Laurent Schwartz

Probabilité cylindriques et applications radonifiantes

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 268 (1969), p. A646–A648

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 646-648 (24 mars 1969). Série A

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Probabilités cylindriques et applications radonifiantes.* Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

On détermine la condition nécessaire et suffisante pour que la multiplication $\alpha : (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une application radonifiante de l^p dans l^q, $0 < p \leq +\infty$, $0 < q \leq +\infty$. Les résultats de cette Note seront démontrés dans les *Comptes rendus du Colloque international d'Analyse* de Tokyo (avril 1969).

Définitions. — Une suite $X = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires réelles est du type s, $0 < s \leq +\infty$, si, pour toute suite $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels appartenant à l^s (à c^0 si $s = +\infty$), la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X_n$ converge en probabilité. Une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels est dite du type (s, q), $0 < q \leq +\infty$, si, pour toute suite X de variables aléatoires du type s, la suite $\alpha X = (\alpha_n X_n)_{n\in}$ de variables aléatoires est presque sûrement dans l^q.

Soit $Z = (Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées symétriques. On dit qu'elle est spécialement du type s (cela ne pourra se produire que pour $s \leq 2$), si la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n Z_n$ converge en probabilité si et seulement si $c \in l^s$. Par exemple, si les Z_n prennent les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$ (jeu de pile ou face), Z est spécialement du type 2. Ceci subsiste si la loi suivie par les Z_n a un moment d'ordre 2 fini. Si maintenant la loi suivie par les Z_n est la loi stable de fonction caractéristique $\exp(-|t|^s)$, $0 < s \leq 2$, Z est spécialement du type s. On dira que la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement du type (s, q), s'il existe une suite Z, spécialement du type s, telle que αZ soit presque sûrement dans l^q. C'est évidemment une condition beaucoup plus faible que la précédente.

Thérorème 1 (*Principe de dualité*). — *Si la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est du type faible (s, q), elle est du type (q, s).*

Corollaire 1. — *Pour s et $q \leq 2$, α est du type (s, q) si et seulement si elle est du type (q, s), ou si et seulement si elle est du type faible (s, q) ou (q, s).*

Corollaire 2. — *La suite unité ($\alpha_n = 1$ pour tout n) est du type $(\infty, 2)$.*

En effet, en prenant pour Z le jeu de pile ou face, on voit que α est du type faible $(2, \infty)$. Ce résultat est un théorème connu de Kolmogorov (1) : si la suite $X = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires est telle que, pour toute suite $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers zéro à l'infini, $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X_n$ converge en probabilité, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} |X_n^2|$ converge presque sûrement.

Corollaire 3. — *La suite* α *est du type* (s, q), *pour* $s \leqq 2$, $q \leqq 2$, *si et seulement si* $\alpha \in l^r$, $r = \mathrm{Min}(s, q)$ *sauf toutefois pour* $s = q < 2$, *auquel cas la condition nécessaire et suffisante est* $\alpha \in l^{q-}$, *c'est-à-dire*

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty.$$

Il suffit en effet de prendre pour Z la suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, suivant la loi stable d'indice s, et d'écrire que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n Z_n|^q$ converge presque sûrement; on applique le critère des deux séries de Kolmorogov. Le résultat avait déjà été démontré dans Schwartz [2], pour $s = q \leqq 2$; la méthode n'était pas du tout celle-là, mais le principe de dualité avait déjà été appliqué dans Schwartz [3]. Le résultat relatif à $s = q = 2$ est le théorème de Sazonov-Minlos.

Théorème 2. — *Pour que* α *soit du type* (s, q), *il faut et il suffit que* $\alpha \in l^r$, $r = \mathrm{Min}(s, q)$, *sauf dans les cas exceptionnels suivants :*

(*a*) $s = q < 2$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^{q-}$;

(*b*) $s > q \geqq 2$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^s$;

(*c*) $s > 2 > q$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^r$, $1/r = (1/s) + (1/q) - (1/2)$.

Corollaire. — *La suite unité* ($\alpha_n = 1$ *pour tout* n) *est du type* (s, q) *si et seulement si* $s = +\infty$ et $q \geqq 2$.

Autrement dit, le cas de Kolmogorov était le seul possible ($q \geqq 2$ résultant trivialement de $q = 2$).

On peut alors passer aux applications radonifiantes, par dualité : la multiplication par α est radonifiante de l^p, $1 \leqq p \leqq +\infty$, muni de la topologie de la norme, sauf pour $p = +\infty$ où l'on doit le munir de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, dans l^q, muni de la topologie de la norme, sauf pour $q = +\infty$ où on doit le munir de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, si et seulement si α est du type (p', q). Pour les applications radonifiantes, *voir* Schwartz [2]. Alors :

Théorème 3. — *La multiplication par* α *est radonifiante de* l^p *dans* l^q, $1 \leqq p \leqq +\infty$, $0 < q \leqq +\infty$, *si et seulement si* $\alpha \in l^r$, $r = \mathrm{Min}(p', q)$, *sauf dans les cas exceptionnels suivants* :

(*a*) $p' = q < 2$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^{q-}$;

(*b*) $p' > q \geqq 2$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^{p'}$;

(*c*) p *et* $q < 2$, *auquel cas la condition est* $\alpha \in l^r$, $1/r = (1/2) + (1/q) - (1/p)$.

Corollaire 1. — *L'injection canonique* $l^p \to l^q$ *est radonifiante, si et seulement si* $p = 1$, $q \geqq 2$.

Corollaire 2. — α *est radonifiante de* l^p *dans* l^∞, *si et seulement si* $\alpha \in l^{p'}$.

Corollaire 3. — *α est radonifiante de l^∞ dans l^q, $q \geqq 1$, si et seulement si $\alpha \in l^1$, sauf pour $q = 1$, ou la condition est $\alpha \in l^{1-}$.*

Corollaire 4. — *α est radonifiante de l^p dans lui-même, si et seulement si $\alpha \in l^{p'}$, pour $p \leqq 2$, $\alpha \in l^2$ pour $p \leqq 2$.*

(*) Séance du 17 mars 1969.

(1) *Voir* Kolmogorov-Khintchine, *Math. Sbornik*, 32, 1925, p. 677. *Voir* aussi, pour le corollaire 1 du théorème 3 : S. Kwapien, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 698.

(2) L. Schwartz, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 832; 266, série A, 1968, p. 7 et 50.

(3) L. Schwartz, *Ist. Naz. Alta Mat. Symposia Matematica*, II, 1968, p. 203-209.

(37, *rue Pierre-Nicole*, 75-*Paris*, 5e.)