Laurent Schwartz

Un théorème de convergence dans les $L^p, o \leqslant p < +\infty$

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 268 (1969), p. A704-A706.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un théorème de convergence dans les* L^p, $0 \leq p < +\infty$. Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p < +\infty$, telle que, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels tendant vers zéro, $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbf{N}} X_n$ converge aussi.

Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E sera appelée C-suite, si, pour toute suite scalaire $c = (c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers zéro, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n X_n$ converge dans E. On dira que E est un C-espace, si, pour toute C-suite X, $\sum_{n \in \mathbf{N}} X_n$ converge. Les C-espaces ont été étudiés par Erik Thomas [1] : un espace localement convexe séquentiellement faiblement complet est un C-espace, en particulier tous les espaces $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Par contre, sauf si μ est combinaison finie de mesures de Dirac, $L^\infty(\Omega, \mu)$ n'est pas un C-espace.

Théorème. — *L'espace* $L^p(\Omega, \mu)$, *pour* $0 \leq p < 1$, *est aussi un* C-*espace* [2].

Ces espaces ne sont plus localement convexes. $L^0(\Omega, \mu)$ est l'espace des μ-classes de fonctions μ-mesurables sur Ω, muni de la topologie de la convergence en mesure.

Lemme 1. — *Soit* $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une* C-*suite de* $L^0(\Omega, \mu)$. *Sur tout ensemble de* μ-*mesure finie*, $\sum_{n \in \mathbf{N}} |X_n|^2$ *converge* μ-*presque partout.*

Ce lemme est dû à Kolmogorov et Khintchine [3].

Lemme 2. — *Soit* $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une* C-*suite de* $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p < 1$. *Alors* X_n *converge vers zéro pour n infini.*

Démonstration. — D'après le lemme 1, X_n converge vers zéro μ-presque partout sur tout ensemble de μ-mesure finie, donc dans $L^0(\Omega, \mu)$; ce qui montre le lemme pour $p = 0$. Soit donc $0 < p \leq 1$. D'après Egorov, on peut trouver une parittion de Ω, $\Omega = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Omega_m \cup N$, telle que chaque Ω_m soit μ-mesurable de μ-mesure finie, que X_n converge vers zéro pour n infini uniformément sur chaque Ω_m, et que tous les X_n soient μ-presque partout nuls sur N. Supposons que X_n ne converge pas vers zéro dans L^p

pour n infini. Il existe alors $\delta' > 0$ tel que $\int |X_n|^p \geq \delta'$ pour une infinité de valeurs de n. Soit $0 < \delta < \delta'$. Déterminons par récurrence une suite de parties disjointes de Ω, $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$, chacune réunion $d'\Omega_m$, et une suite strictement croissante d'entiers, $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$, de manière que $\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geq \delta$, et que, pour $j \neq k$, $\int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leq 1/2^{j+k}$.

Déterminons d'abord A_0, n_0. Nous prendrons n_0 tel que $\int |X_{n_0}|^p > \delta$; il existe alors A_0, réunion finie $d'\Omega_m$, tel que $\int_{A_0} |X_{n_0}|^p \geq \delta$. Supposons déterminés A_k et n_k jusqu'à $k = l - 1$. Il existe B_l, réunion finie $d'\Omega_m$, contenant $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{l-1}$, tel que $\int_{\complement B_l} |X_{n_k}|^p \leq 1/2^{k+l}$ pour tout $k \leq l - 1$. Il existe ensuite $n_l > n_{l-1}$ tel que $\int |X_{n_l}|^p \geq \delta'$, et que $\int_{B_l} |X_{n_l}|^p$ soit $\leq 1/2^{2l}$ et $< \delta' - \delta$, de sorte que $\int_{\complement B_l} |X_{n_l}|^p > \delta$. Il existe alors A_l, réunion finie $d'\Omega_m$, contenue dans $\complement B_l$, tel que $\int_{A_l} |X_{n_l}|^p \geq \delta$. Alors

$$\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geq \delta, \qquad \int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leq \frac{1}{2^{j+k}} \quad \text{pour } j \leq l, \quad k \leq l, \quad j \neq k.$$

Soit alors $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels, $0 \leq c_n \leq 1$, $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n^p = +\infty$. Minorons $I = \int \left| \sum_{k=0}^{l} c_k X_{n_k} \right|^p$. D'abord $\left| \sum_{k=0}^{l} c_k X_{n_k} \right|^p \geq c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k \leq l, k \neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p$, donc

$$I \geq \sum_{j=0}^{l} \int_{A_j} \geq \sum_{j=0}^{l} \int_{A_j} \Big(c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k \leq l, k \neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p \Big) \geq \sum_{j=0}^{l} c_j^p \delta - \sum_{j,k=0}^{l} \frac{1}{2^{j+k}} \geq \delta \sum_{j=0}^{l} c_j^p - 4.$$

Comme $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^p = +\infty$, on voit que $\sum_{k \in \mathbf{N}} c_k X_{n_k}$ ne converge pas dans L^p, ce qui contredit les hypothèses, car $(X_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ est aussi une C-suite.

Bien que le résultat soit connu pour $1 < p < +\infty$, on le démontrerait de manière tout analogue, en utilisant l'inégalité de Minkowski.

Démonstration du théorème. — Il suffit maintenant de montrer que, si E est un espace vectoriel topologique complet dans lequel toute C-suite converge vers zéro, E est un C-espace. Si en effet, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une C-suite, et si $\sum_{n \in \mathbf{N}} X_n$ ne converge pas, elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Donc il existe un voisinage V de zéro dans E, et une suite strictement croissante d'entiers, n_0, n'_0, n_1, n'_1, ..., n_k, n'_k, ... tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $S_{n'_k} - S_{n_k} \notin V$, où $S_N = \sum_{n \leq N} X_n$. Si nous posons $Y_k = S_{n'_k} - S_{n_k}$, c'est encore une C-suite, or elle ne converge pas vers zéro, ce qui est contradictoire, d'où le théorème.

(*) Séance du 24 mars 1969.

(1) Sous le nom d'espaces faiblement Σ-complets : cf. *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 7.

(2) Pour $p = 0$, *cf.* PAUL LÉVY, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 470.

Le même résultat, pour $p = 0$, vient d'être démontré indépendamment par RICHARD DUDLEY, *Proc. Amer. Math. Soc.* (à paraître).

(3) KOLMOGOROV-KHINTCHINE, *Math. Sbornik*, 32, 1925, p. 668-677. *Voir* aussi KWAPIEN, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 698.

(37, *rue Pierre-Nicole*, 75-*Paris*, 5e.)