Laurent Schwartz

Applications des désintégrations régulières

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 266 (1968), p. A467-A469.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 467-469 (19 février 1968). Série A

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Applications des désintégrations régulières.* Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

Cette Note fait suite à une Note antérieure, dont elle utilise les notations, et la numérotation pour les théorèmes et paragraphes.

3. TEMPS D'ARRÊT ET DÉSINTÉGRATION RÉGULIÈRE. — Soit T un temps d'arrêt relatif aux tribus $\mathfrak{T}^t$; c'est une variable aléatoire réelle $\omega \mapsto \mathrm{T}(\omega)$, telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega;\ \mathrm{T}(\omega) \leq t\}$ appartienne à $\mathfrak{T}^t$. Il définit une tribu $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}$, comme suit : $\mathrm{A} \subset \Omega$ appartient à $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}$, si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\mathrm{A} \cap \{\omega \in \Omega;\ \mathrm{T}(\omega) \leq t\}$ appartient à $\mathfrak{T}^t$. Alors :

THÉORÈME 2. — *Si* T *est un temps d'arrêt, si la restriction* $\lambda^{\mathfrak{T}}$ *de* λ *à* $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}$ *est* σ*-finie, et si* $(\lambda^t_\omega)_{t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega}$ *est une désintégration* $(\Omega^\bullet, p)$*-régulière de* λ *pour les* $\mathfrak{T}^t$, *alors* $\omega \mapsto \lambda^{\mathrm{T}(\omega)}_\omega$ *est une désintégration de* λ *sur la tribu* $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}$.

Remarque. — C'est essentiellement pour obtenir ce théorème que les désintégrations régulières ont été introduites. Si, pour chaque $t \in \mathbf{R}$, on choisit une désintégration $\omega \mapsto \lambda^t_\omega$, sans aucune relation entre les choix pour les différents t, il n'y a aucun espoir que la propriété du théorème 2 soit réalisée. En effet, assez généralement, l'ensemble $\{\omega \in \Omega;\ \mathrm{T}(\omega) = t\}$ sera λ-négligeable, pour tout t; comme il appartient à la tribu $\mathfrak{T}^t$, on pourra remplacer λ^t_ω par zéro pour les ω de cet ensemble, sans que $\omega \mapsto \lambda^t_\omega$ cesse d'être une désintégration pour $\mathfrak{T}^t$; alors la fonction $\omega \mapsto \lambda^{\mathrm{T}(\omega)}_\omega$ deviendra identiquement nulle, et ne sera pas une désintégration de λ sur la tribu $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}$. D'un autre côté, la définition 1 n'est pas la seule qui permette d'aboutir au résultat du théorème 2 (d'ailleurs $\Omega^\bullet$ et p n'interviennent pas dans la propriété énoncée !); elle a simplement le mérite d'y aboutir et de posséder le théorème d'existence 1. On pourrait être tenté de définir les désintégrations régulières comme celles qui vérifient la propriété du théorème 2 pour tout temps d'arrêt T; mais il y a bien d'autres propriétés utiles, comme le théorème 4, que cela n'entraînerait pas.

4. TRIBUS STANDARDS ET TRANSITIVITÉ DES DÉSINTÉGRATIONS. — Soient Ω, $\mathcal{O}$, λ, comme précédemment. Soit $\mathfrak{T}$ une sous-tribu de la tribu λ-mesurable, telle que $\lambda^{\mathfrak{T}}$ soit σ-finie.

Appelons $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{T}, \lambda)$ l'ensemble des tribus sur Ω, contenant $\mathfrak{T}$, et contenues dans la tribu λ-mesurable. Appelons Σ_0 le plus petit sous-ensemble de Σ doué des propriétés suivantes :

1° Si $\mathfrak{S} \in \Sigma$, et s'il existe un ensemble Ω', portant λ, tel que la tribu induite par $\mathfrak{S}$ sur Ω' soit dénombrablement engendrée, alors $\mathfrak{S} \in \Sigma_0$;

2° Soient $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, deux tribus appartenant à Σ. S'il existe un Ω', portant λ, tel que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ induisent la même tribu sur Ω', et si $\mathfrak{S} \in \Sigma_0$, alors $\mathfrak{S}' \in \Sigma_0$;

3° Si $(\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante de tribus de Σ_0, la tribu engendrée par leur réunion est dans Σ_0;

4° Si $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de tribus de Σ_0, leur intersection est dans Σ_0.

Définition 2. — *Une tribu de Σ_0 est dite $(\mathcal{T}, \lambda)$-standard. Elle est* a fortiori *$(\mathcal{T}', \lambda)$-standard, si $\mathcal{T}'$ est une sous-tribu arbitraire de $\mathcal{T}$, telle que $\lambda^{\mathcal{T}'}$ soit σ-finie. On dira que $\mathcal{T}$ est λ-self-standard si elle est $(\mathcal{T}, \lambda)$-standard.*

Toutes les tribus ne sont pas standards; si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, sa tribu mesurable n'est standard par rapport a aucune sous-tribu.

Néanmoins la tribu borélienne d'un espace lusinien est standard pour toute mesure et toute sous-tribu, et, par les opérations 2°, 3°, 4°, on en déduit bien d'autres tribus standards. Par exemple, supposons que Ω soit l'ensemble des trajectoires ω d'un processus, réglées et continues à droite, $\omega : \mathbf{R} \to X$, X polonais. Pour différentes topologies connues sur Ω, il est lusinien. Soit $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne. Si $\mathcal{O}^t$ est la sous-tribu du passé, formée des parties de $\mathcal{O}$ qui sont saturées pour la relation d'équivalence « $\omega \sim \omega'$ si les trajectoires ω et ω' coïncident jusqu'à l'instant t », alors $\mathcal{O}^t$ est dénombrablement engendrée, donc λ-self-standard pour toute mesure λ sur Ω; si $\mathcal{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{O}^{t'}$, la famille des tribus $\mathcal{T}^t$ est continue à droite, ce qui permet de lui appliquer le théorème 2, et $\mathcal{T}^t$ est encore λ-self-standard pour toute mesure λ sur Ω. On peut donc appliquer ce qui suit aux tribus considérées dans les processus en probabilité.

Alors :

THÉORÈME 3. — *Soient Ω, $\mathcal{O}$, λ, comme ci-dessus; soient $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$, deux sous-tribus de la tribu λ-mesurable, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, la restriction de λ à $\mathcal{T}$ étant σ-finie. Soient $\omega \mapsto \lambda^{\mathcal{T}}_{\omega}$, $\omega' \mapsto \lambda^{\mathcal{S}}_{\omega'}$, des désintégrations de λ sur $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ respectivement. Si $\mathcal{S}$ est $(\mathcal{T}, \lambda)$-standard, alors, pour λ-presque tout $\omega \in \Omega$, $\omega' \mapsto \lambda^{\mathcal{S}}_{\omega'}$, est aussi une désintégration de $\lambda^{\mathcal{T}}_{\omega}$ sur la tribu $\mathcal{S}$.*

Remarque. — Il n'est nullement nécessaire que $\mathcal{S}$ soit $(\mathcal{T}, \lambda)$-standard pour que cette propriété soit vérifiée. En fait, je ne connais pas un seul cas où elle ne l'est pas; mais je ne sais pas la démontrer sans faire d'hypothèses sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$.

5. DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES ET TRANSITIVITÉ.

THÉORÈME 4. — *Soient Ω, $\mathcal{O}$, λ, $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$ comme au paragraphe 2. On suppose les $\mathcal{T}^t$ λ-self-standards. Soit $(\lambda^t_{\omega'})_{t\in\mathbf{R}, \omega'\in\Omega}$ une désintégration $(\Omega^{\bullet}, p)$-régulière de λ pour les $\mathcal{T}^t$. Alors :*

1° *Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de toutes les $\mathcal{T}^t$, telle que la restriction $\lambda^{\mathcal{T}}$ soit σ-finie, et soit $\omega \mapsto \lambda^{\mathcal{T}}_{\omega}$ une désintégration de λ sur la tribu $\mathcal{T}$. Alors, pour λ-presque tout ω, $(\lambda^t_{\omega'})_{t\in\mathbf{R}, \omega'\in\Omega}$ est aussi une désintégration $(\Omega^{\bullet}, p)$-régulière de $\lambda^{\mathcal{T}}_{\omega}$ sur les $\mathcal{T}^t$;*

2° *Soit T un temps d'arrêt, tel que la restriction λ^{T} de λ à $\mathcal{T}^{\mathrm{T}}$ soit σ-finie. Alors $\mathcal{T}^{\mathrm{T}}$ est λ-self-standard. Pour λ-presque tout $\omega \in \Omega$, $(\lambda^t_{\omega'})_{t \geq \mathrm{T}(\omega), \omega'\in\Omega}$ est une désintégration régulière de la mesure $\lambda^{\mathrm{T}(\omega)}_{\omega}$, pour les tribus $\mathcal{T}^t$, $t \geq \mathrm{T}(\omega)$.*

3° *Soit* T *un temps d'arrêt, tel que* λ^T *soit* σ*-finie. Pour* λ*-presque tout* $\omega \in \Omega$, *on a la propriété suivante : pour tout temps d'arrêt* $S \geqq T$, *la mesure* $\lambda_\omega^{T(\omega)}$ *admet* $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{S(\omega')}$ *comme désintégration sur la tribu* $\mathcal{E}^S$.

On remarquera la force du résultat 3°, tenant à la place des quantificateurs : pour tout T, pour λ-presque tout ω, pour tout $S \geqq T$.

6. Surmartingales.

Définition 3 (Rappel). — *Soient* Ω, $\mathcal{O}$, $(\mathcal{E}^t)_{t \in \mathbf{R}}$, λ, *comme au paragraphe* 2. *Soit* $(f^t)_{t\in \mathbf{R}}$ *une famille de fonctions réelles sur* Ω. *On dit que c'est une surmartingale relativement à* λ *et aux* $\mathcal{E}^t$, *si, pour tout* $t \in \mathbf{R}$, f^t *est* $\mathcal{E}^t$*-mesurable et* λ*-intégrable, et si, pour tous* t, s, $t \leqq s$, *l'espérance conditionnelle de* f^s *sur* $\mathcal{E}^t$ *est* λ*-presque partout* $\leqq f^t$.

En termes de désintégrations, la dernière inégalité s'écrit : pour tous t, s, $t \leqq s$, on a, pour λ-presque tout $\omega \in \Omega$, $\lambda_\omega^t(f^s) \leqq f^t(\omega)$. La surmartingale est dite presque sûrement continue à droite, si, pour λ-presque tout ω, la fonction $f \mapsto f^t(\omega)$ est continue à droite sur $\mathbf{R}$. Alors :

Théorème 5. — *Plaçons-nous dans les conditions du paragraphe* 2, *les* $\mathcal{E}^t$ *étant supposées* λ*-self-standards. Soit* $(f^t)_{t\in\mathbf{R}}$ *une surmartingale relative aux* $\mathcal{E}^t$ *et à* λ, *presque sûrement continue à droite.*

1° *Soit* $\mathcal{E}$ *une sous-tribu de toutes les* $\mathcal{E}^t$, *telle que* $\lambda^{\mathcal{E}}$ *soit* σ*-finie. Pour* λ*-presque tout* $\omega \in \Omega$, $(f^t)_{t\in\mathbf{R}}$ *est une surmartingale, presque sûrement continue à droite, relativement aux* $\mathcal{E}^t$ *et à la mesure* $\lambda_\omega^{\mathcal{E}}$;

2° *Soit* T *un temps d'arrêt, tel que* λ^T *soit* σ*-finie. Pour* λ*-presque tout* $\omega \in \Omega$, $(f^t)_{t \geqq T(\omega)}$ *est une surmartingale presque sûrement continue à droite, pour la mesure* $\lambda_\omega^{T(\omega)}$ *et les tribus* $\mathcal{E}^t$, $t \geqq T(\omega)$.

Nous publierons ultérieurement des résultats analogues sur les processus markoviens.

(*) Séance du 15 janvier 1968.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris,* 5e.)