Œuvres de Laurent Schwartz

Laurent Schwartz

Applications du théorème de dualité sur les applications p-radonifiantes

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 268 (1969), p. A1612-A1615.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 1612-1615 (30 juin 1969). **Série A**

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Applications du théorème de dualité sur les applications p-radonifiantes.* Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

Cette Note donne des applications du théorème de dualité (théor. 4) d'une Note antérieure (1). Nous en adopterons les notations. A la fin de cette Note antérieure figurait déjà un exemple, que nous appellerons ici exemple 1, et nous commencerons donc par l'exemple 2.

Rappelons une terminologie : Une mesure cylindrique sur E, p-typique, sera aussi dite (p, E')-typique, ou de p-type E'. De même pour cotypique.

Exemple 2. — Appelons $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, égales à ± 1 avec la probabilité $1/2$ (jeu de pile ou face). On voit aisément que $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} c_n Z_n$ converge vers zéro en probabilité, ou en moyenne de tout ordre p fini, si, et seulement si, $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro dans l^2 (2). Donc $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit une probabilité cylindrique γ, (p, l^2)-cotypique [et aussi (p, l^2)-typique]. Or, les $|Z_n|$ sont bornées par 1. Donc le théorème de dualité donnera (avec $E = l^2$, $F = c^0$, $u =$ identité) :

(P 2) *L'injection canonique de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$, fini ou non.*

C'est la généralisation d'un théorème de Kolmogorov-Khintchine-Kwapien (3).

Exemple 3. — Considérons la suite de variables aléatoires $(\omega \mapsto e^{ni\omega})_{n\in\mathbf{Z}}$. En appelant $\mathcal{F}L^p$ l'espace des suites de coefficients de Fourier de fonctions de L^p, $1 \leq p \leq +\infty$, $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{ni\omega}$ converge vers zéro dans L^p si, et seulement si, $c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{F}L^p$; donc, $(Z_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définit une probabilité cylindrique $(p, \mathcal{F}L^p)$-cotypique (et aussi typique). Or, les $|Z_n|$ sont bornées par 1, donc cette probabilité est de Radon d'ordre p sur $\sigma(l^\infty, l^1)$. Le théorème de dualité donne :

(P 3) *L'injection canonique de $\sigma(l^1, c^0)$ dans $\mathcal{F}L^p$ est p-radonifiante pour $1 < p \leq +\infty$.*

(P 3) est moins bon que (P 2) pour $p \leq 2$, mais meilleur pour $p \geq 2$.

Donnons maintenant une application de (P 3). Si les Z_n sont des variables aléatoires indépendantes, suivant la loi de Gauss normale, ou celle de pile ou face (exemple 1), $(Z_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définit une probabilité cylindrique p-typique sur l^2 pour tout p fini; donc, si $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty$, $(\alpha_n Z_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définit une probabilité cylindrique p-typique sur l^1 pour tout p fini. Il en est de même si les Z_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi stable d'indice s, $s < 2$, et si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\alpha_n|^s < +\infty$, et $p < s$. Donc l'application de (P 2) et (P 3) donne :

(P′ 3) *Si Z_n est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Gauss normale, ou la loi de pile ou face, et si* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\alpha_n|^2 < +\infty$, *la suite $(\alpha_n Z_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est dans $\mathcal{F} L^p$ pour tout p fini ≥ 1 ; si les Z_n suivant la loi stable d'indice s, et si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\alpha_n|^s < +\infty$, la suite $(\alpha_n Z_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est presque sûrement dans l^2.*

C'est le théorème de Paley-Zygmund [4].

Exemple 4. — Soit T un compact muni d'une probabilité de Radon $\nu \geq 0$. L'application identique de $L^p(T, \nu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, est une probabilité cylindrique de p-cotype (et p-type) L^p. Or, son image dans $\sigma(C', C)$ (espace des mesures de Radon sur T) est une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(C', C)$ [c'est la mesure canonique de $\sigma(C', C)$ définie par ν, c'est-à-dire l'image de la mesure ν sur T par l'application $t \mapsto \delta_{(t)}$ de T dans $\sigma(C', C)$]. Le théorème de dualité donne alors :

(P 4) *L'application identique de* $C(T)$ *dans* $L^p(T, \nu)$ *est p-radonifiante, pour* $1 < p < +\infty$.

On peut d'ailleurs le voir directement de façon très élémentaire.

Raisonnons en particulier sur la droite $\mathbf{R}$; elle n'est pas compacte, mais nous prendrons pour ν la mesure de Lebesgue, et remplacerons L^p par L^p_{loc}. Pour tout espace de distributions W sur $\mathbf{R}$, appelons W^α l'espace des distributions dont la dérivée d'ordre « fractionnaire » $\alpha \in \mathbf{R}$ est dans W. Cet espace dépend en fait de la manière de définir la dérivation fractionnaire d'ordre α; mais, si nous nous bornons à écrire qu'une distribution sur $\mathbf{R}$ appartient à W^α pour tout $\alpha < \alpha_0$, c'est indépendant du procédé choisi, pour tous les bons espaces W. Les $(L^2)^\alpha$ sont les espaces de Sobolev H^α. Alors, l'injection $C^\rho \to (L^p_{\text{loc}})^\rho$ est p-radonifiante, $1 < p < +\infty$.

Considérons alors l'injection canonique de $(L^a_{\text{loc}})^\alpha$ dans $(L^b_{\text{loc}})^\beta$, pour $\alpha - \beta > (1/a - 1/b)^+$ (inégalités de Sobolev) [5]. Elle sera sûrement p-radonifiante si on peut la factoriser par des applications identiques

$$(L^a_{\text{loc}})^\alpha \to C^\rho \to (L^p_{\text{loc}})^\rho \to (L^b_{\text{loc}})^\beta.$$

D'où :

(P′ 4) *L'application identique de* $(L^a_{\text{loc}})^\alpha$ dans $(L^b_{\text{loc}})^\beta$ *est sûrement p-radonifiante si*

$$\alpha - \beta > \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+, \qquad 1 \leq p \leq +\infty, \quad 1 \leq a \leq +\infty, \quad 1 \leq b \leq +\infty.$$

Rien ne dit bien sûr que cette condition suffisante soit nécessaire, car les inégalités de Sobolev ne sont pas égalités. Néanmoins, assez curieusement, le résultat précédent donne les résultats connus pas trop fins sur les propriétés höldériennes des processus à accroissements indépendants. En effet, en prenant $a = 2$, $b = +\infty$, on voit que l'injection canonique de $(L^2_{loc})^1$ dans C^σ est p-radonifiante, dès que $\sigma < 1/2 - 1/p$, $1 \leqq p \leqq +\infty$. Or, si $(F(t))_{t \in \mathbf{R}}$ est la fonction de Wiener-Lévy du mouvement brownien, elle définit une probabilité cylindrique « de Gauss » sur $(L^2_{loc})^1$ (sa dérivée définit la probabilité cylindrique de Gauss sur L^2); la mesure de Gauss est p-typique pour tout p fini (et aussi p-cotypique). Donc on peut affirmer :

(P'' 4) *La fonction aléatoire* $(F(t))_{t \in \mathbf{R}}$ *du mouvement brownien est presque sûrement dans* C^σ, *pour tout* $\sigma < 1/2$, *et définit une probabilité de Radon de tout ordre p fini sur* C^σ ([6]).

L'appartenance à C^σ pour $\sigma < (1/2)$ est équivalente à des relations höldériennes de tout ordre $< (1/2)$.

Par ailleurs, l'application identique de $(L^2_{loc})^1$ dans C, qui est p-radonifiante pour tout $p > 2$, ne l'est plus pour $p = 2$, comme le montre le contre-exemple du processus de Poisson ([7]).

Si maintenant $(F(t))_{t \in \mathbf{R}}$ est à accroissements aléatoires indépendants, $F(t') - F(t)$ suivant la loi de fonction caractéristique

$$\tau \mapsto \exp(-|t' - t|.|\tau|^s),$$

F' définit une probabilité cylindrique (p, L^s) typique, donc p-typique sur $L^{s'}$ (et aussi cotypique), pour $1 < s < 2$, $p < s$. Donc F définit une probabilité cylindrique p-typique sur $(L^{s'}_{loc})^1$; donc

(P''' 4) F *est presque sûrement dans* $(L^p_{loc})^\sigma$ *et définit une probabilité de Radon d'ordre p sur* $(L^p_{loc})^\sigma$, $\sigma < (1/s)$, $1 \leqq p < s$ ([8]).

L'appartenance à $(L^p_{loc})^\sigma$ pour $\sigma < (1/s)$ est équivalente à des relations höldériennes, *au sens de* L^p_{loc}, de tout ordre $< (1/s)$.

Exemple 5. — Mais, les fonctions aléatoires F de l'exemple précédent étant aussi cotypiques, on peut de nouveau à partir d'elles appliquer le théorème de dualité. On obtient ainsi un grand nombre de résultats. Donnons-en un, obtenu à partir de la fonction du mouvement brownien :

(P 5) *Si* M *est l'espace des mesures de Radon sur* $\mathbf{R}$, *l'application identique de* M^α *dans* $(L^2_{loc})^\beta$ *est p-radonifiante, pour* $\alpha - \beta > 1/2$, *pour tout* $p \geqq 0$, *fini ou non.*

Ces résultats, contrairement à ceux de (P' 4), subsistent pour $p = 0$, ce qui en augmente l'intérêt.

Ces méthodes devraient permettre de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que $(L^a_{loc})^\alpha \to (L^b_{loc})^\beta$ soit p-radonifiante, problème dépendant de cinq paramètres, a, b, p, α, β !

(*) Séance du 16 juin 1969.

([1]) L. SCHWARTZ, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 1410.

([2]) *Voir*, par exemple, M. LOÈVE, *Probability theory*, Van Nostrand, Londres, 1963, chap. V.

([3]) *Voir*, par exemple, S. Kwapien, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 698.

([4]) *Voir* J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath mathematical monographs, 1968, propos. 10, p. 44. Un certain nombre de théorèmes de ce livre relèvent des méthodes précédentes.

([5]) *Voir* L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966, chap. VI, § 6.

([6]) Naturellement ces résultats sont bien connus (*voir*, par exemple, P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937, p. 168-172). M. Dacunha-Castelle m'a indiqué que des résultats analogues pouvaient, par cette méthode, être obtenus pour le mouvement brownien à plusieurs paramètres de temps.

([7]) Cela m'a été indiqué verbalement par M. Umemura (Kyoto).

([8]) Divers résultats ont été obtenus sur ces fonctions aléatoires F. *Voir*, par exemple, P. Greenwood, *The variation of a stable path is stable*, preprint, University of British Columbia, Canada. Ou R. M. Blumenthal et R. K. Getoor, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, 1960, p. 263-273.

(37, *rue Pierre-Nicole*, 75-*Paris*, 5e.)

180004. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.