Laurent Schwartz

Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites

Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, p. 41-59.

Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites

Par Laurent SCHWARTZ

Résumé.

Soit $X=(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dira qu'elle est de type $\bar{\Lambda}^s$, $0<s\leqq+\infty$, si, pour toute suite $c=(c_n)_{n\in N}$ de nombres réels appartenant à l^s, pour s fini, à c^0, pour s infini, la série $\sum_{n\ N} c_n X_n$ converge en probabilité.

Soit $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels. On dira qu'elle est de type $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$ ou $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, si, pour toute suite X de variables aléatoires de type $\bar{\Lambda}^s$, la suite $\alpha X=(\alpha_n X_n)_{n\in N}$ est presque sûrement dans $\bar{\Lambda}^q$ ou l^q. Pour toutes les valeurs de s et q, le théorème (3.9) donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. Cela permet d'obtenir la condition nécessaire et suffisante pour que α soit radonifiante d'un l^p dans un l^q, théorème (3.10). La clef de la démonstration est le théorème (2.2), qui règle les cas $s\leqq 2$, $q\leqq 2$; les autres cas se règlent par les inégalités de Hölder sur les espaces l^r (propositions (3.4) à (3.8) inclusivement). Le théorème (2.2) n'est qu'un cas particulier d'un théorème général de dualité, le théorème (0.1). Le théorème de dualité (0.1) est lui-même un cas particulier d'un théorème de dualitè très général, qui sera donné prochainement dans un article en hommage au Professeur Yosida (Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Section 1). Ces différents résultats ont été annoncés dans des Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Voir Laurent Schwartz [7].

§ 0. Le théorème général de dualité.

Le théorème suivant, que j'appellerai principe de dualité, nous donnera tous les théorèmes connus jusqu'à présent pour les applications radonifiantes dans les espaces de suites.

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$, non nécessairement localement convexe, mais séparé par son dual; celui-ci, E', sera muni de la topologie $*$-faible $\sigma(E', E)$. On suppose en outre donnée une injection continue auto-transposée de E dans E'. On supposera aussi que le produit scalaire de dualité, $(e, e')\mapsto\langle e, e'\rangle$ est universellement mesurable de $E\times E'$ dans $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$.

Cela sera toujours vrai dans les applications, car ce produit scalaire est séparément continu, et une application séparément continue sur un produit de deux espaces sousliniens est universellement mesurable (voir Schwartz [6], 1ere. partie, Chap. II). Soit F un espace vectoriel topologique séparé par son dual, $E \subset F \subset E'$, avec des injections continues. Soit (Ω, μ) un espace muni d'une probabilité[1], $L^0(\Omega, \mu)$ l'espace des variables aléatoires réelles ou complexes (c. à d. des μ-classes d'applications μ-mesurables de Ω dans $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$), muni de la topologie de la convergence en probabilité. Soit X une variable aléatoire sur (Ω, μ), à valeurs dans E', c. à d. une μ-classe d'applications μ-mesurables[2] de Ω dans E' (en fait, nous supposerons que X est une application μ-mesurable de Ω dans E', ce qui est sans inconvénient). Si $\varphi \in E$, $\langle X, \varphi \rangle$ est la variable aléatoire réelle $\omega \mapsto \langle X(\omega), \varphi \rangle$. On dira que X est de type F, si, lorsque $\varphi \in E$ converge vers 0 dans E pour la topologie induite par F, $\langle X, \varphi \rangle$ converge vers 0 en probabilité; et de cotype F, si, lorsque $\langle X, \varphi \rangle$ converge vers 0 en probabilité, φ converge vers 0 dans E pour la topologie induite par F. On dira que le système (E, E', F) a la propriété d'approximation, s'il existe une suite d'applications linéaires continues ρ_n de E' dans $\sigma(E, E')$, convergeant simplement vers l'application identique sur E pour n infini (de sorte que les transposées, qui envoient aussi continuement E' dans $\sigma(E, E')$, convergent simplement vers l'identité sur E' pour n infini), laissant F stable et équicontinues de F dans F. Dans les paragraphes qui suivront, E' sera l'espace des suites de nombres réels, $\boldsymbol{R}^N$, muni de la topologie produit; E sera l'espace des "suites finies", Λ, c. à d. l'espace des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, muni de la topologie limite inductive habituelle. F sera généralement l'un des espaces de suites l^p, $0 < p \leqq +\infty$, localement convexe (Banach) pour $p \geqq 1$, mais toujours séparé par son dual (qui est l^∞ pour $p \leqq 1$). L'application ρ_n sera la "troncature" qui, à toute suite $c = (c_n)_{n \in N}$, fait correspondre la suite n-tronquée $(c_0, c_1, \cdots, c_n, 0, 0, \cdots)$. Comme les boules des l^p sont stables par troncature, les ρ_n sont bien équicontinues sur les l^p. Dans d'autres applications que nous étudierons ultérieurement, E sera l'espace $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ des fonctions C^∞ à support compact sur $\boldsymbol{R}^N$, E' sera l'espace des distributions (muni de la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$). Soit $(\alpha_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, telle que les $1-\alpha_n$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact pour n infini, ainsi que chacune de leurs dérivées, tout en restant bornées sur $\boldsymbol{R}^N$, ainsi que chacune de leurs dérivées; soit $(\beta_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, $\geqq 0$, d'intégrale égale à 1, de support convergeant uniformément vers l'origine pour n infini; alors les applications $T \mapsto \alpha_n(\beta_n * T) = \rho_n(T)$ sont des appro-

1) Nous supposerons Ω topologique et μ de Radon, mais, moyennant des modifications de détail, on peut prendre des mesures abstraites. Voir Schwartz [6].

2) Il s'agit de mesurabilité-Lusin ; mais, ici encore, c'est sans importance.

ximations, et, pour tous les bons espaces F de fonctions ou distributions, les ρ_n laissent stable F et sont équicontinues de F dans F.

LEMME (0.0). *Soient E_i, E'_i, F_i, comme précédemment, $i=1, 2$. On suppose que F_1 admet un voisinage de 0, V_1, qui est fermé dans E'_1, et que (E_2, E'_2, F_2) a la propriété d'approximation, avec une suite d'applications ρ_n. Soit $X_1 : (\Omega_1, \mu_1) \to E'_1$ une variable aléatoire à valeurs dans E'_1 ayant la propriété suivante:*

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \textit{Pour } \varphi_1 \in E_1,\ \mu_1\{\omega_1 \in \Omega_1\,;\ |\langle X_1(\omega_1), \varphi_1\rangle| > R_1\} \leqq \delta_1 \\ \textit{implique } \varphi_1 \in V_1\,. \end{cases}$$

Soit $X_2 : (\Omega_2, \mu_2) \to E'_2$ une variable aléatoire à valeurs dans E'_2, ayant la propriété suivante:

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \textit{Il existe un voisinage de } 0,\ W_2, \textit{ dans } F_2, \textit{ tel que,} \\ \textit{pour } \varphi_2 \in E_2,\ \varphi_2 \in W_2 \textit{ implique} \\ \mu_2\{\omega_2 \in \Omega_2\,;\ |\langle X_2(\omega_2), \varphi_2\rangle| > R_2\} \leqq \delta_2\,. \end{cases}$$

Soit α une application linéaire continue de E'_1 dans E'_2, appliquant aussi continuement E_1 dans E_2.

Si alors αX_1 est concentrée à η_2 près sur W'_2, ou $\bigcup_{n \geqq N} \rho_n W'_2 \subset W_2$, ${}^t\alpha X_2$ est concentrée à η_1 près sur $\frac{R_2}{R_1} V_1$, pourvu que $\sqrt{\delta_2+\eta_2} \leqq \delta_1$, $\eta_1 = \sqrt{\delta_2+\eta_2}$.

DÉMONSTRATION. Considérons $\varphi_2 = \rho_n \alpha X_1(\omega_1) \in E_2$. Par hypothèse, il existe $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_1$, μ_1-mesurable, $\mu_1(\bar{\Omega}_1) \geqq 1-\eta_2$, tel que, pour $\omega_1 \in \bar{\Omega}_1$, $\alpha X_1(\omega_1) \in W'_2$, donc $\rho_n \alpha X_1(\omega_1) \in W_2$. Il résulte alors de (0.2) que, pour $\omega_1 \in \bar{\Omega}_1$:

$$(0.3) \qquad \mu_2\{\omega_2 \in \Omega_2\,;\ |\langle X_2(\omega_2), \rho_n \alpha X_1(\omega_1)\rangle| > R_2\} \leqq \delta_2\,.$$

Considérons alors l'ensemble A des $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ tels que

$$(0.4) \qquad |\langle X_2(\omega_2), \rho_n \alpha X_1(\omega_1)\rangle| > R_2\,.$$

Puisque le produit scalaire sur $E_2 \times E'_2$ est supposé universellement mesurable, A est $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-mesurable. Or, pour $\omega_1 \in \bar{\Omega}_1$, avec $\mu_1(\bar{\Omega}_1) \geqq 1-\eta_2$, l'ensemble des $\omega_2 \in \Omega_2$ tels que $(\omega_1, \omega_2) \in A$ est de μ_2-mesure $\leqq \delta_2$; donc, par Fubini, $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \leqq \delta_2+\eta_2$. Donc, encore par Fubini, il existe $(\bar{\Omega}_2)_n \subset \Omega_2$, $\mu_2((\bar{\Omega}_2)_n) \geqq 1-\sqrt{\delta_2+\eta_2}$, tel que, pour $\omega_2 \in (\bar{\Omega}_2)_n$:

$$(0.5) \qquad \mu_1\{\omega_1 \in \Omega_1\,;\ |\langle X_2(\omega_2), \rho_n \alpha X_1(\omega_1)\rangle| > R_2\} \leqq \sqrt{\delta_2+\eta_2} \leqq \delta_1\,.$$

Mais $\langle X_2(\omega_2), \rho_n \alpha X_1(\omega_1)\rangle = \langle {}^t\alpha {}^t\rho_n X_2(\omega_2), X_1(\omega_1)\rangle$. Il résulte alors de (0.1) que, pour $\omega_2 \in (\bar{\Omega}_2)_n$, on a ${}^t\alpha {}^t\rho_n X_2(\omega_2) \in \frac{R_2}{R_1} V_1$. Mais les $(\bar{\Omega}_2)_n$ sont tous μ_2-mesurables, de μ_2-mesure $\geqq 1-\sqrt{\delta_2+\eta_2}$; donc l'ensemble $\bar{\Omega}_2$ des ω_2 qui appartiennent à $(\bar{\Omega}_2)_n$ pour une infinité de valeurs de n, a lui aussi une μ_2-mesure $\geqq 1-\sqrt{\delta_2+\eta_2} \geqq 1-\eta_1$. Comme V_1 est fermé, et que ${}^t\alpha {}^t\rho_n X_2(\omega_2)$ converge vers ${}^t\alpha X_2(\omega_2)$ pour

n infini, on voit que, pour $\omega_2 \in \bar{\Omega}_2$, avec $\mu_2(\bar{\Omega}_2) \geqq 1-\eta_1$, on a ${}^t\alpha X_2(\omega_2) \in \frac{R_2}{R_1} V_1$; ${}^t\alpha X_2$ est bien concentrée à η_1 près sur $\frac{R_2}{R_1} V_1$. cqfd.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème général de dualité:

THÉORÈME (0.1). *Soient E_i, E_i', F_i, comme au début, $i=1, 2$. On suppose que F_1 admet un voisinage de 0, V_1, qui est fermé dans E_1', que (E_2, E_2', F_2) a la propriété d'approximation, et que F_2 admet un système fondamental de voisinage de 0, fermés dans F_2 pour la topologie induite par E_2'. Soient X_1 une variable aléatoire à valeurs dans E_1', de cotype F_1, et X_2 une variable aléatoire à valeurs dans E_2', de type F_2. Soit α une application linéaire continue de E_1' dans E_2', appliquant aussi continuement E_1 dans E_2. Si alors αX_1 est presque sûrement dans F_2, ${}^t\alpha X_2$ est presque sûrement dans F_1.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque X_1 est de cotype F_1, on peut trouver R_1 et δ_1 tels que l'on ait (0.1). Puisque X_2 est de type F_2, alors, quels que soit δ_2, il existe un voisinage V_2 de 0 dans F_2 tel que

$$\varphi_2 \in E_2 \cap V_2 \text{ implique } \mu_2\{\omega_2 \in \Omega_2\,;\ |\langle X_2(\omega_2), \varphi_2\rangle| > 1\} \leqq \delta_2\,. \tag{0.6}$$

Nous choisirons $\delta_2 \leqq \frac{1}{2}\delta_1^2$ et $\leqq \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Puisque les ρ_n sont équicontinues sur F_2, il existe un autre voisinage de 0, V_2', tel que $\bigcup_n \rho_n V_2' \subset V_2$; on peut le supposer fermé dans F_2 pour la topologie induite par E_2'. Alors la réunion des multiples entiers de V_2' est F_2, et αX_1 est presque sûrement dans F_2; donc, pour tout $\eta_2 > 0$, il existe un $R_2 > 0$ tel que αX_1 soit concentrée à η_2 près sur $W_2' = R_2 V_2'$. Nous prendrons $\eta_2 \leqq \frac{1}{2}\delta_1^2$ et $\leqq \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Si $W_2 = R_2 V_2$, on a exactement (0.2). D'après le choix même de W_2', αX_1 est concentrée à η_2 près sur W_2'. Donc ${}^t\alpha X_2$ sera concentrée à η_1 près sur $\frac{R_2}{R_1} V_1$, car $\sqrt{\delta_2+\eta_2} \leqq \delta_1$; et $\eta_1 = \sqrt{\delta_2+\eta_2} \leqq \varepsilon$. Donc ${}^t\alpha X_2$ est concentrée à ε près sur F_1, ε arbitraire, donc ${}^t\alpha X_2$ est presque sûrement dans F_1, cqfd.

Voici pourquoi ce théorème a des conséquences importantes. Si X_1 est *une variable aléatoire particulière* à valeurs dans E_1', de cotype F_1 et si αX_1 est presque sûrement dans F_2, alors, *quelle que soit la variable aléatoire* X_2 sur E_2', de type F_2, ${}^t\alpha X_2$ est presque sûrement dans F_1. On aura donc un théorème disant que ${}^t\alpha$ est radonifiante de F_2' dans F_1. Nous verrons un tel énoncé plus loin. Nous allons seulement maintenant appliquer ce théorème aux espaces de suites, et, dans un article ultérieur, nous donnerons des applications aux espaces de fonctions et distributions (par exemple on peut montrer, par cette méthode, la continuité presque sûre de la fonction aléatoire du mouvement brownien).

§ 1. Espaces de suites.

L'espace $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ des suites $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de nombres réels sera muni de la topologie produit; Λ sera le sous-espace des " suites finies ", c. à d. dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, et il sera muni de la topologie limite inductive. Un espace de suites $\mathcal{S}$ sera un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$; il sera dit normal s'il est en outre muni d'une topologie d'espace vectoriel (non nécessairement localement convexe), si $\Lambda\subset\mathcal{S}\subset\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, les injections étant continues, et si Λ est dense dans $\mathcal{S}$; il sera dit normal par troncatures si toute suite $c=(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de $\mathcal{S}$ est limite dans $\mathcal{S}$ de ses tronquées, $c^{(p)}=(c_0, c_1, \cdots, c_p, 0, 0, \cdots)$. Si $\mathcal{S}$ est normal, son dual $\mathcal{S}'$ peut être identifié lui aussi à un espace de suites, normal pour la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, et normal par troncature si $\mathcal{S}$ l'est. Soit G un espace vectoriel topologique (non nécessairement localement convexe) complet. On peut identifier les suites $X=(X_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ d'éléments de G aux applications linéaires continues de Λ dans G, X définissant l'application linéaire $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\mapsto\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nX_n$. La suite X est dite de type $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ étant un espace de suites réelles, si l'application précédente est continue de Λ dans G, quand on munit Λ de la topologie induite par $\mathcal{S}$; cela équivaut à dire, si $\mathcal{S}$ est normal, qu'elle se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans G, et l'espace des suites d'éléments de G, de type $\mathcal{S}$, est exactement l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}, G)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans G[3].

Si $\mathcal{S}$ est normal par troncatures et $X=(X_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de type $\mathcal{S}$, la série $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nX_n$ est convergente dans G, pour toute suite $c\in\mathcal{S}$, et sa somme est l'image de $c\in\mathcal{S}$ par $X\in\mathcal{L}(\mathcal{S}, G)$. Inversement, si l'espace normal de suites $\mathcal{S}$ est de Baire (ou s'il est localement convexe et tonnelé, et si G est localement convexe), et si, pour toute suite $c=(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de $\mathcal{S}$, la série $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nX_n$ converge dans G, X est de type $\mathcal{S}$; en effet l'application $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\mapsto\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nX_n$ qu'elle définit de $\mathcal{S}$ dans G est limite, pour p infini, des applications linéaires continues $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\mapsto\sum_{n\leq p}c_nX_n$, donc continue par Baire (ou Banach-Steinhaus)[4]; dans ce cas encore, $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nX_n$ est l'image de $c\in\mathcal{S}$ par $X\in\mathcal{L}(\mathcal{S}, G)$. En prenant $G=\boldsymbol{R}$, on voit que, si $\mathcal{S}$ est normal par troncature, alors, pour $c\in\mathcal{S}$, et $c'\in\mathcal{S}'$ la série $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nc'_n$ converge et représente le produit scalaire de dualité $\langle c, c'\rangle$; inversement, si $\mathcal{S}$ est de Baire, ou s'il est localement convexe et tonnelé, et si, pour toute suite $c\in\mathcal{S}$, la série $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nc'_n$ converge, alors c' est un élément de $\mathcal{S}'$, et $\sum_{n\in\boldsymbol{N}}c_nc'_n$

3) Si $\mathcal{S}$ n'est pas normal, et si X est de type $\mathcal{S}$, elle ne definit plus une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans G. Mais, si $\bar{\Lambda}^{\mathcal{S}}$ est l'adhérence de Λ dans $\mathcal{S}$, X est de type $\bar{\Lambda}^{\mathcal{S}}$, $\bar{\Lambda}^{\mathcal{S}}$ est normal, et X est une application linéaire continue de $\bar{\Lambda}^{\mathcal{S}}$ dans G.

4) Voir Bourbaki [1], Chap. III, § 3.

est le produit scalaire $\langle c, c' \rangle$, pour toute suite $c \in \mathcal{S}$. Dans la suite, $\mathcal{S}$ sera souvent l'espace l^s des suites de puissance s-ième sommable, $0 < s < +\infty$, avec sa topologie habituelle (non localement convexe si $s < 1$); ou l'espace c^0 des suites convergeant vers 0; ou l^∞, qui n'est pas normal. Dans tous les cas, on pourra prendre l'espace $\bar{\Lambda}^s$, adhérence de Λ dans l^s, $0 < s \leqq +\infty$. L'espace $\bar{\Lambda}^s$ est de Baire, et normal par troncature. On pourra aussi prendre pour $\mathcal{S}$ l'espace l^∞, muni de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, qui est encore normal par troncature. Le dual de $\bar{\Lambda}^s$ est $l^{s'}$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, pour $1 \leqq s$, et l^∞ pour $s < 1$.

Suites de variables aléatoires.

D'autre part (Ω, μ) sera un espace de probabilités, c. à d. un espace Ω muni d'une mesure $\mu \geqq 0$ de masse 1 (mesure abstraite ou de Radon, peu importe). Une variable aléatoire réelle est alors une μ-classe de fonctions μ-mesurables sur Ω à valeurs dans $\boldsymbol{R}$; l'espace $G = L^0(\Omega, \mu)$ de ces variables aléatoires sera muni de la topologie de la convergence en mesure ou en probabilité, où un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les

$$V(\varepsilon, R) = \{f \in L^0(\Omega, \mu) ; \mu\{\omega \in \Omega ; |f(\omega)| > R\} \leqq \varepsilon\} . \tag{1.1}$$

C'est généralement cet espace $L^0(\Omega, \mu)$ qui sera l'espace G introduit précédemment; une suite $X = (X_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de variables aléatoires sur (Ω, μ) sera donc dite de type $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ espace de suites réelles, si elle est continue de Λ dans $L^0(\Omega, \mu)$ lorsqu'on munit Λ de la topologie induite par $\mathcal{S}$. $L^0(\Omega, \mu)$ est métrisable et complet. Il n'est pas localement convexe.

Soit maintenant $\mathcal{T}$ un espace de suites réelles arbitraire (sous espace de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, sans topologie). Une suite $X = (X_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de variables aléatoires sur (Ω, μ) sera dite p. s. dans $\mathcal{T}$(p. s. $= \mu$-presque sûrement), si, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite réelle $(X_n(\omega))_{n \in \boldsymbol{N}}$ est un élément de $\mathcal{T}$. La relation entre suites de variables aléatoires de type $\mathcal{S}$ et suites p. s. dans $\mathcal{T}$ est la suivante:

PROPOSITION (1.1). *Soit $\mathcal{S}$ un espace de suites normal, et soit $X = (X_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, μ).*

1) *Si $\mathcal{S}$ est métrisable, ou s'il est normal par troncatures et de Baire, et si X est p. s. dans $\mathcal{S}'$, alors X est de type $\mathcal{S}$.*

2) *Si $\mathcal{S}$ est localement convexe et nucléaire, et si X est de type $\mathcal{S}$, est elle p. s. dans $\mathcal{S}'$.*

DÉMONSTRATION. 1) Supposons d'abord $\mathcal{S}$ métrisable. Pour montrer que X est de type $\mathcal{S}$, nous devons montrer que l'application qu'elle définit de Λ dans $L^0(\Omega, \mu)$ est continue, quand on munit Λ de la topologie induite par $\mathcal{S}$. Mais, $\mathcal{S}$ étant métrisable, il suffit de montrer qu'elle est séquentiellement continue. Soit donc $(c^{(p)})_{p \in \boldsymbol{N}}$ une suite d'éléments $c^{(p)}$ de Λ, convergeant vers 0 dans $\mathcal{S}$. Si X est p.s. dans $\mathcal{S}'$, la somme $\sum_{n\in N} c_n^{(p)} X_n$ converge vers 0 pour p infini, μ-presque sûrement, donc a fortiori en probabilité, ce qui démontre le résultat.

Supposons maintenant $\mathcal{S}$ normal par troncature et de Baire. Soit $X=(X_n)_{n\in N}$ p.s. dans $\mathcal{S}'$. Soit $c=(c_n)_{n\in N}$. La suite des tronquées, $c^{(p)}=(c_0, c_1, \cdots, c_p, 0, 0, \cdots)$ converge, pour p infini, vers c dans $\mathcal{S}$; pour μ-presque tout ω, la suite $(X_n(\omega))_{n\in N}$ est dans $\mathcal{S}'$, donc la série $\sum_{n\in N} c_n X_n(\omega)$ converge ; la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$, convergente μ-presque sûrement, est a fortiori convergente en probabilité. Ceci étant vrai pour toute $c\in\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ étant de Baire, cela prouve que X est de type $\mathcal{S}$.

Dans ce cas 1), les hypothèses faites sur $\mathcal{S}$ sont des hypothèses de régularité raisonnables, vraies pour les espaces de suites usuels. On peut donc dire que, *dans les cas usuels*, une suite $X=(X_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires p.s. dans $\mathcal{S}'$ est de type $\mathcal{S}$. Mais la réciproque n'est pas vraie ; la condition " X est p.s. dans $\mathcal{S}'$ " est beaucoup plus forte que la condition " X est de type $\mathcal{S}$ ". C'est toute la différence qui existe entre la convergence en probabilité et la convergence presque sûre.

Le 2) de la proposition est une des formes du théorème classique de Minlos ; nous ne la démontrerons pas ici. Toutes ces formes équivalentes du théorème de Minlos seront étudiées dans L. Schwartz [6], 2e partie, Chap. 4, § 3. Si par exemple nous prenons pour $\mathcal{S}$ l'espace des suites à décroissance rapide, $\mathcal{S}'$ est l'espace des suites à croissance lente. L'espace $\mathcal{S}$ est métrisable, et aussi normal par troncature, et de Baire, et nucléaire. Il est donc équivalent de dire que la suite $X=(X_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires est de type $\mathcal{S}$, ou que, pour toute suite c à décroissance rapide, la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ converge en probabilité, ou que, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n\in N}$ est à croissance lente, ou que, pour toute suite c à décroissance rapide, la série $\sum_{n\in N} c_n X_n$ est p.s. convergente.

Soient maintenant $\mathcal{S}$ un espace de suites normal, $\mathcal{T}$ un espace de suites arbitraire, et $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels. Alors α définit par multiplication $(c_n)_{n\in N}\mapsto(\alpha_n c_n)_{n\in N}$ une application linéaire continue de Λ dans Λ, et de $\boldsymbol{R}^N$ dans $\boldsymbol{R}^N$. Nous dirons que α est de type $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, si, pour toute suite $X=(X_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires, de type $\mathcal{S}$, la suite $\alpha X=(\alpha_n X_n)_{n\in N}$ est p.s. dans $\mathcal{T}$. Par exemple, si $\mathcal{S}$ est nucléaire, l'identité ($\alpha_n=1$ pour tout n) est de type $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ d'après Minlos. L'étude des α qui sont de type $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, pour les différents espaces de suites $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ normal, est donc en fait l'étude d'une généralisation du théorème de Minlos. Nous règlerons complètement le cas des $\mathcal{S}=\bar{\Lambda}^s$, $\mathcal{T}=l^q$ ou $\bar{\Lambda}^q$, s et $q>0$, finis ou non.

Supposons que α soit de type $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Soient $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{T}_1$, d'autres espaces analogues. Soit β une suite, telle que la multiplication par β opère linéairement et continuement de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}_1$, et γ une suite qui opère par multiplication de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}_1$. Alors la suite produit $\alpha\beta\gamma=(\alpha_n\beta_n\gamma_n)_{n\in N}$ est de type $(\mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1)$; en effet, si X est une suite de variable aléatoires de type $\mathcal{S}_1$, c. à d. un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1, L^0(\Omega, \mu))$, alors βX est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{S}, L^0(\Omega, \mu))$ par composition, autrement dit βX est de type $\mathcal{S}$; alors $\alpha\beta X$ est p.s. dans $\mathcal{T}$, donc $\alpha\beta\gamma X$ p.s. dans $\mathcal{T}_1$.

Probabilités cylindriques et probabilités de Radon, applications radonifiantes.

Soit G un espace vectoriel topologique, non nécessairement localement convexe mais séparé par les élements de son dual. Pour tout sous-espace vectoriel fermé H de G, de codimension finie, nous noterons par $\pi_{G/H}$ l'application canonique de G dans le quotient G/H (de dimension finie); si $H_1\subset H_2$, nous noterons par $\pi_{G/H_2,G/H_1}$ l'application canonique de G/H_1 sur G/H_2. Une probabilité cylindrique λ sur G[5] est la donnée de probabilités de Radon $\lambda_{G/H}$ sur tous les quotients G/H, cohérentes au sens suivant: si $H_1\subset H_2$, $\lambda_{G/H_2}=\pi_{G/H_2,G/H_1}\lambda_{G/H_1}$. Une probabilité de Radon sur G est une probabilité cylindrique (en prenant pour $\lambda_{G/H}$ l'image $\pi_{G/H}\lambda$); mais la réciproque n'est pas vraie. Le théorème de Prokhorov[6] donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une probabilité cylindrique λ sur G soit de Radon: il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact K de G tel que, pour tout sous-espace vectoriel fermé de codimension finie H, la mesure de $\pi_{G/H}(K)$ pour $\lambda_{G/H}$ soit $\geqq 1-\varepsilon$. Introduisons la notion suivante. Soit A une partie de G. Une probabilité cylindrique λ sur G est dite cylindriquement concentrée à ε près sur A[7], si, pour tout H, la mesure de $\pi_{G/H}(A)$ pour $\lambda_{G/H}$ est $\geqq 1-\varepsilon$; on dira que λ est scalairement concentrée à ε près sur A si ceci est seulement vrai lorsque H est un hyperplan (G/H de dimension 1). Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de G, stable par les homothéties, les réunions finies et les inclusions, on dira que la probabilité cylindrique λ est cylindriquement (ou scalairement) $\mathfrak{S}$-concentrée, si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in\mathfrak{S}$ telle que λ soit cylindriquement (ou scalairement) concentrée à ε près sur A. Le théorème de Prokhorov dit exactement que λ est de Radon si et seulement si elle est cylindriquement concentrée sur l'ensemble des parties relativement compactes. C'est la concentration scalaire qui est la propriété simple, de vérification facile, et la concentration cylindrique qui intervient dans Prokhorov, d'où les difficultés du problème. Si l'ensemble $\mathfrak{S}$ n'est pas indiqué, il est sous-entendu que c'est l'ensemble de toutes

5) Voir Schwartz [6], 2e partie, Chap. II, §1.
6) Schwartz [6], 1ere partie, Théorème (I, 20).
7) Schwartz [6], 2e partie, Chap. II, §3.

les parties bornées. Une forme du théorème de Minlos dit que, si G est le dual F' d'un espace vectoriel topologique F nucléaire, muni de la topologie $*$-faible $\sigma(F', F)$, et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues de F', une probabilité cylindrique sur F', scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est de Radon. Notons que les probabilités cylindriques sur G ne dépendent que de sa topologie affaiblie $\sigma(G, G')$; et qu'elles sont les mêmes que les probabilités cylindriques sur le complété faible de G, ou sur tout espace compris entre G et ce complété faible et muni de la topologie définie par G'. Si u est une application linéaire faiblement continue de G dans un autre espace vectoriel analogue G_1, et si λ est une probabilité cylindrique sur G, elle a une image $u(\lambda)$; u est dite $\mathfrak{S}$-radonifiante[8], si, pour toute probabilité cylindrique λ sur G, scalairement concentrée sur l'ensemble de parties $\mathfrak{S}$, $u(\lambda)$ est de Radon sur G_1. Par exemple, si $G=\sigma(F', F)$, F nucléaire, et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues de F', l'application identique de F' est $\mathfrak{S}$-radonifiante.

Il est alors possible de traduire les propriétés des suites de variables aléatoires en termes de probabilités cylindriques et d'applications radonifiantes. Soit $X=(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, μ); X définit une μ-classe d'applications μ-mesurables de Ω dans $\boldsymbol{R}^N$, d'où une mesure image $X(\mu)=\lambda$ sur $\boldsymbol{R}^N$, qui est nécessairement de Radon parce que $\boldsymbol{R}^N$ est polonais. Deux suites X, X', de variables aléatoires, X sur (Ω, μ), X' sur (Ω', μ'), sont dites isonomes, si les mesures images λ et λ' sur $\boldsymbol{R}^N$ coïncident. Si donc l'on considère les suites de variables aléatoires à une isonomie près, c. à d. les classes d'isonomie de suites de variables aléatoires, on peut toujours supposer que Ω est $\boldsymbol{R}^N$, qne μ est une probabilité de Radon sur $\boldsymbol{R}^N$, et que X_n est la projection canonique π^n de $\boldsymbol{R}^N$ sur son n-ième facteur $\boldsymbol{R}$. Mais il est plus conforme aux données de la pratique de supposer (Ω, μ, X_n) arbitraires, et de raisonner sur les classe d'isonomie de suites de variables aléatoires. Par ailleurs toute probabilité cylindrique sur $\boldsymbol{R}^N$ est une probabilité de Radon, autrement dit la condition de Prokhorov est toujours réalisée, parce que $\boldsymbol{R}^N$ est une limite projective dénombrable d'espaces de dimensions finies. Il existe donc une correspondance bijective entre les probabilités cylindriques ou de Radon sur $\boldsymbol{R}^N$, et les classes d'isonomie de suites de variables aléatoires. On démontre alors ce qui suit (voir Schwartz [**6**], 2[e] partie, Chap. 5, § 2, Théorème 2).

PROPOSITION (1.2). *Soit $X=(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires, λ la mesure de Radon correspondante $X(\mu)$ sur $\boldsymbol{R}^N$. Soit $\mathcal{S}$ un espace de suites localement convexe normal. Soit $\mathfrak{T}$ un espace de suites arbitraire. Alors:*

1) *λ est l'image, par l'injection canonique $\mathcal{S}'\to\boldsymbol{R}^N$, d'une probabilité cylindrique sur $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, scalairement concentrée sur l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties équi-*

8) Schwartz [**6**], 2[e] partie, Chap. II, § 4, définition 2.

continues de $\mathcal{S}'$, si et seulement si la suite X est de type $\mathcal{S}$.

2) *λ est portée par $\mathcal{T}$, si et seulement si la suite X est p.s. dans $\mathcal{T}$.*

COROLLAIRE (1.3). *Soit $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ une suite réelle. La suite α est de type $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ (c. à d. transforme toute suite X de type $\mathcal{S}$ en une suite p.s. dans $\mathcal{T}$), si et seulement si la multiplication u par α envoie $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{T}$ (auquel cas elle est forcément continue de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ dans $\sigma(\mathcal{T}, \Lambda)$), et si elle est radonifiante de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, pour l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties équicontinues de $\mathcal{S}'$, dans $\mathcal{T}$ muni de la topologie induite par $\boldsymbol{R}^N$. (Ceci signifie encore que, pour toute probabilité cylindrique λ sur $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, l'image $u(\lambda)$ dans $\boldsymbol{R}^N$ est portée par $\mathcal{T}$).*

Cette dernière formulation, entre parenthèses, ne suppose aucune topologie choisie sur $\mathcal{T}$; mais elle n'est pas intrinsèque, car celle suppose $\mathcal{T}$ donné comme plongé dans $\boldsymbol{R}^N$.

REMARQUE. Si $\mathcal{S}$ n'est pas localement convexe, la proposition et son corollaire ne subsistent pas. Au lieu de dire que λ est scalairement concentrée sur l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{S}'$, on devra continuer à dire qu'elle est de type $\mathcal{S}$.

Supposons u $\mathfrak{S}$-radonifiante de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ dans $\mathcal{T}$ muni de la topologie induite par $\boldsymbol{R}^N$. Alors elle est aussi radonifiante de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{T}$ dans les cas suivants:

a) $\mathcal{U}$ est un espace de suites normal, de même dual $\mathcal{S}$ que $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Car alors il a les mêmes probabilités cylindriques. *Mais $\mathfrak{S}$ devra toujours être l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{S}'$ si $\mathcal{S}$ est localement convexe*; sinon, on ne pourra pas utiliser d'ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, et on devra parler de probabilités cylindriques sur $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ de type $\mathcal{S}$. Par exemple, $\mathcal{S}$ sera dans la suite l'espace $\bar{\Lambda}^s$, $0<s\leqq+\infty$. Pour $1<s<+\infty$, $\mathcal{S}'$ sera l'espace l^p, $p=s'$, exposant conjugué de s; il devra être muni de la topologie affaiblie, donc aussi, si l'on veut, de la topologie de la norme. Pour $s=+\infty$, $\bar{\Lambda}^s=c^0$; $\mathcal{S}'$ sera l'espace l^1 muni de la topologie $\sigma(l^1, c^0)$; nous verrons comment obtenir aussi des résultats pour la topologie $\sigma(l^1, l^\infty)$ (bien qu'elle ne donne pas le même dual c^0, mais l^∞), donc aussi pour la topologie de la norme sur l^1; mais cela ne résulte pas de la présente remarque. $\mathfrak{S}$ sera là toujours l'ensemble des boules. Pour $s=1$, $\mathcal{S}'$ sera l'espace $\sigma(l^\infty, l^1)$; on ne pourra pas le remplacer par l^∞ avec la topologie de la norme, car elle n'a pas le même dual; mais on pourra prendre $\sigma(c^0, l^1)$, dense dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, pourvu que $\mathfrak{S}$ reste l'ensemble des boules de l^∞; mais on pourra aussi prendre pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des boules de c^0, et c^0 lui-même avec la topologie de la norme (pour le voir, nous devons montrer que toute probabilité cylindrique sur $\sigma(l^\infty, l^1)$, scalairement concentrée sur l'ensemble des boules de l^∞, l'est aussi sur l'ensemble des boules de c^0. Celà résulte trivialement de ce que l'image, par toute forme linéaire continue sur $\sigma(l^\infty, l^1)$, de la boule unité de l^∞ est contenue dans l'image de toute boule de rayon >1 de c^0). Pour $0<s<1$, le dual de l^s est toujours l^∞, qu'on munira de la topologie $\sigma(l^\infty, l^s)$; comme l^s n'est pas localement convexe, il n'y aura pas d'ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, mais on parlera de mesures cylindriques sur $\sigma(l^\infty, l^s)$, de type l^s. On pourra aussi prendre $\sigma(c^0, l^s)$ au lieu de $\sigma(l^\infty, l^s)$.

b) Remplaçons la topologie de $\mathcal{T}$, induite par $\boldsymbol{R}^N$, par une autre plus fine $\mathcal{T}_0$ (le problème n'a d'intérêt que dans la formulation intrinsèque, utilisant $\mathcal{T}$ avec une topologie, indépendamment du fait qu'il est plongé dans $\boldsymbol{R}^N$). Tout d'abord u doit toujours être faiblement continue de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ dans $\mathcal{T}_0$. Alors λ admet par u une image, probabilité cylindrique ν_0 dans $\mathcal{T}_0$, une autre ν dans $\mathcal{T}$, et ν est l'image de ν_0 par l'injection continue $\mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}$. Nous sommes supposés savoir que ν est de Radon sur $\mathcal{T}$. Supposons que $\mathcal{T}_0$ soit souslinienne (ou même K-analytique)[9]. Alors ν provient d'une mesure de Radon ν_0' sur $\mathcal{T}_0$. Si $\nu_0' = \nu_0$, u sera aussi radonifiante de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ dans $\mathcal{T}_0$. Or ν_0' et ν_0 ont la même image dans $\mathcal{T}$; si elles sont toutes deux scalairement concentrées sur l'ensemble des parties faiblement compactes convexes de $\mathcal{T}_0$, elles coïncideront[10]. C'est vrai de ν_0, puisque λ est scalairement concentrée sur l'ensemble des parties équicontinues de $\mathcal{S}'$, d'enveloppe convexe faiblement relativement compacte. Quant à ν_0', de Radon, elle est portée par les compacts de $\mathcal{T}_0$; c'est seulement si l'on sait que l'enveloppe convexe fermée d'un compact de $\mathcal{T}_0$ est faiblement compacte, que l'on pourra affirmer que $\nu_0' = \nu_0$. On voit donc que $\mathcal{T}_0$ devra vérifier 3 conditions: u est encore faiblement continue de $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ dans $\mathcal{T}_0$; $\mathcal{T}_0$ est souslinienne; dans $\mathcal{T}_0$, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est faiblement compacte. Par exemple, si $\mathcal{T}$ est l^q, on pourra prendre pour $\mathcal{T}_0$ la topologie de la norme, pour $1 \leq q < +\infty$, pourvu que u reste faiblement continue; pour $q = +\infty$, on devra prendre $\sigma(l^\infty, l^1)$; si c'est c^0 au lieu de l^∞, on pourra prendre la topologie de la norme sur c^0; mais, pour $0 < q < 1$, l^p est bien polonais, mais non localement convexe, et l'enveloppe convexe fermée d'un compact n'est pas nécessairement faiblement compacte. Il semble donc, a priori, que, pour $\mathcal{T} = l^q$, $0 < q < 1$, on doive conserver l^q avec la topologie induite par $\boldsymbol{R}^N$. Cependant, conservant à $\mathcal{T}_0$, ν_0, ν_0', la signification précédente, soit $\mathcal{T}_1$ l'espace l^1, ν_1 et ν_1' les images de ν_0 et ν_0' par l'injection $l^q \rightarrow l^1$. Alors ν_1 et ν_1' ont même image ν dans $\boldsymbol{R}^N$; mais le raisonnement précédent s'applique, donc ν_1 et ν_1' coïncident. Mais comme l^q et l^1 ont le même dual l^∞, elles ont les mêmes mesures cylindriques, donc ν_0 et ν_0' coïncident aussi, et on pourra bien prendre l^q avec la topologie de la quasi-norme même pour $q < 1$.

§ 2. Le principe de dualité, dans le cas particulier des espaces de suites.

PROPOSITION (2.0). *Soit $\mathcal{S}$ un espace de suites complet, et metrisable ou*

9) Voir Schwartz [6], 1ere partie, Chap. II.

10) Schwartz [6], 2e partie, Chap. II, § 3, Corollaire de la prop. 6.

normal par troncature. Soit $Z=(Z_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires réelles symétriques et independantes, aucune n'étant la variable aléatoire nulle. Alors il est équivalent de dire que Z est de cotype $\mathcal{S}$, ou de dire que, si $c\in \boldsymbol{R}^N$ est une suite réelle, et si $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge en probabilité, alors $c\in\mathcal{S}$.

DÉMONSTRATION. Soit l^Z l'espace des suites réelles telles que $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge en probabilité. On peut le munir d'une topologie naturelle, où un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les

$$W_Z(R,\varepsilon)=\{c\in l^Z;\ \forall p\in N,\ \sum_{n\leqq p} c_n Z_n\in V(R,\varepsilon)\} \tag{2.1}$$

où $V(R,\varepsilon)$ est le voisinage de 0 de $L^0(\Omega,\mu)$ donné par (1.1). Comme L^0 est métrisable et complet, on voit sans peine que l^Z, muni de cette topologie, est métrisable et complet. En outre, l^Z est injecté continuement dans $\boldsymbol{R}^N$, et normal par troncature. En outre, comme les Z_n sont indépendantes et symétriques, si

$$W'_Z(R,\varepsilon)=\{c\in l^Z;\ \sum_{n\in N} c_n Z_n\in V(R,\varepsilon)\} \tag{2.2}$$

alors $W_Z(R,\varepsilon)\subset W'_Z(R,\varepsilon)\subset W_Z(R,2\varepsilon)$ (en effet, si u et v sont deux variables aléatoires indépendantes et symétriques, $Pr\{|u|>R\}\leqq 2Pr\{|u+v|>R\}$); donc les $W'_Z(R,\varepsilon)$ forment encore un système fondamental de voisinages de 0 de l^Z; et il est équivalent de dire que Z est de cotype $\mathcal{S}$, ou de dire que l'injection de Λ dans $\mathcal{S}$ est continue, lorsqu'on munit Λ de la topologie induite par l^Z.

1) Soit donc d'abord Z de cotype $\mathcal{S}$. L'application identique de Λ dans $\mathcal{S}$ se prolonge continuement de l^Z dans $\mathcal{S}$ supposé complet, et ce prolongement est l'identité, car c'est l'injection canonique de l^Z dans $\boldsymbol{R}^N$. Donc $l^Z\subset\mathcal{S}$.

2) Inversement, supposons $l^Z\subset\mathcal{S}$. L'application identique de l^Z dans $\mathcal{S}$ est continue pour les topologies induites par $\boldsymbol{R}^N$ sur ces deux espaces, donc elle est continue de l^Z dans $\mathcal{S}$, si on peut appliquer le théorème du graphe fermé, par exemple si $\mathcal{S}$ est métrisable et complet. Mais, si $\mathcal{S}$ est normal par troncature, cette application est aussi la limite des applications tronquées $c\to(c_0,c_1,\cdots,c_n,0,0,\cdots)$, continues de l^Z dans $\mathcal{S}$; elle sera donc aussi continue de l^Z dans $\mathcal{S}$ par Banach-Steinhaus, puisque l^Z est de Baire. Dans les deux cas, l'injection de l^Z dans $\mathcal{S}$ est continue, et Z est de cotype $\mathcal{S}$, cqfd.

Si donc $\mathcal{S}$ est à la fois normal par troncature, métrisable et complet, ce qui sera le cas pour tous les espaces de suites considérés ici, et si Z est une suite de variables indépendantes symétriques, Z sera à la fois de type et de cotype $\mathcal{S}$, si la convergence en probabilité de le série $\sum_{n\ N} c_n Z_n$ est équivalente à l'appartenance de c à $\mathcal{S}$. Nous dirons alors que Z est spéciale de type $\mathcal{S}$. Toute suite Z de variables aléatoires réelles, indépendantes et symétriques, est spéciale de type l^Z, et ce sont les seuls cas possibles. Mais il arrivera, dans la pratique, que certains de ces espaces l^Z soient très bien connus.

Supposons par exemple que $Z=(Z_n)_{n\in N}$ soit une suite de variables indépendantes, equidistribuées, chacune prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité 1/2 (jeu de pile ou face). La série $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge en probabilité si et seulement si $\sum_{n\in N} |c_n|^2 < +\infty$; donc Z est de type spécial l^2, ou $l^Z = l^2$. Soit maintenant θ_s la loi de probabilité sur $\boldsymbol{R}$, de fonction caractéristique $t \to \exp(-|t|^s)$, $0 < s \leqq 2$. Nous l'appellerons la loi stable d'exposant s, de paramètre 1. La loi stable d'exposant s et de paramètre a est celle dont la fonction caractéristique est $t \to \exp(-|at|^s)$. Si alors $Z=(Z_n)_{n\in N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, de loi θ_s, la série $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ converge en probabilité (aussi bien qu'en loi ou presque sûrement), si et seulement si $\sum_{n\in N} |c_n|^s < +\infty$, et la loi de $\sum_{n\in N} c_n Z_n$ est la loi stable d'exposant s et de paramètre $(\sum_{n\in N} |c_n|^s)^{1/s}$. Donc la suite Z est de type spécial l^s, $l^Z = l^s$. (D'ailleurs, en prenant $c \in \Lambda$, on voit tout de suite que Z est à la fois de type et de cotype l^s). M. Dacunha-Castelle m'a signalé la généralisation suivante, qui résulte de ses travaux avec Bretagnolle. Une fonction poids (au sens d'Orlicz) sera une fonction φ sur $\boldsymbol{R}$, nulle à l'origine et >0 partout ailleurs, continue, paire, croissante sur $\boldsymbol{R}_+$, et pour laquelle il existe une constante k telle que, pour $|\lambda| \leqq 1$, et $t \in \boldsymbol{R}$, on ait $\varphi(\lambda t) \geqq k\lambda^2 \varphi(t)$. Par exemple on pourra prendre $\varphi(t) = |t|^s$, $0 < s \leqq 2$. Soit l^φ l'espace d'Orlicz des suites c, telles que $\sum_{n\in N} \varphi(|c_n|) < +\infty$, muni de sa topologie évidente, métrisable et complète (mais non nécessairement localement convexe), normale par troncature. Alors:

PROPOSITION (2.1) (Dacunha-Castelle-Bretagnolle [2]). *Soit φ une fonction poids. Il existe une suite Z de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, symétriques, non identiques à* 0, *telle que Z soit de type spécial l^φ; si φ est "de type négatif", on peut prendre pour loi des Z_n celle dont la fonction caractéristique est* $\exp(-\varphi)$. *Inversement, si Z est une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, symétriques, non nulles, il existe une fonction poids φ telle que Z soit spéciale de type l^φ.*

Nous admettrons ce résultat; nous l'avons constaté pour $\varphi(t) = |t|^s$, $0 < s \leqq 2$, auquel cas l'espace $l^\varphi = l^{|t|^s}$ est aussi ce qu'on appelle l'espace l^s. Soit alors φ une fonction poids, et soit $\mathcal{T}$ un espace de suites arbitraire. Rappelons qu'une suite réelle $\alpha = (\alpha_n)_{n\in N}$ est dite de type $(l^\varphi, \mathcal{T})$, si, pour toute suite $(X_n)_{n\in N}$ de type l^φ, la suite αX est p.s. dans $\mathcal{T}$. Nous dirons que α est de type faible $(l^\varphi, \mathcal{T})$, *s'il existe* une suite $Z=(Z_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires indépendantes équidistribuées symétriques, de type spécial l^φ, telle que αZ soit p.s. dans $\mathcal{T}$. C'est évidemment un affaiblissement considérable de la condition antérieure. Néanmoins on a le résultat suivant:

THÉORÈME DE DUALITÉ (2.2). *Soit $\mathcal{T}$ un espace de suites, $\Lambda\subset\mathcal{T}\subset \boldsymbol{R}^N$ avec des injections continues, $\mathcal{T}$ métrisable et complet, ayant un système fondamental de voisinages de 0 stables par troncature et fermés dans $\mathcal{T}$ pour la topologie induite par $\boldsymbol{R}^N$. Soit φ une fonction poids. Si une suite $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ de nombres réels est faiblement de type $(l^\varphi, \mathcal{T})$, elle est de type $(\mathcal{T}, l^\varphi)$.*

COROLLAIRE (evident). *Soit α une suite de nombres réels, et soient φ, ψ, deux fonctions poids. Alors α est de type (l^φ, l^ψ) si et seulement si elle est de type (l^ψ, l^φ), ou si et seulement si elle est de l'un des types faibles correspondants.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence évidente du théorème (0.1). Soit Z une suite de variables aléatoires indépendantes, symétriques, de type spécial l^φ. Soit X une suite de variables aléatoires réelles, de type $\mathcal{T}$. On prendra $E_1=E_2=\Lambda$, $E_1'=E_2'=\boldsymbol{R}^N$, $F_1=l^\varphi$, $F_2=\mathcal{T}$, $X_1=Z$, $X_2=X$. Les boules de l^φ sont fermées dans $\boldsymbol{R}^N$, et on suppose que F_2 a un système fondamental de voisinages de 0 stables par troncature, donc ces troncatures sont des approximations, et (E_2, E_2', F_2) a la propriété d'approximation. Puisque Z est de cotype l^φ, et que αZ est presque sûrement dans $\mathcal{T}$, on voit que αX (α est autotransposée) sera presque sûrement dans $\mathcal{S}$, cqfd.

En somme, nous n'avons fait que particulariser l'énoncé du théorème (0.1), mais c'est cela qui va nous être utile.

REMARQUE. Pour φ et ψ données, Dacunha-Castelle a déterminé la condition nécessaire et suffisante pour que α soit faiblement de type (l^φ, l^ψ); il a trouvé une autre fonction χ analogue, telle que cette condition, symétrique en φ et ψ, s'écrive $\alpha\in l^\chi$.

§ 3. Les suites α de type $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$ ou $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, s et $q>0$.

Prenons d'abord pour Z une suite de variables indépendantes équidistribuées symétriques, chacune prenant les valeurs ± 1, avec la probabilité 1/2 (pile ou face). Alors Z est p.s. dans l^∞. Donc l'application identique ($\alpha=(1, 1, \cdots, 1, \cdots)$) est de type faible (l^2, l^∞). Ici, $\mathcal{T}=l^\infty$. D'où

PROPOSITION (3.1). *L'application identique (ou la suite $\alpha=(1,1,\cdots,1,\cdots)$) est de type (l^∞, l^2) ou (c^0, l^2), a fortiori de type $(l^\infty, \bar{\Lambda}^q)$ ou $(c^0, \bar{\Lambda}^q)$ pour $q\geqq 2$.*

En termes usuels, ceci veut dire: si $X=(X_n)_{n\in N}$ est une suite de variables aléatoires telle que, pour toute suite $c=(c_n)_{n\in N}$ convergeant vers 0, la série $\sum_{n\in N} c_nX_n$ converge en probabilité, alors la série $\sum_{n\in N}|X_n^2|$ converge presque sûrement. Ce résultat avait été démontré depuis longtemps par Kolmogorov et Kintchine [4]. Considérons maintenant une suite $Z=(Z_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires indépendantes équidistribuées suivant la loi θ_s, de fonction caractéristique $\exp(-|t|^s)$, $0<s\leqq 2$. La suite Z est de type spécial l^s.

PROPOSITION (3.2). *Pour la suite Z ci-dessus, la suite αZ est p.s. dans $\bar{\Lambda}^q$*

ou l^q, $+\infty \geqq q > 0$, *si et seulement si:*

1) $\alpha \in l^{\mathrm{Inf}(s,q)}$ *si* $s \neq q$, $s \neq 2$;

2) $\alpha \in l^{q-}$, *c. à d.* $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^q \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty$, *si* $s = q \neq 2$;

3) $\alpha \in l^q$ *si* $s = 2$, $q < +\infty$.

(Le cas $s = 2$, $q = +\infty$, reste en dehors des précédents; il n'est pas difficile, mais d'énoncé plus compliqué, et ne nous intéresse pas).

DÉMONSTRATION. Soit d'abord $s < 2$. On sait que θ_s est absolument continue par rapport à dx, donc de la forme $\theta_s(x)dx$, et que, pour x infini, $\theta_s(x)$ est de l'ordre de $|x|^{-s-1}$. Soit $M \geqq 0$. On a:

$$\mathrm{Pr}\{|\alpha_n Z_n| > M\} = 2\int_{\frac{M}{|\alpha_n|}}^{+\infty} \theta_s(x)dx \sim \mathrm{const.}\left|\frac{\alpha_n}{M}\right|^s. \tag{3.1}$$

Si donc $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s < +\infty$, il est presque sûr que $|\alpha_n Z_n|$ est $\leqq M$ pour n assez grand; M étant quelconque, il est presque sûr que $\alpha_n Z_n$ converge vers 0 pour n infini, donc $\alpha Z \in c^0$ p.s. Si, au contraire, $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^s = \infty$, il est presque sûr que $|\alpha_n Z_n|$ ne reste pas borné, donc p.s. $\alpha Z \notin l^\infty$. Le cas $s < 2$, $q = +\infty$, est ainsi réglé. Supposons désormais la condition $\alpha \in l^s$ réalisée. La convergence presque sûre de la série $\sum_{n \in N} |\alpha_n Z_n|^q$ se régle par le théorème des deux séries de Kolmogorov. Il y a convergence presque sûre, sachant que $\sum_{n \in N} \mathrm{Pr}\{|\alpha_n Z_n| > 1\} < +\infty$, si et seulement si, en posant $U_n(\omega) = |\alpha_n Z_n(\omega)|^q$ si $|\alpha_n Z_n(\omega)| \leqq 1$, $U_n(\omega) = 0$ si $|\alpha_n Z_n(\omega)| > 1$, la série $\sum_{n \in N} E(U_n)$ converge, où E est l'espérance mathématique[11]. Or

$$E(U_n) = 2|\alpha_n|^q \int_0^{1/|\alpha_n|} |x|^q \theta_s(x)dx. \tag{3.2}$$

Si $q < s$, $\int_0^{+\infty} x^q \theta_s(x)dx < +\infty$, de sorte que αZ sera p.s. dans l^q si seulement si $\alpha \in l^s$ et $\alpha \in l^q$, c. à d. simplement $\alpha \in l^q = l^{\mathrm{Inf}(s,q)}$. Si au contraire $s \leqq q$, l'intégrale précédente est infinie, et

$$E(U_n) \sim \mathrm{const.}|\alpha_n|^q \int_1^{1/|\alpha_n|} \frac{x^q dx}{x^{s+1}}; \tag{3.3}$$

pour $s < q$, cela donne $E(U_n) \sim \mathrm{const.}|\alpha_n|^s$, et, si $s = q$, $E(U_n) \sim \mathrm{const.}|\alpha_n|^q \log \frac{1}{|\alpha_n|}$. De sorte que αZ sera p.s. dans l^q si et seulement si $\alpha \in l^s = l^{\mathrm{Inf}(s,q)}$ si $s \neq q$, et $\sum_{n \in N} |\alpha_n|^q \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty$ si $s = q$ (toujours pour $s \neq 2$). Pour $s = 2$, la loi θ_2 est la loi de Gauss normale. La décroissance à l'infini de θ_2 est beaucoup plus rapide que $|x|^{-3}$, elle est une exponentielle quadratique. Pour q

11) Voir Michel Loève [3].

fini, toutes les intégrales $\int_0^{+\infty} x^q\theta_2(x)dx$ sont finies, de sorte que αZ est p.s. dans l^q si et seulement si $\alpha\in l^q$; le cas $q=\infty$ ne nous intéressera pas.

Appliquons alors le théorème de dualité (2.2):

PROPOSITION (3.3). 1) *Soient s, $q\leqq 2$, $s\neq q$, ou $s=q=2$. La suite α est de type (l^s, l^q) si et seulement si $\alpha\in l^{\operatorname{Inf}(s,q)}$.*

2) *Soit $s=q\neq 2$. La suite α est de type (l^s, l^q) si et seulement si $\alpha\in l^{q-}$.*

Le cas $s=q=2$ est à peu près le théorème de Sazonov-Minlos. Le cas $s=q<2$ figure déjà dans Schwartz [6] et [7]. Il faut aborder maintenant le cas où s et q ne sont plus nécessairement $\leqq 2$. On le fait en une série d'étapes.

PROPOSITION (3.4). *Soit $q\geqq 2$. Si $\alpha\in l^s$, α est de type $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$.*

DÉMONSTRATION. La multiplication par α opère continuement de c^0 dans $\bar{\Lambda}^s$, donc, si X est de type $\bar{\Lambda}^s$, αX est de type c^0; alors elle est p.s. dans $\bar{\Lambda}^s$ pour $q\geqq 2$ (proposition (3.1)).

PROPOSITION (3.5). *Soit α de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, s et $q\geqq 1$. Alors $\alpha\in l^s$.*

DÉMONSTRATION. Soit s' l'exposant conjugué de s. Soit β une suite de $l^{s'}$. Alors β opère continuement de $\bar{\Lambda}^s$ dans l^1; donc, si Y est une suite de variables aléatoires de type l^1, la suite βY est de type $\bar{\Lambda}^s$. Comme alors α est de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, $\alpha\beta Y$ sera p.s. dans l^q. Cela prouve que la suite produit $\alpha\beta=(\alpha_n\beta_n)_{n\in N}$ est de type (l^1, l^q); si donc Z est une suite spéciale de type l^1, la proposition (3.2) (appliquée à $s=1$) montre que $\alpha\beta\in l^1$. Donc, pour toute suite $\beta\in l^{s'}$, $\alpha\beta$ est dans l^1; d'après Hölder, la suite α est dans l^s.

PROPOSITION (3.6). *Soit $0<s<q$. Pour que α soit de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$ ou $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$, il faut et il suffit que α soit dans l^s.*

DÉMONSTRATION. Si $q\leqq 2$, c'est la proposition (3.3). Soit donc $q>2$. Si $\alpha\in l^s$, on sait que α est de type $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$ par la proposition (3.4). Inversement, soit α de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$. Si $s<2$, α est a fortiori de type faible $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, donc la proposition (3.2) montre que α est dans l^s. Si $s\geqq 2$, la proposition (3.5) montre que α est dans l^s.

PROPOSITION (3.7). *Soit $s=q$. Pour que α soit de type $(\bar{\Lambda}^q, l^q)$ ou $(\bar{\Lambda}^q, \bar{\Lambda}^q)$, il faut et il suffit que α soit dans l^q si $q\geqq 2$, et dans l^{q-} (i.e. $\left(\sum_{n\in N}|\alpha_n|^q\left(1+\left|\log\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)<+\infty\right)$ si $q<2$.*

DÉMONSTRATION. Le cas $q\leqq 2$ est la proposition (3.3). Soit donc $q>2$. Soit $\alpha\in l^q$; α opère continuement de c^0 dans $\bar{\Lambda}^q$, donc, si X est de type $\bar{\Lambda}^q$, αX est de type c^0. D'après la proposition (3.1), elle est alors p.s. dans $\bar{\Lambda}^q$. Donc α est de type $(\bar{\Lambda}^q, \bar{\Lambda}^q)$. Inversement, supposons α de type $(\bar{\Lambda}^q, l^q)$. Par la proposition (3.5), α est dans l^q.

PROPOSITION (3.8). *Soit $s>q$. Pour que α soit de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$ il faut et il* *suffit que:* a) $\alpha \in l^q$, *si* $2 \geqq s > q$; b) $\alpha \in l^s$, *si* $s > q \geqq 2$; c) $\alpha \in l^r$, *où* $r = 2sq/(2s + 2q - sq)$ *si* $s > 2 > q$.

DÉMONSTRATION. Le cas a) résulte de la proposition (3.3). Cas b). Si $\alpha \in l^s$, on sait que α est de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$ par la proposition (3.4). Inversement, si α est de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, on sait par la proposition (3.5) que α est dans l^s. Reste le cas c), $s > 2 > q$. L'exposant r qui intervient est donné par $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$. Soit $\alpha \in l^r$. Elle peut s'écrire comme un produit de deux suites, $\alpha = \beta\gamma$, où $\beta \in l^s$, $\gamma \in l^{\frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}$. Alors β opère continuement de c^0 dans $\bar{\Lambda}^s$, donc, si X est de type $\bar{\Lambda}^s$, βX est de type c^0; elle est alors p. s. dans l^2 (proposition (3.1)), et comme γ opère de l^2 dans l^q, $\alpha X = \beta\gamma X$ est p. s. dans l^q. Donc α est bien de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$.

Inversement, supposons α de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$. Soit β une suite de $l^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}}}$. Alors β opère continuement de $\bar{\Lambda}^s$ dans l^2, donc si Y est une suite de variables aléatoires de type l^2, βY est de type $\bar{\Lambda}^s$. Alors $\alpha\beta Y$ sera p. s. dans l^q. Donc la suite $\alpha\beta$ est de type (l^2, l^q); d'après la proposition (3.3), $\alpha\beta$ est dans l^q. Donc, pour toute $\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}}}$, $\alpha\beta$ est dans l^q; cela prouve que α est dans $l^{\frac{1}{\frac{1}{q} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right)}} = l^r$, cqfd.

Nous avons maintenant réglé tous les cas possibles. On peut les résumer dans le théorème suivant:

THÉORÈME (3.9). *Soient* $0 < s, q \leqq +\infty$. *Pour que la suite* α *soit de type* (l^s, l^q) *ou* $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$, *ou* $(l^s, \bar{\Lambda}^q)$ *ou* $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$, *il faut et il suffit que:* α *soit dans* $l^{\mathrm{Inf}(s,q)}$, *sauf dans les cas suivants:*

a) $s = q < 2$; *la condition est alors* $\alpha \in l^{q-}$;

b) $s > q \geqq 2$; *la condition est alors* $\alpha \in l^s$;

c) $s > 2 > q$; *la condition est alors* $\alpha \in l^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$.

REMARQUE. Reprenons la proposition (3.1). C'est la seule possible avec $\alpha = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$. En écrivant en effect que $\alpha \in l^\infty$, les seuls cas où elle peut être de type $(\bar{\Lambda}^s, l^q)$ ou $(\bar{\Lambda}^s, \bar{\Lambda}^q)$, d'après les formules précédentes, sont $s = +\infty$, $q \geqq 2$ (cas général avec $s = q = \infty$, ou cas b)).

Passons maintenant aux applications radonifiantes; il suffit d'appliquer les résultats de la fin du § 2: Nous introduirons pour cela les espaces suivants. L'espace L^p, $1 \leqq p < +\infty$, sera: pour $1 < p$, l'espace l^p muni de la topologie de la norme ou de la topologie affaiblie; et, pour $p = 1$, l'espace l^1 muni de la topologie de la norme, ou de la topologie $\sigma(l^1, l^\infty)$ ou $\sigma(l^1, c^0)$. L'espace $L^{\infty, s}$, $0 < s \leqq 1$, sera l'espace l^∞ ou l'espace c^0, muni de la topologie induite par

$\sigma(l^\infty, l^s)$, ou, pour $s=1$, c^0 avec la topologie de la norme. Ensuite l'espace M^q, $0<q\leqq+\infty$, sera: pour $q\neq\infty$ l'espace l^q avec la topologie de la norme ou quasi-norme ou la topologie affaiblie, ou $\sigma(l^1, c^0)$ pour $q=1$; pour $q=+\infty$, l'espace l^∞ ou c^0, avec la topologie induite par $\sigma(l^\infty, l^1)$, ou la topologie de la norme pour c^0.

THÉORÈME (3.10). *La multiplication par $\alpha=(\alpha_n)_{n\in N}$ est radonifiante de L^p dans M^q, si et seulement si $\alpha\in l^r$, $r=\operatorname{Inf}(p', q)$, sauf dans les cas suivants:*

a) *$p'=q<2$; alors la condition est $\alpha\in l^{q-}$;*

b) *$p'>2$, $q\geqq 2$; alors la condition est $\alpha\in l^{p'}$;*

c) *$p<2$, $q<2$; alors la condition est $\alpha\in l^r$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$.*

La multiplication par α est radonifiante de $L^{\infty,s}$ dans M^q, si et seulement si $\alpha\in l^r$, $r=\operatorname{Inf}(s, q)$, sauf pour $s=q$, où c'est $\alpha\in l^{q-}$. Dans tous les cas, $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des boules, pour les espaces L^p; pour les espaces $L^{\infty,s}$, comme l^s n'est pas localement convexe, il n'y aura pas d'ensemble de parties $\mathfrak{S}$, mais on ne considérera que des mesures cylindriques sur $L^{\infty,s}$, de type l^s.

DÉMONSTRATION. Tout résulte des considérations de la fin du § 2, sauf un cas spécial: pour $p=1$, le résultat n'est démontré que si on prend pour L^1 l'espace $\sigma(l^1, c^0)$. Mais, si α est radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans M^q, elle l'est a fortiori de $\sigma(l^1, l^\infty)$ dans M^q. Inversement, supposons α radonifiante de $\sigma(l^1, l^\infty)$ dans M^q. Soit γ une suite $(\gamma_n)_{n\in N}$ tendant vers 0. Alors γ opère continuement de $\sigma(l^1, c^0)$ dans $\sigma(l^1, l^\infty)$; donc $\alpha\gamma$ sera radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans M^q. Cela impose $\alpha\gamma\in l^r$, où r est forcément fini si $q<2$, mais vaut $+\infty$ si $q\geqq 2$. Si $q<2$, on voit donc que $\alpha\gamma$ est dans l^r pour toute $\gamma\in c^0$, donc α est elle aussi dans l^r, donc radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans M^q; si $q\geqq 2$, le cas est tout tranché, car α est forcément bornée, et alors forcément radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans M^q. De $\sigma(l^1, l^\infty)$, on passe à l^1 pour la topologie de la norme.

Quelques exemples particuliers.

1) L'injection canonique de L^p dans M^q est radonifiante si et seulement si $p=1$, $q\geqq 2$. Voir KWAPIEN [5].

2) α est radonifiante de L^p dans M^∞, si et seulement si $\alpha\in l^{p'}$. Elle est radonifiante de $L^{\infty,s}$ dans M^∞, si et seulement si $\alpha\in l^s$.

3) α est radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ ou $\sigma(c^0, l^1)$, ou c^0, dans M^q, $q\geqq 1$, si et seulement si $\alpha\in l^1$, sauf pour $q=1$, où la condition est $\alpha\in l^{1-}$.

4) α est radonifiante de L^p dans M^p, $1\leqq p<+\infty$, si et seulement si $\alpha\in l^{p'}$, si $p\geqq 2$, $\alpha\in l^2$ si $p\leqq 2$. Elle est radonifiante de $L^{\infty,1}$ dans M^∞, si et seulement si $\alpha\in l^1$.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, Espaces Vectoriels topologiques, livre V, Paris, Hermann, 1966.
[2] N. Dacunha-Castelle et Bretagnolle, Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p, Ann. Ecole Norm. Sup., à paraitre.
[3] M. Loève, Probability Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1963, p. 237.
[4] A. Kolmogorov und A. Kintchine, Ueber die Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Mat. Sb., **32** (1925), 668–677.
[5] S. Kwapien, Complément au théorème de Sazanov-Minlos, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **267** (1968), 698–700.
[6] L. Schwartz, Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires, à paraitre.
[7] L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **265** (1967), 832–834, et **266** (1968), 7–9 et 50–52.
[8] L. Schwartz, Un théorème sur les suites de variables aléatoires, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica, Vol. II (1968), pp. 203–209.

37 RUE PIERRE NICOLE
PARIS 5^e, FRANCE