Laurent Schwartz

Un théorème de dualité pour les applications radonifiantes

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 268 (1969), p. A1410-A1413.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 1410-1413 (9 juin 1969). Série A

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Un théorème de dualité pour les applications radonifiantes.* Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

Les théorèmes indiqués ici ont intérêt, pour les applications pratiques, à être énoncés dans des conditions très générales; toutefois, bien que la démonstration ne soit pas plus difficile, leur énoncé devient alors long et compliqué, et dépasse le cadre d'une Note. Nous nous bornerons donc à un cas particulier, utilisant notamment des espaces de Banach, quitte à donner des exemples qui nécessiteraient le traitement général.

1. Théorèmes généraux.

Définitions. — Soit E un Banach, λ une probabilité cylindrique sur E (1); on dit qu'elle est p-typique ($0 \leq p \leq \infty$) si, pour toute fonction aléatoire f associée sur E', $f : E' \to L^0(\Omega, \mu)$, f est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Elle est dite p-typique approximable, si, en outre, on peut choisir (Ω, μ, f) de manière que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble équicontinu d'applications linéaires de rang fini de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$ [ceci sera toujours le cas si E' a la propriété d'approximation métrique (2), ou si $p \geq 1$, car alors L^p a cette propriété]. On dira que λ est une mesure de Radon d'ordre p, si elle est de Radon, et si la norme de E est dans $L^p(E, \lambda)$. Une application linéaire continue $u : E \to F$ sera dite p-radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, p-typique, l'image $u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur F. Elle sera dite approximativement p-radonifiante, si ceci est seulement vrai pour les λ p-typiques approximables.

Théorème 1. — *Soit* $f : E' \to L^p(\Omega, \mu)$ *une fonction aléatoire linéaire continue sur* E', λ *une probabilité cylindrique associée. Pour que* λ *soit de Radon d'ordre p, il faut et il suffit que f soit réalisable à partir d'une fonction* $\varphi : \Omega \to E$ *appartenant à* $L^p(\Omega, \mu; E)$, *avec* $f(\xi) = \langle \varphi, \xi \rangle$ *pour* $\xi \in E'$. [On dit que $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$, si φ est μ-mesurable, et si, pour $p > 0$, $\|\varphi\|$ est dans $L^p(\Omega, \mu)$.]

Théorème 2 (théorème de Prokhorov généralisé) (3). — *Soit* $f : E' \to L^p(\Omega, \mu)$ *une fonction aléatoire linéaire continue. Supposons que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble de fonctions* $f_i : E' \to L^p(\Omega, \mu)$, *réalisables par des applications* $\varphi_i : \Omega \to E$, *formant une partie bornée de* $L^p(\Omega, \mu; E)$. *Alors la probabilité cylindrique* λ *associée à f est de Radon d'ordre p sur* $\sigma(E'', E')$ (*c'est-à-dire de Radon sur* $\sigma(E'', E')$, *et telle que la norme de* E'' *soit dans* $L^p(\sigma(E'', E'), \lambda)$), *de Radon d'ordre p sur* E *si* E *est réflexif. En outre, elle est réalisable par une appli-*

cation $\varphi : \Omega \to \sigma(E'', E')$, *$\mu$-mesurable*, $\| \varphi \| \in L^p(\Omega, \mu)$, *si* E *est réflexif ou* E′ *séparable; et* $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$ *si* E *est réflexif.*

Théorème 3. — *Soit* $p > 0$. *Soit* $u : E \to F$ *une application linéaire continue. Pour qu'elle soit approximativement p-radonifiante (donc p-radonifiante si* E′ *a la propriété d'approximation métrique ou si* $p \geqq 1$) *de* E *dans* $\sigma(F'', F')$ (*donc de* E *dans* F *si* F *est réflexif*), *il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante : il existe* $M \geqq 0$ *tel que pour tout* Ω, μ, *pour toute fonction* $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$, *on ait l'inégalité*

$$\| u \circ \varphi \|_{L^p(\Omega, \mu, F)} \leqq M \sup_{\xi \in E', \| \xi \| \leqq 1} \| \langle \varphi, \xi \rangle \|_{L^p(\Omega, \mu)}. \tag{1}$$

Il existe une condition analogue pour $p = 0$, *mais plus compliquée à écrire.*

Corollaire 1. — *Soient* $0 < p \leqq q \leqq +\infty$. *Toute application linéaire continue de* E *dans* F, *approximativement p-radonifiante de* E *dans* $\sigma(F'', F')$, *est aussi approximativement q-radonifiante.*

C'est immédiat; considérons les $\varphi \in L^q(\Omega, \mu; E)$ et les $\alpha \in L^r(\Omega, \mu)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \| u\varphi \|_{L^q(\Omega, \mu; F)} &= \sup_{\| \alpha \|_r \leqq 1} \| \alpha u \varphi \|_{L^p(\Omega, \mu; F)} \\ &\leqq \sup_{\| \alpha \|_r \leqq 1, \| \xi \| \leqq 1} \| \langle \alpha\varphi, \xi \rangle \|_{L^p(\Omega, \mu)} = \sup_{\| \xi \| \leqq 1} \| \langle \varphi, \xi \rangle \|_{L^q(\Omega, \mu)}. \end{aligned}$$

Le même résultat, avec des applications radonifiantes de E dans F, est vrai et résulte du théorème 1.

Je ne sais pas si ce résultat subsiste pour $p = 0$.

Corollaire 2. — *Soient* $u : E \to F$ *et* $v : E \to G$, *des applications linéaires continues, telles que, pour tout* $x \in E$, *on ait* $\| v(x) \| \leqq \| u(x) \|$. *Si alors u est approximativement p-radonifiante de* E *dans* $\sigma(F'', F')$, *v est approximativement p-radonifiante de* E *dans* $\sigma(G'', G')$.

2. Le théorème de dualité. — Soit λ une probabilité cylindrique sur E; on dit qu'elle est p-cotypique, si, pour les fonctions aléatoires associées $f : E' \to L^0(\Omega, \mu)$, la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$ entraîne celle de ξ dans E′. Nous donnerons ensuite des exemples.

Théorème 4 (Théorème de dualité). — *Soit u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique* γ *sur* E, *p-cotypique, dont l'image* $u\gamma$ *par u soit une probabilité de Radon d'ordre p sur* $\sigma(F'', F')$. *Alors la transposée* ${}^t u$ *est approximativement p-rado-*

nifiante (et p-radonifiante si F *a la propriété d'approximation métrique ou si* $p \geqq 1$) *de* $\sigma(F', F)$ *dans* $\sigma(E', E)$, *et de* F′ *dans* E′ *si* E *est réflexif.*

Le principe de la démonstration consiste à prouver, par Fubini, que ${}^t u$ vérifie l'inégalité (1) du théorème 3, ou celle qui lui correspond pour $p = 0$.

3. Applications. — Il semble qu'un grand nombre de résultats jusqu'ici disparates du calcul des probabilités puissent se démontrer par application directe de ce théorème 4. En outre, l'application est remarquablement rapide. Il y a toutefois avantage à mettre en évidence E′ et F plutôt que E et F. Une probabilité cylindrique γ sur E, p-cotypique, sera plutôt appelée une probabilité (p, E')-cotypique; $u\gamma$ est de Radon d'ordre p sur F. Si alors λ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(F', F)$, p-typique, elle sera une probabilité cylindrique (p, F)-typique; et ${}^t u\lambda$ sera de Radon d'ordre p sur E′ ($\star$-faible). En remplaçant E′, F par U, V, et en faisant abstraction des topologies fortes ou faibles : s'il existe γ, (p, U)-cotypique, $u\gamma$ de Radon d'ordre p sur V, alors pour toute λ, (p, V)-typique, ${}^t u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur U.

Exemple. — Considérons l'espace de suites l^s, $0 < s \leqq 2$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi stable, d'image de Fourier $\exp(-|\tau|^s)$. Si $c \in L^s$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n Z_n$ suit une loi analogue, d'image de Fourier $\exp(-|\,\|c\|_s\,\tau|^s)$. Donc $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n Z_n$ converge vers zéro en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque fini pour $s = 2$, en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque $< s$ pour $s < 2$, si et seulement si c converge vers zéro dans l^s. Donc $(Z_n)_{u\in\mathbf{N}}$ définit une probabilité cylindrique γ, (p, l^s)-cotypique [et aussi (p, l^s)-typique!] pour les valeurs de p indiquées. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, et supposons que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n Z_n|^q$ converge presque partout, avec Espérance $\left(\sum |\alpha_n Z_n|^q\right)^{p/q} < +\infty$. Alors, si u est la multiplication par α, $u\gamma$ sera de Radon d'ordre p sur l^q. On en déduira (en prenant $U = l^s$, $V = l^q$) que, pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires (p, l^q)-typique, $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n X_n|^s$ converge presque sûrement, avec : Espérance $\left(\sum_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n X_n|^s\right)^{p/s} < +\infty$. Ce sont ces résultats que nous avons appliqués pour trouver toutes les application radonifiantes des l^ρ dans les l^σ (avec $p = 0$). On voit la nécessité de sortir des espaces de Banach (l^s n'est pas localement convexe pour $s < 1$).

Nous donnerons d'autres exemples dans une publication ultérieure. Les démonstrations et exemples seront publiés dans un article inséré dans un volume du *Journal de l'Université de Tokyo,* en hommage au Professeur Yosida.

M. Stanislas Kwapien m'a récemment écrit, et a démontré des relations entre applications p-sommantes (au sens de Pietsch) et applications p-radonifiantes; il publiera ses résultats prochainement. Ses suggestions m'ont aidé dans la formulation générale de certains résultats.

(*) Séance du 2 juin 1969.

(1) On utilisera les notations de Notes antérieures :

L. SCHWARTZ, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 832; 266, série A, 1968, p. 7 et 50; 268, série A, 1969, p. 646.

(2) *Voir* A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Mém. Amer. Math. Soc.*, n° 16, 1955; *voir* chap. I, § 5). On ignore si tout espace de Banach a la propriété d'approximation métrique (conjecture de Banach).

(3) Le théorème de Prokhorov, donnant la condition pour qu'une mesure cylindrique, soit une mesure de Radon, est en étroite relation avec cet énoncé pour $p = 0$.

(37, *rue Pierre-Nicole*, 75-*Paris*, 5e.)

179865. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.