

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Un théorème de dualité pour les applications radonifiantes

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 268 (1969), p. A1410-A1413.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Un théorème de dualité pour les applications radonifiantes.* Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

Les théorèmes indiqués ici ont intérêt, pour les applications pratiques, à être énoncés dans des conditions très générales; toutefois, bien que la démonstration ne soit pas plus difficile, leur énoncé devient alors long et compliqué, et dépasse le cadre d'une Note. Nous nous bornerons donc à un cas particulier, utilisant notamment des espaces de Banach, quitte à donner des exemples qui nécessiteraient le traitement général.

1. THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

DÉFINITIONS. — Soit E un Banach, λ une probabilité cylindrique sur $E^{(1)}$; on dit qu'elle est p -typique ($0 \leq p \leq \infty$) si, pour toute fonction aléatoire f associée sur E' , $f: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, f est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Elle est dite p -typique approximable, si, en outre, on peut choisir (Ω, μ, f) de manière que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble équicontinu d'applications linéaires de rang fini de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$ [ceci sera toujours le cas si E' a la propriété d'approximation métrique (2) , ou si $p \geq 1$, car alors L^p a cette propriété]. On dira que λ est une mesure de Radon d'ordre p , si elle est de Radon, et si la norme de E est dans $L^p(E, \lambda)$. Une application linéaire continue $u: E \rightarrow F$ sera dite p -radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E , p -typique, l'image $u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur F . Elle sera dite approximativement p -radonifiante, si ceci est seulement vrai pour les λ p -typiques approximables.

THÉORÈME 1. — Soit $f: E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire continue sur E' , λ une probabilité cylindrique associée. Pour que λ soit de Radon d'ordre p , il faut et il suffit que f soit réalisable à partir d'une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow E$ appartenant à $L^p(\Omega, \mu; E)$, avec $f(\xi) = \langle \varphi, \xi \rangle$ pour $\xi \in E'$. [On dit que $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$, si φ est μ -mesurable, et si, pour $p > 0$, $\|\varphi\|$ est dans $L^p(\Omega, \mu)$.]

THÉORÈME 2 (théorème de Prokhorov généralisé) (3) . — Soit $f: E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire continue. Supposons que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble de fonctions $f_i: E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$, réalisables par des applications $\varphi_i: \Omega \rightarrow E$, formant une partie bornée de $L^p(\Omega, \mu; E)$. Alors la probabilité cylindrique λ associée à f est de Radon d'ordre p sur $\sigma(E'', E')$ (c'est-à-dire de Radon sur $\sigma(E'', E')$, et telle que la norme de E'' soit dans $L^p(\sigma(E'', E'), \lambda)$), de Radon d'ordre p sur E si E est réflexif. En outre, elle est réalisable par une appli-

POL.

cation $\varphi : \Omega \rightarrow \sigma(E'', E')$, μ -mesurable, $\|\varphi\| \in L^p(\Omega, \mu)$, si E est réflexif ou E' séparable; et $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$ si E est réflexif.

THÉORÈME 3. — Soit $p > 0$. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. Pour qu'elle soit approximativement p -radonifiante (donc p -radonifiante si E' a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geq 1$) de E dans $\sigma(F'', F')$ (donc de E dans F si F est réflexif), il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout Ω, μ , pour toute fonction $\varphi \in L^p(\Omega, \mu; E)$, on ait l'inégalité

$$(1) \quad \|u \circ \varphi\|_{L^p(\Omega, \mu; F)} \leq M \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \|\langle \varphi, \xi \rangle\|_{L^p(\Omega, \mu)}.$$

Il existe une condition analogue pour $p = 0$, mais plus compliquée à écrire.

COROLLAIRE 1. — Soient $0 < p \leq q \leq +\infty$. Toute application linéaire continue de E dans F , approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(F'', F')$, est aussi approximativement q -radonifiante.

C'est immédiat; considérons les $\varphi \in L^q(\Omega, \mu; E)$ et les $\alpha \in L^r(\Omega, \mu)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\alpha \varphi\|_{L^q(\Omega, \mu; F)} &= \sup_{\|\alpha\|_r \leq 1} \|\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega, \mu; F)} \\ &\leq \sup_{\|\alpha\|_r \leq 1, \|\xi\| \leq 1} \|\langle \alpha \varphi, \xi \rangle\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\langle \varphi, \xi \rangle\|_{L^q(\Omega, \mu)}. \end{aligned}$$

Le même résultat, avec des applications radonifiantes de E dans F , est vrai et résulte du théorème 1.

Je ne sais pas si ce résultat subsiste pour $p = 0$.

COROLLAIRE 2. — Soient $u : E \rightarrow F$ et $\nu : E \rightarrow G$, des applications linéaires continues, telles que, pour tout $x \in E$, on ait $\|\nu(x)\| \leq \|u(x)\|$. Si alors u est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(F'', F')$, ν est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$.

2. LE THÉORÈME DE DUALITÉ. — Soit λ une probabilité cylindrique sur E ; on dit qu'elle est p -cotypique, si, pour les fonctions aléatoires associées $f : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$ entraîne celle de ξ dans E' . Nous donnerons ensuite des exemples.

THÉORÈME 4 (Théorème de dualité). — Soit u une application linéaire continue de E dans F . Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique γ sur E , p -cotypique, dont l'image $u\gamma$ par u soit une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(F'', F')$. Alors la transposée $'u$ est approximativement p -rado-

nifiante (et p -radonifiante si F a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geq 1$) de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(E', E)$, et de F' dans E' si E est réflexif.

Le principe de la démonstration consiste à prouver, par Fubini, que u vérifie l'inégalité (1) du théorème 3, ou celle qui lui correspond pour $p = 0$.

3. APPLICATIONS. — Il semble qu'un grand nombre de résultats jusqu'ici disparates du calcul des probabilités puissent se démontrer par application directe de ce théorème 4. En outre, l'application est remarquablement rapide. Il y a toutefois avantage à mettre en évidence E' et F plutôt que E et F . Une probabilité cylindrique γ sur E , p -cotypique, sera plutôt appelée une probabilité (p, E') -cotypique; $u\gamma$ est de Radon d'ordre p sur F . Si alors λ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(F', F)$, p -typique, elle sera une probabilité cylindrique (p, F) -typique; et $u\lambda$ sera de Radon d'ordre p sur E' (\star -faible). En remplaçant E', F par U, V , et en faisant abstraction des topologies fortes ou faibles : s'il existe γ , (p, U) -cotypique, $u\gamma$ de Radon d'ordre p sur V , alors pour toute λ , (p, V) -typique, $u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur U .

Exemple. — Considérons l'espace de suites l^s , $0 < s \leq 2$. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi stable, d'image de Fourier $\exp(-|\tau|^s)$. Si $c \in l^s$, $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n Z_n$ suit une loi analogue, d'image de Fourier $\exp(-\|c\|_s \tau^s)$. Donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n Z_n$ converge vers zéro en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque fini pour $s = 2$, en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque $< s$ pour $s < 2$, si et seulement si c converge vers zéro dans l^s . Donc $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit une probabilité cylindrique γ , (p, l^s) -cotypique [et aussi (p, l^s) -typique!] pour les valeurs de p indiquées. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, et supposons que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n Z_n|^q$ converge presque partout, avec Espérance $\left(\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n Z_n|^q\right)^{p/q} < +\infty$. Alors, si u est la multiplication par α , $u\gamma$ sera de Radon d'ordre p sur l^q . On en déduira (en prenant $U = l^s$, $V = l^q$) que, pour toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires (p, l^q) -typique, $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n X_n|^s$ converge presque sûrement, avec : Espérance $\left(\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n X_n|^s\right)^{p/s} < +\infty$. Ce sont ces résultats que nous avons appliqués pour trouver toutes les application radonifiantes des l^s dans les l^s (avec $p = 0$). On voit la nécessité de sortir des espaces de Banach (l^s n'est pas localement convexe pour $s < 1$).

Nous donnerons d'autres exemples dans une publication ultérieure. Les démonstrations et exemples seront publiés dans un article inséré dans un volume du *Journal de l'Université de Tokyo*, en hommage au Professeur Yosida.

M. Stanislas Kwapien m'a récemment écrit, et a démontré des relations entre applications p -sommantes (au sens de Pietsch) et applications p -radonifiantes; il publiera ses résultats prochainement. Ses suggestions m'ont aidé dans la formulation générale de certains résultats.

(*) Séance du 2 juin 1969.

(¹) On utilisera les notations de Notes antérieures :

L. SCHWARTZ, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 832; 266, série A, 1968, p. 7 et 50; 268, série A, 1969, p. 646.

(²) Voir A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Mém. Amer. Math. Soc.*, n° 16, 1955; voir chap. I, § 5). On ignore si tout espace de Banach a la propriété d'approximation métrique (conjecture de Banach).

(³) Le théorème de Prokhorov, donnant la condition pour qu'une mesure cylindrique, soit une mesure de Radon, est en étroite relation avec cet énoncé pour $p = 0$.

(37, rue Pierre-Nicole, 75-Paris, 5^e.)