

# ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

**Désintégration régulière d'une mesure par rapport  
à une famille de tribus**

*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 266 (1968), p. A424-A425.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*  
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DES PROBABILITÉS. — Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus. Note (\*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

### 1. DÉSINTÉGRATIONS.

DÉFINITION 0. — Soient  $\Omega$  un ensemble,  $\mathcal{O}$  une tribu de parties de  $\Omega$ ,  $\lambda$  une mesure positive sur  $(\Omega, \mathcal{O})$ ,  $\sigma$ -finie <sup>(1)</sup>. Soit  $\mathfrak{T}$  une sous-tribu de la tribu  $\lambda$ -mesurable, telle que la restriction de  $\lambda$  à  $\mathfrak{T}$  soit  $\sigma$ -finie. On appelle désintégration de  $\lambda$  sur  $\mathfrak{T}$  une famille  $(\lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}})_{\omega \in \Omega}$ , indexée par  $\Omega$ , de mesures  $\geq 0$  sur  $(\Omega, \mathcal{O})$  [ou encore une application  $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}$  de  $\Omega$  dans l'espace des mesures  $\geq 0$  sur  $(\Omega, \mathcal{O})$ ] ayant les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout  $B \in \mathcal{O}$ , la fonction  $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}(B)$  est  $\mathfrak{T}$ -mesurable.  
 (2) Pour tout  $B \in \mathcal{O}$  et tout  $A \in \mathfrak{T}$ , on a

$$(1) \quad \lambda(A \cap B) = \int_A \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}(B) d\lambda(\omega).$$

De cela on déduit que, si  $f$  est une fonction  $\geq 0$   $\lambda$ -mesurable,  $g$  une fonction  $\geq 0$   $\lambda^{\mathfrak{T}}$ -mesurable (où  $\lambda^{\mathfrak{T}}$  est la restriction de  $\lambda$  à  $\mathfrak{T}$ ), alors on a

$$(2) \quad \lambda(fg) = \int_{\Omega} g(\omega) \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}(f) d\lambda(\omega).$$

Rappelons d'abord un théorème connu :

THÉORÈME 0 [Jirina <sup>(2)</sup>]. — Si  $\Omega$  est un espace topologique,  $\mathcal{O}$  sa tribu borélienne, et si  $\lambda$  est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, elle admet une désintégration sur toute sous-tribu  $\mathfrak{T}$  de la tribu  $\lambda$ -mesurable telle que  $\lambda^{\mathfrak{T}}$  soit  $\sigma$ -finie. Pour  $\lambda$ -presque tout  $\omega$  de  $\Omega$ ,  $\lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}$  est une mesure de Radon sur  $\Omega$ , de masse 1. Si  $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}$  et  $\omega \mapsto \lambda'_{\omega}^{\mathfrak{T}}$  sont deux telles désintégrations, elles sont  $\lambda$ -presque partout égales.

La désintégration des mesures permet d'obtenir automatiquement toutes les espérances conditionnelles. Si  $(\lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}})_{\omega \in \Omega}$  est une désintégration de  $\lambda$  sur  $\mathfrak{T}$ , et si  $f$  est une fonction (à valeurs scalaires ou dans un Banach),  $\lambda$ -intégrable, alors  $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}(f)$  est p. s. une espérance conditionnelle de  $f$  pour la tribu  $\mathfrak{T}$  et la mesure  $\lambda$ . Inversement, on peut considérer  $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{\mathfrak{T}}$  comme une espérance conditionnelle relative à  $\mathfrak{T}$  et à  $\lambda$  de la fonction à valeurs mesures  $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$ , où  $\delta_{(\omega)}$  = masse 1 au point  $\omega$ .

2. DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES. — A partir de maintenant,  $\Omega, \mathcal{O}, \lambda$  sont supposées vérifier les conditions du théorème 1. Ensuite  $(\mathfrak{T}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  sera une famille de sous-tribus de la tribu  $\lambda$ -mesurable; on la supposera croissante ( $\mathfrak{T}^t \subset \mathfrak{T}^{t'}$  pour  $t \leq t'$ ), et continue à droite ( $\mathfrak{T}^t = \bigcap_{t' > t} \mathfrak{T}^{t'}$ ) et l'on supposera que la restriction  $\lambda^t$  de  $\lambda$  à toute sous-tribu  $\mathfrak{T}^t$  est  $\sigma$ -finie.

Soit  $\Omega'$  un sous-ensemble de  $\Omega$ , portant  $\lambda$ , et muni d'une topologie localement compacte polonaise rendant l'injection  $\Omega' \rightarrow \Omega$  borélienne.

Soit  $p$  une fonction sur  $\Omega$ ,  $\lambda$ -intégrable, partout  $> 0$  et continue. On voit aisément que de tels systèmes  $\Omega, p$ , existent; en outre, si  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de fonctions sur  $\Omega$ ,  $\lambda$ -intégrables, on peut choisir  $\Omega, p$ , de telle sorte que toutes les fonctions  $f_n/p$ , sur  $\Omega$ , soient continues et nulles à l'infini <sup>(3)</sup>. On appellera  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega, p)$  l'espace de Banach des fonctions  $\varphi$  sur  $\Omega$ , continues, telles que  $\varphi/p$  soit nulle à l'infini, muni de la norme  $\|\varphi\| = \text{Max}_{x \in \Omega} (|\varphi(x)|/p(x))$ , et  $\mathcal{A}'$  son dual, muni de la topologie faible  $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ ; un élément de  $\mathcal{A}'$  est une mesure de Radon sur  $\Omega$ , par rapport à laquelle  $p$  est intégrable.

Soit enfin  $\Delta$  l'ensemble des réels dyadiques,  $m/2^n$  ( $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$ ), et  $\Delta_n$  l'ensemble des dyadiques multiples de  $1/2^n$ ,  $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Delta_n$ . Pour tout réel  $t$ , on appellera  $t_n$  le plus petit élément de  $\Delta_n$  qui soit  $\geq t$ , de sorte que  $t_n$  tend vers  $t$  pour  $n$  infini, et que  $t_n = t$  si  $t \in \Delta_n$  <sup>(4)</sup>. Alors :

DÉFINITION 1. — On appelle désintégration  $(\Omega, p)$ -régulière de  $\lambda$  pour la famille de tribus  $(\mathcal{G}^t)_{t \in \mathbf{R}}$ , une famille  $(\lambda'_\omega)_{t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega}$  de mesures  $\geq 0$  sur  $\Omega$  ayant les propriétés suivantes :

(1) Toutes les mesures  $\lambda'_\omega$  sont portées par  $\Omega$ , et leurs restrictions à  $\Omega'$  appartiennent à  $\mathcal{A}'$ ;

(2) Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\omega \mapsto \lambda'_\omega$  est une désintégration de  $\lambda$  sur la tribu  $\mathcal{G}^t$ ;

(3) Pour  $\lambda$ -presque tout  $\omega$ , la fonction  $t \mapsto \lambda'_\omega$ , sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}'$ , est réglée et continue à droite;

(4) Pour tout  $t \in \mathbf{R}$  et tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\lambda'_\omega$  est la limite dans  $\mathcal{A}'$  de  $\lambda'_\omega$  pour  $n$  infini, si cette limite existe, et 0 si cette limite n'existe pas.

Alors :

THÉORÈME 1. — Pour  $\Omega$  et  $p$  donnés, il existe des désintégrations  $(\Omega, p)$ -régulières de  $\lambda$ ; si, pour tout  $t$  dyadique, on a choisi une désintégration quelconque  $\omega \mapsto \lambda'_\omega$  de  $\lambda$  sur  $\mathcal{G}^t$ , telle que toutes les  $\lambda'_\omega$  soient portées par  $\Omega'$  et appartiennent à  $\mathcal{A}'$ , alors il existe une désintégration  $(\Omega, p)$ -régulière unique, coïncidant pour tout  $t$  dyadique avec la désintégration donnée.

Remarque. — Pour  $\Omega'$  donné, si l'on a deux désintégrations régulières correspondant à deux fonctions  $p, p'$ , alors pour  $\lambda$ -presque toutes les valeurs de  $\omega \in \Omega$ , elles sont égales pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Il n'en est pas de même pour deux désintégrations régulières correspondant à deux espaces  $\Omega'$  distincts.

La démonstration du théorème 1 utilise les propriétés classiques des martingales. Nous en donnerons des applications dans une Note ultérieure.

(\*) Séance du 15 janvier 1968.

(1) En calcul des probabilités,  $\lambda$  a la masse 1. Mais on peut la supposer seulement  $\sigma$ -finie, et la plupart des résultats usuels des surmartingales et des Markov subsistent; en tout cas, ici, c'est la seule hypothèse requise.

(2) M. JIRINA, *Czech. Mat. J.*, 9, n° 3, 1959, p. 445.

(3) J'avais initialement pris  $p \equiv 1$ , c'est M. Mokobodzki qui m'a suggéré d'introduire un poids  $p$  quelconque.

(4) On peut aisément remplacer l'ensemble  $\Delta$  par n'importe quel ensemble dénombrable dense dans  $\mathbf{R}$ .