Laurent Schwartz

Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 266 (1968), p. A424-A425.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 424-425 (12 février 1968). Série A

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus.* Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

1. Désintégrations.

Définition 0. — *Soient Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu de parties de Ω, λ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{O})$, σ-finie* [1]. *Soit $\mathfrak{T}$ une sous-tribu de la tribu λ-mesurable, telle que la restriction de λ à $\mathfrak{T}$ soit σ-finie. On appelle désintégration de λ sur $\mathfrak{T}$ une famille $(\lambda_\omega^{\mathfrak{T}})_{\omega\in\Omega}$, indexée par Ω, de mesures $\geqq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{O})$ [ou encore une application $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}$ de Ω dans l'espace des mesures $\geqq 0$ sur $(\Omega, \mathcal{O})$] ayant les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout $B \in \mathcal{O}$, la fonction $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}(B)$ est $\mathfrak{T}$-mesurable.*

(2) *Pour tout $B \in \mathcal{O}$ et tout $A \in \mathfrak{T}$, on a*

$$\lambda(A\cap B) = \int_A \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}(B)\, d\lambda(\omega). \tag{1}$$

De cela on déduit que, si f est une fonction $\geqq 0$ λ-mesurable, g une fonction $\geqq 0$ $\lambda^{\mathfrak{T}}$-mesurable (où $\lambda^{\mathfrak{T}}$ est la restriction de λ à $\mathfrak{T}$), alors on a

$$\lambda(fg) = \int_\Omega g(\omega)\, \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}(f)\, d\lambda(\omega). \tag{2}$$

Rappelons d'abord un théorème connu :

Théorème 0 [Jirina [2]]. — *Si Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, et si λ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, elle admet une désintégration sur toute sous-tribu $\mathfrak{T}$ de la tribu λ-mesurable telle que $\lambda^{\mathfrak{T}}$ soit σ-finie. Pour λ-presque tout ω de Ω, $\lambda_\omega^{\mathfrak{T}}$ est une mesure de Radon sur Ω, de masse 1. Si $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}$ et $\omega \mapsto \lambda_\omega'^{\mathfrak{T}}$ sont deux telles désintégrations, elles sont λ-presque partout égales.*

La désintégration des mesures permet d'obtenir automatiquement toutes les espérances conditionnelles. Si $(\lambda_\omega^{\mathfrak{T}})_{\omega\in\Omega}$ est une désintégration de λ sur $\mathfrak{T}$, et si f est une fonction (à valeurs scalaires ou dans un Banach), λ-intégrable, alors $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}(f)$ est p. s. une espérance conditionnelle de f pour la tribu $\mathfrak{T}$ et la mesure λ. Inversement, on peut considérer $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathfrak{T}}$ comme une espérance conditionnelle relative à $\mathfrak{T}$ et à λ de la fonction à valeurs mesures $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$, où $\delta_{(\omega)} =$ masse $+1$ au point ω.

2. Désintégrations régulières. — *A partir de maintenant, Ω, $\mathcal{O}$, λ sont supposées vérifier les conditions du théorème 1. Ensuite $(\mathfrak{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$ sera une famille de sous-tribus de la tribu λ-mesurable; on la supposera croissante ($\mathfrak{T}^t \subset \mathfrak{T}^{t'}$ pour $t \leqq t'$), et continue à droite $\left(\mathfrak{T}^t = \bigcap_{t'>t} \mathfrak{T}^{t'}\right)$ et l'on supposera que la restriction λ^t de λ à toute sous-tribu $\mathfrak{T}^t$ est σ-finie.*

Soit $\Omega^\cdot$ un sous-ensemble de Ω, portant λ, et muni d'une topologie localement compacte polonaise rendant l'injection $\Omega^\cdot \to \Omega$ borélienne.

Soit p une fonction sur $\Omega^\cdot$, λ-intégrable, partout > 0 et continue. On voit aisément que de tels systèmes $\Omega^\cdot$, p, existent; en outre, si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions sur Ω, λ-intégrables, on peut choisir $\Omega^\cdot$, p, de telle sorte que toutes les fonctions f_n/p, sur $\Omega^\cdot$, soient continues et nulles à l'infini [3]. On appellera $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega^\cdot, p)$ l'espace de Banach des fonctions φ sur $\Omega^\cdot$, continues, telles que φ/p soit nulle à l'infini, muni de la norme $\|\varphi\| = \operatorname*{Max}_{x\in\Omega^\cdot} (|\varphi(x)|/p(x))$, et $\mathcal{C}'$ son dual, muni de la topologie faible $\sigma(\mathcal{C}', \mathcal{C})$; un élément de $\mathcal{C}'$ est une mesure de Radon sur $\Omega^\cdot$, par rapport à laquelle p est intégrable.

Soit enfin Δ l'ensemble des réels dyadiques, $m/2^n$ $(m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N})$, et Δ_n l'ensemble des dyadiques multiples de $1/2^n$, $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Delta_n$. Pour tout réel t, on appellera t_n le plus petit élément de Δ_n qui soit $\geqq t$, de sorte que t_n tend vers t pour n infini, et que $t_n = t$ si $t\in\Delta_n$ [4]. Alors :

Définition 1. — *On appelle désintégration* $(\Omega^\cdot, p)$*-régulière de* λ *pour la famille de tribus* $(\mathcal{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$, *une famille* $(\lambda^t_\omega)_{t\in\mathbf{R},\,\omega\in\Omega}$ *de mesures* $\geqq 0$ *sur* Ω *ayant les propriétés suivantes :*

(1) *Toutes les mesures* λ^t_ω *sont portées par* $\Omega^\cdot$, *et leurs restrictions à* $\Omega^\cdot$ *appartiennent à* $\mathcal{C}'$;

(2) *Pour tout* $t\in\mathbf{R}$, $\omega\mapsto\lambda^t_\omega$ *est une désintégration de* λ *sur la tribu* $\mathcal{T}^t$;

(3) *Pour* λ*-presque tout* ω, *la fonction* $t\mapsto\lambda^t_\omega$, *sur* $\mathbf{R}$ *à valeurs dans* $\mathcal{C}'$, *est réglée et continue à droite;*

(4) *Pour tout* $t\in\mathbf{R}$ *et tout* $\omega\in\Omega$, λ^t_ω *est la limite dans* $\mathcal{C}'$ *de* $\lambda^{t_n}_\omega$ *pour* n *infini, si cette limite existe, et* 0 *si cette limite n'existe pas.*

Alors :

Théorème 1. — *Pour* $\Omega^\cdot$ *et* p *donnés, il existe des désintégrations* $(\Omega^\cdot, p)$*-régulières de* λ; *si, pour tout* t *dyadique, on a choisi une désintégration quelconque* $\omega\mapsto\lambda^t_\omega$ *de* λ *sur* $\mathcal{T}^t$, *telle que toutes les* λ^t_ω *soient portées par* $\Omega^\cdot$ *et appartiennent à* $\mathcal{C}'$, *alors il existe une désintégration* $(\Omega^\cdot, p)$*-régulière unique, coïncidant pour tout* t *dyadique avec la désintégration donnée.*

Remarque. — Pour $\Omega^\cdot$ donné, si l'on a deux désintégrations régulières correspondant à deux fonctions p, p', alors pour λ-presque toutes les valeurs de $\omega\in\Omega$, elles sont égales pour tout $t\in\mathbf{R}$. Il n'en est pas de même pour deux désintégrations régulières correspondant à deux espaces $\Omega^\cdot$ distincts.

La démonstration du théorème 1 utilise les propriétés classiques des martingales. Nous en donnerons des applications dans une Note ultérieure.

(*) Séance du 15 janvier 1968.

(1) En calcul des probabilités, λ a la masse 1. Mais on peut la supposer seulement σ-finie, et la plupart des résultats usuels des surmartingales et des Markov subsistent; en tout cas, ici, c'est la seule hypothèse requise.

(2) M. Jirina, *Czech. Mat. J.*, 9, n° 3, 1959, p. 445.

(3) J'avais initialement pris $p\equiv 1$, c'est M. Mokobodzki qui m'a suggéré d'introduire un poids p quelconque.

(4) On peut aisément remplacer l'ensemble Δ par n'importe quel ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{R}$.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris*, 5e.)