Laurent Schwartz

Applications p-radonifiantes et théorème de dualité

Proceedings of the International Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras (Warsaw, 1969),
Studia Math., vol. 38, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny, 1970, p. 203-213.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)
Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

Applications p-radonifiantes et théorème de dualité

par

LAURENT SCHWARTZ (Paris)

Cet article ne saurait se suffire à lui-même. Les principaux résultats en ont été annoncés dans des Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Schwartz [7]), et seront démontrés dans des livres ou articles à paraitre prochainement (Schwartz [6], [11] et [12]).

1. Définitions. Soit E un espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$, non nécessairement localement convexe, mais séparé par son dual. On appelle probabilité cylindrique λ sur E, la *donnée* d'un système cohérent de probabilités de Radon sur les quotients séparés de dimension finie de E. Un quotient séparé de dimension finie de E est de la forme E/F, où F est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie; si G est fermé de codimension finie et si $G \subset F$, on a une application canonique $\pi_{E/F,E/G}$ de E/G sur E/F; alors λ est la donnée d'une famille $(\lambda_{E/F})_{F\in\mathscr{F}}$ de probabilités ($\lambda_{E/F}$ probabilité sur E/F, $\mathscr{F}$ ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de E), telle que, pour $G \subset F$, $\lambda_{E/F} = \pi_{E/F,E/G}\,(\lambda_{E/G})$; tel est le sens du mot *cohérent*. Si μ est une probabilité de Radon sur E (mesure $\geqslant 0$ de masse 1 sur la tribu borélienne de E, intérieurement régulière, c.-à-d. vérifiant, pour tout B borélien de E,

$$\mu(B) = \operatorname*{Sup}_{K \text{compact} \subset B} \mu(K),$$

elle définit une probabilité cylindrique λ par $\lambda_{E/F} = \pi_{E/F,E}(\mu)$, où $\pi_{E/F,E}$ est la surjection canonique de E sur son quotient E/F; cette application $\mu \to \lambda$ est injective, ce qui permet désormais d'identifier les probabilités de Radon à des probabilités cylindriques particulières.

THÉORÈME 1 (de Prokhorov [5]). *Soit λ une probabilité cylindrique sur E. Pour qu'elle soit une probabilité de Radon, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E, tel que, pour tout $F \in \mathscr{F}$, $\lambda_{E/F}$ $(\pi_{E/F,E}(K)) \geqslant 1-\varepsilon$.*

Les probabilités cylindriques sont étroitement liées aux fonctions aléatoires. Une *variable aléatoire* scalaire est la donnée d'un espace topologique Ω, d'une probabilité de Radon μ sur Ω, et d'une μ-classe f d'applications μ-mesurables de Ω dans $\boldsymbol{K}$. L'espace des variables aléatoires relatives à (Ω, μ) donné se notera $L^0(\Omega, \mu)$.

On introduira sur tous ces espaces des topologies. Sur l'espace $\mathscr{P}(X)$ des probabilités de Radon sur un espace topologique séparé X on introduit la *topologie étroite*; pour X complètement régulier, c'est la topologie de la convergence simple sur l'ensemble $\mathscr{B}(X)$ des fonctions scalaires continues bornées sur X. Sur l'espace $\check{\mathscr{P}}(E)$ des probabilités cylindriques sur E, on introduira la *topologie cylindrique*, la moins fine pour laquelle les applications $\lambda \to \lambda_{E/F}$ sont continues de $\check{\mathscr{P}}(E)$ dans $\mathscr{P}(E/F)$, $F \in \mathscr{F}$. Enfin sur $L^0(\Omega, \mu)$ on introduit la *topologie de la convergence en probabilité*; un système fondamental de voisinages de 0 dans $L^0(\Omega, \mu)$ est formé des ensembles

$$\{f \in L^0(\Omega, \mu);\ \mu\{\omega \in \Omega;\ |f(\omega)| > \delta\} \leqslant \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon, \delta > 0$. Alors $f \to f(\mu)$ *est une application continue de* $L^0(\Omega, \mu)$ *dans* $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$ (*la convergence en probabilité entraine la convergence en loi*).

On appelle maintenant *fonction aléatoire* f sur un ensemble T, une fonction de T à valeurs dans un espace de variables aléatoires $L^0(\Omega, \mu)$; pour tout $t \in T, f(t)$ est alors une variable aléatoire $\in L^0(\Omega, \mu)$. Si alors $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des éléments de T en nombre fini, $\big(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)\big)$ est une μ-classe d'applications μ-measurables de Ω dans $\boldsymbol{K}^n$, donc définit une probabilité image de μ sur $\boldsymbol{K}^n$; on l'appelle la *loi marginale de la fonction aléatoire* pour les valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_n$. On dit que deux fonctions aléatoires f, f', relatives au même ensemble T, mais à des (Ω, μ), (Ω', μ') éventuellement distincts, sont *isonomes* ou *équivalentes* ou *de même loi*, si les lois marginales de f et f' sont les mêmes, pour tout systeme fini $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Si T est un espace vectoriel ou un espace topologique, on dira que la fonction aléatoire f est *linéaire* ou *continue*, si elle est linéaire ou continue de T dans l'espace vectoriel topologique $L^0(\Omega, \mu)$. Cela ne dépend évidemment que de la classe d'isonomie de f.

THÉORÈME 2 (v. [5]). *Il existe une correspondance bijective entre les probabilités cylindriques sur E et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E'; si λ est une probabilité cylindrique, f_λ est l'unique classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E', pour laquelle la loi marginale de f_λ relative à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in E'$, soit l'image de λ par l'application $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de E dans $\boldsymbol{K}^n$; si f est une fonction aléatoire linéaire sur E', λ_f est l'unique probabilité cylindrique sur E pour laquelle, pour $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in E'$, l'image de λ_f par l'application $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de E dans $\boldsymbol{K}^n$ soit la loi marginale de f pour $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.*

2. L'ordre, le type, les applications radonifiantes. Une probabilité de Radon sur un Banach E est dite *d'ordre* $p > 0$, si la norme est de puissance p-ième intégrable. Elle est alors toujours aussi d'ordre $q \leqslant p$. Par définition, toute probabilité de Radon sur E est d'ordre 0. Si $p > 0$, on posera, pour λ de Radon sur E,

$$\|\lambda\|_p = \left(\int \|x\|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p}.$$

Si E est un espace vectoriel topologique séparé par son dual et si λ est de Radon sur E, elle sera dire d'ordre p, s'il existe une partie B bornée équilibrée fermée de E, dont la jauge (qui vaut $+\infty$ en dehors de l'espace vectoriel E_B engendré par B) est de puissance p-ième intégrable pour λ (ce qui implique que λ soit portée par E_B).

Une probabilité cylindrique λ sur E est dite *de type* $p \geqslant 0$, si l'application f_λ de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$ est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Elle est alors aussi de type $q \leqslant p$. On posera alors, pour $p > 0$ et E Banach:

$$\|\lambda\|_p^* = \|f_\lambda\|_{\mathscr{L}(E';L^p(\Omega,\mu))} = \operatorname*{Sup}_{\xi\in E', \|\xi\|\leqslant 1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p d\big(\xi(\lambda)\big)(t)\right)^{1/p}.$$

Soient alors E, G, des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals, u une application linéaire faiblement continue de E dans G. On dit que u est *p-radonifiante*, si l'image par u de toute probabilité cylindrique λ de type p sur E est une probabilité de Radon $u(\lambda)$ d'ordre p sur G. Avant de poursuivre, disons tout de suite, pour donner un exemple, qu'on démontre qu'une application linéaire continue d'un Hilbert dans un autre est p-radonifiante, pour un p fini $\geqslant 0$, si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt (1).

Il sera en fait difficile d'obtenir *directement* des critères permettant d'affirmer qu'une application est p-radonifiante. On devra passer par l'intermédiaire de propriétés d'approximation. On dira qu'une probabilité cylindrique λ sur un Banach E est de type p très approximable pour $p > 0$, si elle est limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j, combinaisons linéaires de masses de Dirac, pour lesquelles $\|\lambda_j\|_p^*$ soit borné par un même nombre fini $M \geqslant 0$; la borne inférieure des nombres M possibles se notera $\|\lambda\|_p^{*ta}$; bien évidemment $\|\lambda\|_p^* \leqslant \|\lambda\|_p^{*ta}$. On donne une définition analogue, un peu plus compliquée, pour $p = 0$ ou pour un espace vectoriel topologique quelconque E. On dira alors que u est *très approximativement p-radonifiante*, si, pour toute λ de type p très approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p. C'est une propriété apparemment un peu moins forte; nous verrons plus loin certains cas où les deux propriétés sont équivalentes.

---

(1) Cela résulte p. ex. de [6], 2-ème partie, chap. 3, § 3, théorème 2, et chap. 6, § 3, théorème 1.

3. Applications radonifiantes et applications sommantes dans le cas d'espaces de Banach. Une application linéaire continue u de E dans G est dite *p-sommante*, $p > 0$, si, pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ d'éléments de E, scalairement l^p, la suite image $u(a) = \big(u(a_n)\big)_{n \in \boldsymbol{N}}$ est l^p. On voit alors facilement que si on pose, pour une suite $a = (a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$,

$$\|a\|_p^* = \operatorname*{Sup}_{\xi \in E', \|\xi\| \leqslant 1} \Big(\sum_{n \in \boldsymbol{N}} |\langle a_n, \xi \rangle|^p \Big)^{1/p}$$

et, pour la suite $u(a)$,

$$\|u(a)\|_p = \Big(\sum_{n \in \boldsymbol{N}} \|u(a_n)\|^p \Big)^{1/p},$$

alors *u est p-sommante, si et seulement s'il existe un nombre fini $M \geqslant 0$ tel que l'on ait, pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ d'éléments de E, tous nuls sauf un nombre fini, l'inégalité*

$$\|u(a)\|_p \leqslant M \|a\|_p^*.$$

Le plus petit nombre M ayant cette propriété se note $\pi_p(u)$, et l'on a la meme inégalité pour une suite $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ arbitraire ([2]). On démontre alors le théorème suivant:

THÉORÈME 3 ([3]). *Soient E, G des Banach, u une application linéaire continue de E dans G. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *u est p-sommante;*

2. *u est très approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;*

3. *Si $p > 0$,* il existe *un $M \geqslant 0$ fini tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, combinaison finite de masses ponctuelles, on ait*

$$\|u(\lambda)\|_p \leqslant M \|\lambda\|_p^*.$$

Le plus petit nombre M ayant cette propriété est alors $\pi_p(u)$, et on a, pour λ quelconque, $\|u(\lambda)\|_p \leqslant M \|u\|^{*ta}_p$.

Il est trivial que 2 implique 1 et que 1 implique 3, et c'est l'implication $3 \Rightarrow 2$ qui seule est à démontrer, pour $p > 0$; pour $p = 0$, 2 implique trivialement 1, et il faut montrer l'implication $1 \Rightarrow 3$. On peut ensuite chercher à améliorer ce théorème en éliminant le "très approximativement" et en remplacant $\sigma(G'', G')$ par G. On dit que *le couple (E, E'), E Banach, a la propriété d'approximation métrique* si l'application identique de E' est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme 1, con-

---

([2]) Les applications p-sommantes ont été introduites par Pietsch et systématiquement étudiées dans [4].

([3]) La relation entre applications p-sommantes et applications très approximativement p-radonifiantes est dûe à Kwapień. Voir [7].

tinues de $\sigma(E', E)$ dans E'. Tous les espaces usuels ont cette propriété d'approximation, qui est un léger renforcement de celle que Banach a conjecturée pour les tous les espaces de Banach. Alors:

THÉORÈME 4. *Soient E, G, de Banach, u une application linéaire continue de E dans G, tres approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Alors on peut supprimer "trés approximativement", si (E, E') a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geqslant 1$; on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G si G est réflexif, ou si $1 < p < +\infty$* (4).

D'autre part on sait qu'une application p-sommante est a fortiori q-sommante pour $q \geqslant p$ (v. [5], prop. 5, p. 335). On peut montrer que toute application p-radonifiante entre espaces de Banach est aussi q-radonifiante pour $q \geqslant p$. (Le cas $p = 0$ est dûe à Kwapień [8].)

4. Exemple d'application: le mouvement brownien. Le théorème 3 permet d'appliquer tous les résultats de la théorie des applications p-sommantes. Donnons-en une application au mouvement brownien.

Définissons sur la droite réelle $\boldsymbol{R}$ un opérateur de dérivation d'ordre réel („d'ordre fractionnaire", comme on dit habituellement de façon assez stupide). Soit φ une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 au voisinage de l'origine, et posons, pour une distribution T sur $\boldsymbol{R}$,

$$D^\alpha T = Z^\alpha * T, \qquad Z^\alpha = Pf\, Y(x)\varphi(x)x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha),$$

Y fonction de Heaviside, pour $\alpha \notin \boldsymbol{N}$, et $Z^n = \delta^{(n)}$. On dira que $D^\alpha T$ est la *dériveé d'ordre α de T*, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ (sous entendu: modulo les fonctions C^∞). On vérifie alors aisément que $D^{\alpha+\beta}T = D^\alpha D^\beta T + \varrho * T$, ϱ fonction C^∞ à support compact; en particulier, $D^{-\alpha}T$ peut être appelée une *primitive* d'ordre α de T, puisque $D^\alpha(D^{-\alpha}T) = T +$ fonction C^∞. Ces opérateurs dépendent du choix de la fonction φ, mais la différence entre les $D^\alpha T$ correspondant à deux fonctions φ différentes est une fonction C^∞; tant qu'il s'agira seulement de dire qu'une distribution a une dérivée d'ordre α dans L^p_{loc} ou d'autres propriétés de ce genre, le choix de φ est donc sans importance. Par contre, au lieu de prendre $Y(x)x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$, on aurait pu prendre $e^{-i\pi\alpha}Y(-x)(-x)^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$, ou beaucoup d'autres opérateurs. Pour l'étude de la régularité locale des distributions, ces différents opérateurs ne donnent pas tous le même résultat; dire qu'une fonction a sa dérivée d'ordre α qui est continue n'a donc pas de sens si l'on ne précise pas l'opérateur choisi. Nous en choisissons donc un une fois pour toutes; et on trouvera de toute façon des résultats qui seraient aussi, en fait, valables avec bien d'autres opérateurs. Nous considérerons alors des espaces de distributions W sur $\boldsymbol{R}$ du type suivant:

---

(4) La possibilité de remplacer $\sigma(G'', G')$ par G lorsque $1 < p < +\infty$, se démontre en utilisant les applications p-sommantes et la représentation de Pietsch de celles-ci, et est dûe à Kwapień.

1. $E(\boldsymbol{R}) \subset W \subset D'(\boldsymbol{R})$, avec des injections continues;

2. La convolution avec une mesure μ à support compact est continue de W dans W.

Exemples. $W = L^p_{\text{loc}}, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $W = C$, espace des fonctions continues, $W = M$, espace des mesures de Radon (pour la topologie forte ou vague). On appellera alors W^a l'espace vectoriel des distribution T dont la dérivée $D^a T$ est dans W; dans ce cas, la dérivée de tout ordre $\beta \leqslant a$, $D^\beta T$, sera aussi dans W, car $D^\beta T = D^{\beta-a}(D^a T) +$ fonction C^∞, et $D^{\beta-a}$, avec $\beta - a \leqslant 0$, est la convolution avec une mesure à support compact. On dira que T converge vers 0 dans W^a, si T converge vers 0 dans $\mathscr{D}'$ et si $D^a T$ converge vers 0 dans W; alors T converge aussi vers 0 dans W^β pour $\beta \leqslant a$; D^γ est un opérateur linéaire continu de W^a dans $W^{a-\gamma}$, et si T converge veus 0 dans $\mathscr{D}'$ et $D^\gamma T$ dans $W^{a-\gamma}$, T converge vers 0 dans W^a. Les espaces de Sobolev H^s_{loc} ne sont autres que $(L^2_{\text{loc}})^s$. L'espace W^a vérifie encore les conditions 1 et 2 ci-dessus. Soit alors X un compact, ν une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur X; on sait que l'application canonique $C(X) \to L^p(X, \nu)$ ou même $L^\infty(X, \nu) \to L^p(X, \nu)$ est p-sommante, pour $1 < p < +\infty$ ([5]); donc elle est aussi p-radonifiante. De là on déduit aisément que, sur $\boldsymbol{R}$, l'injection canonique de C ou L^∞_{loc} dans L^p_{loc} est p-radonifiante, toujours pour $1 < p < +\infty$. Nous nous proposons de chercher une condition suffisante pour que $(L^a_{\text{loc}})^a \subset (L^b_{\text{loc}})^\beta (1 \leqslant a, b \leqslant +\infty)$ et que l'injection soit p-radonifiante. Prenons d'abord $1 < p < +\infty$. Il suffit qu'on puisse trouver γ et δ tels que l'intégration $D^{-\gamma}$ opère continuement de L^a_{loc} dans L^∞_{loc}, et $D^{-\delta}$ de L^p_{loc} dans L^b_{loc}, c.-à-d., d'après les inégalités de Sobolev ([6]):

$$\gamma > \frac{1}{a}, \qquad \delta > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+ = \operatorname{Max}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}, 0\right),$$

avec $a - \beta = \gamma + \delta$. En effet, dans ce cas, la factorisation $D^{-\beta} D^{-\delta} D^{-\gamma} D^a$

$$(L^a_{\text{loc}})^a \xrightarrow{D^a} L^a_{\text{loc}} \xrightarrow{D^{-\gamma}} L^\infty_{\text{loc}} \to L^p_{\text{loc}} \xrightarrow{D^{-\delta}} L^b_{\text{loc}} \xrightarrow{D^{-\beta}} (L^b_{\text{loc}})^\beta$$

diffère de l'identité par une consolution avec une fonction de $\mathscr{D}$, opération p-radonifiante, et elle passe à travers une injection $L^\infty_{\text{loc}} \to L^p_{\text{loc}}$, p-radonifiante, donc l'identité $(L^a_{\text{loc}})^a \to (L^b_{\text{loc}})^\beta$ sera bien p-radonifiante. Or de tels γ, δ peuvent etre trouvés si

$$a - \beta > \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+.$$

([5]) Cella résulte de la décomposition de Pietsch, dont c'est la partie évidente. Voir [4], théorème 2, p. 341.

([6]) Voir par exemple [8], chap. VI, § 6, lemme précédant le théorème XV, p. 181.

Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ se rattrapent du fait que nous avons pris des inégalités strictes, et finalement:

THÉORÈME 5. *Soient* $1 \leqslant a, b \leqslant +\infty$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *L'injection canonique* $(L^a_{\mathrm{loc}})^\alpha \hookrightarrow (L^b_{\mathrm{loc}})^\beta$ *(définie si* $\alpha - \beta > (1/a - 1/b)^+$*), est sûrement p-radonifiante si* $\alpha - \beta > 1/a + (1/p - 1/b)^+$.

COROLLAIRE. *La fonction aléatoire du mouvement brownien est presque surement continue, et höldérienne de tout ordre* $< 1/2$ (7).

Démonstration. La dérivée de la fonction aléatoire du mouvement brownien est une distribution aléatoire, dont la probabilité cylindrique associée est la probabilité de Gauss sur $L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Donc elle même a une probabilité cylindrique associée qui est l'image de la probabilité de Gauss de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ par l'intégration, qui à f associe

$$x \to \int_0^x f(t)\,dt,$$

opérateur linéaire continu de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+) = \big(L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+)\big)^1$. Par ailleurs, la probabilité de Gauss est de type p pour tout p fini. Le passage des formules sur $\boldsymbol{R}_+$ à des formules sur $\boldsymbol{R}$ n'offrant aucune difficulté, on voit que la probabilité cylindrique associée à la fonction du mouvement brownien est de type p sur $(L^2_{\mathrm{loc}})^1$ pour tout p fini. Donc elle est de Radon d'ordre p sur $(L^\infty_{\mathrm{loc}})^\beta$ ou C^β, dès que $1 - \beta > \frac{1}{2} + 1/p$, ou $\beta < \frac{1}{2} - 1/p$; comme p est fini arbitraire, elle est de Radon d'ordre p fini arbitraire sur C^β, dès que $\beta < 1/2$. Or on peut voir que les fonctions de C^β satisfont toujours à une condition de Hölder d'ordre $< \beta$, c.q.f.d.

Remarque. On sait que l'inégalité $\beta < 1/2$ ne peut pas etre améliorée, autrement dit l'application canonique de $(L^2_{\mathrm{loc}})^1$ dans C^β n'est certainement pas p-radonifiante, p fini, si $\beta > 1/2$; en effet, elle ne l'est même pas de H^1_{loc} dans $H^{1/2}_{\mathrm{loc}}$, parce que, sur un intervalle compact, $H^1 \to H^{1/2}$ n'est pas de Hilbert-Schmidt. On peut montrer aussi que l'application identique de $(L^2_{\mathrm{loc}})^1$ dans C, qui est p-radonifiante pour $p > 2$, ne l'est pas pour $p = 2$.

Des résultats analogues pourraient être obtenus avec les fonctions aléatoires à accroissements indépendants correspondant aux lois stables d'exposant s, $1 < s < 2$.

5. Le théorème de dualité. Soit E de Banach. Une probabilité cylindrique ϱ sur E est dite de *cotype p*, si, f_ϱ étant une application linéaire associée, $E' \to L^0(\Omega, \mu)$, la convergence de $f_\varrho(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$

(7) Ce résultat est bien connu, et on peut obtenir de bien meilleures précisions. Voir par exemple, [3], chap. VI.

entraîne la convergence de ξ vers 0 dans E'. Pour $p>0$, on peut poser

$$^{*}\|\varrho\|_p = \operatorname*{Sup}_{\xi\in E', \|\xi\|\geqslant 1} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (|t|^p d\xi(\varrho)(t)\Big)^{-1/p}.$$

La probabilité cylindrique de Gauss ϱ sur un Hilbert est à la fois type et de cotype p pour tout $p\geqslant 0$ fini; $f_\varrho(\xi)$ suit une loi de Gauss de paramètre $\|\xi\|$, de sorte que l'intégrale

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p d\big(\xi(\varrho)\big)(t)\Big)^{1/p}$$

est, pour un $p>0$ donné, proportionnelle à $\|\xi\|$. Elle est aussi de cotype $+\infty$.

THÉORÈME 6 (de dualité). *Soit E (resp. $\sigma(F', F)$) un Banach (resp. un dual *-faible d'un Banach), et soit G un Banach ou un dual *-faible d'un Banach; soit u une application linéaire faiblement continue de E (resp. $\sigma(F', F)$) dans G. S'il existe une probabilité cylindrique ϱ sur E (resp. $\sigma(F', F)$), de cotype p, dont l'image $u(\varrho)$ soit de Radon d'ordre p sur $\sigma(G'', G')$, alors ${}^tu$ est très approximativement p-radonifiante de $\sigma(G', G)$ dans $\sigma(E', E)$ (resp. $\sigma(F'', F')$).*

Comme l'a montré Kwapień, on peut déduire ce théorème de l'inégalité de Pietsch dans le cap $p>0$, compte tenu du théorème 3 qui ramène les applications très approximativement p-radonifiantes aux applications p-sommantes. De toute façon, dans la pratique, c'est essentiellement sous la forme de ce théorème de dualité qu'on trouvera presque toutes les applications p-radonifiantes connues.

Exemples d'applications. 1. Soit $(Z_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$ (jeu de pile ou face, ou fonctions de Rademacher). On sait alors que la série $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge en moyenne d'ordre p, p fini, ou en probabilité, $p=0$, si et seulement si

$$\sum_{n\in N} |c_n|^2 < +\infty.$$

Cela signifie que la suite des Z_n définit une probabilité cylindrique sur l^2, de type et de cotype p pour tout $p\geqslant 0$ fini, et aussi de cotype $+\infty$ (exactement comme la probabilité cylindrique de Gauss). Comme les Z_n valent ± 1, donc sont bornées, cette probabilité est de Radon sur $\sigma(l^\infty, l^1)$. On en déduit que l'injection canonique de l^1 (ou même de $\sigma(l^1, c^0)$) dans l^2 est p-radonifiante, pour tout $p\geqslant 0$. Cet enoncé, donné sous cette forme par Kwapień [2], se traduit comme suit en termes de suites de variables aléatoires. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires, ayant la propriété suivante: pour toute suite $(c_n)_{n\in N}$ tendant vers 0 à l'infini, la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ est convergente en moyenne d'ordre p, $p>0$ (resp. en probabilité,

$p = 0$); alors la série $\sum_{n\in N} |X_n|^2$ est presque surement convergente, et en outre, si $p > 0$,

$$\text{Esp}\left(\sum_{n\in N} |X_n|^2\right)^{p/2} < +\infty \ (^8).$$

2. Soit $(e^{2i\pi nt})$, $n \in Z$, la suite des variables aléatoires de Fourier. Pour tout $p \geqslant 1$, dire que la somme $\sum c_n e^{2i\pi nt}$ tend vers 0 en moyenne d'ordre p équivaut à dire que $(c_n)_{n\in N}$ tend vers 0 dans $\mathscr{F}L^p$, d'après la definition même de l'espace $\mathscr{F}L^p$ des suites de Fourier de fonctions de L^p; pour simplifier, prenons p fini. Ici encore les Z_n sont bornées. Donc cette suite définit une probabilité cylindrique sur le dual $\sigma\big((\mathscr{F}L^p)', \mathscr{F}L^p\big)$, de type et cotype p, et une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(l^\infty, l^1)$. Donc l'application identique de l^1, ou même de $\sigma(l^1, c^0)$, dans $\mathscr{F}L^p$ est p-radonifiante pour $1 \leqslant p < +\infty$. En termes de suites de variables aléatoires, cela peut s'exprimer comme suit: soit $(X_n)_{n\in Z}$ une suite de variables aléatoires, telle que, pour toute suite $(c_n)_{n\in Z}$ tendant vers 0 à l'infini, la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ soit convergente en moyenne d'ordre p; alors la suite des X_n est presque sûrement la suite de Fourier d'une fonction de L^p, et on a une inégalité sur l'espérance mathématique. On réobtient ainsi certains résultats de Paley-Zygmund (^{9}). On peut utilement comparer les résultats de 1 et 2, puisque tous les deux partent de la même hypothèse, et aboutissent à des conclusions différentes: le résultat 1 est meilleur si $p \leqslant 2$, le résultat 2 est meilleur si $p \geqslant 2$, car $\mathscr{F}L^p$ contient l^2 pour $p \leqslant 2$ et est contenu dans l^2 pour $p \geqslant 2$. Dans chaque cas, le résultat est sans doute très éloigné du meilleur qu'on puisse donner. Par exemple pour $p = +\infty$, on devrait ici remplacer $\mathscr{F}L^\infty$ par $\sigma(\mathscr{F}L^\infty, \mathscr{F}L^1)$, alors que le résultat est trivialement vrai avec $\sigma(l^1, c^0)$, qui est bien meilleur!

3. Soit $(Z_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi stable de Paul Levy ([3], chap. V) d'indice s, $0 < s \leqslant 2$. Alors la variable $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ suit une loi analogue, de paramètre $\|c\|_{l^s}$; donc cette suite définit une probabilité cylindrique sur $l^{s'}$ (sur $\sigma(l^\infty, l^s)$ pour $s < 1$), de type et cotype p, pour tout $p < s$ si $s < 2$, p fini pour $s = 2$. Bornons-nous à $p = 0$. On sait exactement, grace au théorème des trois séries de Kolmogorov, quand la série $\sum_{n\in N} |a_n Z_n|^q$, $0 < q \leqslant 2$, est presque sûrement convergeante: il faut et il suffit que

$$\sum_{n\in N} |a_n|^r < +\infty,$$

(^{8}) Esp. veut dire l'esperance mathématique. Pour $p = 0$ cet énoncé a été démontré il y a longtemps par Khintchine-Kolmogorov. Voir Kwapień [2].

(^{9}) Par exemple, la prop. 10 du § 4 du chap. 5, p. 44, de Kahane [1], s'en déduit aisément.

avec $r = \mathrm{Min}\,(s, q)$ si $s \neq q$ ou $s = q = 2$, et que

$$\sum_{n \in N} |a_n|^q \left(1 + \left|\log \frac{1}{|a_n|}\right|\right) < +\infty,$$

si $s = q \neq 2$. On en déduit pour $0 < s,\ q \leqslant 2$: l'application „multiplication par a", soit $(c_n)_{n \in N} \to (a_n c_n)_{n \in N}$, est 0-radonifiante de $l^{s'}$ ($\sigma(l^\infty, l^s)$ si $s < 1$) dans l^q, si et seulement si $a \in l^r$, $r = \mathrm{Min}(s, q)$, pour $s \neq q$ ou $s = q = 2$, si

$$\sum_{n \in N} |a_n|^q \left(1 + \left|\log \frac{1}{|a_n|}\right|\right) < +\infty \qquad \text{pour } s = q \neq 2.$$

C'est par cette méthode que nous avons caractérisé les applications 0-radonifiantes diagonales entre les espaces de suites ([10]). Piétsch a caractérisé les applications diagonales 2-radonifiantes dans les espaces de suites ([11]); le cas général des applications p-radonifiantes entre espaces de suites reste ouvert pour les valeurs quelconques de p, mais relève très probablement du théorème de dualité.

4. Appliquons le théorème 6 de dualité à partir du résultat du théorème 4. Considérons la probabilité de Gauss sur l'espace de Sobolev H^a; elle est de type et cotype $p \geqslant 0$ fini arbitraire, et aussi de cotype $+\infty$; son image dans C^β est de Radon d'ordre p fini arbitraire, pourvu que $a - \beta > 1/2$. On peut donc appliquer le théorème de dualité avec $E = (L^2)^a$, $G = C^\beta$; les duals sont $(L^2)^{-a}$, $M_{\mathrm{comp}}^{-\beta}$ (M_{comp} espace des mesures de Radon à support compact); on passe aisément de là à $(L^2_{\mathrm{loc}})^{-a}$ et à $M^{-\beta}$, et on voit que l'application identique de M^γ (ou aussi $(L^1_{\mathrm{loc}})^\gamma$) dans $(L^2_{\mathrm{loc}})^\delta$ est p-radonifiante, pour tout $p \geqslant 0$, si $\gamma - \delta > 1/2$.

Ce résultat est bien meilleur que celui que donnait le théorème 4 lui-même, d'ou l'on aurait en effet déduit la condition $\gamma - \delta > 1 + (1/p - \frac{1}{2})^+$. D'autre part, le théorème 4 ne permettait jamais d'obtenir des résultats pour $p < 1$, ici nous pouvons aller jusqu'à $p = 0$, avec l'inégalité $\gamma - \delta > 1/2$ indépendante de p. Le problème de la caractérisation des applications p-radonifiantes de $(L^a_{\mathrm{loc}})^a$ dans $(L^b_{\mathrm{loc}})^\beta$, dépendant des 5 paramètres a, α, b, β, p, est encore lárgement ouvert, et susceptible de donner bien du plaisir.

Travaux cités

[1] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Lexington 1968.

[2] S. Kwapień, C. R. Acad. Sc. 267 (1968), série A, p. 698.

[3] P. Levy, *Processus stochastique et mouvement brownien*, Paris 1965.

([10]) On trouvera tous ces résultats détaillés dans [9].

([11]) Article non paru, communication personnelle.

[4] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. 28 (1967), p. 334-353.

[5] U. V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in the theory of probability*, Theory of probability and its applications 1 (1956), p. 157-214.

[6] L. Schwartz, *Measures on arbitrary topological spaces*, à paraître, Tata Institute for Fundamental Research, Bombay 1971.

[7] — Notes aux C. R. Acad. Sc. 268 (1969), série A, p. 1410-1413, et 268 (1969), p. 1612-1615.

[8] — *Théorie des distributions*, Paris 1966.

[9] — *Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites*, Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, Avril 1969.

[10] — *Applications radonifiantes*, à paraître au Journal de la Société Mathématique Japonaise, en hommage au Professeur Yosida, 1971.

[11] — *Applications radonifiantes*, Séminaire d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1969-70.