Laurent Schwartz

Un théorème sur les suites de variables aléatoires

Symposia Mathematica, vol. II (INDAM, Rome, 1968),
London: Academic Press, 1969, p. 203-209.

Istituto Nazionale di Alta Matematica
Symposia Mathematica
Volume II (1968)

UN THÉORÈME SUR LES SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES (*)

LAURENT SCHWARTZ

Dans des notes antérieures [1], nous avons montré le théoreme suivant:

THÉORÈME 0. *Soit* $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots,$ *une suite de variables aléatoires réelles, dont l'enveloppe convexe soit bornée en probabilité. Si les* α_n *sont des nombres réels tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1+\left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)<+\infty$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ *est presque sûrement convergente; la condition sur les* α_n *est la meilleure possible.*

Nous avons alors donné une démonstration de cette propriété s'appuyant sur la théorie des mesures cylindriques; c'est la voie naturelle, le résultat s'interprète d'ailleurs naturellement en disant que l'application $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de l^∞, muni de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, dans l^1, est radonifiante; en outre, les généralisations raisonnables de cette propriété à des espaces de Banach autres que les l^p s'expriment dans le langage des mesures cylindriques. Toutefois nous allons donner ici une démonstration directe du théorème énoncé, par des méthodes probabilistes classiques.

Précisons d'abord l'énoncé. On partira d'un espace de probabilités (Ω, μ); la μ-mesure d'un évènement $A \subset \Omega$ sera sa probabilité.

(*) I risultati contenuti in questo lavoro sono stati esposti nella conferenza tenuta l'11 marzo 1968.

(1) Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, t. 265, série A, 1967, p. 832-834; t. 266, série A, 1968, p. 7-9 et p. 50-52.

On y trouvera des réferences à d'autres travaux récents, de Dudley, Badrikian. Les notes signalées contiennent un indice p, $1 \leq p \leq 2$; nous ne parlerons ici que du cas $p=1$, mais on peut faire de méme pour les autres.

Une variable aléatoire réelle relative à (Ω, μ) sera une μ-classe de fonctions réelles μ-mesurables sur Ω. L'espace de ces variables aléatoires sera noté $L^0(\Omega, \mu)$; il sera muni de la topologie de la convergence en mesure ou en probabilité, qui le rend métrisable complet. Une suite de variables aléatoires X_n converge vers 0 en probabilité, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mu(\{\omega \in \Omega \,;\, |X_n(\omega)| > \varepsilon\})$ tend vers 0 pour n infini.

Une partie B de $L^0(\Omega\,;\mu)$ est bornée, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute $X \in B$, $\mu(\{\omega \in \Omega\,;\,|X(\omega)| > M\}) \leq \varepsilon$. Comme $L^0(\Omega, \mu)$ n'est pas localement convexe, l'enveloppe convexe d'une partie bornée n'est pas nécessairement bornée; c'est pourquoi la précision de l'énoncé donné plus haut sur l'enveloppe convexe de la suite des X_n est importante.

THÉORÈME 1. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur (Ω, μ), indépendantes, suivant toutes la loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Alors :*

1) *L'enveloppe convexe de la suite des X_n est bornée dans $L^0(\Omega, \mu)$;*

2) *La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ converge presque sûrement ou diverge presque sûrement, selon que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)$ converge ou diverge.*

3) *Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = +\infty$, il est presque sûr que la suite des $|\alpha_n X_n|$ n'est pas bornée; si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(|\alpha_n X_n| - \frac{2}{\pi}\,|\alpha_n|\left(1 + \log\frac{1}{|\alpha_n|}\right)\right) \ (^2)$$

est presque sûrement convergente.

(2) L'idée de ce théorème m'est venue d'un contre exemple de Dudley, voir (1).

DÉMONSTRATION.

Démonstration de 1) La loi de Cauchy donnée ci-dessus sera la loi normale de Cauchy, ou de paramètre 1; la loi de paramètre $a > 0$ est définie par la densité $\frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2}$. Pour cette loi, la probabilité pour que la variable soit, en module, $> M$, est

$$\frac{2a}{\pi} \int_{M}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{M}{a}}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{a}{M} \leq \frac{2}{\pi} \frac{a}{M} .$$

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre a est $t \mapsto e^{-a|t|}$; on en déduit que la somme de variables indépendantes, suivant des lois de Cauchy de paramètres $a_0, a_1, \ldots, a_n$, est une loi de Cauchy de paramètre $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Dans l'hypothèse de 1), si donc $c_0, c_1, \ldots, c_n$, sont des nombres réels tels que $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| \leq 1$, $c_0 X_0 + c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$ suit une loi de Cauchy de paramètre $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| \leq 1$, et la probabilité pour qu'elle dépasse M en module est $\leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{M}$; on en déduit aussitôt que l'ensemble de toutes ces variables aléatoires, lorsque n et les c_k, $k \leq n$, varient avec $\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq 1$, est borné en probabilité; donc l'enveloppe convexe de la suite des X_n est bornée en probabilité.

Démonstration de 3). Pour M donné, la probabilité pour que $|\alpha_n X_n| > M$ est $\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{|\alpha_n|}{M}$. Donc, si $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = +\infty$, on aura $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega ; |\alpha_n X_n| > M\}) = +\infty$, et, comme les variables X_n sont supposées indépendantes, le lemme de Borel-Cantelli prouve que, presque sûrement, $|\alpha_n X_n|$ est une infinité de fois $> M$; la suite des $|\alpha_n X_n|$ est presque sûrement non bornée.

Supposons maintenant $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$. Alors presque sûrement $|\alpha_n X_n|$ est ≤ 1 pour n assez grand. Soit Y_n la variable aléatoire définie par: $Y_n(\omega) = |\alpha_n X_n(\omega)|$ si $|\alpha_n X_n(\omega)| \leq 1$, 0 si $|\alpha_n X_n(\omega)| > 1$. Alors presque sûrement $Y_n = |\alpha_n X_n|$ pour n assez grand, mais on a toujours $0 \leq Y_n \leq 1$. Montrons que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (Y_n - E(Y_n))$ est presque sûrement convergente. Comme ses termes sont des variables indépendantes, et de valeur moyenne nulle, un critère classique de Kolmogorov dit qu'il suffit, pour cela, que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(Y_n^2)$ converge. Or $E(Y_n^2) = \frac{2}{\pi} |\alpha_n|^2 \int\limits_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} \frac{x^2\,dx}{1+x^2} \leq \frac{2}{\pi} |\alpha_n|$.

Puisque $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, cette série est bien convergente, ce qui prouve notre affirmation. Maintenant, pour n grand :

$$E(Y_n) = \frac{2}{\pi} |\alpha_n| \int\limits_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} |\alpha_n| \left(\log \frac{1}{|\alpha_n|} + 0(1)\right).$$

Donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(E(Y_n) - \frac{2}{\pi} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)\right)$ converge (absolument), donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(Y_n - \frac{2}{\pi} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)\right)$ converge presque sûrement; comme presque sûrement $Y_n = |\alpha_n X_n|$ pour n assez grand, on en déduit bien la conclusion de 3).

Démonstration de 2). C'est évident; ou bien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = +\infty$, alors presque sûrement la suite $|\alpha_n X_n|$ n'est pas bornée, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ diverge; ou bien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(|\alpha_n X_n| - \frac{2}{\pi} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)\right)$$

converge presque sûrement, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ converge ou diverge presque sûrement suivant que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1 + \left|\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)$ converge ou diverge. CQFD.

COROLLAIRE *Dans l'énoncé du théorème* 0, *la condition sur les* α_n *est la meilleure possible.*

En effet, si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) = +\infty$, la suite des X_n de l'énoncé du théorème 1 fournit un contre-exemple.

Il reste donc à monter la partie directe du théorème 0 :

THÉORÈME 2. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur (Ω, μ), d'enveloppe convexe bornée en probabilité. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, tels que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty.$$

Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ est presque sûrement convergente.

DÉMONSTRATION.

D'après l'hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que, quel que soit n et quelle que soit la suite finie $(c_k)_{k \leq n}$, avec $\sum\limits_{k=0}^{n} |c_k| \leq 1$, on ait $\mu\left(\left\{\omega \in \Omega ; \left|\sum\limits_{k=0}^{n} c_k X_k(\omega)\right| > M\right\}\right) \leq \varepsilon$. Par homothétie, quelle soit la suite $(c_k)_{k \leq n}$, on aura

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega ; \left|\sum_{n=0}^{n} c_k X_k(\omega)\right| > M \sum_{k=0}^{n} |c_k|\right\}\right) \leq \varepsilon.$$

Introduisons un deuxième espace de probabilités (Ω', μ') (3), et une suite Z_n de variables aléatoires sur (Ω', μ'), indépendantes et suivant la loi de Cauchy normale. Pour tout $\omega' \in \Omega'$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega ; \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k Z_k(\omega') X_k(\omega)\right| > M \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \, |Z_k(\omega')|\right\}\right) \leq \varepsilon.$$

Mais la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)$ est supposée convergente ; donc, d'après le théorème 1, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n Z_n|$ est μ'-presque sûrement convergente. Donc il existe un ensemble $\bar{\Omega}' \subset \Omega'$, de μ'-mesure

(3) Cette idée est fréquemment utilisée en probabilités. En prenant un autre cas étudié par Kolmogorov, S. Kwapien m'a indiqué un résultat apparenté au théorème 2 (voir note aux Comptes Rendus de Kwapien, à paraitre prochainement).

$\geq 1 - \varepsilon$, et une constante $C \geq 0$ telle que,

$$\text{pour} \quad \omega' \in \bar{\Omega}', \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k Z_k(\omega')| \leq C.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\omega' \in \bar{\Omega}'$:

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \,;\, \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Z_k(\omega') X_k(\omega) \right| > CM \right\}\right) \leq \varepsilon.$$

Alors, par Fubini, pour n fixé, l'ensemble des $(\omega, \omega') \in \Omega \times \bar{\Omega}'$ pour lesquels $\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z_k(\omega') X_k(\omega) \right| > CM$ a une $(\mu \otimes \mu')$-mesure $\leq \varepsilon$; l'ensemble des $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$ ayant la même propriété a donc une $(\mu \otimes \mu')$-mesure $\leq \varepsilon + \mu'(\complement \bar{\Omega}') \leq 2\varepsilon$. Par Fubini de nouveau, il existe un ensemble $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$, de μ-mesure $\geq 1 - \sqrt{2\varepsilon}$, tel que, pour $\omega \in \bar{\Omega}_n$:

$$\mu'\left(\left\{\omega' \in \Omega' \,;\, \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Z_k(\omega') X_k(\omega) \right| > CM \right\}\right) \leq \sqrt{2\varepsilon}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \bar{\Omega}_n$. La dernière inégalité est maintenant relative à une variable aléatoire sur (Ω', μ'), $\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k X_k(\omega)) Z_k$, somme de variables indépendantes suivant des lois de Cauchy. Elle suit elle-même une loi de Cauchy, de paramètre $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k X_k(\omega)|$; donc la μ'-probabilité pour que son module soit $> CM$ est exactement

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k X_k(\omega)|}{CM}.$$

Elle est $\leq \sqrt{2\varepsilon}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k X_k(\omega)| \leq CM \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2\varepsilon}\right), \quad \text{pour} \quad \omega \in \bar{\Omega}_n.$$

Ou encore, pour tout n :

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \,;\, \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k X_k(\omega)| \leq CM \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2\varepsilon}\right)\right\}\right) \geq \mu(\bar{\Omega}_n) \geq 1 - \sqrt{2\varepsilon}.$$

En prenant les intersections pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \,;\, \sum_{k=0}^{\infty} |\, \alpha_k\, X_k(\omega)\,| < +\infty\right)\right\}$$

$$\geq \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \,;\, \sum_{k=0}^{\infty} |\, \alpha_k\, X_k(\omega)\,| \leq CM \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2\varepsilon}\right)\right\}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \,;\, \sum_{k=0}^{n} |\, \alpha_k\, X_k(\omega)\,| \leq CM \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2\varepsilon}\right)\right\}\right) \geq 1 - \sqrt{2\varepsilon}\,;$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\, \alpha_k\, X_k(\omega)\,|$ est μ-presque sûrement convergente, cqfd.

Testo pervenuto il 2 settembre 1968.
Bozze licenziate il 15 novembre 1968.