E' = l^s$, et $E'_{\mathfrak{S}}$ était justement la topologie quasi-normée de l^s, non localement convexe. Aux §§ 5 et 6, il arrivera fréquemment, E étant arbitraire, que $E'_{\mathfrak{S}}$ soit normé ou quasi-normé: par exemple E sera l'espace $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ des distributions sur $\boldsymbol{R}^n$, $E'_{\mathfrak{S}}$ sera l'espace $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ muni de la norme L^2 ou L^∞. Dans ce cas, la quasi-norme de $E'_{\mathfrak{S}}$ sera sous-entendue; λ sera de type Φ, poids homogène, si et seulement s'il exist $M \geqslant 0$ fini tel que, pour tout $\xi \in E'$, $\Phi(\xi(\lambda)) \leqslant M\|\xi\|$; elle sera de type $p > 0$, si $\|\xi(\lambda)\|_p \leqslant M\|\xi\|$. Nous noterons alors par $\Phi^*(\lambda)$, pour Φ homogène et $E'_{\mathfrak{S}}$ quasi-normé, la borne inférieure des $M \geqslant 0$ tels que $\Phi(\xi(\lambda)) \leqslant M\|\xi\|$, ou encore $\Phi^*(\lambda) = \operatorname{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} \Phi(\xi(\lambda))$.

Pour un ensemble $\mathscr{M}$ de probabilités cylindriques, $\Phi^*(\mathscr{M})$ sera $\operatorname{Sup}_{\lambda \in \mathscr{M}} \Phi^*(\lambda)$; λ sera de type Φ, $\mathscr{M}$ sera uniformément de type Φ, si et seulement si $\Phi^*(\lambda) < +\infty$, $\Phi^*(\mathscr{M}) < +\infty$. *La fonction $\lambda \mapsto \Phi^*(\lambda)$ est semi-continue inférieurement sur $\check{\mathscr{P}}(E)$.*

Dans ce cas, *λ est de type 0, si et seulement si*, pour tout $\alpha > 0$, il existe $M_\alpha \geqslant 1$ fini tel que $J_\alpha(\xi(\lambda)) \leqslant M_\alpha\|\xi\|$, donc s'*il existe un J-poids Φ (homogène com-*

---

[14] SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, § 3.

[15] SCHWARTZ [2].

pact de la forme (1.12)), à savoir $\Phi = \operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1} (1/M_\alpha)\check{J}_\alpha$, *tel que* $\Phi(\xi(\lambda)) \leqslant \|\xi\|$ *pour tout* $\xi \in E'$, c. à d. tel que $\Phi^*(\lambda) \leqslant 1$. *Un ensemble* $\mathscr{M} \in \check{\mathscr{P}}(E)$ *sera uniformément de type* 0, *si l'on peut choisir les mêmes* M_α *donc le même type* Φ *de la forme* (1.12), *pour toutes les* $\lambda \in \mathscr{M}$, c. à d. s'il existe un J-poids Φ, tel que $\Phi^*(\mathscr{M}) \leqslant 1$. La proposition (1.14 ter) montre alors que $\mathscr{M}$ *est uniformément de type* 0, *si et seulement si l'ensemble des* $\xi(\lambda)$, $\|\xi\| \leqslant 1$, $\lambda \in \mathscr{M}$, *est relativement compact dans* $\mathscr{P}(K)$.

(2.1.7 bis) Soit E un espace vectoriel quasi-normé. Une probabilité cylindrique de type Φ (homogène) sur E ou sur E_N, c'est la même chose, puisqu'ils ont le même dual, et $\Phi^*(\lambda)$ a la même valeur dans les deux cas. Si E est un dual $\sigma(F', F)$, F quasi-normé, une probabilité cylindrique sur F', l'est a fortiori sur $E = \sigma(F', F)$, et $(\Phi^*(\lambda))_E \leqslant (\Phi^*(\lambda))_{F'}$.

Mais soient Φ un poids homogène, λ une probabilité de Radon sur F' (F normé), portée par un compact d'un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\Phi^*(\lambda)$ a la même valeur, qu'on considère λ comme probabilité sur $\sigma(F', F)$, relativement à la norme donnée sur F, ou comme probabilité sur F' ou $\sigma(F', F'')$, relativement à la norme usuelle sur F''. En effet, soit $\xi'' \in F''$, $\|\xi''\| \leqslant 1$; il est limite, dans $\sigma(F'', F')$, de ξ_j de F de norme $\leqslant 1$. Les ξ_j convergent vers ξ'' uniformément sur tout compact de dimension finie, donc sur le support de λ, donc $\xi_j(\lambda)$ converge étroitement vers $\xi''(\lambda)$ sur K, donc $\Phi(\xi''(\lambda)) \leqslant \liminf_j \Phi(\xi_j(\lambda))$, et par suite $\operatorname*{Sup}_{\|\xi''\| \leqslant 1} \Phi(\xi''(\lambda)) \leqslant \operatorname*{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} \Phi(\xi(\lambda))$, donc ces deux quantités sont bien égales. Si F est seulement quasi-normé, cette conclusion ne subsiste pas.

Toutes les fois que E sera un espace vectoriel quasi-normé, il sera entendu, si rien d'autre n'est spécifié, qu'il est muni de sa quasi-norme, et que $E'_{\mathfrak{S}} = E'$ *est son Banach dual muni de sa norme; toutes les fois que* $E = \sigma(F', F)$, F *quasi-normé, il sera entendu que* $E'_{\mathfrak{S}} = E'$ *est F muni de sa quasi-norme.*

(2.1.8) Un autre fait montrera que l'ordre est plus fort que le type. Supposons que $E'_{\mathfrak{S}}$ soit la topologie forte. *Soit* λ *une probabilité de Radon, d'ordre* Φ *homogène.* Soit B un borné équilibré fermé, tel que $\Phi(\lambda, \theta_B) \leqslant 1$. Soit $V = B^0$ le polaire de B, voisinage de 0 de E'; alors, pour $\xi \in E'$, $|\langle \xi, x \rangle| \leqslant \theta_B(x)\theta'_V(\xi)$; alors la fonction ξ sur E est majorée en module par la fonction $\theta'_V(\xi)\theta_B$; donc

$$\Phi(\xi(\lambda)) = \Phi(\lambda, \xi) \leqslant \theta'_V(\xi)\Phi(\lambda, \theta_B) \leqslant \theta'_V(\xi) ,$$

donc λ *est de type* Φ.

Pour E quasi-normé ou dual $*$-faible d'un quasi-normé, pour Φ homogène, on a toujours l'inégalité, pour λ de Radon:

(2.1.8 bis) $$\Phi^*(\lambda) \leqslant \Phi(\lambda) ;$$

En effet, pour $\|\xi\| \leqslant 1$, $\Phi(\xi(\lambda)) = \Phi(\lambda, \xi) \leqslant \Phi(\lambda, \theta) = \Phi(\lambda)$.

(2.1.8.00) Il y a cependant un cas où une hypothèse sur le type aboutit à une conclusion sur l'ordre:

PROPOSITION (2.1.8.0). *Soit F un quasi-Banach. Une probabilité cylindrique λ sur $\sigma(F', F)$, de type $+\infty$, est de Radon d'ordre $+\infty$, et $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|^*_{+\infty}$.*

DÉMONSTRATION. D'après (2.1.00), λ est scalairement concentrée (à 0 près) sur la boule de rayon $\|\lambda\|^*_{+\infty}$ (car $\|\ \|_{+\infty} = J_0$); donc elle est aussi cylindriquement concentrée (à 0 près) sur cette boule [16]; comme celle-ci est compacte, le théorème de PROKHOROV affirme que λ est de Radon, et en outre elle est portée par cette boule, donc $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|^*_{+\infty}$.

COROLLAIRE. *Si E est un Banach réflexif, une probabilité cylindrique λ de type $+\infty$ sur E est de Radon d'ordre $+\infty$, et $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|^*_{+\infty}$.*

En effet, elle est de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(E, E')$, donc sur E d'après le théorème de PHILLIPS.

REMARQUE. La conclusion ne subsiste pas si E est un Banach non réflexif. Soit en effet a'' un point de E'' non dans E, de norme 1; $\delta_{(a'')}$ est une probabilité de Radon sur E'', donc cylindrique sur E, scalairement portée par toute boule de rayon >1, donc de type $+\infty$, et non de Radon sur E.

Mais, si E est un Banach, toute probabilité cylindrique de type $+\infty$ sur E est de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(E'', E')$, et $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|^*_{+\infty}$. Ce n'est plus vrai pour E quasi-Banach, avec l'espace bitopologique $\sigma(E'', E)$; en effet, λ est de type $+\infty$ sur E si et seulement si elle l'est sur E_N, et alors elle est seulement de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma((\hat{E}_N)'', (\hat{E}_N)')$, et non sur $\sigma(E'', E')$; autrement dit, λ est bien de Radon sur $\sigma(E'', E')$, mais elle est portée par la boule de rayon $\|\lambda\|^*_{+\infty}$ de E'', non par l'adhérence, dans $\sigma(E'', E')$, de la quasi-boule de rayon $\|\lambda\|^*_{+\infty}$ de E.

(2.1.8 bis). *Exemple: la probabilité cylindrique de Gauss sur un espace hilbertien et ses images.*

Soit E un espace hilbertien sur $\boldsymbol{R}$. Soit γ sa probabilité cylindrique de Gauss (pour nous, ici, la probabilité normale de Gauss γ_0 sur $\boldsymbol{R}$ est $\exp(-\pi t^2)dt$). Pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\gamma)$ est la loi de Gauss sur $\boldsymbol{R}$ de paramètre $\|\xi\|$, c. à d.

$$\exp\left(-\pi \frac{t^2}{\|\xi\|^2}\right)\frac{dt}{\|\xi\|},$$

qui est aussi image de γ_0 par l'homothétie de rapport $\|\xi\|$ sur $\boldsymbol{R}$. Soit alors Φ un poids homogène; on a $\Phi(\xi(\gamma)) = \|\xi\| \Phi(\gamma_0)$; γ est de type Φ si et seulement si $\Phi(\gamma_0) < +\infty$, et on a exactement $\Phi^*(\gamma) = \Phi(\gamma_0)$. Par exemple

[16] SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, § 3, proposition 5.

a) $\|\gamma\|_p^* = \left(\int_R |t|^p \exp(-\pi t^2)dt\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\pi^{(p+1)/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right)^{1/p}$, p fini >0;

b) γ n'est pas de type $+\infty$;

c) γ est de type 0, et, pour tout α, $0<\alpha<1$, $J_\alpha^*(\gamma)=J_\alpha(\gamma_0)$;

$$\text{si} \quad \alpha=2\int_R^{+\infty} \exp(-\pi t^2)dt, \quad J_\alpha^*(\gamma)=R\ .$$

d) Considérons maintenant un poids Φ non homogène, celui de l'exemple (1.5). Alors

$$\begin{aligned} \Phi_k(\xi(\lambda)) &= 2\int_0^{+\infty} \exp\left(\pi k t^2 - \pi \frac{t^2}{\|\xi\|^2}\right)\frac{dt}{\|\xi\|} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi(1-k\|\xi\|^2)\frac{t^2}{\|\xi\|^2}\right)\frac{dt}{\|\xi\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-k\|\xi\|^2)^+}} \qquad (\text{donc } +\infty \text{ si } k\|\xi\|^2 \geqslant 1)\ . \end{aligned}$$

Posons $\theta'_k(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-k\|\xi\|^2)^+}}$. Alors γ est de type (Φ_k, θ'_k).

Soit maintenant u une application linéaire faiblement continue de E dans un espace vectoriel topologique G. Alors $u(\gamma)$ a toujours une propriété remarquable, dès qu'elle est de Radon:

THÉORÈME (2.1.8 ter) (*Shepp-Landau*). *Soient E un espace hilbertien sur $\boldsymbol{R}$, G un espace vectoriel sur $\boldsymbol{R}$, localement convexe quasi-complet, u une application linéaire continue de E dans G. Soit γ la probabilité cylindrique de Gauss sur E. Alors, ou bien l'image $(u(\gamma))^V$ dans $\check{\boldsymbol{R}}^{G'}$ donne à G une mesure intérieure nulle (et une mesure nulle si $\sigma(G, G')$ est souslinien), ou bien $u(\gamma)$ est de Radon sur $\sigma(G, G')$; dans ce dernier cas, si K est un faiblement compact convexe de G portant une masse >0 pour $u(\gamma)$, l'intégrale $\int_G \exp(k\pi\theta_K^2(y))d(u\gamma)(y)$ est finie pour k assez petit, θ_K étant la jauge de K; en particulier, $u(\gamma)$ est d'ordre p pour tout p fini, et, si G est normé, $u(\gamma)$ est de Radon sur G, et*

$$\int_G \exp(k\|y\|^2)d(u\gamma)(y) < +\infty$$

pour k assez petit.

DÉMONSTRATION. *Lemme de Shepp-Landau.* (17)

1) *Soit γ la probabilité de Gauss de $\boldsymbol{R}^n$. Soit C un ensemble convexe de $\boldsymbol{R}^n$, contenant l'origine, et supposons que $\gamma(C) \geqslant \int_{-\infty}^{c} e^{-\pi t^2}dt$, $c>0$. Alors, pour tout*

(17) SHEPP-LANDAU [1]. On trouvera une variante dans FERNIQUE [1].

$\tau \geqslant 1$, $\gamma(\tau C) \geqslant \int_{-\infty}^{\tau c} e^{-\pi t^2} dt$.

2) *Soit* $(X_n)_{n \in N}$ *une suite gaussienne de variables aléatoires* (*i.e.* ***toute combinaison linéaire finie de ces variables aléatoires est gaussienne***). ***Alors la variable aléatoire*** $\operatorname{Sup}_{n \in N} |X_n|$ *est presque sûrement finie ou presque sûrement infinie.*

Démontrons alors le théorème.

Si, pour tout faiblement compact K de G, et pour tout $\delta>0$, il existe une application linéaire continue v de G dans un espace $\boldsymbol{R}^n$, $n \in N$, telle que $(vu(\gamma))(v(K)) < \delta$, alors la probabilité de Radon $(u(\gamma))^V$ sur $\check{\boldsymbol{R}}^{G'}$ donne à K une mesure nulle, puisque

$$(u(\gamma))^V(K) = \operatorname*{Inf}_v (u(\gamma))^V(v^{-1}(v(K)) = \operatorname*{Inf}_v (v(u(\gamma)))(v(K)) = 0 ;$$

donc $(u(\gamma))^V$ donne à G une mesure intérieure nulle, et une mesure nulle, si on est sûr que G est $\check{\mu}$-mesurable dans $\check{\boldsymbol{R}}^{G'}$, en particulier si $\sigma(G, G')$ est souslinien.

Supposons le contraire vérifié; alors il existe un faiblement compact K et un nombre $\delta>0$ tels que, pour tout v, $(v(u(\gamma)))(v(K)) \geqslant \delta$. Soit $f: G \to L^0(\Omega, \mu)$ une fonction aléatoire associée à $u(\gamma)$. Comme G est supposé quasi-complet, l'enveloppe convexe équilibrée de K est faiblement compacte, nous pouvons donc supposer K convexe équilibré faiblement compact. Montrons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $u(\gamma)$ soit cylindriquement concentrée sur nK à ε près, ε donné >0. Supposons que ce ne soit pas vrai, montrons que nous aboutissons à une contradiction. Pour tout n, il existera une application linéaire continue v_n de G dans un espace vectoriel H_n de dimension finie, telle que $(v_n(u(\gamma)))(v_n(nK)) < 1-\varepsilon$. Mais $v_n(nK)$ est un convexe équilibré compact de H_n, il est l'intersection filtrante des intersections finies de demi-espaces fermés qui le contiennent; on peut passer à la limite pour de telles intersections, de sorte qu'il existe un système fini de formes linéaires $\eta_{n,j}$ sur H_n, $j \in J_n$ fini, tel que, d'une part $v_n(nK) \subset Q_n = \{h \in H_n ; \forall j, |\eta_{n,j}(h)| \leqslant n\}$, et d'autre part $(v_n(u(\gamma)))(Q_n) < 1-\varepsilon$. Posons $\eta_{n,j} \circ v_n = \xi_{n,j}$; on a d'une part $|\xi_{n,j}(K)| \leqslant 1$, c. à d. $\xi_{n,j} \in K^0$ pour tout n et tout $j \in J_n$, d'autre part

$$\mu\{\omega \in \Omega ; \operatorname*{Sup}_{j \in J_n} |(f(\xi_{n,j}))(\omega)| > n\} > \varepsilon .$$

Nous avons maintenant une famille dénombrable de variables aléatoires, les $X_{n,j} = f(\xi_{n,j})$, $j \in J_n$, $n \in N$, cette famille est gaussienne, et

$$\mu\{\omega \in \Omega ; \operatorname*{Sup}_{\substack{n \in N \\ j \in J_n}} |X_{n,j}| = +\infty\} \geqslant \varepsilon .$$

D'après le lemme, cette probabilité est donc 1. Cela implique qu'il existe un ensemble fini P de K^0 tel que $\mu\{\omega\in\Omega;\ \operatorname*{Sup}_{\xi_{n,j}\in P}|X_{n,j}|>1\}>1-\delta$. Soit v l'application linéaire continue de G dans $H=\boldsymbol{R}^P$ définie par les $\xi\in P$; puisque $P\subset K^0$, l'image $v(K)$ est contenue dans le cube unité fermé Q de $H=\boldsymbol{R}^P$; donc $(v(u(\gamma)))(Q)$ $\geqslant(v(u(\gamma)))(v(K))\geqslant\delta$; mais, d'autre part, $\mu\{\omega\in\Omega;\ \operatorname*{Sup}_{\xi\in P}|f(\xi)|>1\}>1-\delta$ implique aussi $(v(u(\gamma)))(\complement Q)>1-\delta$, ce qui est contradictoire. On voit donc bien que $u(\Gamma)$ est cylindriquement concentrée à ε près sur nK pour n assez grand, donc cylindriquement concentrée sur la famille des multiples de K, donc $u(\gamma)$ est de Radon sur $\sigma(G, G')$.

Pour démontrer la 2ème partie du théorème, où intervient la jauge de K, le résultat ne change pas si on remplace K par un multiple de K; on peut donc toujours supposer que $u(\gamma)$ est concentrée sur K à ε près, $\varepsilon<1/2$; on peut alors écrire $\varepsilon=\int_c^{+\infty}e^{-\pi t}\,dt$, $c>0$. Pour toute application linéaire continue v de G dans un espace vectoriel de dimension finie, vu peut se factoriser sous la forme wp, où p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de E de dimension finie. Posons $C=w^{-1}(v(K))$, convexe équilibré de F; on a exactement

$$(vu(\gamma))(v(K))=(wp(\gamma))(v(K))=(p(\gamma))(w^{-1}(v(K))=(p(\gamma))(C)\ ,$$

et une égalité analogue en remplaçant K et C par τK et τC, $\tau\geqslant 1$; de $(p(\Gamma))(C)$ $\geqslant\int_{-\infty}^{c}e^{-\pi t^2}dt$ et du lemme précédent appliqué à F, on tire

$$(vu(\gamma))(v(\tau K))=(p(\gamma))(\tau C)\geqslant\int_{-\infty}^{\tau c}e^{-\pi t^2}dt\ .$$

Donc $u(\gamma)$ est cylindriquement concentrée à $\int_{\tau c}^{+\infty}e^{-\pi t^2}dt$ près sur τK. Appelons θ_K la jauge de K (qui, rappelons-le, est infinie en dehors du sous-espace vectoriel engendré par K). L'image $\nu=\theta_K(u(\gamma))$ est une probabilité de Radon sur $\bar{\boldsymbol{R}}_+$, vérifiant

$$\nu(]\tau,+\infty])\leqslant\int_{\tau c}^{+\infty}e^{-\pi t^2}dt\ .$$

Si $N(\tau)=\nu(]\tau,+\infty])$, on sait (formule de l'exemple 1.6)) que

$$\text{(2.1.8 quarto)}\qquad \int_0^{+\infty}e^{k\pi\tau^2}d\nu(\tau)=1+\int_0^{+\infty}N(\tau)2k\pi\tau e^{k\pi\tau^2}d\tau\ .$$

Comme $N(\tau)\leqslant$ constante $e^{-\pi\tau^2c^2}$, cette intégrale est sûrement finie pour $k<c^2$. Or elle est égale à $\int_G e^{k\pi\theta_K^2(y)}d(u\gamma)(y)$. Si G est normé, le théorème de Phillips dit que $u(\gamma)$ est de Radon sur G; en outre il existe une constante h telle que $\|\ \|\leqslant h\theta_K$, d'où le résultat final.

(2.1.9) Tout cela peut aussi s'exprimer en termes de fonctions aléatoires linéaires $f: E' \to L^0(\Omega, \mu)$. *La probabilité cylindrique* λ_f *associée à* f *est alors de type* (Φ, θ'), *si et seulement si, pour tout* $\xi \in E'$, $\Phi(\mu, f(\xi)) \leqslant \theta'(\xi)$, puisque $\xi(\lambda_f)$ n'est autre que l'image de μ par $f(\xi) \in L^0(\Omega, \mu)$. Alors, *pour* Φ *homogène,* λ *est de type* Φ, *relativement à* $E'_{\mathfrak{S}}$, *si et seulement si, lorsque* ξ *tend vers* 0 *dans* $E'_{\mathfrak{S}}$, $\Phi(\mu, f(\xi))$ *tend vers* 0.

Le cas du type p vaut une proposition:

PROPOSITION (2.1.10). *Pour que la probabilité cylindrique* λ_f *associée à* $f: E' \to L^0(\Omega, \mu)$, *soit de type* p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, *pour* $E'_{\mathfrak{S}}$, *il faut et il suffit que* f *soit continue de* $E'_{\mathfrak{S}}$ *dans* $L^p(\Omega, \mu)$; *pour qu'un ensemble* $\mathscr{M}$ *de probabilités cylindriques associées à un ensemble* B *de fonctions* f *soit uniformément de type* p, *il faut et il suffit que l'ensemble* B *soit équicontinu de* $E'_{\mathfrak{S}}$ *dans* $L^p(\Omega, \mu)$.

DÉMONSTRATION. Comme les L^p sont des espaces vectoriels topologiques, *la continuité résulte de la continuité à l'origine.* Alors c'est évident pour $p>0$: dire que λ_f est de type p, c'est dire que, quand ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\|\xi(\lambda)\|_p$ tend vers 0, ou encore que $f(\xi)$ tend vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$. Pour $p=0$, dire que λ est de type 0, c'est dire que, quand ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $\xi(\lambda)$ tend vers δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$ ou que $(f(\xi))(\mu)$ tend vers δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$ ou que $f(\xi)$ tend vers 0 dans $L^0(\Omega, \mu)$. CQFD.

COROLLAIRE (2.1.11). *Si* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble de parties équilibrées bornées de* E, *stable par homothéties et réunions finies, et si* $E'_{\mathfrak{S}}$ *est la* $\mathfrak{S}$*-topologie,* λ *est scalairement* $\mathfrak{S}$*-concentrée, si et seulement si* f_λ *est continue de* $E'_{\mathfrak{S}}$ *dans* $L^0(\Omega, \mu)$. (18)

Il suffit d'utiliser (2.1.5).

COROLLAIRE (2.1.12). *Si* $E'_{\mathfrak{S}}$ *est quasi-normé, une application linéaire* f *de* E' *dans* $L^0(\Omega, \mu)$ *définit une probabilité cylindrique* λ_f, *qui est de type* p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, *si et seulement si* f *est continue de* $E'_{\mathfrak{S}}$ *dans* $L^p(\Omega, \mu)$, *et alors, pour* $p>0$:

$$\|\lambda_f\|_p^* = \operatorname*{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} \|f(\xi)\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|f\|_{\mathscr{L}(E'_{\mathfrak{S}}; L^p(\Omega, \mu))}. \tag{2.1.12}$$

Un ensemble $\mathscr{B}$ *d'applications linéaires* f *donne un ensemble* $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ *de probabilités cylindriques, qui est uniformément de type* p, *si et seulement si* $\mathscr{B}$ *est une partie bornée de* $\mathscr{L}(E'_{\mathfrak{S}}; L^p(\Omega, \mu))$, *et, si* $p>0$:

$$\|\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\|_p^* = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathscr{B}} \|\lambda_f\|_p^* = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathscr{B}} \|f\|_{\mathscr{L}(E'_{\mathfrak{S}}; L^p(\Omega, \mu))}.$$

En effet, puisque $E'_{\mathfrak{S}}$ est quasi-normé, un ensemble équicontinu d'applications liné-

(18) SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. V, §2, théorème 2.

aires de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$ est exactement un ensemble borné.

(2.1.12 bis). *Notation.* Si f est une application linéaire de E' dans un $L^0(\Omega, \mu)$, et si λ_f est la probabilité associée, $\Phi^*(\lambda_f)$ sera aussi noté $\Phi^*(\mu, f)$. Si φ est une application μ-mesurable de Ω dans E, on écrira indifféremment

$$\Phi^*(\varphi(\mu)),\ \Phi^*(\mu, f_\varphi),\ \Phi^*(\mu, \varphi^*),\ \Phi^*(\mu, \varphi)\ .$$

Pour $p>0$, E quasi-normé ou dual $*$-faible d'un quasi-normé, $\|f\|_{\mathscr{L}(E', L^p(\Omega, \mu))}$ sera aussi noté $\|f\|_p^*$; et alors $\|f\|_p^* = \|\lambda_f\|_p^*$, et, si $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$, $\|\varphi^*\|_p^* = \|f_\varphi\|_p^* = \|\varphi(\mu)\|_p^*$. L'inégalité (2.1.8) montre que $\|\varphi\|_p \geqslant \|\varphi^*\|_p^*$, de sorte que l'injection $\varphi \mapsto f_\varphi = \varphi^*$ permet d'identifier $L^p(\Omega, \mu; E)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E'; L^p(\Omega, \mu))$, muni d'une topologie plus fine; cette identification reste valable pour $p=0$, puisque d'après (2.1.8), pour tout α,

$$J_\alpha(\varphi(\mu)) = J_\alpha(\mu, \varphi) \geqslant J_\alpha^*(\varphi(\mu)) = \operatorname*{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} J_\alpha(\mu, f_\varphi(\xi))\ .$$

COROLLAIRE (2.1.13). *Si Φ est un poids homogène plus fort que L^0, et si λ est une probabilité cylindrique sur E de type Φ pour $E'_{\mathfrak{S}}$, alors $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est continue de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$.*

DÉMONSTRATION. Nous avions vu à (2.1.5) la continuité à l'origine seulement. Mais λ est de type 0; alors, si $\lambda = \lambda_f$, f est continue de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$, et comme ensuite $h \mapsto h(\mu)$ est continue de $L^0(\Omega, \mu)$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$, on en déduit le résultat (le passage à f_λ nous a donné une structure vectorielle, celle de $L^0(\Omega, \mu)$, et la continuité partout résulte alors de la continuité à l'origine).

(2.0) *Les probabilités cylindriques approximables.*

DÉFINITION. *Soient E un espace vectoriel topologique séparé par son dual, Φ un poids, θ' une fonction $\geqslant 0$ sur E'. Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type (Φ, θ')-approximable (resp. très approximable), si elle est limite cylindrique de (ou encore: cylindriquement adhérente à l'ensemble des) probabilités de Radon, portées par des compacts de sous-espaces vectoriels de dimension finie (resp. portées par des ensembles finis), de type (Φ, θ').* Cela entraîne évidemment que λ elle aussi soit de type (Φ, θ'), l'ensemble des probabilités cylindriques de type (Φ, θ') étant cylindriquement fermé.

REMARQUE (2.00). Bien entendu, l'hypothèse d'approximation de λ par des λ_j de type (Φ, θ') qui sont *de Radon portées par des sous-espaces de dimension finie* est essentielle; mais le fait que les λ_j soient portées par des compacts peut toujours se réaliser automatiquement, et peut donc être supprimé dans les hypothèses. En effet, toute λ_j de Radon, de type (Φ, θ'), est limite étroite, donc cylindrique, de ses tronquées, c. à d. des probabilités $\lambda_{j,K} = \chi_K \lambda_j + \lambda_j(\complement K)\delta$, K compact, et celles-ci sont a fortiori de type (Φ, θ'), car, pour tout $\mathscr{P} \in E'$, l'image de $\lambda_{j,K}$ par $|\xi| : x \mapsto |\langle \xi, x \rangle|$ est majorée (pour la relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$) par l'image de λ_j.

Si Φ est un poids homogène, et si $\mathfrak{S}$ est une topologie vectorielle sur E', λ sera dite de type Φ approximable pour la topologie $E'_{\mathfrak{S}}$, s'il existe un voisinage V de 0 équilibré fermé de $E'_{\mathfrak{S}}$, tel que λ soit de type (Φ, θ'_V) approximable; ou encore, si λ est limite cylindrique de λ_j, probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie, uniformément de type Φ pour $E'_{\mathfrak{S}}$. Le cas du type $p>0$ s'en déduit. Pour $p=0$, nous dirons que λ est de type 0 approximable (resp. très approximable) pour $E'_{\mathfrak{S}}$, si elle est limite cylindrique de λ_j, probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie (resp. par des ensembles finis), uniformément de type 0 pour $E'_{\mathfrak{S}}$ (19).

Si Φ est un poids homogène, E un quasi-normé ou un dual $*$-faible d'un quasi-normé, nous noterons par $\Phi^{*a}(\lambda)$ (resp. $\Phi^{*ta}(\lambda)$), la borne inférieure des $\Phi^*(\mathscr{M})$, pour tous les ensembles $\mathscr{M}$ de probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie (resp. par des ensembles finis), auxquels λ est cylindriquement adhérente. On a évidemment:

$$\Phi^*(\lambda) \leqslant \Phi^{*a}(\lambda) \leqslant \Phi^{*ta}(\lambda) . \tag{2.2}$$

Notons que λ est cylindriquement adhérente à un ensemble $\mathscr{M}$ de probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie (resp. des ensembles finis) tel que $\Phi^*(\mathscr{M}) = \Phi^{*a}(\lambda)$ (resp. $\Phi^{*ta}(\lambda)$), si cette quantité est >0. Montrons le par exemple pour $\Phi^{*a}(\lambda)$, en supposant pour simplifier $\Phi^{*a}(\lambda)=1$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\mathscr{M}_\varepsilon$, ensemble de probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie, tel que $\Phi^*(\mathscr{M}_\varepsilon) \leqslant 1+\varepsilon$, et que λ soit cylindriquement adhérente à $\mathscr{M}_\varepsilon$. Soit $\mathscr{M}_\varepsilon/(1+\varepsilon)$ l'image de $\mathscr{M}_\varepsilon$ par l'homothétie de E, de centre origine, de rapport $1/(1+\varepsilon)$. Alors $\lambda/(1+\varepsilon)$ est cylindriquement adhérente à $\mathscr{M}_\varepsilon/(1+\varepsilon)$, et $\Phi^*(\mathscr{M}_\varepsilon/(1+\varepsilon)) \leqslant 1$. Comme λ est limite cylindrique des $\lambda/(1+\varepsilon)$, lorsque ε tend vers 0, λ est cylindriquement adhérente à la réunion $\mathscr{M}$ des $\mathscr{M}_\varepsilon/(1+\varepsilon)$ pour $\varepsilon>0$, et $\mathscr{M}$ répond à la question. Le résultat subsiste pour $\Phi^{*a}(\lambda)$ (ou $\Phi^{*ta}(\lambda))=0$, si Φ est tel que, sur $\mathscr{P}(\bar{R}_+)$, $\Phi(\mu)=0$ équivaut à $\mu=\delta$, c. à d. si Φ est plus fort que L^0. Car alors, si $\Phi^*(\lambda)=0$, on a $\xi(\lambda)=\delta$ pour tout ξ, donc $\lambda=\delta$, et on peut prendre $\mathscr{M} = \{\delta\}$.

(2.3) *Les applications radonifiantes.*

Définition. *Soient E, G, deux espaces vectoriels topologiques, chacun séparé par son dual. Soient A et B deux poids, α' une fonction $\geqslant 0$ sur E', β une*

(19) Attention! C'est plus fort que de dire que, pour tout α, λ est de type J_α approximable!

fonction semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ *sur* G. *Une application linéaire faiblement continue* u *de* E *dans* G *est dite* $(A, \alpha'; B, \beta)$*-radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique* λ *sur* E, *de type* (A, α'), *l'image* $u(\lambda)$ *est de Radon sur* G, *d'ordre* (B, β). *On dit que* u *est approximativement* (*resp. très approximativement*) $(A, \alpha'; B, \beta)$*-radonifiante, si, pour toute* λ, *de type* (A, α') *approximable* (*resp. très approximable*), $u(\lambda)$ *est de Radon d'ordre* (B, β).

Une probabilité cylindrique de type (A, α') très approximable est a fortiori de type (A, α') approximable, et a fortiori de type (A, α'); donc une application u, qui est $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante, est a fortiori approximativement $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante et une application approximativement $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante l'est a fortiori très approximativement.

Il y aura un grand nombre de variantes de l'écriture $(A, \alpha'; B, \beta)$. Si A et B sont homogènes, si $E'_{\mathfrak{S}}$ est une topologie vectorielle sur E', si $\mathscr{T}$ est un ensemble de parties équilibrées bornées fermées de G, on parlera d'applications $(A, E'_{\mathfrak{S}}; B, \mathscr{T})$-radonifiantes. Si par exemple E et G sont des espaces quasi-normés ou des duals $*$-faibles d'espaces quasi-normés (indépendamment l'un de l'autre), et si on prend pour $E'_{\mathfrak{S}}$ la quasi-norme (2.1.7 bis), et G avec sa quasi-norme, on aura des applications (A, B)-radonifiantes, et Φ-radonifiantes si $A=B=\Phi$. Etc...

Donnons seulement la plus importante de ces définitions. On dira que u est p-radonifiante, si, pour toute λ cylindrique de type p sur E, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p. On dira que u est approximativement (resp. très approximativement) p-radonifiante, si, pour toute λ cylindrique de type p approximable (resp. très approximable), $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p.

Nous allons maintenant faire deux choses: donner un critère pour qu'une application u soit approximativement radonifiante, et ensuite donner un critère pour qu'une application approximativement radonifiante soit radonifiante.

THÉORÈME (2.4). *Soient* E, G, *des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals. Soient* A *et* B *deux poids,* α' *une fonction* $\geqslant 0$ *sur* E, β *une fonction semi-continue inférieurement* $\geqslant 0$ *sur* G. *Supposons* B *et* β *compacts. Pour que l'application linéaire faiblement continue* $u: E \to G$ *soit approximativement* (*resp. très approximativement*) $(A, \alpha'; B, \beta)$ *radonifiante, il faut et il suffit que, pour toute probabilité* λ *de Radon, portée par un compact de dimension finie* (*resp. portée par un ensemble fini*) *de* E, *de type* (A, α'), $u(\lambda)$ (*qui est nécessairement de Radon, et portée par un ensemble de même nature*) *soit d'ordre* (B, β).

L'intérêt de ce critère est qu'il porte uniquement sur des λ de Radon de nature très simple.

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire. Mais sa suffisance résulte assez trivialement de ce qui précède. Soit λ de type (A, α') approximable. Elle est limite cylindrique de probabilités λ_j, de Radon, portées par des compacts de dimension finie (resp. portées par des ensembles finis), toutes de type (A, α'); d'après l'hypothèse, les $u(\lambda_j)$ sont alors d'ordre (B, β); comme B et β sont compactes, le théorème (1.17) dit que $u(\lambda)$ est aussi de Radon d'ordre (B, β).

CQFD.

REMARQUE 1. Supposons toutes les mêmes conditions réalisées, *sauf la compacité de la fonction* β. La conclusion, bien entendu, ne subsiste pas. Mais, si w est une application linéaire faiblement continue quelconque de G dans un espace vectoriel topologique G_1, séparé par son dual, et si β_1 est une fonction $\geqslant 0$ *compacte* sur G_1, telle que $\beta_1 \circ w \leqslant \beta$, alors la composée $w \circ u$ est approximativement (resp. très approximativement) $(A, \alpha'; B, \beta_1)$-radonifiante. En effet, pour les λ considérées,

$$B(w(u(\lambda)), \beta_1) = B(u(\lambda)), \beta_1 \circ w(\leqslant B(u(\lambda)), \beta) \leqslant 1 \,.$$

On pourra dire, dans cette situation, que *u est approximativement (resp. très approximativement) $(A, \alpha'; B, \beta)$-préradonifiante*. On pourra souvent utiliser cette remarque, mais nous préférons ne pas introduire la notion, sauf dans des cas très exceptionnels, et supposer la plupart du temps la compacité de β.

On pourra introduire ici toutes les mêmes variantes qu'antérieurement lorsque A et B sont des poids homogènes. Il y a plusieurs définitions possibles, pas forcément équivalentes; il semble inutile de se donner cette peine.

REMARQUE 2. Supposons, comme dans la remarque 1, β non compacte, et u approximativement $(A, \alpha'; B, \beta)$-préradonifiante. Il y a un grand nombre de cas où l'on peut conclure.

A) Supposons par exemple que β soit encore semi-continue inférieurement pour la topologie affaiblie $G_\sigma = \sigma(G, G')$. Si alors λ est de type (A, α')-approximable, *et si l'on sait que $u(\lambda)$ est de Radon sur G*, on peut conclure que $u(\lambda)$ est d'ordre (B, β). En effet, λ est limite cylindrique de λ_j de Radon portées par des compacts de dimension finie, de type (A, α'); donc $u(\lambda)$ est limite cylindrique de probabilités de Radon d'ordre (B, β). Mais on sait que, dans l'espace $\mathscr{P}(G_\sigma)$ des probabilités de Radon sur G_σ, l'ensemble de celles qui sont d'ordre (B, β) est étroitement fermé (point 2 dans (1.1 bis)), donc cylindriquement fermé (prop. (1.17.0), point 3), donc $u(\lambda)$ est d'ordre (B, β).

B) Soit G_0 une topologie plus faible que celle de G, encore séparée par son dual, et sur laquelle β soit compacte. Alors, si λ est de type (A, α')-approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B, β) *sur* G_0. Supposons G souslinien; alors l'image de $u(\lambda)$

dans G_0 provient d'une probabilité de Radon ν sur G. Dès lors ν et $u(\lambda)$, probabilités cylindriques sur G, ont même image dans G_0. Si G et G_0 ont le même dual, ou si l'on sait que $u(\lambda)$ et ν sont toutes deux concentrées sur les faiblement compacts convexes de G, on pourra affirmer que $u(\lambda)=\nu$, donc que $u(\lambda)$ est de Radon sur G, d'ordre (B, β). Ce procédé a été plusieurs fois utilisé dans un article antérieur sur les applications radonifiantes dans les espaces de suites.

(2.4 bis) *Changements de topologies sur E et G.*

Si une application linéaire u faiblement continue de E dans G est radonifiante, le reste-t-elle lorsqu'on change les topologies de E et G, de manière bien entendu qu'elle reste faiblement continue? Il y a seulement des résultats sur les applications approximativement radonifiantes:

PROPOSITION (2.4 ter). *Soient E, G, α', β, A, B, comme au théorème* (2.4).
1) *Si u est approximativement (resp. très approximativement) $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante, elle le reste pour toute topologie plus fine de G, si u reste faiblement continue et β reste compacte.*
2) *Supposons A et B homogènes, $E=\sigma(F', F)$, F Banach. Si u est faiblement continue de $\sigma(F', F)$ dans G, elle est approximativement (resp. très approximativement) (A, B)-radonifiante de $\sigma(F', F)$ dans G, si et seulement si elle l'est de F' dans G.*

DÉMONSTRATION. 1) Il suffit d'appliquer le théorème (2.4).
2) On applique le même théorème, et (2.1.7 bis).

REMARQUE. Les mêmes résultats ne subsistent peut être pas si l'on supprime "approximativement".

Variante: théorème (2.5):

Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques, séparés par leurs duals, soit $\mathfrak{S}$ une topologie vectorielle sur E', $\mathscr{T}$ un ensemble de parties équilibrées compactes de G, et soient A et B des poids homogènes. Supposons B compact. Pour que l'application linéaire faiblement continue u de E dans G soit approximativement (resp. très approximativement) $(A, E'_{\mathfrak{S}}; B, \mathscr{T})$-radonifiante, il suffit que, pour tout ensemble de probabilités de Radon sur E, portées par des compacts de dimension finie (resp. par des ensembles finis), uniformément de type A pour $E'_{\mathfrak{S}}$, leurs images par u soient uniformément d'ordre B pour $\mathscr{T}$. On peut remplacer le type A et l'ordre B par le type et l'ordre p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit λ de type A approximable (resp. très approximable) pour la topologie $E'_{\mathfrak{S}}$. Elle est limite cylindrique de probabilités λ_j, de Radon, portées par des compacts de dimension finie (resp. par des ensembles finis), uniformément de type A pour $E'_{\mathfrak{S}}$. Alors, d'après l'hypothèse, les $u(\lambda_j)$ sont uniformément d'ordre

B, et convergent-cylindriquement vers $u(\lambda)$; le théorème (1.18 bis) donne alors le résultat, et aussi pour l'indice p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$.

REMARQUE. Ici par contre la condition n'a aucune raison d'être nécessaire. On trouvera au corollaire (2.9) la possibilité de supprimer le mot "approximativement".

Le cas du type et de l'ordre p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, est le plus important, on l'étudiera plus à fond au § 3.

(2.6) *Les propriétés d'approximation.*

DÉFINITION (2.6.1). *On dit qu'un espace vectoriel topologique E a la propriété d'approximation équicontinue, si l'application identique est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires de rang fini équicontinues.*

On conjecture que tous les espaces vectoriels topologiques localement convexes ont cette propriété. Bien entendu seul un espace séparé par son dual est susceptible de l'avoir; car si toutes les formes linéaires continues s'annulent en $a \in E$, il en est de même de toutes les applications linéaires continues de rang fini, et de telles applications ne peuvent donc tendre vers l'identité au point a que si $a=0$. Aussi des espaces tels que $L^p(X, \lambda)$, où λ est une mesure diffuse, n'ont-ils jamais cette propriété pour $0 \leqslant p < 1$. Mais les espaces de suites l^p, même pour $0 < p < 1$, ont cette propriété de façon évidente, par troncature des suites.

(2.6.2) *Soit E un quasi-normé. On dit qu'il a la propriété d'approximation métrique, si l'application identique est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires de rang fini de quasi-norme $\leqslant 1$.* Ici encore on conjecture que tout E séparé par son dual a la propriété d'approximation métrique; si E est un Banach réflexif, un théorème de Grothendieck dit que, si E a la propriété d'approximation équicontinue, il a la propriété d'approximation métrique; on sait aussi que, si E' a la propriété d'approximation métrique, E la possède également [20].

Mais nous aurons besoin d'une propriété plus forte:

(2.6.3) *Soient E un espace vectoriel topologique séparé par son dual, et soit $\mathfrak{S}$ une topologie vectorielle sur E'.*

On dira que $(E, E'_{\mathfrak{S}})$ a la propriété d'approximation équicontinue, si l'application identique de $E'_{\mathfrak{S}}$ est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires de rang fini, équicontinues, toutes continues de $\sigma(E', E)$ dans lui-même (donc aussi de $\sigma(E', E)$ dans $E'_{\mathfrak{S}}$, puisque l'image est de dimension finie, donc que $\sigma(E', E)$ induit une topologie plus fine que $E'_{\mathfrak{S}}$ sur l'image).

[20] GROTHENDIECK [1], 2e partie, § 5, n°. 2, proposition 40, page 180.

(2.6.4) *Un couple* (E, E'_{ε}), *où* E'_{ε} *est quasi-normé, est dit avoir la propriété d'approximation métrique, si l'application identique de* E'_{ε} *est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires de rang fini, de quasi-norme* $\leqslant 1$, *continues de* $\sigma(E', E)$ *dans lui-même* (ou dans E'_{ε}).

On appliquera surtout cette définition à E quasi-normé, ou dual $*$-faible d'un quasi-normé, E'_{ε} étant toujours défini comme à (2.1.7 bis).

Comme une application linéaire continue de $\sigma(E', E)$ dans lui-même est a fortiori continue de E' dans lui-même, (2.6.4) implique, si E est un Banach, que E', donc E, ait la propriété d'approximation métrique; et c'est équivalent à cette propriété si E est réflexif, puisqu'alors toute application linéaire continue pour E' l'est aussi pour $\sigma(E', E)$. Pour $E=\sigma(F', F)$, cela veut simplement dire que F a la propriété d'approximation métrique (mais non nécessairement F'), car toute forme linéaire continue sur F est continue par $\sigma(F, F')$. Cette propriété est satisfaite pour tous les espaces $E=L^p$, puisqu'ils sont réflexifs, pour $1<p<+\infty$. Montrons qu'elle l'est aussi pour L^1 et L^∞:

PROPOSITION (2.7). *Le couple* (L^1, L^∞) *et le couple* (C, M) *ont la propriété d'approximation métrique, ainsi que* $(L^\infty, (L^\infty)')$, *et* (M, M').

1) Soit donc $E=L^1(X, \lambda)$, λ de Radon $\geqslant 0$ sur X. Soient $\varepsilon>0$, et f_i, $i=1, 2, \cdots, n$, un nombre fini de fonctions de L^∞. Nous devons trouver u, linéaire continue de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^∞, de norme $\leqslant 1$ dans L^∞, et telle que, pour $1\leqslant i\leqslant n$: $\|uf_i-f_i\|_\infty\leqslant\varepsilon$. On peut trouver un nombre fini de parties boréliennes non λ-négligeables, disjointes, X_j, $1\leqslant j\leqslant N$, de réunion X, telles que, sur chacune d'elles, chaque f_i soit somme d'une constante $c_{i,j}$ et d'une fonction λ-presque partout majorée en module par $\varepsilon/2$. Soit φ_j une fonction $\geqslant 0$ sur X_j, nulle ailleurs, d'intégrale 1. Posons

$$uf=\sum_j\left(\int_{X_j}\varphi_j f d\lambda\right)\chi_j\,,$$

où χ_j est la fonction caractéristique de X_j. C'est une application linéaire de rang $\leqslant N$, continue de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^∞, car les φ_j sont dans L^1 et les X_j dans L^∞; sa norme est $\leqslant 1$, car, pour $\|f\|_\infty\leqslant 1$,

$$\|uf\|_\infty\leqslant\|\sum_j X_j\|_\infty=1\,.$$

Puisque, dans X_j, f_i est la somme de $c_{i,j}$ et d'une fonction majorée en module par $\varepsilon/2$, $\int_{X_j}\varphi_j f_i d\lambda$ est la somme de $c_{i,j}$ et d'une fonction majorée en module par $\varepsilon/2$ (à cause de $\int_{X_j}\varphi_j d\lambda=1$); alors uf_i est la somme de $\sum_j c_{i,j}\chi_j$ et d'une fonction majorée en module par $\sum_j \varepsilon\chi_j/2=\varepsilon/2$; mais f_i a la même propriété, donc $\|uf_i-f_i\|_\infty$ est majorée par ε. CQFD.

1 bis) Comme l'espace M des mesures de Radon sur un compact est isomorphe à un espace L^1, le couple (M, M') a la propriété d'approximation métrique [21].
2) Soit maintenant $E=C(X)$, espace des fonctions continues sur un espace compact X, et soit M son dual, espace des mesures de Radon. Soient $\varepsilon>0$, et μ_i, $i=1, 2, \cdots, n$, des mesures sur X. Nous devons trouver u, linéaire continue de $\sigma(M, C)$ dans M, de norme $\leqslant 1$, et telle que, pour tout i, $\|u\mu_i-\mu_i\|\leqslant\varepsilon$ (norme dans M). Soit λ une mesure $\geqslant 0$ de masse 1, dominant toutes les μ_i, de sorte qu'on peut écrire $\mu_i=f_i\lambda$, $f_i\in L^1(X, \lambda)$. Pour chaque f_i, on peut trouver une fonction continue g_i, telle que $\|f_i-g_i\|_{L^1(X,\lambda)}\leqslant\varepsilon/3$, ou encore $\|f_i\lambda-g_i\lambda\|_M\leqslant\varepsilon/3$; alors, si u de norme $\leqslant 1$ vérifie, pour tout i, $\|u(g_i\lambda)-g_i\lambda\|_M\leqslant\varepsilon/3$, elle vérifie aussi $\|u\mu_i-\mu_i\|\leqslant\varepsilon$. Soit alors Ω_j, $1\leqslant j\leqslant N$, un ensemble d'ouverts recouvrant X, tels que, dans chaque Ω_j, chaque fonction g_i ait une oscillation $\leqslant\varepsilon/6$, c. à d. diffère d'une constante $c_{i,j}$ par une fonction majorée en module par $\varepsilon/6$. Soit α_j, $1\leqslant j\leqslant N$, une partition de l'unité par des fonctions continues, $0\leqslant\alpha_j\leqslant 1$, α_j ayant son support dans Ω_j, $\sum_j \alpha_j=1$. Et définissons u par

$$u\mu=\sum_j \mu(\alpha_j)\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)} \quad \text{(en prenant 0 si } \lambda(\alpha_j)=0).$$

Comme les α_j sont dans C, et les $\alpha_j\lambda$ dans M, u est bien linéaire, de rang $\leqslant N$, continue de $\sigma(M, C)$ dans M. Supposons $\|\mu\|\leqslant 1$; on a

$$|u\mu|(\alpha_k)\leqslant\sum_j |\mu(\alpha_j)|\frac{\lambda(\alpha_j\alpha_k)}{\lambda(\alpha_j)},$$

donc

$$|u\mu|(1)\leqslant\sum_{j,k} |\mu(\alpha_j)|\frac{\lambda(\alpha_j\alpha_k)}{\lambda(\alpha_j)}\leqslant\sum_j |\mu(\alpha_j)|\leqslant|\mu|(1)=\|\mu\|\leqslant 1,$$

donc $\|u\|\leqslant 1$. Enfin $u(g_i\lambda)$ diffère de

$$\sum_j c_{i,j}\lambda(\alpha_j)\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)}=\sum_j c_{i,j}\alpha_j\lambda,$$

d'une mesure dont le module est majoré par

$$\sum_j \frac{\varepsilon}{6}\lambda(\alpha_j)\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)}=\frac{\varepsilon}{6}\sum_j \alpha_j\lambda=\frac{\varepsilon}{6}\lambda,$$

donc dont la norme est majorée par $\varepsilon/6$; or $g_i\lambda$ a la même propriété, car $g_i\lambda=\sum_j g_i\alpha_j\lambda$; donc on a bien $\|u(g_i\lambda)-g_i\lambda\|_M\leqslant\varepsilon/3$, donc $\|u\mu_i-\mu_i\|_M\leqslant\varepsilon$. CQFD.
2 bis) Comme $L^\infty(X, \lambda)$ est isomorphe à $C(K)$, où K est le spectre de l'algèbre de

---

[21] S. KAKUTANI [1].

Banach $L^\infty(X, \lambda)$, le couple $(L^\infty, (L^\infty)')$ a aussi la propriété d'approximation métrique.

Nous allons voir maintenant que, pour des espaces ayant la propriété d'approximation, c. à d. sans doute tous les espaces usuels et peut-être tous les espaces, alors les probabilités cylindriques deviennent approximables.

PROPOSITION (2.8). *Soient E un espace vectoriel topologique séparé par son dual, $\mathfrak{S}$ une topologie vectorielle sur E'. Supposons que $(E, E'_{\mathfrak{S}})$ ait la propriété d'approximation équicontinue. Alors, si Φ est un poids homogène plus fort que L^0, toute probabilité cylindrique λ sur E, de type Φ pour $E'_{\mathfrak{S}}$, est de type Φ approximable pour $E'_{\mathfrak{S}}$; toute λ de type p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, est de type p approximable. Si $E'_{\mathfrak{S}}$ est quasi-normé, et si $(E, E'_{\mathfrak{S}})$ a la propriété d'approximation métrique, toute probabilité cylindrique λ, de type Φ, est de type Φ approximable, et $\Phi^{*a}(\lambda) = \Phi^*(\lambda)$.*

DÉMONSTRATION. Soient π_j des applications linéaires de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans lui-même, de rangs finis, équicontinues, et continues de $\sigma(E', E)$ dans lui-même, convergeant simplement vers l'identité. Puisque λ est de type $\mathfrak{S}$, il existe un voisinage V de 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, tel que $\Phi(\xi(\lambda)) \leqslant \theta'_V(\xi)$ pour tout $\xi \in E'$. Il existe un voisinage W de 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$ tel que $\pi_j(W) \subset V$ pour tout j, à cause de l'équicontinuité; ou encore $\theta'_V(\pi_j(\xi)) \leqslant \theta'_W(\xi)$. Considérons alors les probabilités cylindriques images de λ par les ${}^t\pi_j$, applications linéaires continues de rang fini de E dans lui-même. Pour tout $\xi \in E'$, on a $\xi({}^t\pi_j(\lambda)) = (\xi \circ {}^t\pi_j)(\lambda) = (\pi_j(\xi))(\lambda)$. Or Φ est supposé plus fort que L^0; donc, d'après le corollaire (2.1.13), lorsque π_j converge vers l'identité, et par suite $\pi_j(\xi)$ converge vers ξ dans $E'_{\mathfrak{S}}$, alors $(\pi_j(\xi))(\lambda)$ converge vers $\xi(\lambda)$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$; donc λ est limite cylindrique des ${}^t\pi_j\lambda$ (prop. (1.17.0)). Comme enfin $\Phi(\pi_j(\xi)(\lambda)) \leqslant \theta'_V(\pi_j(\xi)) \leqslant \theta'_W(\xi)$, ces ${}^t\pi_j(\lambda)$ sont uniformément de type Φ. Nous venons donc de montrer que λ est cylindriquement adhérente a l'ensemble des ${}^t\pi_j(\lambda)$, probabilités de Radon portées par des sous-espaces vectoriels de dimension finie, et toutes de type (Φ, θ'_W). Cela prouve, d'après la remarque (2.2.00) permettant le passage de λ_j de Radon portées par des sous-espaces de dimension finie à des $\lambda_{j,k}$ de Radon portées par des compacts de dimension finie, que λ est de type (Φ, θ'_W)-approximable.

Le cas quasi-normé, avec la propriété d'approximation métrique, se ramène à ce qui précède. Soit $\Phi^*(\lambda) = a$. Alors λ est de type $((1/a)\Phi, \theta')$, où θ' est la norme; donc V est la boule unité, mais aussi W puisque les normes des π_j sont $\leqslant 1$, donc les $\lambda_{j,k}$ sont aussi de type $((1/a)\Phi, \theta')$, donc $\Phi^*(\lambda_{j,k}) \leqslant a$ donc $\Phi^{*a}(\lambda) \leqslant \Phi^*(\lambda)$, donc $= \Phi(\lambda)$.

Le type $p > 0$ se ramène à ce qui précède, en prenant $\Phi = \| \;\|_p$; examinons le cas d'une λ de type 0 pour $E'_{\mathfrak{S}}$. Il reste vrai que λ est limite cylindrique des ${}^t\pi_j(\lambda)$; quand ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, il en est de même de $\pi_j(\xi)$, uniformément par rapport à j, puisque les π_j sont équicontinues, donc les $\xi({}^t\pi_j(\lambda)) = (\pi_j(\xi))(\lambda)$ convergent uniformément vers δ dans $\mathscr{P}(K)$ (2.1.5), donc, d'après (2.1.6), les ${}^t\pi_j(\lambda)$ sont uniformément de type 0. Il en est a fortiori de même des $\lambda_{j,k}$ comme plus haut, donc λ est encore de type 0 approximable.

COROLLAIRE (2.9). *Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques, séparés par leurs duals, et soit $\mathfrak{S}$ une topologie vectorielle sur E'. Soient A, B, deux poids homogènes, A plus fort que L^0. Supposons que $(E, E'_{\mathfrak{S}})$ ait la propriété d'approximation équicontinue. Pour qu'une application linéaire u faiblement continue de E dans G soit $(A, E'_{\mathfrak{S}}; B)$ radonifiante, (il faut et) il suffit qu'elle soit approximativement $(A, E'_{\mathfrak{S}}; B)$ radonifiante. Pour que u soit p-radonifiante pour $E'_{\mathfrak{S}}$, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, il (faut et il) suffit qu'elle le soit approximativement.*

On voit l'intérêt de ce corollaire, puisque le théorème (2.5) donnera alors une condition suffisante pour que u soit radonifiante.

Voici maintenant une proposition que nous ne démontrerons, pour simplifier, que dans le cas où $E=\sigma(F', F)$, F quasi-normé, et où $E'_{\mathfrak{S}}$ est la topologie quasi-normée F:

PROPOSITION (2.9.1). *Toute probabilité cylindrique λ sur $\sigma(F', F)$, F quasi-normé, de type $p \geqslant 1$, est de type p approximable, et $\|\lambda\|_p^{*a} = \|\lambda\|_p^*$.*

Démonstration. On peut réaliser λ comme λ_f, f application linéaire continue de F dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$, avec $\|f\|_p = \|\lambda\|_p^*$. Mais $L^p(\Omega, \mu)$, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, a la propriété d'approximation métrique; donc f est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires continues de rang fini, f_j, de F dans $L^p(\Omega, \mu)$, de norme $\leqslant \|\lambda\|_p^*$. Les $\lambda_j = \lambda_{f_j}$ convergent cylindriquement vers λ. Une telle application f_j s'écrit comme somme finie $\sum_n a'_{j,n} \otimes g_{j,n}$, $g_{j,n} \in L^p(\Omega, \mu)$, $a'_{j,n} \in F'$; elle est alors decomposée, réalisable par l'application φ_j de Ω dans $F': \omega \mapsto \sum_n g_{j,n}(\omega) a'_n$; donc $\lambda_j = \lambda_{f_j}$ est la probabilité de Radon $\varphi_j(\mu)$, portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie de F'. Celle-ci à son tour est limite étroite de probabilités $\lambda_{j,k}$, portées par des compacts de ce sous-espace vectoriel de dimension finie, pour lesquelles $\|\lambda_{j,k}\|_p^* \leqslant \|\lambda\|_p^*$, ce qui démontre la proposition.

Nous allons maintenant passer aux probabilités de Radon portées par des ensembles finis (c. à d. des combinaisons linéaires finies de masses discrètes).

PROPOSITION (2.10). *Soient E un quasi-normé (resp. un dual $*$-faible d'un quasi-normé F) et Φ un poids homogène ayant la propriété suivante:*

Pour μ probabilité de Radon sur $\boldsymbol{R}_+$, désignons par $\mu+\varepsilon$ sa translatée par la translation ε, $\varepsilon \geqslant 0$; on a l'inégalité $\Phi(\mu+\varepsilon) \leqslant \Phi(\mu) + k(\varepsilon, b)$, si le support de μ est dans $[0, b]$, où k est une fonction qui, pour tout b fini, tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Alors, si une probabilité de Radon λ sur E (resp. F') est de type Φ, elle est de type Φ très approximable, et $\Phi^*(\lambda)=\Phi^{*a}(\lambda)=\Phi^{*ta}(\lambda)$.

DÉMONSTRATION. On peut toujours supposer $\Phi^*(\lambda)\leqslant 1$.

On peut d'abord remplacer λ par une $\lambda_k=\lambda(\complement K)\delta_{(0)}+\chi_K\lambda$, K compact, qui vérifiera encore $\Phi(\xi(\lambda_K))\leqslant\|\xi\|$ (voir remarque (2.2.00)); cela revient à supposer désormais que la probabilité donnée λ est portée par un compact K. On peut alors partager K en réunion finie de parties boréliennes $K_1, K_2, \cdots, K_n$, chacune de diamétre $\leqslant\varepsilon$. Soit a_i choisi dans K_i arbitrairement, et posons $\lambda_\varepsilon=\sum\lambda(K_i)\delta_{(a_i)}$. Montrons que, quels que soient les choix des K et des a_i, λ_ε tend étroitement vers λ pour ε tendant vers 0; et d'autre part majorons les $\Phi(\xi(\lambda_\varepsilon))$, pour $\xi\in E'$, $\|\xi\|\leqslant 1$. Soit h_ε l'application de K dans lui-même, qui envoie chaque K_i sur le point a_i choisi dans K_i. Si φ est une fonction continue bornée sur E, elle est uniformément continue sur K, et par suite $\varphi\circ h_\varepsilon$ converge vers φ uniformément quand ε tend vers 0; or $\lambda_\varepsilon(\varphi)=(h_\varepsilon(\lambda))(\varphi)=\lambda(\varphi\circ h_\varepsilon)$ tend donc vers $\lambda(\varphi)$ pour ε tendant vers 0, ce qui montre bien que λ_ε tend étroitement vers λ. Soient $\xi\in E'$, et soit $|\xi|$ la fonction $x\mapsto|\langle x,\xi\rangle|$. Alors $|\xi|(\lambda_\varepsilon)=|\xi|(h_\varepsilon(\lambda))=(|\xi|\circ h_\varepsilon)(\lambda)$. Mais la fonction $|\xi\circ h_\varepsilon-\xi|$, sur le compact K, est majorée par ε; donc $|\xi\circ h_\varepsilon|$ est majorée par $|\xi|+\varepsilon$, et par suite

$$|\xi|(\lambda_\varepsilon)=|\xi\circ h_\varepsilon|(\lambda)\leqslant|\xi|(\lambda)+\varepsilon \quad ({}^{22}) .$$

Comme λ a son support dans K, $|\xi|(\lambda)$ a son support dans $[0, b]$, b étant le maximum de la norme sur K. Donc

$$\Phi(\xi(\lambda_\varepsilon))\leqslant\Phi(\xi(\lambda))+k(\varepsilon, b)\leqslant 1+k(\varepsilon, b) .$$

Remplaçons alors λ_ε par son homothétique λ'_ε par rapport à l'origine, dans le rapport $\dfrac{1}{1+k(\varepsilon, b)}$; λ'_ε converge encore étroitement vers λ pour ε tendant vers 0, et maintenant $\Phi(\xi(\lambda'_\varepsilon))\leqslant 1$ pour $\xi\in E'$, $\|\xi\|\leqslant 1$, donc $\Phi^*(\lambda'_\varepsilon)\leqslant 1$. CQFD.

(2.10 bis) EXEMPLES. On peut prendre $\Phi=\|\ \|_p$, pour tout $p>0$. Si $p<+\infty$, et si Supp. $\mu\subset[0, b]$, on a

$$\int_{R_+} t^p d(\mu+\varepsilon)(t)=\int_{R_+}(t+\varepsilon)^p d\mu(t) ;$$

lorsque ε tend vers 0, $t\mapsto(t+\varepsilon)^p$ tend vers t^p uniformément sur $[0, b]$, donc le 2ème membre tend vers le ler, uniformément par rapport à $\mu\in\mathscr{P}[0, b]$; la racine p-ième aussi, donc $\|\mu+\varepsilon\|_p$ tend vers $\|\mu\|_p$ quand ε tend vers 0, uniformément par rapport à μ, donc la propriété (2.10) est bien réalisée. Pour $p=\infty$ on a triviale-

(22) Attention au sens du dernier membre, donné dans la proposition et au sens de $\leqslant$, donné à (1.1 bis)!

ment $\|\mu+\varepsilon\|_\infty=\|\mu\|_\infty+\varepsilon$.

D'autre part, si Φ est un J-poids de la forme (1.12), $\Phi=\operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1}\varphi(\alpha)J_\alpha$, avec $\varphi>0$ et *bornée*, la propriété est vraie aussi; car $J_\alpha(\mu+\varepsilon)=J_\alpha(\mu)+\varepsilon$, donc $\Phi(\mu+\varepsilon)\leqslant\Phi(\mu)+\varepsilon\operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1}\varphi(\alpha)$. C'est à cause de cette proposition que nous avons supposé, dans la définition des J-poids (1.12), que la fonction φ était bornée. Enfin on peut aussi prendre $\Phi=J_\alpha$.

REMARQUE. Il était essentiel de se ramener à λ portée par un compact K, et d'avoir des K_i de diamètre $\leqslant\varepsilon$. Si λ est une probabilité de Radon sur un espace $\sigma(F', F)$, *le résultat n'est plus valable*; mais si on sait qu'elle portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie, c'est aussi une probabilité de Radon pour F', et *le résultat précédent s'applique*. Donc:

COROLLAIRE (2.11). *Soient Φ un poids homogène vérifiant les conditions de la proposition* (2.10). *Soit E un quasi-normé ou un dual $*$-faible d'un quasi-normé.*

1) *Toute probabilité cylindrique λ sur E, de type Φ approximable, est de type Φ très approximable, et*

(2.11) $$\Phi^{*ta}(\lambda)=\Phi^{*a}(\lambda)\ .$$

Toute probabilité cylindrique de type p approximable, $0\leqslant p\leqslant+\infty$, *est de type p très approximable, et*

$$\|\lambda\|_p^{*ta}=\|\lambda\|_p^{*a}\quad\text{pour}\quad p>0\ .$$

Si G est un espace vectoriel topologique (séparé par son dual), et si u est une application linéaire faiblement continue de E dans G, très approximativement Φ ou p-radonifiante, elle est approximativement Φ ou p-radonifiante.

2) *Si en outre le couple (E, E') a la propriété d'approximation métrique, toute probabilité cylindrique λ sur E, de type Φ ou p, est de type Φ ou p très approximable, et on a*

(2.11 quarto) $$\Phi^{*ta}(\lambda)=\Phi^{*a}(\lambda)=\Phi^{*}(\lambda)$$

$$\|\lambda\|_p^{*ta}=\|\lambda\|_p^{*a}=\|\lambda\|_p^{*}\quad\textit{pour}\quad p>0\ .$$

Toute application linéaire u faiblement continue de E dans G, très approximativement Φ ou p-radonifiante, est Φ ou p-radonifiante.

Tout est évident. Le cas $p=0$ se traite comme suit. Si λ est de type 0, il existe un J-poids Φ, tel que λ soit de type Φ; elle est donc de type Φ approximable pour (2.1.7), donc elle est de type Φ très approximable, a fortiori de type 0 très approximable.

PROPOSITION (2.12).

1) *Soit u une application linéaire faiblement continue (A, B)-radonifiante de E dans G, relativement à une topologie vectorielle $E'_{\mathfrak{S}}$ sur E et un ensemble $\mathscr{T}$ de parties bornées équilibrées fermées de G, A et B étant des poids homogènes. Soient v une application linéaire faiblement continue de E_1 dans E, w une application linéaire continue de G dans G_1. On suppose en outre que l'on se donne sur E'_1 une topologie vectorielle $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$, et que la transposée ${}^tv$ est continue de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$; on suppose aussi qu'on se donne un ensemble $\mathscr{T}_1$ de bornés équilibrés fermés de G_1, et que, pour $D \in \mathscr{T}_1$, $\overline{w(D)} \in \mathscr{T}_1$. Alors la composée wuv: $E_1 \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} G \xrightarrow{w} G_1$ est (A, B)-radonifiante relativement à la topologie $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$ et à $\mathscr{T}_1$.*

2) *Soit $u: E \to G$ une application linéaire faiblement continue (A, B)-radonifiante relativement à une topologie $E'_{\mathfrak{S}}$ sur E', A et B étant des poids homogènes. Supposons que $u(E) \subset G_1$, sous espace vectoriel de G. Alors, si $\bar{G}_1$ est l'adhérence de G_1 dans G et si G est localement convexe, u est encore (A, B)-radonifiante de E dans $\bar{G}_1$, relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$.*

3) *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans un quasi-Banach G, et soient $E'_{\mathfrak{S}}$ une topologie vectorielle sur E' et A et B des poids homogènes. Supposons qu'il existe une application linéaire faiblement continue v de E dans un normé C, (A, B)-radonifiante relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$, et que, pour tout x de E, $\|u(x)\| \leqslant \|v(x)\|$. Alors u est (A, B)-radonifiante relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$.*

Mêmes énoncés avec approximativement ou très approximativement radonifiante, et avec p-radonifiante, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, approximativement ou très approximativement p-radonifiante.

1) Soit λ une probabilité cylindrique sur E_1 de type A relativement à $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$. Alors $v(\lambda)$, probabilité cylindrique sur E, est de type A relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$: si $\xi \in E'$ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, ${}^tv(\xi)$ tend vers 0 dans $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$ grâce à l'hypothèse sur ${}^tv$, et alors $A(\xi(v(\lambda))) = A(({}^tv(\xi))(\lambda))$ tend bien vers 0. Alors $u(\lambda)$ sera de Radon d'ordre B sur G. Il existe donc une partie bornée équilibrée fermée $D \in \mathscr{T}$ telle que $u(\lambda)$ soit d'ordre (B, j_D). Puisque w est continue (ici la seule continuité faible ne suffirait pas), $wuv(\lambda)$ est de Radon sur G_1; et elle est d'ordre (B, j_{D_1}), où D_1 est l'adhérence de $w(D)$, car $j_{D_1} \circ w \leqslant j_D$. Si en outre tous les espaces $(E'_1)_{\mathfrak{S}_1}$, $E'_{\mathfrak{S}}$, G, G_1, sont quasi-normés, on aura des inégalités plus précises, car

$$A^*(v(\lambda)) = \operatorname*{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} A(\xi(v(\lambda))) = \operatorname*{Sup}_{\|\xi\| \leqslant 1} A(({}^tv(\xi))(\lambda))$$
$$\leqslant \|{}^tv\| \operatorname*{Sup}_{\|\xi_1\| \leqslant 1} A(\xi_1(\lambda)) = \|{}^tv\| A^*(\lambda) ,$$

et

$$B(wuv(\lambda)) \leqslant \|w\| B(uv(\lambda)) .$$

2) Soit λ une probabilité cylindrique de type A sur E. Appelons u_1 l'application u, considérée comme opérant de E dans $\bar{G}_1$, et j l'injection canonique de $\bar{G}_1$ dans G. Nous savons que u est (A, B)-radonifiante, et nous voulons montrer que u_1 l'est aussi. L'image $u_1(\lambda)$ est cylindrique sur $\bar{G}_1$; $ju_1(\lambda)=u(\lambda)$ est de Radon sur G, mais cylindriquement concentrée (à 0 près) sur $\bar{G}_1$ donc portée par $\bar{G}_1$ qu'il est faiblement fermé [23]; donc il existe une probabilité de Radon ν_1 sur $\bar{G}_1$, telle que $u(\lambda)=j(\nu_1)$. Alors $u_1(\lambda)$ et ν_1 ont même image par j; comme j est un morphisme strict [24], $\nu_1=u_1(\lambda)$, qui est donc de Radon. Et comme $u(\lambda)$ est d'ordre B, ν_1 l'est aussi.

3) s'en déduit. Car $v(x) \mapsto u(x)$ est une application linéaire bien définie, de norme $\leqslant 1$, de $v(E) \subset C$ dans G. Donc elle se prolonge en une application linéaire continue w de $\overline{v(E)}$ dans G; mais, d'après 2), v est p-radonifiante de E *dans* $\overline{v(E)}$, donc $u=w \circ v$ l'est de E dans G d'après 1).

REMARQUE. Dans 2, on ne pourrait pas prendre G non localement convexe, même en appelant $\bar{G}_1$ l'adhérence faible de G_1. En effet, la topologie affaiblie de $\bar{G}_1$ est alors plus fine que l'induite par la topologie affaiblie de G, et u_1 n'est plus nécessairement faiblement continue de E dans $\bar{G}_1$. Même si l'on suppose u continue, u_1 est aussi continue, et on trouvera encore que $u_1(\lambda)$ et ν_1 ont même image par j; mais j, morphisme strict, n'est plus nécessairement un morphisme faible strict, et cela ne prouve plus que $u_1(\lambda)$ et ν_1 soient égales. Aussi, dans 3, C doit il être normé et pas seulement quasi-normé.

(2.13) *Enoncés en termes d'applications décomposantes.*

Soit f une application linéaire de E' dans un $L^0(\Omega, \mu)$. On dira qu'elle est de type (A, α'), A poids, α' fonction $\geqslant 0$ sur E', si la probabilité cylindrique associée λ_f est de type (A, α'); cela veut dire que, pour tout $\xi \in E'$, $A(\mu, f(\xi)) \leqslant \alpha'(\xi)$. On introduira toutes les variantes antérieures (de type A homogène pour une topologie E', de type p, etc...). On dira qu'une application μ-mesurable φ de Ω dans G est d'ordre (B, β), B poids, β fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur G, si la probabilité image $\varphi(\mu)$ est d'ordre (B, β), c. à d. si $\Phi(\mu, \beta \circ \varphi) \leqslant 1$; avec les mêmes variantes. On dira alors qu'une application linéaire ${}^t u$ de $\sigma(G', G)$ dans $\sigma(E', E)$ est $(A, \alpha'; B, \beta)$ décomposante, si, pour toute application linéaire f de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$, de type (A, α'), la composée $f \circ {}^t u$, application linéaire de G' dans $L^0(\Omega, \mu)$, est décomposée, réalisable par une application φ μ-mesurable de Ω dans G, d'ordre

[23] SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, §3, proposition 3.

[24] SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, §3, remarque après l'exemple 3 de la proposition 6.

(B, β). Par ailleurs, f sera dite de type (A, α')-approximable, si elle est limite, pour la topologie de la convergence simple, d'applications linéaires f_j de rang fini, continues de $\sigma(E', E)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$, de type (A, α'). Si f_j est de rang fini, elle est de la forme $f_j = \sum_n g_{n,j} \otimes a_{n,j}$ (somme finie), $g_{n,j} \in L^0(\Omega, \mu)$, $a_{n,j} \in E$; alors elle est décomposée par $\varphi : \omega \mapsto \sum_n g_{n,j}(\omega) a_{n,j}$, application μ-mesurable de Ω dans E, à valeurs dans un sous-espace vectoriel de dimension finie; donc λ_{f_j} est une probabilité de Radon portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, à savoir $\varphi_j(\mu)$; d'après la remarque (2.2.00), cela entraîne que λ_f soit de type (A, α') approximable; la réciproque n'est peut-être pas vraie.

Comme il n'y a donc pas équivalence exacte entre probabilités cylindriques approximables et fonctions aléatoires linéaires approximables, ni entre probabilités de Radon et fonctions aléatoires linéaires décomposées, on ne peut pas donner de bonnes conditions nécessaires et suffisantes, mais on aura ceci (voir prop. (1.19.0)):

PROPOSITION (2.14). *Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals, A, B, deux poids, α' une fonction $\geqslant 0$ sur E', β une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur G. Si une application linéaire ${}^t u$ continue de $\sigma(G', G)$ dans $\sigma(E', E)$, est $(A, \alpha'; B, \beta)$ décomposante, u est $(A, \alpha'; B, \beta)$ radonifiante; la réciproque est vraie si G a ses parties compactes métrisables (par exemple s'il est souslinien, ou si c'est un Banach, ou un dual *-faible d'un Banach séparable, ou si G' est *-faiblement séparable). Si G vérifie ces conditions et si u est approximativement $(A, \alpha'; B, \beta)$ radonifiante, ${}^t u$ est approximativement $(A, \alpha'; B, \beta)$-décomposante.*

REMARQUE. Certaines des démonstrations antérieures faisaient au fond usage du point de vue des fonctions aléatoires linéaires. Supposons par exemple que le couple $(E, E'_{\circledS})$ ait la propriété d'approximation équicontinue, par des π_j. Si alors f est linéaire de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$, de type Φ homogène pour $E'_{\circledS}$, alors les $f \circ \pi_j = f_j$ convergent simplement vers f, mais sont continues de $\sigma(E', E)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$, et on voit aisément, à cause de l'équicontinuité, que les f_j sont uniformément de type Φ pour $E'_{\circledS}$. C'est une manière de démontrer la proposition (2.8), peu différente d'ailleurs de celle qui a été adoptée. La démonstration de la proposition (2.9.1) utilise très exactement les fonctions aléatoires. Quant à la proposition (2.10), on aurait pu représenter la probabilité λ de Radon sur E par l'application φ identique de $E = \Omega$, μ-mesurable avec $\mu = \lambda$; et approcher φ par des applications μ étagées φ_j de Ω dans E; la probabilité image $\varphi_j(\mu)$, pour φ_j étagée, est une combinaison linéaire finie de masses ponctuelles. Ce serait, sous une autre forme, une transcription exacte de la démonstration qui a été donnée.

§ 3. Les applications p-radonifiantes dans les quasi-Banach, $0<p\leqslant+\infty$.

Dans ce chapitre, pour des raisons qui seront vues plus loin, E sera toujours un Banach ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach F; dans ce dernier cas, E' sera F muni de sa quasi-norme. G sera un quasi-Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach H; dans le deuxième cas, $\sigma(G'', G')$ sera $G=\sigma(H', H)$ lui-même, mais dans le premier cas, $\sigma(G'', G')$ sera, pour le calcul de l'ordre des probabilités de Radon, accompagné de la jauge de l'adhérence de la quasi-boule unité de G, c. à. d. muni de sa structure bitopologique canonique (préliminairs). Comme toujours, F et G sont séparés par leurs duals et mêmes leurs boules unités sont faiblement fermées. Chaque énoncé couvrira donc 4 cas, dans les conditions énoncé à la proposition (0.0) des préliminaires. D'autre part, $0<p\leqslant+\infty$.

(3.1) *Les applications p-sommantes.*

1) Une suite $a=(a_n)_{n\in N}$ d'éléments de E est dite scalairement l^p, $0<p\leqslant+\infty$, si, pour tout $\xi\in E'$, la suite $\langle a,\xi\rangle=(\langle a_n,\xi\rangle)_{n\in N}$ est dans l^p. Dans ce cas, l'application $\xi\mapsto\langle a,\xi\rangle$ de E' ou F dans l^p est continue, car E' ou F est de Baire et elle est limite d'une suite d'applications linéaires continues, à savoir les applications tronquées: si $\tilde{a}_N$ est la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_N, 0, 0, \cdots)$, $\xi\mapsto\langle\tilde{a}_N,\xi\rangle$ est continue, et tend vers $\xi\mapsto\langle a,\xi\rangle$ pour N infini. Donc la quantité $\|a\|_p^*=\sup\limits_{\|\xi\|\leqslant 1}\|\langle a,\xi\rangle\|_{l^p}$ est finie. On vérifie sans peine qu'on peut la prendre comme $\mathrm{Min}(p, 1)$-quasi-norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{S}^p(E)$ des suites scalairement l^p de E. En outre, $\mathscr{S}^p(E)$ est un p-quasi-Banach; (*ce ne serait plus vrai si E était seulement un quasi-Banach*). En effet, soit $(a^k)_{k\in N}$ une suite de Cauchy dans E; pour tout $n\in N$, la suite $(a_n^k)_{k\in N}$ est alors une suite de Cauchy pour la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de E' ou de F; elle converge donc vers une limite a_n dans E ou F', complets dans les cas indiqués (mais, si E est seulement un quasi-Banach, la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de E' est celle de E_N, qui n'est pas complet). Ensuite il est trivial de voir que la suite $a=(a_n)_{n\in N}$ est scalairement l^p et que a^k converge vers a dans $\mathscr{S}^p(E)$.

Une suite scalairement l^p dans E_N l'est a fortiori dans E, donc $\mathscr{S}^p(E_N)\subset\mathscr{S}^p(E)$, et $\|a\|_{\mathscr{S}^p(E_N)}\geqslant\|a\|_{\mathscr{S}^p(E)}$. Il y a coincidence des espaces et égalité des normes, si E est un Banach, ou un dual $*$-faible d'un Banach, ou est dual $*$-faible d'un quasi-Banach pourvu que $p\geqslant 1$. Ces deux dernières affirmations sont les seules non triviales. Soit donc $E=\sigma(F', F)$, F Banach.

Soit a' une suite scalairement l^p de $\sigma(F', F)$. Soit $\xi''\in F''$, de norme $\leqslant 1$; il existe un $\xi\in F$, lui aussi de norme $\leqslant 1$, tel que $\langle a'_k,\xi\rangle$ soit aussi voisin qu'on le veut de $\langle a'_k,\xi''\rangle$, pour $k=0, 1, \cdots, N$ (la boule unité de F est dense dans celle de

F'' pour la topologie $\sigma(F'', F')$); alors, de l'inégalité $\|\langle a', \xi\rangle\|_{l^p} \leqslant \|a'\|_p^*$ pour $\|\xi\| \leqslant 1$ on déduit $\|\langle \tilde{a}'_N, \xi''\rangle\|_{l^p} \leqslant \|a'\|_p^*$ pour tout N et tout ξ'' de F'' de norme $\leqslant 1$; donc $\langle a', \xi''\rangle$ est dans l^p et sa quasi-norme dans l^p est $\leqslant \|a'\|_p^*$ pour $|\xi''| \leqslant 1$. (Nous avons déjà vu à (2.1.7 bis) que ce résultat ne subsiste pas nécessairement pour $E=\sigma(F', F)$, F quasi-Banach. Si par exemple nous prenons $F=l^s$, $0<s<1$, $E=\sigma(l^\infty, l^s)$, la "base" des $\varepsilon_m=(c_n=0$ pour $n\neq m$, $c_m=1)$ est une suite scalairement l^s dans $\sigma(l^\infty, l^s)$, non dans l^∞). Ce résultat subsiste pour $E=\sigma(F', F)$, F quasi-Banach, si $p\geqslant 1$. Car alors, si a' est une suite scalairement l^p de $\sigma(F', F)$, l'application linéaire $\xi \mapsto \langle a, \xi\rangle$ de F dans l^p est continue de norme $\|a'\|_p^*$. Mais, l^p étant normé pour $p\geqslant 1$, elle est alors continue de F_N dans l^p, de norme $\|a\|_p^*$, donc se prolonge par continuité en une forme linéaire continue de $\hat{F}_N$ dans l^p, de même norme. Elle est donc scalairement l^p dans $\sigma(F', \hat{F}_N)=\sigma((\hat{F}_N)', \hat{F}_N)$, donc, d'après ce qui précède, dans $(\hat{F}_N)'=F'$.

On peut appliquer ces résultats avec $p=+\infty$: une suite scalairement l^∞ ou scalairement bornée de E est simplement une suite bornée dans E_N. On peut résumer ces résultats en une proposition:

PROPOSITION (3.1 bis). *Si $a=(a_n)_{n\in N}$ est scalairement l^p, la quantité* $\|a\|_p^* = \operatorname{Sup}_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\langle a, \xi\rangle\|_{l^p}$ *est finie; sur l'espace $\mathscr{S}^p(E)$ des suites scalairement l^p, $a \mapsto \|a\|_p^*$ est une* Min$(p, 1)$*-quasi-norme, pour laquelle $\mathscr{S}^p$ est complet. L'espace $\mathscr{S}^p(E_N)$ est contenu dans $\mathscr{S}^p(E)$ avec une norme plus grande; les espaces sont les mêmes, avec la même norme, si E est un Banach, ou un $\sigma(F', F)$ avec F Banach, ou si $p\geqslant 1$. Les suites scalairement l^∞ ou scalairement bornées de E sont simplement les suites bornées de E_N.*

2) On appellera $l^p(G)$ l'espace des suites absolument l^p de G. Pour une telle suite, on posera $\|a\|_p=\|(\|a_n\|)_{n\in N}\|_{l^p}$. D'après la proposition (0.1) des préliminaires, on définit ainsi une Min(p, q)-quasi-norme sur $l^p(G)$, si G est q-quasi-normé (donc une Min$(p, 1)$-quasi-norme pour $G=\sigma(H', H)$, car c'est la même chose que pour H', Banach, et $l^p(\sigma(H', H))=l^p(H')$). En outre, $l^p(G)$ ainsi quasi-normé est un quasi-Banach (Fischer-Riesz). On a toujours $l^p(G)\subset \mathscr{S}^p(G)$, et $\|\ \|_p^* \leqslant \|\ \|_p$. Evidemment $l^p(G)\subset l^p(G_N)$ avec une norme plus grande, et il y a coincidence des espaces et égalité des normes pour G Banach ou dual $*$-faible d'un Banach.

3) On dit qu'une application linéaire faiblement continue u de E dans G est p-sommante, si, pour toute suite a d'éléments de E, scalairement l^p, la suite image $u(a)$ est absolument l^p. ([25]).

PROPOSITION (3.2). *Pour que l'application linéaire faiblement continue u de*

([25]) PIETSCH [1]. C'est là qu'on trouvera les premiers théorèmes fondamentaux sur les applications p sommantes.

***E* dans *G* soit *p*-sommante, il faut et il suffit qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ finie telle que, pour toute suite finie *a* (c. à d. toute suite dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini), on ait l'inégalité:**

$$(3.3) \qquad \|u(a)\|_p \leqslant M\|a\|_p^* .$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord (3.3) vérifiée. Alors, pour toute suite a d'éléments de E, scalairement l^p, le second membre est majoré par $M\|a\|_p^*$, pour toutes les suites tronquées $\tilde{a}_N$ de a, donc le 1er membre aussi, donc la suite $(\|u(a_n)\|)_{n \in N}$ est dans l^p, et u est p-sommante. Inversement, soit u p-sommante; l'application qu'elle définit de $\mathscr{S}^p(E)$ dans $l^p(E)$, à savoir $a \mapsto u(a)$, est linéaire et continue, comme limite simple de ses tronquées $a \mapsto (u(a))_{\tilde{N}}$ continues ($\mathscr{S}_p(E)$ est de Baire); donc il existe bien $M \geqslant 0$ fini tel que l'on ait, pour toute $a \in \mathscr{S}^p(E)$, l'inégalité (3.3). (*Le résultat ne subsisterait plus nécessairement pour E quasi-Banach,* car nous avons vu qu'alors $\mathscr{S}^p(E) = \mathscr{S}^p(E_N)$ n'est plus complet donc plus de Baire. *On voit pourquoi nous avions absolument besoin que $\mathscr{S}^p(E)$ soit complet*). Le plus petit $M \geqslant 0$ ayant la propriété ci-dessus se note $\pi_p(u)$ et se nomme quasi-norme p-sommante de u. On voit aussitôt que, sur l'espace vectoriel $\Pi_p(E; G)$ des applications p-sommantes, c'est une $\text{Min}(p, q)$-quasi-norme si G est q-quasi-normé (donc une $\text{Min}(p, 1)$-quasi-norme si $G = \sigma(H', H)$, car H' est un Banach).

REMARQUE (3.3 bis). 1) Il résulte de ce que nous avons vu que, si u est faiblement continue de E dans G, donc continue de E_N dans G_N, et si elle est p-sommante de E dans G, elle l'est de E_N dans G_N, avec une quasi-norme p-sommante au plus égale; en effet, une suite scalairement l^p de E_N l'est dans E, donc son image par u est absolument p-sommante dans G, donc dans G_N.

2) Si maintenant u est continue de E_N dans G_N, elle n'est même pas nécssairement faiblement continue de E dans G. Si on la suppose faiblement continue de E dans G et p-sommante de E_N dans G_N, elle n'est pas nécessairement p-sommante de E dans G; elle l'est cependant, pourvu que, d'une part, E soit un Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach ou que $p \geqslant 1$, et d'autre part que G soit un Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach. En effet, dans ce cas, les suites scalairement l^p sont les mêmes dans E et dans E_N, et les suites absolument l^p sont les mêmes dans G et dans G_N.

3) Pour les applications p-radonifiantes, la situation est plus compliquée. Une application linéaire u faiblement continue de E dans G, p-radonifiante, ne l'est plus nécessairement de E_N dans G_N. On peut seulement dire qu'elle l'est sûrement de E_N dans G car une probabilité cylindrique de type p dans E_N l'est dans E; elle

n'est sûrement p-radonifiante de E_N dans G_N que pour G quasi-Banach, puisqu'alors $G \to G_N$ est continue. Nous allons voir que, pour les applications approximativement p-radonifiantes, on peut avoir un résultat meilleur (voir prop. (3.5 ter)).

REMARQUE 4. Soient E, G, des espaces vectoriels comme précédemment, sur le corps $\boldsymbol{C}$; on peut affaiblir leur structure et les considérer comme espaces vectoriels sur $\boldsymbol{R}$; nous les noterons respectivement E_C, E_R, G_C, G_R. Il est facile de voir que u est p-sommante sur $\boldsymbol{C}$ si et seulement elle l'est sur $\boldsymbol{R}$, mais $(\pi_p(u))_C$ et $(\pi_p(u))_R$ ne sont pas égaux. Par exemple, pour des espaces hilbertiens, π_2 est la norme de Hilbert-Schmidt $\| \ \|_2$, et il est bien connu que $(\|u\|_2)_R = \sqrt{2}(\|u\|_2)_C$. Nous ne chercherons pas à obtenir la meilleure relation possible, mais à donner une majoration rapide. Si ζ est une forme $\boldsymbol{C}$-linéaire continue sur E, on sait que $\xi = \operatorname{Re}\zeta$ est une forme $\boldsymbol{R}$-linéaire continue, de même norme: $\|\xi\| = \|\zeta\|$, et que d'ailleurs on a $\zeta(x) = \xi(x) - i\xi(ix)$ (le fait que la norme soit la même résulte de ce que trivialement $\|\xi\| \leqslant \|\zeta\|$, mais que, pour tout ζ, il existe un a de norme $\leqslant 1$ tel que $\|\langle\zeta, a\rangle\| \geqslant \|\zeta\| - \varepsilon$, et qu'on peut le choisir de façon que $\langle\zeta, a\rangle$ soit réel. On peut aussi dire que, pour tout x de norme $\leqslant 1$, $e^{i\theta}x$ est aussi de norme $\leqslant 1$, et qu'alors $|\langle\xi, e^{i\theta}x\rangle| = |\cos\theta\langle\xi, x\rangle + \sin\theta\langle\xi, ix\rangle|$, doit être $\leqslant \|\xi\|$; ceci étant vrai pour tout θ, $\sqrt{|\langle\xi, x\rangle|^2 + |\langle\xi, ix\rangle|^2} \leqslant \|\xi\|$, donc $|\langle\zeta, x\rangle| = |\xi(x) - i\xi(ix)| \leqslant \|\xi\|$, et $\|\zeta\| \leqslant \|\xi\|$). Soit alors $a = (a_n)_{n \in N}$ une suite de points de E. Pour tout $\xi \in (E_R)'$, $\xi = \operatorname{Re}\zeta$, avec $\zeta \in (E_C)'$, on a aussitôt $\|\langle a, \xi\rangle\|_{l^p} \leqslant \|\langle a, \zeta\rangle\|_{l^p}$, donc $(\|a\|_p^*)_R \leqslant (\|a\|_p^*)_C$. Alors

$$(\pi_p(u))_C = \operatorname*{Sup}_{(\|a\|_p^*)_C \leqslant 1} \|u(a)\|_{l^p} \leqslant \operatorname*{Sup}_{(\|a\|_p^*)_R \leqslant 1} \|u(a)\|_p = (\pi_p(u))_R .$$

Il nous faut une majoration dans l'autre sens. Si $a = (a_n)_{n \in N}$, $ia = (ia_n)_{n \in N}$, on a toujours $\|ia\|_p^* = \|a\|_p^*$ sur $\boldsymbol{C}$ comme sur $\boldsymbol{R}$ (Sur $\boldsymbol{C}$ c'est trivial. Mais, si $\xi \in (E_R)' = \operatorname{Re}\zeta$, et si nous posons $\tilde{\xi} = \operatorname{Im}\zeta$, ou $\tilde{\xi}(x) = -\xi(ix)$, on a $\|\tilde{\xi}\| = \|\xi\|$; comme $\langle ia, \tilde{\xi}\rangle = \langle a, \xi\rangle$, on en déduit l'égalité sur $\boldsymbol{R}$.).

On a toujours:

a) pour $p \leqslant 1$: $\|\langle a, \zeta\rangle\|_{l^p} \leqslant (\|\langle a, \xi\rangle\|_{l^p}^p + \|\langle ia, \xi\rangle\|_{l^p}^p)^{1/p}$. Donc, avec $\|\zeta\| \leqslant 1$, et par suite $\|\xi\| \leqslant 1$: $(\|a\|_p^*)_C \leqslant 2^{1/p}(\|a\|_p^*)_R$;

b) pour $p \geqslant 1$: $\|\langle a, \zeta\rangle\|_{l^p} \leqslant \|\langle a, \xi\rangle\|_{l^p} + \|\langle ia, \xi\rangle\|_{l^p}$ d'où $(\|a\|_p^*)_C \leqslant 2(\|a\|_p^*)_R$.

Alors, en posant $\tilde{p} = \operatorname{Min}(p, 1)$:

$$(\pi_p(u))_R = \operatorname*{Sup}_{(\|a\|_p^*)_R \leqslant 1} \|u(a)\|_p \leqslant 2^{1/\tilde{p}} \operatorname*{Sup}_{(\|a\|_p^*)_C \leqslant 1} \|u(a)\|_p = 2^{1/\tilde{p}}(\pi_p(u))_C .$$

Finalement

$$(3.3 \text{ ter}) \qquad (\pi_p(u))_C \leqslant (\pi_p(u))_R \leqslant (\pi_p(u))_C 2^{1/\operatorname{Min}(p,1)} .$$

THÉORÈME (3.4). *Soit $u: E \to G$ linéaire faiblement continue. Les propriétés*

***suivantes sont equivalentes*:**

1) *u est p-sommante;*

2) *u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;*

3) *u est très approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;*

4) *Il existe une constante $M \geqslant 0$ finie telle que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, combinaison finie de masses ponctuelles, on ait l'inégalité*

$$\|u(\lambda)\|_p \leqslant M \|\lambda\|_p^* \; ; \tag{3.5}$$

en outre, si ces propriétés sont réalisées, la meilleure constante M de (3.6) *est aussi $\pi_p(u)$, et l'on a, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type p approximable, l'inégalité*

$$\|u(\lambda)\| \leqslant M \|\lambda\|_p^{*a} \; . \tag{3.5 bis}$$

DÉMONSTRATION. A) Montrons que 3) implique trivialement 1). Soit a une suite d'éléments de E. Faisons correspondre à la suite a la probabilité de Radon

$$\lambda_a = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \delta_{(2^{(n+1)/p} a_n)} \; .$$

Elle est de type p, si et seulement si a est scalairement l^p. En effet,

$$\xi(\lambda_a) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \xi(\delta_{(2^{(n+1)/p} a_n)}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \delta_{(2^{(n+1)/p} \langle \xi, a_n \rangle)} \; ,$$

et $\|\xi(\lambda_a)\|_p$ est exactement la norme dans l^p de la suite $\langle a, \xi \rangle$; donc on a exactement $\|\lambda_a\|_p^* = \|a\|_p^*$, et λ_a est de type p si et seulement si a est scalairement l^p. Considérons alors la probabilité image

$$u(\lambda_a) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \delta_{(2^{(n+1)/p} u(a_n))} \; .$$

Alors $\|u(\lambda_a)\|_p$, dans G ou dans $\sigma(G'', G')$, est exactement la norme de la suite $(\|u(a_n)\|)_{n \in N}$ dans l^p, c. à d. la norme $\|u(a)\|_p$ de $u(a)$ dans $l^p(G)$. Par ailleurs la probabilité de Radon λ_a, si elle est de type p, est de type p très approximable; car, si nous appelons $\tilde{a}_N$ la suite tronquée, la probabilité $\lambda_{\tilde{a}_N}$ tend vers la probabilité λ_a étroitement donc cylindriquement, et on a toujours $\|\tilde{a}_N\|_p^* \leqslant \|a\|_p^*$. Si donc u est très approximativement p-radonifiante, et si a est scalairement l^p, λ_a est de type p très approximable, donc $u(\lambda_a)$ de Radon d'ordre p, donc $u(a)$ est absolument l^p, et u est bien p-sommante. En outre, si l'on a une inégalité (3.5), son application à λ_a donne $\pi_p(u) \leqslant M$.

B) Maintenant 1) implique 4). Soit en effet λ une combinaison linéaire finie de masses ponctuelles, $\lambda = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} c_n \delta_{(a_n)}$, $c_n > 0$, $\sum c_n = 1$. Considérons dans E la suite finie a_λ, dont le n-ième terme est $c_n^{1/p}a_n$ pour $n\leqslant N$, 0 pour $n>N$. Pour tout $\xi\in E'$, on a $\xi(\lambda)=\sum_{n\leqslant N} c_n\delta_{\langle\xi,a_n\rangle}$, et $\|\xi(\lambda)\|_p=\|\langle a_\lambda,\xi\rangle\|_{l^p}$, de sorte que $\|\lambda\|_p^*=\|a_\lambda\|_p^*$. Ensuite $u(a)$ est la suite de n-ième terme $c_n^{1/p}u(a_n)$ pour $n\leqslant N$, 0 pour $n>N$;

$$\|u(\lambda)\|_p=\|(\|c_n^{1/p}u(a_n)\|)_{n\in N}\|_{l^p}=\|u(a_\lambda)\|_p\ .$$

Mais, puisque u est supposée p-sommante, on a $\|u(a_\lambda)\|_p\leqslant\pi_p(u)\|a_\lambda\|_p^*$, donc (3.5) avec $M\leqslant\pi_p(u)$.

C) Ensuite 4) implique 3); c'est le théorème (2.5); c'est pourquoi nous remplaçons G par $\sigma(G'',G')$, dont les parties bornées sont relativement compactes.

En combinant A, B, C, on voit que 1, 3, 4, sont équivalentes. En outre, en appliquant le théorème (2.4) à $A=\|\ \ \|_p$, α'=norme, $B=1/M\|\ \ \|_p$, β=norme, on voit que l'inégalité (3.5 bis) s'en déduit. A) et B) montrent bien que la meilleure constante M est $\pi_p(u)$.

D) Le corollaire (2.11) montre l'équivalence de 2) et 3).

REMARQUE 1. Supposons que E soit un quasi-Banach, G étant toujours un Banach ou dual $*$-faible d'un Banach. Le théorème ne subsiste plus, parce que $\mathscr{S}^p(E)$ n'est plus complet. Mais il reste vrai que 4) implique 2) et 3), qui sont toujours équivalents, et que 2) ou 3) implique 1); ce qui ne subsiste pas, c'est que 1) implique 4). (Bien entendu, on pourrait conserver l'implication $1\Longrightarrow 4$, en changeant la définition de p-sommante, et en appelant p-sommante une application u telle qu'il existe $M\geqslant 0$ fini vérifiant, pour toute suite finie a d'éléments de E, $\|u(a)\|_p\leqslant M\|a\|_p^*$. Mais alors c'est l'implication $3\Longrightarrow 1$ qui disparaitrait, à moins de changer aussi la définition de p-radonifiante en y incluant une inégalité (3.5)).

REMARQUE 2. Si donc u est p-sommante, elle est, dans un certain sens (précisé par l'inégalité (3.5 bis)), *uniformément* approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. On peut même dire, en supprimant G'', qu'elle est uniformément approximativement p-préradonifiante de E dans G, au sens de la remarque 2 qui suit le théorème (2.4): elle est en effet approximativement $(\|\ \ \|_p, \|\ \ \|_E; 1/\pi_p(u)\|\ \ \|_p, \|\ \ \|_G)$-préradonifiante. On en déduit toutes les conséquences indiquées à ce moment. Par exemple, si G_0 est une topologie vectorielle sur G, moins fine que celle de G, séparée par son dual, et telle que les quasi-boules de G soient compactes dans G_0, alors u sera approximativement p-radonifiante de E dans G, muni de la topologie G_0 et de ses propres quasi-boules. Mais G devient, en fait, un espace bitopologique, pour la topologie G_0 et la quasi-norme initiale sur G; et, bien entendu, on peut toujours remplacer $\sigma(G'',G')$ par n'importe quel espace bitopologique dont les quasi-boules sont compactes pour la 1ère topologie.

COROLLAIRE (3.5 ter). *Supposons que E soit un dual $*$-faible $\sigma(F',F)$ d'un*

Banach F, ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach F si $p\geqslant 1$. Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Alors u est approximativement (resp. très approximativement) p-radonifiante de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$, si et seulement si elle l'est de F' dans $\sigma(G'', G')$.

En effet, on se ramène aux applications u, faiblement continues de E dans G, p-sommantes de $\sigma(F', F)$ dans G ou de F' dans G; et alors cela résulte de ce que $\mathscr{S}^p(\sigma(F', F))=\mathscr{S}^p(F')$ dans les cas indiqués, voir proposition (3.1 bis).

PROPOSITION (3.5 quinto). 1) *L'application identique de $\sigma(F', F)$, F quasi-Banach, est ∞-radonifiante, de norme π_∞ égale à 1 (sauf si $F=\{0\}$).*
2) *Pour que u soit ∞-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$, il faut et il suffit que l'image de la boule (ou de toute partie bornée) soit bornée, ou encore que u soit continue de E ou F' dans G ou H', et $\pi_\infty(u)=\|u\|$* [26].
3) *Pour que u soit ∞-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G')$ (G si c'est un Banach, par Phillips) ou $\sigma(H', H)$, il faut et il suffit que l'image de la boule unité soit bornée et faiblement relativement compacte (relativement compacte dans $\sigma(G, G')$ ou $\sigma(H', H)$).* [27]

DÉMONSTRATION. 1) Résulte de (2.1.8.0).
2) Supposons que le 1^er^ espace soit $\sigma(F', F)$ et que u soit continue de F' dans G ou H'. Si λ est une probabilité cylindrique de type $+\infty$ sur $\sigma(F', F)$, elle est de Radon, portée par la boule de rayon $\|\lambda\|^*_{+\infty}$, d'après 1, donc $u(\lambda)$ est de Radon sur G ou $\sigma(H', H)$, portée par l'image de cette boule, donc par la boule de rayon $\|u\|\,\|\lambda\|^*_{+\infty}$. On a donc $\pi_\infty(u)\leqslant\|u\|$. Si le 1^er^ espace est E, l'application $E\to(G$ ou $\sigma(H', H))\to(\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H))$ se factorise par $E\to\sigma(E'', E')\to(\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H))$; l'image de λ dans $\sigma(E'', E')$, d'après 1), est de Radon portée par la boule de rayon $\|\lambda\|^*_\infty$, donc son image dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$ par ${}^{tt}u$ est de Radon portée par la boule de rayon $\|{}^{tt}u\|\,\|\lambda\|^*_{+\infty}$; mais la boule unité de E'', adhérence (pour $\sigma(E'', E')$) de la boule unité de E, a pour image par ${}^{tt}u$ l'adhérence (dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$) de la boule de rayon $\|u\|$ de G ou H', donc $\|{}^{tt}u\|=\|u\|$, et $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$, portée par la boule de rayon $\|u\|\,\|\lambda\|^*_{+\infty}$, donc encore $\pi_\infty(u)\leqslant\|u\|$. Inversement, si u est ∞-radonifiante, l'inégalité (3.5) appliquée à une seule masse ponctuelle donne $\pi_\infty(u)\geqslant\|u\|$, donc u est continue de E ou F' dans G ou H', et $\pi_\infty(u)=\|u\|$.

REMARQUE. *Pour p quelconque, si u est p-sommante, on a aussi toujours*

[26] E et G sont toujours des espaces bitopologiques, et la propriété énoncée ici dit que u est continue pour les deuxièmes topologies de E et G.

[27] Si G est un quasi-Banach, une partie faiblement compacte est faiblement bornée, mais pas nécessairement bornée.

$\pi_p(u) \geqslant \|u\|$, et u est nécessairement continue de E ou F' dans G ou H', et l'image de la boule unité est borneé.

3) Si le 2ème espace est $\sigma(H', H)$, tout est déjà démontré, puisque la boule de $\sigma(H', H)$ est compacte. Supposons donc qu'il soit un quasi-Banach G. Supposons que l'image par u de la boule unité de E ou de F' soit dans un faiblement compact K. Alors l'image par ${}^{tt}u$ de la boule unité de E'' ou F' est dans K lui-même, et 2 montre que u est ∞-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G')$, avec $\pi_\infty(u) = \|u\|$. Montrons la réciproque, toujours pour G quasi-Banach. Elle est évidente d'après 2, si le 1er espace est $\sigma(F', F)$, car la boule unité de $\sigma(F', F)$ est compacte et que u est supposée continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G')$. Supposons donc que le 1er espace soit E Banach, et que u soit ∞-radonifiante de E *dans* G. Soit a'' un point de E''; alors $\delta_{(a'')}$ est une probabilité cylindrique sur E, de type $+\infty$. Donc son image est de Radon sur $\sigma(G, G')$; or c'est $\delta_{({}^{tt}u(a''))}$; donc ${}^{tt}u(a'') \in G$, ${}^{tt}u$ applique E'' dans G lui-même. Comme elle est continue de $\sigma(E'', E')$ dans $\sigma(G'', G')$, elle l'est de $\sigma(E'', E')$ dans $\sigma(G, G')$, et l'image par ${}^{tt}u$ de la boule unité de E'' est un compact de $\sigma(G, G')$.

REMARQUE. $\delta_{(a'')}$ est même de type $+\infty$ très approximable, il suffit donc que u soit très approximativement ∞-radonifiante de E dans $\sigma(G, G')$ pour que la conclusion subsiste.

PROPOSITION (3.6). *Inégalité de Pietsch.* (28)

Pour que u soit p-sommante, ou approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, $0 < p < +\infty$, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition de Pietsch, c. à d. l'une des 2 conditions équivalentes suivantes:

1) *Il existe un espace topologique séparé X, une probabilité ν sur X, une constante $M \geqslant 0$, et une application linéaire continue v de E_N (c. à d. E ou F') dans $L^\infty(X, \nu)$ de norme $\leqslant 1$, telle, en outre, si $E = \sigma(F', F)$, F quasi-Banach, que ${}^t v$ envoie la boule unité de $(L^\infty)'$ dans l'adhérence, B'', dans $\sigma(F'', F')$, de la quasi-boule unité B de F, avec*

$$(3.7) \qquad \|u(e)\| \leqslant M \|v(e)\|_{L^p(X,\nu)}, \quad \textit{pour} \quad e \in E.$$

Dans ce cas, on peut choisir X = boule unité de $\sigma(E', E)$ si E est un Banach, $X = B''$ si $E = \sigma(F', F)$, prendre pour v l'application canonique qui à $e \in E$ fait correspondre la fonction $\tilde{e} : \xi \mapsto \langle e, \xi \rangle$ sur X, et le plus petit M possible est $\pi_p(u)$.

2) *Il existe X, ν, v comme ci-dessus, et un sous-espace vectoriel fermé L de $L^p(X, \nu)$, tels que l'on ait le diagramme commutatif:*

(28) PIETSCH [1].

$$\begin{tikzcd} E_N \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^\infty(X,\nu) \arrow[r, "j"] & L^p(X,\nu) \\ & L \arrow[ur, hook, "j'"'] \arrow[rr, "u_2"'] & & G \text{ ou } H' \end{tikzcd}$$

où j est l'injection canonique de L^∞ dans L^p, j' l'injection canonique de L dans $L^p(X,\nu)$ (L est muni de la topologie induite par $L^p(X,\nu)$), u_1 et u_2 sont continues, $u=u_2\circ u_1$; dans ce cas, on peut choisir la factorisation de manière que $\|u_1\|\leqslant 1$, $\|u_2\|=\pi_p(u)$.

DÉMONSTRATION. Comme il s'agit d'une extension de l'inégalité de Pietsch à des cas plus larges (p éventuellement <1, et quasi-Banach au lieu de Banach), nous redémontrerons succinctement cette inégalité.

Supposons que u vérifie (3.7). Montrons qu'elle est p-sommante. Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite finie de E. On a

$$\|u(a_n)\|_p^p \leqslant M^p \int_X |v(a_n)(\xi)|^p d\nu(\xi) .$$

En remplaçant éventuellement X par le spectre de l'algèbre de Banach L^∞, on peut toujours supposer qu'en fait $L^\infty(X,\nu)=C(X)$ avec la même norme; alors $(L^\infty)'=M(X)$. L'application $e\mapsto v(e)(\xi)$, pour ξ fixé, est linéaire continue sur E_N, donc définit un élément du dual $(E_N)'$, qui n'est autre que l'image par ${}^t v$ de la mesure $\delta_{(\xi)}\in M$; il est donc dans la boule unité de E' si E est un Banach, dans B'' si $E=\sigma(F',F)$. On a donc

$$\|u(a)\|_p^p = \sum_{n\in N} \|u(a_n)\|_p^p \leqslant M^p \sup_{\substack{\eta\in E',\|\eta\|\leqslant 1\\ \text{ou } \eta\in B''}} \sum_{n\in N} |\langle a_n, \eta\rangle|^p \leqslant (\|a\|_p^*)^p .$$

Donc u est bien p-sommante, et $\pi_p(u)\leqslant M$.

Inversement, supposons u p-sommante. Considérons le compact X, boule unité de E' si E est un Banach, et B'' si $E=\sigma(F',F)$. Considérons, comme Pietsch, la quantité:

$$\operatorname*{Inf}_a \operatorname*{Max}_{\xi\in X} (\varphi(\xi)+\|\langle a,\xi\rangle\|_{l^p}^p(\pi_p(u))^p-\|u(a)\|_p^p) ,$$

où a parcourt l'ensemble des suites finies d'éléments de E, et φ est dans l'espace $C(X)$ des fonctions continues réelles sur le compact X. Elle est comprise entre $\operatorname{Min}\varphi$ et $\operatorname{Max}\varphi$, sous-additive et positivement homogène, donc il existe une probabilité de Radon ν sur X qui minore cette fonction, et on vérifie que ν répond à la question.

La deuxième partie du théorème est une conséquence de la première. Si la condition est réalisée on a sûrement $\|u(x)\| \leqslant \|u_2(x)\| \leqslant \|u_2\| \, \|v(x)\|_{L^p(X,\nu)}$, donc u est p-sommante, et $\pi_p(u) \leqslant \|u_2\|$. Inversement supposons u p-sommante, et X, ν, v, comme dans la 1ère partie. Alors $jv(x) \mapsto u(x)$ est une application linéaire bien définie, et de norme $\leqslant \pi_p(u)$, de $jv(E)$, muni de la topologie induite par $L^p(X,\nu)$, dans G; elle se prolonge de manière unique en u_2, de $L=\overline{jv(E)}$ dans G (complet), avec la même quasi-norme.

COROLLAIRE (3.8). *Si u est p-sommante, p fini, de E dans G ou $\sigma(H',H)$, l'image par u de la boule unité est relativement compacte dans $\sigma(G,G')$ ou $\sigma(H',H'')$.*

DÉMONSTRATION. Reprenons la factorisation du théorème de Pietsch. On peut toujours supposer $p>1$, car, si u est p-sommante elle est aussi q-sommante pour tout $q \geqslant p$. [29] L'image de la boule unité de E par u_1 est alors une partie bornée de L, fermé de $L^p(X,\nu)$ donc réflexif, donc elle est faiblement compacte dans L. Ensuite u_2 est continue de L dans G ou H', donc de $\sigma(L,L')$ dans $\sigma(G,G')$ ou $\sigma(H',H'')$, d'où le résultat.

PROPOSITION (3.8.0). 1) *Supposons que u, linéaire faiblement continue de E dans G, soit approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. Alors elle est aussi approximativement q-radonifiante, pour tout $q \geqslant p$, et $\pi_q(u) \leqslant \pi_p(u)$.*
2) *Si maintenant u est approximativement p-radonifiante de E dans G lui-même, elle est aussi approximativement q-radonifiante pour $q \geqslant p$.*
3) *Si u est p-radonifiante de E dans G, elle est aussi q-radonifiante pour $q \geqslant p$, si G a ses parties compactes métrisables (par exemple si G est un quasi-Banach, ou un dual $*$-faible d'un Banach séparable).*

DÉMONSTRATION. 1) résulte du théorème correspondant pour les applications sommantes. Comme toutefois celui-ci n'a pas de démonstration publiée dans le cas où il intervient des quasi-Banach, donnons-là de nouveau. Soit donc u p-sommante de E dans G. Soit a une suite scalairement l^q dans E, $q \geqslant p$. Soit r défini par $1/r = 1/p - 1/q$. Alors, si c est une suite positive l^r, la suite multipliée $ca = (c_n a_n)_{n \in N}$ est scalairement l^p; donc $u(ca)$ est absolument l^p. Mais alors $(\|u(a_n)\|)_{n \in N}$ est une suite de nombres $\geqslant 0$ dont le produit par toute suite positive l^r est l^p, donc elle est l^q. CQFD.

2) résulte de 1, si G est un dual $*$-faible de Banach (car alors $G = \sigma(G'',G')$), ou si c'est un Banach, car, si λ est une probabilité cylindrique de type q approximable sur E, 1) montrera que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre q sur $\sigma(G'',G')$, mais en même temps on sait déjà qu'elle est de Radon sur G (d'ordre p), donc elle est de Radon sur G d'ordre q, puisque la jauge de B'' induit sur G sa quasi-norme.

[29] C'est un fait connu. Nous le redémontrerons à la prop. (3.8.0).

3) Soit u p-radonifiante, soit λ une probabilité cylindrique de type q sur E, donc de type p. On peut la réaliser comme une λ_f, f application linéaire continue de E' dans un $L^q(\Omega, \mu)$. Son image $u(\lambda)$ est alors réalisée par $f\circ{}^tu$; comme G a ses parties compactes métrisables, on sait que $f\circ{}^tu$ est décomposée, par une fonction $\varphi:\Omega\to G$, μ-mesurable, appartenant à $L^p(\Omega, \mu; G)$, puisqu'on sait que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p (prop. (1.19.0)). Soit ensuite α une fonction $\geqslant 0$ sur Ω, appartenant à $L^r(\Omega, \mu)$, $1/r=1/p-1/q$. Alors αf est linéaire continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$, donc définit une probabilité cylindrique de type p sur E; son image par u est donc une probabilité de Radon d'ordre p sur G. Mais cette image est réalisée par $\alpha f\circ{}^tu= \alpha(f\circ{}^tu)$, et elle est alors décomposée par $\alpha\varphi$. Donc $\alpha\varphi\in L^p(\Omega, \mu; G)$ pour toute $\alpha\in L^r(\Omega, \mu)$ et $\geqslant 0$, donc $\varphi\in L^q(\Omega, \mu; G)$; donc $u(\lambda)=\varphi(\mu)$ est de Radon d'ordre q sur G.

PROPOSITION (3.8.2). 1) *Soit X un espace topologique séparé et soit ν une probabilité de Radon sur X. Abrégeons par L^p l'espace $L^p(X, \nu)$. Alors l'injection canonique j de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^p, pour $1<p<+\infty$, dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ pour $p=+\infty$, dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$ pour $p=1$ ou pour $p<1$ si ν est atomique, est p-radonifiante, et sa quasi-norme π_p est* 1.

2) *Soit maintenant X un espace topologique séparé, ν une mesure de Radon $\geqslant 0$ quelconque sur X. Soit α une fonction de L^p. Alors la multiplication $f\mapsto\alpha f$, de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^p pour $1<p<+\infty$, dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ pour $p=+\infty$, dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$ pour $p=1$ ou pour $p<1$ si ν est atomique, est p-radonifiante, et sa norme π_p est $\|\alpha\|_{L^p}$.*

2 bis) *Soit X un espace topologique, ν une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur X, θ une fonction ν-mesurable réelle partout >0 sur X. Appelons $\theta\cdot L^\infty(X, \nu)$ l'espace des fonctions φ sur X, telles que $\varphi/\theta\in L^\infty(X, \nu)$ avec la norme $\varphi\mapsto\|\varphi/\theta\|_{L^\infty(X,\nu)}$; il est le dual de l'espace $1/\theta\cdot L^1(X, \nu)$, défini de manière analogue. Alors, si $\theta\in L^p(X, \nu)$, l'injection canonique de $\sigma(\theta\cdot L^\infty(X, \nu), 1/\theta\cdot L^1(X, \nu))$ dans lui-même pour $p=+\infty$, dans $L^p(X, \nu)$ pour $1<p<+\infty$, dans $\sigma((L^p(X, \nu))'', (L^p(X, \nu))')$ si $p=1$, ou si $p<1$ et ν est atomique, est p-radonifiante, et sa quasi-norme π_p est $\|\theta\|_{L^p(X,\nu)}$.*

3) *Soit $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ une suite de nombres de $\mathbf{K}$. Supposons $\alpha\in l^p$. L'application diagonale $(c_n)_{n\in N}\mapsto(\alpha_n c_n)_{n\in N}$ est p-radonifiante, de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p pour $1\leqslant p< +\infty$, de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans lui-même pour $p=+\infty$, de $\sigma(l^\infty, l^p)$ dans l^p pour $0<p\leqslant 1$, et sa norme π_p est $\|\alpha\|_{l^p}$. Si $\alpha\in c^0$, l'application est ∞-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans c^0, et sa norme π_∞ est $\|\alpha\|_{c^0}$.*

1) Tout d'abord, l'injection canonique de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^p est bien faiblement continue; c'est trivial si $p\geqslant 1$, mais, si $p<1$ et ν atomique, cela résulte de ce

qu'elle est faiblement continue de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^1 et de ce que $L^1 \to L^p$ est continue donc faiblement continue. Comme les suites scalairement l^p de L^∞ ou de $\sigma(L^\infty, L^1)$ sont les mêmes, on peut remplacer $\sigma(L^\infty, L^1)$ par L^∞ pour montrer que l'injection canonique j est p-sommante. On peut ensuite, en considérant le spectre de l'algèbre de Banach L^∞, changer d'espace, ce qui revient à supposer X compact, et à remplacer L^∞ par $C(X)=C$, de dual M. Alors $x \mapsto \delta_{(x)}$ est une application continue de X dans $\sigma(M, C)$, et l'image de ν par cette application est une probabilité de Radon $\bar{\nu}$ sur $\sigma(M, C)$. Pour toute $f \in C$, on a

$$\left(\int_X |f(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p} = \left(\int_M |\langle f, \xi\rangle|^p d\bar{\nu}(\xi)\right)^{1/p},$$

et la proposition (3.6) montre alors que j est p-sommante. On en déduit qu'elle est approximativement p-radonifiante de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$, toutes les fois que L^p est séparé par son dual (condition qui est intervenue dès le début comme hypothèse implicite partout, et faute de laquelle toutes les notions écrites perdent tout leur sens), ce qui est le cas pour $p \geqslant 1$, ou pour $p<1$ si ν est atomique. On peut supprimer "approximativement", parce que L^1 a la propriété d'approximation métrique (voir (2.6.4)). On peut remplacer le bidual $*$-faible de L^p par L^p lui-même pour $1<p<+\infty$, parce que L^p est réflexif, et que les probabilités de Radon sur $\sigma(L^p, L^{p'})$ et sur L^p sont les mêmes d'après PHILLIPS. On a $\pi_p(j) \leqslant 1$, mais $\|j\|=1$ donc $\pi_p(j)=1$.

2) Supposons, pour simplifier, $\|\alpha\|_{L^p}=1$. La multiplication par α est bien faiblement continue de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L^p pour p fini, dans lui-même pour p infini : laissons de côté ce cas trivial et supposons p fini. L'application se factorise par

$$\sigma(L^\infty(X, \nu), L^1(X, \nu)) \longrightarrow \sigma(L^\infty(X, |\alpha|^p\nu), L^1(X, |\alpha|^p\nu)) \longrightarrow L^p(X, |\alpha|^p\nu) \xrightarrow{\alpha} L^p(X, \nu).$$

La 1ère application est faiblement continue, de transposée (la multiplication par $|\alpha|^p$) : $L^1(X, |\alpha|^p\nu) \xrightarrow{\alpha} L^1(X, \nu)$, continue de norme 1. La 2ème est faiblement continue de $\sigma(L^\infty(X, |\alpha|^p\nu), L^1(X, |\alpha|^p\nu))$ dans $L^p(X, |\alpha|^p\nu)$, p-sommante d'après 1 ($|\alpha|^p\nu$ est une probabilité), de norme $\pi_p=1$. La 3ème, la multiplication par α, est linéaire continue de $L^p(X, |\alpha|^p\nu)$ dans $L^p(X, \nu)$, de norme 1. Donc, d'après la proposition (2.12), l'application composée est p-radonifiante de norme $\pi_p \leqslant 1$; mais sa norme est 1, donc sa quasi-norme π_p est 1.

2 bis) Il suffit de remarquer que l'application identique considérée est composée de la multiplication par $1/\theta$, isomorphisme de $\theta L^\infty(X, \nu)$ sur $L^\infty(X, \nu)$ (de transposé l'isomorphisme multiplication par $1/\theta$ de $L^1(X, \nu)$ sur $(1/\theta)L^1(X, \nu)$), et de la multiplication par θ, application p-radonifiante, d'après 2, de $\sigma(L^\infty(X, \nu), L^1(X, \nu))$ dans lui-même pour $p=+\infty$, dans $L^p(X, \nu)$ pour $1<p<+\infty$, dans $\sigma((L^p(X, \nu))'', (L^p(X, \nu))')$

pour $p=1$, ou pour $p<1$ et ν atomique, et de π_p-quasi-norme $\|\theta\|_{L^p}$.

3) Pour $p\geqslant 1$, en prenant $X=N$, $\nu=\sum_{n\in N}\delta_{(n)}$, on applique 2), et on trouve que l'application donnée est p-sommante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p pour p fini, dans lui-même pour $p=+\infty$. Soit maintenant $p\leqslant 1$. La multiplication par α est continue de $(l^p)'=l^\infty$ dans l^p, donc, par transposition, faiblement continue de $\sigma(l^\infty, l^p)$ dans l^p. Cherchons à appliquer la proposition (3.6), en supposant $\|\alpha\|_{l^p}=1$. Nous prendrons sur le dual l^p de $\sigma(l^\infty, l^p)$ la probabilité de Radon, portée par la boule unité, $\nu=\sum_{n\in N}|\alpha_n|^p\delta_{(\varepsilon_n)}$, ε_n étant $(c_k=0$ pour $k\neq n, c_n=1)\in l^p$. Si alors c est une suite de l^∞, on a, pour la suite αc de l^p:

$$\|\alpha c\|_{l^p}=\left(\int_{l^p}|\langle c, \xi\rangle|^p d\nu(\xi)\right)^{1/p},$$

c. à d. (3.7), avec $M=1$. Donc l'application est p-sommante de $\sigma(l^\infty, l^p)$ dans l^p, avec $\pi_p\leqslant 1$; comme sa norme est 1, $\pi_p=1$.

On en déduit dans tous les cas que la multiplication par α est p-préradonifiante (l'espace l^p ayant la propriété d'approximation métrique). Nons allons démontrer, comme le dit l'énoncé, qu'elle est même radonifiante; c'est évident pour $p=+\infty$, prenons p fini. On peut en effet (du Bois-Reymond) exprimer la suite α comme produit de deux suites, $\alpha=\beta\gamma$, avec $\beta\in l^p$, $\|\beta\|_{l^p}\leqslant\|\alpha\|_{l^p}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ arbitrairement choisi à l'avance, et $\gamma\in c^0$, $\|\gamma\|_{c^0}\leqslant 1$. Le résultat précédent dit que la multiplication par β est p-préradonifiante de $\sigma(l^\infty, l^{\bar p})$ ($\bar p=\mathrm{Min}\,(p, 1)$) dans l^p, de norme $\pi_p\leqslant\|\beta\|_{l^p}$, et alors la multiplication par γ est compacte de l^p dans lui-même, de norme $\leqslant 1$. Donc la multiplication par α est bien p-radonifiante (remarque 1 suivant le théorème (2.4), avec β=quasi-norme de l^p, β_1=jauge de l'image compacte de la quasi-boule unité par la multiplication par γ, w=multiplication par γ), avec un $\pi_p\leqslant\|\alpha\|_{l^p}+\varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon>0$, d'où le résultat cherché. Le résultat relatif à c^0 pour $p=+\infty$ se démontre de la même manière.

REMARQUE. Le problème des multiplications $c\mapsto\alpha c$ qui sont p-radonifiantes d'un espace de suites l^s dans un autre n'est pas encore résolu. [29] Bornons-nous simplement au problème suivant: pour quelles suites $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ la multiplication $c\mapsto\alpha c$ est-elle p-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$, pour $s\geqslant 1$, de $\sigma(l^\infty, l^s)$ pour $s\leqslant 1$, dans l^s, pour s fini, dans $\sigma(l^\infty, l^1)$ si $s=+\infty$? Même ici je ne connais pas la réponse. Mais supposons $s\leqslant 1$. Alors la condition nécessaire et suffisante est:

$$\sum_{n\in N}|\alpha_n|^s<+\infty\ , \quad \text{si}\quad p\geqslant s\ ;$$

$$\sum_{n\in N}|\alpha_n|^s\left(1+\left|\log\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)<+\infty\ , \quad \text{si}\quad p<s\ .$$

[29] PIETSCH a trouvé récemment une solution presque complète de ce problème. Voir GOULAOUIC-SCHWARTZ [1], exposé n° 31.

Supposons en effet $p \geqslant s$. Si $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s < +\infty$, l'application est s-radonifiante, donc a fortiori p-radonifiante. Par ailleurs cette condition est déjà nécessaire pour que la multiplication opère de l^∞ dans l^s. Supposons maintenant $p < s$. Si

$$\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty ,$$

les résultats d'un article antérieur [30] montrent que l'application est même 0-radonifiante; le corollaire (4.17) de la proposition (4.13) montrera donc qu'elle est p-radonifiante pour tout $p \geqslant 0$. Supposons au contraire cette condition non réalisée. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(Z_n)_{n \in N}$, suivant la loi stable d'exposant s. Alors $\sum_{n \in N} c_n Z_n$, pour une suite finie c (tous les c_n nuls sauf un nombre fini) suit la loi stable d'exposant s, de paramètre $\|c\|_{l^s}$; alors (Esp. $|\sum_{n \in N} c_n Z_n|^p)^{1/p}$ est proportionnel à $\|c\|_{l^s}$, parce que la loi stable d'exposant s a un moment d'ordre $p < s$ fini. Donc la suite $(Z_n)_{n \in N}$ définit une probabilité cylindrique sur $\sigma(l^\infty, l^s)$, de type p. Or, si

$$\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) = +\infty ,$$

son image par la multiplication α n'est même pas de Radon dans l^s, la série $\sum_{n \in N} |\alpha_n Z_n|^s$ est presque sûrement divergente; ce qui prouve que la multiplication par α n'est pas p-radonifiante pour $p < s$, de $\sigma(l^\infty, l^s)$ dans l^s.

Ceci nous donne un exemple d'une application qui est p-radonifiante pour $p \geqslant s$ mais pas pour $p < s$: la multiplication $c \mapsto \alpha c$ de $\sigma(l^\infty, l^s)$ dans l^s, $0 < s \leqslant 1$, si $\sum_{z \in N} |\alpha_n|^s < +\infty$, et

$$\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) = +\infty .$$

Applications aux opérateurs p-nucléaires.

Nous allons en déduire une application aux opérateurs p-nucléaires. Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals, u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Nous dirons que u est p-nucléaire à gauche, relativement à une topologie, vectorielle $E'_{\mathfrak{S}}$ sur E', $0 < p \leqslant +\infty$, si elle se factorise par des applications linéaires faiblement continues:

(3.8.3) $\quad u : E \xrightarrow{v} \sigma(l^\infty, l^{\bar{p}}) \xrightarrow{\alpha} l^p \xrightarrow{w} G$ [31], avec: $\bar{p} = \mathrm{Min}\,(p, 1)$, $\quad 0 < p \leqslant +\infty$;

v transposée d'une application linéaire continue de $l^{\bar{p}}$ dans $E'_{\mathfrak{S}}$ (nous prendrons

(30) SCHWARTZ [2].

(31) Un opérateur p-nucléaire à droite correspondrait à une factorisation $E \to l^{p'}$ ou $\sigma(l^\infty, l^p)$ selon que $p \geqslant 1$ ou $p < 1$ $\to l^p \to G$.

$E'_{\mathfrak{S}}=E'$ si E est un Banach, F si $E=\sigma(F', F)$, F quasi-Banach); α=application diagonale, $c\mapsto\alpha c$, $(c_n)_{n\in N}\mapsto(c_n\alpha_n)_{n\in N}$, avec $\sum_{n\in N}|\alpha_n|^p<+\infty$ si $p<+\infty$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ si $p=+\infty$; w continue.

Essayons de voir la forme de telles applications u.

1) Soit v ayant les propriétés indiquées. Posons $v(e)=(\langle e'_n, e\rangle)_{n\in N}\in l^\infty$; alors chaque e'_n est une forme linéaire sur E, continue car v est faiblement continue, donc $e'_n\in E'$. La transposée de v est $c\mapsto\sum_{n\in N}c_ne'_n$, qui doit être une application linéaire continue de $l^{\bar{p}}$ dans $E'_{\mathfrak{S}}$; cela signifie exactement, si E est un Banach ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach F, qu'il existe un $M\geqslant 0$ fini tel que, pour toute suite finie c, $\|\sum_{n\in N}c_ne'_n\|_{E'\text{ ou }F}\leqslant M\|c\|_{l^{\bar{p}}}$, et le plus petit nombre M possible est $\|{}^tv\|_{\mathscr{L}(l^{\bar{p}};E'\text{ ou }F)}$; cela signifie aussi exactement, par le théorème de Banach-Steinhaus (E' ou F étant de Baire), que, pour toute suite $c\in l^{\bar{p}}$, la série $\sum_{n\in N}c_ne'_n$ est convergente dans E' ou F; enfin, si E est un Banach ou le dual $*$-faible d'un *Banach* F, cela signifie exactement que la suite $(e'_n)_{n\in N}$ est bornée, car alors $c\mapsto\sum_{n\in N}c_ne'_n$ est bien continue de l^1, donc, de $l^{\bar{p}}$, dans E' ou F, mais ceci ne subsiste plus pour $E=\sigma(F', F)$, F quasi-Banach, car, si $(e'_n)_{n\in N}$ est bornée dans F, cela entraîne seulement que $c\mapsto\sum_{n\in N}c'_ne'_n$ soit continue de l^1 ou $l^{\bar{p}}$ dans $\hat{F}_N$, non dans F.

2) w est définie par une suite $(g_n)_{n\in N}$ de G, ayant des propriétés analogues: si G est un quasi-Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach, il existe $M\geqslant 0$ fini tel que, pour toute suite finie c, $\|\sum_{n\in N}c_ng_n\|_G\leqslant M\|c\|_{l^p}$, et le plus petit nombre M possible est $\|w\|_{\mathscr{L}(l^p,G)}$; ou bien, pour toute $c\in l^p$, la série $\sum_{n\in N}c_ng_n$ est convergente dans G. Cela équivaut à dire que la suite $(g_n)_{n\in N}$ est scalairement $l^{p'}$, $p'=p/(p-1)$, si $p\geqslant 1$, $p'=+\infty$ si $p\leqslant 1$ (et scalairement bornée veut dire bornée) et si G est un *Banach* ou un dual $*$-faible d'un Banach, mais cette équivalence ne subsiste pas nécessairement si G est un quasi-Banach.

3) La factorisation exprime donc que u est de la forme $e\mapsto\sum_{n\in N}\alpha_n\langle e'_n, e\rangle g_n$, les suites $(e'_n)_{n\in N}$ de E', $(\alpha_n)_{n\in N}$ de $\boldsymbol{K}$, $(g_n)_{n\in N}$ de G ayant les propriétés indiquées.

Le prototype d'une application p-nucléaire à gauche est donc une multiplication $\alpha:\sigma(l^\infty, l^{\bar{p}})\to l^p$, avec $\sum_{n\in N}|\alpha_n|^p<+\infty$, pour p fini, $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0$ pour p infini. Si $p=1$, E et G étant des Banach, u est exactement une application nucléaire.

La quasi-norme p-nucléaire de u est la borne inférieure des quantités $\|{}^tv\|_{\mathscr{L}(l^{\bar{p}},E)}\|\alpha\|_{l^p}\|w\|_{\mathscr{L}(l^p,G)}$, pour toutes les factorisations possibles de u. Alors la proposition (3.8.2), point 3, a le corollaire trivial suivant, compte tenu de la proposition (2.12), point 1:

COROLLAIRE (3.8.4). *Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals, et soit $E'_{\mathfrak{S}}$ une topologie vectorielle sur E'. Un opérateur* *linéaire faiblement continu u de E dans G, p-nucléaire à gauche de E dans G relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$, est p-radonifiant, $0<p\leqslant+\infty$. Si E et G vérifient les conditions générales indiquées au début du §, $\pi_p(u)$ est majoré par la norme p-nucléaire de u.*

(3.9) *Remplacement de $\sigma(G'', G')$ par G lui-même.*

PROPOSITION (3.9). *Supposons que u soit une application linéaire faiblement continue p-sommante de E dans G.*

Alors u est approximativement p-radonifiante de E dans G lui-même dans chacun des cas suivants:

0) *$G=\sigma(H', H)$, H Banach;*

1) *G est un Banach réflexif;*

2) *$p<+\infty$; G est un dual fort séparable de Banach; E est un Banach, ou un dual $*$-faible de Banach, ou un dual $*$-faible de quasi-Banach si $p\geqslant 1$;*

3) *$1<p<+\infty$, E est un Banach;*

4) *$p=1$, E est un Banach réflexif ou un Banach de dual séparable;*

5) *$p=+\infty$, E est un Banach réflexif ou un $\sigma(F', F)$, F quasi-Banach.*

En outre, dans les cas 3), 4) et 5) on peut supprimer approximativement.

DÉMONSTRATION. 0) est évident puisqu'alors $\sigma(G'', G')=G$.

1) Le cas 1) résulte du théorème de PHILLIPS: toute probabilité de Radon sur $\sigma(G, G')$ l'est aussi sur G.

2) Supposons $G=H'$, H Banach, G séparable, et $p<+\infty$. Soit λ une probabilité cylindrique sur E, de type p (resp. de type p approximable). On sait que u est p-sommante de E dans H', donc dans $\sigma(H', H)$, donc $u(\lambda)$, probabilité cylindrique sur H', a une image de Radon d'ordre p dans $\sigma(H', H)$. Mais H' est polonais, donc il existe une probabilité de Radon ν sur H' de même image que $u(\lambda)$ dans $\sigma(H', H)$. Mais ν est concentrée sur les compacts de H', donc a fortiori sur les convexes $\sigma(H', H'')$-compacts. Puis λ est scalairement concentrée sur les boules de E (corollaire (2.1.5 ou 11)), car λ est de type 0, soit si E est un Banach, soit si $E=\sigma(F', F)$, F Banach, soit si $E=\sigma(F', F)$, F quasi-Banach, et $p\geqslant 1$, car alors f_λ est continue de F dans $L^p(\Omega, \mu)$ localement convexe, donc de F_N dans $L^p(\Omega, \mu)$. Or on sait que l'image par u d'une boule de E est relativement compacte dans $\sigma(H', H'')$ pour p fini (corollaire (3.8)). Donc $u(\lambda)$ est scalairement concentrée sur la famille des parties $\sigma(H', H'')$-compactes convexes. Donc ν et $u(\lambda)$ coincident. [32]

REMARQUE. Dans ce cas 2), supposons que E soit de la forme $\sigma(F', F)$. Nous avons supposé u faiblement continue, donc continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H'')$.

---

[32] SCHWARTZ [1], 2e partie, chap. II, §3, proposition 6.

Et alors la conclusion précédente est valable. Mais supposons seulement u continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H)$; si λ est une probabilité cylindrique de type p approximable sur F', alors, comme u est continue de F' dans H' et encore p-sommante, il reste vrai que $u(\lambda)$ est de Radon sur H'; mais si λ est seulement de type p approximable sur $\sigma(F', F)$, la conclusion ne subsiste pas; en effet, $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(H', H)$, donc provient d'une probabilité de Radon ν sur H'; mais cela n'a aucun sens de dire que $u(\lambda)=\nu$, car $u(\lambda)$ n'est pas définie comme probabilité cylindrique sur H' (voir remarque après le corollaire (1.18 ter)).

REMARQUE. Le résultat 2) ne subsiste pas pour $p=+\infty$. Si en effet on prend l'application u identique de H' dans lui-même, on peut trouver une probabilité cylindrique sur H', de type $+\infty$, (dont l'image dans $\sigma(H', H)$ est forcément de Radon) mais qui n'est pas de Radon.

Exemple: H non réflexif, $\lambda=\delta_{(a''')}$ avec $a'''\in H'''$ et $\notin H'\subset H'''$. Elle est cylindrique sur H', de type $+\infty$, mais non de Radon; son image dans $\sigma(H', H)$ est $\delta_{(a')}$, où a' est l'image de a''' par $\sigma(H''', H'')\to\sigma(H', H)$; $a'\in H'$ est la forme linéaire sur H, restriction à $H\subset H''$ de a''', forme linéaire sur H''.

3) Supposons $1<p<+\infty$, E Banach. Utilisons la factorisation de (3.6), point 2. D'après la proposition (3.8.2), $j: L^\infty(X, \nu)\to L^p(X, \nu)$ est déjà p-radonifiante; donc aussi jv. Alors u_1 est p-radonifiante de E dans $L^p(X, \nu)$, mais envoie E dans le sous-espace fermé L: elle est donc p-radonifiante de E dans L d'après la proposition (2.12), 2); et alors u est p-radonifiante de E dans G. (La vérification des normes pas à pas montre en outre que l'on a l'inégalité $\|u(\lambda)\|_p\leqslant\pi_p(u)\|\lambda\|_p^*$, pour toute probabilité cylindrique λ de E, de type p, approximable ou non.)

REMARQUE. Si $E=\sigma(F', F)$, u est sûrement p-radonifiante de F' dans G lui-même, peut-être pas de $\sigma(F', F)$ dans G; dans la factorisation de PIETSCH, 2 du théorème (3.6), v est continue de F' dans L^∞, mais n'a aucune continuité à partir de $\sigma(F', F)$, même pour F Banach.

4) Supposons $p=1$. Alors on a la factorisation de (3.6). L'application $j: L^\infty(X, \nu)\to L^1(X, \nu)$ est intégrale; si alors E est un Banach réflexif, $E\xrightarrow{v}L^\infty(X, \nu)$ est faiblement compacte, et un théorème de GROTHENDIECK dit que $j\cdot v$ est nucléaire de E dans le bidual fort de L^1. De même, si E est un Banach et si E' est séparable, un autre théorème de GROTHENDIECK ([33]) dit que la composée de jv avec l'injection canonique de $L^1(X, \nu)$ dans son bidual fort est nucléaire. De toute façon, L est un sous-espace vectoriel fermé du bidual fort M de L^1. Alors u_1, comme application de E dans M, est 1-radonifiante (corollaire (3.8.4)); et alors la proposition (2.12),

([33]) GROTHENDIECK [1], 1ère partie, §4, n° 3, corollaire 2 et corollaire 3, p. 134.

2), dit que u_1 est 1-radonifiante de E dans L, donc u de E dans G. CQFD.

5) Supposons $p=+\infty$. Si E est un Banach réflexif ou un $\sigma(F', F)$, sa boule unité est faiblement compacte, donc son image par u faiblement continue l'est aussi. Mais u est déjà supposée ∞-sommante, donc par la remarque dans la démonstration de point 2 de (3.5 quinto), l'image par u de la boule unité est bornée. Donc le point 3 de (3.5 quinto) donne le résultat.

COROLLAIRE (3.9.1). *Soit $u: E\to G$ p-sommante. Soit $w: G\to G_1$ linéaire continue, telle que l'image de la boule unité soit faiblement compacte, G_1 Banach, ou dual $*$-faible de Banach, ou quasi-Banach séparable. Soit $v: E_1\to E$, linéaire faiblement continue, telle que l'image de la boule unité soit faiblement compacte. Alors $w\circ u$ est approximativement p-radonifiante de E dans G_1 lui-même; $u\circ v$ est p-radonifiante de E_1 dans G lui-même (indépendamment de tous les cas qui pourraient résulter de l'application à $u\circ v$ de la prop.* (3.9)), *si $p=1$, E et E_1 Banach, ou si $p=+\infty$, E Banach.*

DÉMONSTRATION. 1) Considérons $w\circ u$. Soit λ cylindrique de type p appoximable sur E; $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma(G'', G')$. Si G est un $\sigma(H', H)$, $\sigma(G'', G')=G$, et alors $wu(\lambda)$ sera de Radon d'ordre p sur G_1. Soit donc G quasi-Banach. Si G_1 est un $\sigma(H_1', H_1)$, c'est aussi vrai, car ${}^{tt}w$ est continue de $\sigma(G'', G')$ dans G_1, et $wu(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur G_1. Soit donc G_1 quasi-Banach. Alors, puisque l'image par w de la boule unité de G est faiblement compacte dans G_1, w est continue de $\sigma(G'', G')$ dans $\sigma(G_1, G_1')$; donc $wu(\lambda)$, probabilité cylindrique sur G_1, a une image de Radon dans $\sigma(G_1, G_1')$. Cette image provient alors d'une probabilité de Radon ν sur G_1 lui-même, soit si G_1 est un Banach par PHILLIPS, soit s'il est séparable, car il est alors polonais; et comme $\check{\mathscr{P}}(G_1)\to\check{\mathscr{P}}(\sigma(G_1, G_1'))$ est injective, $wu(\lambda)$ et ν, ayant même image dans $\sigma(G_1, G_1')$, coincident, et $wu(\lambda)$ est de Radon sur G_1.

2) Considérons $u\circ v$. Soit d'abord $p=1$, E et E_1 Banach. On introduit, comme dans le 4 de la proposition précédente, le diagramme de PIETSCH. On voit de la même manière que $u\circ v$ est nucléaire de E_1 dans le bidual fort de $L^1(X, \nu)$, et on termine de la même manière. Supposons maintenant $p=+\infty$. Si λ est cylindrique de type $+\infty$ sur E_1, elle est de Radon, portée par une boule sur $\sigma(E_1'', E_1')$. Comme ${}^{tt}u$ est supposée continue de $\sigma(E_1'', E_1')$ dans $\sigma(E, E')$, $v(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(E, E')$, portée par une boule donc de Radon sur E parce que E est un Banach, à cause du théorème de PHILLIPS. Comme ensuite u est supposée ∞-sommante, elle est continue de E dans G ou H' par le 2 de (3.5 quinto), donc $uv(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur G ou H', portée par une boule.

(3.10) *Suppression des conditions d'approximation.*

PROPOSITION (3.10). *Soit u linéaire faiblement continue p-sommante de E dans G. Alors u est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, dans chacun des cas suivants*:

1) *Le couple (E, E') a la propriété d'approximation métrique*;
2) $p \geqslant 1$.

Si en outre l'une des conditions de la proposition (3.9) *est réalisée, u est p-radonifiante de E dans G lui-même. Dans tous les cas précédents, on a*

$$\|u(\lambda)\|_p \leqslant \pi_p(u)\|\lambda\|_p^* , \tag{3.11}$$

pour λ cylindrique de type p.

DÉMONSTRATION. 1) résulte du corollaire (2.11), partie 2), puisqu'alors toute probabilité cylindrique de type p sur E est de type p approximable, avec $\|\lambda\|_p^{*a} = \|\lambda\|_p^*$.
2) Le cas $1 < p < +\infty$ a été traité à la proposition (3.10), cas 3, si E est un Banach. Supposons maintenant $p=1$, E Banach. En reprenant la démonstration du cas $1 < p < +\infty$, on peut maintenant seulement dire que j est p-radonifiante de $L^\infty(X, \nu)$ dans $\sigma(\Lambda'', \Lambda')$, $\Lambda = L^1(X, \nu)$, donc aussi $j\nu$ de E dans $\sigma(\Lambda'', \Lambda')$. Mais elle envoie E dans L, elle sera donc p-radonifiante de E dans l'adhérence de L dans $\sigma(\Lambda'', \Lambda')$, muni de la topologie induite, c. à d. dans $\sigma(L'', L')$; et alors $u = u_2 \circ u_1$ sera p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Supposons ensuite $p = +\infty$, E Banach. L'application identique de E dans $\sigma(E'', E')$ est ∞-radonifiante par (3.5 quinto), et u est continue de $\sigma(E'', E')$ dans $\sigma(G'', G')$ puisqu'elle est continue de E dans G (voir (3.5 quinto)), d'où le résultat. Le cas E Banach est donc réglé; le cas $E = \sigma(F', F)$, F quasi-Banach, est toujours réglé par la proposition (2.9.1).

CQFD.

(3.11 bis) *Récapitulation.*

Récapitulons les résultats obtenus. Soient E un Banach ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach F, G un quasi-Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach H. Soit u linéaire faiblement continue p-sommante de E dans G. Alors elle est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$ (ce qui signifie G si $G = \sigma(H', H)$). En outre:

1) *Si $p = +\infty$, elle est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, et dans G si E ou G est un Banach réflexif*;
2) *Si $1 < p < +\infty$, u est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, et dans G si G est un Banach réflexif ou un dual séparable de Banach, ou si E est un Banach*;
3) *Si $p=1$, u est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, et dans G si G est un Banach réflexif, ou un dual séparable de Banach, ou si E est un Banach ré-*

flexif ou de dual séparable;

4) *Si* $0<p<1$, *u est seulement approximativement p-radonifiante de E dans* $\sigma(G'', G')$; *on peut remplacer* $\sigma(G'', G')$ *par G si G est un Banach réflexif, ou si G est un dual séparable de Banach et E un Banach ou un dual *-faible de Banach; on peut supprimer approximativement si le couple* (E, E') *a la propriété d'approximation métrique.*

COROLLAIRE (3.12). (34) *Soit E un Banach réflexif (resp. séparable), et soit* Ω *un espace topologique muni d'une probabilité de Radon* μ. *Toute application* $\varphi:\Omega\to E'$, *appartenant à* $L^\infty(\Omega, \mu; E')$ *(resp.* $L^\infty(\Omega, \mu; \sigma(E', E))$*) définit une application linéaire* φ^* *de E dans* $L^\infty(\Omega, \mu)$, *à savoir* $x\mapsto\langle\varphi, x\rangle$. *L'application* $\varphi\mapsto\varphi^*$ *ainsi définie est une bijection linéaire isométrique de* $L^\infty(\Omega, \mu; E')$ *(resp.* $L^\infty(\Omega, \mu; \sigma(E', E))$*) sur* $\mathscr{L}(E; L^\infty(\Omega, \mu))$ *(qui est aussi l'espace des formes bilinéaires continues sur* $E\times L^1(\Omega, \mu)$, *ou le dual de* $L^1(\Omega, \mu; E)$*).*

DÉMONSTRATION. Les affirmations de la dernière parenthèse sont bien connues. De même il est trivial que $\varphi\mapsto\varphi^*$ est linéaire continue avec $\|\varphi^*\|\leqslant|\!|\!|\varphi|\!|\!|$. Inversement, soit f une application linéaire continue de E dans $L^\infty(\Omega, \mu)$. Elle définit une probabilité cylindrique λ_f de type $+\infty$ sur $\sigma(E', E)$, avec $\|\lambda_f\|_\infty^*=\|f\|$ (corollaire (2.1.12)). Mais alors celle-ci est de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(E', E)$, avec $\|\lambda\|_\infty=\|\lambda\|_\infty^*$, d'après le corollaire précédent; donc, si E est réflexif, de Radon sur E' par le théorème de PHILLIPS. Si E est réflexif ou séparable, il résulte du début de (1.19.0) que f est alors décomposable, c. à d. réalisable ($f=\varphi^*$) par une application $\varphi:\Omega\to E'$, μ-mesurable pour E réflexif, μ-mesurable de Ω dans $\sigma(E', E)$ pour E séparable; et alors, d'après (1.19.0),

$$\|f\|_{\mathscr{L}(E;\,L^\infty(\Omega,\mu))}=\|\lambda_f\|_\infty=\|\varphi(\mu)\|_\infty=|\!|\!|\varphi|\!|\!|_{L^\infty(\Omega,\mu)}\ ,$$

donc $\varphi\mapsto\varphi^*$ est une surjection. Par ailleurs, si $\varphi^*=0$, comme $\varphi(\mu)=\lambda_{\varphi^*}$, on a $\lambda_{\varphi^*}=\delta$ donc $\varphi=0$; donc elle est injective, et isométrique par les dernières égalités.

REMARQUE. Si μ, au lieu d'être une probabilité, est une mesure de Radon $\geqslant 0$ arbitraire sur Ω, un concassage de Ω (35) ramène aussitôt à des mesures de masses finies, et le résultat subsiste.

(3.13) *Point de vue des applications décomposantes.*

La proposition (2.14) donne toujours tous les résultats voulus. Il est néanmoins intéressant de se placer dans une situation autonome, non dualisée. Nous nous bornerons alors au cas où F et H sont des Banach. Nous considérerons des ap-

(34) C'est une version du théorème de Dunford-Pettis, n'exigeant pas le théorème de relèvement de L^∞, mais faisant sur E des hypothèses particulières.

(35) Voir SCHWARTZ [1], chap. I, définition 13.

plications linéaire continues f de F dans $L^p(\Omega, \mu)$, donc de type p pour $E=\sigma(F', F)$; éventuellement nous supposerons f limite simple d'applications linéaires continues f_j de rang fini, bornées dans $\mathscr{L}(F; L^p(\Omega, \mu))$, c. à d. f de type p approximable. Et nous chercherons quand une application linéaire continue v de H dans F est telle que, pour toute f, $f\circ v$ soit décomposée, par une application φ appartenant à $L^p(\Omega, \mu; H')$ ou $L^p(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$, c. à d. p-décomposée relativement à H' ou $\sigma(H', H)$. Nous aurons donc la notion d'application v p-décomposante, ou approximativement p-décomposante, de H dans F, relativement à H' ou $\sigma(H', H)$.

PROPOSITION (3.13). *Nous supposons ici exceptionnellement $p\geqslant 0$.*

1) *Si v est p-décomposante de H dans F, relativement à $\sigma(H', H)$, alors $u={}^tv$ est p-radonifiante de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H)$.*

2) *Si v est p-décomposante de H dans F, relativement à H', alors $u={}^tv$ est p-radonifiante de F' dans H', et de $\sigma(F', F)$ dans H' si elle est continue de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H'')$.*

3) *Si $u={}^tv$ est p-radonifiante (resp. approximativement p-radonifiante) de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H)$, alors, si H est séparable ou réflexif, v est p-décomposante (resp. approximativement p-décomposante) de H dans F, relativement à $\sigma(H', H)$; elle l'est même relativement à H', si H est réflexif ou H' séparable.*

4) *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G, p-radonifiante (resp. approximativement p-radonifiante). Alors, si f est une application linéaire continue de E' dans un $L^p(\Omega, \mu)$ (resp. continue approximable), $f\circ{}^tu$ est décomposée, par une fonction de $L^p(\Omega, \mu; G)$, dans les cas suivants: G est un Banach, ou $G=\sigma(H', H)$, H Banach séparable ou réflexif.*

DÉMONSTRATION. 1) Soit λ cylindrique de type p sur $E=\sigma(F', F)$. Alors elle peut s'écrire λ_f, où f est une application linéaire continue de F dans un $L^p(\Omega, \mu)$. Alors $f\circ v$ est réalisée par $\varphi\in L^p(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$, et $u(\lambda)$ est la probabilité de Radon image $\varphi(\mu)$, d'ordre p sur $\sigma(H', H)$.

2) Cela n'aurait aucun sens de dire que u est p-radonifiante de $\sigma(F', F)$ dans H', car elle n'est pas faiblement continue. Mais elle est continue de F' dans H' et la démonstration est la même que pour 1); et elle est aussi p-radonifiante, si elle est faiblement continue de $\sigma(F', F)$ dans H'.

3) Soit $f\in \mathscr{L}(F; L^p(\Omega, \mu))$, éventuellement approximable. Alors λ_f est cylindrique de type p sur $E=\sigma(F', F)$, éventuellement de type p approximable. Donc, suivant les hypothèses faites sur u, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma(H', H)$. Si alors H est séparable ou réflexif, $v\circ f$ est forcément réalisée par $\varphi\in L^p(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$, d'après le théorème (1.20). Celui-ci montre aussi, que, s H est réflexif ou H' séparable, φ est μ-mesurable de Ω dans H'.

4) résulte de la proposition (1.19.0).

REMARQUE. Soit $u: E \to G$. Soit φ une application de Ω dans E, *scalairement* L^p; autrement dit, pour tout $\xi \in E'$, la fonction $\langle \varphi, \xi \rangle$ est dans $L^p(\Omega, \mu)$. Alors $\varphi^*: \xi \mapsto \langle \varphi, \xi \rangle$ est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. En effet, son graphe est fermé; si $(\xi_n)_{n \in N}$ est une suite de E' convergeant vers $\xi \in E'$ et si les $\langle \varphi, \xi_n \rangle$ convergent vers une limite g dans $L^p(\Omega, \mu)$, on peut, quitte à extraire une suite partielle, supposer aussi que les $\langle \varphi, \xi_n \rangle$ convergent vers g, μ-presque partout; mais, pour tout $\omega \in \Omega$, $\langle \varphi(\omega), \xi_n \rangle$ converge vers $\langle \varphi(\omega), \xi \rangle$; donc $g = \langle \varphi, \xi \rangle$, et le graphe est bien fermé; et le théorème du graphe fermé est applicable, car E' et $L^p(\Omega, \mu)$ sont tous deux métrisables et complets. Alors la composée $u \circ \varphi$ définit la fonction aléatoire $\varphi \circ {}^t u$: $G' \to L^p(\Omega, \mu)$; et donc elle est décomposée *si u est p-radonifiante*, (car rien ne dit que φ^* soit approximable) et si G est un Banach ou un $\sigma(H', H)$, H Banach réflexif ou séparable. *Cela ne prouve pas que $u \circ \varphi$ soit dans $L^p(\Omega, \mu; G)$, mais seulement qu'elle est scalairement μ-presque partout égale à une fonction de $L^p(\Omega, \mu; G)$; elle sera elle-même dans $L^p(\Omega, \mu; G)$ dans les cas suivants: G est un Banach séparable ou $G = \sigma(H', H)$, H Banach séparable,* car alors une fonction scalairement presque partout nulle à valeurs dans G est presque partout nulle.

PROPOSITION (3.14). *Maintenant de nouveau $p > 0$. Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Pour que u soit approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il est:*

a) *nécessaire qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que, pour tout espace topologique Ω muni d'une probabilité de Radon μ et toute application φ μ-mesurable de Ω dans E_N, appartenant à $L^p(\Omega, \mu; E_N)$, on ait l'inégalité*

$$\|\mu \circ \varphi\|_{L^p(\Omega, \mu; G)} \leqslant M \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \|\langle \varphi, \xi \rangle\|_{L^p(\Omega, \mu)} . \tag{3.15}$$

b) *suffisant qu'on ait la même inégalité pour au moins un espace Ω et une probabilité μ non réduite à un nombre fini de masses ponctuelles, et les fonctions φ μ-étagées de $L^p(\Omega, \mu; E_N)$. Dans ce cas, la meilleure constante M est $\pi_p(u)$.*

REMARQUE. *L'inégalité* (3.15) *exprime que $\varphi \mapsto u \circ \varphi$ de $L^p(\Omega, \mu; E_N)$, muni de la topologie moins fine induite par $\mathscr{L}(E'; L^p(\Omega, \mu))$, dans $L^p(\Omega, \mu; G)$, est continue.*

DÉMONSTRATION. a) Supposons u approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. La probabilité image $\varphi(\mu)$ est de Radon *sur E_N*, donc elle est de type p approximable sur E_N (prop. (2.10)); donc $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur G, parce que, d'après la remarque de la démonstration du point 2 de (3.5 quinto), u est continue de E_N dans G. Or $u(\lambda) = u(\varphi(\mu))$; alors on peut appliquer (3.5 bis), et comme $\|\varphi(\mu)\|_p^* = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\langle\varphi, \xi\rangle\|_{L^p(\Omega,\mu)}$ et que $\|u(\varphi(\mu))\|_p = \||u\circ\varphi\||_{L^p(\Omega,\mu;G)}$, on a bien (3.15), avec $M \leqslant \pi_p(u)$.

b) Supposons (3.15) réalisée pour un Ω et une μ non réduite à un nombre fini de masses discrètes, et seulement pour des φ μ-étagées à valeurs dans E_N. Si $a=(a_n)_{n\in N}$ est une suite finie de points E, et si l'on partage Ω en réunion de parties Ω_n disjointes de mesures c_n, $\sum_n c_n=1$, on peut considérer la fonction φ_a μ-étagée qui sur Ω_n prend la valeur constante $(1/c_n^{1/p})a_n$. Alors, pour $\xi\in E'$, $\langle\varphi_a, \xi\rangle$ est la fonction $\sum_n \chi_{\Omega_n}(1/c_n^{1/p})\langle\xi, a_n\rangle$, dont la norme dans $L^p(\Omega, \mu)$ est $\|\langle\xi, a\rangle\|_{l^p}$, de sorte que la borne supérieure de ces bornes pour $\|\xi\|\leqslant 1$ est $\|a\|_p^*$. Ensuite $u\circ\varphi_a$ est la fonction $\sum_n \chi_{\Omega_n}(1/c_n^{1/p})u(a_n)$, dont la norme dans $L^p(\Omega, \mu; G)$ est $\|u(a)\|_{l^p(E)} = \|u(a)\|_p$; alors (3.15) appliquée à φ_a donne (3.3), donc u est bien p-sommante, et $\pi_p(u)\leqslant M$.

REMARQUE. On pourra, dans b, se borner à prendre $\Omega=N$, $\mu=\sum_n 1/(2^{n+1})\delta_{(n)}$, où $\Omega=[0,1]$, $\mu=dx$.

§ 4. Applications 0-radonifiantes dans les espaces de Banach.

Dans tout ce paragraphe, E est un Banach ou un dual $*$-faible d'un quasi-Banach, G un quasi-Banach ou un dual $*$-faible d'un Banach; pour tous les quasi-Banach, la boule unité est comme toujours supposée faiblement fermée. Les applications 0-radonifiantes sont celles que j'avais appelées antérieurement radonifiantes: u est 0-radonifiante de E dans G, si pour toute probabilité cylindrique λ, de type 0 sur E (c. à d. scalairement concentrée sur les parties bornées si E est un Banach ou un dual $*$-faible de Banach), $u(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur G (qui est automatiquement d'ordre 0). Lorsque G est un quasi-Banach, il faut faire plus attention aux applications 0-radonifiantes de E dans $\sigma(G'', G')$; une probabilité de Radon sur $\sigma(G'', G')$ n'est plus automatiquement d'ordre 0 au sens de l'espace bitopologique $\sigma(G'', G')$; elle ne l'est que si, dans $\sigma(G'', G')$, elle est portée par le sous-espace vectoriel engendré par l'adhérence B'' de la boule unité B de G, car alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existera un $R(\varepsilon)$ fini tel que la masse de $R(\varepsilon)B''$ soit $\geqslant 1-\varepsilon$.

THÉORÈME (4.1). *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;*

2) *u est très approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;*

3) *Quel que soit β, $0<\beta<1$, il existe α, $0<\alpha<1$, et $M\geqslant 0$ fini tels que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, combinaison lineaire finie de masses ponctuelles, on ait l'inégalité*:

(4.2) $\qquad J_\beta(u(\lambda)) \leqslant MJ_\alpha^*(\lambda)$ (*voir exemple* (1.9)) .

Dans ce cas, pour toute probabilité λ de Radon sur E_N, $u(\lambda)$ est de Radon sur G, et on a les mêmes inégalités; pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type 0 *approximable, $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')$, et on a les mêmes inégalités, où $J_\alpha^*(\lambda)$ est remplacé par $J_\alpha^{*a}(\lambda)$.*

4) *Pour tout J-poids A, de la forme* (1.12) *il existe un J-poids B, de la forme* (1.12), *tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, combinaison linéaire finie de masses ponctuelles, on ait*

(4.3) $$B(u(\lambda)) \leqslant A^*(\lambda) ;$$

dans ce cas, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type 0 *approximable, $u(A)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')$, et on a:*

(4.4) $$B(u(\lambda)) \leqslant A^{*a}(\lambda) ;$$

5) *Quels que soient l'espace topologique Ω et la probabilité de Radon μ sur Ω, l'application linéaire continue $\varphi \mapsto u \circ \varphi$ de $L^0(\Omega, \mu; E_N)$ dans $L^0(\Omega, \mu; G_N)$ envoie $L^0(\Omega, \mu; E_N)$ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, et reste continue de $L^0(\Omega, \mu; E_N)$ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$ quand on munit $L^0(\Omega, \mu; E_N)$ de la topologie induite par son injection $\varphi \mapsto f_\varphi$ (où $f_\varphi = \varphi^*$ est la fonction aléatoire linéaire $\xi \mapsto \langle \varphi, \xi \rangle$ de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$) dans $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$.*

6) *La même application linéaire est continue, pour au moins un espace topologique Ω et une probabilité de Radon μ sur Ω, diffuse, et lorsqu'on se restreint aux φ μ-étagées.*

DÉMONSTRATION. A) Supposons une inégalité (4.2) vérifiée, avec *un* α, *un* β, *un* M, pour des λ combinaisons finies de masses ponctuelles; montrons qu'elle est vérifiée pour toute λ de Radon sur E_N. Tout d'abord, en l'appliquant à une seule masse ponctuelle, on trouve aussitôt que $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$, ou $\|u\| \leqslant M$: u est continue de E_N (c. à d. de E ou F') dans G ou H', donc toujours dans G, ce qui étend à $p=0$ la remarque de la démonstration du 2 de (3.5 quinto). Soit λ une probabilité de Radon sur E_N. Elle est limite étroite, sur E_N, de probabilités de Radon λ_j, portées par des ensembles finis, avec $J_\alpha^*(\lambda_j) \leqslant J_\alpha^*(\lambda)$ (prop. (2.10)). Donc $u(\lambda)$ est limite étroite, sur G, de probabilités $u(\lambda_j)$, qui vérifient $J_\beta(u(\lambda_j)) \leqslant MJ_\alpha^*(\lambda)$. D'après la propriété 2' du (1.2 bis), on en déduit que $J_\beta(u(\lambda)) \leqslant MJ_\alpha^*(\lambda)$. Par contre, il n'est évidemment pas actuellement démontrable que, si *une* inégalité (4.2) est vérifiée, avec *un* β, *un* α, *un* M, la même inégalité soit vérifiée pour toute probabilité cylindrique λ, de type 0 approximable, avec $J_\alpha^{*a}(\lambda)$ au second membre; car $u(\lambda)$ n'a au stade actuel aucune raison d'être de Radon. Mais, quand tout le reste de la démonstration sera terminé, il sera vrai que si, *pour tout* β, *il existe* un α et un M tels que (4.2) soit vrai, alors, pour toute λ cylindrique de type 0 approximable, $u(\lambda)$ est de Radon, et on aura *le système des mêmes inégalités*, avec $J_\alpha^*(\lambda)$ au second membre et c'est tout à fait évident. En effet, pour tout $\delta>0$, λ est limite cylindrique de probabilités λ_j portées par des ensembles finis, avec $J_\alpha^*(\lambda_j)\leqslant J_\alpha^{*a}(\lambda)+\delta$; les $u(\lambda_j)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$; mais on saura que $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')$, donc les $u(\lambda_j)$ convergent vers $u(\lambda)$ étroitement sur $\sigma(G'', G')$ (prop. (1.17.0)). Alors on aura $J_\beta(u(\lambda_j))\leqslant MJ_\alpha^*(\lambda_j)\leqslant M(J_\alpha^{*a}(\lambda)+\delta)$, donc aussi $J_\beta(u(\lambda))\leqslant M(J_\alpha^{*a}(\lambda)+\delta)$, et par suite $\leqslant MJ_\alpha^{*a}(\lambda)$.

En réalité on peut dire plus. Si l'on a *une* inégalité (4.2), avec *un* β, *un* α, *un* M, si λ est une probabilité cylindrique de type J_α approximable, *et si on sait que* $u(\lambda)$ *est de Radon*, elle vérifiera la même inégalité avec $J_\alpha^{*a}(\lambda)$ au second membre. Ceci donnera plus tard une très bonne amélioration du résultat actuel: voir corollaire (4.12.5).

A′) Montrons maintenant que la proposition 3 de l'énoncé entraîne le propriété 5. Soit φ une application μ-mesurable de Ω dans E_N (c. à d. E muni de la topologie de la norme). Alors $\lambda=\varphi(\mu)$ est une probabilité de Radon sur E_N. Le poids J_α définit dans $L^0(\Omega, \mu)$ une jauge, et la jauge correspondante de f_φ dans $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$ est $\operatorname*{Sup}_{\|\xi\|\leqslant 1} J_\alpha(\mu, \langle\varphi, \xi\rangle)=J_\alpha^*(\lambda)$. Ensuite $u(\lambda)=(u\circ\varphi)(\mu)$ est une probabilité de Radon sur G et $u\circ\varphi$ est μ-mesurable de Ω dans G; sa jauge associée au poids J_β, dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, est $J_\beta(\mu, u\circ\varphi)=J_\beta(u(\lambda))$. Alors l'inégalité (4.2), pour des probabilités de Radon sur E_N, prouve bien que l'application $\varphi\mapsto u\circ\varphi$ est continue, de $L^0(\Omega, \mu; E_N)$ muni de la topologie induite par $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$, dans $L^0(\Omega, \mu; G)$ (et même en fait dans $L^0(\Omega, \mu; H')$ si $G=\sigma(H', H)$).

B) 5 entraîne trivialement 6).

C) Montrons que 6) entraîne l'inégalité (4.2) pour des combinaisons finies de masses ponctuelles, c. à d. 3). La continuité supposée par 6) entraîne, pour tout β, l'existence d'un $\alpha(\beta)=\alpha$ et d'un $M(\beta)=M$, tels que, pour toute φ μ-étagée: $\Omega\to E$, on ait $J_\beta(\mu, u\circ\varphi)\leqslant M\operatorname*{Sup}_{\|\xi\|\leqslant 1} J_\alpha(\mu, \langle\varphi, \xi\rangle)$. Soit λ une probabilité de Radon de la forme $\sum_n c_n\delta_{(a_n)}$; comme μ est supposée diffuse, il existe une partition finie $\Omega=\bigcup_n \Omega_n$, avec $\mu(\Omega_n)=c_n$; prenons alors la fonction μ-étagée φ, égale à a_n sur Ω_n. Alors $\varphi(\mu)$ est λ, et l'inégalité ci-dessus est exactement (4.2).

Nous avons donc montré l'équivalence de 3, 5 *et* 6.

D) Montrons maintenant que 3) entraîne (4.3). Soit A un poids de la forme (1.12), $A=\operatorname*{Sup}_{0<\alpha<1}\varphi(\alpha)J_\alpha$, $\varphi>0$ bornée. Appelons $B(A)=B$ le poids $\operatorname*{Sup}_{0<\beta<1}\dfrac{\varphi(\alpha(\beta))}{M(\beta)}J_\beta$, et montrons que l'on a (4.3). Soit λ une combinaison finie de masses ponctuelles.

Pour tout β, on a (4.2); donc $\frac{\varphi(\alpha(\beta))}{M(\beta)} J_\beta(u(\lambda)) \leqslant \varphi(\alpha(\beta)) J^*_{\alpha(\beta)}(\lambda) \leqslant A^*(\lambda)$; ceci étant vrai pour tout β, on a bien (4.3). Ceci en réalité ne fait aucune hypothèse sur φ. Mais nous voulons en déduire d'autres conclusions qui exigeront les restrictions indiquées sur φ dans l'énoncé: φ est partout >0 et bornée.

E) Mais (4.3), pour toutes les probabilités combinaisons linéaires finies de masses ponctuelles, entraîne que u soit très approximativement (A, B)-radonifiante, de E dans $\sigma(G''G')$, d'après le théorème (2.5), parce que, φ étant partout >0, B est un poids compact. Soit alors λ une probabilité cylindrique de type 0 très approximable. D'après (2.1.7), il existe un J-poids A tel que λ soit de type A très approximable; alors $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre $B(A)$. Donc u est très approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, donc approximativement 0-radonifiante, car 1) et 2) sont équivalentes d'après (2.11). Donc les inégalités (4.3) entraînent 2). En outre, pour tout couple (A, B) tel que l'on ait (4.3), on a encore, pour toute λ cylindrique de type A très approximable, l'inégalité $B(u(\lambda)) \leqslant A^{*ta}(\lambda)$. Comme la fonction $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$ définissant A est supposée bornée, nous avons vu aux exemples suivant la proposition (2.10), que toute probabilité cylindrique de type A approximable est aussi très approximable et que $A^{*ta}(\lambda) = A^{*a}(\lambda)$, donc on a bien (4.4). En conclusion de D et E, 3 entraîne 4, et 4 entraîne les propriétés équivalentes 1) et 2). En conclusion de A, B, C, D, E: 3, 5, et 6 sont équivalentes; 1 et 2 sont équivalentes; et 3-5-6 entraîne 1-2 et 4.

F) Montrons maintenant que 4 entraîne 6. Comme $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$ est métrisable, il suffit, pour montrer que $\varphi^* \mapsto u \circ \varphi$ est continue, de montrer qu'elle transforme toute partie bornée en une partie bornée. Soit donc $\mathscr{B}$ une partie bornée de $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$, formée de fonctions φ^*, φ μ-étagées sur Ω à valeurs dans E. D'après le corollaire (2.1.12), l'ensemble des $\varphi(\mu)$, $\varphi \in \mathscr{B}$, est uniformément de type 0; donc, par (2.1.7), il existe un J-poids A tel que $\mathscr{B}$ soit uniformément de type A, $A^*(\mathscr{B}) \leqslant 1$. Par (4.3), on en déduira que, pour le poids B correspondant, $B(u(\mathscr{B})) \leqslant 1$. Ce qui signifie exactement, B étant un poids homogène compact, que $u(\mathscr{B})$ est borné dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, ce qui démontre 6). En conclusion de A, B, C, D, E, F: 1 et 2 sont équivalentes; 3, 4, 5, 6, sont équivalentes; et 3-4-5-6 entraînent 1-2.

G) Pour terminer, nous allons montrer que 1) entraîne 6), en utilisant le théorème du graphe fermé. Supposons d'abord $G = \sigma(H', H)$, H Banach séparable. Soit $\mathscr{A}$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$, qui sont décomposées, réalisées par des applications μ-étagées de Ω dans E. Soit $\overline{\mathscr{A}}$ son adhérence dans $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$; nous munirons $\overline{\mathscr{A}}$ de la topologie induite par $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$. Soit $f \in \overline{\mathscr{A}}$, limite d'une suite $(f_n)_{n \in N}$ de $\mathscr{A}$. La fonction f

définit une probabilité cylindrique λ_f de type 0 (prop. (2.1.10)). En outre, les f_n sont bornées dans $\mathscr{L}(E', L^0(\Omega, \mu))$, donc les λ_{f_n} sont uniformément de type 0; et les f_n convergent simplement vers f, donc les λ_{f_n} cylindriquement vers λ_f: λ_f est de type 0 approximable. Donc, d'après les hypothèses, $u(\lambda_f)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')=G=\sigma(H', H)$. Alors $f\circ{}^tu$ définit une probabilité de Radon sur $\sigma(H', H)$, H Banach séparable; donc (prop. (1.19.0)) elle est décomposée, par $\phi_f \in L^0(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$. Nous avons donc défini une application linéaire $f \mapsto \phi_f$ de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$. Soient f_k des éléments de $\bar{\mathscr{A}}$ tendant vers f dans $\bar{\mathscr{A}}$, et telles que les $\phi_{f_k}=\phi_k$ aient une limite ϕ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$; nous allons montrer que $\phi=\phi_f$, ce qui prouvera que le graphe de cette application est fermé. D'un côté les f_k convergent vers f dans $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$, donc les $f_k\circ{}^tu$ vers $f\circ{}^tu$ dans $\mathscr{L}_s(H; L^0(\Omega, \mu))$ [36]. De l'autre les ϕ_k convergent vers ϕ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, donc a fortiori les ϕ_k^* convergent vers ϕ^* dans $\mathscr{L}(H; L^0(\Omega, \mu))$; de $\phi_k^*=f_k\circ{}^tu$ on déduit alors bien $\phi^* =f\circ{}^tu$ donc $\phi=\phi_f$, donc le graphe est fermé.

Si alors le théorème du graphe fermé est applicable, on en déduira que $f\mapsto\phi_f$ est continue; si en particulier $f\in\mathscr{A}$, alors $f=\varphi^*$, $\varphi\in L^0(\Omega, \mu; E_N)$, et on aura exactement prouvé 6). Or $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$ est métrisable et complet, donc aussi $\bar{\mathscr{A}}$; et $L^0(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$ est métrisable et complet (prop. (0.3)). Donc la démonstration est achevée si $G=\sigma(H', H)$, H Banach séparable.

Supposons maintenant $G=\sigma(H', H)$, H Banach quelconque. Comme $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$ est métrisable, on pourra démontrer la continuité cherchée en montrant que toute suite convergente est transformée en une suite convergente.

Soit donc $(\varphi_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions étagées sur Ω à valeurs dans E, convergeant vers 0 dans $\mathscr{L}(E'; L^0(\Omega, \mu))$. Chaque φ_n prend ses valeurs dans un sous-espace vectoriel E_n de dimension finie de E, donc $u\circ\varphi_n$ dans un sous-espace vectoriel G_n de dimension finie de G; si $G_n^0=H_n$ est son polaire dans H, G_n est aussi le dual du quotient H/H_n; comme il est de dimension finie, la norme d'un point de G_n est la borne supérieure du module de son produit scalaire avec les éléments d'une partie dénombrable de la boule unité de H/H_n, ou aussi, en les relevant, d'une partie dénombrable N_n de la boule unité de H. Pour tout point ω de Ω, la norme de n'importe quel $\varphi_n(\omega)$ est donc aussi Sup $|\langle\varphi_n(\omega), \xi\rangle|$ lorsque ξ parcourt $N=\bigcup_n N_n$; ou encore il existe un sous-espace de Banach séparable $\tilde{H}$ de H tel que, pour tout ω et tout n, la norme de $\varphi_n(\omega)$ soit égale à la borne supérieure

[36] ${}^tu$ applique H dans E', mais n'est peut être pas continue, par exemple pour $E=\sigma(F', F)$, $E'=F$, où on sait seulement qu'elle est continue de H dans F_N. C'est pourquoi nous écrivons $\mathscr{L}_s(H; L^0(\Omega, \mu))$, c'est l'espace $\mathscr{L}$ muni de la topologie de la convergence simple sur H.

des modules de ses produits scalaires avec les éléments de la boule unité de $\tilde{H}$; ou encore la norme de $\varphi_n(\omega)$ est celle de son image dans $\tilde{H}'$, dual de $\tilde{H}$, quotient de H' par le polaire de $\tilde{H}$. On est donc ramené à remplacer $u: E \to \sigma(H', H)$ par la composée $u: E \to \sigma(H', H) \to \sigma(\tilde{H}', \tilde{H})$; comme $\tilde{H}$ est un Banach séparable, le résultat est démontré.

Soit maintenant G un Banach. On suppose seulement que u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$; cela entraîne la continuité de $\varphi \mapsto u \circ \varphi$, lorsque l'on prend pour $u \circ \varphi$ la convergence dans $L^0(\Omega, \mu; G''$ fort); mais comme les $u \circ \varphi$ prennent leurs valeurs dans G, cela revient à leur convergence dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, d'où le résultat.

Il ne reste plus que le cas où G est un quasi-Banach. Avant d'y venir, remarquons un fait général. Nous n'avons montré l'existence d'une correspondance $f \to \phi_f$ de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; \sigma(H', H))$ que pour H Banach séparable. Mais nous pouvons maintenant dire qu'elle existe pour H quelconque et qu'elle est même continue de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; H')$. En effet, a posteriori, si u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(H', H)$, $\varphi^* \mapsto u \circ \varphi$ est linéaire continue de $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(E', L^0(\Omega, \mu))$ dans $L^0(\Omega, \mu; H')$; elle se prolonge donc de manière unique, $L^0(\Omega, \mu; H')$ étant complet, en une application linéaire continue de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; H')$; l'égalité $\phi_f^* = f \circ {}^t u$ étant vraie pour $f \in \mathscr{A}$ est vraie pour $f \in \bar{\mathscr{A}}$ par continuité, les deux membres dépendant continuement de $f \in \bar{\mathscr{A}}$ à valeurs dans $\mathscr{L}_s(H'; L^0(\Omega, \mu))$. De la même manière, pour G Banach, il existe une application $\mathscr{A} \to L^0(\Omega, \mu; G'')$ donc $\bar{\mathscr{A}} \to L^0(\Omega, \mu; G)$, avec la même propriété. Dans tous les cas, si λ_f est la probabilité cylindrique associée à f, celle qui est associée à ϕ_f, c. à d. $\lambda_{f \circ {}^t u} = \phi_f(\mu)$, est $u(\lambda_f)$; en effet, c'est vrai pour $f \in \mathscr{A}$, et les deux membres dépendent continuement de $f \in \bar{\mathscr{A}}$ à valeurs dans

$$\check{\mathscr{P}}(\sigma(H', H)) \quad \text{ou} \quad \check{\mathscr{P}}(\sigma(G, G')) .$$

Passons alors au dernier cas, G quasi-Banach. Nous allons appliquer les cas antérieurs, et appliquer encore une fois le théorème du graphe fermé. Supposons u approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Elle est a fortiori approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma((\hat{G}_N)'', (\hat{G}_N)')$; donc à tout $f \in \bar{\mathscr{A}}$ on peut associer $\phi_f \in L^0(\Omega, \mu; \hat{G}_N)$, avec $\phi_f^* = f \circ {}^t u$, $u(\lambda_f) = \phi_f(\mu)$, et $f \to \phi_f$ est linéaire continue. Mais nous savons que λ_f est de type 0 très approximable; donc $u(\lambda_f)$ est de Radon sur $\sigma(G'', G')$, et portée par le sous-espace vectoriel Γ engendré par l'adhérence B'' de la boule unité B de G; donc ϕ_f prend ses valeurs dans cet espace Γ. Donc $\phi_f \in L^0(\Omega, \mu; \sigma(G'', G'))$, pour l'espace bitopologique $\sigma(G'', G')$.

L'espace $\Gamma_{B''}$ est complet, pour sa quasi-norme, puisque sa boule unité B''

est compacte donc complète dans Γ. Donc la proposition (0.3) dit que $L^0(\Omega, \mu; \sigma(G'', G'))$ est complet. Or $f \mapsto \phi_f$ est linéaire de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; \sigma(G'', G'))$ et son graphe est fermé, puisqu'elle est continue de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; (G_N)'')$ moins fin que $L^0(\Omega, \mu; \sigma(G'', G'))$. Donc $f \mapsto \phi_f$ est continue de $\bar{\mathscr{A}}$ dans $L^0(\Omega, \mu; \sigma(G'', G'))$ et a fortiori continue de $\mathscr{A}$ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE (4.4 bis) (extension à $p=0$ du corollaire (3.5 ter)).

Soit u une application linéaire faiblement continue de $\sigma(F', F)$, F Banach, dans G. Elle est approximativement 0-radonifiante de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$, si et seulement si elle l'est de F' dans $\sigma(G'', G')$.

DÉMONSTRATION. Soit λ une combinaison linéaire finie de masses ponctuelles, $\lambda = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} c_n \delta_{(a_n)}$, $\sum_n c_n = 1$, $a_n \in F'$. On sait, par (2.1.7 bis), que

$$\text{(4.4 ter)} \qquad \operatorname*{Sup}_{\xi \in F, \|\xi\| \leqslant 1} J_\alpha(\xi(\lambda)) = \operatorname*{Sup}_{\xi'' \in F'', \|\xi''\| \leqslant 1} J_\alpha(\xi''(\lambda)) .$$

Cela signifie que $J_\alpha^*(\lambda)$ a la même valeur, qu'on considère λ comme probabilité cylindrique sur F' ou sur $\sigma(F', F)$. La condition (4.2) est alors la même dans les deux cas, ce qui démontre le corollaire, d'après le théorème (4.1).

(4.5) *La condition de Pietsch.*

PROPOSITION (4.6). *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Supposons qu'il existe une probabilité ν sur un espace topologique X, et une application linéaire continue v de norme $\leqslant 1$ de $E_N = (E$ ou $F')$ dans $L^\infty(X, \nu)$, telle que, dans le cas où $E = \sigma(F', F)$, ${}^t v$ envoie la boule unité de $(L^\infty(X, \nu))'$ dans l'adhérence, dans $\sigma(F'', F')$, de la boule unité de F, et que d'autre part, la convergence de $v(e)$, $e \in E$, vers 0 dans $L^0(X, \nu)$ entraîne la convergence de $u(e)$ vers 0 dans G ou H'. Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. La condition de l'énoncé signifie qu'il existe un α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, et un $R > 0$ fini tels que*

$$\text{(4.7)} \qquad \|u(e)\| \leqslant R J_{\alpha_0}(\nu, v(e)) ;$$

alors la condition (4.2) *est réalisée comme suit: pour tout β, $0 < \beta < 1$, on a*

$$\text{(4.8)} \qquad J_\beta(u(\lambda)) \leqslant R J^*_{\alpha_0 \beta}(\lambda) .$$

DÉMONSTRATION. Il suffit naturellement de démontrer la dernière propriété; en effet, (4.7) traduit exactement la propriété de convergence antérieure, compte tenu de la définition des voisinages de 0 dans $L^0(X, \nu)$, et (4.8) entraînera (4.2), avec $M = R$, $\alpha = \alpha_0 \beta$, d'où le résultat par le théorème fondamental (4.1). Il est numériquement intéressant de constater que les quantités α, M, ont une forme très spécialle; $M = R$ est indépendant de β, et $\alpha = \alpha_0 \beta$ est proportionnel à β. On procède d'abord comme dans le cas $p>0$, proposition (3.6), avec les mêmes notations: X est compact, v envoie E dans $C(X)$, et ${}^t v$ envoie la boule unité de $M(X)$ dans la boule unité de E' ou l'adhérence, dans $\sigma(F'', F')$, de la boule unité de F. Soit λ une combinaison finie de masses ponctuelles, $\lambda=\sum_n c_n \delta_{(a_n)}$, sur E; cherchons à quelle condition $J_\beta(u(\lambda))\leqslant R$, ou

$$\lambda\{e\in E;\ \|u(B)\|>R\}=\sum_{\|u(a_n)\|>R} c_n\leqslant\beta\ . \tag{4.9}$$

D'après l'inégalité (4.7), $\|u(e)\|>R$ implique $J_{\alpha_0}(\nu, v(e))>1$; donc (4.9) sera sûrement réalisée si l'on a

$$\lambda\{e\in E;\ J_{\alpha_0}(\nu, v(e))>1\}\leqslant\beta\ , \tag{4.10}$$

ou

$$\lambda\{e\in E;\ \nu\{x\in X;\ |(v(e))(x)|>1\}>\alpha_0\}\leqslant\beta\ . \tag{4.11}$$

Il est facile d'utiliser le théorème de Fubini. Nous avons une probabilité ν sur X, une probabilité λ discrète sur E, et nous considérons sur $X\times E$ la mesure $\nu\otimes\lambda$; soit Y l'ensemble des (x, e) tels que $|(v(e))(x)|>1$ ou $|\langle {}^t v(x), e\rangle|>1$. L'application de Fubini ne pose pas de problème, la fonction $(e, x)\mapsto(v(e))(x)$ étant continue. Alors (4.11) s'écrit, en designant par Y_e l'ensemble $\{x\in X;\ (x, e)\in Y\}$:

$$\lambda\{e\in E;\ \nu(Y_e)>\alpha_0\}\leqslant\beta\ . \tag{4.12}$$

Mais alors (4.12) sera sûrement vraie si

$$(\lambda\otimes\nu)(Y)\leqslant\alpha_0\beta\ .$$

Et à son tour cette inégalité sera sûrement vraie si $\lambda(Y_x)\leqslant\alpha_0\beta$ pour tout $x\in X$, où $Y_x=\{e\in E;\ (x, e)\in Y\}$. Mais $\lambda(Y_x)=\lambda\{e\in E;\ |\langle {}^t v(x), e\rangle|>1\}$ est la mesure, pour $(|{}^t v(x)|)(\lambda)\subset\mathscr{P}(\boldsymbol{R}_+)$, de $]1, +\infty]$; donc $\lambda(Y_x)\leqslant\alpha_0\beta$ équivaut à $J_{\alpha_0\beta}(({}^t v(x))(\lambda))\leqslant 1$. Comme ${}^t v(x)$ est dans la boule unité de E' ou l'adhérence dans $\sigma(F'', F')$ de la boule unité de F, (4.14) sera sûrement réalisé si

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{\xi\in E' \text{ ou } F\\ \|\xi\|\leqslant 1}} J_{\alpha_0\beta}(\xi(\lambda)) \quad \text{ou} \quad J^*_{\alpha_0\beta}(\lambda)\leqslant 1\ ,$$

ce qui donne bien (4.8). CQFD.

RÉCIPROQUE (4.12.1) (SUNYACH). [37]

Soit u une application linéaire faiblement continue 0*-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Alors il existe un espace X, une probabilité ν sur X, et une application linéaire continue v de E dans $L^\infty(X, \nu)$ vérifiant toutes les conditions énoncées dans* (4.6). *Si, pour $0<\alpha_0'<1$, $0<\beta_0'<1$, M_0', on a l'inégalité* (4.2)

[37] SUNYACH [1].

pour des λ combinaisons finies de masses ponctuelles, alors on peut prendre pour X la boule unité de E' ou l'adhérence, dans $\sigma(F'', F')$, de la boule unité de F, pour v l'application canonique définie par $(v(e))(\xi)=\langle e, \xi\rangle$, et trouver une probabilité ν pour laquelle on ait (4.7) *avec un $R=M_0$, nombre donné $>M_0'$, et un α_0 donné $<\alpha_0'$* [38].

DÉMONSTRATION. Supposons donc (4.2) réalisée. Alors $J_{\beta_0'}(u(\lambda))>M_0'$ entraîne

$$(4.12.2) \qquad \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} J_{\alpha_0'}(\xi(\lambda))>1 , \quad \text{ou} \quad \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} (|\xi(\lambda)|)(]1, +\infty])>\alpha_0' .$$

Nous aurons besoin, pour trouver une probabilité sur l'espace X décrit ci-dessus, d'introduire des fonctions continues; il faut donc remplacer la fonction caractéristique de $]1, +\infty]$ par une fonction continue. Soit donc h une fonction continue sur $\boldsymbol{R}$, $0\leqslant h\leqslant 1$, égale à 0 dans $[-a, +a]$, $0<a<1$, et à 1 dans le complémentaire de $]-1, +1[$. Alore $J_{\beta_0'}(u(\lambda))>M_0'$ entraîne

$$(4.12.3) \qquad \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} (\xi(\lambda))(h)>\alpha_0' \quad \text{ou} \quad \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \int_E h(\langle \xi, e\rangle)d\lambda(e)>\alpha_0' .$$

Sur l'espace $C(X)$ des fonctions réelles continues sur X (X est muni de la topologie $\sigma(E', E)$ ou $\sigma(F'', F')$), considérons alors les deux ensembles suivants:

1) l'ouvert U formé des $g\in C(X)$ telles que $\operatorname{Max} g<\alpha_0'$,
2) l'ensemble K des $g\in C(X)$ de la forme

$$g(\xi)=\int_E h(\langle \xi, e\rangle)d\lambda(e) , \quad \text{avec} \quad J_{\beta_0'}(u(\lambda))>M_0' \quad (g\geqslant 0) .$$

L'ouvert U est convexe. L'ensemble K est aussi convexe; en effet, l'ensemble des λ vérifiant $J_{\beta_0'}(u(\lambda))>M_0'$ est convexe, car cette inégalité équivaut à dire que la λ-mesure de l'ensemble $\{e\in E; \|u(e)\|>M_0'\}$ est $>\beta_0'$, et la fonction

$$\lambda \mapsto \int h(\langle \xi, e\rangle)d\lambda(e)$$

est affine, donc K, image d'un convexe par une application affine, est convexe.

Enfin U et K sont disjoints à cause de (4.12.3). Donc ils peuvent être séparés par une forme linéaire continue (Hahn-Banach), soit $\nu\in M(X)$, vérifiant $\nu(g)<\alpha_0'$ pour toute $g\in U$, et $\nu(g)\geqslant\alpha_0'$ pour toute $g\in K$. La première inégalité montre que $\nu\geqslant 0$, car, si $g\leqslant 0$, tous ses multiples sont dans U, donc $\nu(g)\leqslant 0$; en outre, en faisant $g=$constante $<\alpha_0'$, on voit que $\nu(1)\leqslant 1$. La deuxième inégalité donne, pour toute λ, combinaison finie de masses ponctuelles telle que $J_{\beta_0'}(u(\lambda))>M_0'$:

[38] Pour M_0 et α_0 fixés on peut trouver ν; ν dépend de M_0 et α_0, et n'a pas de raison d'être unique.

$$\int_X d\nu(\xi) \int_E h(\langle \xi, e\rangle) d\lambda(e) \geqslant \alpha_0' ,$$

donc a fortiori

$$\int_X d\nu(\xi) \lambda\{e \in E ; |\langle \xi, e\rangle| > a\} \geqslant \alpha_0' .$$

En particulier, prenons $\lambda = \delta_{(y)}$, $y \in E$, donc $J_{\beta_0'}(u(\delta_y)) = \|u(y)\|$. Alors, pour ξ donné, $\lambda\{e \in E ; |\langle \xi, e\rangle| > a\}$ vaut 0 ou 1 selon que $|\langle \xi, y\rangle| \leqslant a$ ou $> a$. Donc $\|u(y)\| > M_0'$ entraîne

$$\int_{|\langle \xi, y\rangle| > a} d\nu(\xi) \geqslant \alpha_0' , \quad \text{donc} \quad > \alpha_0 ,$$

pour n'importe quel $\alpha_0 < \alpha_0'$, ou $J_{\alpha_0}(y(\nu)) > a$.

Alors $J_{\alpha_0}(y(\nu)) \leqslant a$ impliquera $\|u(y)\| \leqslant M_0'$, et on aura l'inégalité

(4.12.4) $$\|u(y)\| \leqslant \frac{M_0'}{a} J_{\alpha_0}(y(\nu)) ,$$

ce qui est exactement (4.7), avec $R = M_0'/a = M_0$, nombre arbitraire $> M_0'$, et α_0, nombre arbitraire $< \alpha_0'$. (On ne peut pas nécessairement remplacer M_0 par M_0', ni α_0 par α_0', car $\alpha \mapsto J_\alpha(y(\nu))$, pour y et ν donnés, peut être discontinue à gauche au point α_0', et d'autre part la probabilité ν trouvée dépendait du choix de la fonction h donc de $a < 1$.)

COROLLAIRE (4.12.5). *Si on a une inégalité* (4.2), *pour un système particulier* α_0', β_0', M_0', *pour toutes les* λ *combinaisons finies de masses ponctuelles, alors* u *est approximativement* 0*-radonifiante de* E *dans* $\sigma(G'', G')$; *alors on a la même inégalité* (4.2), *avec* $J^{*a}_{\alpha_0}(\lambda)$ *au lieu de* $J^{*}_{\alpha_0'}(\lambda)$ *au* 2^e *membre, pour toute* λ *cylindrique de type* 0 *approximable, et, pour tout* β, *on aura une inégalité analogue, avec* $M = M_0'$, $\alpha = \alpha_0 \beta$, α_0 *nombre arbitraire* $< \alpha_0'$.

Ceci est évidemment une amélioration considérable, et d'ailleurs assez surprenante, de l'implication $3 \Longrightarrow 1$ du théorème (4.1). Noter que, pour β quelconque, le M qu'on trouve est indépendant de β, et le α est proportionnel à β; la valeur de β_0' n'intervient pas.

DÉMONSTRATION. A partir du système α_0', β_0', M_0', on trouve une probabilité ν sur X suivant la proposition (4.12.1), donc une inégalité (4.7), avec $R = M_0 > M_0'$, et $\alpha < \alpha_0$. Alors (4.8) donne, pour β quelconque, $J_\beta(u(\lambda)) \leqslant M_0 J^*_{\alpha_0\beta}(\lambda)$; ceci étant vrai pour tout $M_0 > M_0'$, on a aussi

(4.12.6) $$J_\beta(u(\lambda)) \leqslant M_0' J^*_{\alpha_0\beta}(\lambda) .$$

Par contre, on ne peut sans doute pas remplacer α_0 par α_0'. Assez curieusement, (4.12.6) ne redonne pas l'inégalité de départ pour $\beta=\beta_0'$; elle remplace α_0' par $\alpha_0\beta$. Par contre, si λ est cylindrique de type 0 approximable, elle vérifie sûrement l'inégalité $J_\beta(u(\lambda))\leqslant M_0' J^{*\alpha}_{\alpha_0}(\lambda)$, puisqu'on sait maintenant que $u(\lambda)$ est de Radon (voir fin de la partie A de la démonstration du théorème (4.1)).

PROPOSITION (4.12.7). *Pour que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il faut et il suffit qu'elle admette une factorisation*

$$\begin{tikzcd} E_N \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^\infty(X,\nu) \arrow[r, "j"] & L^0(X,\nu) \\ & L \arrow[ur, hook, "j'"] \arrow[dr, "u_2"'] & \\ & & G \text{ ou } H' \end{tikzcd}$$

où v a les propriétés énoncées dans la proposition (4.6), *où j est l'injection canonique, j' l'injection canonique, dans $L^0(X,\nu)$, d'un sous-espace vectoriel fermé L muni de la topologie induite, u_1 et u_2 sont continues.*

Même démonstration que pour le 2) de la proposition (3.6), en utilisant les propositions (4.6) et (4.12.1).

PROPOSITION (4.13) (KWAPIEN) [39]. *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Supposons que, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type p approximable, $p>0$, $u(\lambda)$ soit de Radon sur G (resp. $\sigma(G'', G')$) (sans qu'on la suppose d'ordre p). Alors u est approximativement p-radonifiante de E dans G (resp. $\sigma(G'', G')$).*

DÉMONSTRATION. En utilisant la même méthode que dans la partie F) de la démonstration du théorème (4.1), on prouvera, par le théorème du graphe fermé, que la condition de l'énoncé entraîne ceci: l'application $\varphi^*\mapsto u\circ\varphi$ est continue de $\mathscr{A}_p$ dans $L^0(\Omega, \mu; G)$, où $\mathscr{A}_p$ est l'espace des applications μ-étagées de Ω dans E, muni de la topologie induite par $\mathscr{L}(E'; L^p(\Omega, \mu))$.

Puisque cette application est continue, si B est un poids quelconque (non nécessairement homogène) plus faible que L^0 (voir (1.12 bis), il existe $R>0$ fini tel que $\|\varphi^*\|_p\leqslant R$ entraîne $B(\mu, u\circ\varphi)\leqslant 1/2$. Prenons en particulier pour poids celui de l'exemple (1.7), c. à d. le poids

$$\nu\mapsto\int_{\bar{R}_+}\operatorname{Inf}(1, t)d\nu(t)\ .$$

([39]) KWAPIEN [1].

Montrons maintenant que u est p-sommante. Soit $(a_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une suite finie de points de E, avec $\|a\|_p^* \leqslant R$. On peut toujours supposer tous les $u(a_n)\neq 0$; nous allons montrer que $\|u(a)\|_p \leqslant 1/2$. Soit $(c_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une suite quelconque de nombres >0, de somme 1, et $\Omega = \bigcup_{n\leqslant N} \Omega_n$ une partition de Ω en parties μ-mesurables Ω_n de mesures c_n, ce qui est toujours possible puisque μ est diffuse. Soit φ la fonction étagée, égale à $(1/c_n^{1/p})\cdot a_n$ sur Ω_n. On aura

$$\|\varphi^*\|_p = \operatorname*{Sup}_{\|\xi\|\leqslant 1} \|\langle a, \xi\rangle\|_{l^p} = \|a\|_p^* \leqslant R\,.$$

On en déduira donc

$$\int_\Omega \operatorname{Inf}(1, \|u(\varphi(\omega))\|)\,d\mu(\omega) \leqslant \frac{1}{2}\,, \tag{4.14}$$

c. à d.

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant N} c_n \operatorname{Inf}\left(1, \frac{1}{c_n^{1/p}}\|u(a_n)\|\right) \leqslant \frac{1}{2}\,. \tag{4.15}$$

Cette inégalité est valable quels que soient les c_n, avec $c_n>0$, $\sum_{0\leqslant n\leqslant N} c_n = 1$. Prenons

$$c_n = \frac{\|u(a_n)\|^p}{\|u(a)\|^p_{l^p(E)}}\,. \tag{4.16}$$

Alors

$$\frac{1}{c_n^{1/p}}\|u(a_n)\| = \|u(a)\|_p\,.$$

Alors (4.15) devient simplement, puisque $\sum c_n = 1$:

$$\operatorname{Inf}(1, \|u(a)\|_p) \leqslant \frac{1}{2}\,, \quad \text{donc} \quad \|u(a)\|_p \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

On en déduit bien que u est p-sommante, avec $\pi_p(u) \leqslant 1/2R$.

On déduit alors du théorème (3.4) que u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Si donc λ est une probabilité cylindrique de type p approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p dans $\sigma(G'', G')$; si en outre on ait déjà qu'elle est de Radon dans G, u est approximativement p-radonifiante de E dans G.

CQFD.

COROLLAIRE (4.17). *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G, approximativement* 0*-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Elle est approximativement q-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$ pour tout $q\geqslant 0$; en outre elle est continue de E ou F' dans G ou H', et l'image de la boule unité est* *relativement compacte dans* $\sigma(G, G')$ *ou* $\sigma(H', H'')$. *Si* u *est approximativement* 0*-radonifiante de* E *dans* G *lui-même, elle est approximativement* q*-radonifiante de* E *dans* G *pour tout* $q \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. L'application u transformera toute probabilité cylindrique de type q approximable en une probabilité de Radon sur G ou $\sigma(G'', G')$, le théorème de Kwapien précédent dit donc qu'elle la transforme en une probabilité de Radon d'ordre q. La propriété de compacité et de continuité est alors ((3.5 quinto), remarque à la démonstration de 2) la conséquence du théorème de PIETSCH (3.6).

(4.18) *Absence d'intérêt des applications* (p, q)*-radonifiantes.*

Une application $u : E \to G$ est dite (p, q)-sommante, si l'image par u de toute suite scalairement l^p de E est une suite absolument l^q dans G; $p>0$, $q>0$ (40). Une telle application est forcément nulle si $q<p$; soit en effet $a \in E$; pour toute suite $(c_n)_{n \in N} \in l^p$, la suite $(ac_n)_{n \in N}$ est l^p donc scalairement l^q; on en déduira que la suite $(u(a)c_n)_{n \in N}$ est absolument l^q; comme une suite $(c_n)_{n \in N}$ qui est l^p n'est pas nécessairement l^q si $q<p$, on a $u(a)=0$. Mais, pour $p \geqslant q$, il existe une théorie fructueuse des applications (p, q)-sommantes.

Au contraire, il n'y a aucune théorie intéressante des applications (p, q)-radonifiantes. Une telle application est nulle cette fois si $q>p$; en effet, prenons pour λ l'image, par l'application $t \mapsto ta$ de $\boldsymbol{R}$ dans E, de la probabilité μ sur $\boldsymbol{R}$, avec $\|\mu\|_p < +\infty$. Alors λ est de Radon d'ordre p donc a fortiori de type p; on en déduira que $u(\lambda)$ est d'ordre q, c. à d. que $\|u(a)\| \, \|\mu\|_q < +\infty$; comme une probabilité d'ordre p sur $\boldsymbol{R}$ n'est pas nécessairement d'ordre q, on a $u(a)=0$. Il ne reste donc à étudier que les applications (p, q)-radonifiantes, pour $q \leqslant p$; mais la proposition (4.13) dit qu'une telle application est approximativement p-radonifiante, c. à d. approximativement (p, p)-radonifiante.

Cette différence tient à la différence essentielle entre les espaces l^p, qui sont des L^p par rapport à la mesure discrète infinie $\sum_{n \in N} \delta_{(n)}$ sur N, et les L^p par rapport à des mesures de masse 1. Si l'on introduisait des espaces L^p par rapport à des mesures de masse infinie et diffuses, on trouverait que toute application "(p, q)-intégrante" est nulle. Seuls les l donnent donc une étude intéressante pour $q \neq p$.

COROLLAIRE (4.18 bis). *Soit* u *une application linéaire faiblement continue de* E *dans* G, *approximativement* 0*-radonifiante de* E *dans* $\sigma(G'', G')$. *Alors elle est approximativement* q*-radonifiante pour tout* $q \geqslant 0$, *et en outre, si l'on a* (4.7), *on a*

(40) KWAPIEN [2].

(4.18 ter) $$\pi_q(u) \leqslant R\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{1/q}.$$

DÉMONSTRATION. Reprenons les notations de la proposition (4.5). Pour tout q fini >0, et tout $e \in E$, $c \geqslant 0$:

(4.18 quarto) $$\int_X |(v(e))(x)|^q d\nu(x) \geqslant c^q \nu\{x \in X;\ |(v(e))(x)| > c\}.$$

Prenons $c < J_{\alpha_0}(\nu, v(e))$, alors

$$\nu\{x \in X;\ |(v(e))(x)| > c\} > \alpha_0,$$

donc on a

$$\int_X |(v(e))(x)|^q d\nu(x) \geqslant c^q \alpha_0;$$

ceci était vrai pour tout $c < J_{\alpha_0}(\nu, v(e))$, on aura

(4.18 quinto) $$\int_X |(v(e))(x)|^q d\nu(x) \geqslant \alpha_0 (J_{\alpha_0}(\nu, v(e)))^q.$$

Alors, de (4.7) on déduira

(4.18 sexto) $$\|u(e)\| \leqslant R\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{1/q} \|v(e)\|_{L^q(X,\nu)},$$

qui reste évidemment vrai pour q infini. Alors le théorème (3.6) montre que u est approximativement q-radonifiante (ce qui est donc une autre démonstration du corollaire (4.17)), et l'inégalité (3.7) avec $\pi_q(u) \leqslant M$ montre que

$$\pi_q(u) \leqslant R\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{1/q}, \text{ (41)}$$ CQFD.

PROPOSITION (4.19). *Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Si elle est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, elle l'est de E dans G lui-même, si G est un Banach réflexif, ou si G est un Banach séparable, dual d'un Banach.*

La démonstration est la même que celle de la proposition (3.9).

PROPOSITION (4.20). *Soit $u: E \to G$, approximativement 0-radonifiante de E dans G. Alors, si le couple (E, E') a la propriété d'approximation métrique, elle est 0-radonifiante de E dans G.*

En effet, toute probabilité cylindrique de type 0 est alors de type 0 approxi-

(41) Un résultat récent de MAUREY [3] montre que, si u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, $\pi_p(u)$ tend toujours vers une limite finie quand p tend vers 0.

mable (corollaire (2.11), partie 2)).

(4.21) *Quelques contre-exemples et problèmes ouverts.*

1) En général nous avons pu montrer que u était "approximativement radonifiante", et non "radonifiante", sauf avec des hypothèses d'approximation. Comme personne ne sait si ces hypothèses d'approximation sont toujours vérifiées ou non, on ne peut évidemment pas montrer, par des contre-exemples, que ces hypothèses sont indispensables. Il serait quand même intéressant de s'en débarrasser; je doute qu'on y parvienne simplement.

2) En général nous avons dû mettre $\sigma(G'', G')$, au lieu de G lui-même (sauf dans des cas signalés aux propositions (3.9) et (4.19)). Si $p=+\infty$, il est trivial que c'est en général inévitable; nous l'avons indiqué à la remarque après la démonstration du point 2) de la proposition (3.9). Si $p=1$, on ne peut pas non plus en général mettre G à la place de $\sigma(G'', G')$. Considérons par exemple l'application canonique de $C(X)$ dans $L^1(X, \nu)$, où X est un compact et ν une probabilité de Radon sur X; elle est 1-sommante, montrons qu'elle n'est pas 1-radonifiante, si ν n'est pas atomique.

Pour abréger, écrivons C, L^1, au lieu de $C(X)$, $L^1(X, \nu)$. Il existe un homéomorphisme canonique $\delta: x \mapsto \delta_{(x)}$, de X sur un compact $\tilde{X}$ du dual $\sigma(M, C)$ de C. L'image par δ de la probabilité ν est une probabilité $\tilde{\nu}$ sur $\tilde{X}$ donc sur $\sigma(M, C)$; on l'appelle la probabilité canonique de $\sigma(M, C)$ définie par ν. On peut la définir par la méthode des fonctions aléatoires. Prenons $\Omega=X, \mu=\nu$. Alors $\delta: x \mapsto \delta_{(x)}$ est une application continue donc μ-mesurable de Ω dans $\sigma(M, C)$, et on a justement $\tilde{\nu}=\varphi(\mu)$. On introduira alors l'application $\varphi^*=f_\varphi$ de C (dual de $\sigma(M, C)$) dans $L^\infty(\Omega, \mu)$, qui est $\xi \mapsto \langle\varphi, \xi\rangle$; si $\xi \in C$, $\langle\varphi, \xi\rangle$ n'est autre que ξ elle-même, ou plus exactement son image $\xi^{\cdot}$ dans $L^\infty \subset L^0$. Bien entendu, $\tilde{\nu}$ est d'ordre $+\infty$, puisqu'elle est portée par la boule unité, et $\|\tilde{\nu}\|_{+\infty}=1$.

Mais alors φ^* se "prolonge" trivialement à M; pour toute mesure $m \in M$, appelons m/ν la densité de la partie absolument continue de m par rapport à ν; alors $F: m \mapsto m/\nu$ est une application linéaire continue de M dans $L^1(\Omega, \mu)$, qui "prolonge" φ^* au sens évident suivant: sa composée avec l'application canonique de C dans M (c. à d. $\xi \mapsto \xi\nu$; ce n'est pas nécessairement une injection, donc le mot prolonger est abusif, c'est pourquoi nous l'avons mis entre guillemets) est φ^* (car $\xi\nu/\nu=$classe $\xi^{\cdot}$ de ξ dans L^1). Elle définit donc une fonction aléatoire F sur le dual M de C, donc une probabilité cylindrique $\lambda_F=\lambda$ sur C, qui sera appelée probabilité cylindrique canonique de C définie par ν. Et puisque F prolonge φ^*, cela signifie que λ a pour image $\tilde{\nu}$ par l'application canonique autotransposée $C \to \sigma(M, C)$, $\xi \mapsto \xi\nu$. Il n'est d'ailleurs pas étonnant que l'image de F par $C \to \sigma(M, C)$ soit de Radon, car cette application, qui se factorise par $C \xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{\cdot}} L^1 \xrightarrow{g \mapsto g\nu} \sigma(M, C)$, est 1-sommante, $\lambda=\lambda_F$

est évidemment de type 1, avec $\|\lambda\|_1^* = \|F\|_{\mathscr{L}(M;L^1)} = 1$, et $L^1 \subsetneq \sigma(M, C)$ est faiblement compacte. Si alors $C \to L_1$, $\xi \mapsto \xi^\cdot$, était radonifiante, déjà l'image de λ dans L^1 devrait être de Radon; son image $\tilde{\nu}$ dans M serait alors portée par νL^1 (image de L^1 dans M). Donc φ devrait prendre μ-presque toutes ses valeurs dans νL^1, ou encore ν-presque tout $\widetilde{X}$ devrait être dans νL^1. Or $\delta_{(x)}$ n'est dans νL^1 que si ν possède une masse au point x: donc ν-presque tout point x de X devrait porter une masse pour ν, qui serait atomique, contrairement à l'hypothèse. Donc il est bien prouvé que $C \to L^1$, 1-sommante, n'est pas 1-radonifiante, si ν n'est pas atomique.

REMARQUE. A fortiori, l'image de λ par $C \xrightarrow{j_p} L^p$, $p>1$, n'est pas de Radon. On sait que $C \to L^p$ est p-radonifiante, mais λ n'est pas de type $p>1$. La fonction aléatoire associée à l'image de λ dans L^p est l'application identique de $L^{p'}$ dans $L^{p'}$; elle est continue de $L^{p'}$ dans $L^{p'}$, de norme 1; donc l'image de λ, probabilité cylindrique de type 1, est une probabilité cylindrique de type p' dans L^p, avec $\|\lambda\|_{p'}^* = 1$ dans L^p. C'est encore vrai pour $p=1$ ou $+\infty$; et son image dans $\sigma(M, C)$ est de Radon, d'ordre $+\infty$. On peut aussi dire que, pour ν non atomique, l'application canonique de L'_p dans L^0 n'est jamais décomposée, pour $p \geqslant 1$; alors que l'application canonique de C dans L^∞ est décomposée par φ.

3) Pour tout $p \geqslant 1$, on connaît des applications qui sont p-radonifiantes, et ne sont pas q-radonifiantes pour $q<p$. Des exemples ont été donnés par PIETSCH pour $p>1$. Pour $p=1$, on remarquera que tout opérateur nucléaire est 1-radonifiant; (corollaire (3.8.4); mais si l'on considère l'application diagonale $(x_n)_{n \in N} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in N}$ de c^0 dans l^1, qui est nucléaire pour $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$, on démontre (42) qu'elle n'est pas q-radonifiante pour $q<1$ si $\sum |\alpha_n| \log 1/|\alpha_n| = +\infty$. D'autre part on connaît des applications 0-radonifiantes. Mais, si E est un Banach ou un dual $*$-faible de Banach, il n'existe pas d'application linéaire faiblement continue, qui soit p-radonifiante pour un $p<1$, sans être 0-radonifiante, donc q-radonifiante pour tout $q \geqslant 0$. C'est un résultat qui vient d'être trouvé par Simone CHEVET [1] et MAUREY [3].

Si E est un dual $*$-faible $\sigma(F', F)$ d'un quasi-Banach F, alors on a facilement des exemples (voir remarque après la prop. (3.8.2)).

4) Soient E, G des Banach, et supposons que $u: E \to G$ soit approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G)$. Alors, si l'on part de $p \geqslant 1$, elle est toujours approximativement q-radonifiante de E dans G lui-même pour tout $q>p$; cela résulte de la proposition (3.9), 3). Le même résultat subsiste-t-il si l'on part de p quelconque? Dans ce cas, on en déduirait en fait, en négligeant les cas inexistants de $0<p<1$, que, si u est approximativement 0-radonifiante de E dans

(42) SCHWARTZ [2].

$\sigma(G'', G)$, elle est toujours approximativement q-radonifiante de E dans G lui-même, pour tout $q>0$. C'est ce que vérifient, semble-t-il, tous les exemples connus, avec même $q\geqslant 0$!

5) L'application $p\mapsto \pi_p(u)$ est continue sur $]0, +\infty]$, si u est un opérateur de Hilbert-Schmidt entre deux espaces hilbertiens (Voir plus loin, prop. (5.20.1)). Plus généralement, si E et G sont par exemple des Banach, et si u est p_0-sommante de E dans G, $p\mapsto \pi_p(u)$ est-elle continue sur $[p_0, +\infty]$? [43]

§ 5. Le théorème de dualité.

(5.1). *Le cotype.*

Soient E un espace vectoriel topologique séparé par son dual, Φ un poids, θ' une fonction $\geqslant 0$ sur E', finie ou non. On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de cotype (Φ, θ') (on devrait plutôt dire antitype ou type inverse, plutôt que cotype qui invoque une dualité inexistante avec le type; mais l'un sonne mal et l'autre est trop long, et j'ai à contre-coeur adopté antérieurement cotype), *si, pour tout $\xi\in E'$,*

$$\theta'(\xi)\leqslant\Phi(\xi(\lambda)) \quad . \tag{5.2}$$

Elle est alors a fortiori de cotype $(\bar\Phi, \bar\theta')$, si $\bar\Phi\geqslant\Phi$ et $\bar\theta'\leqslant\theta'$. On peut alors diversifier cette notion comme on l'a fait pour le type, en inversant toutes les propriétés.

Si Φ est un poids homogène, et si $E'_{\mathfrak{S}}$ est une topologie vectorielle sur E', *λ sera de cotype Φ, si, quel que soit le voisinage fermé V de 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, il existe $M\geqslant 0$ fini tel que $\theta'_V(\xi)\leqslant M\Phi(\xi(\lambda))$ pour tout $\xi\in E'$*: ou encore, si, *lorsque $\Phi(\xi(\lambda))$ tend vers 0, ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$.*

On adapte immédiatement au cas $\Phi=\|\ \|_p$, $p>0$. On dira ensuite que *λ est de cotype 0, relativement à $E'_{\mathfrak{S}}$, si, lorsque $\xi(\lambda)$ tend vers δ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$, ξ tend vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$*; c. à d. *si, pour tout voisinage de 0 fermé V dans $E'_{\mathfrak{S}}$, il existe un $M\geqslant 0$ et un α, $0<\alpha<1$, tel que $\theta'_V(\xi)\leqslant MJ_\alpha(\xi(\lambda))$.*

En termes de fonctions aléatoires linéaires, si $\lambda=\lambda_f$, f application linéaire de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$, λ est de cotype Φ homogène, si et seulement si la convergence de $\Phi(\mu, f(\xi))$ vers 0 entraîne la convergence de ξ vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$; *λ est de cotype p, $0\leqslant p\leqslant+\infty$, si la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$ entraîne la convergence de ξ vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$.*

Si $E'_{\mathfrak{S}}$ est quasi-normé, λ est de cotype Φ, poids homogène, s'il existe une fonction θ' proportionnelle à la quasi-norme telle que λ soit de cotype (Φ, θ'). On posera alors:

[43] Des résultats partiels ont été obtenus pas MAUREY et SUNYACH (non publiés).

(5.3) $$^*\Phi(\lambda)=(\operatorname*{Inf}_{\|\xi\|\geqslant 1}\Phi(\xi(\lambda)))^{-1},$$

c. à d. le plus petit nombre $M\geqslant 0$ tel que, pour tout $\xi\in E'$, on ait

(5.4) $$\|\xi\|\leqslant M\Phi(\xi(\lambda)) .$$

On remarquera alors que, si $\tau\lambda$ est l'homothétique de λ dans le rapport τ, on a

$$^*\Phi(\tau\lambda)=\frac{1}{|\tau|}{}^*\Phi(\lambda) .$$

Cette définition est naturelle du point de vue suivant: on désire que, dans les cas les plus avantageux, $^*\Phi(\lambda)$ soit le plus faible. En particulier, λ est de cotype Φ si et seulement si $^*\Phi(\lambda)<+\infty$.

(5.4 bis) Nous donnerons des exemples plus tard, mais on peut les consulter dès maintenant au § 6; Ils sont naturellement bien plus difficiles à fournir que les exemples pour le type, et dans bien des cas il n'en existe pas. Une probabilité cylindrique choisie n'importe comment sur E n'a aucun cotype intéressant ([44]). Par exemple, si λ est une combinaison finie de masses ponctuelles sur E Banach de dimension infinie, $\lambda=\sum_{n\leqslant N}c_n\delta_{(a_n)}$, il existe toujours un $\xi\neq 0$ tel que tous les $\langle\xi, a_n\rangle$ soient nuls; alors $\xi(\lambda)=\delta$, et comme les poids homogènes sont généralement nuls sur δ, $^*\Phi(\lambda)=+\infty$, λ n'est pas de cotype Φ; une probabilité cylindrique λ ne peut être de cotype Φ homogène que si elle est assez "grosse". Dans le même ordre d'idées, si u est application linéaire continue de E dans G, et si λ est de cotype Φ homogène, $u(\lambda)$ n'est pas en général de cotype Φ, comme le montre l'exemple de $u=0$, où $u(\lambda)=\delta$. Par contre, si λ est de cotype (Φ, θ'), $u(\lambda)$ est de cotype $(\Phi, \theta'\circ{}^tu)$, car, pour $\eta\in G'$,

$$\Phi(\eta(u(\lambda)))=\Phi(({}^tu(\eta))(\lambda))\leqslant\theta'({}^tu(\eta))=(\theta'\circ{}^tu)(\eta) .$$

Voici toutefois des exemples élémentaires.

a) *Si E est de dimension finie, une probabilité de Radon λ sur E est de cotype p, $0\leqslant p\leqslant+\infty$, si et seulement si elle n'est portée par aucun sous-espace vectoriel propre de E.* En effet, à λ on peut associer une fonction aléatoire linéaire sur E', avec $\Omega=E$, $\mu=\lambda$, $f(\xi)$ étant la variable aléatoire $x\mapsto\langle x, \xi\rangle:\Omega\to\boldsymbol{K}$. L'image par f de E' est un sous-espace vectoriel de $L^0(\Omega, \mu)$. Tout d'abord λ ne peut être de cotype p que si f est injective; sans quoi la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$ n'entraînera pas celle de ξ dans E'. Mais alors $f(\xi)$ ne peut converger vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$ que si $f(\xi)$ est dans $f(E')\cap L^p(\Omega, \mu)$ et y converge

([44]) En fait, si Φ est un poids quelconque, et si $\theta'(\xi)=\Phi(\xi(\lambda))$, alors λ est de type et de cotype (Φ, θ'); mais c'est en général un résultat inutilisable.

vers 0; la restriction de f^{-1} à ce sous-espace de dimension finie étant forcément continue, cela entraîne bien la convergence de ξ vers 0 dans E'. Donc λ est de cotype p si et seulement si f est injective, c. à d. si $\xi(\lambda)=\delta$ implique $\xi=0$, c. à d. si λ n'est portée par aucun hyperplan de E.

b) Soit γ la probabilité cylindrique de Gauss sur un espace hilbertien E sur $\boldsymbol{R}$. D'après (2.1.8 bis), pour tout poids Φ homogène, $\Phi(\xi(\lambda))=\|\xi\|\Phi(\gamma_0)$. Donc λ est de cotype Φ si et seulement si $\Phi(\gamma_0)>0$; et alors ${}^*\Phi(\gamma)=(\Phi(\gamma_0))^{-1}$. On a donc toujours ${}^*\Phi(\gamma)=(\Phi^*(\gamma))^{-1}$. Si $0<\Phi(\gamma_0)<+\infty$, γ est à la fois de type et de cotype Φ; elle est de type et de cotype p, pour $0\leqslant p<+\infty$, et de cotype $+\infty$, avec ${}^*\|\gamma\|_{+\infty}=0$. Si Φ est le poids inhomogène de l'exemple (1.5), et si θ' est la fonction

$$\xi\mapsto\frac{1}{\sqrt{(1-k\|\xi\|^2)^+}}\,,$$

γ est de type et cotype (Φ,θ').

(5.5) *La propriété d'interversion de Fubini.*

Soient A, B, deux poids, μ une probabilité de Radon sur un espace topologique X et ν une probabilité de Radon sur un espace topologique Y. Si f est une fonction $\geqslant 0$ sur $X\times Y$, $(\mu\otimes\nu)$-mesurable, on peut faire le calcul suivant; fixer $x\in X$, et calculer la valeur de B sur la probabilité ν et la fonction $f_x: y\mapsto f(x,y)$; cette quantité est définie quand f_x est μ-mesurable, donc pour μ-presque toutes les valeurs de x. Nous la noterons.

(5.5 bis) $B(d\nu(y),f(x,y))$.

C'est une fonction de $x\in X$. Elle est μ-mesurable. En effet, f étant $(\mu\otimes\nu)$-mesurable, $x\mapsto f_x$ est μ-mesurable de X dans $L^0(Y,\nu)$; puis $g\mapsto B(\nu,g)=B(g(\nu))$ est semi-continue inférieurement sur $L^0(Y,\nu)$, donc universellement mesurable, donc $x\mapsto B(\nu,f_x)$ est μ-mesurable. On peut calculer la valeur de A sur μ et cette fonction; il sera naturel de la noter

$$A(d\mu(x),B(d\nu(y),f(x,y)))\,. \tag{5.6}$$

Soient maintenant C, D, deux autres poids. On dira que $(C,D)\leqslant(A,B)$ si, quels que soient X, Y, μ, ν, f, on a l'inégalité

$$C(d\nu(y),D(d\mu(x),f(x,y)))\leqslant A(d\mu(x),B(d\nu(y),f(x,y)))\,. \tag{5.7}$$

Exemples.

Exemple (5.7.1). Pour $p>0$ fini, on peut prendre $A, B, C, D=\|\ \|_p$. L'inégalité devient une égalité, c'est le théorème de Fubini.

Exemple (5.7.2). On peut aussi prendre $\|\ \|_{+\infty}$ pour A, B, C, D. C'est une égalité facile à démontrer:

$$(\text{Sup. ess.})_{(\mu\otimes\nu)}f=(\text{Sup. ess.})_{d\mu(x)}((\text{Sup. ess.})_{d\nu(y)}(f(x, y)))\ .$$

Exemple-PROPOSITION (5.7.3). *On a* $(J_\gamma, J_\delta)\leqslant(J_\alpha, J_\beta)$, *toutes les fois que* $\gamma\delta\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$ (*a fortiori toutes les fois que* $\gamma\delta\geqslant\alpha+\beta$).

DÉMONSTRATION. 1) Supposons

$$J_\alpha(d\mu(x), J_\beta(d\nu(y), f(x, y)))\leqslant a\ . \tag{5.7.4}$$

(5.7.4) équivaut à

$$\mu\{x\in X\,;\ J_\beta(d\nu(y), f(x, y))>a\}\leqslant\alpha\ ; \tag{5.7.5}$$

qui lui-même équivaut à

$$\mu\{x\in X\,;\ \nu\{y\in Y\,;\ f(x, y)>a\}>\beta\}\leqslant\alpha\ . \tag{5.7.6}$$

Si alors on considère l'ensemble A des (x, y) pour lesquels $f(x, y)>a$, qui est $(\mu\otimes\nu)$-mesurable, on voit que, *sauf* pour des x d'un ensemble X' de μ-mesure $\leqslant\alpha$, on a $\nu\{y\in Y\,;\ (x, y)\in A\}\leqslant\beta$; donc, par Fubini, $(\mu\otimes\nu)(A)\leqslant\alpha+(1-\alpha)\beta$. Donc:

$$(\mu\otimes\nu)\{(x, y)\in X\times Y\,;\ f(x, y)>a\}\leqslant\alpha+(1-\alpha)\beta\ , \tag{5.7.7}$$

ou encore

$$J_{\alpha+(1-\alpha)\beta}(\mu\otimes\nu, f)\leqslant a\ . \tag{5.7.8}$$

Ceci étant vrai pour tout a, on a l'inégalité

$$J_{\alpha+\beta-\alpha\beta}(\mu\otimes\nu, f)\leqslant J_\alpha(d\mu(x), J_\beta(d\nu(y), f(x, y)))\ . \tag{5.7.9}$$

2) Supposons maintenant

$$J_\rho(\mu\otimes\nu, f)\leqslant b\ , \tag{5.7.10}$$

c. à d.

$$(\mu\otimes\nu)\{(x, y)\in X\times Y\,;\ f(x, y)>b\}\leqslant\rho\ . \tag{5.7.11}$$

L'ensemble des $y\in Y$ pour lesquels $\mu\{x\in X\,;\ f(x, y)>b\}>\delta$ a alors nécessairement, par Fubini, une ν-mesure $\leqslant\rho/\delta$, ou

$$\nu\{y\in Y\,;\ \mu\{x\in X\,;\ f(x, y)>b\}>\delta\}\leqslant\frac{\rho}{\delta}\ ; \tag{5.7.12}$$

par le calcul inverse de celui de 1), c'est équivalent à

$$J_{\rho/\delta}(d\nu(y), J_\delta(d\mu(x), f(x, y)))\leqslant b\ . \tag{5.7.13}$$

Comme b est arbitraire on a

$$J_{\rho/\delta}(d\nu(y), J_\delta(d\mu(x), f(x, y)))\leqslant J_\rho(\mu\otimes\nu, f)\ , \tag{5.7.14}$$

et a fortiori

$$J_\gamma(d\nu(y), J_\delta(d\mu(x), f(x, y))) \leqslant J_\rho(\mu\otimes\nu, f) \quad \text{pour} \quad \gamma\delta \geqslant \rho \,. \tag{5.7.15}$$

La combinaison de (5.7.9) et (5.7.15) donne le résultat, en faisant $\rho=\alpha+\beta-\alpha\beta$.

Exemple-PROPOSITION (5.7.16). *Soit* δ, $0<\delta<1$. *Quels que soient les J-poids* A, B, *homogènes compacts de la forme* (1.12), *il existe un J-poids homogène compact* C *de la forme* (1.12), *tel que*

$$(C, J_\delta) \leqslant (A, B). \tag{5.7.17}$$

DÉMONSTRATION. Soit γ, $0<\gamma<1$, D'après (5.7.3), $(J_\gamma, J_\delta) \leqslant (J_{(1/2)\gamma\delta}, J_{(1/2)\gamma\delta})$. Supposons $A=\sup\limits_{0<\alpha<1} a(\alpha)J_\alpha$, $B=\sup\limits_{0<\beta<1} b(\beta)J_\beta$. Alors on a toujours

$$\left(a\left(\gamma\frac{\delta}{2}\right)b\left(\gamma\frac{\delta}{2}\right)J_\gamma, J_\delta\right) \leqslant (A, B) \,. \tag{5.7.18}$$

Si alors on pose

$$C=\sup_{0<\gamma<1} a\left(\gamma\frac{\delta}{2}\right)b\left(\gamma\frac{\delta}{2}\right)J_\gamma \,,$$

il répond à la question.

PROPOSITION (5.8). (*Condition de Pietsch généralisée*). *Soient* E, G, *des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals. Soit* u *une application linéaire faiblement continue de* E *dans* G. *Supposons qu'il existe une probabilité de Radon* ν *sur* $\sigma(E', E)$, *de cotype* $(\bar{B}, \beta\circ u)$, *d'ordre* $(\bar{A}, \alpha')$, *où* $\bar{A}$, $\bar{B}$, *sont des poids,* β *est une fonction* $\geqslant 0$ *semi-continue inférieurement sur* G, α' *une fonction* $\geqslant 0$ *semi-continue inférieurement sur* $\sigma(E', E)$. *Si* A *et* B *sont des poids vérifiant la condition d'interversion de Fubini*

$$(B, \bar{B}) \leqslant (\bar{A}, A) \,, \tag{5.9}$$

B *compact, alors l'application* u *est approximativement* $(A, \alpha'; B, \beta)$-*préradonifiante de* E *dans* G, *radonifiante si* β *est compact.*

DÉMONSTRATION. Nous allons appliquer le théorème (2.4) et la remarque qui le suit (à propos du "préradonifiante"). Soit λ une probabilité de Radon sur E, portée par un compact de dimension finie, de type (A, α'). Son image $u(\lambda)$ est de Radon sur G, portée par un compact de dimension finie. Majorons $B(u(\lambda), \beta)$:

$$B(u(\lambda), \beta)=B((\beta\circ u)(\lambda))=B(\lambda, \beta\circ u)=B(d\lambda(x), (\beta\circ u)(x)) \,. \tag{5.10}$$

L'hypothèse du cotype s'écrit

$$(\beta\circ u)(x) \leqslant \bar{B}(x(\nu))=\bar{B}(d\nu(\xi), |\langle x, \xi\rangle|) \,. \tag{5.11}$$

Donc (5.10) est majoré par

$$B(d\nu(x), (\bar{B}(d\nu(\xi), |\langle x, \xi\rangle|)) , \tag{5.12}$$

lui-même majoré, d'après (5.9), par

$$\bar{A}(d\nu(\xi), (A(d\lambda(x), |\langle x, \xi\rangle|)) = \bar{A}(d\nu(\xi), A(\xi(\lambda))) . \tag{5.13}$$

Mais λ est de type (A, α'), donc c'est majoré par

$$\bar{A}(d\nu(\xi), \alpha'(\xi)) = \bar{A}(\nu, \alpha') \leqslant 1 , \tag{5.14}$$

puisque ν est d'ordre $(\bar{A}, \alpha')$.

La règle de Fubini était applicable parce que $(x, \xi) \mapsto |\langle x, \xi\rangle|$ est continue sur $E \times \sigma(E', E)$, lorsqu'on la restreint à un sous espace de dimension finie de E, donc $(\lambda \otimes \nu)$-mesurable. Le théorème (2.4) prouve alors le théorème.

REMARQUE 1. Pour la définition du type (A, α') pour λ, α' doit seulement être $\geqslant 0$ sur E', sans condition de semi-continuité; c'est pour l'ordre $(\bar{A}, \alpha')$ de ν que la semi-continuité de α' intervient. On peut affaiblir un peu les hypothèses sur α', qui interviennent à cause de ν; supposons qu'il existe un sous-espace U de E', à injection continue dans $\sigma(E', E)$, tel que ν soit portée par U et de Radon sur U, et que α', $\geqslant 0$ arbitraire sur E', soit semi-continue inférieurement sur U; alors le résultat subsiste. En effet, on considère d'abord ν comme probabilité de Radon sur $\sigma(E', E)$, et rien n'est à modifier jusqu'à (5.13) inclus. Ensuite on a toujours $A(\xi(\lambda)) \leqslant \alpha'(\xi)$, sans hypothèse sur $\alpha' \geqslant 0$. Mais, puisque α' est semi-continue inférieurement sur U sur lequel ν est de Radon, on a la majoration (5.14), sur U, d'où le résultat.

REMARQUE 1 bis. Supposons que ni B ni β ne soient compacts. Il reste vrai que, si λ est une probabilité *de Radon* sur E, de type (A, α') sur E, alors $u(\lambda)$ est (sûrement de Radon) d'ordre (B, β) sur G, pourvu qu'on puisse appliquer Fubini (5.9), et que $(x, \xi) \mapsto \langle x, \xi\rangle$, application de $E \times \sigma(E', E)$ dans K, soit $(\lambda \otimes \nu)$-mesurable. Cela sera sûrement vrai si cette forme bilinéaire est universellement mesurable, ce qui est vrai si E est souslinien, ainsi que $\sigma(E', E)$, car elle est séparément continue [45]; ce sera aussi vrai sans hypothèse sur E, E', si λ est portée par un sous-espace de dimension finie.

REMARQUE 2. On voit comment il s'agit d'une généralisation du théorème de PIETSCH. Supposons pour simplifier le cas où $A = \bar{A} = B = \bar{B} = \| \;\|_p$, $p > 0$. Supposons qu'il existe, comme dans le théorème de PIETSCH, une probabilité de Radon ν sur la boule unité de $\sigma(E', E)$, E et B Banach, et que

[45] SCHWARTZ [1], 1ère partie, chap. II, proposition.

$$\|u(x)\| \leqslant \left(\int_{E'} |\langle x, \xi\rangle|^p d\nu(\xi)\right)^{1/p}.$$

Cela veut exactement dire que ν est de cotype $(\bar{B}, \beta\circ u)$ où β est la norme; et bien évidemment, ν étant portée par la boule unité, elle est d'ordre $(\bar{A}, \alpha')$, α'=norme. Ce que nous venons de montrer prouve de nouveau que u est alors approximativement p-préradonifiante de E dans G, avec $\pi_p(u) \leqslant 1$. La partie du théorème de PIETSCH est bien entendu la partie la plus facile; mais je ne pense pas qu'il existe de réciproque dans le cas général. ([45]) D'autre part, dans cette partie facile du théorème de PIETSCH, l'interversion de Fubini était inapparente, *pour* $p>0$, parce que c'était une interversion d'un signe $\sum$ fini et d'une intégrale, pour les applications p-sommantes; de toute façon, pour les applications p-radonifiantes, le théorème était moins trivial et reposait aussi sur le théorème (2.4); d'autre part, la règle d'interversion de Fubini a été très apparente dans le théorème de PIETSCH pour $p=0$, proposition (4.6) (cette proposition (4.6) résulte bien entendu de celle que nous venons de démontrer). Finalement, dans tous les cas, on utilise *exactement* l'arsenal utilisé ici.

COROLLAIRE (5.15) (*théorème de dualité*). *Faisons sur* E, G, u, α', β, A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, *les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent. S'il existe une probabilité cylindrique* ρ *sur* $\sigma(G', G)$, *de cotype* $(\bar{B}, \beta)$, *telle que* $\nu={}^tu(\rho)$ *soit de Radon sur* $\sigma(E', E)$, *d'ordre* $(\bar{A}, \alpha')$. *Alors* u *est approximativement* $(A, \alpha'; B, \beta)$*-préradonifiante de* E *dans* G, *radonifiante si* β *est compacte.*

En effet, $\nu={}^tu(\rho)$ est de cotype $(\bar{B}, \beta\circ u)$ et il suffira d'appliquer le théorème:

$$(\beta\circ u)(x) \leqslant \bar{B}((u(x))(\rho)) = \bar{B}((x\circ{}^tu)(\rho)) = \bar{B}(x(\nu)).$$

Changement de notations.

Remarquons d'abord qu'on peut retenir à peu près correctement les hypothèses qui interviennent. La compacité est supposée pour B, β, ce qui est normal pour obtenir des probabilités de Radon *sur* G. Dans l'inégalité de Fubini, on se souviendra simplement que le poids le plus important est B, puisqu'il sera relatif aux probabilités de Radon obtenues sur G; on le place à l'extrême gauche, et le reste en découle de façon rapide: $(B, \bar{B}) \leqslant (\bar{A}, A)$ par des règles d'interversion.

Mais il est souvent commode de changer les notations. Les espaces les plus importants sont en fait E', sur laquelle ${}^tu(\rho)$ est de Radon (pour la topologie $\sigma(E', E)$) et G, sur laquelle on obtiendra des probabilités de Radon (si λ est cylindrique sur E, de type (A, α')-approximable, $u(\lambda)$ est de Radon sur G). On les appellera V et U, alors que E et G' s'appelleront V' et U'. On remplacera alors α' par α. Pour ρ, qui est cylindrique sur $\sigma(V', V)$, de cotype $(\bar{B}, \beta)$, on dira plutôt qu'elle est de cotype $(\bar{B}, \beta, V)$ (β est une fonction sur V, et le cotype fait intervenir les images de ρ par les éléments de V); pour ${}^t u(\rho)$, qui est de Radon *sur* U, d'ordre $(\bar{A}, \alpha)$, on dira qu'elle est d'ordre $(\bar{A}, \alpha, U)$. Si λ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(U', U)$, de type (A, α)-approximable, on dira qu'elle est de type (A, α, U)-approximable (α est une fonction sur U, et le type fait intervenir les images de λ par les éléments de U), tandis que pour $u(\lambda)$, de Radon d'ordre (B, β) sur V, on dira qu'elle est de Radon d'ordre (B, β, V).

On aura alors la variante suivante du corollaire précédent.

COROLLAIRE (5.15), *variante. Soient U, V, deux espaces vectoriels topologiques, séparés par leurs duals. Soit v une application linéaire continue de $\sigma(V', V)$ dans $\sigma(U, U')$, de transposée ${}^t v = u$ continue de $\sigma(U', U)$ dans $\sigma(V, V')$. Soient A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, 4 poids, satisfaisant à la règle d'interversion de Fubini* (5.9) $(B, \bar{B}) \leqslant (\bar{A}, A)$. *On suppose en outre B compact. Soient α une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur U, β une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur V. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ de cotype $(\bar{B}, \beta, V)$, dont l'image $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre $(\bar{A}, \alpha, U)$. Alors u est approximativement $(A, \alpha; B, \beta)$-radonifiante de $\sigma(U', U)$ dans V, radonifiante si β est compacte; dans ce dernier cas, si λ est une probabilité cylindrique de type (A, α, U)-approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B, β, V).*

Il suffit en effet d'appliquer la remarque 1 qui suit la proposition (5.8): U est plus fine que $\sigma(U, U')$, mais α est supposée semi-continue inférieurement sur U.

$$\begin{array}{cccccc} v(\rho) & U_{\alpha, A, \bar{A}} & \xleftarrow{\ v\ } & V' & & \rho \\ \lambda & U' & \xrightarrow{\ u\ } & V_{\beta, B, \bar{B}} & u(\lambda) & \end{array}$$

Figure

REMARQUE. On peut refaire la remarque (1 bis) de la proposition (5.8).

(5.17) *Cas de poids homogènes et de quasi-Banach.*

Supposons, comme partout aux deux paragraphes précédents, que E soit un Banach ou un dual $*$-faible $\sigma(F', F)$ d'un quasi-Banach F; dans ce dernier cas, $E' = F$ sera muni de la quasi-norme donnée sur F. Supposons ensuite que G soit un quasi-Banach, ou un dual $*$-faible $\sigma(H', H)$ d'un Banach H; on sait que dans ce cas $\sigma(G'', G')$ est muni de la jauge de l'adhérence de la quasi-boule unité de G (structure bitopologique canonique). Enfin soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G: u est continue de $\sigma(E, E')$ ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G, G')$ ou $\sigma(H', H)$. Par transposition, nous avons une situation exactement analogue; le 1[er] espace devient $\sigma(G', G)$, dual $*$-faible du quasi-Banach G, où le Banach H; le deuxième espace devient le dual $*$-faible de Banach $\sigma(E', E)$, ou le quasi-Banach F; et $v={}^t u$ est faiblement continue du 1er dans le 2ème, de $\sigma(G', G)$ ou $\sigma(H, H')$ dans $\sigma(E', E)$ ou $\sigma(F, F')$. Par application du théorème de dualité, on va se demander si u est approximativement (A, B)-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$, dont les quasi-boules sont toujours compactes.

Nous ne le répéterons plus: E, F, G, H, *vérifient les mêmes propriétés qu'aux* §§ 3 *et* 4. (Bien entendu, dans les applications, on aura souvent à intervertir les différents espaces, la situation étant autoduale!)

PROPOSITION (5.17). *Soient A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, 4 poids homogènes satisfaisant à l'inégalité de Fubini, $(B, \bar{B}) \leqslant (\bar{A}, A)$, B étant compact. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G', G)$ ou H, de cotype $\bar{B}$, dont l'image $v(\rho)$ soit de Radon sur $\sigma(E', E)$ ou $\sigma(F'', F')$, d'ordre $\bar{A}$. Alors u est approximativement (A, B)-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$. En outre, si λ est une probabilité cylindrique sur E ou $\sigma(F', F)$ de type A approximable, on a l'inégalité*:

$$B(u(\lambda)) \leqslant {}^*\bar{B}(\rho)\bar{A}(v(\rho))A^{*a}(\lambda)\ . \tag{5.18}$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $v(\rho)$ de Radon sur $\sigma(E', E)$ ou F. Il suffit alors d'appliquer le théorème général (5.15), avec $\alpha' = (1/\bar{A}(v(\rho))) \times$quasi-norme, $\beta = (1/{}^*\bar{B}(\rho)) \times$quasi-norme. Soit λ cylindrique, et supposons que $A^{*a}(\lambda) \leqslant 1/\bar{A}(v(\rho))$; alors elle est de type $(A, (1/\bar{A}(v(\rho))) \times$quasi-norme$)$-approximable. On en déduira que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre $(B, 1/{}^*\bar{B}(\rho) \times$quasi-norme$)$, donc d'ordre B, avec $B(u(\lambda)) \leqslant {}^*\bar{B}(\rho)$. Par homothétie, on en déduira l'inégalité (5.18), à condition évidemment de remplacer G par $\sigma(G'', G')$, sur lequel la norme est compacte. Supposons maintenant que $v(\rho)$ soit seulement de Radon d'ordre A sur $\sigma(F'', F')$. On en déduit seulement, a priori, que la conclusion subsiste pour λ cylindrique *sur* $\sigma(F', F'')$, de type A approximable, le type étant calculé avec la jauge de (1.18 bis) sur F''. Mais soit λ de Radon sur $\sigma(F', F)$, portée par un compact de dimension finie. Comme $\sigma(F', F'')$ et $\sigma(F', F)$ induisent la même topologie sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, elle est aussi de Radon portée par un compact de dimension finie dans $\sigma(F', F'')$. Si $\xi'' \in F''$ est dans la quasi-boule unité, il est limite de ξ_j de la quasi-boule unité de F, pour la convergence simple sur F', donc aussi pour la convergence uniforme sur tout compact de dimension finie; alors les $\xi_j(\lambda)$ convergent étroitement vers $\xi''(\lambda)$. Si donc $A^*(\lambda) = M$, mesuré pour λ sur $\sigma(F', F)$, on a $A(\xi_j(\lambda)) \leqslant M$, donc aussi $A(\xi''(\lambda)) \leqslant M$, et encore $A^*(\lambda) \leqslant M$, mesuré pour λ sur $\sigma(F', F'')$; autrement dit, $A^*(\lambda)$ est le même dans les deux cas. Alors, il restera vrai que $B(u(\lambda)) \leqslant {}^*\bar{B}(\rho)\bar{A}(v(\rho))\ A^*(\lambda)$, λ considérée sur $\sigma(F', F)$, et u sera encore approximativement radonifiante à partir de $\sigma(F', F)$. CQFD.

REMARQUE 1. L'homogénéité de la formule (5.18) est correcte; si l'on remplace λ par son homothétique $\tau\lambda$, $B(u(\lambda))$ et $A^{*a}(\lambda)$ sont multipliés par $|\tau|$; si l'on remplace ρ par $\tau\rho$, $\bar{A}(v(\rho))$ est multiplié par $|\tau|$, mais $^*\bar{B}(\rho)$ par $1/|\tau|$. Les cas "avantageux", ceux qui donnent à $B(u(\lambda))$ de petites valeurs, sont bien ceux pour lesquels $^*\bar{B}(\rho)$, $\bar{A}(v(\rho))$, $A^{*a}(\lambda)$ sont petits.

PROPOSITION (5.19). *S'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G', G)$ ou H, de cotype p, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, dont l'image $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre p sur $\sigma(E', E)$ ou $\sigma(F'', F')$, u est approximativement p-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(G'', G')$ ou $\sigma(H', H)$, et on a, pour $p>0$:*

$$\pi_p(u) \leqslant {}^*\|\rho\|_p \|v(\rho)\|_p \ . \tag{5.20}$$

DÉMONSTRATION. Pour $p>0$, c'est la proposition précédente, avec les poids $\| \ \|_p$. Prenons donc $p=0$. Puisque ρ est de cotype 0, il existe un $\delta>0$ tel qu'elle soit de cotype $\bar{B}=J_\delta$. Ensuite $v(\rho)$ est de Radon sur $\sigma(E'', E')$, donc il existe un J-poids $\bar{A}$ (homogène compact de la forme (1.12)), tel qu'elle soit d'ordre $\bar{A}$ (voir (1.18), point 7). Si λ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(F', F)$ ou E, de type 0 approximable, il existe un J-poids A, tel que λ soit de type A approximable, d'après (2.1.7). Alors, d'après (5.7.16), δ, $\bar{A}$, A, étant donnés, il existe un J-poids B de la forme (1.12), tel que l'on ait la propriété d'interversion de Fubini $(B, J_\delta) \leqslant (\bar{A}, A)$. On en déduit que u est approximativement (A, B)-radonifiante de E ou $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(H', H)$ ou $\sigma(G'', G')$, par la proposition (5.17). Donc $u(\lambda)$ est de Radon et u est bien approximativement 0-radonifiante.

Donnons quelques applications immédiates du théorème de dualité.

PROPOSITION (5.20.1). *Soient E, G, deux espaces hilbertiens, u une application linéaire continue de E dans G. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *u est de Hilbert-Schmidt;*

b) *u est p-radonifiante, pour un $p \geqslant 0$ fini;*

b') *u est p-radonifiante, pour tout $p \geqslant 0$;*

c) *l'image par u de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E_R est de Radon dans G.*

En outre, pour u de Hilbert-Schmidt, et si $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, pour tout $p>0$, on a l'égalité:

$$\pi_p(u) = \pi_p({}^t u) = \pi_p(u^*) = \|\gamma_0\|_p^{-1} \|u(\gamma)\|_p \ , \tag{5.20.2}$$

où γ_0 est la probabilité de Gauss normale sur $\boldsymbol{R}$, $e^{-\pi t^2}dt$; la fonction $p \mapsto \pi_p(u)$ est continue décroissante sur $]0, +\infty]$, et tend vers une limité finie $\pi_0(u)$ pour *p tendant vers* 0, *et la fonction* $p \mapsto \|\gamma_0\|_p \pi_p(u)$ *est croissante; on a donc*

(5.20.3) $$\pi_0(u) \leqslant \|\gamma_0\|_0^{-1} \|\gamma_0\|_p \pi_p(u)\ , \quad 0 \leqslant p < +\infty\ .$$

DÉMONSTRATION. On peut toujours supposer $K=R$ (voir (3.3 ter)).

A) Supposons u de Hilbert-Schmidt. Elle admet une factorisation $u = \sum_{n\in N} \alpha_n e'_n \otimes g_n$, où $\sum |\alpha_n|^2 < +\infty$, $(e')_{n\in N}$ et $(f_n)_{n\in N}$ étant des systèmes orthonormés; donc elle est 2-nucléaire à gauche, donc 2-radonifiante par (3.8.2), 3. Donc a entraîne b. En outre, $(\sum_{n\in N} |\alpha_n|^2)^{1/2} = \|u\|_2$, norme de Hilbert-Schmidt de u, donc la norme $N_2(u)$ 2-nucléaire de u est majorée par sa norme de Hilbert-Schmidt, et $\pi_2(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \|u\|_2$ (plus loin, l'égalité $\pi_2(u) = \|u\|_2$ entraînera alors aussi leur égalité avec la norme 2-nucléaire de u).

B) La probabilité cylindrique de Gauss γ est de type p, pour tout p fini (d'après (2.1.8 bis)); donc b entraîne c.

C) Supposons maintenant que $u(\gamma)$ soit de Radon. Comme $\rho = \gamma$ est de cotype p ($p \geqslant 0$ arbitraire) (par (5.4 bis)), le théorème de dualité (5.19) dit que ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante de G' dans $\sigma(E'', E)$, donc p-radonifiante de G' dans E' par (3.9), 1, et (4.19 et 20). Mais alors, comme la probabilité cylindrique de Gauss γ' de G' est de type p, ${}^t u(\gamma')$ est de Radon; et la même démonstration montre alors que u est p-radonifiante de E dans G, pour tout $p \geqslant 0$ fini. Donc c implique b′.

D) Montrons enfin que b′ implique a. On peut prendre $p=2$. Alors u est en particulier 2-sommante. Si $(e_n)_{n\in N}$ est une base hilbertienne de E, elle est scalairement l^2, et $\|(e_n)_{n\in N}\|_2^* = 1$; donc $(u(e_n))_{n\in N}$ est l^2, et $\|(u(e_n))_{n\in N}\|_2 \leqslant \pi_2(u)$. Cela veut exactement dire que u est de Hilbert-Schmidt, et sa norme de Hilbert-Schmidt $\|u\|_2$ est $\leqslant \pi_2(u)$. On a ainsi démontré l'équivalence des 4 conditions, et l'égalité $\pi_2(u) = \|u\|_2$ donc aussi $= \|{}^t u\|_2 = \pi_2({}^t u)$.

E) Il reste à montrer les diverses propriétés métriques.

Tout d'abord, il existe des applications linéaires continues v et w, de norme $\leqslant 1$, telles que $u = v \circ (u^* u)^{1/2}$, $(u^* u)^{1/2} = w \circ u$, donc $= u^* \circ w^*$; donc $\pi_p(u) \leqslant \pi_p((u^* u)^{1/2}) \leqslant \pi_p(u^*)$. Par symétrie, on en déduit que $\pi_p(u) = \pi_p(u^*) = \pi_p((u^* u)^{1/2}) = \pi_p((u u^*)^{1/2})$, égaux aussi à $\pi_p({}^t u)$ parce que ${}^t u$ est isomorphe à u^*.

La probabilité de Gauss est de type et de cotype p, $0 < p < +\infty$; d'une part, d'après la définition même de $\pi_p(u)$:

$$\|u(\gamma)\|_p \leqslant \pi_p(u) \|\gamma\|_p^* = \pi_p(u) \|\gamma_0\|_p\ ,$$

d'autre part, par le théorème de dualité:

$$\pi_p(u) = \pi_p({}^t u) \leqslant {}^* \|\gamma\|_p \|u(\gamma)\|_p = \|\gamma_0\|_p^{-1} \|u(\gamma)\|_p\ .$$

La comparaison des deux inégalités donne l'égalité (5.20.2), pour $0<p<+\infty$. Cette formule montre bien que $p\mapsto\|\gamma_0\|_p\pi_p(u)$ est continue croissante sur $]0, +\infty[$; et on sait déjà que $p\mapsto\pi_p(u)$ est décroissante. Lorsque p tend vers 0, $\|\gamma_0\|_p\pi_p(u)=\|u(\gamma)\|_p$ a une limite finie, puisqu'elle est une fonction croissante; mais $\|\gamma_0\|_p$ tend vers une limite finie et non nulle $\|\gamma_0\|_0$, à savoir la moyenne géométrique $\exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\log|t|dt\right)$. Donc $\pi_p(u)$ a une limite finie (et non nulle puisque $p\mapsto\pi_p(u)$ est décroissante!), et on a bien (5.20.3). Reste à montrer que, quand p tend vers $+\infty$, $\pi_p(u)$ tend vers $\pi_\infty(u)=\|u\|$ (nous savons déjà que $\pi_p(u)\geqslant\pi_\infty(u)$). Quittes à remplacer u par $(u^*u)^{1/2}$, nous pouvons supposer $E=G$ et u hermitien positif. Supposons d'abord $E=\boldsymbol{R}^n$, et u diagonale de valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, $0\leqslant\alpha_k\leqslant\|u\|$. Alors

$$\gamma=\bigotimes_{k=1}^{n} e^{-\pi t_k^2}dt_k\,, \qquad u(\gamma)=\bigotimes_{k=1}^{n} e^{-\pi t_k^2/\alpha_k^2}\frac{dt_k}{\alpha_k}\,,$$

$$\begin{aligned}
\|u(\gamma)\|_p&=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2)^{p/2}\exp\left(-\pi\sum_{k=1}^n t_k^2/\alpha_k^2\right)\frac{dt_1\cdots dt_n}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\right)^{1/p}\\
&=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}(\alpha_1^2t_1^2+\cdots+\alpha_n^2t_n^2)^{p/2}\exp\left(-\pi\sum_{k=1}^n t_k^2\right)dt_1\cdots dt_n\right)^{1/p}\\
&\leqslant\|u\|\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|t|^pe^{-\pi|t|^2}dt\right)^{1/p}\\
&=\|u\|\left(S_n\int_0^{+\infty}e^{-\pi r^2}r^{p+n-1}dr\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

(S_n=aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$)

$$=\|u\|\left(\frac{S_n}{2\pi^{(p+n)/2}}\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\right)^{1/p}.$$

Alors

$$\pi_p(u)=\frac{\|u(\gamma)\|_p}{\|\gamma_0\|_p}\leqslant\|u\|\left(\frac{\dfrac{S_n}{2\pi^{(p+n)/2}}\Gamma\left(\dfrac{p+n}{2}\right)}{\dfrac{2}{2\pi^{(p+1)/2}}\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)}\right)^{1/p},$$

qui tend vers $\|u\|$ pour p infini.

Si maintenant E est de dimension infinie, et u hermitien $\geqslant0$, on peut écrire $E=E_1\oplus E_2$, $u=u_1\oplus u_2$, avec $\|u_1\|=\|u\|$, et $\pi_2(u_2)=\|u_2\|_2\leqslant\varepsilon$. On a donc, pour $p\geqslant2$:

$$\pi_p(u_1\oplus u_2)=\pi_p((u_1\oplus0)+(0\oplus u_2))\leqslant\pi_p(u_1\oplus0)+\pi_p(0\oplus u_2)\leqslant\pi_p(u_1)+\varepsilon\,.$$

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\pi_p(u)\leqslant\|u\|+\varepsilon$ donc $=\|u\|$. CQFD.

REMARQUES. 1) Bien entendu, (5.20.3) est bien meilleur que (4.18 ter).

2) Puisque u est 0-radonifiante dès qu'elle est p-radonifiante pour un $p>0$, on doit pouvoir obtenir des inégalités (4.2) à partir de $\pi_p(u)$. Soit λ une probabilité sur G, portée par un ensemble fini. On peut appliquer les inégalités (5.18), en tenant compte de la remarque 1 bis après la proposition (5.8). On prendra $A=J_\eta$, $B=J_\varepsilon$, de sorte qu'on aura Fubini $(B, \bar{B})\leqslant(\bar{A}, A)$ avec $\bar{A}=J_\theta$, $\bar{B}=J_\delta$, pourvu que $\varepsilon\delta\geqslant\theta+\eta$, par (5.7.3). Pour la probabilité cylindrique de Gauss γ' sur G', on a $^*J_\delta(\gamma')=J_\delta^{-1}(\gamma_0)$, et $J_\theta({}^tu(\gamma'))$ peut être majoré à partir de $\pi_2({}^tu)=\pi_2u=\|u\|_2$. Posons ${}^tu=v$. On a $\|v(\gamma')\|_p=\|\gamma_0\|_p\,\pi_p(v)$; donc, pour $M>0$ fini arbitraire,

$$\|\gamma_0\|_p^p\,\pi_p^p(v)\geqslant M^p\int_{\substack{\xi\in E'\\ \|\xi\|\geqslant M}} d(v(\gamma'))(\xi)\ ;$$

ensuite $\pi_p(v)=\pi_p(u)$, de sorte que, si $\theta=\dfrac{\|\gamma_0\|_p^p\,\pi_p^p(u)}{M^p}$, on a $J_\theta(v(\gamma'))\leqslant M$. Alors (5.18) donnera

$$\text{(5.20.3 bis)}\qquad J_\varepsilon(u(\lambda))\leqslant J_\delta^{-1}(\gamma_0)MJ_\eta^*(\lambda)\quad\text{pour}\quad \varepsilon\delta\geqslant\eta+\frac{\|\gamma_0\|_p^p\,\pi_p^p(u)}{M^p}\,.$$

Nous sommes amenés à poser

$$\delta=2\int_c^{+\infty}e^{-\pi t^2}dt\geqslant1-2c\,,$$

donc $J_\delta(\gamma_0)=c$, puis $MJ_\delta^{-1}(\gamma_0)=R$.

On en déduit que l'on a

$$\text{(5.20.3 ter)}\qquad J_\varepsilon(u(\lambda))\leqslant RJ_\eta^*(\lambda)\,,$$

s'il existe un $p>0$ et un $c>0$ tels que

$$\text{(5.20.3 quarto)}\qquad \varepsilon\geqslant\frac{1}{(1-2c)^+}\left(\eta+\frac{\|\gamma_0\|_p^p\,\pi_p^p(u)}{c^pR^p}\right).$$

Aux notations près (ε, η, R, au lieu de β, α, M), c'est une inégalité (4.2), et alors le corollaire (4.12.5) nous dit que, si λ est une probabilité cylindrique de type 0 sur E, $u(\lambda)$ est de Radon sur G et vérifie la même inégalité. Cette inégalité signifie que, si λ est scalairement concentrée à η près sur la boule unité de E (donc $J_\eta^*(\lambda)\leqslant1$), alors $u(\lambda)$ est concentrée à ε près sur la boule de rayon R de G ($J_\varepsilon(u(\lambda))\leqslant R$). Pour η et $\|u\|$ donnés, on peut trouver R assez grand pour qu'on puisse prendre $\varepsilon=\eta'$ donné $>\eta$. Déterminons en effet d'abord $c>0$ tel que $\dfrac{\eta+2c}{(1-2c)^+}\leqslant\eta'$. Alors (5.20.3 quarto) est sûrement vérifiée, avec $p=2$, si

$$\varepsilon\geqslant\frac{1}{(1-2c)^+}\left(\eta+\frac{\|\gamma_0\|_2^2\|u\|_2^2}{R^2c^2}\right);$$

ensuite, pour R assez grand, $\frac{\|\gamma_0\|_2^2\|u\|_2^2}{R^2c^2}\leqslant 2c$, et l'inégalité sera alors sûrement réalisée si $\varepsilon\geqslant\frac{\eta+2c}{(1-2c)^+}$ donc pour $\varepsilon=\eta'$.

Il n'est pas facile, pour $\|u\|_2$, R et η donnés, d'estimer le minimum du 2e membre de (5.20.3 quarto) suivant le choix de p et c.

On peut toutefois trouver des estimations raisonnables. Posons $p=2q+1$, donc $\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)=q!$, et appliquons la formule de Stirling, pour q tendant vers l'infini (avec $\pi_p(u)\leqslant\pi_2(u)=\|u\|_2$):

$$\frac{\|\gamma_0\|_p^p\|u\|_2^p}{R^pc^p}=\left(\frac{\|u\|_2}{Rc}\right)^{2q+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{q+1}q!\simeq\left(\frac{\|u\|_2}{Rc}\right)^{2q+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{q+1}q^qe^{-q}\sqrt{2\pi q}$$

$$\simeq\text{const.}\,(aq)^q\sqrt{q}\ ,\qquad a=\frac{\|u\|_2}{R^2c^2\pi e}\,.$$

Choisissons $q=1/ae$, d'où $aq=1/e$, et on trouve:

$$\text{constante}\times e^{-1/ae}\frac{1}{\sqrt{a}}=\text{constante}\times\left(\exp\left(-\pi\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\right)\right)\frac{cR}{\|u\|_2}\,.$$

Si donc π' est n'importe quelle constante $<\pi$, on voit qu'il existe une constante $C_{\pi'}=C$ telle que (5.20.3 quarto) soit sûrement vérifié s'il existe $c>0$ tel que

$$\text{(5.20.3 quinto)}\qquad \varepsilon\geqslant\frac{1}{(1-2c)^+}\left(\eta+C\exp\left(-\pi'\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\right)\right)\,.$$

(Les calculs précédents n'étaient valable que pour q assez grand, donc $\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\geqslant k$, constante convenable; mais le 2e membre de l'inégalité est $\geqslant C\exp\left(-\pi'\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\right)$ donc $\geqslant 1$ pour $\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\leqslant k$ si C est assez grand, donc (5.20.3 quinto) est valable sans restriction.)

Il reste encore le choix de c pour rendre cette inégalité aussi bonne que possible. Nous voulons que, pour $\|u\|_2$ donné, si η tend vers 0, et R vers l'infini, *aussi peu que possible*, ε tende vers 0 *à peu près* comme η. Nous choisirons c de manière que

$$C\exp\left(-\pi'\frac{c^2R^2}{\|u\|_2^2}\right)=C\eta^2\ ,\quad\text{soit,}\quad c=\frac{\|u\|_2}{R\sqrt{\pi'}}\cdot\sqrt{2\log\frac{1}{\eta}}\ ,$$

et alors on aura, maintenant l'inégalité

$$\text{(5.20.3 sexto)}\qquad \varepsilon\geqslant\frac{(1+C\eta)\eta}{\left(1-\frac{2\|u\|_2}{R\sqrt{\pi'}}\sqrt{2\log\frac{1}{\eta}}\right)^+}\,.$$

On voit que, pour $\|u\|_2$ donné, si η tend vers 0, on pourra prendre un ε, certes $>\eta$, mais tel que ε/η tende vers 1, en choisissant simplement R tel que $\dfrac{R}{\sqrt{\log\dfrac{1}{\eta}}}$ tende ver $+\infty$.

On peut conclure:

COROLLAIRE (5.20.3 septimo).

1) *Pour tout* $\eta>0$, *et tout* $\varepsilon>\eta$, *il existe* σ *assez petit pour que l'on ait la propriété suivante: si* E *et* G *sont des espaces hilbertiens, si* u *est une application linéaire de Hilbert-Schmidt de* E *dans* G, *avec* $\|u\|_2/R\leqslant\sigma$, *si* λ *est une probabilité cylindrique sur* E, *de type* 0, *scalairement concentrée à* η *près sur la boule unité, alors* $u(\lambda)$ *est de Radon, concentrée à* ε *près sur la boule de rayon* R.

2) *Il existe des constantes universelles,* A, B, *ayant la propriétés suivante. Si* u *est une application de Hilbert-Schmidt d'un Hilbert* E *dans un Hilbert* G, *si* λ *est une probabilité cylindrique de type* 0 *sur* E, *scalairement concentrée à* η *près sur* E, *alors* $u(\lambda)$ *est une probabilité de Radon sur* G, *concentrée à* ε *près sur la boule de rayon* R, *avec*

$$\text{(5.20.3 septimo)}\qquad \varepsilon=\frac{\eta(1+A\eta)}{\left(1-B\dfrac{\|u\|_2}{R}\sqrt{\log\dfrac{1}{\eta}}\right)^+}\,.$$

Ces inégalités sont bien meilleures que celles de SCHWARTZ [1], 2^e partie, chap. III, § 2, lemme 1. A ce moment, nous avions une majoration en $\mathrm{Max}\,(\eta, S)$, $S=\|u\|_2/R$; pour obtenir une quantité ε de l'ordre de η, on devait faire S de l'ordre de η. Maintenant pour obtenir ε de l'ordre de η, on doit simplement faire S petit devant $1/\sqrt{\log 1/\eta}$; et on peut en outre, comme nous venons de le voir, obtenir $\varepsilon>\eta$ arbitraire, pourvu que S soit assez petit.

PROPOSITION (5.20.4). *Soit* u *une applicatioon linéaire continue d'un Hilbert* E *dans un Banach* G. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) u *est* 2-*radonifiante*;

b) u *est* p-*radonifiante pour tout* $p\geqslant 0$;

c) u *admet une factorisation* $E\to L\to G$, *où les applications sont continues,* L *est un Hilbert, et* $E\to L$ *est de Hilbert-Schmidt*;

d) *pour toute base hilbertienne* $(e_i)_{i\in I}$ *de* E, $\sum_{i\in I}\|u(e_i)\|^2<+\infty$;

e) ${}^tu$ *se factorise par* $G'\to L'\to E'$, *où les applications sont continues,* L' *est un Hilbert, et* $L'\to E'$ *est de Hilbert-Schmidt.*

Si ces propriétés sont réalisées, ${}^tu$ *est* p-*radonifiante de* $\sigma(G', G)$ *dans* E'

pour tout $p \geqslant 0$. Plus généralement, si l'image $u(\gamma)$ par u de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E_R est de Radon dans $\sigma(G'', G')$, alors ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E', pour tout $p \geqslant 0$.

On a enfin, si u est 2-radonifiante, et si $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, les inégalités suivantes, pour $p \leqslant 2$:

$$(5.20.5) \qquad \pi_p(u) \leqslant \|\gamma_0\|_p^{-1} \|\gamma_0\|_2 \pi_2(u) \ , \quad \pi_p({}^t u) \leqslant \|\gamma_0\|_p^{-1} \|\gamma_0\|_2 \pi_2(u) \ ,$$

γ_0 étant la probabilité de Gauss normale sur $\boldsymbol{R}$. En particulier, quand p tend vers 0, $\pi_p(u)$ et $\pi_p({}^t u)$ ont des limites finies, $\pi_0(u)$, $\pi_0({}^t u)$, avec

$$(5.20.6) \qquad \pi_0(u) \leqslant \|\gamma_0\|_0^{-1} \|\gamma_0\|_2 \pi_2(u) \ , \quad \pi_0({}^t u) \leqslant \|\gamma_0\|_0^{-1} \|\gamma_0\|_2 \pi_2(u)$$

DÉMONSTRATION. On peut toujours supposer $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ (voir (3.3 ter)).

A) Supposons a. Alors u admet une factorisation de Pietsch (3.6), 2. Alors $E \to C(X) \to L^2(X, \nu)$ est de Hilbert-Schmidt, donc aussi $E \to L$. Donc a implique c.

B) Un opérateur de Hilbert-Schmidt est p-radonifiant pour tout $p \geqslant 0$, d'après la proposition précédente, donc c implique b, qui implique trivialement a. Donc a, b, c, sont équivalentes.

C) Ensuite c implique trivialement d. L'implication d $\Longrightarrow$ a est un théorème de SŁOWIKOWSKI [46]; donc d est équivalente à a, b, c.

D) Bien évidemment c implique e par transposition. Inversement supposons e. Par transposition, on en déduit une factorisation de ${}^{tt}u$: $E \to L \to G''$. Mais, si L_0 est l'image de E par la première application, son image dans G'' est nécessairement dans G, donc u admet la factorisation $E \to \bar{L}_0 \to G$, donc e implique c, et toutes les propriétés sont bien équivalentes.

E) Si les propriétés précédentes sont réalisées, $L' \to E'$ est p-radonifiante pour tout $p \geqslant 0$, et $\sigma(G', G) \to L'$ est transposée de $L \to G$ continue, donc le 1) de (2.12) dit que ${}^t u$ est p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E'.

F) Supposons que l'image $u(\gamma)$ de la probabilité cylindrique de Gauss de E soit de Radon dans $\sigma(G'', G')$. Le théorème de dualité (5.19) dit, puisque γ est de cotype p par (5.4 bis), que ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans $\sigma(E', E)$, donc dans E' par PHILLIPS.

G) Supposons u 2-radonifiante. La factorisation de Pietsch, utilisée dans la partie A de la démonstration, donne une $E \to L$ de Hilbert-Schmidt, de norme Hilbert-Schmidt $\leqslant 1$; comme $L \xrightarrow{u_2} G$ est de norme $\|u_2\| \leqslant \pi_2(u)$, les résultats de la proposition (5.20.1) donnent les inégalités (5.20.5) relatives à $\pi_p(u)$. L'utilisation de l'application de Hilbert-Schmidt $L' \to E'$, de norme Hilbert-Schmidt $\leqslant 1$, donne pour

[46] SŁOWIKOWSKY [1].

${}^t u: G' \xrightarrow{{}^t u_2} L' \rightarrow E'$ les inégalités (5.20.5) relatives à $\pi_p({}^t u)$. Et (5.20.6) résulte de (5.20.5) en faisant tendre p vers 0.

REMARQUE 1. Sans supposer u 2-radonifiante, supposons seulement que l'image $u(\gamma)$ de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E soit de Radon dans $\sigma(G'', G')$. Il résulte en tout cas du théorème de SHEPP-LANDAU (2.1.8 ter) que $u(\gamma)$ est de tout ordre fini, donc $\|u(\gamma)\|_2 < +\infty$. Alors le théorème de dualité appliqué à l'indice p, $0 < p \leqslant 2$, et la formule (5.20), montrent en tout cas que, pour tout $p \leqslant 2$:

$$\pi_p({}^t u) \leqslant \|\gamma_0\|_p^{-1} \|u(\gamma)\|_2 .$$

Il en résulte encore que $\pi_p({}^t u)$ a une limite finie quand p tend vers 0. [47]

REMARQUE 2. Si l'on suppose seulement qu'il existe *une* base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$ de E telle que $\sum_{i \in I} \|u(e_i)\|^2 < +\infty$, cela entraîne une décomposition ${}^t u = \sum_{n \in N} \alpha_n e'_n \otimes g_n$, avec $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^2 < +\infty$, $(e'_n)_{n \in N}$ scalairement l^2, $(g_n)_{n \in N}$ bornée, donc ${}^t u$ est 2-nucléaire a gauche de $\sigma(G', G)$ dans E', donc, (par (3.8.4)), 2-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans E', avec $\pi_2(u) \leqslant (\sum_{n \in N} |\alpha_n|^2)^{1/2} = (\sum_{i \in I} \|u(e_i)\|^2)^{1/2}$.

(5.21) *Le théorème de dualité en situation générale.*

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[d, hook] & G \arrow[l, "v"'] \arrow[dd, hook] & & & \mathscr{E}' \arrow[r, "u"] \arrow[dd, hook] & \mathscr{G}' \arrow[d, hook] & \\
\alpha & U \arrow[d, hook] & & & & & V & \beta \\
\tilde{\alpha} \quad v(\rho) & \mathscr{E} & \mathscr{G} \arrow[l, "v"] & \rho & \lambda & E' \arrow[r, "u"] & G' \arrow[u, hook'] & u(\lambda) \quad \tilde{\beta}
\end{tikzcd}$$

Figure

Les théorèmes de dualité (5,15), (5,17), (5,19), ne sont pas tout-à-fait assez généraux pour les applications. On doit souvent se placer dans une situation plus compliquée.

Soient E, G, $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$, des espaces vectoriels topologiques, séparés par leurs duals. On suppose E contenu dans $\mathscr{E}$, avec une injection linéaire continue et dense, et de même G dans $\mathscr{G}$. Alors, par transposition, on a aussi $\mathscr{E}' \subset E'$, avec injection linéaire continuestet dense pour les topologies $*$-faibles, et de même pour $\mathscr{G}'$ et G'. Supposons alors v linéaire faiblement continue de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{E}$, opérant aussi, par restriction, comme application linéaire faiblement continue de G dans E. Alors $u = {}^t v$ aura les mêmes propriétés: $\sigma(E', E) \rightarrow \sigma(G', G)$, et $\sigma(\mathscr{E}', \mathscr{E}) \mapsto \sigma(\mathscr{G}', \mathscr{G})$.

Soient maintenant $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ des fonctions $\geqslant 0$ semi-continues inférieurement sur

---

[47] Un résultat récent de MAUREY [1] montre que, dans tous les cas, si $\pi_p(v) < +\infty$ pour un $p < 1$, il tend vers une limite finie quand p tend vers 0.

$\mathscr{E}$, $\sigma(G', G)$, respectivement. On supposera $\tilde{\beta}$ compacte. Soit ρ une probabilité cylindrique sur $\mathscr{G}$, de cotype $(\bar{B}, \tilde{\beta})$, dont l'image $v(\rho)$ dans $\mathscr{E}$ soit de Radon, d'ordre $(\bar{A}, \tilde{\alpha})$. D'après le théorème de dualité (5.17), si les poids A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, vérifient la règle de Fubini $(B, \bar{B}) \leqslant (\bar{A}, A)$, et si B est compact, l'application u, de $\sigma(\mathscr{E}', \mathscr{E})$ dans $\sigma(\mathscr{G}', \mathscr{G})$, est approximativement $(A, \tilde{\alpha}; B, \tilde{\beta})$-radonifiante. Mais, dans la pratique, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ seront de très gros espaces, donc $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{G}'$ très petits, et ce résultat est donc très insuffisant. On voudrait que u, qui opère aussi de $\sigma(E', E)$ dans $\sigma(G', G)$, soit radonifiante; or E et G sont très petits, donc E' et G' très gros, ce qui donnera donc un bon résultat.

Introduisons un sous-espace vectoriel topologique U, contenu dans $\mathscr{E}$ et contenant E, avec des injections linéaires continues $E \subsetneq U \subsetneq \mathscr{E}$, E non nécessairement dense dans U. On remplacera $\tilde{\alpha}$ par α, fonction $\geqslant 0$ définie et semi-continue inférieurement sur U seulement. Mais on supposera que $v(\rho)$, probabilité de Radon sur $\mathscr{E}$, *provient d'une* probabilité de Radon, nécessairement unique, ν sur U, d'ordre $(\bar{A}, \alpha)$ sur U.

Enfin V sera un sous-espace de G' contenant $\mathscr{G}'$, avec injection continue de V dans $\sigma(G' G)$, rien n'étant supposé sur l'injection de $\mathscr{G}'$ dans V. Et β sera seulement une fonction $\geqslant 0$ définie et compacte sur V. On introduira alors les définitions:

DEFINITIONS (5.22). 1) *Une probabilité cylindrique λ sur $\sigma(E', E)$ est dite de type $(\mathscr{E}', U)$-(A, α)-approximable, si elle est limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j sur $\sigma(E', E)$, portees par des compacts de dimension finie de $\mathscr{E}'$, et vérifiant, pour tout $e \in U$ $(U \subset \mathscr{E})$: $A(e(\lambda_j)) \leqslant \alpha(e)$.*

2) *L'application linéaire u est dite approximativement $(\mathscr{E}', U)$-$(A, \alpha; B, \beta)$-radonifiante, si, pour toute λ cylindrique sur $\sigma(E', E)$, de type $(\mathscr{E}', U)$-(A, α)-approximable, $u(\lambda)$ est une probabilité de Radon sur $\sigma(G', G)$, provenant d'une probabilité de Radon (nécessairement unique) Λ sur V, d'ordre (B, β).*

N. B. On doit dire que $u(\lambda)$ *provient* de Λ et non qu'elle *est* une probabilité de Radon Λ sur V, car u n'est pas une application linéaire faiblement continue de $\sigma(E', E)$ dans V (voir remarque après corollaire (1.18 ter)). Aussi notre dénomination "radonifiante dans V" est-elle abusive; mais il n'y a pas de confusion possible, car elle est relative au diagramme complet avec E, G, $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$ et leurs duals, U et V.

Exemple simple. Prenons $E = G = \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$, espace des fonctions C^∞ sur $\boldsymbol{R}^n$ à support compact; $\mathscr{E} = \mathscr{G} = \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$, espace des distributions, muni de la topologie $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$. On pourra, pour U et V, prendre L^2, avec sa topologie hilbertienne, aussi bien que L^∞ avec sa topologie normée ou sa topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Dans le cas de L^∞ fort, E n'est pas dense dans U, $\mathscr{G}'$ n'est pas dense dans V; dans le cas de L^2 ou L^∞ forts, $\sigma(\mathscr{G}', \mathscr{G})\to V$ n'est pas continue.

Le théorème de dualité général s'énonce alors:

THÉORÈME DE DUALITÉ GÉNÉRAL (5.23). *Soient E, G, $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$, U, V, des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals. On suppose que $G\subset\mathscr{G}$ avec une injection continue dense, $E\subset U\subset\mathscr{E}$ avec des injections continues, E dense dans $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}'\subset V\subset G'$, avec une injection continue $V\subsetneq\sigma(G', G)$. On suppose que v est une application linéaire faiblement continue de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{E}$, ainsi que de G dans E. Soient A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, des poids satisfaisant à la règle d'interversion de Fubini (5,9): $(B, \bar{B})\leqslant(\bar{A}, A)$; on suppose B compact. Soit β une fonction $\geqslant 0$ compacte sur V, α une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur U. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\mathscr{G}$, de cotype $(\bar{B}, \beta)$, d'image $v(\rho)$ dans $\mathscr{E}$, provenant d'une probabilité de Radon ν d'ordre $(\bar{A}, \alpha)$ sur U. Alors u est approximativement $(\mathscr{E}', U)$-$(A, \alpha; B, \beta)$-radonifiante de $\sigma(E', E)$ dans V.*

DÉMONSTRATION. 1) Soit λ une probabilité de Radon sur $\mathscr{G}'$, portée par un compact de dimension finie, telle que, pour tout $e\in U$, $A(e(\lambda))\leqslant\alpha(e)$. Alors $u(\lambda)$ est forcément de Radon sur $\mathscr{G}'$, portée par un compact de dimension finie; montrons que $B(\beta(u(\lambda)))\leqslant 1$. Le calcul est exactement le même que pour la proposition (5.8), nous ne le donnerons que succinctement.

$$(5.24)\qquad B(u(\lambda), \beta)=B(\lambda, \beta\circ u)=B(d\lambda(e'), \beta(u(e'))) ,$$

où e' parcourt $\mathscr{E}'$, qui porte λ.

Pour $e'\in\mathscr{E}'$, donc $u(e')\in\mathscr{G}'$:

$$(5.25)\qquad \beta(u(e'))\leqslant\bar{B}((ue')(\rho))=\bar{B}(e'(v(\rho)))=\bar{B}(e'(\nu))=\bar{B}(d\nu(e), |\langle e', e\rangle|) ,$$

où e parcourt $\mathscr{E}$, et $e'\in\mathscr{E}'$. Donc:

$$(5.26)\qquad B(u(\lambda), \beta)\leqslant B(d\lambda(e'), \bar{B}(d\nu(e), |\langle e', e\rangle|)) .$$

Mais $(e', e)\mapsto|\langle e', e\rangle|$ est continue sur le produit d'un sous espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{E}'$ par $\mathscr{E}$, donc $(\lambda\otimes\nu)$-mesurable, donc:

$$(5.27)\qquad B(u(\lambda), \beta)\leqslant\bar{A}(d\nu(e), A(d\lambda(e'), |\langle e', e\rangle|))=\bar{A}(d\nu(e), A(e(\lambda))) .$$

Mais ν est portée par U, de Radon sur U, et, pour $e\in U$, $A(e(\lambda))\leqslant\alpha(e)$. Alors

$$(5.28)\qquad B(u(\lambda), \beta)\leqslant\bar{A}(\nu, \alpha)\leqslant 1 .$$

2) Soit maintenant λ cylindrique sur $\sigma(E', E)$, de type $(\mathscr{E}', U)$-(A, α)-approximable. Soient λ_j des probabilités de Radon convergeant cylindriquement vers λ,

et vérifiant les conditions de 1). Alors toutes les $u(\lambda_j)$ sont de Radon, et proviennent de probabilités de Radon Λ_j sur V, d'ordre (B, β). Puisque B est compact, et que β est compacte sur V, l'ensemble des probabilités de Radon d'ordre (B, β) sur V est un compact pour la topologie cylindrique sur $\check{\mathscr{P}}(V)$ (théorème (1.17)). Quitte à remplacer les λ_j par un filtre plus fin, on peut donc supposer que les Λ_j ont une limite Λ dans $\check{\mathscr{P}}(V)$, Λ de Radon d'ordre (B, β) sur V. Alors l'image de Λ dans $\sigma(G', G)$ est nécessairement la limite cylindrique des $u(\lambda_j)$, donc $u(\lambda)$, et $u(\lambda)$ provient bien de Λ, probabilité de Radon sur V, d'ordre (B, β).

CQFD.

Remarque. Bien entendu, si $G = \mathscr{G} = \sigma(V', V)$, $E = \mathscr{E} = U$, on retrouve exactement le théorème (5.15).

(5.29) *Elimination des propriétés spéciales d'approximation.*

La propriété de $(\mathscr{E}', U)$-approximation est évidemment très compliquée. Il importe de l'éliminer, et de se ramener à la propriété d'approximation ordinaire déjà utilisée, et que l'on sait elle-même éliminer dans les cas usuels.

Proposition (5.29). *Soient α, $\bar{\alpha}$, semi-continues inférieurement $\geqslant 0$ sur U. Supposons qu'il existe des applications linéaires faiblement continues π_j de $\mathscr{E}$ dans E, telles que, pour $e \in E, e' \in E'$, $\lim_j \langle \pi_j e, e' \rangle = \langle e, e' \rangle$ (autrement dit, les π_j convergent vers l'identité sur E pour la convergence simple faible), et que, pour tout $e \in U$, $\alpha(\pi_j(e)) \leqslant \bar{\alpha}(e)$. Alors toute probabilité cylindrique sur $\sigma(E', E)$, de type (A, α)-approximable, est de type $(\mathscr{E}', U)$-$(A, \bar{\alpha})$-approximable.*

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer que, si λ est une probabilité de Radon sur E', portée par un compact de dimension finie, de type (A, α), elle est de type $(\mathscr{E}', U)$-$(A, \bar{\alpha})$-approximable. Or posons $\lambda_j = {}^t\pi_j(\lambda)$; puisque π_j est faiblement continue de $\mathscr{E}$ dans E, ${}^t\pi_j$ est continue de $\sigma(E', E)$ dans $\sigma(\mathscr{E}', \mathscr{E})$, donc λ_j est une probabilité de Radon portée par un compact d'un sous-espace de dimension finie de $\mathscr{E}'$. Pour $e \in U$, $\pi_j(e)$ est dans E; on a donc, puisque λ est de type (A, α):

$$A(e(\lambda_j)) = A(e({}^t\pi_j(\lambda))) = A((\pi_j(e))(\lambda)) \leqslant \alpha(\pi_j(e)) \leqslant \bar{\alpha}(e) .$$

Donc λ_j est de type $(\mathscr{E}', U)$-$(A, \bar{\alpha})$. Il reste à voir que les λ_j convergent vers λ, cylindriquement dans $\sigma(E', E)$. Or elles convergent même étroitement. En effet, les ${}^t\pi_j$ convergent vers l'identité sur $\sigma(E', E)$, simplement donc uniformément sur tout compact de dimension finie, donc uniformément sur le support de λ; on sait qu'alors les ${}^t\pi_j(\lambda)$ convergent étroitement vers λ.

(5.30) Supposons désormais que A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, soient des poids homogènes. Changeons les notations, comme nous l'avons fait pour la variante du corollaire (5.15). Sup-

posons que U et V soient des espaces bitopologiques. Nous dirons que ρ est de cotype $(\bar{B}, V)$, pour dire qu'elle est de cotype $\bar{B}$ sur $\mathscr{G}$ relativement à la topologie induite sur $\mathscr{G}'$ par la quasi-norme de V, et que λ est de type (A, U)-approximable, pour dire qu'elle est de type A approximable, sur $\sigma(E', E)$, relativement à la topologie induite sur E par la quasi-norme de U. Cela permettre d'introduire des quantités $A_U^{*a}(\lambda)$, ${}^*\bar{B}_V(\rho)$. Si alors $v(\rho)$ provient d'une probabilité de Radon ν sur U, nous appellerons $\bar{A}_V(v(\rho))$ la quantité $\bar{A}(\nu, \| \ \|_{2U})$; et, si $u(\lambda)$ provient d'une probabilité de Radon Λ sur V, nous appellerons $B_V(u(\lambda))$ la quantité $B(\Lambda, \| \ \|_{2V})$. Plus précisément:

$$(5.31)\quad \begin{cases} {}^*\bar{B}_V(\rho) = (\operatorname*{Inf}_{g'} \bar{B}(g'(\rho)))^{-1}, \quad \text{pour} \quad g' \in \mathscr{G}', \ \|g'\|_{2V} \geq 1; \\ \bar{A}_U(v(\rho)) = \bar{A}(\nu, \| \ \|_{2U}); \\ A_U^*(\lambda) = (\operatorname*{Sup}_{e} A(e(\lambda))), \quad \text{pour} \quad e \in E, \ \|e\|_{2U} \leq 1; \\ B_V(u(\lambda)) = B(\Lambda, \| \ \|_{2V}). \end{cases}$$

Alors on aura le théorème suivant, dont les applications s'avèreront très automatiques:

THÉORÈME DE DUALITÉ GÉNÉRAL POUR LES QUASI-BANACH (5.32). *Soient E, $\mathscr{E}$, G, $\mathscr{G}$, comme au théorème* (5.23). *Soit U un espace bitopologique, $E \subset U \subset \mathscr{E}$, les injections étant continues. On suppose qu'il existe des applications linéaires faiblement continues π_j de $\mathscr{E}$ dans E, convergeant vers l'identité dans E pour la convergence simple faible, et un $c \geq 0$ tel que $\|\pi_j(e)\|_U \leq c\|e\|_U$ pour tout $e \in U$. Soit V un espace vectoriel bitopologique, $\mathscr{G}' \subset V \subset \sigma(G', G)$, la 2ème injection étant continue; on suppose la quasi-norme de V compacte pour sa 1ère topologie. Soient A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, des poids vérifiant l'inégalité de Fubini $(B, \bar{B}) \leq (\bar{A}, A)$. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\mathscr{G}$, de cotype $(\bar{B}, V)$, dont l'image $v(\rho)$ soit de Radon sur $\mathscr{E}$, provenant d'une probabilité de Radon ν sur U, d'ordre $\bar{A}$. Alors, pour toute probabilité cylindrique λ sur $\sigma(E', E)$, de type (A, U)-approximable, l'image $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(G', G)$, et provient d'une probabilité de Radon Λ sur V, d'ordre B. En outre, on a l'inégalité*:

$$(5.33)\qquad B_V(u(\lambda)) \leq c\, {}^*\bar{B}_V(\rho) \bar{A}_U(v(\rho)) A_U^{*a}(\lambda)\,.$$

Tout a maintenant été démontré; la proposition (5.29) s'applique avec $\bar{\alpha} = c\alpha$. L'inégalité (5.33) se démontre comme (5.18). En particulier:

COROLLAIRE (5.34). *Dans les mêmes conditions que pour* (5.32), *s'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\mathscr{G}$, de cotype (p, V), $0 \leq p \leq +\infty$, dont l'image*

$v(\rho)$ provienne d'une probabilité de Radon d'ordre p sur U, alors, pour toute probabilité cylindrique λ sur $\sigma(E', E)$, de type (p, U)-approximable, $u(\lambda)$ provient d'une probabilité de Radon d'ordre p sur V. En outre, pour $p>0$:

(5.35) $$\|u(\lambda)\|_{p,V} \leqslant c^* \|\rho\|_{p,V} \|v(\rho)\|_{p,U} \|\lambda\|^{*a}_{p,U} .$$

DÉMONSTRATION. Le cas $p>0$ résulte du théorème précédent avec $A=B=\bar{A}=\bar{B}=\| \ \|_p$. Supposons $p=0$. Puisque ρ est de cotype $(0, V)$, il existe un $\delta>0$ tel qu'elle soit de cotype (J_δ, V). Ensuite ν est de Radon sur U, donc il existe un J-poids $\bar{A}$ de la forme (1.12), tel que ν soit d'ordre $\bar{A}$. Soit enfin λ cylindrique sur $\sigma(E', E)$, de type $(0, U)$-approximable; il existe un J-poids A, tel que λ soit de type (A, U)-approximable. D'après la proposition (5.7.16), il existe alors un J-poids B, tel que l'on ait Fubini (5.9): $(B, J_\delta) \leqslant (\bar{A}, A)$. On applique alors le théorème précédent: $u(\lambda)$ provient d'une probabilité de Radon d'ordre B sur U, donc en particulier de Radon sur U.

(5.36) *Retour aux applications radonifiantes usuelles.*

Supposons réalisées toutes les conditions du théorème (5.32). On serait heureux de pouvoir maintenant dire que, d'une certaine manière, u est radonifiante au sens des §§ antérieurs, en supprimant tout le complexe E, $\mathscr{E}$, etc..., qui aura simplement servi à le prouver.

A partir de U nous construirons d'abord U_0, adhérence de E dans ${}_2U$ (2ème topologie!), que nous munirons de la topologie quasi-normée induite par ${}_2U$ (on devra supposer l'injection $E \subset {}_2U$ continue); nous supposerons ${}_2U$ complet, donc U_0 est un quasi-Banach; et c'est son dual U_0' qui interviendra, comme premier espace, soit avec la topologie U_0' de Banach, soit avec la topologie $\sigma(U_0', U_0)$ de dual $*$-faible de quasi-Banach U_0; U_0' jouera le rôle de E, ou $\sigma(U_0', U_0)$ le rôle de $\sigma(F', F)$ du § 3. Le deuxième espace est tantôt ${}_2V$, muni de sa quasi-norme, qui est complet puisque la quasi-boule de ${}_2V$ est compacte dans ${}_1V=V$, tantôt ${}_1V=V$. C'est lui qui sera l'espace G du § 3 (qui pourra être un $\sigma(H', H)$ dans le cas de ${}_1V$). On aura besoin de savoir que $u={}^tv$ envoie U_0' dans V, et qu'elle est faiblement continue, soit de U_0' dans ${}_2V$ ou V, soit de $\sigma(U_0', U_0)$ dans ${}_2V$ ou V.

PROPOSITION (5.36). *Supposées réalisées toutes les conditions du théorème (5.32), et en outre l'injection de E dans ${}_2U$ continue, ${}_2U$ complet, et le poids A plus fort que L^0. Soit U_0 l'adhérence de E dans ${}_2U$, qu'on munira de la topologie quasi-normée induite par ${}_2U$.*

1) L'injection canonique $\sigma(U_0', U_0) \xrightarrow{j} \sigma(E', E)$ définit une bijection $\tilde{j}: \tilde{\lambda} \mapsto \lambda$, de l'ensemble des probabilités cylindriques sur $\sigma(U_0', U_0)$ de type A, sur l'ensemble des probabilités cylindriques sur $\sigma(E', E)$, de type (A, U) et

(5.37) $$A^*(\bar\lambda)=A_U^*(\lambda)\ .$$

2) *Si U_0 a la propriété d'approximation métrique, toute probabilité cylindrique λ sur $\sigma(E',E)$, de type (A,U), est de type (A,U) approximable, et $A_U^{*a}(\lambda)=A_U^*(\lambda)$.*

3) *L'application u envoie le sous-espace U_0' de E' dans V; elle est toujours continue de U_0' (muni de sa topologie normée de dual), dans ${}_2V$, muni de sa 2ème topologie (de quasi-Banach); elle est aussi continue de $\sigma(U_0',U_0)$ dans $\sigma({}_2V,({}_2V)')$ ou dans $\sigma(V,V')$, si ${}_2U$ est un Banach réflexif.*

4) *L'application u est approximativement (A,B)-radonifiante de U_0' dans $\sigma(({}_2V)'',({}_2V)')$ (dans ${}_2V$ si c'est un Banach réflexif); de $\sigma(U_0',U_0)$ dans $\sigma(({}_2V)'',({}_2V)')$ (dans ${}_2V$ si c'est un Banach réflexif) ou dans V, si elle est faiblement continue de $\sigma(U_0',U_0)$ dans ${}_2V$ ou V. Dans ce cas, pour toute $\bar\lambda$ cylindrique de type A-approximable sur U_0' ou $\sigma(U_0',U_0)$, suivant le cas considéré, on a*

(5.38) $$B(u(\bar\lambda))\leqslant c\ {}^*\bar B_V(\rho)\bar A_U(v(\rho))A^{*a}(\bar\lambda)\ .$$

5) *Ces résultats sont valables si on remplace partout A, B, $\bar A$, $\bar B$, par p, $0\leqslant p\leqslant+\infty$; et, pour $p>0$:*

(5.38 bis) $$\|u(\bar\lambda)\|_p\leqslant c\ {}^*\|\rho\|_{p,V}\|v(\rho)\|_{p,U}\|\bar\lambda\|_p^{*a}\ .$$

DÉMONSTRATION. 1) Tout d'abord, les injections continues denses $E\to U_0\to\mathscr{E}$ donnent des injections continues $*$-faiblement denses $\mathscr{E}'\to U_0'\to E'$, qui permettent d'identifier U_0' à un sous-espace de E'. Alors on a bien une injection $\sigma(U_0',U_0)\xrightarrow{j}\sigma(E',E)$, donc une application correspondante $\tilde j:\bar\lambda\mapsto\lambda$ pour les probabilités cylindriques; et il est évident que l'image d'une probabilité cylindriques $\bar\lambda$ de $\sigma(U_0',U_0)$, de type A, est de type (A,U) dans $\sigma(E',E)$, et que $A_U^*(\lambda)\leqslant A^*(\bar\lambda)$; car ces deux quantités sont les bornes supérieures de $A(e(\bar\lambda))$, pour $e\in E$, $\|e\|_U\leqslant1$ s'il s'agit de la première, pour $e\in U_0$, $\|e\|_U\leqslant1$ s'il s'agit de la deuxième. Nous devons montrer que $\tilde j$ est bijective entre les ensembles indiqués. Montrons d'abord qu'elle est injective. Soient $\bar\lambda_1$, $\bar\lambda_2$, des probabilités cylindriques sur $\sigma(U_0',U_0)$, de même image dans $\sigma(E',E)$; cela veut dire que $e(\bar\lambda_1)=e(\bar\lambda_2)$ pour tout $e\in E$. Mais, A étant plus fort que L^0, (2.1.1) et (2.1.5) montrent que $e\mapsto e(\bar\lambda_1)$ et $e\mapsto e(\bar\lambda_2)$ sont continues de U_0 dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$, donc elles coincident sur U_0, dans lequel E est dense; donc $\bar\lambda_1=\bar\lambda_2$.

Montrons qu'elle est surjective. Soit donc λ une probabilité cylindrique sur $\sigma(E',E)$, de type (A,U). Elle peut s'écrire comme une λ_f, où f est une application linéaire de E dans un $L^0(\Omega,\mu)$, continue sur E_{U_0}, E muni de la topologie de la quasi-norme de U_0, puisque A est plus fort que L^0. Mais alors, E étant dense dans U_0, elle se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{f}$ de U_0 dans $L^0(\Omega, \mu)$; celle-ci définit une probabilité cylindrique $\tilde{\lambda}=\lambda_{\tilde{f}}$ sur $\sigma(U_0', U_0)$, ayant précisément pour image $\tilde{j}(\tilde{\lambda})=\lambda$. Soit $e \in U_0$; soit $(e_n)_{n\in N}$ une suite de E tendant vers dans U_0. Les $\tilde{f}(e_n)$ convergent vers $\tilde{f}(e)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$; donc les $e_n(\tilde{\lambda})=(\tilde{f}(e_n))(\mu)$ vers $e(\tilde{\lambda})=(\tilde{f}(e))(\mu)$ dans $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$; la semi-continuité inférieure du poids A donne

$$A(e(\tilde{\lambda}))\leqslant \liminf_n A(e_n(\tilde{\lambda}))=\liminf_n A(e_n(\lambda))\leqslant \liminf_n A_U^*(\lambda)\|e_n\|=A_U^*(\lambda)\|e\| \ .$$

Donc $\tilde{\lambda}$ est de type A sur $\sigma(U_0', U_0)$, et $A^*(\tilde{\lambda})\leqslant A_U^*(\lambda)$, ce qui démontre la partie 1).

REMARQUE. Si $\tilde{\lambda}$ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(U_0', U_0)$, de type A approximable, alors $\lambda=\tilde{j}\ \tilde{\lambda}$ est cylindrique sur $\sigma(E', E)$, de type (A, U) approximable. La réciproque ne me semble pas sûre; même si elle est vraie, la démonstration semble trop compliquée pour l'intérêt du résultat.

2) Supposons que U_0 ait la propriété d'approximation métrique. Soit λ de type (A, U) sur $\sigma(E', E)$; elle provient d'une $\tilde{\lambda}$, de type A sur $\sigma(U_0', U_0)$. Mais alors $\tilde{\lambda}$ est de type A approximable, d'après la proposition (2.8), car $(\sigma(U_0', U_0), U_0)$ a la propriété d'approximation métrique, voir (2.6.4). Donc λ est de type (A, U) approximable.

3) Soit $e' \in U_0'$; alors $\delta_{(e')}$ est de type $(0, U)$, car, si e tend vers 0 dans E_{U_0}, $e(\delta_{(e')})=\delta_{(<e,e'>)}$ tend vers δ. Donc son image $u(\delta_{(e')})$ provient d'une probabilité de Radon sur V, donc $u(e') \in V$. Comme u est continue pour les topologies $\sigma(E', E)$, $\sigma(G', G)$, moins fines que celles de ${}_2V$ et U_0', le théorème du graphe fermé assure que u est continue de U_0' dans ${}_2V$. Mais elle n'est pas nécessairement continue de $\sigma(U_0', U_0)$ dans $\sigma({}_2V, ({}_2V)')$ ou $\sigma(V, V')$; elle l'est sûrement si ${}_2U$ est un Banach réflexif, car alors U_0 l'est aussi, et la continuité de U_0' dans ${}_2V$ entraîne la continuité de $\sigma(U_0', U_0)$ dans $\sigma({}_2V, ({}_2V)')$, a fortiori dans $\sigma(V, V')$.

REMARQUE. Dans la pratique, ce résultat 3) ne peut pas être une belle découverte; il est sûrement toujours visible que u envoie U_0' dans V, bien avant qu'on ait toutes les propriétés des mesures ρ ou λ! De même, le fait que u soit ou non continue de $\sigma(U_0', U_0)$ dans $\sigma({}_2V, ({}_2V)')$ ou $\sigma(V, V')$, doit être visible à l'oeil nu tout de suite.

4) Soit $\tilde{\lambda}$ une probabilité de Radon sur $\sigma(U_0', U_0)$, portée par un compact de dimension finie, de type A; identifions-là à son image dans $\sigma(E', E)$. Alors $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre B dans V, donc aussi dans ${}_2V$ puisque portée par un sous-espace de dimension finie, et l'on a l'inégalité tirée de (5.33) et de (5.37);

(5.39) $$B(u(\bar{\lambda}))\leqslant c\ {}^*\bar{B}_V(\rho)\bar{A}_U(v(\rho))A^*(\bar{\lambda})\ .$$

Dans cette inégalité, $A^*(\bar{\lambda})$ est Sup $A(e(\bar{\lambda}))$ pour e dans la boule unité de U_0; si on prend le Sup pour e dans la boule unité du Banach U_0'', elle est plus grande, et l'inégalité est a fortiori vraie, ce qui permet de considérer $\bar{\lambda}$ indifféremment comme cylindrique sur $\sigma(U_0', U_0)$ ou sur U_0'.

Il suffit d'appliquer le théorème (2.4) pour aboutir aux conclusions désirées, compte tenu de ce que la quasi-boule de $\sigma(({}_2V)'', ({}_2V)')$ est compacte dans cette espace, ou de ce que celle de ${}_2V$ est compacte dans $V={}_1V$. Si, dans l'énoncé, nous devons supposer la continuité faible de u de $\sigma(U_0', U_0)$ dans ${}_2V$ ou V, c'est parce que cela ne semble pas automatique, et que, sans continuité faible, cela n'a même pas de sens de dire que l'application est radonifiante.

5) Le cas $p>0$ se déduit immédiatement de ce qui précède. Pour $p=0$, on remarquera, comme pour le corollaire (5.34), que ρ est d'un cotype (J_δ, V) et d'un ordre $(\bar{A}, U)$, $\bar{A}$ J-poids (compact homogène de la forme (1.12)). Soit alors A un J-poids. Il existe alors un J-poids B, vérifiant Fubini (5.9): $(B, J_\delta)\leqslant(\bar{A}, A)$ d'après la proposition (5.7.16). On peut alors appliquer le 4) précédent, A étant plus fort que L^0; donc u est approximativement (A, B)-radonifiante avec une inégalité (5.38), où $\bar{B}$ est remplacé par J_δ. Alors la condition 4) du théorème (4.1) donne le résultat.

REMARQUE. Ce n'est, apparemment, pas un triomphe; on a seulement obtenu le même résultat qu'au théorème (5.15) ou (5.17), au prix d'échafaudages bien plus compliqués. Mais, comme on le verra par des exemples, c'est ainsi que les choses se présentent souvent en pratique, et non dans la situation simple du théorème (5.17). En outre, comme nous l'avons déjà signalé, et comme les exemples du § 6 le montreront, l'application des précédents théorèmes est remarquablement automatique.

§ 6. Exemples et applications.

(6.I) *Cas d'espaces vectoriels de dimension finie.*

Ces cas sont forcément très élémentaires. Comme toutes les probabilités cylindriques sont de Radon, les hypothèses d'approximation sont toujours réalisées; en outre, la compacité de B et β n'est jamais nécessaire (voir remarque 1 bis après la proposition (5.8)). Le théorème de PROKHOROV (1.1) n'a pas non plus à être utilisé. La seule chose qui interviendra sera la formule d'interversion de Fubini (5.9). En définitive tout devrait être trivial; les exemples (6.2) et (6.3) montreront néanmoins qu'on obtient des applications intéressantes, ce qui prouve que leur caractère trivial n'était pas toujours apparu!

Exemple (6.I.2) *Un théorème de* SALEM-ZYGMUND: *Polynomes trigonométriques aléatoires.*

Nous prendrons $E=G=\mathscr{E}=\mathscr{G}=C^{2N+1}$, $u=$Identité. Nous appliquerons (5.15) ou (5.8). Nous choisirons ρ d'une manière qui va nous rapprocher des espaces de suites qui serout traités en (6.II).

1) Considérons la suite $Z=(Z_n)_{|n|\leqslant N}$ de variables aléatoires, définie par $Z_n(t)=e^{2i\pi nt}$; elles sont relatives à l'espace probabilisé (T, dt), où T est le tore, et dt sa probabilité de Haar. Elles définissent une fonction aléatoire f sur C^{2N+1}, à savoir $c=(c_n)_{\sqrt{|n|}\leqslant N}\mapsto\sum_{|n|\leqslant N}c_nZ_n$, donc une probabilité ρ sur C^{2N+1}, à savoir ρ_f au sens du n° (1.19); f est décomposée (dimension finie!), et ρ est aussi l'image $Z(dt)$ de dt par l'application $Z: t\mapsto(e^{2i\pi nt})_{|n|\leqslant N}$ de T dans C^{2N+1}, et $\sum_{|n|\leqslant N}c_nZ_n$ est la variable aléatoire $f(c)$ ou $\langle Z, c\rangle$.

LEMME (6.I.2; 1). *Soit P un polynome trigonométrique de degré $\leqslant N$, $P(t)=\sum_{|n|\leqslant N}c_ne^{2i\pi nt}$. S'il est majoré en module par M sauf sur un ensemble de valeurs de t de mesure $\leqslant 1/(N+2)$* [48], *il est majoré en module par $2M$ partout.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Ecartons le cas trivial $N=0$. Soit $2M'=\operatorname{Max}_{\omega\in T}|P(t)|$. On sait (BERNSTEIN) que l'on a alors $|P'(t)|\leqslant 2M'N$. Alors, si $|t-t_0|\leqslant 1/2N$, on aura $|P(t)-P(t_0)|\leqslant M'$, donc $|P(t)|\geqslant|P(t_0)|-M'$. Or il existe un t_0 tel que $|P(t_0)|=2M'$, donc, sur tout un intervalle de centre t_0 et de rayon $1/2N$, donc de mesure $1/N$, on aura $|P(t)|\geqslant M'$. Si donc l'ensemble des t pour lesquels $|P(t)|>M$ est de mesure $\leqslant 1/(N+2)$ donc $<1/N$, on a nécessairement $M'\leqslant M$, ce qui démontre le lemme.

Revenons alors à ce qui précède. Si on suppose

$$J_{1/(N+2)}(dt, \langle Z, c\rangle)=J_{1/(N+2)}(dt, f(c))\leqslant M\,,$$

c. à d. si

$$\operatorname{Mes}\{t\in T;\ |\sum_{|n|\leqslant N}c_ne^{2i\pi nt}|>M\}\leqslant\frac{1}{N+2}\,,$$

le lemme nous dit que

$$\operatorname*{Max}_{t\in T}|\sum_{|n|\leqslant N}c_ne^{2i\pi nt}|\leqslant 2M\,.$$

Soit β la norme sur C^{2N+1} définie par:

$$\beta(c)=\frac{1}{2}\operatorname*{Max}_{t\in T}|\sum_{|n|\leqslant N}c_ne^{2i\pi nt}|\,; \tag{6.I.2; 2}$$

[48] On peut remplacer $N+2$ par N, sauf pour $N=0$ ou 1, ou par $N+1$, sauf pour $N=0$.

c'est la demi-norme de $V=\mathscr{F}L^{\infty}$ (parce que c'est la demi-norme, dans $L^{\infty}(T, dt)$, du polynôme trigonométrique $\bar{\mathscr{F}}c$, image par Fourier de la suite finie $c\in C^{2N+1}$); le lemme nous dit donc que

$$\beta(c)\leqslant J_{1/(N+2)}(dt, f(c))=J_{1/(N+2)}(c(\rho))\ ,$$

donc que ρ est de cotype $(J_{1/(N+2)}, \beta)$.

Par ailleurs on a $|Z_n(t)|=1$, donc $\varphi(t)$ est μ-presque sûrement dans la boule unité de C^{2N+1} pour la norme l^{∞}, c. à d. la norme α, $\alpha(c)=\operatorname*{Max}_{|n|\leqslant N}|c_n|$, de $U=l^{\infty}$. Donc ρ est d'ordre $(\|\ \|_{\infty}, \alpha)$ ou encore (J_0, α) (le poids J_0 est aussi le poids $\|\ \|_{\infty}$). Nous avons donc trouvé une probabilité ρ sur C^{2N+1}, de cotype $(\bar{B}, \beta)$, d'ordre $(\bar{A}, \alpha)$, avec $\bar{B}=J_{1/(N+2)}$, $\bar{A}=J_0$ ou $\|\ \|_{\infty}$, β=demi-norme $\mathscr{F}L^{\infty}$, α=norme l^{∞}. Donc l'application identique de C^{2N+1} est $(A, \alpha; B, \beta)$-radonifiante, si l'on a l'inégalité de Fubini (5.9); celle-ci est vérifiée, d'après (5.7.3), si l'on a

$$B=J_{\varepsilon},\quad A=J_{\eta},\quad \frac{\varepsilon}{N+2}\geqslant\eta\ . \tag{6.I.2;3}$$

On a donc démontré:

PROPOSITION (6.I.2;4) *L'application identique de C^{2N+1} est $(J_{\eta}, \alpha; J_{\varepsilon}, \beta)$-radonifiante, où β est la moitié de la norme $\mathscr{F}L^{\infty}$, α la norme l^{∞}, pourvu que $\varepsilon\geqslant(N+2)\eta$.*

En d'autres termes, en remplaçant α par $R\alpha$, β par β/R, si λ est une probabilité sur C^{2N+1}, scalairement concentrée à η près sur la l^1-boule

$$B_1=\{z\in C^{2N+1};\ \sum_{|n|\leqslant N}|z_n|\leqslant R\}\ ,$$

elle est concentrée à ε près sur la $\mathscr{F}L^{\infty}$-boule

$$B_2=\{z\in C^{2N+1};\ \operatorname{Max}|\sum_{|n|\leqslant N}z_n e^{2i\pi nt}|\leqslant 2R\}\ .$$

2) Soit $X=(X_n)_{|n|\leqslant N}$ une suite de variables aléatoires réelles ou complexes, $X_n:\Omega\to C$. Elle définit une fonction aléatoire linéaire g sur C^{2N+1}, à savoir $c\mapsto\sum_{|n|\leqslant N}c_nX_n$, et donc une probabilité λ_g sur C^{2N+1}; g ou λ_g ou X est de type (J_{η}, α) si et seulement si, pour tout $c\in C^{2N+1}$, tel que $\|c\|_{l^{\infty}}\leqslant 1$, on a $J_{\eta}\ (\mu, g(c))\leqslant 1$. D'autre part les X_n définissent une application μ-mesurable φ de Ω dans C^{2N+1}, et l'on a $g(c)=\langle\varphi, c\rangle$, et λ_g sera d'ordre (J_{ε}, β) si et seulement si $J_{\varepsilon}\ (\mu, \beta\circ\varphi)\leqslant 1$. On aura donc, en remplaçant α, β, par $R\alpha$, β/R, $0<R<+\infty$:

COROLLAIRE (6.I.2;5). *Soit $R>0$. Soit $X=(X_n)_{|n|\leqslant N}$ une suite de variables aléatoires, verifiant:*

$$\mu\{\omega\in\Omega;\ |\sum_{|n|\leqslant N}c_nX_n(\omega)|>R\}\leqslant\eta \tag{6.I.2;5}$$

pour $c\in C^{2N+1}$, $\|c\|_{l^\infty}\leqslant 1$; ***alors elle vérifie***

$$\text{(6.I.2;6)} \qquad \mu\{\omega\in\Omega;\ \operatorname*{Max}_{t\in T}|\sum_{|n|\leqslant N}X_n(\omega)e^{2i\pi nt}|>2R\}\leqslant(N+2)\eta\ .$$

(6.I.2:10) *Variables aléatoires subnormales*:

Convenons de dire qu'une variable aléatoire complexe U est A-subnormale, $A\geqslant 0$ fini, si, pour tout $(\xi,\eta)\in \boldsymbol{R}^2$, on a

$$\text{(6.I.2;11)} \qquad \mathscr{E}(\exp(\xi\operatorname{Re}U+\eta\operatorname{Im}U))\leqslant\exp(A^2(\xi^2+\eta^2))\ .\ ^{(49)}$$

C'est le cas si U (50) est gaussienne normale, avec $A=1/4\pi$, car

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\xi t-\pi t^2)dt=\exp\left(\frac{\xi^2}{4\pi^2}\right)\ .$$

C'est aussi le cas si U est la variable du jeu de pile ou face, égale à ± 1 avec la probabilité 1/2, avec $A=1/\sqrt{2}$:

$$\mathscr{E}(\exp\xi U)=\frac{1}{2}(e^{\xi}+e^{-\xi})\leqslant\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\ .$$

Supposons que $(U_n)_{|n|\leqslant N}$ soit une famille finie de variables aléatoires ***indépendantes*** A-subnormales. Alors, si les α_n sont des nombres complexes, $\sum_{|n|\leqslant N}|\alpha_n|^2=S^2$, la variable $\sum_{|n|\leqslant N}\alpha_n U_n$ est AS-subnormale. En effet, les variables étant indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances, donc

$$\begin{aligned}
\text{(6.I.2;12)} \qquad & \mathscr{E}(\exp(\xi\sum_{|n|\leqslant N}\operatorname{Re}\alpha_n U_n+\eta\sum_{|n|\leqslant N}\operatorname{Im}\alpha_n U_n))\\
&=\prod_{|n|\leqslant N}\mathscr{E}(\exp(\xi\operatorname{Re}\alpha_n U_n+\eta\operatorname{Im}\alpha_n U_n))\\
&=\prod_{n\leqslant N}\mathscr{E}(\exp((\xi\operatorname{Re}(\alpha_n)+\eta\operatorname{Im}(\alpha_n))\operatorname{Re}U_n\\
&\qquad+(\eta\operatorname{Re}(\alpha_n)-\xi\operatorname{Im}(\alpha_n))\operatorname{Im}U_n))\\
&\leqslant\prod_{n\leqslant N}\exp(A^2(\xi^2+\eta^2)|\alpha_n|^2)\leqslant\exp(A^2S^2(\xi^2+\eta^2))\ .
\end{aligned}$$

Si U est A-subnormale, on a l'inégalité:

$$\begin{aligned}
\text{(6.I.2;12 bis)} \quad & \mathscr{E}(\exp k|U|)\leqslant\mathscr{E}(\exp k|\operatorname{Re}U|\exp k|\operatorname{Im}U|)\\
&\leqslant\mathscr{E}((\exp(k\operatorname{Re}U)+\exp(-k\operatorname{Re}U))(\exp(k\operatorname{Im}U)+\exp(-k\operatorname{Im}U)))\\
&=\mathscr{E}(\exp(k\operatorname{Re}U+k\operatorname{Im}U))+\mathscr{E}(\exp(k\operatorname{Re}U-k\operatorname{Im}U))\\
&\quad+\mathscr{E}(\exp(-k\operatorname{Re}U+k\operatorname{Im}U))+\mathscr{E}(\exp(-k\operatorname{Re}U-k\operatorname{Im}U))\\
&\leqslant 4\exp(2k^2A^2)\ .
\end{aligned}$$

(49) $\mathscr{E}$ veux dire: l'espérance mathématique.

(50) Le A de A-subnormale n'a aucun rapport avec le *poids* A antérieur, et la variable aléatoire U n'a aucun rapport avec l'espace U antérieur!!!

En particulier, U est de tout ordre p fini >0, et

(6.I.2;12 ter) $\quad \mathscr{E}(|U|^p) \leqslant \mathscr{E}(\exp(p|U|)) \leqslant 4\exp(2p^2A^2)$.

Si U est A-subnormale et symétrique, on a des inégalités meilleures, car

$$\mathscr{E}((\operatorname{Re} U)^n) = \mathscr{E}((\operatorname{Im} U)^n) = 0$$

pour n impair;

$$\frac{k^{2n}}{(2n)!}\mathscr{E}((\operatorname{Re} U)^{2n}) \leqslant \mathscr{E}(\exp(k \operatorname{Re} U)) \leqslant \exp(A^2k^2)\,,$$

d'où, en faisant $A^2k^2 = n$:

$$\mathscr{E}((\operatorname{Re} U)^{2n}) \leqslant (2n)!\,\frac{e^n A^{2n}}{n^n}$$

et

(6.I.2;12 quarto)
$$\begin{aligned}\mathscr{E}(|U|^{2n}) &\leqslant 2^n\,\mathscr{E}((Re\, U)^{2n}) + \mathscr{E}((\operatorname{Im} U)^{2n})) \\ &\leqslant (2n)!\left(\frac{2eA^2}{n}\right)^n \leqslant C' 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}\sqrt{n}\, 2^n e^n A^{2n} n^{-n} \\ &\leqslant Cn!\,(8A^2)^n\,,\end{aligned}$$

C constante universelle; ce qui est meilleur que $4e^{8n^2A^2}$ donné par (6.I.2;12 ter).

On en déduit aussitôt, toujours pour U symétrique et A-subnormale:

(6.I.2;12 quinto)
$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\exp(k|U|^2)) &= \sum_{n\geqslant 0}\mathscr{E}\left(\frac{k^n}{n!}\,|U|^{2n}\right) \\ &\leqslant C\sum_{n\geqslant 0}(8kA^2)^n = \frac{C}{1-8kA^2} < +\infty \quad \text{si} \quad k < \frac{1}{8A^2}\,.\end{aligned}$$

Ceci posé, soient U_n, $|n| \leqslant N$, des variables aléatoires *indépendantes* A-subnormales. Cherchons à réaliser (6.I.2;5), avec $X_n = \alpha_n U_n$, $\sum_{|n|\leqslant N}(\alpha_n)^2 = S^2$. Utilisons (6.I.2;12), et (6.I.2;12 bis) avec AS au lieu de A; il vient, pour $\|c\|_{l^\infty} \leqslant 1$:

(6.I.2;13)
$$\begin{aligned}&\mu\{\omega\in\Omega;\ |\sum_{|n|\leqslant N} c_n\alpha_n U_n(\omega)| > R\} \\ &\leqslant \exp(-kR)\,\mathscr{E}(\exp(k|\sum_{|n|\leqslant N} c_n\alpha_n U_n|)) \\ &\leqslant 4\exp(-kR + 2k^2A^2S^2)\,.\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $k \geqslant 0$. Faisons $k = \dfrac{R}{4A^2S^2}$:

(6.I.2;14)
$$\mu\{\omega\in\Omega;\ |\sum_{|n|\leqslant N} c_n\alpha_n U_n(\omega)| > R\} \leqslant 4\exp\left(\frac{-R^2}{8A^2S^2}\right).$$

(Donc 6.I.2;5) sera réalisée, si

$$\text{(6.I.2;14 bis)} \quad 4\exp\left(-\frac{R^2}{8A^2S^2}\right)\leqslant\eta \quad \text{ou} \quad R\geqslant\frac{C}{2}AS\sqrt{\log(1/\eta)}\,,$$

C constante universelle convenable. Il restera à transporter cette valeur de R dans (6.I.2;6). Raisonnons sur le polynôme trigonométrique aléatoire $P=\sum_{|n|\leqslant N} X_n e^{2i\pi nt}$:

COROLLAIRE (6.I.2;15). *Soit P un polynome trigonométrique aléatoire de degré $\leqslant N$, $P(t)=\sum_{|n|\leqslant N} X_n e^{2i\pi nt}$, où les X_n sont des variables aléatoires indépendantes, subnormales avec des inégalités*:

$$X_n=\alpha_n U_n,\ \sum_{|n|\leqslant N}|\alpha_n|^2=S^2,\ \mathscr{E}(\exp(\xi\operatorname{Re}U_n+\eta\operatorname{Im}U_n))\leqslant e^{A^2(\xi^2+\eta^2)}$$

pour $|n|\leqslant N$, $(\xi,\eta)\in \boldsymbol{R}^2$.

Alors la variable aléatoire $\operatorname*{Max}_{t\in T}|P(t)|$ *est majorée par* $CSA\sqrt{\log(1/\eta)}$ *avec une probabilité* $\geqslant 1-(N+2)\eta$, *C étant une constante universelle convenable.*

On prend souvent $\eta=1/N^2$, alors $(N+2)\eta\sim 1/N$, *et* $\sqrt{\log(1/\eta)}\sim\sqrt{2\log N}$.

C'est un théorème de SALEM-ZYGMUND [51]; naturellement la démonstration classique est essentiellement la même qu'ici; elle est "plus courte" puisqu'elle ne nécessite pas les dizaines de pages qui ont précédé le présent corollaire, mais, comme nous l'avons dit au début de (6.I), en dimension finie, tout ce qui précède est trivial. L'intérêt des présentes méthodes est que l'on peut, en partant pratiquement de n'importe quelle étude d'une probabilité ρ, comme celle qui précède le lemme (6.I.2;1), obtenir un théorème!

Exemple (6.I.3). *L'inégalité de* MENCHOV.

Prenons toujours $E=G=\mathscr{E}=\mathscr{G}=\boldsymbol{C}^N$. Considérons la suite finie de variables aléatoires $Z=(Z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$, sur le tore $\boldsymbol{T}$, muni de sa mesure de Haar dt, définie par:

$$\text{(6.I.3;1)} \qquad Z_n(t)=(e^{2i\pi nt}+e^{2i\pi(n+1)t}+\cdots+e^{2i\pi Nt})f(t)\,,$$

où f est une fonction >0 que nous préciserons plus loin, qui actuellement doit simplement être intégrable.

Pour toute suite $c=(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ complexe, on a

$$\text{(6.I.3;2)} \qquad \langle c, Z\rangle=\sum_{n=1}^{N}c_nZ_n=\left(\sum_{n=1}^{N}C_ne^{2i\pi nt}\right)f(t)\,,$$

avec

$$\text{(6.I.3;3)} \qquad C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n\,;$$

c'est pour obtenir les sommes partielles C_n que nous introduisons cette sorte de variables aléatoires Z_n.

[51] Voir J.P. KAHANE [1], chap. VI, page 54.

Supposons qu'on ait l'inégalité $\|\langle c, Z\rangle\|_{L^p(T,dt)}\leqslant 1$, pour un $p\geqslant 1$. Si $1/f\in L^{p'}(T,dt)$, avec $\|1/f\|_{L^{p'}(T,dt)}=1$, on en déduira $\|\sum_{n=1}^{N} C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^1(T,dt)}\leqslant 1$, donc $\operatorname*{Sup}_{1\leqslant n\leqslant N}|C_n|\leqslant 1$.

Si donc nous appelons V l'espace C^N muni de la norme

(6.I.3;4) $$\|c\|_V=\operatorname*{Sup}_{1\leqslant n\leqslant N}|C_n|\ ,$$

on voit que la suite $(Z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ est de cotype (p, V), donc définit une probabilité ρ sur C^N muni de la norme de dual de V, de cotype p, avec $^*\|\rho\|_p\leqslant 1$.

Nous prendrons pour f la fonction

(6.I.3;5) $$f(t)=\begin{cases} kt^{1/p'} & \text{pour } \dfrac{1}{N}\leqslant t\leqslant 1\ , \\ k\left(\dfrac{1}{N}\right)^{1/p'} & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{N}\ , \end{cases}$$

k étant choisi pour que $\|1/f\|_{L^{p'}(T,dt)}=1$. Comme

$$k^{-p'}\int_{1/N}^{1}\frac{dt}{t}+k^{-p'}\int_0^{1/N}N\,dt=k^{-p'}(\log N+1)\ ,$$

on doit prendre $k=(\log N+1)^{1/p'}$.

[Le motif du choix de cette fonction f apparaîtra mieux ensuite. C'est au voisinage de 0 qu'il est intéressant que f tende vers 0; nous voulons que $1/f^{p'}$ soit intégrable; le "cas limite" est obtenu par $1/f^{p'}=\text{const.}\,1/t$, qui n'est pas intégrable, mais qui, remplacée par une constante dans l'intervalle $[0,1/N]$ le devient; le choix de $1/N$ viendra du fait que la variable Nt va intervenir].

Soit $\alpha=(\alpha_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ une suite de nombres complexes, et prenons pour v l'application $\alpha:(C_n)_{1\leqslant n\leqslant N}\mapsto(\alpha_n C_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ de C^N dans lui-même. La suite $\alpha Z=(\alpha_n Z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ est dans l^p (i.e. C^N muni de la norme l^p), donc définit une probabilité de Radon sur l^p; est-elle d'ordre p? Nous avons à majorer

(6.I.3;6) $$\|\alpha Z\|_{p,l^p}=\|v(\rho)\|_{p,l^p}=\left(\int_T\left(\sum|\alpha_n Z_n(t)|^p\right)dt\right)^{1/p}.$$

Comme $|e^{2i\pi nt}+\cdots+e^{2i\pi Nt}|\leqslant \operatorname{Min}(2/t, N)$, on aura

(6.I.3;8) $$|e^{2i\pi nt}+\cdots+e^{2i\pi Nt}|\,|f(t)|$$
$$\leqslant\begin{cases} \dfrac{2}{t}\,t^{1/p'}(\log N+1)^{1/p'}=\dfrac{2}{t^{1/p}}(\log N+1)^{1/p'} & \text{pour } \dfrac{1}{N}\leqslant t\leqslant 1\ ; \\ N\left(\dfrac{1}{N}\right)^{1/p'}(\log N+1)^{1/p'}=N^{1/p}(\log N+1)^{1/p'} & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{N}\ . \end{cases}$$

D'où

$$\int_{1/N}^{1} \sum_n |\alpha_n Z_n(t)|^p dt \leqslant 2^p (\sum_n |\alpha_n|^p) \log N (\log N+1)^{p/p'} ,$$

$$\int_{0}^{1/N} \sum_n |\alpha_n Z_n(t)|^p dt \leqslant (\sum_n |\alpha_n|^p)(\log N+1)^{p/p'} ,$$

d'où

$$\begin{aligned}(6.\mathrm{I}.3;9) \qquad \|v(\rho)\|_p &= \Big(\int_T \sum_n |\alpha_n Z_n(t)|^p dt\Big)^{1/p} \\ &\leqslant (\sum_{1\leqslant n\leqslant N} |\alpha_n|^p)^{1/p}(\log N+1)^{1/p'}(2^p \log N+1)^{1/p} .\end{aligned}$$

La formule (5.20) donne alors

$$(6.\mathrm{I}.3;10) \qquad \pi_p({}^t v) \leqslant C(\sum_n |\alpha_n|^p)^{1/p}(\log N+1) ,$$

où C est une constante universelle; ${}^t v$ est ici considérée comme application linéaire de C^N, muni de la norme $l^{p'}$, dans C^N, muni de la norme de V. Les calculs ont été faits pour p fini, mais subsistent pour $p=+\infty$.

D'où:

PROPOSITION (6.I.3;11) (*Inégalité de Menchov généralisée*).

Soit $\alpha=(\alpha_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ *une suite finie. L'application* $\alpha:(x_n)\mapsto(\alpha_n x_n)$, *de* C^N *dans lui-même, est p-radonifiante,* $1\leqslant p\leqslant+\infty$, *de* C^N *muni de la norme* $l^{p'}$, *dans* C^N *muni de la norme* (6.I.3;4), *et l'on a l'inégalité*:

$$\pi_p(\alpha) \leqslant C(1+\log N)(\sum_{1\leqslant n\leqslant N} |\alpha_n|^p)^{1/p} ,$$

où C est une constante universelle.

Si $X=(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ *est une suite de variables aléatoires sur un* (Ω,μ), *de type p, on a l'inegalité*

$$\begin{aligned}&\Big(\int_\Omega (\sup_{1\leqslant n\leqslant N} |\alpha_1 X_1(\omega)+\cdots+\alpha_n X_n(\omega)|)^p d\mu(\omega)\Big)^{1/p} \\ &\qquad \leqslant C(\sum_{1\leqslant n\leqslant N} (|\alpha_n|^p)^{1/p}(1+\log N) \\ &\qquad\qquad \times \sup_{\|c\|_{l^p}\leqslant 1} \Big(\int_\Omega |\sum c_n X_n(\omega)|^p d\mu(\omega)\Big)^{1/p} .\end{aligned}$$

C'est l'inégalité de MENCHOV généralisée. Pour $p=2$, on obtient l'inégalité de MENCHOV, relative à une suite orthonormée $X=(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$; les X_n sont supposées deux à deux orthogonales, de norme quadratique 1, de sorte que X est de type 2, avec $\|X\|_2^*=1$. Alors

COROLLAIRE (6.I.3;12) (*Inégalité de* MENCHOV) [58]. *Soit* $X=(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ *une suite finie de variables aléatoires orthonormées. Alors on a l'inégalité*:

$$\left(\int_\Omega \left(\operatorname*{Sup}_{1\leqslant n\leqslant N} |\alpha_1 X_1(\omega)+\cdots+\alpha_n X_n(\omega)|\right)^2 d\mu(\omega)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|\alpha_n|^2\right)^{1/2}(1+\log N)\ ,$$

où C est une constante universelle.

De là on déduit classiquement le théorème de MENCHOV, qui dit que, si $X=(X_n)_{n\in N}$ est une suite infinie orthonormée de variables aléatoires, et si $\sum_{n\in N}|\alpha_n|^2\log^2 n<+\infty$, alors la série $\sum_{n\in N}\alpha_n X_n$ converge presque sûrement. Mais nous le retrouverons plus loin, par application directe du théorème de dualité.

Bien entendu la proposition (6.I.3;11) n'est pas forcément intéressante pour toutes les valeurs de p. Prenons $p=1$ ou même $\leqslant 1$. L'inégalité $\|X\|_p^*\leqslant 1$ s'écrit

$$\int_\Omega \Big|\sum_n c_n X_n(\omega)\Big|^p d\mu(\omega)\leqslant \sum_n |c_n|^p\,;$$

elle entraîne

$$\int_\Omega |X_n(\omega)|^p d\mu(\omega)\leqslant 1$$

pour tout n, qui à son tour entraîne l'inégalité antérieure. Et alors

$$\int_\Omega \left(\operatorname*{Sup}_{1\leqslant n\leqslant N}|\alpha_1 X_1(\omega)+\cdots+\alpha_N X_N(\omega)|\right)^p d\mu(\omega)$$
$$\leqslant \int_\Omega \sum_n |\alpha_n|^p |X_n(\omega)|^p d\mu(\omega)\leqslant \sum_n |\alpha_n|^p\ ,$$

ce qui est une inégalité meilleure que (6.I.3;10), sans terme en $\log N$. On peut en dire autant pour $p=+\infty$. Dire que $\|X\|_{+\infty}^*\leqslant 1$, c'est dire que $|\sum_n c_n X_n|$ reste bornée par 1 sur Ω si $\operatorname*{Sup}_n |c_n|\leqslant 1$. Alors bien évidemment

$$\text{(6.I.3;13)}\qquad \operatorname*{Sup}_{\omega\in\Omega}\ \operatorname*{Sup}_{1\leqslant n\leqslant N}|\alpha_1 X_1(\omega)+\cdots+\alpha_n X_n(\omega)|\leqslant \operatorname*{Sup}_n |\alpha_n|\ ,$$

sans terme en $\log N$. Il est possible que 2 soit la seule valeur de p pour laquelle l'inégalité obtenue soit intéressante.

Exemples: (6.II): *suites infinies de variables aléatoires.*

Considérons l'espace $\boldsymbol{K}^N$ des suites de nombres (réels ou complexes, suivant que $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$; fréquemment nous remplacerons $\boldsymbol{K}^N$ par $\boldsymbol{K}^Z$), muni de sa topologie produit. Son dual $\boldsymbol{K}^{(N)}$ est l'espace des suites finies; la topologie $*$-forte sur ce

[52] Voir DOOB [1], théorème 4.2 (chap. IV, §4).

dual est la topologie fine de $K^{(N)}$, limite inductive de celles des sous-espaces de dimension finie $K^{\{0,1,2,\cdots,n\}}$, ou aussi de tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie. K^N et $K^{(N)}$ sont réflexifs, chacun est le dual de l'autre, et ils sont tous deux nucléaires et conucléaires, et tonnelés. Toute probabilité cylindrique sur K^N est de Radon, comme limite projective dénombrable de ses projections sur les quotients de dimension finie $K^{\{0,1,\cdots,n\}}$.

Nous nous placerons alors dans les conditions du théorème (5.32). Les grands espaces $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$, seront $\sigma(K^N, K^{(N)})$, les petits E, G, seront $K^{(N)}$, les injections $E\to\mathscr{E}$, $G\to\mathscr{G}$, étant l'injection continue naturelle $K^{(N)}\to\sigma(K^N, K^{(N)})$. Fréquemment v sera l'identité; autrement, elle devra appliquer continuement K^N dans lui-même (ou $\sigma(K^N, K^{(N)})$, c'est la même chose), et appliquer $K^{(N)}$ dans lui-même (auquel cas elle sera sûrement continue, toute fonction linéaire sur $K^{(N)}$ étant continue). L'espace V sera un espace bitopologique $K^{(N)}\subset V\subset\sigma(K^N, K^{(N)})$, la 2ème injection étant continue (la première l'est aussi automatiquement, mais on ne s'en sert pas). L'espace U sera lui bitopologique $K^{(N)}\subset U\subset\sigma(K^N, K^{(N)})$, avec des injections continues. Il devra en outre posséder une certaine propriété d'approximation sur laquelle nous reviendrons.

Soit λ une probabilité de Radon sur K^N. Elle définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in N}$, $X_n:(\Omega,\mu)\to K$, où Ω est K^N, $\mu=\lambda$, $X_n=\pi_n$, projection de K^N sur son n-ième facteur K. Inversement toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in N}$, X_n μ-mesurable $\Omega\to K$, Ω et μ quelconques, définit une telle probabilité λ; car elle définit une fonction aléatoire linéaire f sur $K^{(N)}$, avec $f(c)=\sum_{n\in N}c_nX_n$, d'où une probabilité cylindrique $\lambda_f=\lambda$, qui est de Radon; d'ailleurs f est décomposée, $f=\varphi^*$, où φ est l'application μ-mesurable $\omega\mapsto(X_n(\omega))_{n\in N}$ de Ω dans K^N, de sorte que l'on a aussi $\lambda=\varphi(\mu)$. On sait qu'il y a ainsi correspondance bijective entre les probabilités (cylindriques ou de Radon) sur K^N, et les classes d'isonomie de suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in N}$. Si alors A est un poids homogène, la probabilité λ est de type (A, U), si et seulement si (définition (5.30)) elle est de type A relativement à la topologie $(K^{(N)})_U$ induite par ${}_2U$ sur le dual $K^{(N)}$ de K^N; cela exprime exactement que, si $c\in K^{(N)}$ converge vers 0 dans $K^{(N)}$ pour la topologie induite par ${}_2U$, $A(\mu, \sum_{n\in N}c_nX_n)$ converge vers 0; et alors $A_V^*(\lambda)=\operatorname*{Sup}_{c\in K^{(N)},\|c\|_V'\leq 1}A(\mu,\sum_{n\in N}c_nX_n)$. De même, λ est de type (p, U), $0\leqslant p\leqslant+\infty$, si et seulement si $c\mapsto\sum_{n\in N}c_nX_n$ est continue de $K^{(N)}$, muni de la topologie induite par ${}_2U$, dans $L^p(\Omega,\mu)$; et aussi si, pour $\|c\|_U$ borné, $c\in K^{(N)}$, $\sum_{n\in N}c_nX_n$ est borné en moyenne d'ordre p.

De même, ρ est de cotype $(\bar{B}, V)$, si et seulement si, pour $c\in K^{(N)}$, la convergence de $\bar{B}(\mu,\sum_{n\in N}c_nX_n)$ vers 0 entraîne la convergence de c vers 0 dans $K^{(N)}$ pour la topologie de la quasi-norme de V; et $^*\bar{B}_V(\rho)=\inf_{c\in K^{(N)},\|c\|_V\leqslant 1}\bar{B}(\mu,\sum_{n\in N}c_nX_n))^{-1}$; et ρ est de cotype (p,V), $0\leqslant p\leqslant+\infty$, si et seulement si, pour $c\in K^{(N)}$, la convergence de $\sum_{n\in N}c_nX_n$ vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$ entraîne la convergence de c vers 0 dans $K^{(N)}$ pour la topologie de la quasi-norme de V.

PROPOSITION (6.II.1) *Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires, associée à une probabilité λ sur K^N, et soit ${}_2U$ complet, normal par troncatures* [58]. *Pour qu'elle soit de type (p, U), il faut et il suffit que, pour toute suite $c\in U$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nX_n$ converge en moyenne d'ordre p (en probabilité si $p=0$).*

Cela résulte de ce que ${}_2U$ est de Baire (voir démonstration de SCHWARTZ [2]).

PROPOSITION (6.II.1 bis) *Si ${}_2V$ est complet, et si les X_n sont des variables aléatoires réelles, symétriques et indépendantes, non nulles, la suite $(X_n)_{n\in N}$ est de cotype (p, V), si et seulement si, pour $c\in K^N$, la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nX_n$ en moyenne d'ordre p (en probabilité pour $p=0$) entraîne $c\in V$.*

La démonstration est la même que celle de la proposition (2.0) du § 2 de Schwartz [2] (La démonstration pour p quelconque est à peine différente de ce qu'elle est pour $p=0$: si u et v sont deux variables aléatoires réelles indépendantes symétriques, on a toujours Esp. $(|u|^p)\leqslant 2$ Esp. $(|u+v|^p)$.)

Regardons maintenant les propriétés d'approximation.

THÉORÈME (6.II.1 ter) *Supposons réalisées les hypothèses de la proposition* (5.29), *avec $E=G=K^{(N)}$, $\mathscr{E}=\mathscr{G}=K^N$. Supposons en outre que les π_j convergent vers l'identité dans $\mathscr{L}_c(K^{(N)},K^{(N)})$. Alors toute probabilité sur K^N, de type (A,α), est de type $(K^{(N)}, U)$-(A,α)-approximable.*

L'intérêt de cet énoncé est que non seulement il ramène la propriété spéciale d'approximation à la propriété usuelle, comme la proposition (5.29), mais qu'il permet de supprimer toute hypothèse d'approximation.

DÉMONSTRATION. Soit donc λ de Radon sur K^N, de type (A,α). Considérons les $\lambda_j={}^t\pi_j(\lambda)$. Chaque ${}^t\pi_j$ applique continuement K^N dans $K^{(N)}$, donc un Fréchet dans un dual de Fréchet, donc elle est "bornée", autrement dit il existe un ouvert d'image bornée; comme les bornés de $K^{(N)}$ sont de dimension finie, l'image ${}^t\pi_j(K^N)$ est de dimension finie. Donc λ_j est une probabilité de Radon portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie. Le calcul fait dans la démonstration de la proposition (5.29) montre que λ_j est de type $(A,\bar{\alpha})$. Il reste à montrer que λ est limite cylindrique des λ_j. Par transposition, et compte tenu de ce que les parties équicontinues de $(K^{(N)})'$ (resp. $K^N)'$ sont les parties relativement compactes de K^N (resp. $K^{(N)})'$, les ${}^t\pi_j$ convergent vers l'identité dans $\mathscr{L}_c(K^N,K^N)$. Soit alors w une

[58] Voir SCHWARTZ [2], page 45.

application linéaire continue de K^N dans un espace vectoriel de dimension finie. Les $w \circ {}^t\pi_j$ convergent vers w, uniformément sur tout compact de K^N; d'après le théorème 2 du chap. 2, § 3, de la 2ème partie de SCHWARTZ [1], les $w \circ {}^t\pi_j(\lambda)$ convergent étroitement vers $w(\lambda)$, λ étant scalairement concentrée sur les compacts puisque de Radon. Donc les λ_j convergent cylindriquement vers λ. CQFD.

COROLLAIRE (6.II.1 quarto). *Supposons que les quasi-boules de U soient stables par troncature. Alors toute probabilité λ sur U, de type (A, U), A homogène, est de type $(K^{(N)}, U)$-(A, U)-approximable, et les conditions du théorème* (5.32) *sont réalisées, avec $c=1$, et $A_U^{*a}(\lambda)=A^*(\lambda)$.*

Rappelons que la j-ième troncature est l'application $c \mapsto \tilde{c}_j$, où ($\tilde{c}_{j,n}=c_n$ pour $n \leqslant j$, 0 pour $n>j$); alors ces troncatures sont les applications π_j. Puisque U a ses boules stables par troncature, on a, pour tout $e \in U$, $\|\pi_j(e)\|_U \leqslant \|e\|_U$ d'où (5.32) avec $c=1$.

Il nous reste maintenant à donner une suite d'exemples.

Exemple (6.II.2; 1). *Un théorème de* KHINTCHINE *et* KOLMOGOROV.

Prenons pour ρ la probabilité associée à la suite $Z=(Z_n)_{n \in N}$ de variables aléatoires indépendantes du jeu de pile ou face, égales à ± 1 avec la probabilité 1/2.

Cette suite de variables aléatoires est de cotype (p, l^2), pour tout $p \geqslant 0$, et de type (p, l^2), pour tout $p \geqslant 0$ fini. Pour $p=0$, on peut en effet appliquer les proposition (6.III.1 et 1 bis): la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n Z_n$ est convergente en probabilité, si et seulement si $c \in l^2$ (54). Puisqu'alors elle est de cotype $(0, l^2)$, elle est a fortiori de cotype (p, l^2) pour tout $p \geqslant 0$. Montrons qu'elle est de type (p, l^2), pour tout p fini $\geqslant 0$, sans utiliser la proposition (6.II.1). Les Z_n sont (1/2)-subnormales et indépendantes, alors $\sum_{n \in N} c_n Z_n$, pour $c \in K^{(N)}$, est une variable subnormale vérifiant une inégalité analogue à (6.I.2;12) avec $S=\|c\|_{l^2}$; si $c \in K^{(N)}$ converge vers 0 dans l^2, on déduit aussitôt de (6.I.2; 12 ter) que $\langle Z, c\rangle$ converge vers 0 en moyenne d'ordre p, pour tout p fini, en probabilité pour $p=0$. Ici ${}_2V=l^2$, Banach, $V=\sigma(l^2, l^2)$. Les Z_n sont bornées en module par 1, donc elles définissent une application à valeurs dans $l^\infty \subset K^N$, mais qui n'est mesurable que pour la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$ (cet espace est lusinien, et l'application est mesurable pour la topologie plus faible induite par K^N) et non pour la topologie normée l^∞. Nous devons donc prendre $V=\sigma(l^\infty, l^1)$ les quasi-boules étant les boules de l^∞; et alors ρ provient d'une probabilité de Radon sur V, d'ordre p pour tout $p \geqslant 0$. *Donc ρ est de cotype (p, l^2) et d'ordre $(p, \sigma(l^\infty, l^1))$*, $0 \leqslant p \leqslant +\infty$. En appliquant le théorème (5.32), on en déduit que, *si λ est de Radon sur K^N, de type $(p, \sigma(l^\infty, l^1))$, elle provient d'une probabilité de Radon*

(54) SCHWARTZ [2], page 45.

sur l^2, d'ordre p. Si λ est définie à partir d'une suite $(X_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires: $\Omega\to \boldsymbol{K}$, le type $(p, \sigma(l^\infty, l^1))$ se vérifiera comme suit: si $c\in \boldsymbol{K}^{(N)}$ converge vers 0 dans $\boldsymbol{K}^{(N)}$, pour la topologie induite par l^∞ (ou par c^0), $\sum_{n\in N} c_n X_n$ converge vers 0 en moyenne d'ordre p; ou encore, d'après la proposition (6.II.1), si, pour tout $c\in c^0$, la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ est convergente en moyenne d'ordre p. Le fait que λ provienne d'une probabilité de Radon sur l^2 s'exprime alors en disant que l'application définie par $(X_n)_{n\in N}$: $\Omega\to \boldsymbol{K}^N$, est presque sûrement à valeurs dans l^2, et mesurable à valeurs dans l^2; comme l^2 est polonais, cela veut simplement dire que $(X_n)_{n\in N}$ est presque sûrement dans l^2. D'autre part on peut appliquer la proposition (5.36), avec $U_0=c^0$, $\sigma(U_0', U_0)=\sigma(l^1, c^0)$; l'application identique de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 est faiblement continue. On aura donc:

PROPOSITION (6.II.2; 2) (*KHINTCHINE et KOLMOGOROV*) [55]. *Soit $0\leqslant p\leqslant +\infty$. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires, telle que, pour toute suite $c\in c^0$ (i.e. tendant vers 0 à l'infini), la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ converge en moyenne d'ordre p* [56]. *Alors la série $\sum_{n\in N}|X_n|^2$ converge presque sûrement, et en outre la variable aléatoire $(\sum_{n\in N}|X_n|^2)^{1/2}$ est d'ordre p (moyenne d'ordre p finie). L'application identique de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 est p-radonifiante, pour tout $p\geqslant 0$. Pour $p>0$, on a l'inégalité*

$$(6.II.2;3) \qquad (\mathscr{E}((\sum_{n\in N}|X_n|^2)^{p/2}))^{1/p}\leqslant \pi_p \sup_{c\in C^{(N)},\|c\|_\infty\leqslant 1} (\mathscr{E}(|\sum_{n\in N} c_n X_n|^p))^{1/p}$$

où π_p, norme p-sommante de l'injection $l^1\to l^2$, décroit avec p.

En fait, seuls les cas $0\leqslant p\leqslant 2$ ont de l'intérêt, car, pour $p>2$, la proposition (6.II.3; 1) donnera des résultats plus avantageux.

REMARQUE. Comme l'a remarqué KWAPIEN, un opérateur de Hilbert-Schmidt entre deux espaces hilbertiens se factorise par $l^2 \xrightarrow{\alpha} l^2$, où α est une application diagonale $(c_n)_{n\in N}\to(\alpha_n c_n)_{n\in N}$, avec $\sum_{n\in N}|\alpha_n|^2<+\infty$; alors elle se factorise par $l^2\xrightarrow{\alpha} l^1\to l^2$, la 2ème application étant l'injection canonique, et alors la proposition (6.II.2; 2) montre qu'elle est 0-radonifiante, nouvelle démonstration de la proposition (5.20.1).

Exemple (6.II.3) *Séries de Fourier aléatoires.*

Soit $\boldsymbol{T}$ le tore muni de sa probabilité de Haar dt, et considérons la suite de variables aléatoires de Fourier $(t\mapsto e^{2i\pi nt})_{n\in Z}$. Elle définit une probabilité de Radon ρ sur $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{Z}}$. Il est bien évident que, *pour $p\geqslant 1$*, elle est de cotype et type $(p, \mathscr{F}L^p)$; car $c\in \boldsymbol{C}^{(\boldsymbol{Z})}$ converge vers 0 dans $\mathscr{F}L^p$ si et seulement si $\sum_{n\in Z} c_n e^{2i\pi nt}$ converge

[55] Voir KHINTCHINE et KOLMOGOROV [1].

[56] On sait alors qu'il en est de même pour $c\in l^\infty$, si $p<+\infty$. Voir SCHWARTZ [3].

vers 0 dans L^p, d'après la définition même de l'espace de suites $\mathscr{F}L^p$. On peut donc prendre ${}_2V=\mathscr{F}L^p$, si $p>1$, avec ${}_1V=\sigma(\mathscr{F}L^p, \mathscr{F}L^{p'})$; et ${}^*\|\rho\|_{p,V}=1$. D'autre part, $|e^{2i\pi nt}|=1$, de sorte, que, comme dans l'exemple précédent, ρ provient d'une probabilité de Radon sur $U=\sigma(l^\infty, l^1)$ (il s'agit ici de $l^\infty(\boldsymbol{Z}), l^1(\boldsymbol{Z})$, et non de $l^\infty(\boldsymbol{N}), l^1(\boldsymbol{N})$, comme dans les exemples antérieurs). En outre, $\|\rho\|_{p,U}=1$. Pour $p=1$, il faut remplacer L^1 par $M=C'$, espace des mesures de Radon sur $\boldsymbol{T}$, avec sa norme et sa topologie $\sigma(M, C)$, de façon que sa boule unité soit faiblement compacte. Alors, par le théorème de dualité, si λ est une probabilité sur $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{Z}}$, de type (p, l^∞), elle provient d'une probabilité de Radon sur $\mathscr{F}L^p$ (remplacé par $\sigma(\mathscr{F}L^\infty, \mathscr{F}L^1)$ pour $p=+\infty$, $\sigma(M, C)$ pour $p=1$). Ici encore on peut appliquer la proposition (5.36) avec $\sigma(U_0', U_0)=\sigma(l^1, c^0)$.

On observera que les résultats acquis ici sont moins bons que ceux de la proposition précédente pour $p<2$, les mêmes pour $p=2$, meilleurs pour $p>2$. En effet, $l^2\subset\mathscr{F}L^p$ pour $p\leqslant 2$, $\mathscr{F}L^p\subset l^2$ pour $p\geqslant 2$. Aussi pouvons-nous, même pour $p=1$, conserver ici $\mathscr{F}L^1$ au lieu de $\mathscr{F}M$, puisqu'on peut même prendre $l^2=\mathscr{F}L^2$. Alors:

PROPOSITION (6.II.3;1) *Soit $p\geqslant 1$. Soit $(X_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ une suite de variables aléatoires: $\Omega\to\boldsymbol{C}$, telle que, pour toute suite $c\in c^0(\boldsymbol{Z})$, la série $\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} c_nX_n$ soit convergente en moyenne d'ordre p. Alors $(X_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ est presque sûrement dans $\mathscr{F}L^p$, pour $1\leqslant p\leqslant+\infty$; autrement dit, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, $(X_n(\omega))_{n\in\boldsymbol{Z}}$ est une suite de coefficients de Fourier d'une fonction F_ω de $L^p(\boldsymbol{T}, dt)$. En outre, la variable aléatoire $\|(X_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}\|_{\mathscr{F}L^p}$ est d'ordre p:*

$$(6.\text{II}.3;2)\qquad \left(\int_\Omega d\mu(\omega)\int_{\boldsymbol{T}}|F_\omega(t)|^p dt\right)^{1/p}\leqslant \operatorname*{Sup}_{c\in\sigma(\boldsymbol{Z}),\|c\|_{l^\infty}\leqslant 1}\left(\int_\Omega|\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}c_nX_n(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}.$$

L'application identique de $\sigma(l^1, c_0)$ dans $\mathscr{F}L^p$, pour $p<+\infty$, dans $\sigma(\mathscr{F}L^\infty, \mathscr{F}L^1)$ pour $p=+\infty$, est p-radonifiante, de norme $\pi_p\leqslant 1$.

REMARQUE. Le caractère semi-trivial du résultat obtenu saute aux yeux. Ce n'est pas étonnant; les propriétés de ρ sont triviales, et, comme sur $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{Z}}$ toutes les probabilités cylindriques sont de Radon, et que les troncatures $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{Z}}\to\boldsymbol{C}^{(\boldsymbol{Z})}$ donnent des approximations immédiates, le théorème de dualité ne peut se résumer ici qu'en Fubini et la compacité faible des boules de $\mathscr{F}L^p$ (pour $1<p<+\infty$). Donnons effectivement une démonstration élémentaire du résultat ci-dessus, pour p fini pour simplifier. Pour N fini, on a de toute évidence, par Fubini:

$$(6.\text{II}.3;3)\qquad \int_\Omega d\mu(\omega)\int_{\boldsymbol{T}}|\sum_{|n|\leqslant N}X_n(\omega)e^{2i\pi nt}|^p dt$$

$$= \int_T dt \int_\Omega |\sum_{|n|\leq N} X_n(\omega) e^{2i\pi nt}|^p d\mu(\omega)$$

$$\leq \sup_{c \in C^{(Z)}, \|c\|_{l^\infty} \leq 1} \int_\Omega |\sum_{|n|\leq N} c_n X_n(\omega)|^p d\mu(\omega) = M \quad (M = (\|\lambda\|_p^*)^p) .$$

Mais la faible compacité de la boule de L^p entraîne ceci: si $c=(c_n)_{n\in Z}$ est une suite, ou bien

$$\lim_{N\to+\infty}.\inf. \int_T |\sum_{|n|\leq N} c_n e^{2i\pi nt}|^p dt < +\infty ,$$

auquel cas c est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction G_c de $L^p(T, dt)$, et alors

$$\lim_{N\to+\infty} \int_T |\sum_{|n|\leq N} c_n e^{2i\pi nt}|^p dt = \int_T |G_c(t)|^p dt ;$$

ou bien

$$\lim_{N\to+\infty}.\inf. \int_T |\sum_{|n|\leq N} c_n e^{2i\pi nt}|^p dt = +\infty ,$$

et dans ce cas nous écrirons, de manière purement formelle,

$$\int_T |G_c(t)|^p dt = +\infty .$$

(C'est purement formel, en ce sens que G_c n'existe même pas!). Le théorème de Fatou donne alors, si nous abrégeons par F_ω la fonction G_c, où $c=(X_n(\omega))_{n\in Z}$:

$$\text{(6.II.3; 4)} \quad \int_\Omega d\mu(\omega) \int_T |F_\omega(t)|^p dt \leq \lim_{N\to\infty}.\inf. \int_\Omega d\mu(\omega) \int_T |\sum_{|n|\leq N} X_n(\omega) e^{2i\pi nt}|^p dt \leq M .$$

Cela redonne l'inégalité (6.II.3; 2), et le fait que, pour μ-presque tout ω, $(X_n(\omega))_{n\in Z}$ est dans $\mathscr{F}L^p$. Donc la proposition (6.II.3; 1) est en fait triviale, et ne mérite d'être retenue que parce que, pour $p\geq 2$, elle donne un résultat meilleur que la proposition (6.II.2; 2). J'ignore d'ailleurs tout-à-fait si l'on pourrait obtenir d'autre résultats meilleurs, même par d'autres applications du théorème de dualité!

COROLLAIRE (6.II.3;5). *Soit $(\alpha_n)_{n\in Z}$ une suite de $l^2(Z)$. Soit $(U_n)_{n\in Z}$ une suite de variables aléatoires indépendantes*: $(\Omega, \mu) \to C$, *A-subnormales, c. à d. vérifiant une inégalité* (6.I.2;11). *Alors, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\alpha_n U_n(\omega))_{n\in Z}$ est sutie de coefficients de Fourier d'une fonction de $L^p(T, dt)$, pour tout p fini* (57).

DÉMONSTRATION. En effet, nous avons vu que la suite de variables aléatoires

(57) Voir J. P. KAHANE [1], proposition 10, page 44.

$X_n=\alpha_n U_n$ est alors de type (p, l^∞), voir (6.I.2;12 ter). On peut obtenir mieux, avec des variables aléatoires indépendantes subnormales *symétriques.*

PROPOSITION (6.II.3;6). *Supposons que les U_n soient des variables aléatoires $\Omega\to \boldsymbol{C}$, indépendantes symétriques A-subnormales* (*inégalité* (6.I.2;11)). *Soit $(\alpha_n)_{n\in Z}$ une suite de nombres complexes, $\sum_{n\in Z}|\alpha_n|^2=S^2<+\infty$. Alors, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, $(X_n(\omega)=\alpha_n U_n(\omega))_{n\in Z}$ est suite des coefficients de Fourier d'une fonction $F_\omega: t\mapsto F_\omega(t)$, telle que* $\exp(k|F_\omega|^2)\in L^1(\boldsymbol{T}, dt)$, *si $k<1/8S^2A^2$, et on a l'inégalité*

$$\text{(6.II.3;6 bis)} \qquad \int_\Omega d\mu(\omega)\int_{\boldsymbol{T}} \exp(k|F_\omega(t)|^2)dt \leqslant \frac{C}{1-8kS^2A^2}\,,$$

C constante universelle. [57]

DÉMONSTRATION. Prenons toujours $E=G=\boldsymbol{C}^{(Z)}$, $\mathscr{E}=\mathscr{G}=\boldsymbol{C}^Z$, $u=v=$identité. Prenons pour $\bar{B}$ le poids

$$\text{(6.II.3;6 ter)} \qquad \bar{B}(\nu)=\int \exp(ks^2)d\nu(s),\ \nu\in\mathscr{P}(\bar{\boldsymbol{R}}_+)\,.$$

Comment alors choisir β pour que ρ, définie par les variables aléatoires $(t\mapsto e^{2i\pi nt})_{n\in Z}$, soit de cotype $(\bar{B}, \beta)$? On a, pour $c\in \boldsymbol{C}^{(Z)}$:

$$\text{(6.II.3;7)} \qquad \bar{B}(dt, \sum_{n\in Z} c_n e^{2i\pi nt})=\int_{\boldsymbol{T}} \exp(k|\sum_{n\in Z} c_n e^{2i\pi nt}|^2)dt\,.$$

Nous prendrons donc pour V l'espace $\boldsymbol{C}^Z$ lui-même. Nous prendrons pour β la fonction égale à $+\infty$ aux points de $\boldsymbol{C}^Z$ qui ne sont pas des suites de Fourier de fonctions, et, pour $c=\mathscr{F} G_c$, $G_c\in L^1(\boldsymbol{T}, dt)$, définie par la formule

$$\beta(c)=\int_{\boldsymbol{T}} \exp(k|G_c(t)|^2)dt\leqslant+\infty\,.$$

On a bien $\bar{B}(c(\rho))=\beta(c)$, $c\in\boldsymbol{C}^{(Z)}$. Montrons que β est compacte sur $\boldsymbol{C}^Z$. Comme

$$\beta(c)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n}{n!}\int_{\boldsymbol{T}}|G_c(t)|^{2n}dt\,,$$

il suffit de montrer que chacune des fonctions $c\mapsto\int_{\boldsymbol{T}}|G_c(t)|^{2n}dt$ est compacte; en effet, dans ce cas, β sera semi-continue inférieurement comme somme de fonctions semi-continues inférieurement $\geqslant 0$, et minorée par une fonction compacte, donc compacte elle-même.

Or l'ensemble des c pour lesquels $\int_{\boldsymbol{T}}|G_c(t)|^{2n}dt\leqslant M$ n'est autre qu'une boule de $L^{2n}(\boldsymbol{T}, dt)$ munie de la topologie $\sigma(L^{2n}, \boldsymbol{C}^{(Z)})$ de la convergence simple des coefficients de Fourier; cette boule est faiblement compacte dans L^{2n}, donc a fortiori dans $\sigma(L^{2n}, C^{(Z)})$.

Ensuite ρ provient d'une probabilité de Radon sur la boule unité de $\sigma(l^\infty, l^1)$, portée par la sphère unité. Elle est donc d'ordre $(\bar{A}, \alpha)$, si $\bar{A}$ est le poids $\frac{1}{M}\|\ \|_1$, α la fonction égale à M sur cette boule et à $+\infty$ en dehors, car $\alpha(\rho)=\delta_{(+M)}\in\mathscr{P}(\bar{R}_+)$, et $\frac{1}{M}\|\delta_{(+M)}\|_1=1$; nous choisirons M plus loin.

D'autre part, si nous prenons $\bar{A}=B$, $\bar{B}=A$, la formule de Fubini est réalisée,

$$\int\frac{d\nu(y)}{M}\int\exp(k|f^2(x,y)|)d\mu(x)=\int\frac{d\mu(x)}{M}\int\exp(k|f^2(x,y)|)d\nu(y)\ .$$

Donc, *si λ est une probabilité de Radon sur C^Z, de type (A,α), elle est une probabilité de Radon d'ordre (B,β).*

Partons donc d'une suite $(U_n)_{n\in Z}$ de variables aléatoire $\Omega\to C$, indépendantes symétriques A-subnormales, et de $X_n=\alpha_n U_n$, $\sum_{n\in Z}|\alpha_n|^2=S^2$. Alors on sait que pour $c\in C^{(Z)}$ $\sum_{n\in Z}c_nX_n=\sum_{n\in Z}c_n\alpha_nU_n$ est AS-subnormale, également symétrique (inégalité (6.I.2;12)). Alors (6.I.2;12 quinto) montre que, pour $\|c\|_{l^\infty}\leqslant 1$:

$$(6.II.3;8)\qquad \begin{aligned} A(\mu,\sum_{n\in Z}c_nX_n)&=\mathscr{E}(\exp k|\sum_{n\in Z}c_nX_n|^2)\\ &\leqslant\frac{C}{1-8kS^2A^2}\quad\text{pour}\quad k<\frac{1}{8A^2S^2}\,,\end{aligned}$$ [58]

donc $(X_n)_{n\in Z}$ est de type (A,α) si $\frac{C}{1-8kS^2A^2}\leqslant M$; nous choisirons donc $M=\frac{C}{1-8kA^2S^2}$. Alors elle sera d'ordre (B,β), ce qui signifie exactement que, pour μ-presque tout ω, $(X_n(\omega))_{n\in Z}$ est dans l'ensemble des points où β est finie, c. à d. suite de Fourier d'une fonction F_ω sur T, avec $\exp(k|F_\omega|^2)\in L^1(T;dt)$, et qu'on a l'inégalité (6.II.3;6 bis).

Exemple (6.II.4). *Applications radonifiantes dans les espaces de suites l^q.*

Soit $(Z_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, réelles, suivant la loi stable d'indice s, $0<s\leqslant 2$, de fonction caractéristique $t\mapsto\exp(-|t|^s)$ [59].

Elles définissent une probabilité ρ sur R^N, dont nous allons chercher les propriétés. Pour $c\in R^{(N)}$, la variable $\sum_{n\in N}c_nZ_n$ suit une loi analogue, mais de paramètre $\|c\|_{l^s}$, c. à d. de fonction caractéristique $t\mapsto\exp(-\|c\|_{l^s}^s|t|^s)$. Donc, pour

[58] Dans ces formules, A est employée avec deux significations différentes: dans (A,α), c'est un poids, égal à $\bar{B}$, défini à (6.II.3;6 ter); dans $C/(1-8kS^2A^2)$, c'est un nombre, les variables aléatoires X_n étant supposées A-subnormales. Le lecteur, espérons-le, s'y retrouvera!

[59] Pour $s=2$, ce n'est donc pas la loi de Gauss normale $\exp(-\pi x^2)dx$, d'image de Fourier $t\mapsto\exp(-\pi t^2)$.

$c\in C^{(N)}$, si $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge vers 0 en probabilité, c converge vers 0 dans l^s, et ρ est de cotype $(0, l^s)$, a fortiori de cotype (p, l^s) pour tout $p\geqslant 0$. Pour le théorème de dualité, son type n'est pas intéressant, mais il sera utile de le connaître. La loi stable d'indice s est de la forme $\theta_s(x)dx$, où θ est continue >0, et se comporte à l'infini comme $|x|^{s-1}$ pour $s\neq 2$; alors son moment d'ordre p est fini pour $p<s$, infini pour $p\geqslant s$. Pour $s=2$, c'est une loi de Gauss, et tous ses moments d'ordre fini sont finis. Donc, si $c\in C^{(N)}$ converge vers 0 dans l^s, $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge vers 0 en moyenne d'ordre p pour $p<s$, si $s\neq 2$, pour tout p fini si $s=2$; autrement dit ρ est de type (p, l^s), avec $p<s$, si $s\neq 2$, et p fini quelconque si $s=2$. Soit ensuite $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels. On considérera l'application diagonale, que nous noterons α, de R^N dans R^N et de $R^{(N)}$ dans $R^{(N)}: (c_n)_{n\in N} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n\in N}$. C'est elle qui sera l'application v du théorème (5.29). Les espaces l^q ont tous la propriété d'approximation par troncature, permettant d'appliquer la proposition (6.II.1 ter) et de supprimer toute hypothèse d'approximation.

L'espace bitopologique V sera ici: pour $1<s<2$, l'espace $\sigma(l^s, l^{s'})$, avec la norme l^s; pour $s=1$, l'espace $\sigma(l^1, c^0)$ avec la norme l^1; pour $0<s<1$, l'espace $\sigma(l^s, K^{(N)})$ (topologie induite par K^N) avec la quasi-norme l^s; il est bien ainsi toujours vérifié que la quasi-boule est compacte pour la 1ère topologie de V. L'espace U sera l^q, avec sa quasi-norme et sa topologie, si $q<+\infty$, et $\sigma(l^\infty, l^1)$ avec la norme l^∞ si $q=+\infty$. L'image $v(\rho)$ proviendra alors d'une probabilité de Radon ν sur U, si et seulement si la suite $(\alpha_n Z_n)_{n\in N}$ est μ-presque sûrement dans l^q. En utilisant le théorème des 3 séries de KOLMOGOROV, nous avons montré dans un article antérieur le résultat suivant:

LEMME (6.II.4.0). *On a presque sûrement $(\alpha_n Z_n)_{n\in N}\in l^q$, autrement dit $v(\rho)$ provient d'une probabilité de Radon sur U, si et seulement si:*

$$\alpha\in l^{\mathrm{Min}(s,q)}, \quad \textit{pour} \quad s\neq q, \quad s<2;$$

$$\alpha\in l^{q-}, \textit{ c. à d. } \sum_{n\in N} |\alpha_n|^q\left(1+\left|\log\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)<+\infty, \quad \textit{pour} \quad s=q\neq 2;$$

$$\alpha\in l^q, \quad \textit{pour} \quad s=2, \quad q \textit{ fini}.$$

On pourra alors appliquer le 5 de la proposition (5.36), pour $p=0$. Ici U_0 sera l^q lui-même si $q<+\infty$, c^0 si $q=+\infty$. Alors U_0' sera $l^{q'}$, si $1\leqslant q\leqslant +\infty$, l^∞ si $q\leqslant 1$. On gardera U_0' (Banach réflexif) comme espace de départ pour $1<q<+\infty$, on partira de $\sigma(U_0', U_0)$ dans les autres cas, c. à d. $\sigma(l^1, c^0)$ pour $q=+\infty$, $\sigma(l^\infty, l^q)$ pour $q\leqslant 1$. Comme espace d'arrivée, on aura ${}_2V=l^s$, ${}_1V$ défini comme ci-dessus.

PROPOSITION (6.II.4.1). *Considérons l'application diagonale* $\alpha: (c_n)_{n\in N}\mapsto (\alpha_n c_n)_{n\in N}$, *de K^N dans K^N et soit $0<a, b\leqslant 2$. Les conditions suivantes soit*

équivalentes:

1) α *est p-radonifiante, pour tout* $p \geqslant 0$, *de* $l^{a'}$ *pour* $1 < a \leqslant 2$, *de* $\sigma(l^\infty, l^a)$ *pour* $a \leqslant 1$, *dans* l^b;

2) α *est p-radonifiante pour au moins un p*, $0 \leqslant p < a$ *pour* $a < 2$, *p fini pour* $a = 2$;

3) $\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)}$ *pour* $a \neq b$ *ou* $a = b = 2$, $\alpha \in l^{a-}$ *pour* $a = b \neq 2$.

REMARQUE. Pour $1 < a \leqslant 2$, il est équivalent de prendre $l^{a'}$ ou $\sigma(l^{a'}, l^a)$ comme premier espace; on peut donc toujours prendre $\sigma(l^{a'}, l^a)$, en convenant de poser $a' = +\infty$ pour $a \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Bien évidemment 1 implique 2.

Supposons 2 réalisée. Considérons la probabilité cylindrique ρ définie antérieurement, pour l'indice $s = a$. Nous avons vu qu'elle est de type p, $p < a$ si $a < 2$, p fini si $a = 2$, en tant que probabilité (cylindrique ou de Radon) sur $\boldsymbol{K}^N$, pour la quasi-norme $\| \ \|_a$ sur $\boldsymbol{K}^{(N)}$; elle est associée à l'application linéaire continue définie par $(Z_n)_{n \in N}$, de $\boldsymbol{K}^{(N)}$, munie de la topologie induite par l^a, dans $L^p(\Omega, \mu)$. Mais cette application se prolonge en une application linéaire continue de l^a dans $L^p(\Omega, \mu)$, autrement dit ρ peut aussi se définir comme probabilité cylindrique de type p sur $\sigma(l^{a'}, l^a)$ lui-même. Son image $v(\rho)$ par α doit donc être de Radon dans l^b, donc en particulier provenir d'une probabilité de Radon ν dans l'espace U antérieur, correspondant à l'indice $q = b$. Donc, d'après le lemme (6.II.4.0), $\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)}$ pour $a \neq b$ ou $a = b = 2$, $\alpha \in l^{a-}$ pour $a = b \neq 2$. Donc 2 implique 3.

Supposons maintenant 3 réalisée. Alors si nous considérons cette fois la probabilité ρ sur $\boldsymbol{K}^N$ correspondant à $s = b$, elle est de cotype $(0, l^b)$; et son image $v(\rho)$ par α provient, on l'a vu au lemme, d'une probabilité de Radon ν sur l'espace U correspondant à l'indice $q = a$, c. à d. l^a. On peut donc appliquer le théorème de dualité (5.36), compte tenu de ce qu'ici $u = {}^t v$, qui est la même application α, est trivialement faiblement continue de $\sigma(U_0', U_0)$ dans ${}_2V$. On en déduit que α est approximativement p-radonifiante, pour tout $p \geqslant 0$, de $\sigma(l^{a'}, l^a)$ dans $\sigma((l^b)'', (l^b)')$. Comme l^a vérifie la propriété d'approximation métrique par troncatures, on peut supprimer approximativement. On peut remplacer $\sigma((l^b)'', (l^b)')$ par l^b, a priori seulement pour $b > 1$. Mais on remarque que α peut toujours s'écrire $\alpha = \beta\gamma$, où β a les mêmes propriétés que α, et où $\gamma \in c^0$; γ définit alors une application compacte de l^b dans l^b, et le corollaire (3.9.1) montre alors, l^b étant séparable, que α est p-radonifiante de $\sigma(l^{a'}, l^a)$ dans l^b lui-même (le corollaire (3.9.1) a été démontré pour $p > 0$, mais s'étend évidemment à $p = 0$). CQFD.

REMARQUE. C'est à partir de ce théorème que, dans un article antérieur, [60]

[60] SCHWARTZ [2].

nous avons caractérisé les applications diagonales 0-radonifiantes entre les espaces de suites. Pour les applications p-radonifiantes, $p>0$, le résultat général n'est pas encore connu. Voir un résultat partiel à la remarque suivant (3.8.2). [61]

Exemple (6.II.5): *le théorème de* MENCHOV.

On pourrait démontrer simplement ce théorème à partir de l'inégalité de Menchov (6.I.3;12). Mais, même au prix de complications formelles, nous préférons le déduire du théorème de dualité, car le passage des variables aléatoires Z_n de l'exemple (6.I.3) à celles du présent exemple est instructif. Nous prendrons un espace topologique $T=\sum_{r\in N} T_r+\tilde{T}$, où $\sum$ et $+$ désignent la somme topologique. Pour le munir d'une probabilité, nous appellerons dt_r, $d\tilde{t}$ les mesures de Haar de T_r, $\tilde{T}$, puis nous choisirons des ε_r, $\tilde{\varepsilon}$ tels que $\sum_{r\in N}\varepsilon_r+\tilde{\varepsilon}=1$, et nous prendrons la probabilité dt sur T définie de manière évidente par $\sum_{r\in N}\varepsilon_r dt_r+\tilde{\varepsilon}d\tilde{t}$. Nous étudierons une suite $(Z_n)_{n\in N_1}$ de variables aléatoires sur (T, dt); $N_1=\{1, 2, 3, \cdots\}$. Soit $2^r\leqslant n<2^{r+1}$, $r\in N$. Nous définirons la variable aléatoire Z_n sur T comme suit. Sur T_r, elle vaut $(e^{2i\pi nt_r}+e^{2i\pi(n+1)t_r}+\cdots+e^{2i\pi(2^{r+1}-1)t_r})\varepsilon_r^{-1/2}f_r(t_r)$, où f_r est la fonction définie à la formule (6.I.3;5), pour $p=2$ et $N=2^r$ (nombre des termes de la suite 2^r, $2^r+1, \cdots, 2^{r+1}-1$), soit:

$$(6.\mathrm{II}.5;1)\qquad f_r(t_r)=\begin{cases} t_r^{1/2}(r\log 2+1)^{1/2} & \text{pour } \dfrac{1}{2^r}\leqslant t\leqslant 1\,;\\[2ex] \dfrac{1}{2^{r/2}}(r\log 2+1)^{1/2} & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2^r}\,,\end{cases}$$

de sorte que

$$\|1/f_r\|_{L^2(T_r,dt_r)}=1\,.$$

Sur $\tilde{T}$, nous prendrons

$$Z_n=e^{2i\pi 2^r\tilde{t}}\tilde{\varepsilon}^{-1/2}(r+1)\,.$$

Sur tous les T_s, $s\neq r$, $Z_n=0$.

Montrons que cette suite $Z=(Z_n)_{n\in N_1}$ de variables aléatoires est de cotype 2, par rapport à un certain espace $V\subset C^{N_1}$. Soit donc $c=(c_n)_{n\in N_1}$ une suite finie $\in C^{(N_1)}$, et supposons que

$$(6.\mathrm{II}.5;2)\qquad \int_T \Big|\sum_{n\in N_1} c_n Z_n\Big|^2 dt\leqslant 1\,.$$

Nous poserons

---

[61] PIETSCH a presque complètement trouvé le résultat général. Vois GOULAOUIC-SCHWARTZ [1], exposés 29 et 31.

(6.II.5; 3)
$$\left(\int_{T_r} |\sum_{n\in N_1} c_n Z_n|^2 \varepsilon_r dt\right)^{1/2} = \gamma_r$$
$$\left(\int_{\tilde{T}} |\sum_{n\in N_1} c_n Z_n|^2 \tilde{\varepsilon} dt\right)^{1/2} = \tilde{\gamma}\ , \quad \text{avec} \quad \sum_{r\geqslant 0} \gamma_r^2 + \tilde{\gamma}^2 \leqslant 1\ .$$

On peut alors refaire le calcul de l'exemple (6.I.3), avec $p=2$ et $N=2^r$. Et on trouve, pour l'intégration sur T_r:

(6.II.5; 4)
$$M_r(c) = \operatorname*{Sup}_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} |c_{2^r} + c_{2^r+1} + \cdots + c_n|$$
$$\leqslant \left(\int_{T_r} |\sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} c_n Z_n(t_r)|^2 \varepsilon_r dt_r\right)^{1/2} = \gamma_r\ .$$

Pour l'intégration sur $\tilde{T}$, on trouve, si on pose:

(6.II.5; 5)
$$S_r(c) = |\sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} c_n|\ ,$$

l'inégalité

(6.II.5; 6)
$$(\sum_{r\in N} (r+1)^2 S_r^2(c))^{1/2} \leqslant \left(\int_{T} |\sum_{r\in N} (r+1) S_r(c) e^{2i\pi 2^r \tilde{t}}|^2 d\tilde{t}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_{\tilde{T}} |\sum_{n\in N_1} c_n Z_n(\tilde{t})|^2 \tilde{\varepsilon} d\tilde{t}\right)^{1/2} = \tilde{\gamma}\ .$$

Alors, de l'inégalité $\sum_{r\geqslant 0} \gamma_r^2 + \tilde{\gamma}^2 \leqslant 1$, on déduit que, si

$$\|\sum_{n\in N_1} c_n Z_n\|_{L^2(T,\nu)} \leqslant 1\ ,$$

on a:

(6.II.5; 8)
$$(\sum_{r\geqslant 0} ((r+1)^2 S_r^2(c) + M_r^2(c)))^{1/2} \leqslant 1\ .$$

Ceci va nous donner très exactement un bon cotype pour la suite Z. Appelons V le sous-espace de C^{N_1} formé des suites pour lesquelles le premier membre de (6.II.5; 8) est fini, et prenons ce premier membre comme norme. Alors V est un Banach, à injection continue dans C^{N_1}. Il apparaît comme un espace de la forme $l^2((V_r)_{r\in N})$; V_r est l'espace vectoriel (de dimension finie) des suites $(c_n)_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}}$, muni de la norme

$$\|c\|_{V_r} = ((r+1)^2 S_r^2(c) + M_r^2(c))^{1/2}\ ;$$

et $l^2((V_r)_{r\in N})$ est l'espace des suites $(v_r)_{r\in N}$, $v_r \in V_r$ pour tout r, telles que

$$(\sum_{r\in N} \|v_r\|_{V_r}^2)^{1/2} < +\infty\ ,$$

avec

$$\|(v_r)_{r\in N}\|_{l^2((V_r)_{r\in N})}=(\sum_{r\in N}\|v_r\|_{V_r}^2)^{1/2} .$$

Le dual de $l^2((V_r)_{r\in N})$ est $l^2((V'_r)_{r\in N})$, et ces espaces sont réflexifs (les V_r étant de dimension finie, donc réflexifs!); en outre, V et V' contiennent $C^{(N_1)}$ et sont contenus dans C^{N_1}, avec des injections continues denses. (On remarquera (ce qui n'est pas utile ici) que V n'est pas normal par troncatures, mais qu'il est normal par les troncatures de rang 2^r, $r\in N$, les boules étant stables par ces troncatures; donc en particulier qu'il est normal (voir début de (6.II)).)

Alors l'inégalité (6.II.5;8) s'écrit, pour $c\in C^{(N_1)}$) (suite finie!):

(6.II.5;8 bis) $$\|c\|_V\leqslant\|\sum_{n\in N_1}c_nZ_n\|_{L^2(T,\nu)} ,$$

autrement dit la suite $Z=(Z_n)_{n\in N_1}$ est de cotype $(2, V)$, ou encore définit une probabilité cylindrique (ou de Radon) ρ sur C^{N_1} de cotype $(2, V)$.

Nous allons maintenant montrer que, si $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N_1}$ est une suite telle que $\sum_{n\in N_1}|\alpha_n|^2\log^2 n<+\infty$, l'application diagonale v ou $\alpha:(c_n)_{n\in N_1}\mapsto(\alpha_nc_n)_{n\in N_1}$ donne une suite $\alpha Z=(\alpha_nZ_n)_{n\in N_1}$ qui est 2-presque sûrement dans $U=l^2(N_1)$; ou encore que $v(\rho)$ provient d'une probabilité de Radon d'ordre 2 sur l^2 (car $v(\rho)$ est porté par l^2, donc provient d'une probabilité de Radon sur l^2 muni de la topologie induite par C^{N_1}, donc aussi pour sa topologie, qui est polonaise). Nous voulons montrer que

$$\int_T\sum_{n\in N_1}|\alpha_nZ_n(t)|^2dt<+\infty .$$

D'abord, sur T_r, nous avons, pour $2^r\leqslant n<2^{r+1}$:

(6.II.5;9) $$|Z_n(t)|\leqslant \operatorname{Min}\left(\frac{2}{t}, 2^r\right)\varepsilon_r^{-1/2}f_r(t_r) .$$

En faisant le calcul (6.I.3;9), avec $N=2^r$, $p=2$, on trouve

(6.II.5;10) $$\begin{aligned}\int_{T_r}\sum_{2^r\leqslant n<2^{r+}}|\alpha_nZ_n(t_r)|^2\varepsilon_rdt_r &=\sum_{2^r\leqslant n<2^{r+1}}|\alpha_n|^2(r\log 2+1)(4r\log 2+1)\\ &\leqslant \text{const.}\,(\sum_{2^r\leqslant n<2^{r+1}}|\alpha_n|^2)(r+1)^2\\ &\leqslant \text{const.}\sum_{2^r\leqslant n<2^{r+1}}|\alpha_n|^2(\log n+1)^2 .\end{aligned}$$

Possons maintenant à $\tilde{T}$. Toutes les $|Z_n|$ sont $\tilde{\varepsilon}^{-1/2}(r+1)$ sur $\tilde{T}$, pour $2^r\leqslant n<2^{r+1}$, donc

(6.II.5;11) $$\int_{\tilde{T}} \sum_{n\in N_1} |\alpha_n Z_n(\tilde{t})|^2 \tilde{\varepsilon} d\tilde{t} \leqslant \sum_{r\in N} (r+1)^2 \sum_{2^r\leqslant n<2^{r+1}} |\alpha_n|^2 \leqslant \text{const.} \sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2 .$$

Et finalement on a bien

(6.II.5;12) $$\left(\int_T \sum_{n\in N_1} |\alpha_n Z_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \text{const.} \left(\sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2\right)^{1/2} .$$

On a donc les inégalités

(6.II.5;13) $$^*\|\rho\|_{2,V} \leqslant 1, \quad \|v(\rho)\|_{2,l^2} \leqslant \text{const.} \left(\sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2\right)^{1/2} .$$

Le théorème de dualité est donc applicable. Il montre que ${}^t v$, qui n'est autre que v, est 2-radonifiante de l^2 dans V (Banach réflexif!), avec

$$\pi_2({}^t v) \leqslant C\left(\sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2\right)^{1/2} .$$

Remarquons que l'espace S des séries convergentes, c. à d. des suites $c=(c_n)_{n\in N_1}$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge (non absolument!), muni de la norme

(6.II.5;14) $$\|c\|_S = \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |c_1+c_2+\cdots+c_n|$$

est un Banach, et que $V\subset S$ avec une injection continue. S est normal par troncatures, et ses boules sont stables par troncature. En effet, pour $2^{r_0}<2^r\leqslant n <2^{r+1}$, on a

$$\begin{aligned} |c_{2^{r_0}}+c_{2^{r_0}+1}+\cdots+c_n| &\leqslant \sum_{r_0\leqslant s<r} S_s(c)+M_r(c) \\ &\leqslant \left(\sum_{s\geqslant r_0} (s+1)^2 S_s^2(c)\right)^{1/2} \left(\sum_{s\in N} \frac{1}{(s+1)^2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{s\geqslant r_0} M_s^2(c)\right)^{1/2} \\ &\leqslant \text{const.} \left(\sum_{s\geqslant r_0} ((s+1)^2 S_s^2(c)+M_s^2(c))\right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Si donc $c\in V$, la dernière parenthèse tend vers 0 pour r_0 tendant vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n\in N_1} c_n$ converge. En outre, en faisant $r_0=0$:

$$\|c\|_S \leqslant \text{const.} \|c\|_V .$$

On pourra donc énoncer le résultat suivant:

PROPOSITION (6.II.5;15) (*Théorème de* MENCHOV). [62] *Pour toute suite* $c\in C^{N_1}$, *posons*

$$S_r(c)=\left|\sum_{2^r\leqslant n<2^{r+1}} c_n\right|$$

[62] Voir DOOB [1], chap. IV, §4, théorème (4.2). Les présents résultats sont notablement plus forts que celui de MENCHOV.

$$M_r(c) = \operatorname*{Sup}_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} |c_{2^r} + c_{2^r+1} + \cdots + c_n| \,;$$

appelons V l'espace des suites $c \in C^{N_1}$ pour lesquelles

$$\|c\|_V = \Big(\sum_{r \in N} (r+1)^2 S_r^2(c) + M_r^2(c)\Big)^{1/2}$$

est fini; normons-le par $c \mapsto \|c\|_V$; c'est un Banach réflexif. Si S est l'espace des séries convergentes, c. à d. des suites $c \in C^{N_1}$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, normé par

$$\|c\|_S = \operatorname*{Sup}_{n \geqslant 1} |c_1 + c_2 + \cdots + c_n| \,,$$

c'est un Banach. Alors $V \subset S$, avec une injection continue. Si α est une suite $(\alpha_n)_{n \in N_1}$, telle que $\sum_{n \in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2$ converge, l'application diagonale

$$\alpha : (c_n)_{n \in N_1} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n \in N_1}$$

est 0-radonifiante de l^2 dans V, a fortiori dans S. En outre, sa norme π_p, pour tous les $p \geqslant 0$, est majorée par $C\big(\sum_{n \in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2\big)^{1/2}$, où C est une constante universelle.

COROLLAIRE (6.II.5;16). *Si $X = (X_n)_{n \in N_1}$ est une suite orthonormée de variables aléatoires complexes (donc de type $(2, l^2)$), et si $\sum_{n \in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ converge presque sûrement, et en outre*

$$\Big(\int_\Omega \big(\operatorname*{Sup}_{n \geqslant 1} |\alpha_1 X_1(\omega) + \cdots + \alpha_n X_n(\omega)|^2\big) d\mu(\omega)\Big)^{1/2} \leqslant C\Big(\sum_{n \geqslant 1} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2\Big)^{1/2} \,, \tag{6.II.5;17}$$

où C est une constante universelle.

On peut ensuite réappliquer le théorème de dualité ou encore le théorème (5.20.4), l^2 étant un Hilbert. Remarquons que le dual S' de S est (par la méthode d'Abel) l'espace des suites c à variation bornée, avec la norme

$$\|c\|_{S'} = \sum_{n \geqslant 0} |c_n - c_{n+1}| + \lim_{n \to \infty} |c_n| \,,$$

équivalente à la norme

$$|c_1| + \sum_{n \geqslant 0} |c_{n+1} - c_n| \,.$$

L'espace S, isomorphe à un espace l^∞ (norme définie par un Sup) n'est pas réflexif; il est donc intéressant de garder $\sigma(S', S)$ au lieu de S'. D'autre part, pour les suites $X = (X_n)_{n \in N_1}$ de type (p, S), on pourra appliquer la proposition (6.II.1). Alors:

COROLLAIRE (6.II.5;17 bis). *Si $\sum_{n \in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 < +\infty$, l'application α est p-*

radonifiante de l^2 dans V et dans S, et de V' et $\sigma(S', S)$ dans l^2, pour tout $p \geqslant 0$. Si $X=(X_n)_{n\in N_1}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω, μ), telle que, pour toute $c\in l^2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ converge en probabilité (resp. en moyenne d'ordre $p>0$), si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2 < +\infty ,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ converge presque sûrement [63] *(resp. et en outre:*

$$(6.\text{II}.5;18) \qquad \| \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+ \cdots +\alpha_n X_n| \|_{L^p(\Omega,\mu)} \leqslant C(\sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2)^{1/2} \operatorname*{Sup}_{\|c\|_{l^2}\leqslant 1} \|\sum c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

pour $p>0$, C étant une constante universelle). Si maintenant $X=(X_n)_{n\in N_1}$ est une suite de variables aléatoires telle que, pour toute suite $c\in C^{N_1}$ telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ converge en probabilité (resp. en moyenne d'ordre $p>0$), si

$$\sum_{n\in N_1} |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2 < +\infty ,$$

la série $\sum_{n\in N_1} |\alpha_n X_n|^2$ converge presque sûrement (resp. et en outre

$$(6.\text{II}.5;19) \qquad \|(\sum_{n\in N_1} |\alpha_n X_n|^2)^{1/2}\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leqslant C(\sum |\alpha_n|^2 (\log n+1)^2)^{1/2} \operatorname*{Sup}_{\|c\|_S\leqslant 1} \|\sum c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} ,$$

pour $p>0$, où C est une constante universelle).

(6.II.6) *Les suites sommables d'un espace L^1.*

Reprenons des variables aléatoires analogues à celles de l'exemple (6.I.3), mais pour une suite infinie et pour $p=1$. Autrement dit, T sera le tore muni de sa mesure de Haar dt, et Z sera la suite $(Z_n)_{n\in N_1}$ de variables aléatoires définie par

$$(6.\text{II}.6;1) \qquad Z_n(t)=e^{2i\pi t}+e^{2i\pi 2t} + \cdots +e^{2i\pi nt} .$$

Montrons qu'elle est de cotype $(1, S)$, S étant l'espace des séries convergentes, défini à l'exemple précédent. On a exactement, pour une suite finie $c\in C^{(N_1)}$:

$$(6.\text{II}.6;2) \qquad \sum_{n\in N_1} c_n Z_n(t)= \sum_{n\in N_1} C_n e^{2i\pi nt}, \quad C_n=c_n+c_{n+1}+c_{n+2}+ \cdots .$$

[63] Comparer (6.II.4;1) et (6.II.5;17 bis). Si la convergence de $\sum_n |c_n|^2$ entraine la convergence en probabilité de $\sum_n c_n X_n$, alors:

1) Si $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$, $\sum_n |\alpha_n X_n|$ converge presque sûrement (par (6.II.4;1));

2) Si $\sum_n |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$, $\sum_n \alpha_n X_n$ converge presque sûrement (par (6.II.5;17 bis)).

(Comme c est une suite finie, cette formule ne nécessite aucune hypothèse de convergence). Alors:

$$\text{(6.II.6;3)} \qquad \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |C_n| \leqslant \int_T \Big|\sum_{n\in N_1} C_n e^{2i\pi nt}\Big| dt = \int_T \Big|\sum_{n\in N_1} c_n Z_n(t)\Big| dt\,.$$

Or, sur S, la norme

$$c \mapsto \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |c_1+c_2+\cdots c_n|$$

est équivalente à la norme

$$c \mapsto \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |c_n+c_{n+1}+\cdots|\,,$$

donc on voit bien que $Z=(Z_n)_{n\in N_1}$ est de cotype $(1, S)$ (ou définit sur C^{N_1} une probabilité ρ de cotype $(1, S)$, et $*\|\rho\|_{1,S}\leqslant 2$). Ensuite on suppose que $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N_1}$ est une suite de nombres complexes, vérifiant une majoration $|\alpha_n|\leqslant$const. $(\log n+1)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Montrons qu'alors la suite $\alpha Z=(\alpha_n Z_n)_{n\in N_1}$ est 1-presque sûrement dans l^∞. On a les majorations:

$$\text{(6.II.6;4)} \qquad |Z_n(t)| \leqslant \operatorname{Min}\left(\frac{2}{t}, n\right).$$

Soit $\dfrac{1}{N+1}\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{N}$, $N\geqslant 1$. Alors

$$|\alpha_n Z_n(t)| \leqslant \frac{\text{const.}\ n}{(\log n+1)^{1+\varepsilon}}\,,$$

pour $n\leqslant N$, soit

$$|\alpha_n Z_n(t)| \leqslant \text{const.}\ \frac{N}{(\log N+1)^{1+\varepsilon}}\,.$$

D'autre part

$$|\alpha_n Z_n(t)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(\log n+1)^{1+\varepsilon}}\,\frac{1}{t} \qquad \text{pour} \quad n\geqslant N+1\,,$$

soit, puisque $\dfrac{1}{t}\leqslant N+1$,

$$|\alpha_n Z_n(t)| \leqslant \frac{\text{const.}\ N}{(\log N+1)^{1+\varepsilon}}\,.$$

Finalement

$$\text{(6.II.6;5)} \qquad \operatorname*{Sup}_{n\in N_1} |\alpha_n Z_n(t)| \leqslant \text{const.}\ \frac{N}{(\log N+1)^{1+\varepsilon}}$$

pour $\frac{1}{N+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{N}$. Alors

$$(6.II.6;6) \quad \int_T (\operatorname{Sup}_{n\in N_1} |\alpha_n Z_n(t)|)dt$$

$$\leqslant \sum_{N=1}^{\infty} \int_{1/(N+1)}^{1/N} \leqslant \text{const.} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N}{(\log N+1)^{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= \text{const.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log N+1)^{1+\varepsilon}(N+1)} < +\infty \; .$$

Cette inégalité prouve donc bien que αZ est 1-presque sûrement dans l^∞. Comme la boule unité de l^∞ est compacte dans C^{N_1}, cela prouve que $v(\rho)$, où v est l'application diagonale α, provient d'une probabilité de Radon sur l^∞ muni de la topologie induite par C^{N_1}, ou encore sur $\sigma(l^\infty, l^1)$, qui est lusinien. U sera donc l'espace bitopologique $(\sigma(l^\infty, l^1), \| \ \|_{l^\infty})$. Appliquons le théorème de dualité. L'espace S n'est pas réflexif. Mais nous pouvons le munir de la topologie induite par C^{N_1}, pour laquelle sa boule unité est compacte; notons-le ainsi S_0; nous raisonnerons sur l'espace bitopologique $V=(S_0, \| \ \|_S)$. La proposition (5.36) s'applique, avec $U_0=c^0$, donc $\sigma(U_0', U_0)=\sigma(l^1, c^0)$. Il est trivial que $\alpha={}^t v$ est continue de $\sigma(l^1, c^0)$ dans $\sigma(S, S')$. Mais le théorème de dualité nous donnera une probabilité de Radon sur S_0 ou sur $\sigma(S'', S')$, non sur S. On écrira $\alpha_n=\beta_n\gamma_n$, la suite β ayant des propriétés analogues à α, et γ étant une suite $\geqslant 0$ décroissante et tendant vers 0. Alors γ opère de S dans S, par le théorème d'Abel, et comme un opérateur compact; en effet, si $\tilde{\gamma}_n$ est la suite tronquée de γ au n-ième terme, $\tilde{\gamma}_n$ est un opérateur de rang fini, et, pour $c \in S$, Abel donne:

$$\gamma c - \tilde{\gamma}_n c = (0, 0, \cdots 0, \gamma_{n+1}c_{n+1}, \gamma_{n+2}c_{n+2}, \cdots)$$

$$\|\gamma c - \tilde{\gamma}_n c\| \leqslant \gamma_{n+1} \operatorname{Sup}_{k\geqslant 0} |c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}| \leqslant 2\gamma_{n+1}\|c\|_S \; .$$

Le corollaire (3.9.1) donnera alors une probabilité de Radon sur S (nous avons fait la même chose pour démontrer (6.II.4;1)). Alors,

PROPOSITION (6.II.6;7) (*KWAPIEN, PEŁCZYNSKI*). [64] *Soit $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N_1}$ une suite telle que $|\alpha_n| \leqslant \text{const.} (\log n+1)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. L'application diagonale α est 1-radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l'espace S des séries convergentes. Si $X=(X_n)_{n\in N_1}$ est une suite de variables aléatoires scalairement l^1 dans $L^1(\Omega, \mu)$, c. à d. telle que, pour toute suite $c\in c^0$, $\sum_{n\in N_1} c_n X_n$ converge dans $L^1(\Omega, \mu)$, alors la série $\sum_{n\in N_1} \alpha_n X_n$ est presque sûrement convergente et*

$$\int_\Omega \operatorname{Sup}_{n\geqslant 1} |\alpha_1 X_1(\omega) + \alpha_2 X_2(\omega) \cdots + \alpha_n X_n(\omega)| d\mu(\omega) < +\infty \; .$$

[64] KWAPIEN-PEŁCZYNSKI [1].

La dernière affirmation résulte de ce qu'une suite $X=(X_n)_{n\in N_1}$ dans un Banach B est scalairement l^1, si et seulement si $(c_n)_{n\in N}\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n$ est continue de $C^{(N_1)}$, muni de la topologie induite par c^0, dans B; c. à d., pour $B=L^1(\Omega,\mu)$, si X est de type $(1,c^0)$.

Exemple (6.II.7). Il est difficile de dire, parmi tous les exemples que l'on peut trouver, lesquels sont bons et lesquels médiocres ou inutiles. En voici un, dont j'ignore la valeur.

Reprenons les Z_n de l'exemple précédent, données par (6.II.6;1). Nous avons vu que $Z=(Z_n)_{n\in N_1}$ est de cotype $(1,S)$, avec $*\|Z\|_{1,S}\leqslant 2$. Appelons maintenant D l'espace des suites $c=(c_n)_{n\in N_1}$ telles que $\operatorname*{Sup}_{n\in N_1}|c_n-c_{n-1}|<+\infty$ (en posant $c_0=0$), et posons $\|c\|_D=\operatorname*{Sup}_{n\in N_1}|c_n-c_{n-1}|$. D est un Banach, avec $C^{(N_1)}\subset D\subset C^{N_1}$, les injections étant continues. Or Z est 1-presque sûrement dans D; en effet,

$$\int_T\operatorname*{Sup}_{n\in N_1}|Z_n(t)-Z_{n-1}(t)|dt=1\ .$$

On peut donc appliquer le théorème de dualité.

Nous prendrons pour U l'espace bitopologique D, la topologie étant induite par C^{N_1}, la norme étant $\|\ \|_D$. Il faut toutefois que la propriété d'approximation du théorème (5.32) suit vérifiée.

On ne pourra pas ici prendre pour π_j une troncature; en effet, D contient des suites dont le terme général tend vers $+\infty$, exemple $(n)_{n\in N_1}$; les troncatures ne sont pas des opérations équicontinues! Mais définissons π_j comme suit; $\pi(c)=c'$, avec $c'_n=c_n$ pour $n\leqslant j$; $c'_{j+k}=c_{j+k}(1-k/j)$, pour $0\leqslant k\leqslant j$; $c'_n=0$ pour $n\geqslant 2j$. Alors π_j est continue de C^{N_1} dans $C^{(N_1)}$; en outre, pour $c\in D$, on a, pour tout n, $|c_n|\leqslant n\|c\|_D$, alors

$$|c'_{j+k+1}-c'_{j+k}|\leqslant|c_{j+k+1}-c_{j+k}|+\frac{1}{j}|c_{j+k}|\leqslant 3\|c\|_D\ ,$$

donc

$$\|\pi_j(c)\|_D\leqslant 3\|c\|_D\ .$$

On prendra pour V l'espace bitopologique S, la topologie étant induite par C^{N_1}, la norme étant $\|\ \|_S$; la boule unité est alors compacte pour la topologie. On en déduit, avec $2\times1\times3=6$:

PROPOSITION (6.II.7;1). *Soit $X=(X_n)_{n\in N_1}$ une suite de variables aléatoires telle que*

$$\text{(6.II.7;2)}\qquad \|X\|^*_{(1,D)}=\operatorname*{Sup}_{c\in C^{(N_1)},\|c\|_D\leqslant 1}\|\sum_{n\in N_1}c_nX_n\|_{L^1(\Omega,\mu)}<+\infty\ .$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge presque sûrement, et en outre*

(6.II.7; 3) $$\int \operatorname*{Sup}_{N \in \mathbf{N}_1} \left| \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) \right| d\mu(\omega) \leqslant 6 \|X\|^*_{(1,D)} .$$

Index bibliographique

BOURBAKI, N., [1] Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1964 et 1966.

DOOB, J. L., [1] Stochastic Processes, John Wiley, New-York, 1953.

CHEVET, S., [1] Note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences, à paraître (décembre 1971).

FERNIQUE, X., Intégrabilité des vecteurs gaussiens, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1968–1700.

GROTHENDIECK, A., [1] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. N° 16, 1955.

GOULAOUIC, C. et L. SCHWARTZ, [1] Equations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1970–71.

KAHANE, J. P., [1] Some random series of functions, Heath, Lexington, Mass., Etats-Unis, 1968.

KAKUTANI, S., [1] Concrete representations of abstract L-spaces, Ann. of Math. **42** (1941), 523–537.

KHINTCHINE, A. et A. KOLMOGOROV, [1] Über die Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Mat. Sb. **32** (1925), 668–677.

KOLMOGOROV, A. et A. KHINTCHINE, Voir KHINTCHINE, A. et A. KOLMOGOROV.

KWAPIEN, S., [1] Sur les applications radonifiantes et les applications sommantes, C. R. Acad. Sci. Paris **269** (1969), 590–592.

KWAPIEN, S., [2] Some remarks on (p, q)-absolutely summing operators in l_p-spaces, Studia Math. **29** (1968), 327–337.

KWAPIEN, S. et A. PELCZYNSKI, [1] The main triangle projections in matrix spaces and its applications, Studia Math. **34** (1970), 43–67.

LANDAU, H. J. et L. A. SHEPP, On the supremum of Gaussian sequences, à paraître.

MAUREY, B., [1] et [2] Applications p-sommantes pour p réel quelconque. Note aux C. R. Acad. Sci. **272** (1971), 376–378.

MAUREY, B., [3] Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, à paraître (décembre 1971).

PHILLIPS, R. S., [1] On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–551.

PELCZYNSKI, A. et S. KWAPIEN, Voir KWAPIEN, S. et A. PELCZYNSKI.

PIETSCH, A., [1] Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. **28** (1967), 333–353.

SCHWARTZ, L., [1] Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires, à paraître, au Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Inde.

SCHWARTZ, L., [2] Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969, 41–59.

SCHWARTZ, L., [3] Un théorème de convergence dans les L^p, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris **268** (1969), 704–706.

SCHWARTZ, L., [4] Applications p-radonifiantes, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1969–70.

SCHWARTZ, L. et C. GOULAOUIC, Voir GOULAOUIC, C. et L. SCHWARTZ.
SHEPP, L. A. et H. J. LANDAU, Voir LANDAU, H. J. et L. A. SHEPP.
SŁOWIKOWSKI, W., [1] Absolutely 2-summing operators from and to Hilbert spaces and a Sudakov theorem, Bull. Acad. Polon. Sci., à paraître.
SUNYACH, C., [1] Inégalité de Pietsch et factorisation des applications radonifiantes, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1520-1522.
TOPSOE, F., [1] Topology and measure, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, n° 133, 1970.

Index terminologique et index des notations.

Cet index pouvant être rapidement parcouru, nous avons rassemblé les notions voisines, plutôt que de faire un classement par ordre alphabétique.

p-quasi-norme, espace quasi-normé, quasi-Banach, E_N : (0.00).
$L^p(\Omega, \mu; E)$: (0.0 bis) et (0.2).
Espace bitopologique, ${}_1E$, ${}_2E$: (0.2).

PROKHOROV : (1.1).

Poids Φ : (1.1 bis). $\| \ \|_p$, $\| \ \|_{+\infty}$: (1.3), (1.4).
Poids M_α : (1.8), J_α : (1.9). J-poids : (1.12).
Poids plus fort ou plus faible que L^0 : (1.12 bis).
Poids compact : (1.13). Poids homogène : (1.14).
Fonction compacte : (1.15).

Ordre d'une probabilité de Radon, ordre (Φ, θ) ou Φ : (1.15 bis), (1.18).
Ensemble uniformément d'ordre Φ : (1.18).
$\Phi(\lambda)$, $J_\alpha(\lambda)$, ordre p, ordre 0, $\|\lambda\|_p$: (1.18).

Probabilité cylindrique, topologie cylindrique, $\hat{\mathscr{P}}(E)$: (1.17).

Fonction aléatoire décomposée (1.19).

Type d'une probabilité cylindrique (2.1.0).
Type (Φ, θ'), type Φ : (2.1.1). Ensemble uniformément de type Φ : (2.1.3).
Type p, type 0 : (2.1.4), (2.1.5).
$\Phi^*(\lambda)$, $J_\alpha^*(\lambda)$, $\|\lambda\|_p^*$: (2.1.7).

Probabilité cylindrique de Gauss : (2.1.8 bis).

Probabilité cylindrique de type (Φ, θ') ou Φ-approximable ou très approximable : (2.2.0).
$\Phi^{*a}(\lambda)$, $\Phi^{*ta}(\lambda)$: (2.2.0).

Application $(A, \alpha'; B, \beta)$-radonifiante, approximativement ou très approximativement radonifiante, p-radonifiante : (2.3), (2.4).

Propriété d'approximation équicontinue : (2.6.3), d'approximation métrique : (2.6.4).
Application décomposante : (2.13).

Application p-sommante : (3.1 bis). Suite scalairement l^p, $\mathscr{S}^p(E)$: (3.1). Norme $\Pi_p(u)$: (3.3).

Inégalité de PIETSCH : (3.6).
Opérateur p-nucléaire : (3.8.3).

Cotype : (5.1). $^*\Phi(\lambda)$, $^*\|\lambda\|_p$: (5.3).
Inégalité de FUBINI $(C, D) \leqslant (A, B)$: (5.9).
Ordre, type, cotype (A, α, U) ou (B, β, V) : (5.15).
Probabilité cylindrique $(\mathscr{C}', U)-(A, \alpha)$-approximable : (5.22).

Variable aléatoire subnormale : (6.I.2.11).

(Reçu le 8 août 1970)

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Paris V
France

Laurent SCHWARTZ

TABLE DES MATIERES

Introduction et résumé des paragraphes........................p. 139
§ 0 Préliminaires ....p. 143
§ 1 Le théorème de compacité de Prokhorov; poids, probabilités cylindriques ....p. 153
§ 2 Le type et les applications radonifiantes ....p. 169
§ 3 Les applications p-radonifiantes dans les quasi-Banach, $0<p\leqslant+\infty$ ....p. 193
§ 4 Applications 0-radonifiantes dans les espaces de Banach....p. 215
§ 5 Le théorème de dualité ....p. 231
§ 6 Exemples et applications ....p. 255
Index bibliographique ....p. 283
Index terminologique et index des notations ....p. 284
Table des matières ....p. 286