Laurent Schwartz

Démonstration de deux lemmes sur les probabilités cylindriques

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 266 (1968), p. A50-A52.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 50-52 (8 janvier 1968). **Série A**

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Démonstration de deux lemmes sur les probabilités cylindriques.* Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

Nous démontrons ici deux lemmes utilisés dans deux notes antérieures, dont nous conservons les notations.

Lemme 1. — *Soit* $1 \leq p < 2$. *Soit* μ *une probabilité sur* $\mathbf{R}^m$, *scalairement concentrée à* η *près sur la* $l^{p'}$*-boule unité* $B_1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^m;\ \sum_{n=1}^{m} |x_n|^{p'} \leq 1 \right\}$. *Alors* μ *est concentrée à* ε *près sur la* l^p*-boule* $B_2 = \left\{ x \in \mathbf{R}^m;\ \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n x_n|^p \leq 1 \right\}$, *avec* $U = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^p [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|]$, $\varepsilon = C\left(\eta + (U/\eta^p)[1 + \log(1/\eta)]\right)$, C, *constante universelle.*

Démonstration. — Utilisons la fonction $\theta = \theta_p$, image de Fourier de $e^{-|t|^p}$. D'après Parseval, si $\varphi = \mathcal{F}\mu$, on a

$$\text{(1)} \qquad I = \int_{\mathbf{R}^m} \left(1 - \exp\left(-\sum_{n=1}^{m} |\alpha_n x_n|^p \right) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_{\mathbf{R}^m} (1 - \varphi(\xi))\, \theta\left(\frac{\xi_1}{|\alpha_1|} \right) \cdots \theta\left(\frac{\xi_m}{|\alpha_m|} \right) \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_m}{|\alpha_1 \ldots \alpha_m|}.$$

Le premier membre est minoré par $\int_{\complement B_2}$, donc $(1 - e^{-1})\, \mu\left(\complement B_2 \right)$.

Majorons le deuxième membre. Nous prendrons

$$\text{(2)} \qquad |1 - \varphi(\xi)| \leq 2 \quad \text{pour} \quad \operatorname*{Max}_{1 \leq n \leq m} |\xi_n| > \eta;$$

$$\text{(3)} \qquad |1 - \varphi(\xi)| \leq \text{Cte}\,(\eta + N(\xi)) \quad \text{pour} \quad \operatorname*{Max}_{1 \leq n \leq m} (|\xi_n|) \leq \eta, \qquad N(\xi) = \left(\sum_{n=1}^{m} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

la dernière majoration résultant de calculs classiques, utilisant le fait que μ est scalairement concentrée à η près sur B_1 [1]. On la remplacera par

$$\text{(3')} \qquad |1 - \varphi(\xi)| \leq \text{Cte}\left(\eta + \left(\frac{N(\xi)}{\eta} \right)^p \right).$$

Le terme venant de (2) donne une majoration du type

$$\text{(4)} \qquad \int_{\operatorname*{Max}_m |\xi_n| > \eta} \prod_{n=1}^{m} \left(\theta\left(\frac{\xi_n}{|\alpha_n|} \right) \frac{d\xi_n}{|\alpha_n|} \right) \leq \sum_{n=1}^{m} \int_{|\xi_n| > \eta} \theta\left(\frac{\xi_n}{|\alpha_n|} \right) \frac{d\xi_n}{|\alpha_n|}$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \int_{|t| > \frac{\eta}{|\alpha_n|}} \theta(t)\, dt \leq \text{Cte}\, \frac{1}{\eta^p} \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^p.$$

en vertu de la propriété $\theta(t) \leq B/t^{p+1}$, Dans (3′), on a d'abord un terme en η. Le terme en $1/\eta^p$ se majore par

$$(5)\qquad \frac{1}{\eta^p}\int_{\operatorname{Max}_k |\xi_k|\leq\eta}\left(\sum_{n=1}^{m}|\xi_n|^p\right)\prod_{k=1}^{m}\left(\theta\left(\frac{\xi_k}{|\alpha_k|}\right)\frac{d\xi_k}{|\alpha_k|}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\eta^p}\sum_{n=1}^{m}\int_{|\xi_n|\leq\eta}|\xi_n|^p\theta\left(\frac{\xi_n}{|\alpha_n|}\right)\frac{d\xi_n}{|\alpha_n|}=\frac{1}{\eta^p}\sum_{n=1}^{m}|\alpha_n|^p\int_{|t|\leq\frac{\eta}{|\alpha_n|}}|t|^p\theta(t)\,dt.$$

La majoration $\theta(t)\leq\beta/t^{p+1}$ donne

$$\int_{|t|\leq\frac{\eta}{|\alpha_n|}}t^p\theta(t)\,dt\leq\mathrm{Cte}\left(\left|\log\left(\frac{\eta}{|\alpha_n|}\right)\right|+1\right),$$

d'où, à la place de (5) :

$$(6)\qquad \leq\mathrm{Cte}\,\frac{1}{\eta^p}\left(1+\log\frac{1}{\eta}\right)\sum_{n=1}^{m}|\alpha_n|^p\left(1+\left|\log\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right).$$

En ajoutant (4), le terme en η, et (6), on trouve que le deuxième membre de (1) est majoré par

$$(7)\qquad \mathrm{Cte}\left[\eta+\frac{1}{\eta^p}\sum_{n=1}^{m}|\alpha_n|^p+\frac{1}{\eta^p}\left(1+\log\frac{1}{\eta}\right)\sum_{n=1}^{m}|\alpha_n|^p\left(1+\left|\log\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)\right].$$

En comparant la minoration du premier membre, et la majoration (7) du deuxième membre, on en déduit le lemme.

LEMME 2. — *Soit* $1\leq p<2$. *Il existe des constantes universelles* Λ, δ, $\Lambda>0$, $0<\delta<1$, *ayant la propriété suivante. Si* γ *est la mesure* $\theta_p(x_1)\,\theta_p(x_2)\ldots\theta_p(x_m)\,dx_1\ldots dx_m$ *sur* $\mathbf{R}^m$, *si* $(\alpha_n)_{1\leq n\leq m}$ *est une suite de nombres réels, avec* $U=\sum_{n=1}^{m}\beta_n$, *où* $\beta_n=1$ *si* $|\alpha_n|>1$, $\beta_n=|\alpha_n|^p(1+|\log(1/|\alpha_n|)|)$ *si* $|\alpha_n|\leq1$, *alors, si* $U>\Lambda$, γ *n'est pas concentrée à* δ *près sur la boule* $B_2=\left\{x\in\mathbf{R}^m;\ \sum_{n=1}^{m}|\alpha_nx_n|^p\leq1\right\}$ *de* $\mathbf{R}^m$.

Démonstration. — Considérons en effet

$$(8)\qquad J=\int_{\mathbf{R}^m}\left(1-\exp\left(-\sum_{n=1}^{m}|\alpha_nx_n|^p\right)\right)\prod_{k=1}^{n}(\theta(x_k)\,dx_k)=1-\prod_{n=1}^{m}\int_{\mathbf{R}}e^{-|\alpha_nx_n|^p}\theta(x_n)\,dx_n.$$

D'une part,

$$J=\int_{B_2}+\int_{\complement B_2}\leq1-e^{-1}+\gamma\left(\complement B_2\right),$$

de sorte que

$$(9)\qquad \gamma\left(\complement B_2\right)\geq e^{-1}-\prod_{n=1}^{m}\int_{\mathbf{R}}e^{-|\alpha_nx_n|^p}\theta(x_n)\,dx_n$$

$$=e^{-1}-\prod_{n=1}^{m}\left(1-\int_{\mathbf{R}}(1-e^{-|\alpha_nx_n|^p})\,\theta(x_n)\,dx_n\right).$$

Remplaçons $\int_{\mathbf{R}}$ par $\int_{|x_n| \leq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\alpha_n|}, 1\right)}$, et utilisons la majoration $1 - e^{-u} \geqq \mathrm{Cte}\, u$ pour $0 \leqq u \leqq 1$.

D'après la minoration $\theta(t) \geqq A/|t|^{p+1}$ pour $|t| \geqq 1$, on en tire

$$\gamma\left(\complement B_2\right) \geqq e^{-1} - \prod_{n=1}^{m} (1 - C\beta_n). \tag{10}$$

où C est une constante universelle, β_n étant comme dans l'énoncé. Ensuite, pour $0 \leqq u \leqq 1$, $1 - u \leqq e^{-u}$, d'où

$$\gamma\left(\complement B_2\right) \geqq e^{-1} - e^{-\sum_{n=1}^{m} C\beta_n} \tag{11}$$

Soit δ arbitraire $< e^{-1}$; soit $\Lambda > 0$ tel que $e^{-1} - e^{-C\Lambda} \geqq \delta$. Si alors, $U = \sum_{n=1}^{m} \beta_n > \Lambda$, on a bien $\gamma\left(\complement B_2\right) \geqq \delta$, ce qui démontre le lemme.

(*) Séance du 6 décembre 1967.

(1) Ce sont les calculs de Sazonov-Minlos étendus à $p \neq 2$. Pour $p = 2$, θ_2 décroît beaucoup plus vite à l'infini (elle est elle-même gaussienne), ce qui fait qu'il n'y a pas de terme en $\log(1/|\alpha_n|)$ dans la théorie usuelle pour $p = 2$.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris,* 5e.)